Karoline Albertine Johansen Svea

Matematisk fleksibilitet i læreverk

En casestudie om regnestrategier for subtraksjon i DragonBox Skole 3

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 1.-7. trinn
Veileder: Solomon Tesfamicael
Medveileder: Eivind Kaspersen
Mai 2024

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Karoline Albertine Johansen Svea

Matematisk fleksibilitet i læreverk

En casestudie om regnestrategier for subtraksjon i DragonBox Skole 3

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 1.-7. trinn
Veileder: Solomon Tesfamicael
Medveileder: Eivind Kaspersen
Mai 2024

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Matematisk fleksibilitet i læreverk

En casestudie om regnestrategier for subtraksjon i DragonBox Skole 3

Sammendrag

I denne masteroppgaven har jeg sett på hvordan læreverket DragonBox Skole 3 legger til rette for matematisk fleksibilitet innenfor regneoperasjonen subtraksjon. Matematisk fleksibilitet vil i denne studien si å ha kunnskap om ulike regnestrategier og kunne velge den mest hensiktsmessige regnestrategien ut fra hvilken oppgave som skal løses (Newton et al., 2020; Selter, 2009; Torbeyns et al., 2009; Verschaffel et al., 2009). Jeg har valgt å legge vekt på matematisk fleksibilitet innad i læreverk, da lærere ofte velger å ta utgangspunkt i læreverket da de legger opp sin egen undervisning (Haggarty & Pepin, 2002; Valverde et al., 2002). Det vil si at læreverket har stor makt over hvilke matematikkoppgaver som elevene møter i sin skolehverdag. Datamaterialet i denne masteroppgaven er DragonBox Skole, som er et multimodalt læreverk for 1.-4. trinn. DragonBox Skole ble i hovedsak valgt da det er et voksende læreverk i den norske skolen, hvor det har varierte matematikkoppgaver både i oppgavebøker og på app (DragonBox, 2024). Hensikten med oppgaven er å få større bevissthet rundt hvordan DragonBox Skole legger opp til utvikling av matematisk fleksibilitet, og derav hva som samsvarer med teori rundt oppgavedesign og hva som eventuelt bør forbedres.

Studiens overordnede problemstilling ble derfor som følge: *På hvilken måte legger DragonBox Skole opp til utvikling av matematisk fleksibilitet innenfor subtraksjon?*

Studien ble gjennomført som en kvalitativ casestudie hvor jeg brukte innholdsanalyse for å analysere læreverket DragonBox Skole. Jeg har tatt utgangspunkt i rammeverket til Lemaire & Siegler (1995) som presenterer de fire aspektene *strategirepertoar, strategidistribusjon, strategieffektivitet* og *strategivalg*. Disse fire aspektene beskriver områder innenfor matematisk fleksibilitet som kan føre til utvikling og forbedring blant elevene (Lemaire & Siegler, 1995; Sievert, van den Ham, et al., 2019).

Funnene viser blant annet at DragonBox Skole legger opp til en relasjonell forståelse innenfor subtraksjon ved at læreverket bare introduserer regnestrategier som tar utgangspunkt i hele tallet. Det vil si at strategirepertoaret til læreverket bygger på en tallforståelse hvor elevene hele tiden tar hensyn til plassverdien til tallene (Skemp, 1976). Dette funnet samsvarer med matematikkdidaktikk knyttet til utvikling av matematisk fleksibilitet (Newton et al., 2020; Verschaffel et al., 2009). Videre viser studien at læreverket også legger opp til bruk av ulike representasjonssystemer, som igjen bidrar til økt matematisk fleksibilitet blant elevene (Selter, 2009). Funn som ikke samsvarer med teori bak utvikling av matematisk fleksibilitet er ulik strategidistribusjon og for lite eksplisitt introduksjon av de ulike regnestrategiene.

Videre identifiserer jeg et behov for forskning som sammenligner hvordan ulike læreverk legger til rette for utvikling av matematisk fleksibilitet. Matematisk fleksibilitet er en viktig del av elevers læring i matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet, 2019; Newton et al., 2020; Rittle-Johnson et al., 2012; Verschaffel et al., 2009), og det er derfor viktig å ha god kunnskap om hvor stor kvalitet de ulike læreverkene har på dette fagområdet.

Abstract

In this master´s theses, I have looked at how the textbook DragonBox Skole 3 facilitates mathematical flexibility within subtraction. In this study, mathematical flexibility is defined as having knowledge of different strategies and being able to choose the most appropriate strategy based on the task to be solved (Newton et al., 2020; Selter, 2009; Torbeyns et al., 2009; Verschaffel et al., 2009). I have chosen to look into mathematical flexibility within textbooks, as teachers often choose tasks from the textbooks when setting up their own teaching (Haggarty & Pepin, 2002; Valverde et al., 2002). This means that the textbooks have great influence over which mathematical tasks the pupils encounter at school. The textbook I have researched is DragonBox Skole, which is a multimodal learning tool for 1st-4th grade. DragonBox Skole was mainly chosen because it is becoming a popular textbook in Norwegian schools, and because it contains various mathematical tasks (DragonBox, 2024). The purpose of this study is to gain greater awareness of how DragonBox Skole develops mathematical flexibility among pupils.

The study's overall research problem is therefore: *In what way does DragonBox Skole develop mathematical flexibility within subtraction?*

The study was conducted as a qualitative case study where I used content analysis to analyze the textbook DragonBox Skole. I have used the framework of Lemaire & Siegler (1995), which presents the four aspects of *strategy repertoire*, *strategy distribution*, *strategy efficiency* and *strategy choice*. These four aspects describe areas within mathematical flexibility that can lead to development and improvement among pupils (Lemaire & Siegler, 1995; Sievert et al., 2019).

The findings show, among other things, that DragonBox Skole sets up a relational understanding within subtraction since the textbook only introduces strategies that use the whole number. The strategy repertoire of the textbook is based on an understanding of numbers where students constantly consider the place value of the numbers (Skemp, 1976). Therefore, the finding is consistent with mathematics didactics linked to the development of mathematical flexibility (Newton et al., 2020; Verschaffel et al., 2009). Furthermore, the study shows that the textbook also provides different representation systems, which in turn contributes to increased mathematical flexibility among pupils (Selter, 2009). Findings that do not correspond to the theory behind the development of mathematical flexibility, are different strategy distribution and not enough explicit introduction of the various strategies.

Furthermore, I identify a need for research that compares how different textbooks facilitate the development of mathematical flexibility. Mathematical flexibility is an important part of pupils' learning in mathematics (Kunnskapsdepartementet, 2019; Newton et al., 2020; Rittle-Johnson et al., 2012; Verschaffel et al., 2009), and it is therefore important to have a good knowledge of the quality of the various textbooks in this subject area.

Forord

Jeg har skrevet denne masteroppgaven som en avslutning på et 5 år langt studieløp på Grunnskolelærerutdanninga 1.-7. trinn ved NTNU. Det har vært krevende å kombinere et studieløp med familie og tre små barn, men jeg ser med glede tilbake på hvor mye jeg har lært og utviklet med gjennom denne perioden.

Jeg vil gjerne takke min veileder for gode refleksjoner og tilbakemeldinger gjennom hele skriveprosessen. Du har vært fleksibel og tatt imot mine ideer med åpne armer. I tillegg vil jeg takke familie og venner som har støttet meg gjennom hele utdannelsen, og spesielt nå i innspurten på masteroppgaven. Deres gode ord og oppmuntringer har vært til stor hjelp i en hektisk hverdag. Tusen takk!

Mai, 2024
Karoline Albertine Johansen Svea

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema – matematisk fleksibilitet

Utvikling av matematisk fleksibilitet er en viktig del av elevers læring i matematikk (Newton et al., 2020; Rittle-Johnson et al., 2012; Verschaffel et al., 2009). Matematisk fleksibilitet handler om evnen til å bytte mellom ulike strategier på en hensiktsmessig måte (Verschaffel et al., 2009), og forskere argumenterer for at det å kunne bytte mellom ulike regnestrategier er essensielt innenfor problemløsning (De Smedt et al., 2010; Nemeth et al., 2019; Rittle-Johnson et al., 2012; Verschaffel et al., 2009). I nåværende læreplan (LK20) er det eksplisitt beskrevet hvor viktig problemløsning er både i kjerneelementene og direkte i kompetansemålene. Det står blant annet at elevene skal utvikle metoder for å løse problemer som de ikke vet svaret på, samt ha større fokus på de ulike strategiene enn på løsningene. I tillegg står det at elevene skal kunne utvikle og bruke hensiktsmessige strategier (Kunnskapsdepartementet, 2019). Et slikt fokus understøttes av forskning, som har vist at det å utvikle hensiktsmessige regnestrategier, altså å utvikle matematisk fleksibilitet, er essensielt når elever skal lære seg matematikk (Newton et al., 2020; Verschaffel et al., 2009). Evnen til å konstruere egne strategier og være matematisk kreativ, altså å kunne se flere løsninger, sammenligne dem og se hvilken løsning som passer best, er grunnleggende i matematisk utvikling (Verschaffel et al., 2009).

Ifølge Newton et al. (2020) er matematisk fleksibilitet grunnleggende på barneskolen idet det fremmer læring med forståelse. Læring med forståelse er et undervisningsmål som norsk skole satser på i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det vil si at pugging av algoritmer ikke anses som like meningsfullt og lærerikt for elevene, og at man som lærer skal strebe etter å få elevene til å forstå hvorfor man gjennomfører de ulike stegene i regneoperasjonene (Newton et al., 2020). Det vil si at tallene og stegene skal gi mening for elevene, noe som samsvarer med det Skemp (1976) beskriver som relasjonell forståelse. Relasjonell forståelse betyr at elevene skal se sammenhengen og meningen bak den regnestrategien de velger å bruke, og kunne se hvordan de ulike regnestrategiene er koblet sammen. Relasjonell forståelse står i motsetning til instrumentell forståelse, hvor man jobber med algoritmer for å kunne få rett svar, uten å ha fokus på sammenheng (Skemp, 1976). Ved at tallene og stegene gir mening, vil elevene være i stand til å se større sammenhenger, kunne sammenligne ulike regnestrategier og på den måten kunne jobbe kreativt og fleksibelt med matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet, 2019; Newton et al., 2020).

Matematisk fleksibilitet har som sagt fått en essensiell rolle i den norske læreplanen, samtidig som at det er et dagsaktuelt tema i den internasjonale matematikkdidaktikken. Dette er bakgrunnen for mitt valg om å skrive masteroppgave om nettopp matematisk fleksibilitet. Videre vil jeg argumentere for hvorfor jeg har valgt å avgrense oppgaven til å handle om matematisk fleksibilitet innad i læreverk.

1.2 Studiens relevans - matematisk fleksibilitet i læreverk

Forskning indikerer at matematiske læreverk er med på å påvirke elevers utvikling av matematisk fleksibilitet (Mabbot & Bisanz, 2003; Sievert, van den Ham, et al., 2019; Verschaffel et al., 2009). Det vil si at formen på oppgavene og oppsettet i læreverkene potensielt kan bidra til større læringsutbytte for elevene (Mabbot & Bisanz, 2003). Læreverk introduserer ofte regnestrategier i en bestemt rekkefølge, og lærere har en tendens til å gi elevene de oppgavene som står i det matematiske læreverket skolen har tilgang til (Sievert, van den Ham, et al., 2019). Det vil si at læreverket ofte bestemmer hvordan lærerne legger opp undervisningen. Dersom oppgavene og regnestrategiene læreverket introduserer legger vekt på rutine, vil det kunne skape en instrumentell fremfor en relasjonell forståelse. Jones & Pepin (2016) viser at matematikkoppgaver i tillegg påvirker hvordan elever *opplever* matematikk. Oppgavene kan gi elevene større læringsmulighet, samtidig som de kan være med på å begrense elevenes forståelse av matematikkfaget. På denne måten er også de matematiske læreverkene med på å forme hva elevene tenker at matematikk er (Jones & Pepin, 2016).

Det finnes dog lite forskning på hvordan læreverk *legger til rette* for utvikling av matematisk fleksibilitet (Mabbot & Bisanz, 2003). Det er gjort noe forskning om hvordan matematisk fleksibilitet kommer til uttrykk i læreverk (Sievert, van den Ham, et al., 2019; Verschaffel et al., 2009), men ettersom nye læreverk stadig utvikles er dette et område hvor det fortsatt er behov for nye undersøkelser. Som nevnt spiller læreverk i tillegg en rolle for hvordan lærere legger opp matematikkundervisningen (Jones & Pepin, 2016), og det er derfor hensiktsmessig for dem å vite på hvilken måte ulike læreverk legger til rette for matematisk fleksibilitet. Ved å forske på matematisk fleksibilitet i læreverk, ønsker jeg i denne studien å belyse læreverkets posisjon og makt til å forme undervisningen elevene mottar. Videre i oppgaven vil jeg beskrive hvorfor jeg har valgt å avgrense studien til å handle om regnestrategier i subtraksjon innenfor læreverket DragonBox Skole 3.

1.3 Subtraksjon innenfor læreverket DragonBox Skole 3

Læreverket jeg har valgt å undersøke i denne masteroppgaven er DragonBox Skole. DragonBox Skole er et læreverk innenfor matematikk for 1.-4. trinn og blir brukt av stadig flere skoler innenfor det norske skolevesenet (DragonBox, 2024). Læreverket er multimodalt, og har både egen app, egne konkreter, arbeidsbøker og problemløsningsbøker. Produsentene av DragonBox Skole argumenterer for at læreverket gjør matematikken levende og at læringsutbyttet av den grunn blir større. De skriver at læreverket har fokus på tallforståelse, gode regnestrategier og problemløsning (DragonBox, 2024).

En av grunnene til at jeg har valgt å studere DragonBox Skole, er hvordan produsentene eksplisitt fremhever at de har fokus på problemløsning og regnestrategier (DragonBox, 2024). Begge disse begrepene står sentralt i elevers utvikling av matematisk fleksibilitet (Newton et al., 2020; Rittle-Johnson et al., 2012; Verschaffel et al., 2009), samtidig som at de står sterkt i den norske læreplanen i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019). Læreverket har i tillegg flere ulike læringsressurser, som igjen gir mulighet til å få flere ulike tilnærminger til det matematiske innholdet (Valverde et al., 2002). En annen grunn til at jeg har valgt å studere DragonBox Skole er fordi produsenten hevder at det er et læreverk som raskt har kommet inn i norsk skole, samtidig som at det har blitt et populært læreverk i blant annet Finnland (Dragonbox, 2018). Finlands skolesystem får internasjonal annerkjennelse for sin matematikkdidaktikk og undervisningsmetodene som lærerne bruker blir ansett som svært gode (Ustun & Eryilmaz, 2018). Jeg syns derfor at DragonBox Skole er et interessant læreverk å studere i forbindelse med utvikling av matematisk fleksibilitet. Andre læreverk som også brukes i norsk skole er blant annet Matemagisk fra Aschehoug Undervisning, Multi fra Gyldendal og Matematikk fra Cappelen. Jeg anser det som relevant å studere flere læreverk i videre forskning, men har likevel valgt bort disse læreverkene i denne masterstudien da det ville gått utover omfanget til en mastergrad i denne størrelsesorden.

I tillegg til å begrense masteroppgaven min til læreverket DragonBox Skole, har jeg valgt å begrense studien til å se på regnestrategier innenfor subtraksjon på 3. trinn. Grunnen til at jeg har valgt å se på subtraksjon på 3. trinn, er at det er en regneoperasjon som elevene da har jobbet med i over to år allerede. Det vil si at de allerede har fått erfaring med å løse subtraksjonsoppgaver, og jeg anser at elevene derfor har større forutsetning til å tenke kreativt gjennom utforskning og problemløsning. Newton et al. (2020) har vist at det er viktig å arbeide med fleksible regnestrategier tidlig i skoleløpet. Det vil derfor være både hensiktsmessig og aktuelt å studere hvordan læreverk legger til rette for matematisk fleksibilitet på småskolen. I tillegg kommer subtraksjon med flersifrede tall inn i læreplanen etter 3. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det vil med andre ord si at de fleste elevene blir introdusert for regnestrategier som passer til subtraksjon med flersifrede tall i løpet av 3. trinn. Å forske på subtraksjon på 3. trinn vil derfor gi informasjon om hvordan man legger til rette for fleksible regnestrategier for de yngre elevene.

1.4 Forskningsspørsmål

Siden forskning har vist at det er hensiktsmessig å se på hvordan læreverk påvirker elevers utvikling av matematisk fleksibilitet (Mabbot & Bisanz, 2003; Newton et al., 2020; Sievert, van den Ham, et al., 2019; Verschaffel et al., 2009), har jeg i denne studien laget følgende overordnede forskningsspørsmål som handler om nettopp dette innenfor læreverket DragonBox Skole:

På hvilken måte legger DragonBox Skole til rette for at elever på 3. trinn skal utvikle matematisk fleksibilitet innenfor subtraksjon?

For å besvare det overordnede forskningsspørsmålet, må en ha kunnskap om hva det vil si å legge til rette for matematisk fleksibilitet. I tillegg må en vite hvordan matematisk fleksibilitet kommer til uttrykk i læreverk. Av den grunn har jeg valgt å lage flere konkrete underspørsmål som har hjulpet meg med å definere hva jeg skal sette søkelys på i studien. Flere forskere har framhevet de fire aspektene *strategirepertoar, strategidistribusjon, strategieffektivitet* og *strategivalg* som elementer innenfor utvikling av matematisk fleksibilitet (Hickendorff, 2020; Lemaire & Siegler, 1995; Verschaffel et al., 2009). Jeg har derfor valgt å bruke disse begrepene som utgangspunkt for mine konkrete underspørsmål.

Strategirepertoar handler om hvilke regnestrategier elevene har kunnskap om (Lemaire & Siegler, 1995), og jeg har derfor brukt det første underspørsmålet til å kartlegge ulike regnestrategier som læreverket DragonBox Skole introduserer for elevene. Matematisk fleksibilitet handler om evnen til å kunne bytte mellom ulike regnestrategier på en hensiktsmessig måte (Newton et al., 2020; Verschaffel et al., 2009), og det vil derfor være gunstig å kartlegge hvilke regnestrategier elevene blir introdusert for. Det første underspørsmålet lyder derfor som følger:

1. *Hvilke regnestrategier for subtraksjon introduserer læreverket DragonBox Skole 3?*

Det andre underspørsmålet tar for seg aspektet *strategidistribusjon*, som handler om hvordan de ulike regnestrategiene blir vektlagt i forhold til hverandre. Elevene har en tendens til å foretrekke de regnestrategiene som blir vektlagt mest, og det er derfor hensiktsmessig å ha en jevn fordeling av regnestrategier (Lemaire & Siegler, 1995). Det andre underspørsmålet er derfor:

2. *Hvor stor del av læreverket opptar de ulike regnestrategiene?*

Det tredje underspørsmålet retter fokus mot hvor mye erfaring elevene får i å bruke de ulike regnestrategiene. *Strategieffektivitet* handler om hvor nøyaktig og effektivt elevene gjennomfører de ulike regnestrategiene (Lemaire & Siegler, 1995). I læreverk handler strategieffektivitet om antall oppgaver elevene gjør innenfor hver regnestrategi (Sievert, van den Ham, et al., 2019). Det tredje underspørsmålet er:

3. *Hvor mange oppgaver legger DragonBox Skole opp til innenfor hver enkelt regnestrategi?*

Til slutt vil jeg rette fokus på strategivalg, altså hvordan de ulike regnestrategiene blir introdusert i læreverket (Sievert, Ham, et al., 2019). Ved å synliggjøre sammenhengen mellom de ulike regnestrategiene gjennom for eksempel sammenligningsoppgaver, vil elevene få større mulighet til å kunne se både fordeler og ulemper ved de ulike regnestrategiene. Det siste underspørsmålet handler derfor om hvordan læreverket er utformet i form av hvilken rekkefølge regnestrategiene blir presentert, hvilke oppgavetyper som blir presentert, samt hva som blir brukt som visuell støtte til de ulike regnestrategiene:

4. *Hvordan underviser DragonBox Skole 3 de ulike regnestrategiene?*

Til sammen vil disse fire underspørsmålene belyse mitt forskningsspørsmål om hvordan DragonBox Skole 3 legger til rette for utvikling av matematisk fleksibilitet. De fire aspektene jeg har tatt utgangspunkt i vil bli nærmere beskrevet under teorikapittelet senere i masteroppgaven. I det følgende vil jeg presentere hvordan oppgaven er strukturert.

1.5 Oppgavens oppbygning

Jeg har valgt å strukturere oppgaven i seks delkapitler; innledning, teori, metode, analyse, drøfting og konklusjon. I teorikapittelet vil jeg først beskrive oppgavedesign i matematikk, gi nærmere definisjon av forskjellige tolkninger av begrepene adaptivitet og fleksibilitet, samt presentere teori rundt hvordan man kan legge til rette for matematisk fleksibilitet i læreverk. Jeg vil spesifikt beskrive rammeverket til Lemaire & Siegler (1995), som tar utgangspunkt i de fire aspektene *strategirepertoar, strategidistribusjon, strategieffektivitet* og *strategivalg* som elementer innenfor utvikling av matematisk fleksibilitet. I siste del av teorikapittelet vil jeg ta for meg hvilken rolle læreverk har i skolen, og beskrive tidligere forskning rundt hvordan læreverk legger til rette for matematisk fleksibilitet. I metodekapittelet vil jeg forklare hvordan min studie har tatt utgangspunkt i det fortolkende paradigmet, før jeg deretter vil beskrive casestudie, innholdsanalyse og hvordan jeg har brukt disse metodene for å besvare forskningsspørsmålene mine. I tillegg vil jeg gå inn på studiens validitet og reliabilitet, samt gjøre rede for hvilke etiske utfordringer jeg har møtt i arbeidet med denne masteroppgaven. Videre vil jeg i resultatkapittelet presentere hovedfunnene fra min analyse, samt komme med konkrete eksempler fra læreverket Dragonbox Skole strukturert etter Lemaire & Sieglers (1995) fire aspekter. I diskusjonskapittelet drøfter jeg hovedfunnene mine opp mot teorien for å kunne reflektere rundt sammenhenger og relevante tolkninger. Jeg vil også argumentere for hva det bør forskes videre på og hvilke implikasjoner resultatene av studien kan ha for valg og utvikling av læreverk som fremmer matematisk fleksibilitet.

2 Teori

Jeg har valgt å forankre min masteroppgave i tidligere forskning som igjen vil danne grunnlaget for min analyse og drøftingsdel. Teorien jeg har valgt er basert på studiens forskningsspørsmål hvor jeg ønsker å se på hvordan DragonBox Skole legger til rette for utvikling av matematisk fleksibilitet. For å svare på forskningsspørsmålene, vil jeg beskrive teori rundt oppgavedesign i matematikk, før jeg deretter vil se på hvordan jeg i denne oppgaven definerer begrepet matematisk fleksibilitet. Jeg har basert min definisjon på hvordan andre innenfor det matematiske fagmiljøet har tolket begrepet. Deretter vil jeg se på hvordan oppgavens karakteristikker er med på å påvirke elevers evne til å utvikle matematisk fleksibilitet, før jeg gir en nærmere beskrivelse av rammeverket til Lemaire & Siegler (1995). Til slutt vil jeg presentere tidligere forskning på matematisk fleksibilitet i læreverk.

2.1 Oppgavedesign i matematikk

Matematikkoppgaver har stor påvirkning på elevenes motivasjon for matematikkfaget og hva elevene faktisk lærer. Som lærer er det derfor viktig å være bevisst hvilken rolle valg av matematikkoppgaver har for elevene (Kieran et al., 2013). Et eksempel kan være at elever enten kan oppfatte matematikk som et memoreringsfag hvor det er viktig å pugge prosedyrer og tallfakta, eller et logisk fag hvor det viktigste er å resonnere seg fram til mulige løsninger. Oppgavedesign i matematikk handler om å skape effektiv undervisning og læring for elever (Watson & Ohtani, 2015). Det har blitt større fokus på oppgavedesign i den senere tid, og Watson & Ohtani (2015) argumenterer for at oppgavedesign blant annet kan sees fra et kognitivt perspektiv. Det kognitive perspektivet innenfor oppgavedesign handler i følge dem om hvordan oppgavens innhold former elevens læring (Watson & Ohtani, 2015). Det vil si at ulike oppgaver stiller ulike kognitive krav. Eksempelvis vil oppgaver som baserer seg på memorering ha lavere kognitive krav enn oppgaver som for eksempel spør etter sammenheng og sammenligning. Elever utvikler større matematisk forståelse gjennom oppgaver som har høye kognitive krav enn oppgaver som har lave kognitive krav (Hiebert et al., 2003; Watson & Ohtani, 2015).

Målet med matematikkoppgaver med høye kognitive krav er å utfordrere elevenes resonneringsevne og hvordan elevene forstår selve matematikken som ligger i oppgaven. Dette kan være å se sammenhenger mellom ulike måter å representere matematikken, kunne velge effektive og nøyaktige regnestrategier eller stille krav til argumentasjon og bevis (Boaler, 1998). For å utvikle oppgaver som har høye kognitive krav, kan man ha fokus på den matematiske forståelsen for prosedyrer, begreper og relasjoner. Eksempelvis kan man istedenfor å jobbe med tilfeldige regnestykker, bygge forståelse for regnestrategien gjennom oppgavestrenger. Oppgavestrenger er flere relaterte matematikkoppgaver som har til hensikt å fremme egenskaper ved en gitt regnestrategi ved å systematisk forandre på tallene regnestykkene består av (Valenta, 2016). Gjennom en slik inngang til matematikken, vil elevene kunne se og diskutere sammenhengene mellom de ulike regnestykkene med hverandre og bli mer bevisste og fleksible i sin matematiske tenkning.

Matematikkoppgaver kan kategoriseres på flere ulike måter. Ofte blir oppgavene strukturert etter åpne eller lukkede matematikkoppgaver. De åpne matematikkoppgavene er oppgaver hvor det er mulig å finne flere ulike fremgangsmåter for å komme frem til det riktige svaret, mens de lukkede matematikkoppgavene viser til en spesifikk måte å finne løsningen på (Boaler, 1998). Det vil si at elevene kan utforske forskjellige regnestrategier i de åpne oppgavene, mens læreverket kan bruke lukkede matematikkoppgaver for å beskrive nye regnestrategier for elevene. Problemløsningsoppgaver er en form for åpen matematikkoppgave. Dette er oppgaver hvor elevene ikke får undervisning i hvilken fremgangsmåte de skal bruke, og må selv finne ut hvilken informasjon som er nødvendig for å løse oppgaven. Problemløsningsoppgaver er fine samarbeidsoppgaver da de krever en del resonnering og vil derfor stille høyere kognitive krav enn lukkede matematikkoppgaver (Boaler, 1998). Gjennom samarbeid vil elevene ha større mulighet for å se problemet fra forskjellige synsvinkler, og derav ha større sjanse for å komme fram til en eller flere mulige løsninger (Boaler, 1998; Torbeyns et al., 2009).

Som visuell støtte bruker læreverk å inkludere ulike modeller for å illustrere sammenhengen for elevene (Valverde et al., 2002). To modeller som er mye brukt innenfor subtraksjon er mengdemodell og åpen tallinje. Mengdemodell visualiserer det totale antallet hvor elevene kan sette strek eller kryss over det antallet de ønsker å ta bort. På den måten får elevene et konkret bilde av hvor mye se sitter igjen med. Åpen tallinje brukes også for at elevene skal få en modell for tanken. Her kan elevene hoppe fram og tilbake på tallinjen og få et visuelt bilde over hvor tallene ligger i forhold til hverandre. Målet med de ulike modellene er å bruke dem som verktøy for å støtte elevenes mentale strategier (Boulton-Lewis et al., 1996). Bobis & Bobis (2005) poengterer at åpen tallinje krever god faglig matematikkunnskap fra læreren som introduserer modellen. Dyktige matematikklærere forstår hvordan elevene lærer seg matematikk og derav hvordan de skal introdusere den tomme tallinjen som visuell støtte til de ulike regnestrategiene (Bobis & Bobis, 2005).

2.2 Matematisk fleksibilitet

I denne masteroppgaven har jeg valgt å bruke begrepet *matematisk fleksibilitet* som en samlebetegnelse som favner både *fleksibilitet* og adaptivitet – begreper jeg gjør rede for i det følgende.

Innenfor det matematiske fagfeltet kan fleksibilitet defineres på forskjellige måter. En måte å definere fleksibilitet på er evnen til å bruke alle strategiene man har kunnskap om. Det betyr ikke nødvendigvis at man bytter til en strategi som er mer hensiktsmessig, men at man *kan* bytte mellom ulike strategier (Torbeyns et al., 2009). Et eksempel er hvis en elev har kunnskap om tre ulike regnestrategier for subtraksjon og benytter samtlige regnestrategier når hen jobber med en regneoperasjon. Selv om eleven bytter strategi, er byttene tilfeldige, og eleven tar ikke utgangspunkt i for eksempel hvilke tall regneoppgaven består av for å velge den mest hensiktsmessige strategien. Det vil med andre ord si at eleven ikke er adaptiv.

Adaptivitet handler om evnen til å velge en passende regnestrategi slik at man jobber både effektivt og nøyaktig når man løser en oppgave (Torbeyns et al., 2009). Eksempelvis vil en elev være adaptiv dersom hen velger den strategien som passer best til den matematikkoppgaven hen skal løse. Selter (2009) definerer adaptivitet som «... evnen til å kreativt utvikle eller fleksibelt velge og bruke en hensiktsmessig løsningsstrategi på en (u)bevisst måte på et gitt matematisk problem, for et gitt individ, i en gitt sosiokulturell kontekst» (min oversettelse) (Selter, 2009 s. 624). Denne definisjonen er en videreutvikling av definisjonen til Verschaffel et al. (2009), som også tar for seg hvordan problemets egenart, individuelle forskjeller samt den sosiokulturelle konteksten har betydning for elevenes adaptivitet (Verschaffel et al., 2009). Ifølge disse definisjonene er det altså flere faktorer som påvirker barns matematiske fleksibilitet.

Til tross for at man, som vist ovenfor, kan finne forskjeller i de to begrepene, omtaler i dag deler av det matematiske fagfeltet begrepene fleksibilitet og adaptivitet som synonymer (Lemonidis & Likidis, 2021; Selter, 2009; Verschaffel et al., 2009), og det er også slik jeg har valgt å forholde meg til begrepet matematisk fleksibilitet i denne masteroppgaven. Det vil si at jeg tolker matematisk fleksibilitet som bestående av både subjektive karakteristikker, undervisningen og oppgavens karakteristikker. Videre anser jeg at disse elementene sammen er med på å bestemme hvilke regnestrategier elevene benytter seg av. Siden mitt fokus er på læreverk, og altså oppgavene i slike læreverk, ønsker jeg i neste delkapittel å gå nærmere inn på matematikkoppgavers karakteristikker.

2.2.1 Oppgavens karakteristikker for utvikling av matematisk fleksibilitet

Oppgavens karakteristikker, altså hvordan oppgaven presenteres og hvilke tall som blir brukt, vil være en del av det som bestemmer hvilke regnestrategier barn vil bruke for å løse oppgaven (Hickendorff, 2018). Dersom man er matematisk fleksibel så vil man velge den regnestrategien som passer oppgaven best (Verschaffel et al., 2009), og ofte vil enkelte strategier passe bedre til enkelte tall enn andre. Et eksempel er hvordan kompensasjonsstrategien egner seg godt til flersifrede subtraksjonsstykker, hvor bakerste siffer enkelt kan rundes opp eller ned til et rundt tall (Torbeyns et al., 2009). Hvilke tall oppgaven består av bør derfor være med på å påvirke hvilken regnestrategi elevene velger å bruke for å løse oppgaven (Hickendorff, 2018). Kompensasjonsstrategien er videre utdypet på side 15 under delkapittel *strategirepertoar*.

I en matematikkoppgave har også oppgavens formulering noe å si for hvilken regnestrategi elever velger å bruke (Hickendorff, 2018). I en kontekstoppgave vil ordene som er brukt påvirke hvordan elever tolker oppgaven, og som konsekvens påvirke hvilken regnestrategi de velger. Dersom en oppgave spør elevene om å finne svaret, vil mange av elevene relativt ubevist velge en regnestrategi og utføre oppgaven. Dersom oppgaven imidlertid spør elevene om å løse oppgaven på flere forskjellige måter, samt sammenligne og begrunne hvilken regnestrategi som passer best, vil elevene bli mer bevisste på hvilke fordeler og ulemper de ulike regnestrategiene har. Matematikkoppgaver hvor elevene får utforsket, sammenlignet og begrunnet sitt strategivalg vil derfor være effektive for å utvikle elevenes matematiske fleksibilitet (Torbeyns et al., 2009).

I tillegg argumenterer Johnson et al. (2017) for at det er utilstrekkelig å definere en oppgavekontekst som en situasjon gitt i et problem. De hevder at den subjektive opplevelsen elevene får av oppgaven er vesentlig, og at det er umulig å skille oppgavekonteksten fra elevenes egne tolkninger av oppgaven. Det vil med andre ord si at kontekst er avhengig av elevenes subjektive tolkning, som blant annet er hvilke erfaringer elevene har fra før. Av den grunn kan elevene ha forskjellige mål og innfallsvinkler, selv om de jobber med nøyaktig samme oppgave. Målene elevene jobber ut ifra trenger heller ikke å samsvare med de målene som oppgavedesignerne eller lærerne har ved å gjennomføre oppgaven (Johnson et al., 2017). Av den grunn vil også oppgavekonteksten ha betydning for elevens evne til å ta effektive strategivalg. Margolinas (2013) fremhever at oppgavedesignere ofte kan anta at elevene lærer den tiltenkte matematikken ved å fullføre oppgavene som hører til. Likevel er det ingen direkte relasjon mellom det å fullføre de matematiske oppgavene og matematisk læring (Margolinas, 2013). Et eksempel kan være at selv om elevene jobber med en matematikkoppgave som er ment for å stimulere til matematisk fleksibilitet, så betyr det ikke at alle elevene som fullfører oppgaven vil utvikle sin matematiske fleksibilitet.

Likevel er det viktig å stimulere til matematisk fleksibilitet gjennom valg av oppgaver. Det er viktig å variere både tallene, konteksten og representasjonssystemet (Selter, 2009). Representasjonssystem viser til ulike måter å kunne representere det matematiske objektet, for eksempel gjennom symboler, diagrammer, tegninger eller språk (Duval, 2006). Duval (2006) mener at det å kunne bytte mellom ulike representasjonssystem er en av de viktigste kompetansene for å fremme matematisk forståelse. Videre påpeker Selter (2009) at det er hensiktsmessig for elevene å dele strategier med hverandre og eksplisitt jobbe med å bruke og sammenligne ulike strategier (Selter, 2009). Ved å legge opp til oppgaver hvor elevene aktivt jobber med hvilke fordeler og ulemper de ulike regnestrategiene har, vil elevene bli mer bevisste på hvilke strategier som passer til de ulike oppgavetypene. En annen fremgangsmåte er å gi elevene i oppgave om å lage regneoppgaver som passer til ulike regnestrategier. På den måten tar elevene utgangspunkt i de ulike regnestrategiene, og vil se hvilke egenskaper regnestrategiene fremhever basert på hvilke tall man velger å bruke (Selter, 2009). En elev som for eksempel har fått i oppgave å lage en regneoppgave hvor det er hensiktsmessig å bruke kompensasjonsstrategien (som blir nærmere forklart i delkapittelet *strategirepertoar*), vil fort innse at det er lurt å bruke tall som ligger nært et rundt tall. Slik vil eleven kunne oppdage hvilke egenskaper ved tallene som passer til de ulike regnestrategiene. I tillegg viser forskning at jo bedre en elev blir på å bruke en strategi, jo mer vil den eleven velge den strategien hen er flinkest til (Selter, 2009). I praksis så vil det si at elever kan bli mindre adaptive ved å lære seg regnestrategiene bedre. Av den grunn er det viktig å vekte de ulike oppgavene og de ulike regnestrategiene likt i læreverk, slik at elevene ikke bare blir gode til å bruke én regnestrategi, men flere forskjellige.

2.3 Rammeverk – fire aspekter innenfor utvikling av matematisk fleksibilitet

I denne masteroppgaven har jeg målt kvaliteten på de læringsmulighetene læreverket DragonBox Skole legger opp til for utvikling av matematisk fleksibilitet innenfor subtraksjon. For å måle kvaliteten på læringsmulighetene, har jeg valgt å ta utgangspunkt i Lamaire & Siegler (1995) sitt rammeverk som beskriver fire aspekter av strategisk endring innenfor arbeid med regnestrategier som fører til utvikling og forbedring av elevers matematiske fleksibilitet. De hevder for at endring i bare én av aspektene vil føre til en generell forbedring av elevers effektivitet og nøyaktighet når de løser matematikkoppgaver (Lamaire & Siegler, 1995). Det vil si at de fire aspektene ikke er avhengig av hverandre for å kunne føre til større læringsutbytte for elevene. For eksempel vil økt strategirepertoar alene bidra til større matematisk fleksibilitet blant elevene. For å kunne bruke dette rammeverket for å analysere læreverk, har jeg, i likhet med Sievert et. al. (2019), modifisert de fire aspektene. Videre vil jeg presentere de fire aspektene; *strategirepertoar, strategidistribusjon, strategieffektivitet* og *strategivalg.*

2.3.1 Strategirepertoar

Det første aspektet kalles *strategirepertoar* og viser til hvilken kunnskap elevene har om ulike regnestrategier. Ofte vil elevene bruke flere ulike strategier i samme tidsperiode, basert på hvilket problem som skal løses og hvilken kontekst elevene skal løse det i. I tillegg er det vanlig at når elevene tilegner seg nye, mer effektive strategier, vil de samtidig forkaste de gamle strategiene. Dette gjelder spesielt hvis de gamle strategiene blir ineffektive og tungvinte for elevene å bruke (Lamaire & Siegler, 1995). Et eksempel kan være at elever bruker fingrene med å telle seg nedover i enkle subtraksjonsstykker. Denne strategien blir tungvint dersom elevene skal gjennomføre subtraksjon med flersifrede tall, og vil på slike regnestykker være uhensiktsmessig å bruke. Ved å ha kunnskap om mer egnede regnestrategier, vil elevene jobbe mer effektivt og nøyaktig. For eksempel kan elevene ha kunnskap om strategien å dele opp i tiere og enere, og dermed regne ut 57 − 33 på følgende måte:

$$57 - 33$$
$$50 - 30 = 20$$
$$7 - 3 = 4$$
$$57 - 33 = 24$$

Det første underspørsmålet mitt fordrer en kartlegging av hvilke regnestrategier innenfor subtraksjon elevene blir introdusert for i DragonBox Skole. For å få oversikt over det strategirepertoaret elevene får tilgang til gjennom DragonBox Skole, og derav de læringsmulighetene de får, har jeg i analysen kartlagt hvilke regnestrategier som blir introdusert i læreverket.

Det finnes flere ulike regnestrategier for å gjennomføre operasjonen subtraksjon. Subtraksjon er en av de fire regneartene i matematikk, og hensikten er å trekke et tall fra et annet tall. I regnestykket 82 – 69 = 13, vil man referere til tallet 82 som minuenden, tallet 69 som subtrahenden og 13 som differansen (Hofmann, 2022). Noen regnestrategier innenfor subtraksjon tar utgangspunkt i hele tallet, mens andre regnestrategier tar utgangspunkt i hvordan man opererer med enkeltsiffer. Hovedforskjellen er at de regnestrategiene som opererer med enkeltsiffer, ikke tar for seg plassverdien til tallet mens man utfører regnestrategien, mens de regnestrategiene som derimot tar utgangspunkt i *hele* tallet gjør det (Hickendorff et al., 2019).

For å få et rammeverk for de ulike regnestrategiene innenfor subtraksjon, har jeg tatt utgangspunkt i seks av regnestrategiene som blir presentert i Hickendorff et al. (2019). Regnestrategiene jeg har tatt for meg er standardalgoritme, hopp, dele opp, kompensasjon, konstant differanse og indirekte addisjon (min oversettelse). I *standardalgoritmen* tar man først sifferet som står på enerplassen i minuenden og trekker fra sifferet som står på enerplassen i subtrahenden. Deretter går man over til tierplassen og gjør det samme. Standardalgoritmen er et eksempel på en regnestrategi hvor man opererer med enkeltsiffer. De andre regnestrategiene tar utgangspunkt i hele tallet. *Hopp* er en regnestrategi hvor det er hensiktsmessig å tenke på subtraksjon som hopp på en tallinje. I subtraksjon så vil man starte på et tall (minuenden) og hoppe bakover helt til man har hoppet hele subtrahenden. Hoppene kan deles opp så mange ganger man selv ønsker (Hickendorff et al., 2019). Strategien *dele opp* tar for seg tallene som tiere og enere. Det vil si at man deler opp både minuenden og subtrahenden i tiere og enere, og subtraherer tiere med tiere og enere med enere. Til slutt legger man sammen de to differansene som står igjen (Hickendorff et al., 2019). I *kompensasjon* vil man runde opp eller ned det ene tallet for å få et rundt tall, hvor man deretter legger til eller trekker fra det som ble rundet opp eller ned. Det er enklere å trekke fra dersom man operere med runde tall, og dette vil derfor være en hensiktsmessig strategi for elever å bruke når man introduserer subtraksjon med flersifrede tall (Hickendorff et al., 2019). *Indirekte addisjon* vil si å bruke addisjon for å løse subtraksjonsstykker. Siden addisjon og subtraksjon er motsatte regneoperasjoner, kan man tenke hva må man addere på subtrahenden for å få minuenden (Hickendorff et al., 2019). *Konstant differanse* øker eller minker både minuend og subtrahend tilsvarende for å beholde det samme differanseforhold. Hensikten er å få enklere tall ved å for eksempel gjøre minuend om til hel tier (Hickendorff et al., 2019) Se tabell 1 for en systematisk oversikt over de ulike regnestrategiene for subtraksjon.

Algoritme (enkeltsiffer)	Hopp	Dele opp	Kompensasjon	Indirekte addisjon	Konstant differanse
7 12 **82** **- 69** **= 13**	82 – 60 =22 22 – 9 = 13	80 – 60 = 20 2 – 9 = -7 20 – 7 = 13	82 – 70 = 12 12 + 1 = 13	69 + 3 = 72 72 + 10 = 82 3 + 10 = 13	(82-2)-(69-2) 80-67=13

Tabell 1: Oversikt over vanlige strategier for å regne med flersifrede subtraksjonsstykker (Hickendorff et al., 2019).

2.3.2 Strategidistribusjon

Den andre dimensjonen heter *strategidistribusjon* og tar utgangspunkt i når hver enkelt strategi blir brukt. Dette baserer seg på den relative frekvensen (Lamaire & Siegler, 1995). Den relative frekvensen handler om hvor mange ganger hver enkelt regnestrategi blir brukt sammenlignet med antall oppgaver (Rummelhoff & Frøslie, 2023). Større frekvens vil øke kvaliteten på elevenes utførelse av regnestrategien da forskning viser at elever vil kunne utføre regneoperasjoner både mer effektivt og mer presist jo mer erfaring de får i å bruke de ulike regnestrategiene (Lamaire & Siegler, 1995). Med andre ord er det viktig at elevene får ordentlig erfaring med flere ulike regnestrategier. Et eksempel kan være dersom en elev blir presentert for flere ulike regnestrategier og dermed har et stort strategirepertoire, men i utgangspunktet bare bruker en eller veldig få av de regnestrategiene hen har kunnskap om. Eleven vil da ikke kunne opparbeide seg den erfaringen hen trenger for å være matematisk fleksibel ved å velge den mest hensiktsmessige regnestrategien.

For å kartlegge den relative frekvensen er det viktig å se på hvor stor plass hver enkelt regnestrategi opptar i læreverket. Det kan være at noen læreverk vektlegger regnestrategiene likt, mens andre har mest har mest fokus på en eller noen få. Ifølge Lamaire & Siegler (1995) er hyppig bruk av flere forskjellige regnestrategier vesentlig for utvikling av matematisk fleksibilitet. Det vil derfor være hensiktsmessig å se om regnestrategiene blir presentert en eller flere ganger og hvor mange eksempler hver regnestrategi har (Sievert et al., 2019).

2.3.3 Strategieffektivitet

Det tredje aspektet er *strategieffektivitet* og viser til hvor effektiv og nøyaktig hver strategi blir gjennomført. Strategieffektivitet viser til elevers evne til å utføre regnestrategier effektivt og nøyaktig. Forskning viser at denne evnen utvikles gradvis jo mer erfaring elever får med regnestrategiene (Lamaire & Siegler, 1995). Det vil si at erfaring med de ulike regnestrategiene er en effektiv måte å forbedre utførelsen på. Elever kan bruke de samme regnestrategiene over flere år, men jo mer erfaring de får, jo mer effektivt og nøyaktig vil strategien bli gjennomført (Lamaire & Siegler, 1995). For å tilpasse strategieffektivitet til å måle kvaliteten på læreverk, vil jeg se på antall oppgaver læreverket inneholder.

2.3.4 Strategivalg

Den fjerde dimensjonen er *strategivalg* og tar utgangspunkt i hvordan de ulike regnestrategiene blir valgt. Valg av strategi innebærer at elevene må ta avgjørelser rundt hvilken strategi de skal bruke til hvert enkelt regnestykke (Lemaire & Siegler, 1995). Dersom elevene har kunnskap om flere ulike regnestrategier, altså et stort strategirepertoar, kan elevene vurdere fordeler og ulemper ved de ulike strategiene. På den måten kan elevene finne den strategien som er mest hensiktsmessig å bruke. Valg av strategi vil derfor være avhengig av hvilket regnestykke elevene skal løse. Dersom en elev har tilegnet seg kunnskap om tre ulike regnestrategier innenfor subtraksjon av flersifrede tall, bør valg av strategi ta utgangspunkt i det aktuelle regnestykket. Noen ganger kan den første strategien være mer effektiv og nøyaktig, mens andre ganger kan den andre eller tredje strategien være mer effektiv og nøyaktig. Av den grunn bør elevene lære seg hvilke strategier som passer best til ulike regneoppgaver (Lamaire & Siegler, 1995).

Strategivalg viser altså til elevers evne til å velge den mest hensiktsmessige strategien for et gitt problem (Lamaire & Siegler, 1995). Rittle-Johnson & Star (2009) viser at det å eksplisitt sammenligne ulike regnestrategier fører til større matematisk fleksibilitet. Av den grunn er det mer hensiktsmessig å introdusere flere regnestrategier parallelt enn å undervise dem isolert (Rittle-Johnson & Star, 2009). I læreverk vil det derfor være hensiktsmessig å se på hvordan de ulike strategiene blir introdusert. Det vil si om det for eksempel finnes oppgaver som eksplisitt handler om å sammenligne strategier. Sammenligningsoppgavene kan enten forekomme systematisk eller sporadisk, hvor systematisk betyr at de er en del av introduksjonen av nye regnestrategier, mens sporadisk betyr at oppgavene virker tilfeldig og ikke som en del av introduksjonen til nye strategier (Sievert, Ham, et al., 2019). Videre vil jeg presentere teori om læreverk og hvilken betydning læreverk har for læring innenfor matematikk.

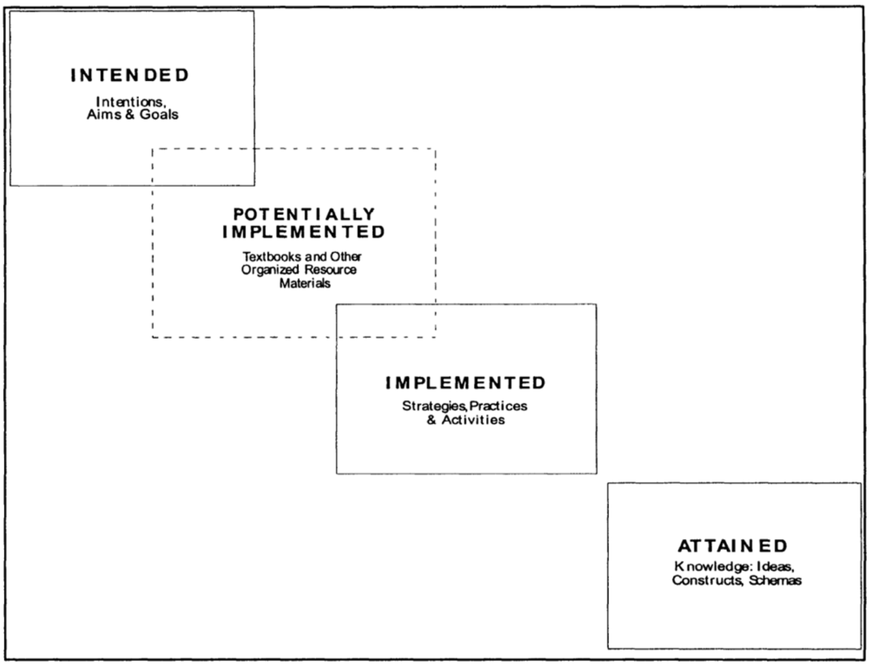
2.4 Teori om læreverk

Læreverk er med på å definere hvordan elevene opplever fagene på skolen og er den mest brukte ressursen lærerne bruker i sin undervisning (Valverde et al., 2002). Av den grunn er læreverk også det sterkeste bindeleddet mellom det offisielle læreplanen, altså det som er blitt fastsatt av utdanningsdirektoratet, og den implementerte læreplanen, som viser til hvordan læreplanen blir implementert i undervisningen (Valverde et al., 2002). Nedenfor vil jeg gå nærmere inn på den norske læreplanen og hvilken betydning den har for læreverkene som blir brukt i den norske skolen, før jeg beskriver lærebøkenes rolle i undervisningen.

2.4.1 Læreplanen

Den offisielle læreplanen er den læreplanen som er blitt fastsatt av utdanningsdirektoratet og som skal styre innholdet i opplæringen i den norske skole (Utdanningsdirektoratet, u.å.). I Norge ble det innført ny læreplan i 2020, kalt Kunnskapsløftet 2020 (Kunnskapsdepartementet, 2019)

For å illustrere hvilke undervisningsmuligheter som finnes i læreplanen har Valverde er al. (2002) utviklet en modell som viser forskjellen mellom hva som er målene til læreplanen, hvordan læreplanen blir gjennomført i undervisningen og hvilken kunnskap som elevene sitter igjen med (se bilde 1). Disse tre dimensjonene blir kalt den tiltenkte læreplanen, den implementerte læreplanen og den oppnådde læreplanen (min oversettelse) (Valverde et al., 2002). Modellen anerkjenner hvordan læringsmulighetene til elevene både blir påvirket av den offisielle læreplanen (tiltenkte læreplanen) og hvordan lærere tolker og implementerer læreplanen. I tillegg viser modellen til en fjerde dimisjon som blir kalt den potensielt implementerte læreplanen (min oversettelse) og ligger mellom den tiltenkte læreplanen og den implementerte læreplanen. Den potensielt implementerte læreplanen representerer mulighetsrommet i utlevelsen av en læreplan dersom lærebøker og andre ressurser lærerne har tilgang til tas i bruk (Valverde et al., 2002).



Bilde 1: Textbooks and the Tripartite Model (Valverde et al., 2002)

Det er mange faktorer som påvirker hvilken kunnskap elevene sitter igjen med etter endt undervisning. Den potensielt tiltenkte læreplanen er en av faktorene som påvirker elevenes læringsutbytte og er på mange måter bindeleddet mellom undervisningspraksisen samt den offisielle læreplanen (Valverde et al., 2002).

2.4.2 Læreverk/lærebøker

Læreverkene skal koble sammen målene i læreplanen med den undervisningspraksisen som gjennomføres i skolen. Hovedmålet til læreverkene er å gi elevene læringsmuligheter, kunnskap og ferdigheter som de kan anvende i samfunnet. For å oppnå dette målet er læreverkene systematisk organisert og skal sørge for at elevene får progresjon i fagene. Ulike læreverk kan løse denne utfordringen på ulike måter, og det er derfor viktig å være bevisst på hvilke læreverk man velger å bruke i undervisningen (Valverde et al., 2002).

Lærere og elever kan fritt bestemme hvordan de ønsker å bruke lærebøkene de har tilgang til (Valverde et al., 2002). Det betyr i hovedsak at man ikke trenger å følge lærebøkene fra perm til perm, men at man kan plukke ut det man finner mest interessant og læringsfremmende. På den måten kan også lærere tilpasse læreverket til sin elevgruppe. Likevel viser forskning at en stor andel av lærere ofte følger læreverkets oppbygning. Lærere vil som regel bruke læreverket i undervisningen og strukturere timene etter hvordan læreverket er strukturert (Valverde et al., 2002). Dersom enkelte tema ikke blir presentert i læreverket som læreren og elevene bruker, er det altså stor fare for at temaet ikke blir gått gjennom i undervisningen. Denne praksisen legger stort ansvar på lærebøkenes kvalitet.

2.5 Tidligere forskning på matematisk fleksibilitet i læreverk

Forskningsfeltet viser at det internasjonalt er gjort tilsvarende studier som omhandler matematisk fleksibilitet i læreverk (Chen & Siegler, 2000; Heinze et al., 2009; Rittle-Johnson & Star, 2009; Sievert, Ham, et al., 2019; Torbeyns et al., 2009). Videre vil jeg belyse hvilke hovedfunn som ble gjort.

For at elevene skal utvikle matematisk fleksibilitet, bør læreverkene eksplisitt beskrive og vise hvordan elevene skal anvende de ulike regnestrategiene. Dette kalles henholdsvis begreps- og prosedyrekunnskap (Hickendorff, 2020). For at elevene fleksibelt skal anvende ulike regnestrategier, hevder Torbeyns et al. (2009) at elever bør få eksplisitt introduksjon i hvilke fordeler og ulemper de ulike regnestrategiene har. Studien deres viser at eksplisitt instruksjon vil føre til at elevene både varierer og bruker regnestrategiene mer bevisst, uavhengig av hvilket prestasjonsnivå elevene befinner seg på. I tillegg viser studien at dersom elevene ikke får eksplisitt undervisning, vil valg av regnestrategi være mer eller mindre tilfeldig, og at elevene derfor ikke tar hensyn til oppgavens karakteristikker. Læreverkene bør derfor legge opp til en eksplisitt innføring i de ulike regnestrategiene (Torbeyns et al., 2009). I tillegg hevder Rittle-Johnson og Star (2009) at det å sammenligne ulike regnestrategier fører til mer adaptiv bruk av strategier. De skriver at det er mer hensiktsmessig å sammenligne regnestrategiene enn å undervise dem isolert fra hverandre. Læreverk bør derfor legge opp til en parallell introduksjon av ulike regnestrategier (Rittle-Johnson & Star, 2009).

Likevel påpeker Star et al. (2022) at elever ofte bruker standardalgoritmen, selv om de har bred kunnskap om andre regnestrategier. Standardalgoritmen er en regnestrategi som effektivt og nøyaktig kan anvendes på samtlige subtraksjonsstykker. Siden regnestrategien er så allsidig, vil elevene ofte foretrekke standardalgoritmen og da opparbeide seg størst erfaring med nettopp den. Standardalgoritmen er vanskelig å sammenligne med andre regnestrategier da den ikke fremmer en relasjonell forståelse for matematikken, og derfor bør heller ikke standardalgoritmen være en regnestrategi som elever tidlig blir introdusert for (Star et al., 2022).

Videre har Chen og Siegler (2000) identifisert hvordan elever kan utvikle sin matematiske fleksibilitet gjennom passende matematikkoppgaver hvor elevene får oppdage ulike regnestrategier. I arbeid med passende matematikkoppgaver vil elevene oppleve hvordan noen strategier krever mindre kognitiv belastning, som igjen fører til en mer effektiv tilnærming til ulike problemer. I tillegg vil elevene oppdage at visse typer matematikkoppgaver passer til visse typer regnestrategier. Dette vil igjen føre til at elevene foretar mer bevisste strategivalg, og at de på den måten kan være mer matematisk fleksible (Chen & Siegler, 2000). Forskningen til Chen og Siegler (2000) kan sees i sammenheng med forskningen til Hainze et al. (2009) som viser til to tilnærminger som fremmer utvikling av matematisk fleksibilitet. Den første tilnærmingen de fremhever er oppgaver som legger til rette for eksplisitt utvalgte regnestrategier gjennom undersøkelse. I denne oppgavetypen skal elevene først finne opp egne regnestrategier, før de sammenligner dem med regnestrategiene til de andre elevene. Elevene skal være bevisst på at målet med oppgaven er å finne de mest hensiktsmessige regnestrategiene til den gitte oppgaven. Den andre tilnærmingen er problemløsningsoppgaver, hvor elevene får et matematisk problem som de skal løse. Her blir ikke regnestrategiene eksplisitt fremhevet, men elevene skal drøfte hvor effektive de ulike løsningsmetodene er. Slik vil elevene lære seg å analysere hvilke egenskaper de ulike tallene har i forhold til hverandre og finne regnestrategier basert på hvilke tall regneoppgaven består av (Heinze et al., 2009).

Til slutt i teorikapittelet, vil jeg vise til hvordan Sievert et al. (2019) har sett på hvilke læringsmuligheter innenfor adaptivitet som presenteres innad i fire tyske læreverk på 2. og 3. trinn for addisjon og subtraksjon med flersifrede tall. Forskningen viser at ulike læreverk legger til rette for matematisk fleksibilitet på forskjellige måter. Noen læreverk vil for eksempel systematisk inneholde sammenligningsoppgaver, hvor elevene kan sammenligne ulike regnestrategier, mens andre læreverk ikke presenterer denne oppgavetypen. Disse funnene viser at det finnes avvik for hvilke læringsmuligheter læreverkene legger til rette for, og at kvaliteten på ulike læreverk derfor vil variere. Videre viser studien at læreverk har stor innflytelse på hvordan lærere legger opp til matematisk fleksibilitet i undervisningen (Sievert, Ham, et al., 2019).

3 Metode

I dette kapittelet vil jeg gjøre rede for studiens metodologi. Metodologi handler om hvilken tilnærming forskeren har til studien. Gjennom metodologien får man innblikk i hvilken metode forskeren har brukt og hvorfor, samt hvilket paradigme som er lagt til grunn i studien (Clark et al., 2021). Jeg vil beskrive det fortolkende paradigmet (interpretismen), som er det vitenskapelige paradigmet denne studien har tatt utgangspunkt i. Studien tar for seg hvordan oppgavene i læreverket blir presentert, og hvilken sammenheng disse oppgavene har med teori om hvordan man utvikler matematisk fleksibilitet. Jeg har valgt å gjennomføre en kvalitativ kasusstudie hvor jeg bruker innholdsanalyse for å få innsikt i hvilket potensial læreverket har for utvikling av matematisk fleksibilitet. Videre i metodedelen vil jeg derfor forklare hvorfor jeg har valgt å gjennomføre en kvalitativ kasusstudie, gi en grundig beskrivelse av læreverket DragonBox Skole og av hvilke steg jeg tok da jeg gjennomførte innholdsanalysen. Avslutningsvis vil jeg ta for meg studiens validitet og reliabilitet, samt hvilke etiske hensyn jeg har tatt underveis.

3.1 Vitenskapelig paradigme

Viteskaplig paradigme handler om hvordan man kan lære om og forstå verden. Det består blant annet av ontologi, epistemologi, metodologi og aksiologi. Ontologi handler om hva som blir ansett som virkelig, mens epistemologi handler om hva som blir sett på som akseptert kunnskap innenfor en fagdisiplin (Clark et al., 2021). Metodologi handler som sagt om hvilken tilnærming man har til forskningen og aksiologi handler om hvordan verdiene til forskeren preger studien (Creswell & Poth, 2018). Det vil si hvordan mine valg og vurderinger påvirker både problemstilling og datainnsamling, samt hvordan jeg tolker analyse og resultat (Clark et al., 2021; Creswell & Poth, 2018). Denne studien er forankret i det fortolkende paradigmet, ofte kalt interpretisme.

Interpretisme er en vitenskapelig tilnærming som legger vekt på hvordan datamaterialet tolkes og forstås av forskeren (Clark et al., 2021; Creswell & Poth, 2018). Det vil med andre ord si at forskerens tolkning av datamaterialet er sentral for hvilke funn som kommer frem, og at andre forskere vil kunne finne ut noe annet enn det jeg har gjort. Det ontologiske ståstedet til interpretisme baserer seg altså på at det finnes flere virkeligheter hvor hvert enkelt individ konstruerer sin egen virkelighet (Clark et al., 2021; Creswell & Poth, 2018). Hva som er virkelig, er derfor avhengig av hvordan menneskene *oppfatter* virkeligheten. Det finnes med andre ord ikke en objektiv sannhet, men mange forskjellige sannheter ut fra hva hvert enkelt individ tolker. Det epistemologiske ståstedet til interpretisme er nært knyttet til hvordan ontologien forstås – det baserer seg på konstruktivismen, hvor kunnskap er subjektivt og er noe som konstrueres av hvert enkelt menneske (Clark et al., 2021; Creswell & Poth, 2018). Kunnskap er innenfor dette ståstedet derfor noe som er sosialt konstruert og baserer seg på hvordan hvert enkelt individ forstår verden.

Det finnes flere grunner til at jeg har interpretisme som tilnærming til min studie. En av grunnene er mitt ontologiske ståsted - jeg forstår virkeligheten som sosialt konstruert, i tråd med konstruktivistisk tenkning. Forskjellige mennesker kan oppleve virkeligheten forskjellig og jeg mener derfor at det ikke finnes en objektiv virkelighet. Dette gjenspeiler seg i studien og jeg er derfor bevisst at det er viktig at jeg som forsker er klar over min egen forforståelse og hvordan denne preger studien min. Siden mennesker opplever virkeligheten forskjellig, bør derfor implisitte valg jeg har gjort bli gjort eksplisitt, slik at andre kan følge forskningsprosessen min. I tillegg vil mine funn være sosialt konstruert gjennom min egen tolkning av både datasettet jeg har forsket på, teori jeg har brukt til å forankre min egen studie, samt tolkningen til de forskerne som skrev den teorien.

En annen grunn til at jeg har valgt interpretismen som vitenskapelig paradigme, er det epistemologiske ståstedet. Det epistemologiske ståstedet innenfor interpretismen tilsier en forståelse av at man får kunnskap gjennom å samle og studere et datamateriale. Jeg valgte å bruke deler av DragonBox Skole som datamaterialet, og jeg anser at jeg har fått kunnskap gjennom å analysere og studere delene av læreverket.

3.2 Kvalitativ kasusstudie

Metoden jeg har brukt i denne studien heter kvalitativ kasusstudie. Metode handler om å følge spesifikke fremgangsmåter for å skaffe og behandle data (Creswell & Poth, 2018). De spesifikke fremgangsmåtene tar utgangspunkt i hvilken type data man ønsker å ta for seg, og gjennom stegene vil man komme fram til funn som presenteres i analysen (Creswell & Poth, 2018). I en kvalitativ studie gjør forskeren fortolkninger av datamaterialet sitt for å analysere fram resultater (Creswell & Poth, 2018). Det vil si at forskeren har stor innvirkning på hvilke funn studien har, og at det derfor er viktig å beskrive og begrunne alle valgene man tar. Slik tolkning er karakteristisk for det fortolkende paradigmet. (Clark et al., 2021).

Kvalitativ forskning baserer seg på kvalitative data, da gjerne i form av tekst (for eksempel fra feltnotater, transkripsjoner, bøker eller annet). Kvalitative data står i motsetning til kvantitative data, som handler om tall og mengder. Kvalitative data består gjerne av få enheter hvor man går i dybden på hver enhet, for eksempel med kasusstudier (Creswell & Poth, 2018). Siden kvalitative studier får mye informasjon ut av få enheter, vil det også være vanskelig å generalisere resultatene man får. Likevel kan kvalitativ forskning bidra til å oppnå en helhetlig forståelse innenfor et gitt tema (Creswell & Poth, 2018). Siden kvalitativ forskning påvirkes av forskerens egne tolkninger, er det viktig å reflektere over alle beslutningene som tas, enten de er bevisste eller ubevisste. Ved å være kritisk til sin egen studie vil man også være med på å gjøre studien mer troverdig (Creswell & Poth, 2018). Dette vil jeg komme tilbake til i underkapittelet *3.6 Mål* for *kvalitet i studien*.

Kasusstudie er en av flere mulige måter å drive med kvalitativ forskning. I en kasusstudie samler forskeren inn beskrivelser av en eller flere kasuser for så å analysere det innsamlede datamaterialet (Creswell & Poth, 2018). Formålet er å skape en dypere forståelse av kasuset, og en slik studie har altså en kvalitativ tilnærming til datamaterielat. En kasusstudie defineres ut fra spesifikke parametere, som rammer inn hva som er kasuset. Kasuset kan for eksempel defineres ut fra en spesifikk plass eller tidsramme. Det vil si at kasusstudier egner seg godt dersom man har klare grenser for hva som er kasuset (Creswell & Poth, 2018). I denne studien har jeg valgt å definere mitt kasus til læreverket DragonBox Skole. Formålet med studien blir derfor å presentere en dybdeforståelse av dette læreverket. Det betyr at kasusstudien både vil bestå av en grundig beskrivelse av DragonBox Skole, samt av de ulike aspektene innenfor utvikling av matematisk fleksibilitet som jeg identifiserer gjennom kasusstudien. Siden studien bare tar for seg ett læreverk, blir denne studien definert som en enkelt instrumentell kasusstudie, hvor jeg som forsker fokuserer på et tema innenfor et spesifikt kasus (Creswell & Poth, 2018). Det hadde også vært hensiktsmessig å gjennomføre en multi-kasusstudie for å se hvordan ulike læreverk legger til rette for utvikling av matematisk fleksibilitet (Creswell & Poth, 2018). Likevel har jeg ved å studere et enkelt kasus hatt mulighet til å gå dypere inn i datamaterialet enn hvis jeg skulle ha sammenlignet flere læreverk (Creswell & Poth, 2018).

3.3 Presentasjon av DragonBox Skole

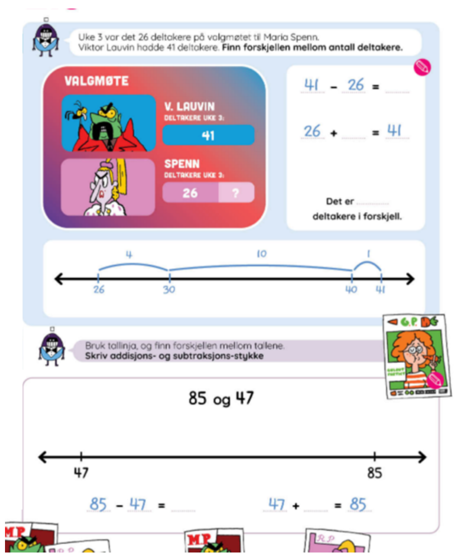
En viktig del av kasusstudien er å gi en grundig beskrivelse av kasuset (Creswell & Poth, 2018). Mitt kasus består som sagt av læreverket DragonBox Skole, som igjen består av både analoge og digitale ressurser. De analoge ressursene som hører til 3. trinn er Mattestreker 3A, Mattestreker 3B og Mattesnakk. Den digitale ressursen består av appen DragonBox Skole 3. I tillegg kommer det en lærerveiledning som ligger digitalt ute på nettsiden til utviklerne. Se oversikt over de ulike læringsressursene i tabell 2. Videre i masteroppgaven vil jeg bruke bilder som er hentet direkte fra DragonBox Skole. På grunn av opphavsrett så har jeg vært i dialog med utviklerne av læreverket og på forhånd fått tillatelse til å bruke bilder fra de ulike læringsressursene.

Læringsressurser i DragonBox Skole

Digitale ressurser	Analoge ressurser
Appen DragonBox Skole 3 Lærerveiledning	Mattestreker 3A Mattestreker 3B Mattesnakk

Tabell 2: Læringsressurser i DragonBox Skole

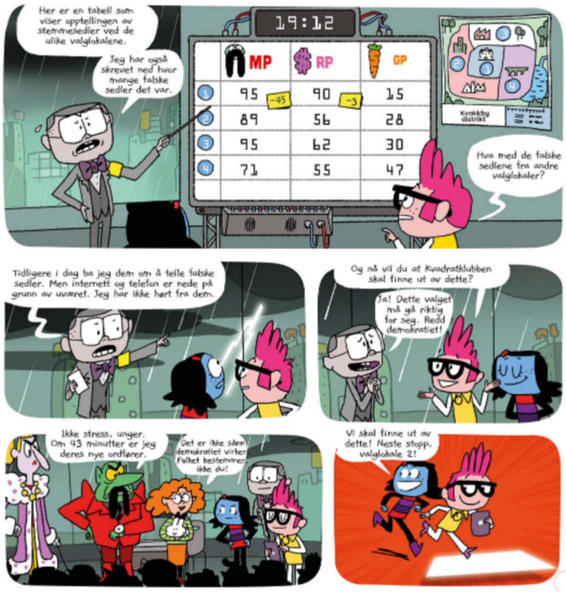
Mattestreker 3A og Mattestreker 3B er oppgavebøker som inneholder ulike regneoppgaver som elevene skal utføre. Arbeidsbøkene er engangsbøker hvor hensikten er at elevene skal skrive rett i bøkene. Fordelt på de to arbeidsbøkene er det ti ulike kapitler. Av disse ti kapitlene er det to kapitler som handler om subtraksjon. I Mattestreker 3A heter kapittel 2 «Subtraksjon» og i Mattestreker 3B heter kapittel 1 «Addisjon og subtraksjon». Siden det bare er disse to kapitlene som er relevant for meg for at jeg skal svare på mitt forskningsspørsmål, vil jeg i min analyse bare ta for med disse to kapitlene. Bilde nummer 2 viser hvordan de to arbeidsbøkene ser ut og bilde nummer 3 viser et eksempel på hvordan en regneoppgave fremstilles i Mattestreker 3A.



Bilde 2: *Mattestreker A og B (DragonBox, 2021a, 2021b)*
Bilde 3: *Mattestreker indirekte addisjon (DragonBox, 2021a)*

Mattesnakk blir av produsentene omtalt som en problemløsningsbok som består av rike problemløsningsoppgaver. Boken er basert på oppdrag som elevene får tilgang til gjennom tegneserier. Tegneseriene er med på å skape historier rundt matematikken og setter derfor matematikken inn i en kontekst. Ifølge produsentene vil historiene være med på å bidra til utforskning og kreativitet blant elevene. Oppdragene i boka krever at elevene skal bruke sammensatt kompetanse hvor man bygger videre på det elevene lærte i Mattestreker, og det er derfor hensiktsmessig å løse oppdragene gjennom samtale og samarbeid med andre (DragonBox, 2024). Siden produsentene har lagt opp til at oppdragene i Mattesnakk er en forlengelse av det elevene lærer i Mattestreker, krever det at elevene allerede har opparbeidet seg en del kunnskap om det temaet de skal jobbe med. I arbeid med problemløsningsoppgaver kan elevene ha ulike innfallsvinkler. Utgangspunktet for slike oppgaver er at elevene ikke vet på forhånd hvilken framgangsmåte de skal bruke for å løse oppgaven (Boaler, 1998). Det er her elevene har behov for kreativitet og utforskning. I mattesnakk er det to oppdrag som handler om subtraksjon, oppdrag 2 *Seddelsurr* og oppdrag 6 *Apestreker*. Bilde nummer 5 viser et utdrag fra oppdrag *Seddelsurr*.

Bilde 4: *Mattesnakk (DragonBox, 2020)*

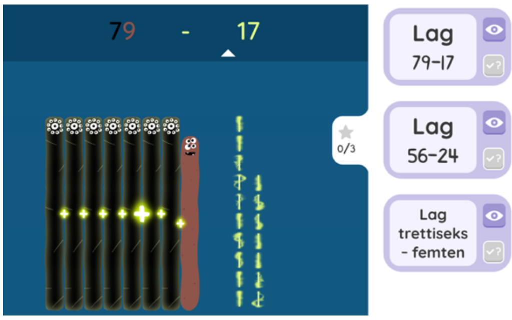


Bilde 5: *Seddelsurr tegneserie (DragonBox, 2020)*

I tillegg til de analoge oppgavebøkene, har elevene tilgang til en digital ressurs; appen DragonBox Skole 3. Appen er delt inn etter samme tema som Mattestreker A og B, og vil inneholde et utvalg matematikkoppgaver som passer til de ulike temaene. Det vil si at appen også har to tema som inneholder subtraksjon. I hovedsak så er oppgavene delt inn i to kategorier, hvor den ene kategorien kalles læringslabb og den andre kategorien kalles læringsquiz. Læringslabbene er selve introduksjonen til det matematiske konseptet som elevene skal lære seg. Det er en plass hvor elevene kan utforske og finne sammenheng, og på den måten få tilgang til ulike matematiske konsepter. Læringslabbene består av tre oppgaver som elevene skal løse (se bilde nummer 7). Inni læringslabben finnes det digitale konkreter (for eksempel noomer) som elevene skal bruke for å kunne løse oppgaven. Noomer er en representasjon av tallene fra en til ti som DragonBox Skole har utviklet til sitt læreverk. Denne representasjonsformen vil bli nærmere beskrevet i neste underkapittel.

Etter at elevene har gjennomført læringslabben som hører til det matematiske temaet som de holder på med, begynner de med læringsquizene. Dette er oppgaver hvor elevene skal øve seg på det de utforsket i læringslabben. Læringsquizene består av varierte oppgaver som elevene får tilbakemelding på med det samme. I tillegg til læringslabben, ligger det et ulikt antall læringsquizer som hører til samme dobbeltside i Mattestreker A og B. Kapittelet *subtraksjon* inneholder til sammen 8 læringslabber og 49 læringsquizer, mens kapittelet *addisjon og subtraksjon* inneholder 12 læringslabber og 71 læringsquizer. Bilde 6 viser et eksempel fra hvordan DragonBox Skole-appen ser ut for elevene. Bildet viser oppgavesiden innenfor temaet *Samme differanse* i kapittelet om *Subtraksjon*. Her vises hvordan læringslabbene er markert med rosa, mens læringsquizene er markert med grønn. Legg også merke til at det går an å hoppe ned i kjelleren for å få flere læringsquizer. I kjelleren finner elevene oppgaver med større vanskelighetsgrad, og de får tilgang til disse oppgavene etter at de har fått nok stjerner i overetasjen.

Bilde 6: *DragonBox skole-appen (DragonBox, 2023)*

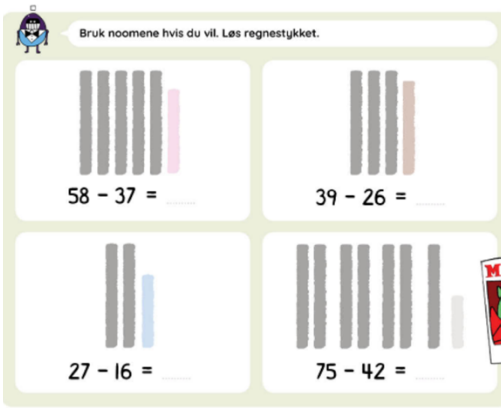


Bilde 7: *Læringslabb subtraksjon (DragonBox, 2023)*

3.3.1 Noomer som representasjonsform

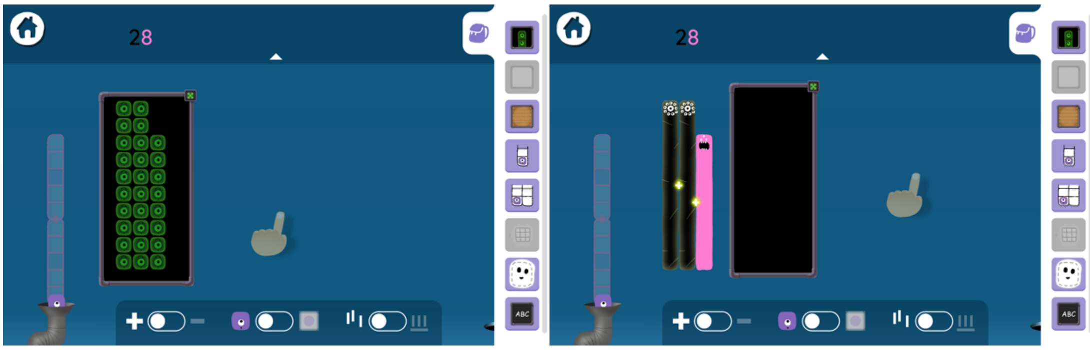
I læreverket får vi introdusert noomene, som er en form å representere de ulike tallene på fra en til ti. Noomene er skapninger som både kan spise hverandre og deles opp, slik at de blir til nye noomer. Hver enkelt noom har ulike navn, og elevene blir kjent med noomene gjennom ulike fortellinger som hører til læreverket. For eksempel så heter noomen som representerer tallet 1 Uno, mens noomen som representerer tallet 10 heter Deka. Bilde nummer 8 viser en illustrasjon av noomene fra en til ti.

Bilde 8: *Noomer* (DragonBox, u.å.-a)



Bilde 9: *Noomer som visuell støtte (DragonBox, 2021a)*

Noomene blir brukt både i DragonBox-appen og arbeidsbøkene, samtidig som de også finnes som fysiske konkreter som elevene kan bruke i arbeid på skolen. Bilde nummer 9 viser et eksempel fra Mattestreker 3A hvor noomene blir brukt som visuell støtte til regneoppgavene. I læringslabben kan elevene utforske sammenhengen mellom noomene på forskjellige måter. Ved å sette noomene sammen ser elevene at de kan lage ulike tall. Noomene illustrerer også sammenhengen mellom tiere og enere, hvor elevene for eksempel kan telle hvor mange tiere tallet består av ved å telle antall Deka. I tillegg så kan elevene for eksempel ta røntgen av noomene, og på den måten kan de se hvor mange enere (eller Uno) som hver noom består av (se bilde 1323). Slik kan elevene utforske og oppdage hvilke relasjoner tallene har til hverandre.



Bilde nr 10: *Læringslabb røntgen (DragonBox, 2023)*

3.3.2 DragonBox-metoden

Samtidig som at læreverket har ulike ressurser man kan bruke for å jobbe med subtraksjon med flersifrede tall, fremmer produsentene også det de kaller for DragonBox-metoden. DragonBox-metoden er en arbeidsmetode som fremmer en utforskende tilnærming til det matematiske innholdet. Gjennom denne arbeidsmetoden vil elevene delta aktivt i matematiske samtaler som fremmer matematisk forståelse (DragonBox, u.å.-a).

Stegene i DragonBox-metoden er:

1. utforskning
2. samtale
3. øving
4. oppsummering (DragonBox, u.å.-a)

Bilde 11: *DragonBox-metoden* (DragonBox, u.å.-a)

DragonBox-metoden er utviklet for at læreren skal skape et problemløsende klasserom. Metoden skal fremme læringsmuligheter slik at både lærere og elever får mest mulig utbytte av ressursene til DragnoBox Skole (DragonBox, u.å.-a). Utforskningsfasen starter i labbene i DragnoBox-appen. Disse labbene kan elevene utforske alene, sammen med en læringspartner eller i fellesskap sammen med læreren. Her kan elevene selv finne ut av ulike deler innenfor matematikken og på den måten øke både forståelsen og engasjementet for faget. For å bidra til at økten skal være så gunstig som mulig, er det hensiktsmessig å gi elevene et mål de skal jobbe mot (DragonBox, u.å.-a). Samtaledelen handler om å aktivisere elevene gjennom samtale. For at elevene skal få mulighet til å bidra på best mulig måte, er det viktig at de får nok tenketid og at resonnering og argumentasjon blir vektlagt i samtalen. Det er viktig at læreren utfordrer elevene med å resonnere og argumentere for de påstandene som elevene kommer med, og på den måten vil elevene opparbeide seg matematiske ferdigheter innenfor hva man anser som gyldig argumentasjon og bevis i matematikken (DragonBox, u.å.-a).

Øvingsfasen handler om å at elevene skal øve seg på det de utforsket i læringslabben. Også øvingsfasen foregår inne i DragonBox Skole appen, og DragonBox-metoden vil at elevene skal gjøre læringsquizene før de jobber i Mattestrekerbøkene (DragonBox, u.å.-a). Til slutt kommer oppsummeringsfasen hvor det er viktig å snakke om hvilket mål det var for timen og knytte målene opp mot oppgavene som elevene har jobbet med (DragonBox, u.å.-a)

3.4 DragonBox Skole som datamateriale - valg av læreverk og utvalg

Det er flere grunner til at jeg valgte å undersøke læreverket DragonBox Skole. Læreverket vokser stadig i popularitet og utviklerne reklamerer for at det i dag er over 200 norske skoler bruker læreverket (DragonBox, 2024). Siden DragonBox Skole er relativt nytt, vil det også være færre studier som har forsket på læreverket. Etter flere søk har jeg kartlagt noen masteroppgaver som har forsket på DragonBox Skole, der blant annet representasjonene innenfor DragonBox og problemløsning har vært fokusområder. Jeg har derimot ikke funnet noen studier som har sett på utvikling av matematisk fleksibilitet innenfor DragonBox Skole, og vil av den grunn hevde at det er behov for mer forskning på dette området og at min studie bidrar til å dekke et forskningshull. Som nevnt tidligere, er matematisk fleksibilitet noe som står sentralt i læreplanen. Det står blant annet at elevene skal være kreative og løse regneoppgaver på flere ulike måter (Kunnskapsdepartementet, 2019). Siden matematisk fleksibilitet blir lagt stor vekt på i læreplanen, vil det også være hensiktsmessig for lærere, utviklere og andre som bruker læreverket, å vite sammenhengen mellom teori og forskning om matematisk fleksibilitet, og hvordan dette implementeres i DragonBox Skole.

En annen grunn til at jeg har valgt å bruke DragonBox Skole som datamaterialet, er hvordan læreverket legger opp til både analoge og digitale regneoppgaver. Store deler av læreverket ligger inne i den digitale ressursen DragonBox Skole-appen. Når elevene jobber med disse matematikkoppgavene får de momentant vite om de har rett eller galt svar på oppgaven. Dette er en oppgavetype som er interessant å undersøke i forbindelse med matematisk fleksibilitet. Dette med tanke på om det legges opp til at samme oppgave kan løses på flere ulike måter, eller om den digitale ressursen legger fram ulike typer oppgaver for å få elevene til å anvende flere regnestrategier.

Jeg har også tatt valg for å avgrense datamaterialet mitt med å bare ta for meg subtraksjonsoppgavene som er beregnet for 3. trinn. Dette er et strategisk utvalg av datamaterialet som er tatt ut fra systematiske vurderinger om hva som er mest relevant og interessant å se på i forbindelse med studien (Clark et al., 2021). I praksis betyr det at jeg verken har sett på 1., 2. eller 4. trinn, eller andre regnearter enn subtraksjon. Denne avgjørelsen ble delvis tatt med bakgrunn i den tidsbegrensningen som følger med å skrive en masteroppgave. I tillegg er det i 3. trinn lagt opp til introduksjon av subtraksjon med flersifrede tall, noe som står sentralt i denne masteroppgaven. Samtidig har elevene i 3. trinn også jobbet med subtraksjon i noen år, og regneoperasjonen er derfor ikke helt ukjent for elevene. Siden regneoperasjonen ikke er ukjent, forventes det at elevene allerede har opparbeidet seg noe kunnskap om det matematiske objektet. Forhåndskunnskap rundt det matematiske objektet vil gjøre det lettere for elevene å se sammenhengene mellom de ulike regnestrategiene og på den måten gjøre det enklere å være matematisk fleksibel (Verschaffel et al., 2009). Dette er også grunnen til at jeg valgte å se på regnearten subtraksjon.

Før jeg gikk i gang med innholdsanalysen tok jeg, som nevnt tidligere, kontakt med produsentene av læreverket DragonBox Skole for å få tillatelse til å gjengi utdrag fra læreverket. Denne avklaringen handler om opphavsrett.

3.5 Innholdsanalyse

Siden læreverket kan sies å være bestående av dokumenter, ønsker jeg å gjennomføre en innholdsanalyse. Innholdsanalyse er en analysemetode som egner seg for å utforske mønster og trender innenfor et gitt datasett. Innholdsanalyse kan være både kvantitativ og kvalitativ, hvor kvantitativ innholdsanalyse går ut på å telle antall tilfeller, mens kvalitativ går ut på å lete etter underliggende tema (Clark et al., 2021). I dette delkapittelet vil jeg først beskrive hva innholdsanalyse går ut på, samt hvordan jeg har brukt analysemetoden til å analysere læreverket DragonBox Skole.

Kvalitativ innholdsanalyse går ut på å søke etter underliggende tema i tekstene man ønsker å analysere og er en svært utbredt metode for å tolke dokumenter. Fordelene med denne analysemetoden er at den er fleksibel og systematisk, samtidig som man reduserer datamaterialet ved å identifisere både latente og åpenbare mønster (Clark et al., 2021). Et latent mønster kan være hvordan jeg som forsker tolker de ulike delene av datamaterialet, selv om det ikke står eksplisitt i teksten. I innholdsanalyse koder man datamaterialet og lager kategorier ut ifra kodene, samt forsøker å finne mønstre. Målet med en slik analyseprosess er å få en større forståelse over et fagområde (Larsen, 2017).

Stegene i analyseprosessen i en innholdsanalyse kan deles opp på denne måten:

1. Skaffe seg en oversikt over tekstene
2. Kode tekstene
3. Finne kategorier
4. Sortere kodene etter kategorier
5. Identifisere mønster og sammenhenger
6. Vurdere mønstrene og sammenhengene i forhold til tidligere forskning og teori (Larsen, 2017)

Det finnes både fordeler og ulemper med å gjennomføre en innholdsanalyse. En av fordelene med innholdsanalyse er at datamaterialet allerede eksisterer, og at man derfor ikke får nye feilkilder ved å samle inn ny data. På en annen side er man da også avhengig av kvaliteten på det datamaterialet som allerede eksisterer, og dersom kvaliteten er dårlig, kan det også være en ulempe for resultatene til studien. En annen fordel er at det er mulig å systematisk analysere store mengder data gjennom en innholdsanalyse. Ved å ha et stort datamateriale øker man studiens reliabilitet ved at funnene man finner er mer representativ. Basert på hvilken innholdsanalyse man velger å gjennomføre, kan man være effektiv og tidsbesparende, da analysen ofte kjennetegnes av å være systematisk. I tillegg vil en annen fordel være at innholdsanalyse ofte er mer pålitelig enn andre analysemetoder da dokumentene som analyseres ofte er mer gjennomtenkte. På mange måter vil et slikt datamaterialet stå i motsetning til for eksempel et intervju hvor forskeren selv er ansvarlig for hvilke spørsmål som blir stilt, og hvor forskeren på den måten i større grad er med på å forme sitt eget datamateriale. I en innholdsanalyse vil ikke forskeren ha slik innflytelse på datamaterialet, selv om forskeren velger hvilket datamateriale studien skal ta utgangspunkt i (Clark et al., 2021).

3.5.1 Innholdsanalyse av DragonBox Skole

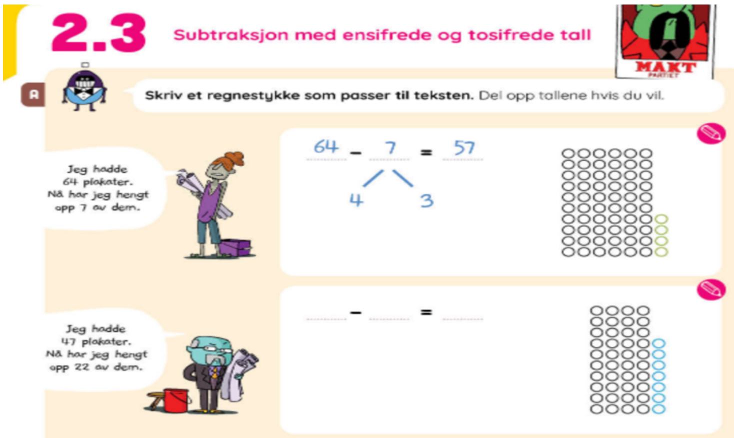
Innholdsanalyse kan brukes på et bredt spekter av data, og derfor vil jeg nå spesifisere hvordan jeg har gjort innholdsanalyse på mitt spesifikke datamateriale. Målet for analyseprosessen har som sagt vært å få større forståelse om hvordan DragonBox Skole legger til rette for matematisk fleksibilitet. Jeg har valgt å en abduktiv tilnærming til datamaterialet, da jeg har tatt utgangspunkt i Lamaire & Siegler (1995) sitt rammeverk om matematisk fleksibilitet. Abduksjon vil si at man gjør en kvalifisert gjetting, hvor man bruker eksisterende kunnskap for å resonnere seg fram til hvilken hypotese som passer best (Clark et al., 2021). Jeg har identifisert *strategirepertoar*, *strategidistribusjon*, *strategieffektivitet* og *strategivalg* i læreverket, og deretter sett etter tegn på hva som karakteriserer disse. Dette er en fremgangsmåte som tar utgangspunkt i et allerede etablert rammeverk, og vil derfor kunne sammenlignes med en deduktiv analyse (Clark et al., 2021). Likevel vil jeg hevde at jeg gjennomførte en abduktiv analyse da jeg hadde et rammeverk å følge, men likevel så på hvordan andre forklaringer kunne bidra til utvikling av matematisk fleksibilitet. Mitt analysearbeid tok utgangspunkt i eksisterende kunnskap, men tillot likevel at jeg kunne gå utenfor kategoriene for å finne forklaringer. Ved å ikke være fastlåst til kategoriene, gjennomførte jeg en fleksibel analyse hvor jeg kunne ta med det jeg ønsket i analysen.

Først i analyseprosessen så jeg gjennom hele DragonBox Skole for å skape et helhetsinntrykk. Jeg fikk oversikt over hvilke elementer læreverket består av, og hvilke deler jeg måtte se nærmere på for å svare på min problemstilling. Deretter begynte jeg å gå mer i detalj, hvor jeg leste over på nytt og tok notater av det jeg anså som interessant. Under denne prosessen tok jeg utgangspunkt i rammeverket fra Lamaire & Siegler (1995), slik at notatene mine samsvarte med de fire kategoriene. Jeg valgte å ikke inkludere lærerveiledningen i analyseprosessen da denne ressursen ikke er tilgjengelig for elevene, men har analysert samtlige av de andre læringsressursene.

Etter å ha lest over de relevante kapitlene, begynte jeg å kode datamaterialet. Jeg brukte fargekoder for å kode de ulike kategoriene, slik at det ble enklere å holde oversikt og system over datamaterialet. Siden innholdsanalyse handler om å finne sammenhenger og mønster i datamaterialet (Larsen, 2017), begynte jeg å gruppere kodene etter likhetstrekk. Grønmo (2016) kategoriserer koder i tre ulike grupper; deskriptive koder, fortolkende koder og forklarende koder. Deskriptive koder er koder hvor betydningen står eksplisitt i teksten, fortolkende koder er koder hvor forskeren tolker tekstens innhold, mens forklarende koder er koder hvor forskeren forklarer det som eksplisitt står i teksten (Grønmo, 2016). I min analyse har jeg brukt de ulike kodetypene for å vise forskjellen på hva som eksplisitt står i læreverket og hva som er min egen tolkning av læreverket. Et eksempel på en deskriptiv kode i denne analysen vil være når læreverket viser en konkret eksempeloppgave av en regnestrategi, mens en fortolkende kode vil være når jeg som forsker tolker oppgaven til å handle om en bestemt regnestrategi.

Etter kodingen satt jeg igjen med et stort antall koder. Disse kodene måtte jeg systematisere slik at jeg fikk bedre oversikt over hvilke sammenhenger og mønster som finnes i datamaterialet (Larsen, 2017). Jeg tok utgangspunkt i kategoriene til Lamaire & Siegler (1995) og lot dem danne grunnlaget for resultatkapittelet. Jeg brukte dem også for å illustrere de mønstrene jeg fant, og jeg har i resultatkapittelet tatt med konkrete eksempler fra DragonBox Skole. På den måten svarer jeg eksplisitt ut forskningsspørsmålene.

I analyseprosessen oppdaget jeg også en regnestrategi som blir introdusert i DragonBox Skole, men som ikke er beskrevet i de forhåndsdefinerte kategoriene til Hickendorf et al. (2019). Jeg valgte derfor å lage en ny kategori innenfor kategorien *dele opp.* Den første kategorien innenfor dele opp kaller jeg for *dele opp i tiere og enere*, som handler om å subtrahere tiere først, før man etterpå subtraherer enere. Den nye kategorien handler om å dele opp subtrahenden slik at man får et enklere regnestykke, og da ikke nødvendigvis i tiere og enere. Denne regnestrategien egner seg bra dersom det er et større siffer på enerplassen i subtrahenden enn i minuenden. Siden det er subtrahenden man deler opp, har jeg valgt å kalle denne strategien for *dele opp subtrahend*. Nedenfor kommer jeg med en eksempeloppgave for å illustrere regnestrategien *dele opp subtrahend.*



Bilde 12: *Dele opp subtrahend* (Mattestreker 3A) (DragonBox, 2021a)

Som eksempeloppgaven viser, så deler man opp subtrahenden slik at det blir enklere å gjennomføre subtraksjon. Her deler man opp subtrahenden 7 i 4 og 3, og eleven sitter da igjen med regnestykket 60-3, som er mye enklere. Hensikten med denne regnestrategien er å dele opp subtrahenden slik at når man trekker fra så blir minuenden en hel tier. Når minuenden er en hel tier så blir det enklere å trekke fra den resterende subtrahenden.

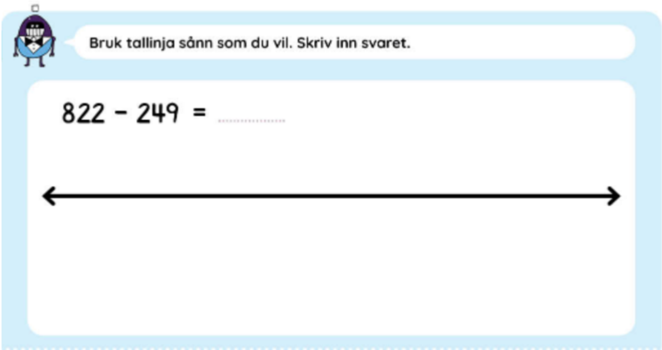
Siden *dele opp subtrahenden* ikke er en regnestrategi som Hickendorf et al. (2019) eksplisitt beskriver, har jeg valgt å videreutvikle tabellen over ulike regnestrategier innenfor subtraksjon (se tabell 3). Denne avgjørelsen tok jeg for å kunne få en nøyaktig beskrivelse av de ulike regnestrategiene som blir presentert i læreverket DragonBox Skole 3. Regnestrategien *dele opp subtrahend* er derfor en del av *strategirepertoaret* som DragonBox Skole legger til rette for i utviklingen av matematisk fleksibilitet innenfor regneoperasjonen subtraksjon.

Algoritme	Hopp	Dele opp tiere og enere	Kompensere	Dele opp subtrahend	Indirekte addisjon	Konstant differanse
7 12 82 - 69 = 13	82 – 60 =22 22 – 9 = 13	80 – 60 = 20 2 – 9 = -7 20 – 7 = 13	82 – 70 = 12 12 + 1 = 13	82 – 60 – 7 – 2 80 – 60 – 7 20 – 7 =13	69 + 3 = 72 72 + 10 = 82 3 + 10 = 13	82 - 69 80 - 67 =13

Tabell 3 *Regnestrategier innenfor subtraksjon* (inspirert av Hickendorf et al. (2019), videreutviklet av meg)

Kategoriene strategirepertoar, strategidistribusjon og strategieffektivitet er kategorier jeg identifiserte gjennom å analysere hvilke oppgaver som la til rette for ulike regnestrategier, for deretter å telle opp de ulike regnestrategiene. I utgangspunktet kan det minne om en kvantitativ tilnærming, hvor man er både systematisk og objektiv (Clark et al., 2021). Likevel vil jeg argumentere for at jeg også her hadde en kvalitativ tilnærming, da jeg selv måtte tolke hvordan jeg ville definere de ulike oppgavene som ble brukt i læreverket. Jeg opplevde at jeg kunne tolke oppgavene på ulike måter, og måtte derfor begrunne alle valgene jeg tok. Noen oppgaver kunne for eksempel inneholde flere elementer slik at jeg kunne plassere dem under flere regnestrategier.

For å kunne analysere i hvor stor grad de ulike regnestrategiene i DragonBox Skole blir lagt til rette for, måtte jeg undersøke i hvilken grad de ulike regnestrategiene blir fremstilt i læreverket. Da jeg så på de ulike oppgavene, la jeg fort merke til at regnestrategiene noen ganger ble eksplisitt fremstilt i læreverket, mens de andre ganger hadde en mer implisitt framtoning. Det vil si at elevene noen ganger fikk en tydelig innføring i hvordan det er forventet at de skal gjøre regneoppgaven, mens de andre ganger må tenke mer selv på hvilken strategi de har lyst til å anvende. Selv om elevene noen ganger ikke får et eksplisitt eksempel å følge, vil læreverket på noen oppgaver legge til rette for spesifikke regnestrategier ved å blant annet tilby visuell støtte som passer bedre til enkelte regnestrategier. Et eksempel fra læreverket er hvordan Mattestreker 3B i delkapittel 6.11 legger opp til at elevene skal bruke tallinja for å løse subtraksjonsstykket. Tidligere i boka bruker elevene tallinje når de jobber med regnestrategien indirekte addisjon, hopp og kompensering, og det er etter min vurdering disse regnestrategiene som implisitt blir lagt til rette for gjennom en slik regneoppgave.



Bilde 13: *Velg din egen strategi med tallinje* (Mattestreker 3B) (DragonBox, 2021b)

For å kunne kategorisere i hvilken grad de ulike regnestrategiene blir lagt til rette for i de ulike oppgavetypene, har jeg derfor opprettet et analyseverktøy basert på hvor tydelig de ulike regnestrategiene kommer fram i oppgavene. Jeg har valgt å kategorisere oppgavene etter disse kriteriene: 1) det kommer et eksplisitt eksempel av regnestrategien som elevene kan følge (eksplisitt regnestrategi), 2) det er visuell støtte som egner seg bedre til spesifikke regnestrategier (visuell støtte), eller 3) det legges ikke til rette for spesifikke regnestrategier (ingen spesifikk regnestrategi). I tillegg finnes det oppgaver inne i subtraksjonskapitlene som ikke inneholder subtraksjonsstykker. Disse kategoriseres som 4) ikke relevant. Jeg vil også påpeke at jeg har valgt å kategorisere disse oppgavene uavhengig av det lærerveiledningen sier. Dette valget har jeg tatt fordi lærerveiledningen ikke direkte er tilgjengelig for elevene, og at bruk av lærerveiledning i stor grad avhenger av hvilken lærer som underviser i faget. I tillegg til å kategorisere i hvilken grad de ulike regnestrategiene blir lagt til rette for, har jeg også valgt å beskrive hvilken regnestrategi det er lagt til rette for og hvilken visuell støtte som blir brukt. Regnestrategiene som ikke har et eksplisitt eksempel, vil være min egen tolkning av læreverket, og er derfor under kategorien fortolkende kode.

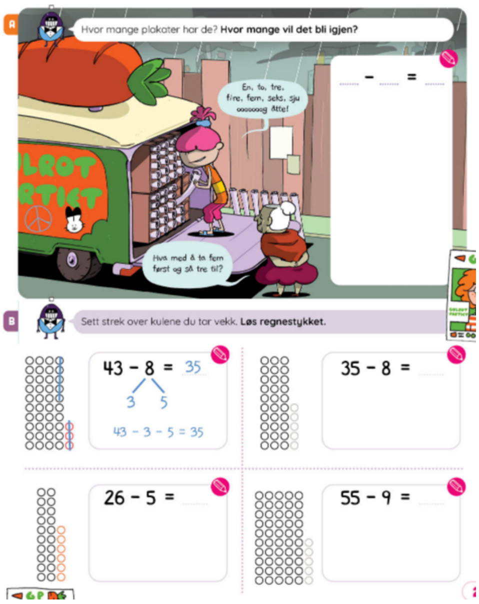
For å beskrive analyseverktøyet mitt nærmere, har jeg valgt å presentere et eksempel av en tabell som jeg fylte ut under analyseprosessen. Denne tabellen består av analysen jeg gjorde av kapittel 2 *Subtraksjon* i Mattestreker 3 A (se tabell 4).

Oppgave	Eksplisitt eksempel	Visuell støtte	Ingen spesifikk regnestrategi	Type visuell støtte	Hvilken strategi	Kommentar
2.1 A			1	Tegneserie	Ingen	På samme side som regnestrategien *dele opp subtrahend*.
2.1 B	4 (1)			Mengdemodell	Dele opp subtrahend	
2.2 A			1	Tegneserie	Ingen	
2.2 B	4 (1)			Mengdemodell	Dele opp i tiere og enere	
2.2 C			4	Noomer	Ingen	
2.2 D			8	Ingen	Ingen	To og to oppgaver hører sammen. Kompensering som læringsmulighet (ikke eksplisitt nevnt).
2.3 A	4 (1)			Mengdemodell	Dele opp subtrahend	Elevene må sette opp tallene i regnestykket selv. Krever større forståelse.
2.3 B			4	Noomer	Ingen	
2.4 A	1 (1)			Tallinje	Kompensering	
2.4 B	4			Tallinje	Kompensering	Eksplisitt eksempel i 2.4 A.
2.5 A	1 (1)			Tallinje	Indirekte addisjon	
2.5 B	4			Tallinje	Indirekte addisjon	Eksplisitt eksempel i 2.5 A.
2.6 A		3		Tallinje	Konstant differanse	Strategien konstant differanse har ingen eksplisitte eksempler.
2.6 B		4		Tallinje	Konstant differanse	To og to oppgaver hører sammen
2.7 A		4		Mengdemodell	Dele opp subtrahend eller i enere og tiere	Oppgaven legger opp til at elevene kan velge hvilken måte de ønsker å dele opp subtraksjonsstykket på
2.7 B		6		Mengdemodell	Dele opp subtrahend eller i enere og tiere	Oppgaven legger opp til at elevene kan velge hvilken måte de ønsker å dele opp subtraksjonsstykket på
2.8 A		1		Tallinje	Kompensering, indirekte addisjon eller konstant differanse	Oppgaven legger opp til at elevene kan velge hvilken måte de ønsker å løse subtraksjonsstykket på med tallinje
2.8 B		5		Tallinje	Samme som 2.8A	Samme som 2.8 A
2.9 A			1	Ingen	Ingen	Stort tegneområde hvor eleven har plass til å lage for eks. tallinje eller mengdemodell.

Tabell 4: Analyseverktøy kapittel 2 Subtraksjon Mattestreker 3A

Tallene som står i parentes, viser til hvor mange av oppgavene som er eksplisitte eksempler.

For å illustrere hvordan jeg har gått fram i analyseprosessen av læreverket, vil jeg nå beskrive hvordan jeg har analysert oppgave 2.1 i Mattestreker 3A (se bilde 14: *Oppgave 2.1 Mattestreker 3A*). Bildet viser at oppgave 2.1 A ikke har noen spesifikk regnestrategi, mens oppgave 2.1 B har en eksplisitt regnestrategi ved å inkludere en eksempeloppgave som anvender regnestrategien *dele opp subtrahend*. Som type visuell støtte har jeg valgt i oppgave 2.1 A å ta med tegneserie som en type visuell støtte. Elevene bruker konteksten til å gi mening til tallene, samtidig som de kan bruke den som en type mengdemodell og telle antall plakater. I kommentarfeltet har jeg også valgt å legge inn en kommentar om at siden regnestrategien *dele opp subtrahend* blir introdusert med eksempeloppgave på samme side som en regneoppgave som ikke har en spesifikk regnestrategi, er det stor sjanse for at elevene anvender denne regnestrategien på begge oppgavene. Denne kommentaren er et eksempel på en fortolkende kode som jeg har forklart tidligere i metodekapittelet.



Bilde 14: *Oppgave 2.1 Mattestreker 3A (DragonBox, 2021a)*

Analyseprosessen som er beskrevet over, bidrar til å finne svar på flere av forskningsspørsmålene mine som er presentert i innledningen: Jeg får kartlagt hvilket strategirepertoar DragonBox Skole 3 introduserer for elevene innenfor subtraksjon (forskningsspørsmål 1) og jeg får svar på hvor stor del av kapitlene som handler om de ulike regnestrategiene, henholdsvis strategidistribusjon og strategieffektivitet (forskningsspørsmål 2 og 3). Alle disse funnene er med på å besvare den overordnende problemstillingen om hvordan DragonBox Skole legger til rette for matematisk fleksibilitet innenfor regneoperasjonen subtraksjon på 3. trinn. Likevel er det et av forskningsspørsmålene mine som krever mer forskning. Det siste forskningsspørsmålet mitt handler om hvordan de ulike regnestrategiene mine blir presentert i læreverket, altså strategivalg. For å svare på dette forskningsspørsmålet har jeg valgt å gå systematisk gjennom de ulike læringsressursene og kategorisert de ulike oppgavene etter oppgavetype. Jeg har kartlagt hvor mange oppgaver som sammenligner strategier, hvor mange oppgaver som viser til en eksplisitt beskrivelse av en regnestrategi og hvor mange oppgaver som legger opp til et åpent, utforskende eller problemløsende strategivalg. Deretter har jeg sett om de ulike regnestrategiene blir presentert uavhengig av hverandre eller om de blir presentert parallelt.

Som analysemetode er kvalitativ innholdsanalyse fortolkende. Det vil si at man som forsker har stor innflytelse på hvilket resultat man kommer ut med. Analysemetoden egner seg til å utforske kompleksiteten i datamaterialet, og på den måten kan jeg som forsker ta med alt jeg føler er relevant for studien (Larsen, 2017). I tillegg danner kategoriene jeg har brukt grunnlag for den analysen jeg har gjennomført og de resultatene jeg har konkludert med. Det vil si at andre forskere, som har tatt utgangspunkt i andre kategorier og/eller annen teori, kan ha analysert det samme datamaterialet på en annen måte, og derfor funnet andre resultater. Jeg har tatt beslutninger på grunnlag av hva jeg som forsker oppfatter som viktig, og det bør jeg og andre som leser studien ha et bevisst forhold til.

3.6 Mål for kvalitet på studien

I denne masteroppgaven ønsker jeg å vise en studie av god kvalitet. Jeg ønsker å være bevisst på hvilke fallgruver man kan bevege seg inn i og dermed minske risikoen for at valg og avgjørelser jeg har tatt vil føre til feilaktige resultater. Nedenfor vil jeg derfor gå inn på begrepene validitet og reliabilitet, samt hvordan jeg bruker disse begrepene for å sikre studiens kvalitet. Deretter vil jeg gjøre rede for hvilke etiske betraktninger jeg har tatt i arbeid med denne masteroppgaven. Det er viktig å være bevisst hvordan valg og refleksjoner er med på å styrke oppgavens kvalitet (Clark et al., 2021).

3.6.1 Validitet

Validitet handler om at man undersøker det man faktisk prøver å undersøke (Clark et al., 2021). I denne masteroppgaven vil validiteten avhenge av om studien virkelig har undersøkt hvordan Dragonbox Skole legger til rette for matematisk fleksibilitet. Teorikapittelet legger grunnlag for hvilke elementer jeg ser på som en sentral del av matematisk fleksibilitet, og sammen med rammeverket setter teorien tydelige rammer rundt studien. Det at aspektene ved matematisk fleksibilitet er tydelig forankret i litteraturen, styrker validiteten til studien (Clark et al., 2021; Creswell & Poth, 2018). I tillegg er rammeverket tidligere blant annet brukt av Sievert et. al. (2019) for å analysere kvaliteten på utvikling av matematisk fleksibilitet i læreverk i matematikk. Faglitteraturen jeg har brukt er også fagfellevurdert og henvist til av flere ulike forskere (for eksempel Hickendorff (2020), Lamaire & Siegler (1995), Duval (2006) og Torbeyns et al. (2009)), noe som også er med på å styrke studiens validitet. Likevel anser jeg at det er viktig å være kritisk til egen studie. Selv om studien min er forankret i fagfellevurdert litteratur, vil det alltid være alternativ litteratur som er valgt bort. Litteraturen har jeg valgt med utgangspunkt i mitt kunnskapsnivå på det tidspunktet masteroppgaven ble skrevet, og vil derfor ikke representere all relevant litteratur.

For å styrke oppgavens validitet har jeg valgt å representere funnene mine på flere forskjellige måter. Creswell & Creswell (2018) argumenterer for at validiteten styrkes ved at man varierer hvordan man formidler resultatene. På den måten kan resultatene bli enklere å sette i sammenheng. I tillegg sier de at forskeren bør bruke rike beskrivelser for å gi et nøyaktig bilde av datamaterialet og analysen som har blitt gjennomført (Creswell & Creswell, 2018). Jeg har brukt eksempler fra læreverket for å vise sammenhengene mellom mine funn og de konkrete oppgavene i læreverket. I tillegg har jeg forklart hvordan jeg har tolket de ulike oppgavene og funnene jeg har gjort gjennom skrevet tekst. Jeg har differensiert mellom sitater fra læreverket samt egne tolkninger av læreverket, tidligere beskrevet som deskriptive koder, fortolkende koder og forklarende koder. Teksten vil derfor forklare hvilke valg og hvilke tolkninger jeg har gjort av selve læreverket, samt hvilke formuleringer som er direkte hentet fra læreverket. Resultatene har jeg også systematisert i tabeller, slik at leseren enklere får oversikt over hovedfunnene.

3.6.2 Reliabilitet

Begrepet reliabilitet går ut på hvor pålitelig datamaterielt er, og baserer seg på om andre kan få de samme resultatene dersom de bruker samme metode (Clark et al., 2021). Analysemetoden jeg har brukt baserer seg på forskerens tolkninger, som kan være utfordrende i forhold til studiens reliabilitet. Det krever at jeg som forsker er transparent i mine valg og vurderinger, og eksplisitt beskriver hvordan jeg har gått fram for å analysere og tolke datamaterialet.

For å sikre reliabiliteten til studien er det viktig å vurdere og vise frem troverdigheten og påliteligheten til dokumentene som ble gjennomgått i innholdsanalysen. Av den grunn bør det komme fram hvem som har produsert dokumentene, hvilken målgruppe dokumentene er skrevet for, hva som er formålet med dokumentene, samt hvor gamle dokumentene er (Clark et al., 2021). Utviklerne av DragonBox Skole omtaler seg selv som et team bestående av spillutviklere, designere, engasjerte lærere og pedagogiske eksperter. Formålet med læreverket er å skape engasjerende matematikk, hvor elevene får ta del i historier, digitale og fysiske konkreter. Gjennom disse læringsverktøyene skal elevene oppleve matematikk som et levende og spennende fag (DragonBox, u.å.-b). Læreverket er utviklet for bruk på småtrinnet, og ble utviklet etter kompetansemålene som står i LK20 (DragonBox, 2024). Datamaterialet er et relativt nytt læreverk som skal fylle alle krav det norske utdanningsdirektoratet har satt i sine læreplaner. Siden utviklerne er en bedrift bestående av flere individer med forskjellig kunnskapsbakgrunn, kan man anta at det er et godt gjennomtenkt læreverk som har dratt fordel av de ulike kompetanseområdene disse individene representerer. På en annen side vil det være vanskelig å vite hvilket kunnskapsnivå og hvilken innsikt som ligger bak de ulike delene av læreverket. I tillegg har produsentene bak DragonBox Skole et ønske om å selge læreverket til flere skoler. Det vil si at elevers læring ikke er den eneste faktoren som spiller inn i utformingen av DragonBox Skole. For at skoler og kommuner skal kjøpe inn læreverket, bør for eksempel også lærere se fordelene, ved blant annet at oppleggene skal være gjennomførbare og skape interesse blant elevene. I tillegg vil både økonomi og andre rammefaktorer spille inn på læreverkets kvalitet.

Videre handler reliabilitet om at jeg som forsker skal være konsistent i min analyse av dokumentene (Creswell & Creswell, 2018). Gjennom analysen har jeg derfor dobbeltsjekket kodene og hvordan jeg har plassert dem i analyseverktøyet. Jeg har gått tilbake til forskningsspørsmålene og sett på hvordan jeg har definert de ulike kategoriene. Det vil si at jeg har kodet hele datamaterialet etter de samme premissene. I tillegg har jeg prøvd å dokumentere hvilke steg jeg har tatt i analyseprosessen, slik at andre forskere kan bruke samme analysemetode og få lignende resultat.

3.6.3 Etiske betraktninger

Lærebokanalyse innebærer flere etiske vurderinger, selv om man ikke er i dirkete kontakt med andre mennesker. Forskerens rolle innebærer å gjøre flere valg, bearbeidinger og fortolkninger av datamaterialet, som kan gi uttrykk for forskerens subjektivitet (Creswell & Creswell, 2018). Det etiske ansvaret handler i denne prosessen om å dokumentere og underbygge sine fortolkninger, slik at man ivaretar studiens validitet og reliabilitet (Creswell & Creswell, 2018). Det er derfor viktig at jeg ivaretar åpenhet rundt studien og begrunner ulike valg og vurderinger slik at andre kan se hvorfor jeg har tatt de valgene jeg har tatt. Et eksempel her kan være valg av rammeverk og litteratur. Det etiske ansvaret hviler her på hvilke krav jeg har satt til kildene/referansene mine. Kilder er det jeg blant annet baserer min matematiske kunnskap på, og er til for å underbygge studiens forankring i det matematikkdidaktiske fagfeltet (Clark et al., 2021). I denne masteroppgaven har jeg bare valgt å bruke artikler som er fagfellevurdert, slik at jeg vet at kildene er kvalitetssikret av andre innenfor samme fagfelt. I tillegg har jeg sett på hvor mange som refererer til de samme kildene som jeg har gjort, ved å bruke Research Rabbit (https://www.researchrabbit.ai/) som søkemonitor. På denne måten kan jeg se hvor stor oppslutning og annerkjennelse de ulike teoriene har innenfor forskningsfeltet.

NESH (den nasjonale forskningsetiske komité samfunnsvitenskap og humaniora) har utviklet retningslinjer som skal ivareta forskningsmessig etisk ansvar innenfor samfunnsvitenskap og humaniora. De viser blant annet til god henvisningsskikk, åpenhet, etterprøving og kritikk, fri og uavhengig forskning og god formidling (NESH, 2021). Dette er noe jeg har vært bevist på mens jeg har skrevet masteroppgaven. Jeg har også prøvd å være bevisst på mine egne fordommer, da dette også er et viktig aspekt når det kommer til å gjøre en god etisk analyse. Som forsker har man ofte med seg en forforståelse inn i sin egen studie. Ved å reflektere over egne holdninger og verdier, vil jeg kunne minimere hvor stor innvirkning disse vil ha på studiens resultater. Likevel vil det være naivt å tenke at man ikke påvirker sin egen studie, og jeg vil derfor poengtere at mine funn på en eller annen måte er blitt påvirket av min egen forforståelse. For studier hvor mennesker er en del av datamaterialet, spiller NESH (2021) en viktig rolle for at forskningen skal ivareta blant annet personvern. Det forskningsetiske ansvaret er strengere dersom forskningsobjektene er sårbare grupper, som for eksempel barn (NESH, 2021). Siden denne masteroppgaven er en innholdsanalyse av et matematisk læreverk, vil ikke personvern være et hensyn som jeg må ta hensyn til i denne studien. Videre vil jeg presentere studiens analyse og resultater.

4 Analyse og resultater

I dette kapittelet vil jeg presentere min analyse av læreverket DragonBox Skole. Mitt mål for analysen er å se på hvordan læreverket legger til rette for utvikling av matematisk fleksibilitet, og jeg vil gå nærmere inn på de ulike kategoriene strategirepertoar, strategidistribusjon, strategieffektivitet og strategivalg.

4.1 Strategirepertoar

Gjennom analysen har jeg funnet ut at læreverket DragonBox Skole 3 har introdusert seks forskjellige regnestrategier som elevene kan bruke i subtraksjon med flersifrede tall. De ulike regnestrategiene som elevene får tilgang til gjennom DragonBox Skole er kompensere, hopp, dele opp i tiere og enere, dele opp subtrahend, konstant differanse og indirekte addisjon. Jeg har kategorisert de ulike regnestrategiene etter inspirasjon fra Hickendorf et al. (2019) (se tabell 3). De regnestrategiene som blir presentert i læreverket har derfor potensial til å bli en del av elevenes strategirepertoar. Elevenes strategirepertoar består av de regnestrategiene som elevene har kunnskap om.

Algoritme (enkeltsiffer)	Hopp	Dele opp tiere og enere	Kompensere	Dele opp subtrahend	Indirekte addisjon	Konstant differanse
7 12 82 <u>- 69</u> = 13	82 – 60 =22 22 – 9 = 13	80 – 60 = 20 2 – 9 = -7 20 – 7 = 13	82 – 70 = 12 12 + 1 = 13	82 – 60 – 7 – 2 80 – 60 – 7 20 – 7 =13	69 + 3 = 72 72 + 10 = 82 3 + 10 = 13	82 - 69 80 - 67 =13

Tabell 3: *Regnestrategier innenfor subtraksjon* (inspirert av Hickendorf et al. (2019), videreutviklet av meg)

For å tydeliggjøre resultatene av analysen, har jeg satt opp en tabell som viser hvilke regnestrategier som blir brukt i de ulike læringsressursene til DragonBox Skole 3 (se tabell 5). Disse regnestrategiene påvirker hvilke læringsmuligheter elevene får innenfor utvikling av matematisk fleksibilitet, og danner også grunnlaget for videre arbeid med subtraksjon. Oversikten viser at regnestrategiene som blir introdusert i læreverket DragonBox Skole 3 er regnestrategier som tar utgangspunkt i hele tallet. Det vil si at plassverdien til tallene ivaretas gjennom hele regneprosessen slik at regnestrategiene fremmer en relasjonell forståelse for matematikk. Analysen viser også at det ikke forekommer introduksjon av regnestrategien standard algoritme, som er en regnestrategi som tar utgangspunkt i enkeltsiffer, og på den måten fremmer en instrumentell forståelse.

	Algoritme	Hopp	Dele opp subtrahend	Kompensasjon/ Kompensering	Dele opp i tiere og enere	Indirekte addisjon	Konstant differanse
Mattestreker 3A	Nei	Nei	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja
Mattestreker 3B	Nei	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Nei
DragonBox-appen	Nei	Nei	Ja	Ja	Ja	Ja	Nei
Mattesnakk	Nei	Nei	Nei	Nei	Nei	Nei	Nei

Tabell 5: *Oversikt over ulike regnestrategier i DragonBox Skole 3*

Oversikten over de ulike regnestrategiene i DragonBox Skole 3 viser også at ikke alle de ulike regnestrategiene blir vektlagt i de ulike læringsressursene. Mattesnakk er en problemløsningsbok som legger opp til en utforskende tilnærming til matematikken. Disse oppgavene vil derfor være åpne oppgaver hvor elevene selv kan bestemme hvilke strategier de ønsker å benytte seg av. Disse problemløsningsoppgavene vil derfor ikke bidra til et større strategirepertoar blant elevene. Jeg vil komme tilbake til denne oppgavetypen senere i kapittelet når jeg omtaler kategorien strategivalg. Det framkommer også av analysen at regnestrategien konstant differanse bare blir brukt i henholdsvis Mattestreker 3A samt DragonBox-appen, mens regnestrategien hopp bare blir brukt i Mattestreker 3B samt DragonBox-appen. Samtidig blir regnestrategiene dele opp subtrahend, kompensering, dele opp i tiere og enere samt indirekte addisjon brukt i både Mattestreker A og B. Det vil si at elevene får mer erfaring med enkelte regnestrategier når de jobber med subtraksjon i læreverket DragonBox Skole.

Jeg vil også påpeke at kapittel 6 i mattestreker 3B handler om både addisjon og subtraksjon, samt at det er en del oppgaver som handler om å runde av til nærmeste tier. Siden kapittelet ikke bare handler om subtraksjon, har jeg valgt å bare analysere de oppgavene som handler om subtraksjon. Når det er sagt, vil jeg understreke at både addisjonsoppgaver og avrundingsoppgaver kan forsterke elevenes forståelse rundt subtraksjon. Addisjon er den omvendte regneoperasjonen til subtraksjon, og man kan derfor bruke addisjon til å løse subtraksjonsstykker med å bruke regnestrategien indirekte addisjon. Avrunding, på sin side, er viktig i regnestrategien kompensering, og vil derfor også være relevant for elevers utvikling av fleksible regnestrategier innenfor subtraksjon.

For å få en bedre forståelse for hvordan jeg har analysert de ulike regnestrategiene, har jeg i tillegg til tabell 5 valgt å inkludere eksempeloppgaver. Eksempeloppgavene vil illustrere hvordan de ulike regnestrategiene innenfor subtraksjon blir introdusert og brukt i DragonBox Skole for 3. trinn. Nedenfor har jeg valgt å presentere et utvalg eksempeloppgaver innenfor hver enkelt regnestrategi som er representert i læreverket.

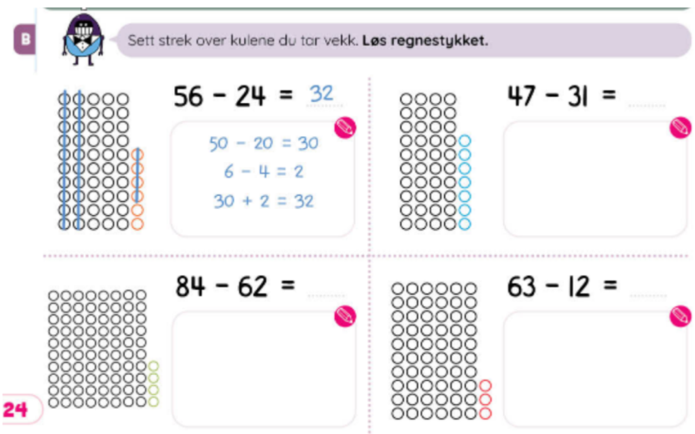
4.1.1 Regnestrategien dele opp subtrahend

Den første regnestrategien som presenteres er *dele opp subtrahend*. Denne regnestrategien går ut på at man deler opp det bakerste tallet i subtrahenden slik at minuenden først blir til en hel tier. Når minuenden er en hel tier, er det lettere å ta bort det som er igjen av subtrahenden. Regnestrategien presenteres for eksempel i oppgave 2.3 A i Mattestreker 3 A (se bilde 15. Her beskrives regnestykket 64 – 7 = 57 ved at 7 deles opp i 4 og 3. Siden 7 kan deles opp i 4 og 3, tar man først bort 4, og sitter da igjen med regnestykket 60 – 3, som er mye enklere. I tillegg til symbolene får elevene også en mengdemodell som de kan bruke til å sette strek over den mengden som skal bort.

Bilde 15: *Dele opp subtrahend* (Mattestreker 3 A) (DragonBox, 2021a)

4.1.2 Regnestrategien dele opp i tiere og enere

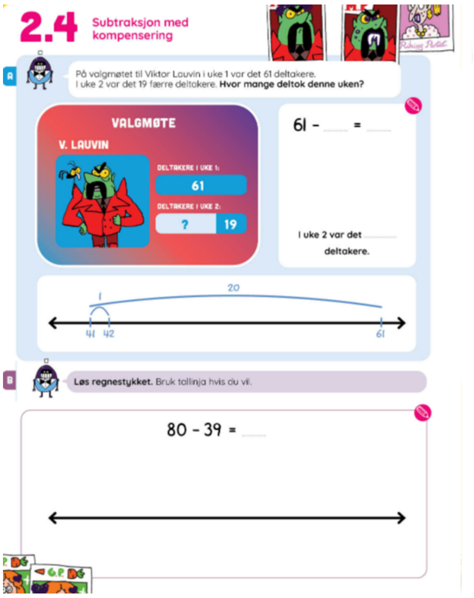
Regnestrategien *dele opp i tiere og enere* blir eksempelvis presentert i oppgave 2.2 B i Mattestreker 3 A (se bilde 16). Regnestrategien går ut på å subtrahere tiere fra tiere og enere fra enere. Som illustrert i bilde 2323 *Tiere og enere,* viser eksempelet hvordan man kan løse regnestykket 56 – 24 med å først trekke 20 fra 50 og 4 fra 6, før man deretter adderer de tallene man sitter igjen med, i dette tilfellet 30 + 2. I tillegg til symboler, så illustrerer læreverket regnestrategien med en mengdemodell. Mengdemodellen er delt inn i rekker på ti, for å illustrere hvor mange tiere minuenden består av. Enerne er illustrert på høyre side av tier-rekkene. Som en ekstra detalj, så samsvarer fargene i mengdemodellen med fargene til noomene. Noomen som representerer ti (Deka) er svart, mens noomen som representerer tallet seks (Hex) er oransje. Her kan elevene kjenne igjen de ulike fargene og på den måten vite hvilke tall mengdemodellen består av. Regnestrategien *dele opp i tiere og enere* beskrives i mengdemodellen med å sette strek over antall tiere på venstre side av modellen, mens det settes strek over antall enere på høyre side av modellen. På den måten skilles det mellom om det er tiere eller enere som trekkes fra. Svaret vil bestå av delen av mengdemodellen som ikke er satt strek over.



Bilde 16: *Tiere og enere* (Mattestreker 3A) (DragonBox, 2021a)

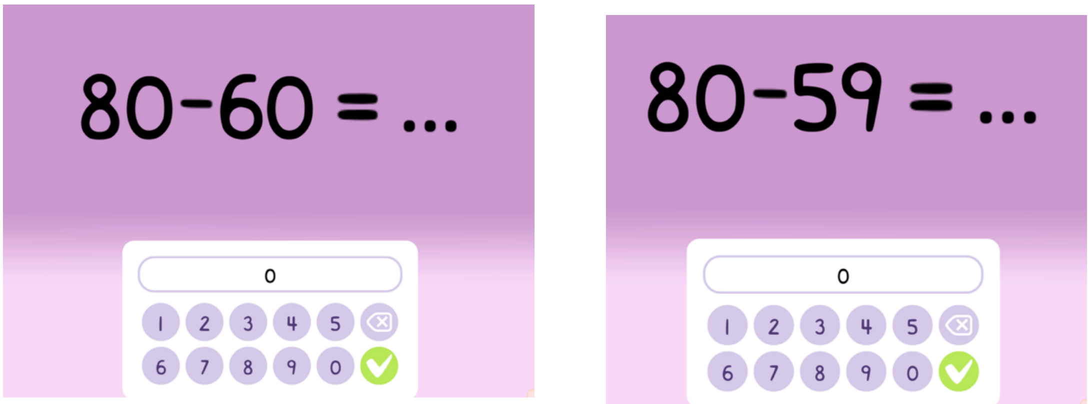
4.1.3 Regnestrategien kompensering

Kompensering er en regnestrategi som blir introdusert i DragonBox Skole 3, og er som sagt en regnestrategi hvor man runder opp eller ned til et enklere tall før man trekker fra. Regnestrategien egner seg derfor godt dersom subtrahenden ligger nært et rundt tall. Eksempelet nedenfor viser hvordan regnestrategien blir introdusert i oppgave 2.4 A i Mattestreker 3A (se bilde 17: *Kompensering med* tallinje). Her setter læreverket subtraksjonsstykket inn i en kontekst om antall deltakere på et valgmøte. På valgmøtet i uke 1 var det 61 deltakere, og i uke 2 var det 19 færre deltakere. Oppgaven går ut på å finne ut hvor mange deltakere det var i uke 2. Læreverket viser utregningen til oppgaven ved å ta i bruk tallinje som visuell støtte. Her ser man at man trekker fra 20 deltakere, før man deretter legger til en deltaker da man i utgangspunktet har tatt bort en for mye. Elevene skal også selv skrive inn tallene i som hører til regnestykket. Etter dette eksempelet får elevene selv prøve å bruke kompensering som regnestrategi da de får nye oppgaver med en tom tallinje som støtte. Regnestykkene består av tall som egner seg bra til avrunding, som vist i eksempelet 80 – 39.



Bilde 17: *Kompensering med tallinje (DragonBox, 2021a)*

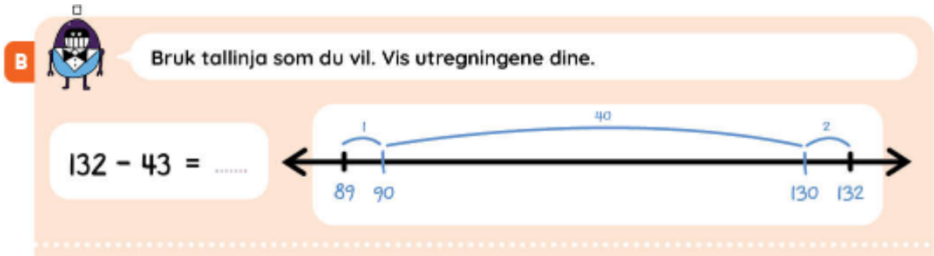
Det blir også lagt opp til kompensering i DragonBox-appen, hvor elevene blant annet får regnestykker som hører sammen. Eksempelet under viser hvordan elevene skal se sammenhengen mellom to subtraksjonsstykker (se bilde 18 og 19: *Kompensering i app*). Elevene skal bruke det første regnestykket til å finne svaret på det andre. Her vises først regnestykket 80-60, mens det andre regnestykket er 80-59. Poenget er at elevene skal se at det går an å bruke avrunding for å gjøre regnestykket enklere, og i dette eksempelet se at svaret til det første regnestykket er én mindre enn i det andre regnestykket.



Bilde 18 og 19: *Kompensering i app (DragonBox, 2023)*

4.1.4 Regnestrategien hopp

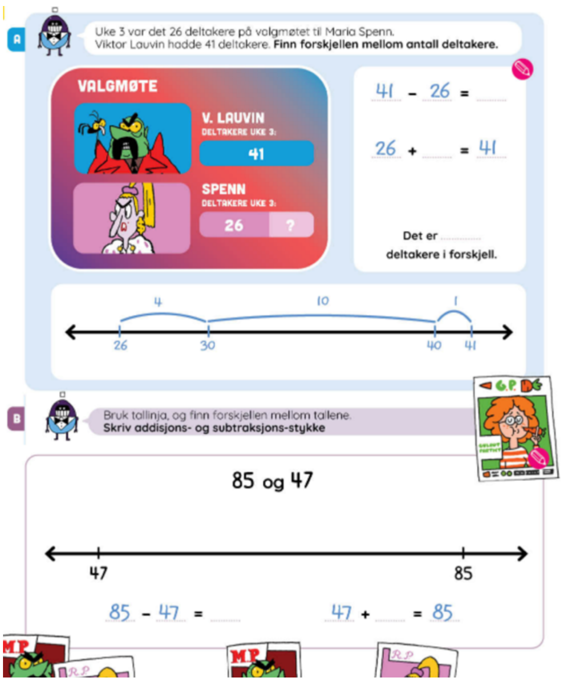
Hopp er en regnestrategi som også blir brukt i DragonBox Skole 3, men den kommer ikke like tydelig frem i læreverket som noen av de andre regnestrategiene. Hopp går ut på å subtrahere deler av subtrahenden i ulike steg, slik at man kan «hoppe» seg tilbake til svaret. Regnestrategien kan noen ganger minne litt om kompensering da man gjerne hopper til tall med hele tiere, men man bruker ikke avrunding på samme måte som man gjør i kompensering. Eksempelet nedenfor er oppgave 6.3 B i Mattestreker 3 B, og viser regnestykket 132-43 (se bilde 20: *Regnestrategien hopp*). Regnestrategien illustreres ved hjelp av tallinje, hvor man hopper stegvis nedover fra 132. I dette eksempelet hopper man først til 130, så til 90, før man til slutt hopper til 89. De ulike hoppene blir da 2, 40 og 1, som er 43 til sammen. Svaret på regnestykket blir da 89.



Bilde 20: *Regnestrategien hopp* (Mattestreker 3B) (DragonBox, 2021b)

4.1.5 Regnestrategien indirekte addisjon

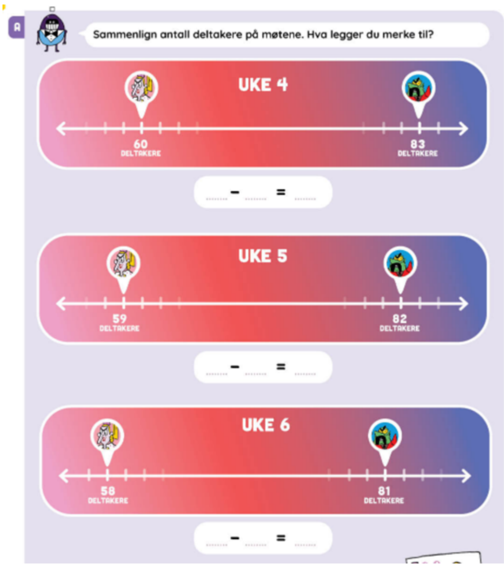
Indirekte addisjon blir også introdusert i DragonBox Skole 3. Denne strategien drar fordel av at addisjon er den omvendte operasjonen av subtraksjon, og bruker derfor addisjon til å løse subtraksjonsstykker. Jeg har valgt å vise flere eksempeloppgaver på denne regnestrategien, da det er en regnestrategi som læreverket anvender på flere måter. I eksempelet under ser man oppgave 2.5 i Mattestreker 3 A (se bilde 21: *Indirekte addisjon*). Her legger læreverket opp til at man skal se sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon ved at regnestykket settes opp på begge måtene rett ved siden av hverandre. I tillegg settes tallene inn i en kontekst, og har på den måten større sjanse for å gi mening til elevene. Eksempelet viser subtraksjonsstykket 41 − 26 = _____ samtidig som addisjonsstykket 26 + ____ = 41 vises. Som visuell støtte har læreverket også tatt med en tallinje hvor det illustreres en måte man kan hoppe mellom 26 og 41. Oppgavene under legger også opp til at elevene skal se sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon med å sette opp et regnestykke på begge måtene.



Bilde 21: *Indirekte addisjon* (Mattestreker 3A) (DragonBox, 2021a)

4.1.6 Konstant differanse

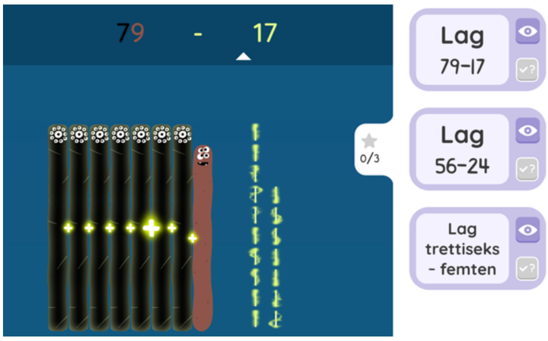
Konstant differanse er, i likhet med hopp, en regnestrategi som ikke kommer like tydelig frem i læreverket som enkelte av de andre regnestrategiene. Med det mener jeg at det ikke gis noen eksplisitte eksempler som elevene kan se etter om de er usikre på hva de skal gjøre. Eksempelet under viser oppgave 2.5 A i Mattestreker 3A (se bilde 22: *Konstant differanse*). Her får elevene beskjed om å sammenligne antall deltakere og sette opp et subtraksjonsstykke som passer. Elevene skal sammenligne antall deltakere tre ganger hvor antall deltakere minker med én i både minuend og subtrahend hver gang. Målet er at elevene skal se at svarene på regnestykkene er det samme, siden differansen mellom de to tallene er lik i alle oppgavene.

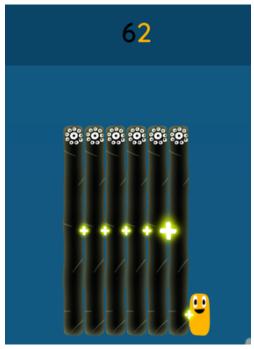


Bilde 22: *Konstant differanse* (Mattestreker 3A) (DragonBox, 2021a)

4.1.7 Oppgaver med flere regnestrategier

Noen oppgaver innenfor DragonBox Skole 3 legger opp til mer enn én regnestrategi. Det vil for eksempel være noen digitale oppgaver som både legger opp til regnestrategien *dele opp subtrahend* og regnestrategien *dele opp i tiere og enere*. Nedenfor har jeg tatt med en eksempeloppgave fra DragonBox-appen hvor elevene får et oppdrag om å lage digitale konkreter, i form av noomer, for å løse et flersifret subtraksjonsstykke. I appen blir minuenden illustrert med noomer, mens subtrahenden blir vist med laser som tar bort noomer (se bilde 23 og 24: *Dele opp i app*). Jeg har lagt merke til at denne oppgaveformen av og til legger opp til regnestrategien *dele opp subtrahend*, mens den andre ganger legger opp til regnestrategien *dele opp i tiere og enere*. Hvilken regnestrategi som blir vist når man svarer på regneoppgaven, er avhengig av hvilke tall regneoppgaven består av. Dersom det bakerste sifferet i subtrahenden er høyere enn det bakerste sifferet i minuenden, vil oppgaven vise regnestrategien *dele opp subtrahend.* Dette illustreres ved at laseren deles opp og flyttes over til en hel tier i minuenden. På den måten vil elevene forstå at det går an å trekke fra deler av subtrahenden først, før man senere kan trekke fra resten. Dersom det bakerste sifferet i subtrahenden derimot er mindre enn det bakerste sifferet i minuenden, vil det ikke være behov for å dele opp subtrahenden på samme måte. Da vil laseren først ta bort enerne, før den til slutt tar bort tierne, slik som strategien *dele opp i tiere og enere* går ut på. På grunn av denne beskrivelsen har jeg valgt å plassere denne oppgavetypen innenfor både strategikategorien *dele opp i tiere og enere* og *dele opp* subtrahend.





Bilde 23 og 24: Dele opp i app (DragonBox) (DragonBox, 2023)

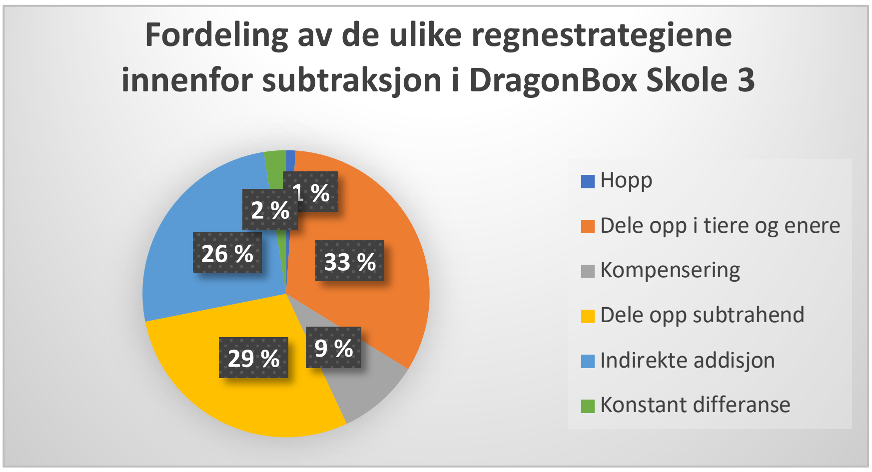
Siden oppgaven er digital, er det også en dynamisk oppgave hvor elevene kan prøve ut forskjellige tall og eksperimentere seg fram. Subtraksjonsstykket blir representert både gjennom symboler og noomer, og for å løse oppgaven må elevene se sammenhengen mellom de to representasjonsformene. Dette er en oppgavetype som går igjen i DragonBox-appen.

4.2 Strategidistribusjon

Etter analysen ser jeg at oppgavene som legger opp til å anvende de forskjellige regnestrategiene innenfor subtraksjon, opptar 59,91% av plassen av til alle subtraksjonsoppgavene i DragonBox Skole 3. Det vil si at 40,09 % av oppgavene som er subtraksjonsoppgaver ikke legger opp til en spesifikk regnestrategi. Jeg har valgt å telle hver deloppgave som en oppgave, da det gir mest riktig antall på den relative frekvensen. Det er også viktig å se på hvordan de forskjellige regnestrategiene opptar ulik plass i læreverket. Dersom vi bare ser på de subtraksjonsoppgavene som inneholder regnestrategier, vil dele opp i tiere og enere være den regnestrategien som opptar mest plass med 33%, mens hopp opptar minst plass med bare 1%. Videre utgjør dele opp subtrahend 29%, indirekte addisjon 26 %, kompensering 9%, mens konstant differanse har 2%. For en systematisk oppstilling av fordelingen av de ulike regnestrategiene innenfor subtraksjon, se tabell 6.

Regnestrategi	Prosent
Dele opp i tiere og enere	33%
Dele opp subtrahend	29%
Indirekte addisjon	26%
Kompensering	9%
Konstant differanse	2%
Hopp	1%

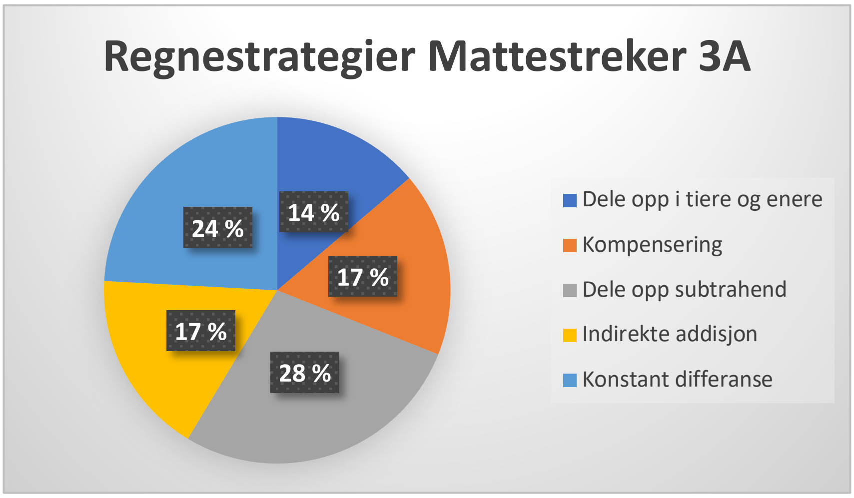
Tabell 6: *Fordeling av ulike regnestrategier innenfor subtraksjon*



Tabell 7: *Fordeling av de ulike regnestrategiene innenfor subtraksjon i DragonBox Skole 3*

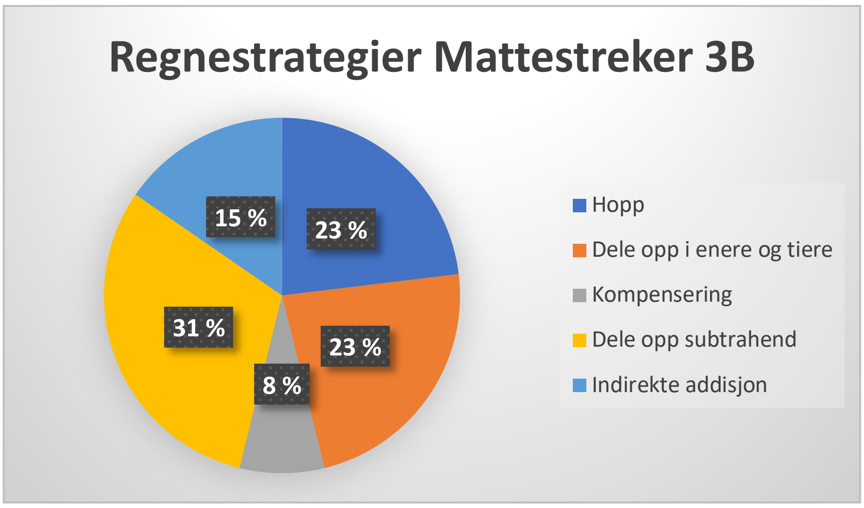
Resultatet viser at det er tre regnestrategier som utpeker seg som de dominerende regnestrategiene. Disse regnestrategiene er henholdsvis dele opp i tiere og enere, dele opp subtrahend og indirekte addisjon. Regnestrategiene hopp, kompensering og konstant differanse tar opp forholdsvis liten plass i hele læreverket. For å kunne sammenligne fordelingen av de ulike regnestrategiene innenfor subtraksjon, har jeg også valgt å presentere resultatet ved hjelp av et sektordiagram (se tabell 7: *Fordeling av de ulike regnestrategiene innenfor subtraksjon i DragonBox Skole 3*). Sektordiagrammet gir et bedre oversiktsbilde slik at det er lettere å se fordelingen av de ulike regnestrategiene opp mot hverandre. Analysen viser at læreverket ikke vektlegger de ulike regnestrategiene likt. Det er tre regnestrategier som utpeker seg som hovedstrategiene når jeg ser på læreverket DragonBox Skole som helhet. Videre vurderer jeg det også som hensiktsmessig å se på hvordan de ulike ressursene vektlegger de ulike regnestrategiene siden lærere selv bestemmer hvilke læringsressurser de ønsker å benytte seg av i læreverket.

I Mattestreker A er fordelingen mellom de ulike strategiene relativt jevn. Her viser analysen at regnestrategien dele opp subtrahend er den mest brukte regnestrategien – den utgjør hele 28%. Den minst brukte regnestrategien er dele opp i tiere og enere, den brukes i 14% av tilfellene. Både kompensering og indirekte addisjon ligger på 17%, mens konstant differanse ligger på 24% (se tabell 8: *Regnestrategier i Mattestreker 3A*). Analysen viser også at regnestrategien hopp ikke er representert i Mattestreker 3A.



Tabell 8: *Regnestrategier i Mattestreker 3A*

I Mattestreker 3B er dele opp subtrahend den mest brukte regnestrategien (31%), mens kompensering er den minst brukte (8%). Både hopp og dele opp i tiere og enere utgjør 23% av tilfellene, mens indirekte addisjon brukes i 15% av dem. Konstant differanse er ikke representert i Mattestreker 3B.



Tabell 9: *Regnestrategier i Mattestreker 3B*

Analysen viser også at de ulike regnestrategiene blir beskrevet med eksplisitte eksempler. Eksemplene er med på å vise elevene hvordan de skal utføre de ulike regnestrategiene, og vil derfor være en stor del av hvordan læreverket legger til rette for at elevene skal få kunnskap om de ulike regnestrategiene. Regnestrategien dele opp subtrahend har tre eksplisitte eksempler, dele opp i tiere og enere har to eksplisitte eksempler mens både kompensering, indirekte addisjon og hopp har ett eksplisitt eksempel hver. Konstant differanse har ingen eksplisitte eksempler å vise til i læreverket. Se tabell 10 for en systematisk oversikt. Disse eksplisitte eksemplene finnes bare i ressursene Mattestreker 3A og Mattestreker 3B. Det vil si at det ikke finnes noen eksplisitte eksempler i verken Mattesnakk eller DragonBox3-appen.

Regnestrategi	**Eksplisitte eksempler**
Dele opp subtrahend	3
Dele opp i tiere og enere	2
Kompensering	1
Konstant differanse	0
Indirekte addisjon	1
Hopp	1

Tabell 10: *Antall eksplisitte eksempler av hver regnestrategi*

Jeg har nå sett på hvordan de ulike regnestrategiene innenfor subtraksjon er fordelt i DragonBox Skole 3. I tillegg har jeg presentert hvordan strategiene er fordelt i de ulike ressursene, samt hvor mange eksplisitte eksempler som beskriver de ulike regnestrategiene. Videre i analysen vil jeg se på strategieffektiviteten, altså vil jeg se nærmere på antall oppgaver som legger til rette for de ulike regnestrategiene innenfor subtraksjon.

4.3 Strategieffektivitet

Analysen min viser at det i hele DragonBox Skole 3 finnes 469 oppgaver som handler om subtraksjon. Av disse 469 subtraksjonsoppgavene, er det 281 subtraksjonsoppgaver som vektlegger ulike typer regnestrategier. 92 oppgaver legger til rette for regnestrategien dele opp i tiere og enere, 81 oppgaver som legger til rette for regnestrategien dele opp subtrahend, 72 oppgaver legger til rette for indirekte addisjon, 26 oppgaver legger til rette for regnestrategien kompensering, 7 oppgaver legger til rette for regnestrategien konstant differanse og 3 oppgaver legger til rette for regnestrategien hopp. Se en systematisk oversikt over antall oppgaver i tabell 11. Strategieffektivitet utvikles gradvis jo mer erfaring elevene får med de ulike regnestrategiene (Lamaire & Siegler, 1995), og strategieffektiviteten til et læreverk handler derfor om antall oppgaver som legger til rette for de ulike regnestrategiene. Antall oppgaver har derfor stor betydning for hvor effektiv elevene blir i de ulike regnestrategiene.

Regnestrategi	**Antall**	**Prosent**
Algoritme	0	0%
Hopp	3	0,64%
Dele opp i tiere og enere	92	19,62%
Kompensering	26	5,54%
Dele opp subtrahend	81	17,27%
Indirekte addisjon	72	15,35%
Konstant differanse	7	1,49%
Ingen spesifikk regnestrategi	188	40,09%
Totalt	469	100%

Tabell 11: *Oversikt over antall oppgaver som vektlegger ulike regnestrategier i DragonBox Skole 3*

	Mattesnakk		Mattestreker 3A		Mattestreker 3B		DragonBox3-appen	
	Antall	Prosent	Antall	Prosent	Antall	Prosent	Antall	Prosent
Algoritme	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
Hopp	0	0%	0	0%	3	10,34%	0	0%
Dele opp i enere og tiere	0	0%	4	8,33%	3	10,34%	85	21,79%
Kompensering	0	0%	5	10,42%	1	3,45%	20	5,13%
Dele opp subtrahend	0	0%	8	16,67%	4	13,79%	69	17,69
Indirekte addisjon	0	0%	5	10,42%	2	6,9%	65	16,67%
Konstant differanse	0	0%	7	14,58%	0	0%	0	0%
Ingen spesifikk regnestrategi	2	100%	19	39,58%	16	55,17%	151	38,72%
Totalt	2		48		29		390	

Tabell 12: *Oversikt over antall oppgaver delt inn i læringsressurser*

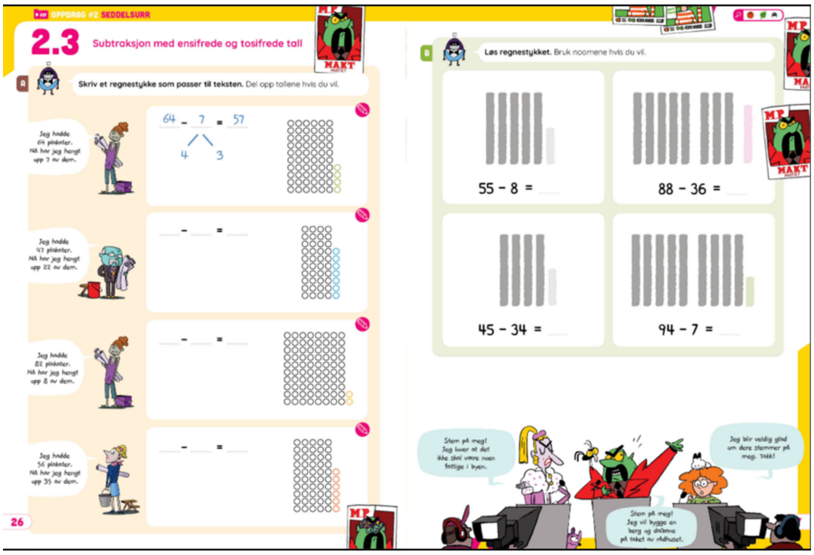
Tabell 12 viser hvor mange oppgaver som hører til hver enkelt regnestrategi innad i de ulike læringsressursene. Analysen viser at det er relativt lite matematikkoppgaver i arbeidsbøkene, mens majoriteten av oppgaver ligger inne i DragonBox Skole appen.

4.4 Strategivalg

Strategivalg handler om hvordan de ulike regnestrategiene blir presentert i læreverket. Jeg har valgt å dele dette delkapittelet inn i eksplisitte regnestrategier, implisitte regnestrategier, sammenligning av regnestrategier og åpne oppgaver.

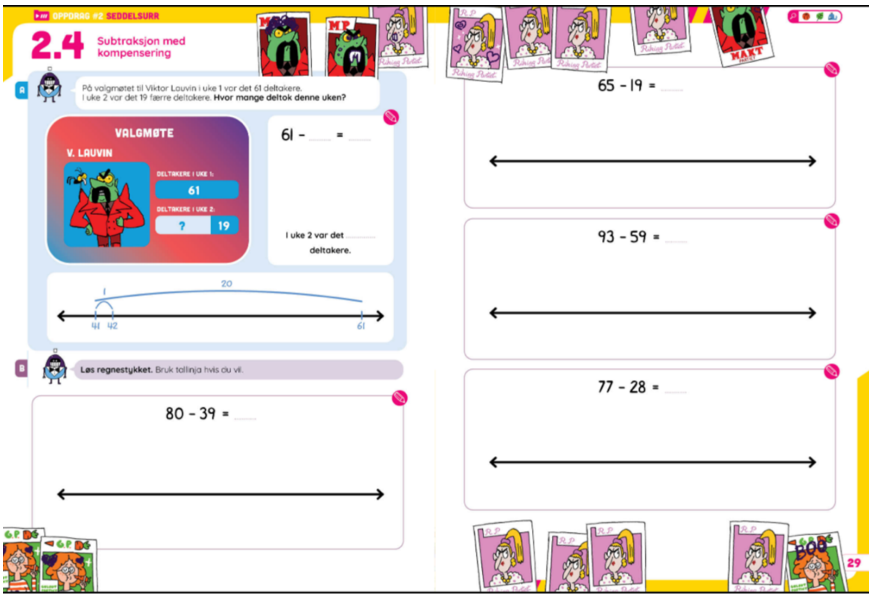
4.4.1 Eksplisitte regnestrategier

Analysen viser at det bare er Mattestreker A og B som legger opp til eksplisitte regnestrategier innenfor subtraksjon i DragonBox Skole 3. Fem av de seks regnestrategiene innenfor subtraksjon blir introdusert med eksplisitte eksempler (se tabell 10 på side 52 for systematisk oversikt). Konstant differanse er den eneste regnestrategien innenfor subtraksjon som ikke illustreres med et eksplisitt eksempel inne i læreverket. Eksempler på de regnestrategiene som har eksplisitte eksempler er blant annet *dele opp subtrahend* og *kompensering*. Disse er illustrert i bilde 25 og bilde 26. Her blir regnestrategiene introdusert med et eksplisitt eksempel hver, hvor elevene konkret ser hvilke steg regnestrategien består av. I bilde 25 ser elevene hvordan subtrahenden blir delt opp i to tall, hvor det ene tallet kan subtraheres først slik at minuenden blir til en hel tier. Eksempelet som vises er 64 – 7, hvor 7 blir delt opp i 4 og 3. Etterfulgt av dette eksempelet kommer det tre nye oppgaver hvor det er lagt opp til at elevene skal utføre de samme stegene på nye tall. Det står: «Del opp tallene hvis du vil»(DragonBox, 2021a, s. 26). Det vil si at elevene kan velge å ikke dele opp tallene og bare skrive ned svaret. Utover det ene eksplisitte eksempelet står det ingenting mer om regnestrategien dele opp subtrahend. Det står ikke noe eksplisitt om hvilke tall denne regnestrategien egner seg til. Gjennom analysen har jeg også lagt merke til at regnestrategien ikke blir gitt et konkret navn i læreverket. Denne framstillingen av regnestrategien er også gjennomgående for de andre regnestrategiene som har eksplisitte eksempler i læreverket. Regnestrategien blir introdusert på en dobbeltside, og neste regnestrategi blir introdusert på neste dobbeltside.



Bilde 25: *Dele opp subtrahend i Mattestreker 3A (DragonBox, 2021a)*

På bilde 26 vises beskrivelsen av regnestrategien *kompensering* slik den blir introdusert i Mattestreker 3A. Utformingen av denne beskrivelsen er lik beskrivelsen av regnestrategien *dele opp subtrahend*, ved at læreverket først kommer med et eksplisitt eksempel på regnestrategien, før elevene etterpå skal anvende regnestrategien på nye tall. Overskriften til dette delkapittelet er «Subtraksjon med kompensering» (DragonBox, 2021a, s. 28), noe som tyder på at elevene skal subtrahere på en ny måte. Utover det eksplisitte eksempelet, er det ingen videre forklaring på hva kompensering går ut på. Regnestrategien bruker tom tallinje som en visuell støtte, slik at det skal være enklere for elevene å se de ulike stegene i regnestrategien. I tillegg kan tallinjen hjelpe elevene med å se om de har hoppet for langt eller for kort, i forhold til det opprinnelige regnestykket.

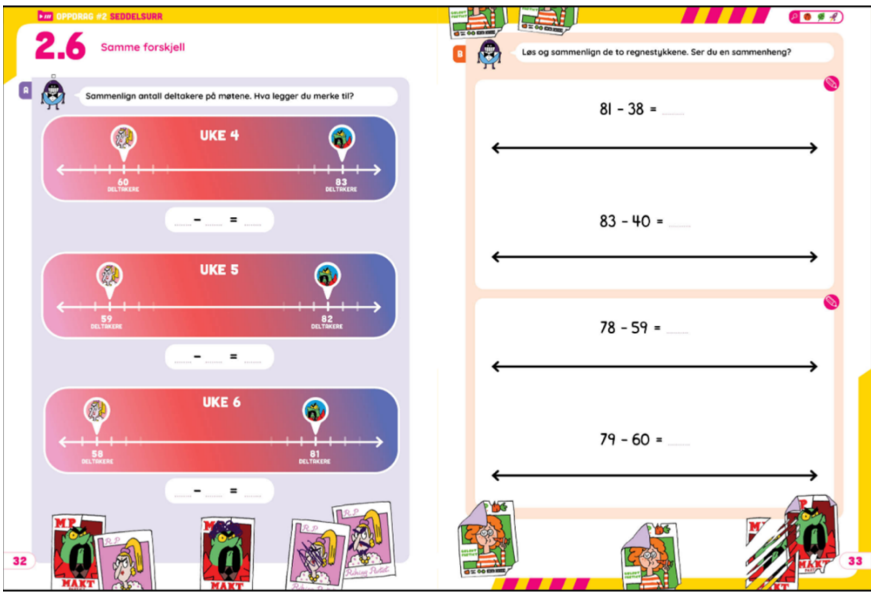


Bilde 26: *Kompensering i Mattestreker 3A (DragonBox, 2021a)*

Som oppsummering introduseres de fleste regnestrategiene gjennom eksplisitte eksempeloppgaver i Mattestreker 3A eller 3B, med tilhørende oppgaver hvor det er lagt opp til at elevene skal bruke regnestrategiene på nye tall. Hver regnestrategi blir introdusert på en dobbeltside, hvor neste regnestrategi blir introdusert på en ny dobbeltside. Noen ganger kommer dobbeltsidene rett etter hverandre i arbeidsbøkene. Det vil si at elevene jobber med de ulike regnestrategiene etter hverandre, og ikke parallelt. I tillegg navngis ikke regnestrategiene og det er ingen beskrivelser av de ulike regnestrategiene utover eksempeloppgavene.

4.4.2 Implisitte regnestrategier

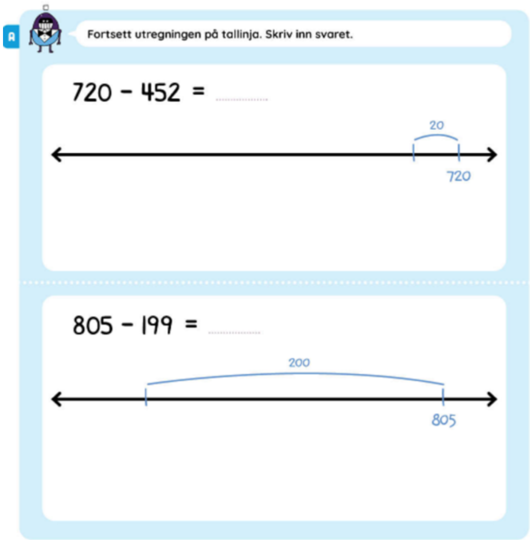
Læreverket DragonBox Skole 3 introduserer regnestrategien *konstant differanse* implisitt. Det vil si at *konstant differanse* er den eneste regnestrategien som ikke har noen eksplisitte eksempler som elevene kan se etter. Regnestrategien blir introdusert ved at elevene får tre oppgaver hvor de får beskjed om å sammenligne antall deltakere på tre forskjellige møter (se bilde 27). De får så spørsmålet: «Hva legger du merke til?»(DragonBox, 2021a, s. 32). På det første møtet var det 83 deltakere hos det ene partiet og 60 deltakere hos det andre partiet. På det andre møtet var det 82 deltakere hos det ene partiet og 59 deltakere hos det andre partiet. På det tredje og siste møtet var det 81 deltakere hos det første partiet og 58 deltakere hos det andre partiet. Overskriften på oppgavesiden er «Samme forskjell»(DragonBox, 2021a, s. 32), og det er nettopp dette læreverket har lagt opp til at elevene skal legge merke til. Etter disse tre introduksjonsoppgavene får elevene fire nye oppgaver, hvor to og to oppgaver har samme differanse og derfor hører sammen. Tallinje blir brukt som visuell støtte i alle oppgavene om konstant differanse.



Bilde 27: *Konstant differanse i Mattestreker 3A (DragonBox, 2021a)*

4.4.3 Sammenligning av regnestrategier

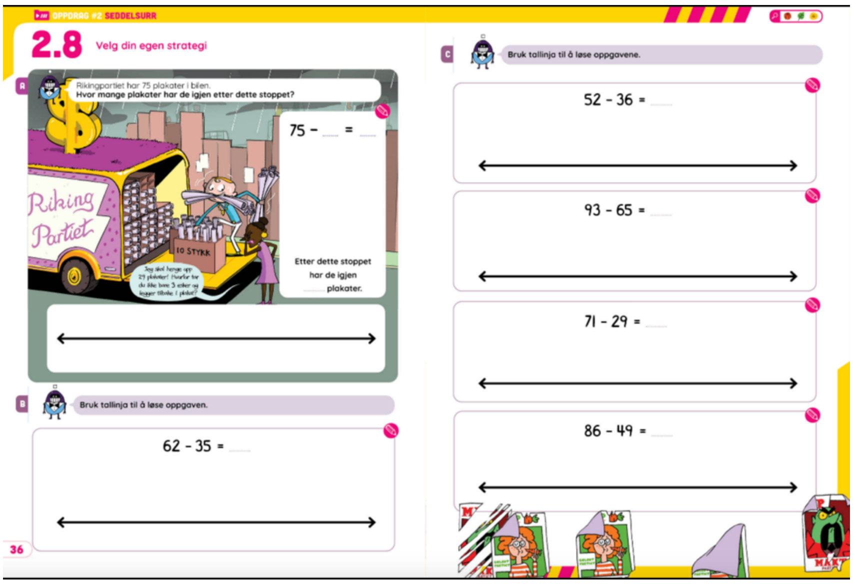
I min analyse av DragonBox Skole 3 har jeg også funnet ut at det noen ganger blir lagt opp til å utføre to forskjellige regnestrategier på samme side. Et eksempel finner man i Mattestreker 3B, hvor elevene jobber med subtraksjon med tierovergang på tallinje. I dette eksempelet (se bilde 28: *Subtraksjon med tierovergang på tallinje*) blir det lagt opp til at elevene skal bruke regnestrategiene hopp og kompensasjon ved hjelp av tallinja. Dette er to ulike regnestrategier som tidligere er blitt introdusert ved hjelp av tallinje. Det er ikke noe mer forklaring knyttet til disse oppgavene enn at læreverket allerede har begynt på de to regnestykkene. Det første regnestykket er 720 – 452. På tallinjen er det tegnet inn 720 og hoppet 20. Den andre oppgaven er 805 – 199, hvor det er tegnet inn 805 og hoppet 200 tilbake. Elevene får i oppgave å fortsette utregningene på tallinjene. Tallene i de to oppgavene er forskjellig da det nederste regnestykket er enklere å runde opp til 200, noe regnestrategien kompensasjon legger opp til. I det første regnestykke er det enklere å tenke regnestrategien hopp, og elevene kan da trekke fra det antallet man hopper nedover på subtrahenden.



Bilde 28: *Subtraksjon med tierovergang på tallinje (DragonBox, 2021b)*

4.4.4 Åpne oppgaver

DragonBox Skole 3 har også noen åpne oppgaver som legger opp til at elevene skal velge sin egen strategi. Disse oppgavene ser vi bakerst i både kapittel 2 og kapittel 6 i Mattestreker 3A og Mattestreker 3B. Bilde 29 viser et eksempel fra Mattestreker 3A hvor overskriften på oppgavesiden er: «Velg din egen strategi»(DragonBox, 2021a, s. 36). Det blir presentert seks forskjellige subtraksjonsstykker hvor elevene får tallinjer de skal anvende når de løser regneoppgavene. Subtraksjonsstykkene som blir presentert for elevene er 75 – 29, 62 – 35, 52 – 36, 93 – 65, 71 – 29 og 86 – 49. Dette er subtraksjonsstykker hvor elevene kan anvende ulike regnestrategier. De regnestrategiene som har blitt introdusert ved hjelp av tallinje, og som jeg derfor anser som mest naturlig å bruke, er kompensasjon, hopp, indirekte addisjon og konstant differanse.



Bilde 29: *Velg din egen strategi i Mattestreker 3A (DragonBox, 2021a)*

En annen form for åpne oppgaver som blir presentert er problemløsningsoppgavene i Mattesnakk. Her er det to subtraksjonsoppdrag hvor elevene selv må bestemme hvilke regnestrategier de ønsker å bruke for å finne fram til svaret. Det er ikke gitt hvilken strategi elevene skal bruke. For å løse oppdragene må elevene lete etter informasjon i tegneseriene. Det kreves at elevene bruker tid på å finne informasjonen de trenger da det ikke eksplisitt står forklart hvordan man skal gå fram for å finne svaret. For at elevene skal kunne løse oppdragene må de klare å se hvilken informasjon som er relevant og hvilken informasjon de ikke trenger.

5 Diskusjon

I diskusjonskapittelet vil jeg reflektere rundt ulike funn som ble presentert i forrige kapittel. Disse funnene mener jeg spiller en sentral rolle i hvordan læreverket DragonBox Skole 3 legger til rette for utvikling av matematisk fleksibilitet i arbeid med subtraksjon.
Jeg vil poengtere at dette er mine egne refleksjoner hvor jeg kobler teori og tidligere forskning opp mot de funnene som jeg allerede har presentert. Gjennom disse refleksjonene ønsker jeg å vise hvordan funnene samsvarer med tidligere forskning og teori, og hvorfor mine funn er et bidrag til forskningsfeltet.

5.1 Strategirepertoire som tar hensyn til plassverdien

Alle regnestrategiene som Læreverket DragonBox Skole 3 introduserer for arbeid med flersifrede subtraksjonstykker, tar utgangspunkt i plassverdien til tallene. Regnestrategiene som blir introdusert i læreverket samsvarer derfor med Hickendorff et al. (2019) sin argumentasjon om at de regnestrategiene som tar utgangspunkt i hele tallet og dermed tar hensyn til plassverdien til de ulike sifrene, vil egne seg bra for at elever som skal opparbeide seg en relasjonell forståelse av matematikk. En relasjonell forståelse av matematikk vil med andre ord handle om at elevene ser sammenhengen mellom regneoperasjonen, de tallene som regnestykket består av og de ulike regnestrategiene (Hickendorff et al., 2019; Newton et al., 2020; Skemp, 1976). På den måten vil elevene få en større forståelse for hvordan de ulike regnestrategiene kommer fram til det rette svaret. Her er ikke det viktigste at svaret er rett, men fokus er på forståelsen bak selve regneoperasjonen.

På den andre siden er standardalgoritmen en regnestrategi som ikke blir introdusert som en del av strategirepertoiret i DragonBox Skole 3. Dette er en regnestrategi som fremmer en instrumentell forståelse av matematikk, hvor elevene skal følge trinnvise regler basert på de enkeltsifrene som subtraksjonsstykket består av. Plassverdien til tallene er ikke relevant i selve regneoperasjonen, og elevene opererer kun med enkeltsiffer. Instrumentell forståelse for matematikk handler om å huske en bestemt prosedyre, og det er ikke fokus på å se sammenhengen mellom de ulike trinnene i regneoperasjonen (Newton et al., 2020; Skemp, 1976). Siden denne regnestrategien ikke blir lagt til rette for, vil elevene ikke innarbeide standardalgoritmen som en del av sitt strategirepertoire.

Med utgangspunkt i analysen vil jeg derfor argumentere for at DragonBox Skole legger til rette for at elevene skal opparbeide seg en relasjonell forståelse for arbeid med flersifrede subtraksjonsstykker. Elevene skal ha fokus på plassverdien til tallene og opparbeide seg et strategirepertoire innenfor regnestrategier som fremmer relasjonell forståelse innenfor matematikk. Spørsmålet er hvordan denne innføringen av regnestrategier står i forhold til målet om at elevene skal utvikle matematisk fleksibilitet. Matematisk fleksibilitet handler om å velge den mest hensiktsmessige regnestrategien til rett tidspunkt. Regnestrategien skal være både effektiv og nøyaktig til den gitte oppgaven (Torbeyns et al., 2009). Til enkelte subtraksjonsstykker vil det derfor være mest fleksibelt å bruke standard algoritmen som regnestrategi. Likevel velger DragonBox Skole å utelukke denne strategien som en del av elevenes innføring til subtraksjon med flersifrede tall. Jeg tolker derfor at læreverket ønsker å gi elevene en grunnleggende forståelse, et fundament med relasjonell forståelse, før de blir introdusert for regnestrategier som fremmer instrumentell forståelse. For å kunne opptre matematisk fleksibelt, påpeker Hickendorff (2020) at elevene både må ha begreps- og prosedyrekunnskap. Det vil si at elevene både må ha kunnskap om de ulike regnestrategiene, samtidig som vite hvordan de ulike regnestrategiene skal utføres (Hickendorff, 2020). Jeg vil argumentere for at regnestrategier som tar hensyn til plassverdien til de ulike subtraksjonsstykkene, vil gi mer mening for elevene og det vil derfor være enklere for elevene å vite hvordan disse regnestrategiene skal utføres. Av den grunn er min tolkning av DragonBox Skole at regnestrategiene som blir introdusert derfor vil øke elevenes evne til å opptre matematisk fleksibelt. Med å ha fokus på regnestrategier som fremmer relasjonell forståelse, så vil elevene ha større forutsetning til å huske hvordan de skal utføre de ulike regnestrategiene.

5.2 Strategieffektivitet i DragonBox Skole

I tillegg til at matematisk fleksibilitet legger opp til at elevene skal ha kunnskap om et bredt spekter av regnestrategier og hvordan de utføres (Hickendorff, 2020), er strategieffektivitet et viktig element av å utvikle matematisk fleksibilitet. Det vil si jo mer erfaring elevene får i å utføre en regnestrategi, jo mer effektiv og nøyaktig blir eleven i den strategien (Lamaire & Siegler, 1995). Forskning viser at elever ofte bruker standardalgoritmen selv om de har bred kunnskap om andre regnestrategier (Star et al., 2022). Av den grunn vil jeg argumentere for at standardalgoritmen kan forstyrre elevenes mulighet til å utforske og få erfaring med forskjellige regnestrategier. Siden elevene ofte foretrekker standard algoritmen, vil de ikke få den nødvendige erfaringen til å bli like effektiv og nøyaktig i de andre regnestrategiene. På den måten vil standardalgoritmen som oftest være den mest hensiktsmessige regnestrategien til elevene. Det at DragonBox Skole har valgt å ikke introdusere standardalgoritmen i subtraksjon kan derfor være en avveiing av at elevene skal få mer erfaring i de andre regnestrategiene. På den måten vil det være enklere for elevene på et senere tidspunkt å ta i bruk flere ulike regnestrategier og på den måten utvikle en større matematisk fleksibilitet enn om de tidlig hadde blitt introdusert for standardalgoritmen.

Jeg vil likevel argumentere for at DragonBox Skole har et forbedringspotensial i å gi elevene større erfaring med bruk av de ulike regnestrategiene som blir introdusert i læreverket. Resultatene fra analysen viser at strategieffektiviteten i DragonBox Skole viser stor variasjon mellom de ulike regnestrategiene. Det er en overvekt av oppgaver som legger til rette for regnestrategiene *indirekte addisjon*, *dele opp subtrahend* og *dele opp i tiere og enere*. Denne overvekten kan være et resultat av hvordan jeg har valgt å gjennomføre analysen. DragonBox Skole- appen har en oppgavetype som kalles for *avansert tallinje*. Jeg vil sammenligne modellen som blir brukt i denne oppgavetypen med åpen tallinje. Ved å bruke åpen tallinje får elevene en modell for hvordan de kan tenke når de jobber med blant annet subtraksjon(Bobis & Bobis, 2005). Denne oppgavetypen er gjennomgående i appen og har hele 11 oppdrag og 6 quizer. Dette tilsvarer 57 deloppgaver. I min analyse har jeg valgt å sette denne oppgavetypen inn i kategorien *ingen spesifikk regnestrategi*. Dette valget ble tatt på bakgrunn av at det ikke vises til noen spesifikk regnestrategi og at elevene kan komme fram til svaret på flere forskjellige måter ved å bruke tallinjen. Basert på at tom tallinje er brukt som visuell støtte til introduksjonen av regnestrategiene *konstant differanse, kompensasjon* og *hopp*, er det likevel grunn til å argumentere for at oppgavetypen *avansert tallinje* er ment som mengdetrening for akkurat disse regnestrategiene. I så tilfelle vil strategieffektiviteten til disse regnestrategiene øke. Likevel mener jeg at oppgavetypen ikke er nok lagt til rette til å kunne kategorisere den etter spesifikke regnestrategier. For å gjøre oppgavetypen mer spesifikt rettet mot konkrete regnestrategier, kan produsentene av DragonBox Skole for eksempel ha med konkrete eksempler på hvordan elevene kan løse oppgaven, eller komme med tips på hvordan elevene kan tenke før de gjør hopp på tallinjen. På den måten kan elevene få en større forståelse for hvordan det er lurt å gå fram. Det er viktig å påpeke at DragonBox Skole ikke er alene om å ha varierende grad av strategieffektivitet blant de ulike regnestrategiene. Studier fra andre læreverk viser at de ulike regnestrategiene kan ha stor variasjon på hvor mange oppgaver som er tilrettelagt de ulike regnestrategiene (Sievert et al. ,2019). Likevel vil jeg argumentere for at DragonBox Skole har et forbedringspotensial med tanke på at matematisk fleksibilitet er avhengig av strategieffektiviteten som elevene opparbeider seg gjennom erfaring med de ulike regnestrategiene.

5.3 Introdusere regnestrategier mer eksplisitt

Selv om DragonBox Skole introduserer ulike regnestrategier som tar utgangspunkt i hele tallet og dermed legger til rette for en relasjonell forståelse (Hickendorff et al., 2019; Skemp, 1976), vil jeg hevde at introduksjonen av de ulike regnestrategiene kunne vært mer eksplisitt. Den eksplisitte introduksjonen som DragonBox Skole har av sine regnestrategier innenfor subtraksjon handler i hovedsak om eksempeloppgaver. Som analysen viser så blir fem av seks regnestrategier beskrevet gjennom eksempeloppgaver. Disse eksempeloppgavene kan elevene bruke som referanse for hvordan de kan løse andre subtraksjonsstykker. Eksplisitt innlæring av ulike regnestrategier øker læringsutbyttet til elevene når det kommer til utvikling av matematisk fleksibilitet (Newton et al., 2020; Rittle-Johnson & Star, 2009; Verschaffel et al., 2009). Eksempler på eksplisitt innlæring kan for eksempel være å gi regnestrategiene egne navn, se på fordeler og ulemper ved de ulike regnestrategiene og sammenligne hvilke regnestrategier som passer til ulike regnestykker (Rittle-Johnson & Star, 2009). For eksempel vil regnestrategien *kompensering* passe til subtraksjonsstykker hvor subtrahenden er enkel å runde opp eller ned til hel tier. Med bakgrunn i analysen vil jeg påpeke at DragonBox Skole har lite eksplisitt beskrivelse av de ulike regnestrategiene. Jeg opplever at læreverket legger opp til at elevene selv må oppdage hvilke egenskaper de ulike regnestrategiene har, og at valg av regnestrategi derfor kan bli basert på tilfeldigheter. På den måten vil elevene som benytter DragonBox Skole stå i fare for å ikke få optimalt utbytte av de læringsmulighetene som finnes for utvikling av matematisk fleksibilitet. Selvfølgelig vil læringsutbyttet til elevene være avhengig av hvordan læreren legger opp undervisningen inne i klasserommet. Dersom læreren har stort fokus på eksplisitt undervisning av regnestrategier, vil det sannsynligvis øke læringsutbyttet til elevene når det kommer til utvikling av matematisk fleksibilitet (Rittle-Johnson & Star, 2009). Haggarty & Pepin (2002) sier derimot at lærere ofte bruker læreverket til å strukturere undervisningen sin. Oppgavene læreverket presenterer, og beskrivelsen rundt oppgavene, vil derfor ofte være essensen av det elevene får undervist av læreren sin (Haggarty & Pepin, 2002). Dette samsvarer med teorien som omtaler læreverk som den potensielt implementerte læreplanen. Denne teorien illustreres gjennom modellen *Textbooks and the Tripartite Model* hvor læreverket ligger i spenn mellom den tiltenkte læreplanen (den offisielle læreplanen) og den implementerte læreplanen (hvordan lærere tolker og implementerer læreplanen). Den potensielt implementerte læreplanen representerer de oppgavene som lærerne har mulighet til å bruke i undervisningen (Valverde et al., 2002). Ved å sette forskningen som vektlegger læreverkets rolle i matematikkundervisningen (Haggarty & Pepin, 2002; Valverde et al., 2002) opp mot forskningen som sier at eksplisitt innlæring av ulike regnestrategier øker læringsutbyttet til elevene når det kommer til utvikling av matematisk fleksibilitet (Newton et al., 2020; Rittle-Johnson & Star, 2009; Verschaffel et al., 2009), vil jeg hevde at det vil være hensiktsmessig for elevens læringsutbytte å ha tilgang til eksplisitte beskrivelser og forklaringer inne i selve DragonBox Skole. Med andre ord har DragonBox Skole et utviklingspotensial når det kommer til sin eksplisitte innlæring av regnestrategier.

5.4 Sammenligning av regnestrategier

I tillegg til eksplisitte beskrivelser, viser forskning at det er mer hensiktsmessig å sammenligne de ulike regnestrategiene underveis i undervisningen, enn å undervise i de ulike regnestrategiene isolert fra hverandre (Rittle-Johnson & Star, 2009). Det vil si at elevene bør bli introdusert for flere ulike regnestrategier samtidig. På dette området hevder jeg at DragonBox Skole ikke samsvarer med det forskningen fremhever. DragonBox Skole legger ikke opp til en parallell innlæring av regnestrategier da analysen viser at regnestrategiene blir presentert etter hverandre. Dette kunne for eksempel vært løst ved at læreverket hadde samlet alle regnestrategiene på en side hvor de sammenligner og fremhever hvilke egenskaper de ulike regnestrategiene har. Læreverket har deriblant noen oppgaver i Mattestreker A og B hvor elevene selv kan velge regnestrategi. Jeg opplever denne delen av læreverket som et forsøk på å gi elevene mulighet til å utforske og sammenligne forskjellige regnestrategier. Likevel blir det ikke eksplisitt forklart at de skal regne ut på flere ulike måter. Elevene kan derfor velge én regnestrategi og bruke den samme regnestrategien på de ulike regnestykkene som står beskrevet under denne oppgavetypen. For å få større fokus på det å kunne regne med forskjellige regnestrategier, vil jeg argumentere for at DragonBox Skole bør reformulere disse oppgavene. Eksempelvis kan beskrivelsen til oppgavene være: "Regn ut ved å bruke ulike regnestrategier. Hvilken regnestrategi passer best til de ulike regnestykkene?" Elevene kan i tillegg få tips ved at læreverket fremhever ulike egenskaper. For eksempel: "Hvilket regnestykke er det lurt å runde opp eller ned? Hvilket regnestykke er det lurt å trekke fra tiere og enere hver for seg? Kan man bruke addisjon til å løse noen av disse oppgavene?" Ved å eksplisitt fremheve disse ulikhetene, vil elevene bli mer bevisst på hvordan ulike oppgaver ofte bør ha ulik tilnærming. Denne argumentasjonen støttes av forskningen til Hickendorff (2018), som sier at oppgavens formulering har stor påvirkning på hvilken regnestrategi elevene benytter for å løse oppgaven. Ordene oppgaven består av vil påvirke hvordan elevene tolker oppgaven, og på typiske matematikkoppgaver som ber elevene om å løse regnestykket, vil derfor regnestrategien som blir valgt, ofte være tilfeldig (Hickendorff, 2018; Torbeyns et al., 2009). Av den grunn vil jeg hevde at DragonBox Skole relativt enkelt kan endre oppgavenes formulering til å fremme mer bevisste strategivalg hos elevene.

5.5 Sammenhengen mellom matematikkoppgaver med høye kognitive krav og utvikling av matematisk fleksibilitet

Siden resultatene fra analysen viser at DragonBox Skole 3 har subtraksjonsoppgaver med ulik grad av kognitive krav, ønsker jeg å sette søkelys på sammenhengen mellom matematikkoppgaver med høye kognitive krav og elevers utvikling av matematisk fleksibilitet. DragonBox Skole 3 presenterer to problemløsningsoppgaver innenfor subtraksjon i boka Mattesnakk 3. Disse problemløsningsoppgavene krever høyere grad av kognitive ferdigheter da elevene må lete etter relevant informasjon og resonnere seg fram til sammenhengen mellom de ulike delene av problemet. Forsking viser at matematikkoppgaver som inneholder sammenligning og resonnering, gir elevene større læringsutbytte enn oppgaver med lave kognitive krav, som for eksempel memorering (Watson & Ohtani, 2015). Sett i lys av forskningen til Torbeyns et al. (2009), samsvarer dette med hvordan elevene utvikler matematisk fleksibilitet. De hevder at elever utvikler matematisk fleksibilitet ved å utforske og resonnere seg fram til de beste regnestrategiene. Dersom en regnestrategi ikke er gitt, blir elevene nødt til å ta å resonnere seg fram til mulige løsninger og vurdere hvilken regnestrategi som egner seg best. Ved å begrunne sitt strategivalg, vil elevene opparbeide seg en større forståelse for matematisk fleksibilitet (Torbeyns et al., 2009). Problemløsningsoppgavene i Mattesnakk 3 presenterer ingen gitte regnestrategier, og elevene må selv bestemme hvordan de ønsker å løse oppgavene. Av den grunn vil jeg argumentere for at elevene må resonnere seg frem og dermed ta mer bevisste strategivalg. Disse strategivalgene vil basere seg på hvor nøyaktig og effektivt elevene løser problemløsningsoppgavene, og bidra til elevenes utvikling av matematisk fleksibilitet.

Gjennom å sammenligne ulike regnestrategier og finne den mest effektive til en gitt oppgave, hevder Chen & Siegler (2000) at elevene utvikler matematisk fleksibilitet ved å få oppleve hvordan ulike regnestrategier krever ulik kognitiv belastning. Det vil si at noen regnestrategier enkelte ganger vil kreve mindre kognitiv belastning enn andre, alt avhengig av oppgavens karakteristikker (Chen & Siegler, 2000). Johnson et al. (2017) påpeker i tillegg at elevene tar strategivalg på bakgrunn ev egne subjektive opplevelser, og at elevens subjektive tolkning av oppgaven er essensiell for hvilken løsningsstrategi eleven til slutt velger. Dette støttes i forskning rundt oppgavedesign som viser til at det ikke er en direkte link mellom at elever fullfører en matematikkoppgave og matematisk læring. Alt er avhengig av elevens egen forståelse av oppgaven (Margolinas, 2013). Selter (2009) argumenterer for å ta i bruk oppgaver hvor den subjektive opplevelsen av oppgaven ikke hindrer elevene i å utforske fordeler og ulemper med ulike regnestrategier. Ved å la elevene ta utgangspunkt i regnestrategiene og la dem selv lage oppgaver som passer til hver enkelt strategi, blir elevene nødt til å reflektere rundt hvilke egenskaper regnestrategiene fremhever (Selter, 2009). Ifølge analysen er dette en oppgavetype som ikke er representert i DragonBox Skole 3. Jeg vil argumentere for at læreverket med fordel kan ta i bruk denne oppgavetypen da den i likhet med problemløsningsoppgaver har høye kognitive krav og krever en relasjonell forståelse for subtraksjon.

5.6 Matematisk fleksibilitet gjennom representasjoner

Et aspekt som utpeker seg i DragonBox Skole er hvordan læreverket legger opp til bruk av flere ulike modeller som visuell støtte til regnestrategiene. Læreverket tar blant annet i bruk åpen tallinje, avansert tallinje, noomer og mengdemodeller. Stegene i de ulike regnestrategiene blir dermed illustrert for elevene gjennom den visuelle støtten som modellene tilbyr. Selter (2009) viser til at det er viktig å ikke bare variere tall og kontekst, men også variere representasjonssystem for å fremme elevenes evne til å tenke matematisk fleksibelt. Ved å variere representasjonssystem vil elevene få større mulighet til å utvikle en relasjonell forståelse for subtraksjon og kan se flere sammenhenger innenfor matematikken (Selter, 2009). Siden DragonBox Skole bruker ulike representasjonssystemer aktivt i de ulike oppgavene, vil jeg argumentere for at læreverket legger et godt grunnlag for å elevene skal opparbeide seg den relasjonelle forståelsen som kreves for å utvikle matematisk fleksibilitet. Eksempelvis går noen oppgaver fra tekst til symboler, noen går fra noomer til symboler mens andre går fra symboler til åpen tallinje. For å kunne svare på oppgavene må elevene derfor gjøre en overgang mellom representasjonssystemene. Overgang mellom ulike representasjonssystemer er essensen i matematisk forståelse (Duval, 2006). For eksempel gjør læreverket en innsats for at elevene skal gjenkjenne antallet i form av noomer, innad i de ulike modellene. Analysen viste blant annet at mengdemodellene som representerte antallet, brukte de samme fargene som de ulike noomene. Dersom mengdemodellen skulle vise tallet 26, vil de to tierne ha samme farge som Deka, mens sekseren vil ha samme farge som Hex. Jeg vil derfor si at læreverket kombinerer de ulike representasjonssystemene på en hensiktsmessig måte, og på den måten stimulerer til matematisk fleksibilitet.

5.7 Implisitte regnestrategier i DragonBox Skole-appen

Selv om analysen viser at det ikke eksplisitt legges opp til ulike regnestrategier i DragonBox Skole-appen, vil jeg argumentere for at de ulike oppgavene implisitt setter fokus på ulike egenskaper ved de ulike regnestrategiene. I den digitale ressursen finnes det både oppgaver som stimulerer til utforskning og mengdetrening. Analysen viser at elevene ikke får introdusert noen nye regnestrategier inne i appen, og at det heller ikke vises noen eksempeloppgaver på hvordan elevene skal gjennomføre de ulike oppgavene før de prøver selv. Elevene får derimot vite med en gang om de har rett eller galt svar. DragonBox-metoden fremhever utforskning og et problemløsende klasserom, og er laget slik at elevene skal få best mulig utbytte av de ulike læringsressursene (DragonBox, u.å.-a). Analysen viser at DragonBox-appen har ulike oppgaver, hvor læringslabbene oppfordrer elevene til å utforske subtraksjonsstykker, mens læringsquizene handler om mengdetrening, og hvor oppgavene i hovedsak går ut på å finne rett svar. Basert på analysen vil jeg argumentere for at den digitale læringsressursen tilbyr elevene en variert oppgavesammensetning i form av at oppgavene blir presentert på forskjellige måter. For eksempel handler en oppgavetype om å tenke fort ved at subtraksjonsstykket forsvinner etter et gitt antall sekunder. En annen oppgavetype handler om å kombinere subtraksjonsstykker som gir samme svar, mens en tredje oppgavetype bruker lyd for å presentere subtraksjonsstykkene. Analysen viser at oppgavene legger vekt på de ulike regnestrategiene på en implisitt måte. For eksempel legger DragonBox-skole appen vekt på regnestrategien *kompensering* ved å gi to nesten like subtraksjonsstykker etter hverandre. Eksempelvis vil regnestykket 80 – 60 bli etterfulgt av regnestykket 80 – 59. Hensikten med disse oppgavene er at elevene skal se at det er enklere å regne om hel tier.

Selv om analysen viser at DragonBox Skole-appen legger opp til å regne med ulike regnestrategier på en implisitt måte, vil jeg argumentere for at denne innlæringen isolert sett ikke er god nok. DragonBox Skole er et omfattende læreverk med flere ulike læringsressurser. I tillegg promoterer læreverket det de kaller for DragonBox-metoden, som viser til hvordan de ønsker at lærere og elever skal anvende læreverket for å få størst utbytte av innholdet. DragonBox-metoden starter med utforsking, før elevene går videre til samtale, øving og oppsummering (DragonBox, u.å.-a). En ulempe kan være når elevene ikke får anledning til å gjennomføre hele metoden som læreverket har lagt opp til. Siden lærere fritt kan bestemme hvilken del av læreverket de ønsker å benytte (Valverde et al., 2002), vil det være sannsynlig at de velger å ha fokus på de oppgavene som elevene finner mest motiverende. Elever opplever ofte digitale matematikkoppgaver som mer spennende, da de kan legge til rette for en mer dynamisk tilnærming til matematikken (Valverde et al., 2002). Digitale oppgaver skaper derfor ofte større motivasjon hos elevene enn tradisjonelle arbeidsbøker. Det vil med andre ord bety at lærere og elever kan komme til å ha størst fokus på de digitale matematikkoppgavene i DragonBox Skole. Dersom elever bare benytter DragonBox Skole-appen, vil de ikke få eksplisitt innlæring i de ulike regnestrategiene gjennom eksempeloppgavene som blir presentert i Mattestreker A og B. Regnestrategiene vil dermed ikke komme godt nok fram, og elevene vil ikke få den opplæringen som læreverket i hovedsak har lagt opp til. Den tiltenkte læreplanen vil dermed ikke korrespondere med den implementerte læreplanen da elevene ikke får fullt utbytte av potensialet i læreverket. Jeg vil derfor konkludere med at DragonBox Skole-appen er avhengig av de andre læringsressursene i læreverket for at elevene skal få nok innføring i ulike regnestrategier. Dersom lærere velger å fravike fra DragonBox-metoden, vil det derfor gå utover kvaliteten på den innlæringen som elevene får i de ulike regnestrategiene. Jeg vil derfor påpeke at DragonBox Skole-appen ikke kan ta over funksjonen til arbeidsbøkene. Videre vil jeg reflektere rundt hvordan dette funnet kan ha noe å si for oppbygningen av andre læreverk.

Ved å tillegge de ulike læringsressursene ulike oppgaver, vil jeg argumentere for at elevene blir avhengig av å bruke læreverket på den måten produsentene har lagt opp. Læreverk har som mål å gi elevene læringsmuligheter ved å koble sammen målene i læringsplanen med den undervisningspraksisen som gjennomføres i skolen (Valverde et al., 2002). DragonBox-metoden er omfattende, og jeg vil derfor anta at lærere ofte plukker ut deler fra læreverket eller bare bruker appen. Dette vil påvirke den oppnådde læreplanen og kunnskapen elevene sitter igjen med etter endt undervisning.

5.8 Resultatenes begrensninger

Som i enhver annen studie, har også resultatene til denne masteroppgaven begrensninger. Den første begrensningen som jeg ønsker å sette søkelys på handler om utvalget datamaterialet består av. Oppgaven baserer seg på to kapitler som handler om subtraksjon innad i læreverket DragonBox Skole 3. For å få en helhetlig forståelse for hvordan læreverket legger til rette for matematisk fleksibilitet, er det mer gunstig å operere med et større utvalg. Her kunne jeg for eksempel ha tatt utgangspunkt i flere årstrinn i læreverket. I tillegg kan det også være hensiktsmessig å sammenligne flere læreverk for å kunne se resultatene i lys av hverandre. Ved å sammenligne flere læreverk vil jeg kunne se hvordan DragonBox Skole ligger i forhold til de andre læreverkene og på den måten vil jeg kunne dra slutninger om DragonBox Skole er et av de bedre læreverkene innenfor matematisk fleksibilitet, eller om det er andre læreverk som ligger foran på det området. Denne kunnskapen vil også være gunstig å ha for de som skal velge hvilket læreverk som skal kjøpes inn, samt for produsentene av læreverkene for å se hvilke områder de bør videreutvikle. Når det er sagt, vil jeg likevel hevde at resultatene fra studien min kan brukes for å gi en indikasjon på hva som er bra og hva som kan forbedres når det gjelder å legge til rette for utvikling av matematisk fleksibilitet i DragonBox Skole.

En annen begrensning resultatene mine har er hvordan jeg baserte studien på allerede eksisterende data. Datamaterialet mitt består av subtraksjonsoppgaver som blir presentert i læreverket DragonBox Skole 3. Jeg har ikke gjennomført en større datainnsamling for å se på hvilken effekt de ulike regneoppgavene har på elevenes læringsutbytte, og kan da ikke konkludere med hvordan de ulike oppgavene påvirker elevenes læring innenfor matematisk fleksibilitet. I tillegg vil det være interessant å se på hvordan lærerne bruker læreverket i sin undervisning. Siden forskning viser at læreverk har stor påvirkning på hvordan lærere legger opp sin undervisning (Sievert, Ham, et al., 2019; Valverde et al., 2002), vil det også være spennende å se hvordan lærere i praksis legger opp sin undervisning med DragonBox Skole. Læreverket har flere ulike ressurser som elevene kan jobbe i, og det er derfor spesielt interessant å se hvordan lærere bruker de ulike ressursene med elevene.

Resultatene fra studien blir også begrenset av det rammeverket jeg har valgt å basere studien rundt. Selv om det er et anerkjent rammeverk som er blitt brukt av flere forskere innenfor det matematikkdidaktiske fagfeltet (Hickendorff, 2020; Lemaire & Siegler, 1995; Sievert, Ham, et al., 2019), vil det ha begrensninger knyttet til å måle kvaliteten på utvikling av matematisk fleksibilitet. Videre studier kan derfor ta utgangspunkt i flere ulike rammeverk, og ved å sammenligne disse resultatene få et mer helhetlig bilde av læreverkets kvalitet.

6 Konklusjon

Hensikten med casestudien har vært å måle kvaliteten på DragonBox Skole når det kommer til hvordan læreverket legger til rette for utvikling av matematisk fleksibilitet innenfor regnearten subtraksjon på 3. trinn. Matematisk fleksibilitet er en viktig del av elevers læring i matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet, 2019; Newton et al., 2020; Rittle-Johnson et al., 2012; Verschaffel et al., 2009), og siden læreverk har stor innflytelse på hvordan lærere legger opp sin undervisning (Haggarty & Pepin, 2002; Valverde et al., 2002), vil studien gi en indikasjon på hvilken kvalitet det er på de ulike læringsmulighetene elevene får innenfor matematisk fleksibilitet når de anvender DragonBox Skole som læreverk. Denne studien bidrar derfor til mer bevissthet rundt hvilken makt læreverket har over elevenes læringsmuligheter i klasserommet.

Studien viser at læreverket presenterer et strategirepertoar som bygger på en relasjonell forståelse innenfor matematikk, noe som er hensiktsmessig for å kunne sammenligne og se de ulike regnestrategiene opp mot hverandre (Skemp, 1976). Læreverket introduserer regnestrategiene *hopp*, *konstant differanse*, *dele opp i tiere og enere*, *dele opp subtrahend*, *kompensering* og *indirekte addisjon,* som elevene potensielt kan inkorporere i sitt eget strategirepertoar. Et av funnene viser at regnestrategiene vektes ulikt, og at elevene derfor får større erfaring med å bruke enkelte regnestrategier. De regnestrategiene som blir lagt størst vekt på er henholdsvis *dele opp i tiere og enere*, *dele opp subtrahend* og *indirekte addisjon*. Siden læreverket har ulik fordeling av regnestrategier, vil elevene mest sannsynlig favorisere de regnestrategiene som de får mest erfaring med (Lemaire & Siegler, 1995). Videre viser studien at fem av regnestrategiene blir presentert gjennom eksempeloppgaver, og at dette er den eneste formen for eksplisitt introduksjon som DragonBox Skole legger til rette for. Læreverket inneholder noen oppgaver hvor elevene kan sammenligne regnestrategier, men de ulike fordelene og ulempene med regnestrategiene kommer likevel ikke tydelig frem. Et funn som er verdt å merke seg er hvordan læreverket legger til rette for flere ulike representasjonssystemer, da variasjon av representasjonssystem er med på å fremme elevenes evne til å tenke matematisk fleksibelt (Selter, 2009). Læreverket illustrerer i tillegg de ulike regnestrategiene gjennom ulike former for visuell større, som for eksempel noomer, tom tallinje og mengdemodell. Som konklusjon på masteroppgaven vil jeg argumentere for at DragonBox Skole har rom for forbedring når det kommer til strategidistribusjon og eksplisitt introduksjon, mens valg av strategirepertoar og variasjon av representasjonssystemer samsvarer med forskning innenfor matematikkdidaktikk for utvikling av matematisk fleksibilitet (Lemaire & Siegler, 1995; Newton et al., 2020; Selter, 2009; Skemp, 1976).

Videre foreslår jeg at det bør forskes på hvordan ulike matematiske læreverk legger opp til matematisk fleksibilitet. Studien synliggjør et behov for å sammenligne læreverk opp mot hverandre, slik at det blir lettere å vurdere kvaliteten på de ulike læreverkene. Det vil også være interessant å se på hvordan lærere bruker de ulike læringsressursene som DragonBox Skole består av i undervisningspraksisen. Ved å se på hvilke læringsressurser som blir mest brukt, kan det oppstå et behov for å endre utformingen av læreverket. Det er også spennende å se om lærere følger DragonBox-metoden i undervisningen.

Litteraturliste

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 41–62. https://doi.org/10.2307/749717

Bobis, J., & Bobis, E. (2005). *The empty number line: Making children's thinking visible*.

Boulton-Lewis, G. M., Wilss, L. A., & Mutch, S. J. (1996). Representations and strategies for subtraction used by primary school children. *Mathematics Education Research Journal*, *8*(2), 137–152. https://doi.org/10.1007/BF03217294

Chen, Z., & Siegler, R. (2000). Across the great divide: Bridging the gap between understanding of toddlers' and older children's thinking. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *65*, i–vii, 1. https://doi.org/10.1111/1540-5834.00072

Clark, T., Foster, L., Sloan, L., & Bryman, A. (2021). *Bryman´s social research methods* (6.). Oxford University Press.

Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research design; Qualitatiive, quantitative, and mixed methods approaches*. SAGE Publications, Inc.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (Fourth edition, International student edition.). SAGE Publications.

De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquiére, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and instruction*, *20*, 205–215. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.02.020

DragonBox. (u.å.-a). *Lærerveiledning*. Hentet 24. mai 2024, fra https://trinn3.dragonbox.no/installation/steps/1/1.html

DragonBox. (u.å.-b). *Om oss*. Teamet. Hentet 8. mars 2024, fra https://www.dragonbox.no/om-oss

Dragonbox. (2018). *Det norske læreverket som tar Finland med storm.* DragonBox - Bringing math to life! https://www.dragonbox.no/blogg/finland-elsker-dragonbox

DragonBox. (2020). *Mattesnakk* (2. utg.). Kahoot DragonBox AS.

DragonBox. (2021a). *Mattestreker 3A* (3. utg.). Kahoot Dragonbox AS.

DragonBox. (2021b). *Mattestreker 3B* (3. utg.). Kahoot DragonBox AS.

DragonBox. (2023). *DB Skole 3—Læringsapp* [Programvare]. Kahoot DragonBox AS.

DragonBox. (2024). *DragonBox Skole*. https://www.dragonbox.no/skole

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2. utg.). Fagbokforl. https://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2020051348075

Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An Investigation of Mathematics Textbooks and their Use in English, French and German Classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, *28*(4), 567–590. https://doi.org/10.1080/0141192022000005832

Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: Adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM*, *41*(5), 591–604. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0205-5

Hickendorff, M. (2018). Dutch sixth graders' use of shortcut strategies in solving multidigit arithmetic problems. *European Journal of Psychology of Education*, *33*(4), 577–594. https://doi.org/10.1007/s10212-017-0357-6

Hickendorff, M. (2020). Forth graders´adaptive strategy use in solving multidigit subtraction problems. *Learning and instruction*, *67*, 1–10. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101311

Hickendorff, M., Torbeyns, J., Verschaffel, L., Fritz, A., Haase, V. G., & Räsänen, P. (2019). *Multi-digit Addition, Subtraction, Multiplication, and Division Strategies* (s. 543–560). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_32

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., & Stigler, J. (2003). Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study. *http://lst-iiep.iiep-unesco.org/cgi-bin/wwwi32.exe/[in=epidoc1.in]/?t2000=024285/(100)*.

Hofmann, A. (2022). Subtraksjon. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/subtraksjon

Johnson, H., Coles, A., & Clarke, D. (2017). Mathematical tasks and the student: Navigating «tensions of intentions» between designers, teachers, and students. *ZDM: Mathematics education*, *49*(6), 813–822. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0894-0

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of mathematics teacher education*.

Kieran, C., Doorman, M., & Minoru, O. (2013). Frameworks and principles for task design. I *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22.* (s. 19–82). https://hal.science/hal-00834054

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. Trinn*. Utdanningsdirektoratet.

Larsen, A. K. (2017). *En enklere metode: Veiledning i samfunnsvitenskapelig forskningsmetode* (2. utg.). Fagbokforl. https://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2020050848004

Lemaire, P., & Siegler, R. (1995). Four Aspects of Strategic Change: Contributions to Children's Learning of Multiplication. *Journal of experimental psychology. General*, *124*, 83–97. https://doi.org/10.1037/0096-3445.124.1.83

Lemonidis, C., & Likidis, N. (2021). An integrated hierarchical model of 5th grade students' computational estimation strategies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(1), 84–106. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1663951

Mabbot, D. J., & Bisanz, J. (2003). Developmental change and individual differences in children´s multiplication. *Chiild development*, *74*(4), 1091–1107. https://psycnet.apa.org/doi/10.1111/1467-8624.00594

Margolinas, C. (2013). Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22. I *ICMI Study 22*. https://hal.science/hal-00834054

Nemeth, L., Werker, K., Arend, J., Vogel, S., & Lipowsky, F. (2019). Interleaved Learning in Elementary School Mathematics: Effects on the Flexible and Adaptive Use of Subtraction Strategies. *Frontiers in Psychology*, *10*, 86. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.00086

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. De nasjonale forskningsetiske komiteene. https://www.forskningsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/tidligere-versjoner/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora

Newton, K. J., Lange, K., & Booth, J. L. (2020). Mathematical flexibility: Aspects of a contiuum and the role of prior knowledge. *The journal of experimental education*, *88*(4), 503–515. https://doi.org/10.1080/00220973.2019.1586629

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving.

Journal of Educational Psychology, *101*(3), 529–544. https://doi.org/10.1037/a0014224
Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology*, *82*(3), 436–455. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02037.x
Rummelhoff, E.-M. B., & Frøslie, K. F. (2023). Frekvens – statistikk. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/frekvens_-_statistikk
Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM*, *41*(5), 619–625. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0203-7
Sievert, H., Ham, A.-K. V. D., Niedermeyer, I., & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*, *74*, 101716. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2019.02.006
Sievert, H., van den Ham, A.-K., Niedermeyer, I., & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children´s adaptive expertise in aritmetic. *Learning and Individual Differences*, *74*. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2019.02.006
Skemp, R. (1976). Instrumental and relational understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.
Star, J. R., Tuomela, D., Joglar-Prieto, N., Hästö, P., Palkki, R., Abánades, M. Á., Pejlare, J., Jiang, R. H., Li, L., & Liu, R.-D. (2022). Exploring students' procedural flexibility in three countries. *International Journal of STEM Education*, *9*(1), 4. https://doi.org/10.1186/s40594-021-00322-y
Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM*, *41*(5), 581–590. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0187-3
Ustun, U., & Eryilmaz, A. (2018). Analysis of Finnish Education System to Question the Reasons behind Finnish Success in PISA. *Online Submission*, *2*(2), 93–114.
Utdanningsdirektoratet. (u.å.). *Læreplanverket*. Hentet 19. mars 2024, fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/
Valenta, A. (2016). *Oppgavestrenger i arbeid med tallforståelse*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/publikasjoner/oppgavestrenger-i-arbeid-med-tallforst%C3%A5else
Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks* (1st ed. 2002.). Springer Netherlands : Imprint: Springer.
Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335–359. https://doi.org/10.1007/bf03174765
Watson, A., & Ohtani, M. (2015). Themes and Issues in Mathematics Education Concerning Task Design: Editorial Introduction. I A. Watson & M. Ohtani (Red.), *Task Design In Mathematics Education: An ICMI study 22* (s. 3–15). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_1

Vedlegg 1. Bilder

Vedlegg 2: Tabeller

NTNU

Kunnskap for en bedre verden