Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Iselin Søberg og Siri Fossum

"Hva har du tegnet her?"

En kvalitativ studie av åtte 2. klassingers arbeid med tegning i problemløsningsoppgaver i matematikk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 1.-7.
Veileder: Siri-Malen Høynes
Mai 2024

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Iselin Søberg og Siri Fossum

"Hva har du tegnet her?"

En kvalitativ studie av åtte 2. klassingers arbeid med tegning i problemløsningsoppgaver i matematikk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 1.-7.
Veileder: Siri-Malen Høynes
Mai 2024

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne studien undersøker hvordan tegning brukes blant åtte andreklassinger i deres arbeid med problemløsningsoppgaver. Fokuset ligger på hvordan tegning ble brukt i problemløsningsprosessen og hvordan tegningen ser ut med tanke på detaljer. Studien benytter en kvalitativ tilnærming der data ble samlet inn gjennom observasjon, intervjuer, videoopptak og innsamlet elevarbeid. Analyser av transkripsjoner og tegninger ble brukt for å identifisere bruken og utseende til tegningene.

Forskningen avdekket at tegning hovedsakelig ble brukt som støtte for system og utforskingsverktøy, noe som hjalp elevene med å organisere og forstå de matematiske problemene. Resultatene viser imidlertid også at manglende veiledning kan føre til misforståelser og distraksjoner i problemløsningsprosessen. Ved å se på tegningens utseende viste forskningen at et flertall produserte piktografiske tegninger, og at flere elever ikke visste hvordan de kunne utnytte potensialet i tegneaktiviteten. Tilfeller av ikoniske tegninger viste på den andre siden at noen elever hadde evne til å velge ut de viktigste matematiske elementene fra problemet.

Resultatene i denne studien tyder på at lærere bør integrere tegning mer bevisst i matematikkundervisningen, med spesiell oppmerksomhet på veiledning for å gjøre tegning til et mer effektivt problemløsingsverktøy. Videre forskning bør utforske ulike former for veiledning og hvordan de kan påvirke elevenes evne til å bruke tegning som et effektivt problemløsningsverktøy.

Abstract

This study explores the use of drawing among eight second graders in their work with problem-solving tasks. The focus is on how drawing was used in the problem-solving process and the appearance of the drawing regarding details. The study employs a qualitative approach where data were collected through observation, interviews, video recordings, and collected student work. Analyses of transcripts and drawings were used to identify the use and appearance of the drawings.

The research found that drawing was primarily used as a support system and exploration tool, which helped the students organize and understand the mathematical problems. However, the result also show that lack of guidance can lead to misunderstandings and distractions in the problem-solving process. By examining the appearance of the drawings, the research showed us that most of the students produced pictographic drawings, and that several students did not know how to utilize the potential of the drawing activity. Instances of iconic drawings, on the other hand, showed that some students had the ability to select the most important mathematical elements from the problem.

The findings of this study imply that teachers should integrate drawing more consciously into mathematics teaching, with a particular attention to guidance to make drawing a more effective problem-solving tool. Further research should explore different forms of guidance and how they can affect students´ ability to use drawing as an effective problem-solving tool.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på en epoke som lærerstudenter ved NTNU i Trondheim. Flere måneder med dedikert arbeid, utforsking, frustrasjon, glede og læring har resultert i en masteroppgave vi er stolte av. Prosessen har vært krevende, men også utrolig givende, og vi har fått anledning til å fordype oss i et tema som engasjerer oss.

Aller først ønsker vi å takke de største bidragsyterne til at vi nå sitter med en ferdig masteroppgave. Så tusen takk til skolen, lærerne og elevene som tok imot oss med åpne armer og gjorde det mulig for oss å gjennomføre studien. Videre ønsker vi å takke våre medstudenter for oppmuntring, samarbeid og nyttige diskusjoner.

En stor takk til vår veileder Siri-Malen Høynes for støtte, inspirasjon og veiledning gjennom forskningsprosessen. Din faglige ekspertise og konstruktive tilbakemeldinger har vært avgjørende for å forme denne oppgaven.

Tusen takk til Lena Fossum Barstad, Leif André Vigeland, Allan Hanssen, Espen Fløttum Oddan og Helene Søberg for korrekturlesing av oppgaven. Dere har hjulpet oss å løfte oppgaven med friske øyne, noe vi setter stor pris på.

Sist, men ikke minst, tusen takk til våre samboere, familier og venner for deres tålmodighet, forståelse og uendelige støtte. Deres tro på oss har gitt oss styrke til å gjennomføre dette arbeidet, selv i de mest utfordrende periodene.

Avslutningsvis vil vi uttrykke vår takknemlighet ovenfor hverandre. Å arbeide sammen har gitt oss muligheten til å utfylle hverandres styrker og håndtere utfordringer på en mer effektiv måte. Vårt samarbeid har vært preget av gjensidig støtte, respekt og en felles innsats for å oppnå et best mulig resultat. Vi har over en lengre periode delt ideer, glede, fortvilelse, lettelse og mestringsfølelse. Alt i alt ser vi tilbake på prosessen som en fin og minnerik opplevelse.

Trondheim, mai 2023

Iselin Søberg og Siri Fossum

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser

NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
SIKT	Kunnskapssektorens tjenesteleverandør
NESH	Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora

1 Innledning

I denne masteroppgaven har vi utforsket barns tegning i matematikkundervisning, og mer spesifikt hvordan 2. klassinger bruker tegning i problemløsningsoppgaver. Forskning viser at tegning spiller en viktig rolle i matematikkfaget, både som et verktøy i problemløsning og som et middel for kommunikasjon (Bakar et al., 2016; Dahl, 2020; Papandreou, 2014; Saundry & Nicol, 2006). Dermed ønsker vi med denne oppgaven å rette oppmerksomheten mot en engasjerende aktivitet for mange barn, nemlig tegning som en integrert aktivitet i matematikkundervisningen. Selv om det er kjent at barn ofte liker å tegne, gjenstår fortsatt mye utforsking når det gjelder hvordan elever effektivt kan bruke tegning som et verktøy for å løse matematiske problemer.

Tegning brukes til ulike formål både i skolen og hjemme (Papandreou, 2014). Læreplanen for 2. trinn understreker betydningen av å utforske tall og mengder på kreative måter, inkludert gjennom tegning (Kunnskapsdepartementet, 2019). Edens & Potter (2007) antyder at det finnes et positivt forhold mellom tegning og akademisk oppnåelse. Selv om det ikke finnes konkrete bevis på denne sammenhengen, viser annen forskning at de som bruker tegning, i større grad finner korrekt løsning på problemer de jobber med (Bakar et al., 2016). Saundry & Nicol (2006) påpeker at det mangler tilstrekkelige rammeverk for forskning på bruk av tegning i matematikkundervisningen, hovedsakelig fordi det har fått for lite oppmerksomhet i tidligere forskning. Selv om det eksisterer noe forskning på området, mener vi det fortsatt er behov for mer dyptgående studier, spesielt innenfor norske klasserom. Tegning brukes til ulike formål både i skolen og hjemme (Papandreou, 2014). Læreplanen for 2. trinn understreker betydningen av å utforske tall og mengder på kreative måter, inkludert gjennom tegning (Kunnskapsdepartementet, 2019). Edens & Potter (2007) antyder at det finnes et positivt forhold mellom tegning og akademisk oppnåelse. Selv om det ikke finnes konkrete bevis på denne sammenhengen, viser annen forskning at de som bruker tegning, i større grad finner korrekt løsning på problemer de jobber med (Bakar et al., 2016). Saundry & Nicol (2006) påpeker at det mangler tilstrekkelige rammeverk for forskning på bruk av tegning i matematikkundervisningen, hovedsakelig fordi det har fått for lite oppmerksomhet i tidligere forskning. Selv om det eksisterer noe forskning på området, mener vi det fortsatt er behov for mer dyptgående studier, spesielt innenfor norske klasserom.

1.1 Litteratur og tidligere forskning

Tidligere forskning på tegning har utforsket ulike tilnærminger til bruk av tegning i problemløsning (Edens & Potter, 2007; Saundry & Nicol, 2006; Soundy & Drucker, 2009). Selv om tegning er en vanlig aktivitet blant barn, er det ikke alltid en intuitiv strategi i matematikkfaget. Å produsere tegninger kan imidlertid gi innsikt i barns tanker og forståelsesnivå, samtidig som tegnearbeidet åpner opp for oppdagelser og meningsskaping (Woleck, 2001). Carpenter et al. (1993) hevder at tidlig introduksjon av problemløsning kan styrke barns forståelse og gi mening til matematiske konsepter. De argumenterer for at en tidlig introduksjon vil oppmuntre elevene til å utvikle logiske og fornuftige resonnement, og komme med løsninger som fungerer i virkeligheten. På den måten kan elevene møte matematikken på en meningsfull måte ved å bruke tidligere erfaringer og kunnskaper om problemene. Ifølge Papandreou (2014) er tegneaktiviteten også anerkjent som et visuelt språk som kan hjelpe barn med å uttrykke seg og kommunisere med andre. Videre påpeker hun at selv om tegning letter formidlingen av barns indre representasjoner, tyr ofte barn likevel til andre uttrykksformer, som språk eller symboler, for å forbedre kommunikasjonsprosessen og sikre at de har gjort seg forstått hos andre.

1.2 Hva er problemet og hvordan kan vi løse det?

Selv om tegning er akseptert som en prosess som kan gi oss innsikt i barns tanker, forståelsesnivå og kommunikasjonsmåter (Papandreou, 2014; Woleck, 2001), bør det etter vår vurdering vies mer oppmerksomhet til å se på tegning i sammenheng med barns problemløsning i matematikkundervisning. Til tross for tidligere forskning som har utforsket tegningens rolle både som et ferdig produkt og et verktøy, har det vært begrenset søkelys på hvordan elever bruker tegning i problemløsning. Vi mener at det finnes et potensial i hver enkelt elevs tegninger som vi må lære oss å oppdage, og det kan vi få tak på gjennom å gi elevene muligheter til å utdype og forklare tegningene sine. Økt søkelys på elevenes tegninger, mener vi kan bidra til økt forståelse for det matematiske faget blant elevene. Dette synspunktet synes også å ha støtte i Saundry & Nicol (2006) sin studie som viser hvordan tegneprosessen kan ha en sentral rolle i å fremme barns matematiske resonnering. I tillegg viser Kleven (2022) til at videre forskning på dette området kan utforske sammenhengen mellom hvordan tegninger brukes i problemløsningen, og elevenes evne til å gi mening til problemet gjennom kommunikasjon med andre.

1.3 Fra problem til problemstilling

Gjennom vår forskning ønsket vi å få en dypere forståelse for et område som forskningsmiljøet mener det har vært forsket for lite på: Hvordan barn bruker tegning for å arbeide med problemløsningsoppgaver. Det førte til at vi formulerte problemstillingen:

Hvordan blir tegning brukt i åtte 2. klassingers problemløsning?

For å kunne besvare denne problemstillingen ser vi det hensiktsmessig å formulere to forskningsspørsmål, som har ulike fokuspunkter:

1. *Hvilke strategier bruker elevene for å løse problemet gjennom tegning?*
2. *Hvilke kjennetegn kan vi finne i tegningens utseende?*

1.4 Signifikans

Forskningen i feltet om barns bruk av tegning i matematikkfaget har tidligere vært rettet mot kvaliteter ved tegninger som et ferdig produkt (Dahl, 2020). Dersom man kun ser på tegning som et ferdig produkt, mistenker vi at flere gode poeng kan gå tapt og at tegningene kan bli misforstått og tolket som irrelevant for oppgaven. Eksempelvis kan elever ha mange gode refleksjoner og resonnement underveis i tegneprosessen, men som det kan være vanskelig for andre og tolke ut fra å se bare på tegningen. Derfor så vi verdien av å utforske tegneprosessen gjennom samtaler med elevene for å få økt innsikt i deres problemløsningsprosess. Gjennom vår forskning ønsket vi å se på hvordan elever bruker tegning som et verktøy i matematikkundervisningen for å løse problemer, og hvordan de ser ut. Dersom vi kan identifisere strategier som elevene bruker, og eventuelle mønstre mellom hvordan tegningen ser ut og hvordan den blir brukt, kan vi bidra til å utvikle undervisningsmetoder som tar hensyn til mangfoldet av elevers tilnærming i problemløsning. Dette kan være spesielt verdifullt for elever med ulike læringsstiler og utfordringer. Ved å forstå hvordan tegning kan styrke elevers forståelse av matematiske konsepter og styrke deres problemløsningsferdigheter, kan vi også bidra til en mer inkluderende og tilpasset matematikkundervisning.

1.5 Fortolkende paradigme

I vår forskningsprosess er det essensielt å definere hvilket vitenskapelig paradigme som styrer vår tilnærming, til både datainnsamling og analyse. Ifølge Clark et al. (2021) må vi stille oss spørsmålet "Hvordan skaffe og behandle data som er egnet for å besvare problemstillingen og gi et bidrag til kunnskap?». Vår forskning er forankret i det fortolkende paradigme, som ønsker å forstå verden gjennom subjektene, det vil si elevene. Dette paradigmet anerkjenner at det finnes flere beskrivelser av virkeligheten, og vår forskning vil derfor forsøke å belyse et mangfold av disse beskrivelsene. Ved å undersøke hvordan elever bruker tegning i arbeid med problemløsning, vil vi sette søkelys på et mangfold av elevbesvarelser. Vi er ikke primært opptatt av å vurdere om elevene løser problemene på en «riktig» måte, men heller hvordan de går frem for å løse dem. Vi vil se på hvordan tegning fungerer som et verktøy for problemløsning i matematikk, fra elevers perspektiv, og hvordan deres ulike oppfatninger og tilnærminger kan bidra til en dypere forståelse av denne prosessen.
Vår tilnærming til datainnsamling vil være mangfoldig og inkludere elevbeskrivelser, intervjuer og videopptak. Ved å samle flere ulike typer data, vil vi kunne bidra med en flerdimensjonal forståelse for hvordan tegning fungerer som et verktøy for problemløsning i matematikk. Med ulike typer data vil vi som forskere skape en beskrivelse av virkeligheten gjennom egne analyser, og spiller dermed en aktiv rolle i å fortolke dataene (Mackenzie & Knipe, 2006). Samtidig må vi være oppmerksomme på hvordan vår egen forståelses påvirker dataene, da denne forståelsen kan være formet av vår bakgrunn, erfaring, kunnskap og det teoretiske rammeverket vi opererer innenfor (Nilssen, 2012). I delkapittel 3.9.4 *Forskerens rolle* vil vi utforske og diskutere mer detaljert, hvordan våre perspektiver kan påvirke utfallet i denne studien.

1.6 Argumenterende kortversjon av masteroppgaven

Vi starter med å presentere det teoretiske grunnlaget for vår forskning. Innledningsvis vil vi diskutere generelle teorier om bruk av matematiske representasjoner og problemløsning. Dette gir oss en bred forståelse før vi skal snevre inn fokuset mot mer spesifikke teorier knyttet til bruken av tegning, med rammeverket til Kleven (2022) som utgangspunkt. Rammeverket blir brukt til å analysere dataene, og diskusjonsdelen vil ha samme struktur som analysen; kategorier for bruken av tegning blir presentert først, og deretter blir kategorier for tegningens utseende presentert. Videre vil det drøftes litt rundt tegning som et ferdig produkt og hvordan gester kan komme til uttrykk i problemløsning.

Datamaterialet vårt består av innsamlet elevarbeid og transkripsjon av intervjuer med åtte andreklassinger, der hver elev arbeidet med fire ulike matematiske problemløsningsoppgaver. Oppgavene skulle oppfordre elevene til å løse problemene ved hjelp av tegning. Intervjuene ble filmet og transkribert, noe som ga oss et godt datagrunnlag for dataanalyse. I analyseprosessen ble det fortløpende gjort vurderinger og justeringer av hvilke kategorier som var aktuelle, basert på den informasjonen som datamateriale viste oss. Vi har adoptert rammeverket som Kleven (2022) utarbeidet i sin forskning, med hensikt å analysere bruken av tegning, og samtidig se på visuelle og multimodale aspekter ved tegninger. For å tilpasse og bearbeide dette rammeverket har vi brukt teorier fra Saundry og Nicol (2006), og Dahl (2020). Valg av rammeverk ble basert på evnen rammeverket hadde til å kategorisere og analysere de spesifikke aspektene ved bruk av tegning i matematikk, og på relevansen det hadde til å kunne hjelpe oss og svare på problemstillingen vår. Videre vil vi drøfte funnene våre med eksisterende teori, og se om de enten korresponderer eller utfordrer tidligere teorier, eller kan vise noe nytt. Basert på drøftingen vil vi komme med noen konklusjoner og deretter komme med svar på problemstillingen vår. Avslutningsvis vil vi reflektere rundt hvilken betydning våre funn og vår forskning kan ha å si, for undervisningspraksisen og elevers utvikling, samt peke på forslag til videre forskning som kan berike forskningsfeltet videre.

2 Teoridel

Denne studien har undersøkt hvordan noen elever på 2. trinn tegner for å løse fire problemløsningsoppgaver i matematikk, med problemstillingen; *Hvordan blir tegning brukt i åtte 2. klassingers problemløsning?* I teorikapittelet vil vi først si litt om tegning i matematikkundervisning, etterfulgt av begrepene *problemløsning* og *resonnering* i matematikkfaget. Videre vises det til Kleven (2022) sitt rammeverk, når vi legger frem relevant teori knyttet til bruken av tegning og tegningers utseende. Kategoriene for bruken av tegning presenteres ut ifra om de sier at tegningen er laget *for* eller *av* problemløsning, og kategoriene heter *konkretiseringsmateriale, støtte for system, utforskingsverktøy* og *visualisering.* Kategoriene legger grunnlaget for analysen som skal hjelpe oss å gi svar på det første forskningsspørsmålet; *Hvilke strategier bruker elevene for å løse problemet gjennom tegning?* Det det andre forskningsspørsmålet har ordlyden; *Hvilke kjennetegn kan vi finne i tegningens utseende?* Vi vil også her vise til Kleven (2022) sitt rammeverk for å definere kategoriene som legger grunnlaget for analyse og besvarelse av det andre forskningsspørsmålet. Her presenteres kategoriene *piktografisk tegning, ikonisk tegning, symbolsk tegning* og *kun symboler*. Det endelige analyseverktøyet blir presentert og forklart i delkapittel 3.7 *Metode for analyseprosessen*.

2.1 Tegning i matematikkundervisning

I matematikkundervisningen er representasjoner viktige både som et hjelpemiddel til refleksjon, og for formidlingen av matematiske ideer (Elia et al., 2007). Det har vært pekt på at undervisningen ofte fokuserer for mye på å lære de ulike representasjonene, heller enn å bruke dem til å forstå matematikken bedre (Goldin, 2003). Representasjoner i matematikk kan være fysiske objekter, diagrammer, språk eller tegninger (Bobis & Way, 2018). Representasjoner blir brukt av både elever og lærere som en støtte til å forstå eller forklare og formidle tenkning (Bakar et al., 2016). Tegning som representasjon gir lærere tilgang til barns forståelse, slik at de kan vurdere og ta hensyn til den (Thom & McGarvey, 2015), og er derfor en motivasjon for å se på tegning i elevers arbeid med problemløsning. Crespo & Kyriakides (2007) viser også til fordeler med å analysere barns tegninger, siden barn oftere foretrekker tegning som et resonnement- og kommunikasjonsverktøy heller enn symbolske representasjoner.

Papandreou (2009) påpeker at små barn kan finne det vanskelig å organisere sine egne tanker om matematikk internt. Interne representasjoner er tanker og mentale prosesser som vi ikke har direkte tilgang til, fordi det er umulig å vite helt sikkert hva som foregår i noen andre sitt hode (Goldin & Kaput, 1996). Tegning er et av barns første hjelpemiddel, og kan hjelpe dem å lage en håndfast og kommuniserbar representasjon som kan gjenspeile tanker og mentale prosesser (Brooks, 2009). Tegninger lar barn utrykke sine interne forståelser av et matematisk konsept, og denne prosessen kan hjelpe lærere og forskere med å se hvordan barn forstår (eller misforstår) disse konseptene. Dermed kan barns tegninger fungere som en slags «bro» mellom deres indre tanker og den ytre verden, samt gjøre den abstrakte tenkningen deres synlig (Goldin & Kaput, 1996).

Det blir påpekt at ved å visualisere problemer gjennom tegninger, kan elever lettere finne løsninger på problem (DeWindt & Goldin, 2003). Tegninger fungerer som en ytre representasjoner av elevers tanker og forståelse (Cartwright, 2023), noe som gir læreren en unik mulighet til å få innsikt i elevenes tenkemåter (Thom & McGarvey, 2015). Tegneaktiviteten kan være til god hjelp for å løse problemer, men kan også innebære noen ulemper dersom elevene ikke vet hvordan de skal bruke det riktig. Eksempelvis kan det kreve en høyere matematisk kompetanse og konsentrasjon, å plukke ut de riktige matematiske elementene som er relevante for å løse problemet. Dersom man ikke er i stand til å fremheve den matematiske strukturen, kan tegning være et hinder for en effektiv løsningsprosess fordi man kan bli for fokusert på irrelevante detaljer (Rellensmann et al., 2017).

2.2 Problemløsning

Problemløsning er en sentral del av matematikkundervisningen, der elevene står overfor utfordrende oppgaver som krever kritisk tenkning og analytiske ferdigheter. I tillegg er det også knyttet til evnen til å analysere og omforme både kjente og ukjente problemer, samt vurdere om de foreslåtte løsningene er gyldige (Kunnskapsdepartementet, 2019). Ifølge Kunnskapsdepartementet (2019) handler problemløsning i matematikk om å utvikle en metode for å løse problemer som ikke er kjent på forhånd. Videre fremhever de algoritmisk tenkning som en sentral del av problemløsningsprosessen, som innebærer å utvikle strategier og fremgangsmåter for å systematisk løse problemer ved å bryte dem ned til håndterbare deler. I likhet med Kunnskapsdepartementet (2019) definerer flere forskere *problemløsning* som en situasjon som krever bruk av en strategi, men hvor vedkommende ikke har en umiddelbar fremgangsmåte for å finne en løsning (Calicchio, 2023; Mason et al., 1991). Vi stiller oss bak denne definisjonen av *problemløsning* i vår oppgave, da vi ønsker å se hvordan elever benytter tegning som et hjelpemiddel i arbeid med oppgaver som de ikke har en umiddelbar løsning på.

Problemløsning har blitt en kjent og variert prosess i matematikkfaget, og kan inkludere ulike aktiviteter for dagens skoleelever (Lester, 2003; Lester & Cai, 2016). De siste fagfornyelsene inkluderer kritisk tenkning og resonnering i større grad enn tidligere (Kunnskapsdepartementet, 2017), og legger derfor mer vekt på blant annet problemløsningsoppgaver hvor elevene må tenke mer selv for å komme frem til en løsning. *Resonnering*, eller måten vi tenker på for å komme med påstander eller konklusjoner (Lithner, 2000), er derfor en viktig del av problemløsningsprosessen. Dermed spiller elevers tidligere kunnskaper og erfaringer, en avgjørende rolle i hvordan de oppfatter og løser problemer. Ifølge Mason et al. (1991) finnes det ikke rene problemløsningsoppgaver, men det er hvem oppgavene blir gitt til, som avgjør hvorvidt oppgavene blir en problemløsningsoppgave eller ikke. Det er viktig å merke seg at det som utgjør et problem for én elev, ikke nødvendigvis trenger å være et problem for en annen. Eksempelvis kan elever på ungdomstrinn anse brøkoppgaver som «enkle» oppgaver, fordi de har tilegnet seg nødvendig kunnskap om symboler, metoder og strategier for å løse slike oppgaver. Elever på småtrinn vil derimot ofte ha et annet utgangspunkt for de samme oppgavene, og har trolig en manglende kunnskap om løsningsstrategier, og dermed blir det problemløsningsoppgaver. Det viser viktigheten av å ha kjennskap til elevenes erfaringer og kompetanse, for å kunne legge opp til gode problemløsningsoppgaver og faglige diskusjoner.

Det er ulike meninger om hva som utgjør en god problemløsningsoppgave. Vale et al. (2017) mener at en god problemløsningsoppgave må oppmuntre til sammenligning, forklaring, begrunnelse og generalisering. Lester & Cai (2016) viser til noen kriterier for at en oppgave skal være et godt matematisk problem. De stiller seg bak påstanden om at et problem inkluderer nyttig matematikk og fremmer dyktige matematiske ferdigheter og begrepsutvikling. De sier at et godt matematisk problem, har flere mulige løsningsstrategier, oppmuntrer til diskusjon, og gir læreren mulighet til å vurdere elevenes utvikling (Lester & Cai, 2016).

Problemløsningsoppgaver kan også ses i sammenheng med åpne oppgaver. Begrepet *åpne oppgaver* har over tid blitt utviklet gjennom ulike forskere, pedagoger og lærere. Beskrivelsene som går igjen for en åpen oppgave, er at problemet i oppgaven gir rom til utforsking, og til å bruke ulike løsningsmetoder (Ardianik et al., 2020; Kwon et al., 2006; Pehkonen, 1997). Begrepene *problemløsningsoppgaver* og *åpne oppgaver* er dermed beslektede, men de dekker ikke nødvendigvis det samme konseptet. En åpen oppgave kan være en problemløsningsoppgave dersom oppgaven gir rom til å bruke mer enn én løsningsstrategi. Problemløsningsoppgaver er derimot ikke alltid åpne oppgaver, da slike oppgaver kan ha en spesifikk løsning uten en åpenbar fremgangsmåte. Ved å gi elevene åpne problemløsningsoppgaver, får de mulighet til å anvende sine matematiske kunnskaper og ferdigheter på en utfordrende måte, gjennom å utforske og tenke kreativt. Mangelen på en umiddelbar løsningsmetode og et fasitsvar oppfordrer elevene til å tenke kritisk, utforske ulike tilnærminger og begrunne sine løsninger.

Carpenter et al. (1993) hevder at en tidlig introduksjon av problemløsningsoppgaver kan bidra til at barn kontinuerlig vil forsøke å finne logiske forklaringer på problem, og dermed løse matematiske problemer med forklaringer som alltid gir mening. Elevene vil da møte matematikken som noe meningsfullt og noe de skal forstå, og slik benytte tidligere kunnskap og erfaring til å skape sammenhenger til problemene. Problemløsningsoppgaver kan hjelpe barn å legge merke til og forstå matematiske aspekter og relasjoner, men de kan mangle verktøy eller språk for å uttrykke hva de har lagt merke til (Clarke et al., 2012). Barn trenger å lære ord og setninger som kan brukes for å sammenligne og skille ideer, slik at de kan bruke språket sitt på en måte som passer til konteksten. Et eksempel er hvis det handler om å sammenligne størrelser, så kreves det at barna kan begreper som større og mindre slik at de kan utrykke sine tanker på en tydelig og overbevisende måte.

Når man snakker om problemløsningsoppgaver, er det også relevant å se dem i sammenheng med problemløsningsstrategier. For at elever skal kunne strukturere problemer, er det vesentlig at elevene har gode løsningsstrategier (Essen & Hamaker, 1990; Papandreou, 2009). Barneskoleelever opplever at det er utfordrende å løse tekstoppgaver og problemløsningsoppgaver, som et resultat av mangel på generelle problemløsningsstrategier (Essen & Hamaker, 1990). Ifølge Essen og Hamaker (1990), er generelle problemløsningsstrategier definert som strategier for planlegging og regulering av selve løsningsprosessen som inkluderer heuristiske strategier for problemanalyse og utforskning. Videre presiserer de at elever som mangler slike strategier, eller ikke anvender dem, ikke har tilgang til relevant kunnskap. Selv om det er en bred enighet om at elevers problemløsningsevner bør være et primært mål for undervisningen, er det ikke enighet om hvilke tiltak lærere bør gjøre for å oppnå målet (Lester & Cai, 2016). Problemløsning er ikke et nytt forskningsområde, men likevel hevder flere forskere at tegning som en problemløsningsstrategi ikke har blitt forsket tilstrekkelig på (Lambert, 2006; Lester & Cai, 2016; Soundy & Drucker, 2009).

2.3 Resonnering i matematikkfaget

Ifølge Battista (2016) er *resonnering* (og meningsskaping) selve grunnlaget for matematiske kompetanser og ferdigheter, og å utvikle elevers resonnerings- og meningsskapingsevner bør derfor være det primære målet for matematikkundervisningen. En rekke forskere mener at *resonnering* er vesentlig for at elever skal kunne utvikle en forståelse for matematiske ideer og en sammenhengende matematisk kunnskap som et grunnlag for fremtidig læring (Battista, 2016; Berry, 2014; Boaler, 2010; Hiebert, 1997). Utdanningsdirektoratet fremmer også *resonnering* som en viktig del for utvikling av forståelse for innhold og sammenhenger i faget, og ser på begrepet som noe av det viktigste elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget (Kunnskapsdepartementet, 2017). For lærere er det dermed avgjørende å gjenkjenne og utvikle elevenes matematiske resonneringsevne. Det vil si at lærere må ha en god forståelse for hva matematisk resonnering betyr, samt hvordan elever kan komme til å uttrykke dette i praksis. For å belyse hvordan elevene i vår studie bruker tegning i problemløsning, er det vesentlig å være bevisste over hvordan de resonnerer og uttrykker resonneringen for å komme frem til en løsning.

Selv om begrepet *resonnering* ofte blir brukt av matematikklærere og forskere, finnes det ingen klar og velformulert definisjon for begrepet (Yackel & Hanna, 2003). Bragg et al. (2016) ser på matematisk *resonnering* som å følge en undersøkelseslinje, anta sammenhenger og generaliseringer, utvikle et argument, begrunnelse eller bevis ved å bruke matematisk språk. Videre definerer de også *resonnering* som en språkbasert handling, hvor språket er kjernen i både barns matematiske tenkning og deres kommunikasjon til andre. Battista (2016) ser også på *resonnering* som en prosess hvor man skal trekke konklusjoner, men legger ikke like stor vekt på språket. I motsetning til Bragg et al. (2016) fremhever han at konklusjonene kommer fra bevis eller antakelser basert på manipulasjon og analyse av objekter, representasjoner, diagrammer, symboler eller utsagn. Selv om begrepet *resonnering* ofte blir brukt av matematikklærere og forskere, finnes det ingen klar og velformulert definisjon for begrepet (Yackel & Hanna, 2003). Bragg et al. (2016) ser på matematisk *resonnering* som å følge en undersøkelseslinje, anta sammenhenger og generaliseringer, utvikle et argument, begrunnelse eller bevis ved å bruke matematisk språk. Videre definerer de også *resonnering* som en språkbasert handling, hvor språket er kjernen i både barns matematiske tenkning og deres kommunikasjon til andre. Battista (2016) ser også på *resonnering* som en prosess hvor man skal trekke konklusjoner, men legger ikke like stor vekt på språket. I motsetning til Bragg et al. (2016) fremhever han at konklusjonene kommer fra bevis eller antakelser basert på manipulasjon og analyse av objekter, representasjoner, diagrammer, symboler eller utsagn.

Lithner (2000) viser til en definisjon som mener at «resonnering defineres som tankegangen, måten å tenke på for å komme med påstander eller konklusjoner». Sammenlignet med Battista (2016) og Bragg et al. (2016) sine definisjoner kan denne ses på som en mer generell definisjon. En tankegang kan resultere i både språk og konklusjoner basert på bevis eller antakelser, og man kan på den måten si at Lithner (2000) sin definisjon er mer dekkende fordi den inkluderer flere aspekter ved *resonnering*. Videre presiserer Lithner (2000) at *resonnering* ikke alltid er basert på formell logikk, og at den kan være feil, så lenge det (for den som resonnerer) finnes noen fornuftige grunner som støtter resonneringen. I vår forskning er det relevant å se på hvordan elevene resonnerer, uavhengig av om resonnementet er korrekt eller ikke. Dermed ser vi det hensiktsmessig å definere *resonnering* ut fra Lithner (2000) sin definisjon, da det er en fleksibel tilnærming som inkluderer ulike tenkemåter, og anerkjenner at *resonnering* ikke alltid må føre til korrekte konklusjoner.

Når man ser på hvordan elever resonnerer og argumenterer for sine besvarelser, er det interessant å ikke bare se på elevenes verbale, men også elevenes ikke-verbale uttrykk. Tenkning er en mental prosess som kommer til uttrykk både gjennom språk, kropp og verktøy, og dermed er gester også viktige komponenter i elevers tenkning og språk (McNeill, 2005; Radford, 2009). I denne oppgaven defineres *gester* som spontane bevegelser produsert mens man snakker, hovedsakelig av hender og armer (McNeill, 2005). *Gester* blir ofte forbundet med å kommunisere matematiske ideer (Alibali et al., 2014), men blir også sett på som viktige komponenter av tenkning i uttrykk og kommunikasjon av matematikk (Arzarello et al., 2009; Radford, 2009). Selv om vår forskning ikke hovedsakelig legger vekt på *gester*, har vi likevel valgt å inkludere dette i vårt forskningsarbeid. Vi mener det er interessant å se på hvordan, elevene benytter gester i sitt arbeid med tegning og problemløsning for å kunne gi oss et bedre innblikk i elevenes tenkning.

2.4 Teoretisk rammeverk

For å kunne foreta en strukturert tilnærming til en analyse av elevers bruk av tegning, er det hensiktsmessig å benytte seg av et rammeverk som er egnet for å analysere datamaterialet vårt. Kleven (2022) har utviklet et rammeverk med hensikt å vurdere ulike aspekter ved barns matematiske tegninger som et verktøy for matematisk resonnement. Rammeverket kan brukes til å analysere bruken av tegning, men også visuelle og multimodale aspekter ved en tegning, og består blant annet av noen kategorier fra Saundry & Nicol (2006) som vi tidlig ønsket å inkludere i vår forskning. Basert på at Kleven (2022) inkluderte kategorier som sa noe om både detaljer i tegningen og bruken av tegning, konkluderte vi med at det var best egnet for å kunne gi oss svar på problemstillingen. Vi presenterer rammeverket fra Kleven (2022) i tabell 1, og henviser til de samme kildene som hun har brukt i sitt rammeverk. Videre i teorikapittelet vil vi bruke noen av kategoriene som eksempler for å utdype teori, men vi vil ikke utdype alle kategoriene. Hvorfor vil vi forklare i delkapittel 3.7 *Metode for analyseprosessen*. Rammeverket er oversatt til norsk av oss.

Kategori	Beskrivelse og indikatorer for bruk
Brukt tegning	Eleven fant en eller flere løsninger ved å bruke tegning
Brukte ikke tegning	Eleven brukte kun tall, bokstaver eller tegnet ikke i det hele tatt. Dette inkluderer også bruk av andre konkrete hjelpemidler, som å telle på fingrene eller bruke tellebrikker. Både korrekte og feilaktige svar.
Manipulerende	Bevegelser, som sirkler eller linjer, representerer beregninger eller operasjoner, på samme måte som fysiske hjelpemidler (Saundry & Nicol, 2006; Woleck, 2001). Tegninger brukes til å organisere og telle elementene som er nødvendige for å løse problemet (Woleck, 2001) og fungerer som en plassholder for tanker.
Støtte for system	En passiv tegning uten bevegelse. Tegninger brukes i en elimineringsprosess ved systematisk sortering av elementer og oppbygging av en struktur (Saundry & Nicol, 2006). Tegningen er avgjørende for å løse oppgaven, og elever bruker den ofte til å telle og telle igjen for å bekrefte løsningen sin.
Fortelling	Elever skaper en historie med elementer fra oppgaven eller deres eget liv (Soundy & Drucker, 2009), og deretter spiller de ut historien. Kreativitet, tidligere kunnskap og evnen til å skille mellom relevant og irrelevant informasjon blir tydeliggjort.
Dramatisk fremstilling	Eleven tegner seg selv som en del av problemet (Woleck, 2001). For eksempel kan en elev tegne seg selv mens de peker på en tallinje, noe som viser det fysiske dramaet i å løse problemet.
Bildeskapning/ visualisering	Problemet løses internt. Prosessen utspiller seg i deres sinn, og deretter tegner de for å formidle en løsning (Saundry & Nicol, 2006). Informasjonen behandles fortsatt visuelt, selv om den ikke alltid er synlig på papiret.
Piktografisk	Tegningen kjennetegnes av sin realisme i forhold til elementene i oppgaven. For eksempel, hvis oppgaven ber elevene om å plassere blomster i vaser, vil elevene tegne enten blomster, vaser, eller begge deler. Dette kalles også situasjonstegninger (Rellensmann et al., 2017). De skildrer problemets overflate og har et lavt abstraksjonsnivå.
Ikonisk	Enkle linjer og former skapes for å etterligne elementene i problemet. Det mangler realismen som er knyttet til virkeligheten som finnes i piktografiske tegninger. Disse kalles også matematiske tegninger (Rellensmann et al., 2017). De avbilder en matematisk struktur og har et høyt abstraksjonsnivå.
Symbolsk	Elevene inkluderer tall eller bokstaver/ord. Definert i dette rammeverket som de konvensjonelle tallene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, alle bokstaver/ord og ikke-konvensjonelle tallsymboler (Papandreou, 2009)
Gester og verbalt språk	Elevene supplerer sin løsning med gestikulering eller bruker muntlig språk for å støtte sin kommunikasjon.

Tabell 1: Kleven (2022) sitt rammeverk

Kleven (2022) har i sin forskning nevnt hvordan Saundry & Nicol (2006) skiller mellom to forskjellige måter barn bruker tegning i matematikk; tegning *for* problemløsning og tegning *av* problemløsning. Tegning *for* problemløsning handler om at man bruker tegninger som en del av løsningsprosessen for et matematikkproblem, mens tegning *av* problemløsning innebærer å lage tegninger etter at problemet er løst og bruke tegning som et verktøy for å kommunisere resonneringen og løsningen. Når man tegner *for* problemløsning blir tegningen betraktet både som en aktiv prosess og et ferdig produkt. Flere forskere har en formening om hvilke tegneaktiviteter som er som et problemløsningsverktøy og ikke. Saundry & Nicol (2006) mener at *konkretiseringsmateriell* og *støtte for system* er to kategorier hvor tegningen legger til rette for problemløsning. I tillegg fremhever Dahl (2020) begrepet *utforskningsverktøy* som et verktøy *for* problemløsning. Å tegne *av* problemløsning handler som nevnt om å lage tegninger i etterkant av problemløsningen, og da blir tegning brukt på en måte som er lik det som Saundry og Nicol (2006) kaller *visualisering* (vår oversettelse).

2.4.1 Tegning *for* problemløsning

Tegning *for* problemløsing involverer bruk av tegninger som en del av løsningsprosessen. Elevene skaper tegningene sine samtidig som de jobber med oppgaven, og tegningen er en del av tankeprosessen deres for å komme frem til løsningen.

Når tegningen fungerer som *konkretiseringsmateriale*, vil elevene aktivt bruke tegningen for å utforske og løse problemet (Saundry & Nicol, 2006). Istedenfor å se på tegningen som et statisk bilde, kan elevene manipulere bildet gjennom å legge til piler, sirkler eller linjer for å representere regneoperasjoner eller andre matematiske konsepter. For eksempel at en elev setter strek fra en kjeks til et barn for å presentere handlingen «dele ut». På denne måten blir tegningen et dynamisk verktøy som elevene kan bruke til å se for seg og utforske matematiske ideer på en mer «hands-on» måte, slik de ville manipulert fysiske konkretiseringsmaterialer hvis de var tilgjengelige (Saundry & Nicol, 2006).

Ved bruk av tegning gjennom *støtte for system* brukes ofte tegningen for å holde orden på elementene i problemet (Saundry & Nicol, 2006). Dahl (2020) sier om Saundry & Nicol (2006) sin kategori *støtte for system*, at dens hovedfunksjon er å hjelpe elevene å holde oversikt over elementene i oppgaven. Dette er å tegne *for* problemløsning, fordi man kan tegne *for* å systematisk teste ut ulike løsninger, strukturere elementene, eller bruke tegningen som verktøy *for* telling. Tegningen fungerer som en plan eller oversikt over problemet og elementene i det. For eksempel kan det handle om et delingsproblem (20 drops skal deles likt på ti barn) der elevene systematisk kan tegne opp dropsene på den ene siden av arket, og barna på den andre siden. Slik kan de tegne streker eller sette kryss over dropsene de har delt ut og eliminere dropsene etter hvert. En slik bruk av tegning innebærer ofte at barna først teller, teller igjen og sjekker løsninger (Saundry & Nicol, 2006).

Å bruke tegningen som et *utforskningsverktøy* er også et eksempel på tegning *for* problemløsning. Her handler det om å ta i bruk tegningen *for* å få en forståelse av problemet og strukturen i problemet, men også *for* å klargjøre rollene til de involverte tallstørrelsene. I praksis vil det si at elevene prøver seg frem med tegning gjennom ulike visuelle fremstillinger, endrer eller forkaster det påbegynte arbeidet. Dersom elevene oppdager rollene og strukturen i et problem, kan tegningene fungere som støtte til å finne en løsning (Dahl, 2020). Det som skiller utforskningsverktøy fra de andre kategoriene, er at eleven ikke har en klar struktur eller formening om hvordan hen skal gå frem. Dermed blir det mer en fremgangsmåte hvor man prøver seg frem *for* å utforske mulige løsninger, fremfor å systematisk teste ut løsninger.

2.4.2 Tegning *av* problemløsning

Tegning *av* problemløsning vil som kjent handle om at elevene tegner etter at de har løst problemet. Her vil elevene bruke andre løsningsstrategier enn om de tegner *for* problemløsning. Bruk av tegning som *visualisering* kjennetegner at barna ser for seg problemet i hodet. Ofte vil ikke barnet sette i gang å tegne problemet med en gang, men forsøke å se for seg problemet, og noen ganger tenke høyt (Saundry & Nicol, 2006). Ofte kan barnet skrive ned et numerisk svar på papiret, og argumentere for at «jeg bare visste det». Det kan først virke som om barnet er forvirret over problemet eller ikke har en strategi for å tegne ideene sine på papiret, men eleven har likevel bearbeidet informasjonen fra problemet på en visuell måte (Saundry & Nicol, 2006).

2.4.3 Tegningenes utseende

For å kunne se hvordan tegning blir brukt i problemløsning, er det også relevant å se på hvordan elevene faktisk tegner og hvilke detaljer tegningene inneholder. Som påpekt under delkapittel 1.4, har store deler av den tidligere forskningen særlig vært rettet mot kvaliteter i tegninger som et ferdig produkt (Dahl, 2020). Ved å studere ferdigproduserte tegninger kan man få et innblikk i hvilke detaljer eleven har vektlagt for å løse oppgaven, samt hvordan hen har representert den matematiske strukturen i problemet. Det er en uenighet blant forskere om det er en sammenheng mellom detaljer i tegningene og barns matematiske suksess. Bakar et al. (2016) konkluderte i sin studie at det ikke er en sammenheng, mens andre hevder at barn som har et mindre fokus på detaljer i tegninger, har en bedre evne til å tenke abstrakt og dermed mestrer det matematiske aspektet med problemet bedre (Crespo & Kyriakides, 2007; Velez & Ponte, 2013). Grad av detaljer i tegninger varierer, og flere forskere viser til begrepene ikoniske og piktografiske tegninger for å klassifisere skillet mellom detaljnivåene i tegninger (Bakar et al., 2016; Carruthers & Worthington, 2006; Dahl, 2020; Saundry & Nicol, 2006). Detaljer i tegningene blir ofte lagt til for å forbedre formidlingen av en løsning, og mange barn supplerer ofte med tall og andre symboler for å løfte kommunikasjonen av besvarelsene sine (Papandreou, 2014).

Barn vil tegne på ulike måter og noen ganger vil de bruke en kombinasjon av flere måter (Thomas et al., 2002). Generelt sett vil tidligere forskning vise til to hovedkategorier når det kommer til barns tegninger; *ikoniske tegninger* og *piktografiske tegninger* (Bakar et al., 2016; Carruthers & Worthington, 2006; Dahl, 2020; Saundry & Nicol, 2006). En tegning vil bli klassifisert som *ikonisk* dersom den bare inneholder enkle linjer og former som representasjon for objektene i problemet. På den andre siden vil en tegning bli klassifisert som *piktografisk* dersom den inneholder realistiske representasjoner av objektene i problemet (Bakar et al., 2016). *Piktografiske* tegninger vil altså gjenspeile historieelementet i problemet, for eksempel en tegning av dyr eller mennesker (Cartwright, 2023). De *ikoniske* tegningene, som også kan inneholde prikker, streker eller tall, vil derimot kunne si oss noe om barnets interne representasjoner (Athey, 2007). Rellensmann et al. (2017) har også sett på hvordan barns tegninger ser ut, men skiller mellom *matematiske tegninger* eller *situasjonstegninger* ut fra i hvor stor grad tegningen er knyttet til problemet, virkeligheten og hvor abstrakt tegningene er. De viser til at en *matematisk tegning* vil bære preg av en matematisk struktur og abstraksjon, og inneholde stort sett relevante elementer for å løse problemet. En *matematisk tegning* kan derfor også kalles for en *ikonisk tegning*. Videre ser de på *situasjonstegninger* som tegninger hvor det er et lavt nivå av abstraksjon, men heller inneholder irrelevante detaljer fra problemet og virkeligheten, og kan dermed benyttes som et annet begrep for *piktografiske tegninger*. Her ser vi eksempler av at det finnes flere ulike begreper for samme betydning, men vi ønsker i vår oppgave å benytte begrepene *ikonisk tegning* og *piktografisk tegning* for å skille mellom de to variantene av tegninger.

Bokstaver, ord og symboler blir ofte brukt i kombinasjon med andre representasjoner for å skille elementene i oppgaver fra hverandre (Papandreou, 2009). Barn som utforsker med symboler gjennom tegneaktiviteter, er oftere i stand til å snakke om problemet og løsningen de har kommet frem til. Det kan legge et grunnlag for barns videre matematiske utvikling som kan hjelpe dem med å forstå hensikten av konvensjonelle symboler (Carruthers & Worthington, 2005). Selv om en oppgave kan etterspørre en løsning som hovedsakelig innebærer tegning, tilføyer ofte elever representasjoner som tall og andre symboler for å forbedre formidlingen av tegningen sin (Papandreou, 2014).

2.5 Tidligere forskning

For å kunne få en forståelse av det eksisterende forskningsfeltet innenfor tegning i problemløsning, er det viktig å foreta et grundig litteratursøk. Det hjelper oss som forskere med å forstå hva som allerede er kjent om emnet, hvilke metoder og teorier tidligere forskere har benyttet seg av, samtidig som det gir oss et innblikk i hvilke ubesvarte spørsmål og hull som finnes i eksisterende forskning. Et solid teoretisk og empirisk fundament er et godt utgangspunkt for å belyse vår forskning på en troverdig måte, i tillegg til at det bidrar til en større forståelse gjennom å lære gjennom andres arbeid. I vårt arbeid med å finne tidligere forskning har vi foretatt et systematisk litteratursøk i ulike søkemotorer. Vi startet med å hovedsakelig søke etter relevante begreper som eksempel «tegning i matematikk», «tegning i problemløsning», «problemløsning i matematikk» og «representasjoner i matematikk» både på norsk og engelsk i digitale litteraturdatabaser. Slik fikk vi et bredt utgangspunkt for teoretisk og empirisk forskning for vår problemstilling. Dermed måtte vi snevre inn søket og foreta vurderinger for hvilken litteratur som var relevant for vår studie, og vi vil videre presentere de viktigste poengene i forskningen vi fant.

Tidligere forskning har vist hvor viktig tegninger er når det gjelder å løse problemer. Dahl (2020) understreker dette poenget, mens Edens & Potter (2007) peker på en sammenheng mellom romlig forståelse og skjematiske tegninger når det gjelder prestasjoner i problemløsning. De hevder at evnen til å se for seg og tegne representasjoner av problem kan være nøkkelen til å løse problemer. Selv om tegning er en kjent aktivitet for barn, har det blitt viet for lite oppmerksomhet til verdien det kan ha å la barn tegne i matematikkfaget (Woleck, 2001). Soundy & Drucker (2009) hevder i sin forskning at tegning ikke verdsettes høyt nok i matematikkfaget, mens Edens og Potter (2007) tror årsaken er at tegning ikke har blitt anerkjent som et instruksjonsverktøy som legger nok til rette for læring, men heller blir sett på som en morsom aktivitet. Rellensmann et al. (2017) fant på sin side at det å legge opp til en pålagt tegneaktivitet, kan gi et dårligere resultat dersom elevene opplever det som krevende å lage en tegning i en slik situasjon. Videre fant de i sin studie at tegning kan være et hinder for problemløsningsprosessen dersom elever blir for opphengt i detaljnivå i tegningene, men at det likevel var til god hjelp i problemløsning.

Flere forskere har argumentert for hvorfor man burde prioritere tegning i matematikkundervisningen. Brooks (2009) forsket på hvordan tegning og visualisering av tegning hjalp barn med å konstruere sine egne meninger, samt hjelper med å dele ideene sine med andre. Hun fant i sin studie at tegning er en metode som kan engasjere og hjelpe barn med å synliggjøre ideene sine og på den måten være i stand til å produsere en ekstern representasjon av en tanke eller ide. Papandreou (2009) mener at elever som bruker tegning for å løse matematiske problem, vil få en bedre forståelse av problemer og dermed være i stand til å reflektere bedre rundt løsningsprosessen. Soundy & Drucker (2009) viser til at tegning har fått en mer sentral rolle i matematikkundervisningen enn før, og hevder at lærere har gått mer bort fra å kun kommunisere matematikk gjennom symboler, men har åpnet mer opp for flere representasjoner. Saundry & Nicol (2006) mener at tegneprosessen har en viktig rolle i å fremme barns matematiske resonnering, og at det kan hjelpe lærere med å anerkjenne barns tidligste representasjoner. Videre i sin studie fant de også et mangfold av beskrivelser av de ulike elevproduserte tegningene av problemløsningsoppgaver. De fremhever dermed viktigheten av å analysere elevarbeid, da det kan gi oss viktig informasjon om elevenes tilnærming til problemløsning og deres matematiske tenkemåter. Brooks (2009) underbygger også viktigheten av tegning og hevder at dersom barn er i stand til å synliggjøre ideene sine, er det lettere for lærere å få en verdifull innsikt i deres vitenskapelige tenkning og kognitive utvikling. Derfor mener forskeren at lærere bør vie tid, støtte og muligheter til å tegne i matematikkundervisningen.

3 Metodologi

I denne studien har vi valgt å ta i bruk kvalitative metoder for å undersøke hvordan noen elever på 2. trinn bruker tegning i problemløsning. I metodekapittelet vil vi utdype hvilke metoder vi har brukt for å svare på problemstillingen vår; *Hvordan blir tegning brukt i åtte 2. klassingers problemløsning?* og forskningsspørsmålene; *Hvilke strategier bruker elevene for å løse problemet gjennom tegning? Hvilke kjennetegn kan vi finne i tegningens utseende?*

Metodekapittelet vårt nevner først noe om samfunnsvitenskapelig metode, før det redegjør for datainnsamlingsmetoder, konteksten for datamaterialet og oppgavene som ble gitt. Deretter gir vi en grundig beskrivelse av analyseprosessen og hvordan vi brukte rammeverket vårt for å kategorisere elevenes tegninger og problemløsning. Videre presenteres det tiltak som er gjort for å øke studiens troverdighet, blant annet ved å se på hvordan vi som forskere og tolkere kan ha påvirket resultatene i analyseprosessen. Avslutningsvis vil vi drøfte noen metodekritiske og etiske betraktninger knyttet til studien vår.

3.1 Samfunnsvitenskapelig metode

Begrepet metode kommer fra det greske ordet *methodos* og betyr «veien til målet» (Kvale & Brinkmann, 2015). «Veien til målet» vil i denne studien bety hvordan vi gjennom en kvalitativ forskningsmetode har brukt datainnsamlingsmetoder som observasjon, intervju og videoopptak. Målet vårt var å finne ut hvordan barn bruker tegning i problemløsningsoppgaver og hvordan tegningene ser ut. Når man skal forske på noe som skjer i skolen, og siden skolen handler om mennesker og samhandling mellom disse, må man anvende samfunnsvitenskapelige forskingsmetoder som kjennetegnes ved åpenhet, systematikk, grundighet og dokumentasjon (Christoffersen & Johannessen, 2012). Alle valg knyttet til hvilke metoder man benytter i en slik forskning, må begrunnes. En vitenskapelig metode er en systematisk fremgangsmåte som muliggjør at leseren kan følge og gjenta forskningen, og igjen nå frem til samme resultat på de beskrivende premissene (Rienecker & Stray Jørgensen, 2013).

Innenfor samfunnsforskning er skillet mellom kvantitativ og kvalitativ vesentlig. Selv om det er et tydelig skille mellom disse metodene, er ikke forskningen nødvendigvis *enten* kvantitativ *eller* kvalitativ. I praksis blir det mer og mer vanlig å kombinere disse to metodene (Postholm & Jacobsen, 2018). En av hovedforskjellene mellom de to metodene er graden av fleksibilitet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Kvalitative metoder tillater i større grad spontanitet og tilpasning i interaksjonen mellom forsker og deltaker, og er derfor mer fleksible. Kvantitative metoder er lite fleksible fordi de ofte krever svar som er forhåndsbestemte, slik at de kan sammenlignes på tvers av deltakere og kontekster (Christoffersen & Johannessen, 2012). Ettersom vi skulle finne ut hva som kjennetegner elevers tegninger i problemløsningsoppgaver og hvordan tegning blir brukt i problemløsning, ville ikke en slik kvantitativ studie være passende. Studien krevde i større grad åpne spørsmål, der deltakerne kunne besvare spørsmålene fritt med egne ord, slik en kvalitativ studie ofte har (Christoffersen & Johannessen, 2012). Hovedformålet med en kvalitativ studie er å forstå og beskrive hva noen gjør, og da noen helt spesifikke personer i en helt spesifikk kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018). Som et resultat av en kvalitativ studie med åpne spørsmål, ville dataene vi fikk, komme i form av ord, som er en type *kvalitative data* (Postholm & Jacobsen, 2018). Da vi valgte forskningsmetode, valgte vi ikke ut ifra den metoden vi antok var den «beste», men ut ifra hvilken metode vi mente var mest hensiktsmessig for vår studie.

3.2 Tilnærming

I arbeid med vår problemstilling, «Hvordan blir tegning brukt i åtte 2. klassingers problemløsning?» har vi gjort et omfattende litteratursøk for å utforske og forstå problemet. Det er vanlig å skille mellom en deduktiv og induktiv tilnærming til teori (Clark et al., 2021), men vi valgte å integrere både en deduktiv og induktiv tilnærming i vår forskning. Deduktive tilnærminger bruker teori som et grunnlag for forskningen (Postholm & Jacobsen, 2011), noe som i vårt tilfelle betyr at vi ville se på hvordan teoretiske rammer om problemløsning kan forklares gjennom bruk av tegning i 2. klassingers arbeid. På den andre siden ville induktive tilnærminger tillate oss å utforske problemet på en mer åpen måte (Postholm & Jacobsen, 2011). Det vil si at vi var åpne for å oppdage nye sammenhenger, mønstre eller perspektiver som kanskje ikke har vært identifisert tidligere. Teoretiske rammeverk om bruk av tegning i problemløsning kan være generelle eller spesielt tilpasset en spesifikk forskning, og dermed mangle vesentlige elementer som dekker funn for vår forskning. Ved å ha både en deduktiv og induktiv tilnærming til teorien hadde vi et teoretisk utgangspunkt knyttet til problemstillingen, med mulighet til å bekrefte, avkrefte eller sammenligne dataene våre med tidligere forskning. Samtidig gjør en slik tilnærming oss mer bevisste over eventuelle smutthull i forskningsfeltet, og åpner for nye perspektiver og muligheten til å tilføye teori om vi oppdager at et rammeverk mangler noe som er vesentlig for våre funn knyttet til tegning i problemløsning. Dermed ville en kombinasjon av teoretiske tilnærminger kunne berike vår forskning og bidra til en mer helhetlig forståelse av hvordan tegning brukes i 2. klassingers problemløsning.

I forskningsprosessen er det også ulike metoder for hvordan man tolker datamaterialet i forskningen. Hovedsakelig skilles det mellom tematisk analyse og innholdsanalyse. Det som skiller tematisk analyse og innholdsanalyse fra hverandre, er at en tematisk analyse forsøker å identifisere, analysere og rapportere mønstre eller tema i et datamateriale (Braun & Clarke, 2006). Siden vi ønsket å se på hvilke måter elevene bruker tegning for å løse oppgavene, ble det naturlig å først foreta en tematisk analyse. På den måten kunne vi se etter hvilke strategier elevene benyttet i tegneprosessen, og identifisere mønstre eller overordnede temaer for de ulike måtene elevene brukte tegning på. Siden vi også ønsket å få en oversikt over hvor mange som benyttet seg av hver enkelt strategi, både da det gjaldt bruken tangingen og tegningens utseende, var det også hensiktsmessig å foreta en innholdsanalyse. En slik analyse forsøker i større grad å få tallfestet forekomsten av et fenomen gjennom å systematisk kode og kategorisere et større datamateriale for å se etter trender og mønstre (Vaismoradi et al., 2013). Ved å se på mer spesifikke egenskaper i tegningene, kunne vi få en større innsikt i elevenes tankeprosesser og tilnærminger til problemene. Slik ble det også mulig å få tallfestet datamaterialet og si noe om forekomsten, selv om vi gjorde en kvalitativ analyse.

3.3 Metode for datainnsamling

Det er mange måter å samle inn informasjon på og det kan skje gjennom å se, lytte, spørre og samtale med andre (Postholm & Jacobsen, 2011). Det er dette som kalles datainnsamling og felles for alle datainnsamlingsmetoder er at informasjonen må samles inn på en systematisk måte (Postholm & Jacobsen, 2011). Noen datainnsamlingsmetoder er ganske strukturerte som innebærer at forskeren bruker forhåndsdefinerte spørsmål eller et strukturert spørreskjema for å samle inn data. Dataene som blir samlet inn er organiserte og kategoriserte på forhånd og har ofte klare svaralternativer. Disse metodene stemmer overens med den deduktive tilnærmingen ved at man ser datamaterialet opp mot noen gitte forhåndsbestemte teoretiske rammer. I vårt tilfelle hadde vi gjort oss opp noen meninger om hva vi kunne forvente, og dermed satt noen teoretiske rammer for hva vi skulle være bevisste over i intervjuet. Likevel ønsket vi å ha et åpent sinn omkring dataene, og valgte derfor et semistrukturert intervju, I et semistrukturert intervju har forskeren noen spørsmål klare på forhånd, men er åpen for å ta opp tema som ikke var planlagte på forhånd (Clark et al., 2021). Semistrukturert intervju og observasjon er fleksible datainnsamlingsmetoder ved at de gjennom en induktiv tilnærming lar forskeren ha et åpent sinn om dataene slik at teorier kan komme ut av dataene (Clark et al., 2021).

Datainnsamlingsmetoder som i hovedsak assosieres med kvalitative studier er deltakende observasjon, kvalitative intervju, fokusgrupper, og innsamling av tekst og dokumenter (Clark et al., 2021). Studier kan bruke mer enn én metode og da kalles det en multimetode-tilnærming. Samtidig er det viktig å påpeke at det finnes flere metoder enn de som er beskrevet her, og at det fortsetter å utvikles nye måter å samle inn data på (Clark et al., 2021). Som metoder for datainnsamling til vår studie, valgte vi å benytte intervju, observasjon og innsamling av elevarbeid. Målet med intervju og observasjon var å se hvordan elevene tegnet for å løse problemløsningsoppgavene, og hvordan tegningene så ut. Ved å ta vare på det ferdige elevarbeidet hadde vi også mulighet til å kontrollere alle stegene i innsamlingen.

Å forsøke og huske alt som blir sagt og gjort under et intervju, er nærmest en umulighet. Derfor ble videoopptak et nødvendig hjelpemiddel for oss. Gjennom videoopptak får vi dokumentert både tale og bevegelser samtidig, noe som gjorde det mulig å se på hvordan tegningen ble produsert, og hvordan den ble brukt problemløsningen. Videokameraet var derfor rettet mot intervjuobjektet og oppgavearket som skulle besvares. Et videoopptak gjør det mulig å transkribere intervjuene til tekstform i etterkant, slik at det blir oversiktlig og gjennomførbart å gjøre en systematisk analyse av intervjuene. Når man produserer transkripsjoner foretar man en «forskningsaktivitet» fordi forskeren kan lytte til eller se opptaket flere ganger, og på denne måten oppdage forhold som ikke ble oppdaget under det faktiske intervjuet (Postholm & Jacobsen, 2011). Selv om vi diskuterte og tok notater av hva vi hadde sett fortløpende etter hvert intervju, gjorde videoopptaket det mulig å studere funnene og informantene mer systematisk slik at vi kunne finne det som var relevant for studien.

3.4 Kontekst

Informantene i denne studien var åtte elever fra 2. trinn på en skole litt i utkanten av et bysentrum. Trinnet var delt inn i fire parallellklasser, der to og to klasser delte areal. Undervisningen foregikk tilnærmet likt på alle fire gruppene. Selv om det er variert i hvilken grad elever på småtrinn har jobbet med problemløsningsoppgaver, har de fleste tilegnet seg tilstrekkelig kognitive ferdigheter og erfaringer til å løse enkle problemer. De fleste andreklassinger er også godt kjent med tegneaktiviteten, og skal derfor ha tilstrekkelig ferdigheter til å uttrykke seg gjennom tegning på en meningsfull måte. Siden vi ville sikre at elevene faktisk tegnet for å løse oppgavene, hadde vi undersøkt at elevene i noen grad har arbeidet med tegning i matematikk tidligere.

Kvaliteten på informasjonen vi får fra intervjuet avhenger av relasjonen mellom intervjuer og intervjuobjektet (Christoffersen & Johannessen, 2012). En av oss hadde kjennskap til skolen og noen av elevene fra før, noe vi vet kan ha påvirket kvaliteten på informasjonen. Siden vi ønsket å foreta en forskning nært på elevene, så vi det som en fordel at vi hadde en relasjon til de fra før. At forskeren er kjent for informantene, kan bidra til at flere av elevene tør å delta i studien. En slik intervjusituasjon kan være ukjent og stressende for elevene, og det kan derfor være en trygghet at forskeren er noen man har en relasjon til. Ved å ha en relasjon til elevene kan det gjøre det enklere for forskeren å tilpasse intervjuet, og spørsmålene som stilles. På en annen side kan en relasjon påvirke negativt, i form av at informantene kan føle på et press for å måtte delta. Noen kan føle på at de må delta for å opprettholde et godt forhold til forskeren, eller for å ikke skuffe forskeren. Det kan gjøre at informantene kjenner på et forventningspress underveis i innsamlingen. Derfor var det viktig for oss å tydeliggjøre at det ikke var noe riktig eller feil svar under intervjuet, men heller ytre interesse og takknemlighet overfor deltakelsen.

Selv med noe kjennskap til elevene, hadde vi ikke nok kunnskap om hver og én av dem, til å kunne velge ut informanter systematisk. Et stort antall elever på trinnet og estimert gjennomføringstid av datainnsamling, gjorde det nødvendig å plukke ut et mindre antall elever å gjennomføre studien med. Vi ønsket å få representert de fire parallellklassene på lik linje, men var usikre på hvor mange elever vi skulle plukke ut. Med bare én elev fra hver gruppe, var vi redd at vi ikke skulle få tilstrekkelig med datamateriale. Datainnsamling og etterarbeid er tidkrevende, og vi hadde derfor ikke mulighet til å intervjue tre elever fra hver gruppe. Hensikten med problemstillingen vår var ikke å generalisere svarene, men heller å få et innblikk i spesifikke kontekster, og det vil derfor være passende med en liten gruppe informanter. Vi konkluderte derfor med at vi ville ha to informanter fra hver gruppe, som ble totalt åtte elever. Til tross for et relativt lavt antall informanter, ønsket vi mest mulig variabilitet i gruppen for å få et bredere innblikk i hvordan tegning brukes i problemløsning. Derfor plukket vi ut én gutt og én jente fra her gruppe.

«Et intervju er en relasjon mellom (vanligvis) to deltakere» (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 81). I vårt tilfelle var det alltid to forskere og én informant til stede per intervju. Den av oss som hadde kjennskap til elevene fra før, styrte intervjuet, mens den andre hadde ansvar for å styre kameraet, notere tanker og observasjoner som oppstod underveis, samt stilte spørsmål ved behov. Vi ønsket å unngå at det opplevdes overveldende med mye utspørring fra to intervjuere. Det var viktig for oss å skape en så naturlig situasjon som mulig, og derfor deltok begge intervjuere i samtalen med eleven i forkant av intervjuet. Formålet med at begge deltok i samtalen var at det skulle oppleves tryggere, heller enn at den ene skulle sitte taus i rommet. Vi utnyttet de tidligere relasjonene gjennom at den som hadde kjennskap til elevene fra før, ledet intervjuene, for å prøve å gjøre intervjuet så trygt som mulig. Hva vi observerer i et intervju kan avhenge av hvem vi observerer, hva vi ser etter og hvordan vi gjør det. Blant annet så påvirkes observasjon av hvilken erfaring, utdanning, livssituasjon og dagsform forskeren har (Bjørndal, 2011). Det kan noen ganger være en fordel å være to som gjennomfører intervjuet slik at man også har noen å diskutere tolkningen og situasjoner med i ettertid (Christoffersen & Johannessen, 2012). Med to intervjuere kunne vi også sikre at alle planlagte spørsmål ble stilt og at oppfølgingsspørsmålene ble best mulig.

3.5 Gjennomføring av datainnsamling

I denne studien har vi samlet inn data som tilsvarer 243,35 minutter med videoopptak og 30 elevarbeid. Vi intervjuet åtte elever og planla at hver elev skulle arbeide med fire oppgaver. Da skulle vi i utgangspunktet ha samlet inn 32 elevarbeid. På grunn av tidsbegrensninger og enkelte elevers ønske om ikke å løse alle oppgavene, endte vi opp med 30 elevarbeid. Elevarbeid refererer til det materialet som elevene produserte på papir under intervjuet. Vi bruker betegnelsen elevarbeid fordi vi også fikk inn arbeid som ikke inneholdt en tegning. Datainnsamlingen skjedde over tre forskjellige dager, og foregikk på et grupperom i nærheten av klasserommet. Intervjuet skjedde i ordinær skoletid, og elevene ble hentet ut én og én fra den ordinære undervisningen. Vi ønsket å intervjue elevene individuelt for å sikre at de forstod oppgaven, men også for å unngå at de ble påvirket av hverandre under tegneprosessen. Vi vurderte å gjennomføre gruppeintervju for å spare tid, men ønsket heller å ha muligheten til å følge opp ved hver enkeltes innspill grundig for å sikre kvaliteten i datainnsamlingen. Slik vi vurderte det var dette ekstra viktig siden tegneprosessen i seg selv har en så sentral rolle i forskningen. Vi har tidligere erfart at elever i en lignende setting ofte blir opphengt i hverandre, og vil løse oppgaven på samme måte som medelever. Noen kan synes det er ubehagelig å måtte løse oppgaver og forklare fremgangsmåtene sine foran andre elever, mens andre kan bli ubevisst påvirket i forklaringen sin. Det resulterte i at vi landet på individuelle intervju.

I forkant av intervjuene forsikret vi oss om at elevene hadde forstått hva det innebar å delta, hva de skulle gjøre, samt at det var frivillig. Vi hadde et informasjonsskriv som vi brukte for å forsikre oss om at alle fikk den samme informasjonen. Skrivet inneholdt det informasjon om gjennomføringen av intervjuet, hva eleven kunne bruke av tegneverktøy og spørsmål om hvor mye de hadde tegnet i matematikkfaget tidligere. Vi startet videoopptakene etter at vi hadde gitt all informasjon, og eleven ga oss tillatelse til å starte videoopptaket. Graden av engasjement var varierende, der noen tegnet umiddelbart, mens andre stilte en rekke spørsmål før de greide å komme i gang med oppgaven.

3.5.1 Intervjuguide

Spørsmål som er planlagte på forhånd, utgjør det som Clark et al. (2021) kaller en intervjuguide og inneholder åpne spørsmål som oppmuntrer intervjuobjektet til å gi detaljerte svar. Videre påpeker de at den som intervjuer ikke må stille spørsmålene nøyaktig slik de er formulerte, men at det også kan stilles spørsmål som ikke var listet opp på forhånd. Det aller beste er hvis intervjuobjektet selv kommer inn på temaene spontant, men det skjer ikke alltid og derfor er det er viktig å ha en intervjuguide. Selv om et semistrukturert intervju gjør det mulig å tilpasse rekkefølge og formulering, er det viktig at alle spørsmålene fra intervjuguiden blir stilt til alle intervjuobjektene fordi det vil hjelpe oss med å analysere dataene riktig (Clark et al., 2021). I vårt tilfelle ble intervjuguiden hyppig brukt for å sikre at vi fikk svar på det vi lurte på. Begge intervjuerne satt med intervjuguiden foran oss, slik at vi underveis fikk fulgt opp om noe manglet. I tillegg fikk vi forsikret oss om at alle informantene fikk mulighet til å svare på de samme spørsmålene.

Det er flere grep en lærer kan gjøre for å holde samtalen i gang og sørge for utfyllende svar (Postholm & Jacobsen, 2011). Spesielt i et semistrukturert intervju er det vanlig å stille oppklarende spørsmål med formål om å forstå det som blir sagt. En annen måte å prøve å forstå bedre det som blir sagt, er å stille oppfølgingsspørsmål som for eksempel «kan du si mer om det?» eller «hva mener du med det?». For å holde samtalen i gang kan det være effektivt å gi et lite nikk, si «mhm» eller gi en pause for å indikere at informanten bare skal fortsette å snakke. For å sikre at man har fått tak i det som informanten mener, er det fint å stille oppklaringsspørsmål. Dette kan være spørsmål som «forstår jeg deg riktig når ...?» eller «betyr det at …?» (Postholm & Jacobsen, 2011). Slike grep gjorde vi aktivt under alle intervjuene, på den måten fikk informanten mulighet til å korrigere dersom vi oppfattet noe som ikke stemmer nøyaktig med det informanten mener.

Informasjonen vi gav informantene i forkant av intervjuet, hadde som formål å informere om prosjektet vårt. Vi ville sikre at elevene forstod hva et aktivt samtykke er, og at de når som helst kunne trekke seg. Denne informasjonen ble først formidlet i samtykkeskjema, og deretter presisert i forkant av intervjuene. Informasjonsskrivet er beskrevet i figur 1.

- Fortelle hvem vi er, og hva vi studerer
- Informere om prosjektet vårt, hva vi skal spørre om, og antall oppgaver de vil få
- Informere om at det blir gjort videopptak og at det vil være trygt oppbevart frem til prosjektets slutt
- Intervjuet vil vare mellom 20-40 minutter
- Informere om informantens rett til å bryte intervjuet når som helst bare ved å si ifra til oss

Figur 1: Informasjonsskriv

Med et informasjonsskriv på plass, var det nødvendig å utforme en intervjuguide. På tidspunktet da vi formulerte intervjuguiden, visste vi at vi var interesserte i å se på hvordan elevene bruker tegning i arbeid med problemløsning. For å få svar som kunne hjelpe oss å besvare problemstillingen, utarbeidet vi en intervjuguide med konkrete og åpne spørsmål. Hensikten med disse spørsmålene var å legge til rette for at elevene skulle forklare stegene sine i prosessen så naturlig som mulig. Inspirert av Postholm & Jacobsen (2011) ønsket vi å formulere spørsmålene på en måte som kunne gi utfyllende svar og som skulle holde samtalen i gang. Ved å inkludere spørsmål som «hva har du tegnet her?» og «kan du forklare tegningen din?» ønsket vi å redusere sjansen for å mistolke eller tvile på tegningene, samtidig for å få et innblikk i elevenes tankeprosesser og refleksjoner. Andre spørsmål som for eksempel «hva tenkte du her?» og «hvordan brukte du tegningen til å løse oppgaven?» var designet for å utforske hvordan eleven hadde reflektert og hvordan eleven brukte tegningen i problemløsningsprosessen.

Spørsmålene i intervjuguiden ble laget med den hensikt at de skulle legge opp til samtale, og samtidig være fleksible slik at vi kunne tilpasse spørsmålene etter elevenes respons og tegnearbeid. Dette er en samtalebasert intervjuguide og derfor var det ikke garantert at alle elevene ville bli stilt alle spørsmålene. Spørsmålene kunne også bli stilt i ulik rekkefølge og med ulik formulering, samt at oppfølgingsspørsmål kunne bli gitt. Dette var et bevisst valg for å fremme en åpen dialog som kunne gi oss rike og varierte data for analyse. Intervjuguiden er beskrevet i figur 2.

- Hva har du tegnet?
- Hva tenkte du her?
- Kan du forklare tegningen din?
- Hva betyr x i tegningen din?
- Hvorfor tegnet du dette?
- Hvordan visste du at du ville tegne det?
- Hva har du skrevet her?
- Hvordan brukte du tegningen til å løse oppgaven?
- Kan du vise hva du tenkte ved å bruke tegningen?
- Er det noe mer du har lyst til å si om denne oppgaven?
- Vil du gå videre til neste oppgave?

Figur 2: Intervjuguide

3.6 Oppgavene

Oppgavene som elevene arbeidet med under intervjuet, er problemløsningsoppgaver inspirert av tidligere oppgaver. Problemløsningsoppgaver krever en kritisk tenkning og analytiske ferdigheter (Kunnskapsdepartementet, 2019), og kan bidra til at barn legger merke til og forstår matematiske aspekter og relasjoner bedre (Clarke et al., 2012). To av oppgavene er inspirert fra Saundry & Nicol (2006), mens de to siste ble laget og tilpasset med inspirasjon fra forelesninger og tekstnøtter på internett. Under tilpasningen og utformingen av oppgavene, hadde vi som mål å skape oppgaver som kunne motivere elevene til å tegne og til å oppleve tegningen som et nyttig verktøy for å finne løsninger. Det var avgjørende at oppgavene var av typen problemløsningsoppgaver, og at elevene ikke ble gitt en klar fremgangsmåte for hvordan de skulle løse de. Noen av oppgavene er knyttet til divisjon og multiplikasjon, mens andre ikke hadde noen spesifikk tilknytning til et bestemt matematisk tema.

Problemløsning handler som nevnt om at elevene løser et problem som de ikke kjenner til fra før, gjennom en prosess hvor de utvikler strategier og fremgangsmåter. Det blir presisert at elevene skal legge mer vekt på hvordan de kommer frem til svaret, og ikke selve svaret i seg selv (Kunnskapsdepartementet, 2017). Ved å gi elevene problemløsningsoppgaver, måtte elevene resonnere mer selv for å komme frem til en løsning. Problemløsningsoppgaver kan være komplekse for 2. klassinger, og de kan oppleve det som nyttig å representere oppgavene med bruk av tegning for å visualisere problemet i tekstoppgaven. Samtidig kan forventningen om at løsningen skal innebære tegning, fremme kreativ tenkning gjennom utforskning for å finne en egen strategi. Av oppgavene som ble presentert var det kun én oppgave som hadde ett riktig svar. De andre oppgavene var åpne oppgaver som hadde flere riktige svar og ga større mulighet til å utforske og finne egne løsninger. På denne måten ønsket vi å gi elevene eierskap til egen tegning og samtidig mulighet til å ha klare begrunnelser for egne fremgangsmåter.

3.6.1 Oppgave 1

«10 barn skal dele 15 kjeks likt, hvor mange kjeks får hvert barn?»

Denne delingsoppgaven (*sharing problem*) er inspirert av Saundry & Nicol (2006). Dette er den eneste oppgaven i intervjuet som har et riktig svar. Oppgaven forteller at ti barn skal dele på 15 kjeks, der både barn og kjeks er kjente elementer for elevene. En av grunnene til at vi valgte denne oppgaven var at vi ønsket å se om elevene mestret å løse en slik delingsoppgave gjennom å bruke tegning. Det er vanlig at selv om elevene ikke har blitt introdusert for divisjon i skolesammenheng, har de likevel noen tidligere erfaringer med delingsprinsippet fra hjemmet. Slik vil trolig løsningsmetodene elevene kommer med være basert på tidligere erfaringer, og ikke en standard metode fra undervisning. Siden de ikke fikk presentert et løsningsforslag sammen med oppgaven, eller har lært konkrete strategier for å løse divisjonsoppgaver i undervisning, ble oppgaven klassifisert som en problemløsningsoppgave. En typisk løsning på en slik oppgave vil være at de tegner opp alle barna og kjeksene, for så å systematisk dele ut en kjeks til hver. Videre kan elevene oppdage at de har fem kjeks igjen, og innse at de kan dele kjeksene i to og dele ut en halv til hver. Deretter kan de konkludere med at barna får én og en halv kjeks hver.

3.6.2 Oppgave 2

«Ola har noen leker. Til sammen har lekene 12 hjul. Hvilke leker har Ola?»

Oppgave 2 er også inspirert av Saundry & Nicol (2006). Dette er en typisk problemløsningsoppgave fordi den åpner opp for ulike tilnærminger og strategier for å løse problemet. En slik åpen oppgave utfordrer elevene til å finne ulike kombinasjoner av leker som til sammen har tolv hjul. For å finne løsninger på dette problemet, kreves det at elevene bruker matematiske ferdigheter og resonneringsevner. Leker er et kjente elementer for elevene, noe som kan bidra til engasjement og gjøre oppgaven relevant for dem. Vi valgte denne oppgaven fordi den gir elevene mulighet til å utforske ulike strategier for å finne løsninger. Samtidig ville vi se om elevene kunne skille ut det essensielle fra det ikke-essensielle. Det essensielle vil være å finne kombinasjoner av leker som til sammen gir tolv hjul, mens det ikke-essensielle er elementer som ikke vil være direkte relevante for å løse problemet. Det kan være for eksempel farger, størrelse eller andre egenskaper ved lekene som er mindre viktige for å løse problemet. En typisk løsning her kan være at elevene prøver seg frem og tegner leker som de kjenner til godt. Deretter kan de telle hjulene etter hvert som de tegner, inntil de når tolv hjul totalt.

3.6.3 Oppgave 3

«På gården til Anna er det hester og høns. Hun sier at dyrene til sammen har 20 ben. Hvor mange hester og høns kan Anna har på gården?»

Oppgave 3 er en åpen oppgave som legger til rette for ulike kombinasjoner. Dette er en problemløsningsoppgave fordi den krever at elevene bruker sine matematiske ferdigheter og resonneringsevner for å finne løsninger på problemet. Her kan elevene eksperimentere med ulike kombinasjoner av hester og høns for å finne en riktig løsning. Vi ble introdusert for en lignende oppgave i en forelesning, og som skapte inspirasjon til å lage en lignende oppgave. Med tilpasninger til alderen og kunnskapsnivå på våre informanter, ble oppgaven til. Selv om det er en åpen oppgave, legger den også til rette for at elevene kan benytte både addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon gjennom informasjonen i oppgaveteksten. Gårdsdyr er et kjent tema for elevene og kan bruke erfaringer de har om arbeid med dette temaet. Ved at oppgaven opplyser om hvilke dyr som befinner seg på gården, kan det hjelpe dem med å komme i gang, selv om de ikke får presentert en konkret fremgangsmåte. Dette er en oppgave som kan gi oss innblikk i om elevene mestrer å skille ut aspekter som er strukturelt relevante for å løse oppgaven, men også om de abstraherer informasjonen og tegner ikonisk, eller om de prioriterer å tegne piktografisk. Her kan en typisk løsning være at de tegner ett dyr først, teller beina, og deretter tegner et nytt dyr. Slik kan de fortsette å tegne enten ett eller flere dyr av gangen, til de når totalt 20 bein.

3.6.4 Oppgave 4

«Lovise teller hjulene på alle sykler i parken. Det er til sammen 14 hjul i parken. Hvor mange sykler er det i parken?»

Den siste oppgaven er tilpasset og inspirert fra en tekstnøtt fra matematikk.org (*Sykler i parken*, u.å.). I likhet med oppgave 2 og 3 er også dette en oppgave med kjente elementer som åpner for flere ulike fremgangsmåter og løsninger. Oppgaven kan karakteriseres som en problemløsningsoppgave av flere grunner. Til tross for at det ikke blir presentert en spesifikk fremgangsmetode for å løse oppgaven, utfordres elevene til å tenke kritisk og bruke matematiske ferdigheter for å finne en mulig løsning. Vi kan forvente at elevene ikke nødvendigvis har noen intuitive løsningsmetoder for akkurat denne oppgaven. Det kan tenkes at de har støtt på lignende oppgaver tidligere, men siden konteksten og detaljene i oppgaven kan variere, vil derfor ikke tidligere erfaringer alene være tilstrekkelige for å løse denne oppgaven. Det åpnes opp for ulike tilnærminger og strategier for å finne løsningen, der elevene kan eksperimentere med ulike kombinasjoner av antall sykler og antall hjul. Her er det elevenes kreativitet som bestemmer hvilke sykler det er snakk om, enten det er etthjulssykler, tohjulssykler, trehjulssykler eller sykler med støttehjul. Det er interessant å se hvordan elevene resonnerer for å komme frem til en løsning, og om løsningen påvirkes hvorvidt tegningen er piktografisk eller ikonisk. En typisk løsning på denne oppgaven kan være at de tegner en sykkel med to eller flere hjul, for så å telle hjulene, og repetere helt til de sitter igjen med riktig antall hjul. Da kan de telle antall sykler de har tegnet totalt for å svare på oppgaven.

3.7 Metode for analyseprosessen

Når man skal analysere kvalitative data, innebærer det at forskerne organiserer, gjør rede for, og forklarer det innsamlede datamaterialet (Cohen et al., 2018). Etter endt innsamling av datamateriale, transkriberte og anonymiserte vi videoopptakene. Transkripsjon er når en fysisk samtale mellom mennesker blir abstrahert og fiksert i skriftlig form. Gjennom å transformere data fra den muntlige intervjusamtalen til skriftlig tekst, får man et datamateriale som er tilgjengelig for analyse (Kvale & Brinkmann, 2015). Vi valgte å transkribere datamaterialet selv for å unngå å gå glipp av relevant informasjon. Videoopptakene fra intervjuene ble nøyaktig studert, der vi skrev ned alt som ble sagt, og noterte ned ikke-verbale handlinger som tenkepauser, kroppsspråk og andre gester. Det ble i forkant utformet en transkripsjonsguide (vedlegg 2) slik at vi transkriberte i samme format. Selv om transkripsjon er en tidkrevende prosess, prioriterte vi å ha med informasjon som vi på det tidspunktet ikke kunne vite om vi fikk bruk for, for å sikre at vi ikke gikk glipp av noe verdifullt. Mens vi transkriberte hadde vi rammeverket til Kleven (2022) foran oss, og prøvde å finne noen likhetstrekk mellom våre data og kategoriene i hennes rammeverk. Slik begynte prosessen med å utforme analyseverktøyet vårt.

3.7.1 Hvordan analyseverktøyet ble til

For å kunne svare på problemstillingen vår, ville vi finne et rammeverk som var best egnet til å analysere datamaterialet vi hadde. Vi gjennomførte flere litteratursøk for å se etter måter å analysere bruken av tegning i problemløsning. Deriblant hadde vi notert ned hvilke kategorier Saundry & Nicol (2006) benyttet i sin forskning om tegning i problemløsning. I forsknignen trakk de frem både *konkretiseringsmateriale, støtte for system* og *visualisering* som kategorier om bruk av tegning i problemløsning. De presenterte også begrepene *ikonisk* og *piktografisk tegning* da de snakket om tegningenes utseende. Etter videre litteratursøk kom vi over Kleven (2022) sitt rammeverk (presentert i delkapittel 2.4) som blant annet inkluderer de tidligere nevnte kategoriene fra Saundry & Nicol (2006), og vi konkluderte derfor med at vi ville bruke hennes rammeverk for å kunne besvare problemstillingen. I begynnelsen av arbeidet med å kategorisere datamateriale vårt med Kleven (2022) sitt rammeverk, oppdaget vi at ikke alle kategoriene var relevante for våre data. Siden det var en forutsetning for intervjuet at informantene skulle tegne for å løse oppgavene, valgte vi å fjerne kategoriene «brukte tegning» og «brukte ikke tegning». Rammeverket innehold også kategorier som «fortelling» og «dramatisk fremstilling» men disse fant vi ikke tilfeller av i vårt datamateriale og utelukket de derfor fra analyseverktøyet. Dermed satt vi igjen med seks kategorier fra Kleven (2022) sitt rammeverk; *konkretiseringsmateriell, støtte for system, visualisering, piktografisk tegning, ikonisk tegning* og *symbolsk tegning*. Da det kom til gester og verbalt språk, var dette også interessant for oss å se på. Datainnsamlingsmetoden intervju gjorde det naturlig at elevene skulle snakke om tegningene sine, og vi var derfor ikke interesserte i å kartlegge om det ble brukt gester eller ikke. Derfor ble ikke gester tatt med som en egen kategori i analyseverktøyet. Likevel synes vi det var interessant å se på hvilke gester som ble brukt, og ville derfor gi gester oppmerksomhet i analyse og drøfting.

I prosessen med å klassifisere tegningene, erfarte vi at kategoriene vi hadde tatt utgangspunkt i ikke var tilstrekkelige for å kategorisere all dataen vår. For eksempel var det noen elever som brukte tegningen som et verktøy for å utforske ulike løsninger uten en struktur eller plan på fremgangsmåten. Denne måten å bruke tegning på er lik den som Dahl (2020) kaller for *utforskingsverktøy* og kjennetegnes ved at man prøver seg frem med ulike visuelle fremstillinger, forkaster eller reviderer en påbegynt tegning. Det som skiller denne kategorien fra *støtte for system* er at testingen ikke skjer systematisk, men tilfeldig og uten en plan. Vi fant det derfor nyttig å inkludere kategorien *utforskningsverktøy*. Selv om instruksene for oppgavene var at elevene skulle tegne, var det ikke alle elevene som gjorde det. Én elev brukte symboler istedenfor tegning da han løste en oppgav, og siden vi allerede hadde valgt å ikke bruke Kleven (2022) sin kategori «tegnet ikke», ville vi finne en annen beskrivelse som kunne dekke denne elevens arbeid. Papandreou (2009) mener at barns tegneevne er en del av utviklingen av representasjonsevnen, og at symboler kan være verktøy for tanke og kommunikasjon. Med dette til grunn ville vi at arbeidet som kun inneholdt symboler, fortsatt skulle være en del av datamaterialet vårt, og derfor bestemte vi oss for å legge til kategorien «kun symboler» i analyseverktøyet. Dersom vi hadde inkludert kategorien «brukte ikke tegning» ville den blitt plassert der, og dermed ville den ikke kunne være en del av analysen vår.

Slik tilpasset vi Kleven (2022) sitt rammeverk ved å kombinere flere teorier slik at det kunne fortelle oss noe om hva som kjennetegner elevers bruk av tegninger og tegningenes detaljer ut fra vår data. I og med at vi ville se på hvordan tegning blir brukt i problemløsning, og hvilke kjennetegn disse tegningene har, fant vi det hensiktsmessig å dele analyseverktøyet inn i bruk av tegning, og tegningens utseende. Vi vil derfor presentere analyseverktøyet i to tabeller. Tabell 2 viser oversikt over kategoriene for å analysere elevers bruk av tegning med kategoriene *konkretiseringsmateriale*, *støtte for system*, *visualisering* og *utforskningsverktøy*. Tabell 3 gir en beskrivelse av kategoriene for å analysere tegningers utseende, altså *piktografisk*e tegning, *ikonisk tegning*, *symbolsk tegning* og *kun symboler*. De kategoriene som i utgangspunktet er hentet fra Kleven (2022) vil være markert med en blå bakgrunnsfarge i tabellene, mens de vi har lagt til og som ikke er Kleven (2022) sine kategorier, er markert med en grønn bakgrunnsfarge. Beskrivelsene av kategoriene er oversatt fra Kleven (2022) og bruker de samme kildehenvisningene som hun har brukt.

Tegning *for* problemløsning	
Konkretiserings-materiale	Når elevene bruker tegning på denne måten illustrerer de hvordan de beveger, flytter og grupperer elementene ved hjelp av piler, streker og sirkler (Dahl, 2020; Saundry & Nicol, 2006) Bevegelser, som sirkler eller linjer, representerer beregninger eller operasjoner, på samme måte som fysiske manipulasjoner (Saundry & Nicol, 2006).
Støtte for system	Når elevene bruker tegning på denne måten er hovedfunksjonen å hjelpe elevene til å holde oversikt over oppgavens elementer, slik at de for eksempel systematisk kan teste ut ulike løsninger (Dahl, 2020; Saundry & Nicol, 2006). En passiv tegning uten bevegelse. Tegninger brukes i en elimineringsprosess ved å systematisk sortere elementer og lage en struktur (Saundry & Nicol, 2006). Tegningen er avgjørende for å løse oppgaven, og elevene bruker den ofte til å telle og telle på nytt.
Utforsknings-verktøy	Når tegningen fungerer som et utforskningsverktøy, handler det om at tegningen brukes for å gjennomskue strukturen og klargjøre rollen til de involverte tallstørrelsene. Elevenes tegneaktivitet kjennetegnes av at de prøver seg frem med ulike visuelle fremstillinger, de forkaster eller reviderer en påbegynt tegning, og de stopper opp og diskuterer oppgaveteksten og tegningen underveis. (Dahl, 2020, s. 207)
Tegning *av* problemløsning	
Visualisering	Dyktige tellere har en tendens til å produsere tegningen etter å ha funnet en løsning gjennom andre tilnærminger (modellering/mental telling/gjenkalling av kjente fakta) (Bakar et al., 2016). Problemet er løst internt (uten bruk av tegning). Prosessen spilles ut i tankene deres, og deretter tegner de for å *kommunisere* en løsning (Saundry & Nicol, 2006). Informasjon behandles fortsatt visuelt, selv om den ikke alltid er synlig på papir.

Tabell 2: Beskrivelse av kategorier for bruk av tegning

Piktografisk tegning	Avbilder de matematisk relevante objektene mer realistisk og naturtro og tar med flere detaljer. Kan også ta med elementer som ikke er strukturelt relevante for å løse oppgaven. Har ofte fokus på historien (Dahl, 2020)
Ikonisk tegning	Gjengir de relevante objektene med enkle former eller tellestreker. Har ofte fokus på spørsmålet i tekstoppgaven (Dahl, 2020)
Symbolsk tegning	Elevene inkluderer tall eller bokstaver/ord. Definert i dette rammeverket som de konvensjonelle tallene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, alle bokstaver/ord og ikke-konvensjonelle tallsymboler (Papandreou, 2009)
Kun symboler	Elevene inkluderer bare tall eller bokstaver/ord. Det vil si de konvensjonelle tallene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, alle bokstaver/ord og ikke-konvensjonelle tallsymboler (Papandreou, 2009)

Tabell 3: Beskrivelse av kategorier for tegningens utseende

3.8 Studiens troverdighet

Intensjonen med forskning er å presentere kunnskap, men det kan variere hvorvidt den presenterte kunnskapen oppleves som nyttig. Det er både tids- og stedsbetinget hvordan mennesker opplever nytteverdien av en studie (Postholm & Jacobsen, 2018). Postholm og Jacobsen (2018) hevder at forskningens kvalitet ikke utelukkende er knyttet til det resultatet forskeren har kommet frem til, men heller må bedømmes ut fra hvordan kunnskapen er produsert. Forskning er kontinuerlig i utvikling og vil derfor stadig bli utfordret av ny, fremtidig kunnskap, gjennom nye metoder og perspektiver. Slik vil det i stor grad variere hvorvidt enkelte opplever forskningsresultater som riktig og nyttig. Derfor har vi som forskere et ansvar for å sikre kvalitet i forskningen gjennom å kritisk beskrive hvordan kunnskapen er konstruert (Postholm & Jacobsen, 2018).

3.8.1 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet og validitet er velkjente begreper innenfor forskningsfeltet, og det er noe alle forskere må vurdere nøye. Påliteligheten av data er et sentralt spørsmål som alle forskere må ta stilling til. På forskningsspråket brukes begrepet reliabilitet om hvor pålitelige dataene er. Reliabilitet omhandler nøyaktigheten, bekreftbarheten og påliteligheten til dataene som er samlet inn; hvilke data det er, hvordan dataene er samlet inn og hvordan de har blitt bearbeidet (Christoffersen & Johannessen, 2012; Kvale & Brinkmann, 2015; Postholm & Jacobsen, 2018). Reliabilitet handler også om hvorvidt en studie er pålitelig, som vil si i hvilken grad man kan stole på funnene til studien. Når vi snakker om bekreftbarheten, betyr det at forskningsprosessen skal være synliggjort på en slik måte at andre forskere kan etterprøve og vurdere gyldigheten i studien (Postholm & Jacobsen, 2018). Med andre ord bør en annen forsker kunne gjennomføre en tilsvarende undersøkelse og oppnå et lignende resultat. Studien skal også sikre troverdighet gjennom overførbarhet, som vil si at den skal være relevant og anvendbar i andre lignende situasjoner. Ved å gi en detaljert beskrivelse av datainnsamlingen sikrer vi at andre skal kunne gjennomføre en lignende studie. Kvalitativ forskning er unik og påvirket av forskerens subjektive oppfatninger, så det vil være umulig å få gjennomført nøyaktig den samme studien flere ganger. Kontekst, forskerens forkunnskaper og interessefelt, informanter og tidsrom er faktorer som gjør det vanskelig å gjenskape situasjonen nøyaktig. Derfor må vi som forskere være bevisste våre egne forutsetninger og antakelser som kan påvirke tolkningen av dataene. I datainnsamlingsprosessen forsøkte vi å sikre reliabiliteten ved å ha en konsekvent og systematisk tilnærming, der vi fulgte vårt «informasjonsmanus» som ga alle informantene den samme informasjonen før de fikk utdelt oppgavene. I analyseprosessen var vi også bevisste over egen påvirkning, og transkriberte nøyaktig og detaljert, før vi begynte å analysere materialet ut fra det teoretiske rammeverket. Når det kommer til reliabilitet i en forskning, tenker vi at det kan det være en fordel å være to som bearbeider datamaterialet, slik at vi kan sammenligne og vurdere tolkninger og funn.

Hvor relevante dataene er, eller hvor godt de representerer virkeligheten, er også et sentralt spørsmål i all forskning. I forskningslitteraturen brukes begrepet validitet, og betyr gyldighet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Dersom forskeren sikrer kvalitet på studien gjennom å ivareta god validitet og tydelig vise hvordan man har gått frem i forskningsprosessen, kan hele forskningens totale troverdighet fremmes (Postholm & Jacobsen, 2018). Validitet handler om gyldigheten av forskningen, altså om den valgte metoden egner seg til å undersøke det den er ment til å undersøke (Kvale & Brinkmann, 2015). Det vil i vårt tilfelle si at vi velger oppgaver som er tilpasset og hensiktsmessige til det vi ønsker å finne ut noe om; altså hvordan åtte elever bruker tegning i problemløsning og hvordan tegningene ser ut. I tillegg brukte vi intervjuguiden som vi hadde utarbeidet på forhånd, og stilte spørsmål for å bekrefte om tolkningene vi hadde gjort var riktige. Elevene fikk mulighet til å bekrefte eller omformulere utsagnene sine slik at vi fikk en felles oppfattelse av besvarelsen. Slik fikk vi en indikator på om våre observasjoner faktisk reflekterer fenomenene vi ønsker å vite noe om.

3.9 Metodekritiske og etiske betraktninger

Helt fra starten av en undersøkelse og til den endelige rapporten er produsert, vil det forekomme flere etiske problemer, dilemmaer, hensyn og betraktinger som man må forholde seg til (Kvale & Brinkmann, 2015; Nilssen, 2012). Vår forskning inneholder noen metodekritiske betraktninger som derfor vil være viktige å vurdere. Først og fremst har denne undersøkelsen et begrenset utvalg på kun åtte elever. Dette utvalget gjør det vanskelig å skulle generalisere resultatene til en større populasjon. Selv om det kvalitative designet gir oss mulighet til å få en dypere innsikt i hver enkelt elevs bruk av tegning i problemløsningen, kan ikke disse observasjonene antas å gjelde for alle elever på andretrinn, verken på den bestemte skolen eller på andre skoler.

Etiske og moralske vurderinger er en sentral del av forskningsprosessen (Clark, 2021). Etikk kan fungere som en viktig målestokk for å vurdere forskning, gjennom at det forteller oss noe om hva som er rett og galt, akseptabelt og uakseptabelt, samt verdig og uverdig oppførsel i en forskningssituasjon (Befring, 2007). I vår forskning har vi vært oppmerksomme på å respektere opplysninger som kan identifisere deltakere. Vi har som nevnt sørget for at deltakere av studien har fått grundig informasjon om formålet til studien og deres rett til å trekke seg når som helst uten at det får konsekvenser. I en kvalitativ forskning er man som forsker avhengig av andres godvilje og tid, som gir forskeren tilgang til deltakernes tanker og refleksjoner gjennom intervjuer (Nilssen, 2012). Som forsker har man et etisk ansvar overfor forskningsdeltakere, undersøkelsen og seg selv (Postholm & Jacobsen, 2018). Dersom forskningen innebærer å samhandle med mennesker som er umyndige, eller som av ulike grunner ikke er innforstått med hva det innebærer å delta i en forskning (eksempelvis barn eller andre med funksjonsnedsettelse), har man en plikt og et etisk ansvar for å være særlig oppmerksom (Befring, 2007). Vi har i denne studien vært opptatt av å tilpasse gjennomføringen av prosjektet til elevenes evne til å forstå. Det har vi gjort gjennom å bruke et språk og en formidlingsmåte som er tilpasset alder og utviklingsnivå. Det er med andre ord mange etiske hensyn forskeren må ivareta, og vi vil videre presentere hvilke etiske prinsipper vi etter beste evne har forsøkt å tilfredsstille.

3.9.1 Sikt

I forkant av en slik kvalitativ studie hvor man skal behandle personopplysninger, må man melde forskningsprosjektet til Kunnskapssektorens tjenesteleverandør (Sikt). Prosjektet skal vurderes om det oppfyller kravene i henhold til personvern. Det ble sendt inn en detaljert beskrivelse av studien, datainnsamlingsplan, hvordan datamaterialet skal sikres og informasjonsskrivet vi utarbeidet. Etter at søknaden fra Sikt ble godkjent, sendte vi ut et informert samtykkeskjema til foreldre og foresatte, og med underskrift fra aktuelle deltakere, kunne innsamlingen av datamaterialet starte.

3.9.2. Samtykke og mulighet til å si nei

Uavhengig av alder, kjønn og bakgrunn på forskningsdeltakerne, må man som forsker innhente et informert samtykke. Det informert samtykkeskjema som vi sendte ut i forkant, inneholdt beskrivelser av gjennomførelsen, hvordan samtykket skulle overholdes, samt hvordan opplysninger og materiale skulle sikres. Det informerte også om hvilke eventuelle fordeler og risikoer deltakelsen kunne føre med seg. Vi valgte i vår studie å forske på barn i alderen syv og åtte år, og siden forskningsdeltakerne er under 15 år, kreves det et informert samtykke fra foreldre eller foresatte (Staksrud et al., 2021). Selv om foreldre har gitt samtykke på vegne av barna, er barnas eget samtykke vel så viktig (Nilssen, 2012). Det informerte samtykket opplyste også om at det var frivillig å delta, samt retten de har til å trekke seg når som helst i prosessen. Dette er et viktig krav til hva et informert samtykke bør inneholde (Kvale & Brinkmann, 2015; Nilssen, 2012; Postholm & Jacobsen, 2018). To av deltakerne som tidligere hadde gitt sitt samtykke, ombestemte seg da innsamlingen skulle foregå. De ønsket ikke å delta likevel, noe som selvfølgelig ble respektert. Vi vil komme tilbake til etiske betraktninger knyttet til barn og unge i delkapittel 3.9.5 *Spesielt hensyn til barn og unge.*

3.9.3 Anonymitet

Alle forskningsdeltakeres personopplysninger og rett til privatliv skal tas hensyn til. Innenfor kvalitativ forskning er risikoen større for at utenforstående kan identifisere enkeltpersoner i et datamateriale, og man skal være forsiktig med å love anonymitet (Postholm & Jacobsen, 2018). Eventuelle identifiserende opplysninger skal oppbevares utilgjengelig for andre, og forskere må sørge for at informasjon ikke havner på avveie, slik at ikke bruken av informasjonen utgjør en skade for deltakerne (Christoffersen & Johannessen, 2012). Det var derfor viktig for oss å transkribere og gi deltakerne pseudonym like etter endt datainnsamling, samt å oppbevare det innsamlede datamaterialet separat fra personidentifiserende opplysninger. Selv om datamaterialet anses for å inneholde sensitive eller personidentifiserende opplysninger, er det viktig å gjøre tiltak som anonymiserer datamaterialet slik at enkeltpersoner i minst mulig grad kan identifiseres (Christoffersen & Johannessen, 2012; Kvale & Brinkmann, 2015; Postholm & Jacobsen, 2018).

3.9.4 Forskerens rolle

Forskerens forforståelse og bakgrunn vil alltid påvirke den kvalitative forskningen (Nilssen, 2012). Vår subjektivitet er en naturlig del av en kvalitativ forskning, som kommer til uttrykk gjennom valg og avgjørelser i studien. Forskeren må være kontant selvbevisst på sin rolle i interaksjon med deltakerne og i tolkningen av teoretisk ståsted og empirisk materiale. Gjennom å arbeide bevisst med egen subjektivitet vil man opprettholde forskerblikket, og mestre å skape en nødvendig distanse til forskningsdeltakerne, konteksten og datamaterialet. Det er ikke til å unngå at forskeren påvirker resultatet i en kvalitativ forsking, særlig om man som forsker er deltakende i gjennomførelsen av intervjuet. Datamaterialet vårt er et resultat av spørsmål, innvendinger og tolkninger som vi har vektlagt som viktige og relevante. En risikofaktor ved å ikke være bevisst sin subjektivitet, er at forskeren kan fikle med sannheten for å få resultatene til å stemme overens med egne meninger. Dermed kan subjektiviteten bli misbrukt og forskningens troverdighet svekkes (Nilssen, 2012). Ved å være to forskere som arbeider sammen håper vi at det har gjort oss mer selvbevisst over egen subjektivitet.

3.9.5 Spesielt hensyn til barn og unge

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) (Staksrud et al., 2021) påpeker viktigheten av barns særlige krav til beskyttelse dersom de deltar eller inngår i forskning. Barn og unge er vesentlige og en sentral bidragsyter i vår studie. Det stiller et krav til at vi som forskere må ha tilstrekkelig kunnskap om barn og unge til å være kapable til å tilpasse innhold og metode til den gitte aldersgruppen (Kvale & Brinkmann, 2015; Nilssen, 2012). Selv om foreldre og barn har gitt samtykke, må forskeren foreta en vurdering på om barnet faktisk har forstått hva det innebærer å delta i forskningen (Staksrud et al., 2021). Barn vil ikke alltid forstå konsekvensene av å delta i et slikt prosjekt, og i noen tilfeller føle seg tvunget til å delta gjennom at de opplever det vanskelig å protestere eller fordi de ønsker å innrette seg etter forskerens ønsker (Befring, 2007). Derfor var det viktig for oss å presisere hva undersøkelsen gikk ut på, at det var en anonym og frivillig deltakelse, og å få et aktivt og tydelig samtykke uten utilbørlig press. I og med at en av oss hadde en relasjon til elevene fra praksis, var det viktig å ivareta etiske hensyn også knyttet til relasjoner og roller. Det ble tydeliggjort at vi opptrådte som forskere, og ikke praksisstudenter eller lærere.

4 Analyse

I analysekapittelet vil vi presentere våre hovedfunn og eksemplifisere hvordan elevene brukte tegning i problemløsningen og se på tegningens utseende. Vi presenterer datamaterialet med samme struktur som analyseverktøyet vårt; først ser vi på kategoriene for bruk av tegning i problemløsning, deretter på kategoriene for tegningens utseende. For å få oversikt over datamaterialet, har vi vist forekomsten av de ulike kategoriene i tabellene nedenfor (tabell 4 og tabell 5). Vi presenterer først bildet av den aktuelle tegningen, sammen med utdrag som er knyttet til den. Deretter vil selve analysen presenteres. Noen ganger presenteres utdrag og analyse om hverandre. I utdragene vil eventuelle gester fremheves med blå skrift, før de kommenteres mot slutten av analysen for hver elev. Dersom vi ikke har sett noen aktuelle gester i utdraget, vil dette også bli påpekt.

Bruk av tegning i problemløsning	Antall tegninger
Tegning *for* problemløsning	
Konkretiserings-materiale	1
Støtte for system	17
Utforsknings-verktøy	9
Tegning *av* problemløsing	
Visualisering	3
Tegninger totalt	30

Tabell 4: Analyseverktøy for bruken av tegning

Kjennetegn tegning		Antall tegninger
Piktografisk tegning		20
	Symbolsk tegning	6
Ikonisk tegning		2
	Symbolsk tegning	1
Kun symboler		1
Tegninger totalt		30

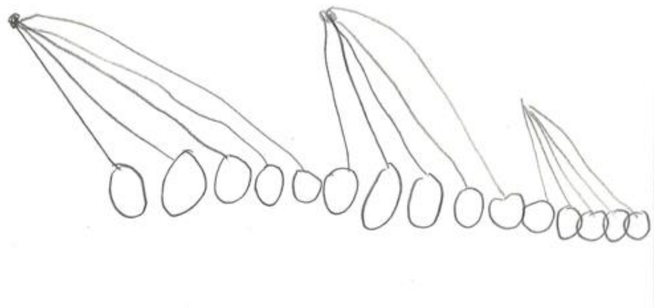
Tabell 5: Analyseverktøy for tegningens utseende

4.1 Elevenes problemløsning

Når det gjelder elevenes problemløsning fant vi i vårt datamateriale at nesten alle elevene brukte tegning som en del av problemløsningen, og til å finne en løsning på problemet. Med andre ord, for de fleste ble tegningen brukt som et verktøy *for* problemløsning. På den andre siden, var det noen elever som produserte en tegning i etterkant av problemløsningen. Det betyr at de har laget en tegning *av* problemløsning og brukte tegningen som et verktøy for kommunikasjon, slik vi har definert det i teorikapittelet. Innunder elevers problemløsning vil vi presentere eksempler fra hver av kategoriene; *konkretiseringsmateriale*, *støtte for system*, *utforskningsverktøy* og *visualisering*. Vi kommer tilbake til kategoriene for kjennetegn av tegningen senere.

4.1.1 Konkretiseringsmateriale

Konkretiseringsmateriale var den kategorien det var minst forekomst av. Av totalt 30 tegninger var det kun én tegning som ble klassifisert som *konkretiseringsmateriale*. At tegningen ble brukt som *konkretiseringsmateriale* vil si at eleven representerte en operasjon på samme måte som eleven muligens ville ha gjort med fysiske elementer tilgjengelige. Det betyr å enten flytte, bevege på eller gruppere elementene. Gjennom arbeidet til eleven «Odin» på kjeksoppgaven får vi se hvordan han brukte tegning som *konkretiseringsmateriale* ved å tegne opp alle femten kjeksene, før han delte ut én bestemt mengde gjentatte ganger.



Figur 3: Odin, ikonisk tegning, konkretiseringsmateriale

Gjennom tre utdrag fra transkripsjonen kan vi se hvordan Odin bruker tegningen som *konkretiseringsmateriale*:

7.	*Forsker:*	*Hm ... Kanskje du kan prøve å tegne det, så kanskje vi klarer å finne ut av det?*
8.	*Odin:*	*Ja.* **[tegner 15 kjeks og ser på forsker]** *Sånn?*
9.	*Forsker:*	*Sånn ja. Hva har du tegnet nå?*
10.	*Odin:*	*15 kjeks.*

Odin tegnet 15 kjeks for å visualisere problemet om fordeling av kjeks (linje 8 og 10). Da han tegnet 15 kjeks tok han det abstrakte uttrykket «15 kjeks» fra oppgaveteksten, og ga det en visuell form. Dette gir Odin en mulighet til å se kjeksene foran seg, som kan hjelpe han med å forstå og manipulere kjeksene videre i problemløsningen sin.

20. *Odin:* **[Tegner streker fra fem kjeks opp til et samlingspunkt]**
21. *Forsker:* *Hva har du tegnet nå?*
22. *Odin:* *De fem går til den her.* **[Peker på første punktet]**

...

26. *Odin:* **[Tegner streker fra fem til kjeks og tegner et nytt punkt]** *Nå drar disse fem til den.*

Odin brukte streker for å binde kjeksene fra forskjellige punkter (linje 20 og 26). Dette representerer fordelingen av kjeksene til de ulike barna og da Odin forklarte at «de fem går til den her» (linje 20 og 26) ser vi at strekene fungerer som en visualisering av selve handlingen å «dele ut».

13. *Forsker:* *Hvordan kan vi tegne for å finne ut av det?*
14. *Odin:* *Hm .... Jeg vet ikke ...*
15. *Forsker:* *Hm, nei ... Men du har tegnet 15 kjeks her. Hvordan kan vi dele ut de kjeksene, slik at alle ti barna får like mye?*
16. *Odin:* *At noen får fem?*

...

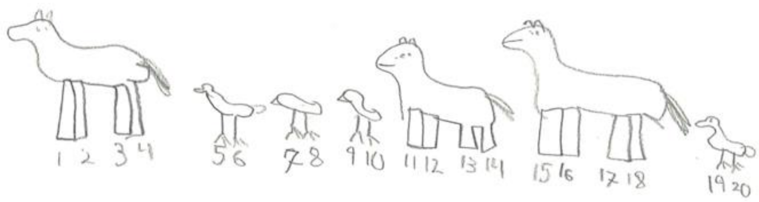
48. *Odin:* *Nei, jeg tror ikke de får fem hver. De får fire kjeks hver.*

Gjennom tegningen organiserte Odin kjeksene i grupper som viser hvor mye hvert barn fikk. Først mente han at noen barn kunne få fem kjeks (linje 16 og 22), men til slutt konkluderte han med at dette ikke løser problemet riktig (linje 48). Selv om løsningsforslaget der noen barn fikk fem kjeks ikke løser oppgaven korrekt, ga metoden hans en tydelig visualisering av hvordan kjeksene kan deles ut. Da ser vi hvordan gruppering kan fungere som *konkretiseringsmateriale* ved å transformere det abstrakte problemet til et visuelt problem gjennom tegning.

I det andre utdraget som ble presentert, kan vi se ett tilfelle av at Odin brukte fysiske *gester*. Den fysiske gesten som Odin gjorde, var da han pekte på et punkt han tegnet (linje 22). Gesten virker å være en del av hans måte å se for seg problemet (at fem kjeks «går» til ett barn), og hvordan han kommuniserte tolkningen sin av problemet. Han brukte gesten for å henvise til tegningen ved å peke på punktet han tegnet.

4.1.2 Støtte for system

Tegning som *støtte for system* var den kategorien som forekom oftest. Av de totalt 30 tegningene var det 16 av de som ble brukt som *støtte for system*. Kjennetegn her, er som nevnt, at elevene bruker tegningen for å holde oversikt over elementene, telle underveis eller systematisk teste ut løsninger på problemet. Det mest vanlige innenfor denne kategorien var at eleven brukte tegning for å holde oversikt over elementene i oppgaven. I tillegg var det vanlig at tegningen ble brukt til å telle over og kontrollere antallet. Her vil vi vise to tilnærminger, fra tegninger av «Kevin» og «Stian», som eksempler på *støtte for system* der tegningen hjelper til med å organisere og holde orden på elementene i problemet.



Figur 4: Kevin, piktografisk tegning, støtte for system

25. *Kevin:* *En hest* **[tegner en hest med øyne, fire bein og en hale]**, *det blir fire ben.* **[tegner en høne med to bein]** *seks,* **[tegner enda en høne]** *åtte,* **[tegner enda en høne]** *ti,* **[tegner en hest med fire bein, øyne, ører og hale]** *fjorten,* **[tegner enda en hest, med øyne, ører og hale]** *atten*, **[tegner en høne]** *tjue.*
26. *Forsker:* *Hva har du tegnet?*
27. *Kevin:* *Ehm, fire høner og det blir åtte ben, pluss fjorten ben. Nei. Pluss tolv ben.*

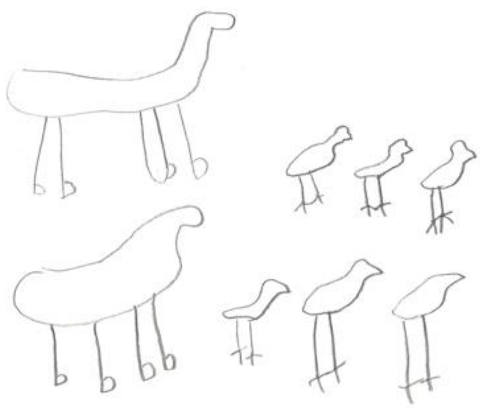
Vi kan derimot se hvordan Kevin brukte tegningen, som man ser i figur 2, til å systematisk bygge opp en løsning på problemet med å finne ut hvor mange bein det er totalt på alle dyrene (linje 25). Han tegnet hester og høns vekselsvis mens han telte ved å legge til antall bein for hver figur han tegner. Kevin telte opp beina som «fire», «seks», «åtte», og så videre, som viser en klar metode der han løser problemet ved å bruke tegningen til å holde styr på antall bein. Tegningen ble også brukt som en visuell oversikt over problemet, og det kan vi se på linje 25-27 der Kevin organiserte informasjonen på en slik måte at han enkelt kan legge sammen antall bein underveis og holde styr på totalantallet bein.

33. *Kevin:* *Det blir en to tre fire fem seks syv åtte ni ti elleve tolv tretten fjorten femten seksten sytten atten nitten tjue* **[skriver tallene fra 1-20, ett tall ved hvert bein].**
34. *Forsker:* *Ja, nå ser vi ganske lett at det er tjue bein*

Da Kevin ble ferdig med tegningen, sjekket han det totale antallet bein ved å telle dem høyt mens han skrev tallene fra 1-20, ett tall for hvert bein. Dette ga Kevin en metode for å bekrefte hvorfor løsningen hans ble riktig. Først så vi på linje 25 at Kevin telte antall bein mens han tegnet dem, og så ser vi på linje 33 at han telte dem igjen da han skulle sjekke løsningen sin. Dette er et eksempel på hvordan tegningen kan *støtte for system* med strategien å telle, telle på nytt og sjekke løsningen.

I utdragene fra Kevin fant vi ingen åpenbar bruk av *gester*, og Kevin bruke først og fremst tegninger og tall for å vise løsningen sin. Han gestikulerte ikke med hendene eller bruker bevegelser som en del av forklaringen sin. Derfor er det ingen spesifikke gester å analysere i dette utdraget.

Det neste eksempelet på hvordan en tegning kan brukes som *støtte for system*, skal vi vise gjennom Stian sin tegning:



Figur 5: Stian, piktografisk tegning, støtte for system

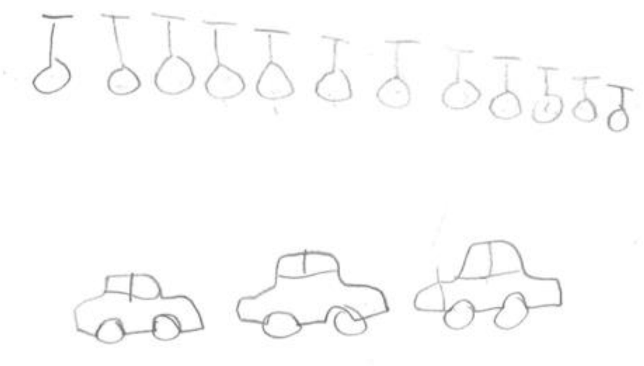
10. *Stian:* **[Tegner en høne]** *Sånn, en høne.*
11. *Forsker:* *Hvor mange bein er det på gården nå da?*
12. *Stian:* *Seks bein.*
13. *Forsker:* *Hvor mange bein skulle det være til sammen på gården da?*
14. *Stian:* *20. Men jeg mangler noen hester og noen høns enda* **[tegner en høne til]**. *Nå er det åtte bein.*
15. *Forsker:* *Ja.*
16. *Stian:* **[Tegner en høne til]** *Nå er det ti bein. Så nå kan jeg kanskje ...* **[Tegner en hest til]** *Nå er det 14 bein.* **[Tegner en høne].** *Nå er det 16 bein på gården, men det skal være fler.* **[Tegner en høne til]** *18, nå er det 18 bein*. **[Tegner en høne til]**. *Nå er det 20 bein.*
17. *Forsker:* *Hvordan vet du helt sikkert at det er 20 bein da?*
18. *Stian:* *Fordi ...* **[Teller alle beina til dyrene med blyanten].**

I dette utdraget kan vi se hvordan Stian gradvis tegnet flere hester og høns, mens han systematisk økte antall bein og holdt styr på totalen: «Nå er det åtte bein» (linje 14) og «Nå er det ti bein» (linje 16) og så videre, til han nådde 20 bein. Dette er en klar indikasjon på at tegningen (i figur 3) hjalp ham med å organisere og holde styr på de matematiske elementene i problemet. På linje 18 ser vi hvordan Stian telte alle beina han hadde tegnet, som et svar på hvordan han vet sikkert at det var 20 bein. Dette viser hvordan han brukte tegningen som en måte å bekrefte at han har oppnådd det riktige totalantallet bein.

Stian inkluderte *gester* i sitt arbeid med hester og høns oppgaven, som innebar bevegelser med blyanten (linje 18). Det ble sett på som en gest fordi blyanten ble en forlengelse av bevegelsen som fingrene ville gjort. Stian brukte blyanten til å peke på tegningen og telte beina på dyrene. Mens han telte beina med blyanten, kan det være at de små bevegelsene han gjorde var for å markere hvert bein han telte.

4.1.3 Visualisering

Det var kun tre elever som lagde tegninger i etterkant og som derfor ble kategorisert som *visualisering*. Elevene tenkte på løsninger på problemet i hodet først, før de tegnet for å vise løsningen sin. De brukte ikke tegningen som et verktøy for å løse problemet fra start, men som en måte å kommunisere problemløsningsprosessen sin på. Vi kan ikke være sikre på at det eleven tenker i hodet sitt, er det som eleven faktisk tegner og viser til oss. For å vise hvordan *visualisering* kom til uttrykk i datamaterialet vårt vil vi se på to eksempler, begge fra eleven «Kevin». I det første eksempelet brukte Kevin en kombinasjon av tegning og numeriske beregninger for å utforske to løsninger, mens i det andre eksempelet brukte han en ren numerisk tilnærming som ikke inkluderer tegning.



Figur 6: Kevin, piktografisk tegning, visualisering

I figur 6 ser vi Kevins tegning av hjuloppgaven, og nå skal vi se på noen utdrag fra transkripsjonen:

8.	*Kevin:*	*Åja, så vi vet ikke hvor mange leker, bare at det skal være tolv hjul til sammen?*
9.	*Forsker:*	*Ja, det stemmer. Så hvilke leker tror du Ola har da?*
10.	*Kevin:*	*Hm.. Jo, jeg vet det. Han har tolv etthjulssykler.* **[Tegner elleve etthjulssykler, teller for hver sykkel han har tegnet, «en», «to», og så videre, og peker med blyanten på hver sykkel].** *Sånn!*

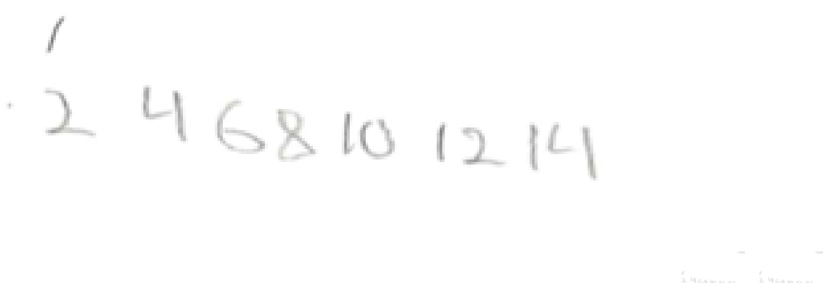
Kevin begynte prosessen med å visualisere løsningen før han tegnet. På linje 10 ser vi Kevins evne til å visualisere problemet i hodet før han satt det på papir. Da han tegnet hver etthjulssykkel, da Kevin en fysisk form til det abstrakte uttrykket «tolv hjul». Det betyr en kobling mellom det han så for seg i hodet, da han svarte at «han har tolv etthjulssykler», og tegningen og tellingen han gjorde på linje 10 der han sjekket at problemet er korrekt løst. Tellingen gjorde at Kevin hele tiden kunne sjekke og bekrefte at han var på riktig spor med tanke på å nå det totale antallet hjul som problemet har bestemt.

22. Kevin: *Han kan også ha biler da, men de har jo fire hjul.*
23. Forsker: *Ja, hvor mange biler kunne Ola hatt da?*
24. Kevin: *Tre biler. Da blir det fire, åtte, tolv hjul.* **[Tegner tre biler]**
25. Forsker: *Hva har du tegnet?*
26. Kevin: *Tre biler*
27. Forsker: *Ja, hvor mange hjul er det?*
28. Kevin: *Det er fire hjul* **[peker på den første bilen]**, *åtte hjul* **[peker på den andre bilen]**, *tolv* **[peker på den siste]**.

Kevin utforsket også et annet alternativ ved å tenke på biler med fire hjul hver (linje 22). Han tegnet og telte dem på en lignende måte for å sikre at det blir riktig antall hjul (linje 24-28). Det viser at Kevin er i stand til å utforske ulike løsninger og at han kan endre sin indre representasjon underveis, noe som resulterer i en ny tegning av problemet (tre biler). Til slutt er det løsningen med tre biler som Kevin konkluderer med som svar på problemet. Gjennom denne prosessen brukte Kevin tegning både som et verktøy for å visualisere sine indre tanker og representasjon, men også som et middel for å utforske og bekrefte løsninger. Han viste hvordan *visualisering* ikke må inneholde en direkte og umiddelbar tegning, men at det er en mental prosess som kan inkludere flere stadier av tegning og utforsking før man faktisk kommer frem til en løsning.

I denne oppgaven kan vi se at Kevin brukte gester (peking) flere ganger i tegneprosessen. Kevin brukte blyanten til å peke på hver etthjulssykkel på tegningen mens han teller de. Han telte høyt for hver pekebevegelse noe som tyder på at bevegelsen blir gjort for å markere tellingen.

I en annen oppgave har Kevin på nytt produsert en tegning i etterkant av problemløsningen. Dette eksempelet, som ble kategorisert som *visualisering*, skal vi se på i utdraget som hører til figur 7:



Figur 7: Kevin, kun symboler, visualisering

1. *Kevin:* **[Leser oppgaveteksten]** *Lovise teller hjulene på alle syklene i parken. Det er til sammen 14 hjul i parken, hvor mange sykler er det i parken?*
2. *Kevin:* *Det blir syv. Først to* **[skriver tallene mens han teller]** *fire seks åtte ti tolv fjorten*
3. *Forsker:* *Ja, vil du prøve å tegne det også?*
4. *Kevin:* *Nei.*

…

11. *Forsker:* *Hvordan kan du vite sikkert at det er 14 hjul?*
12. *Kevin:* *Fordi at det er egentlig bare å ta, ehm ... syv pluss syv*
13. *Forsker:* *Ja, hvorfor tenkte du syv pluss syv?*
14. *Kevin:* *Fordi at ti pluss ti er tjue, og tre mindre enn ti er syv, og da er det to treere som til sammen blir seks og seks mindre enn tjue blir fjorten.*

Selv om Kevin fikk instruksjoner om å tegne, skrev han likevel tallene fra 2 til 14 mens han telte høyt (linje 2). Det viser hvordan Kevin brukte tallene som en representasjon for hvert par hjul på syklene. På linje 12 ser vi at Kevin forklarte hvordan han kom frem til det totale antallet hjul ved å si «at det er egentlig bare å ta, ehm ... syv pluss syv», og det viser at han brukte mental regning for å sjekke at antall sykler faktisk gir et riktig antall hjul. Likevel stemmer ikke forklaringen hans i etterkant overens med det han gjorde da han løste oppgaven (skriver ned tallene 2,4,6, osv.). Videre på linje 14 kom Kevin med en forklaring på hvordan han tenkte rundt antall hjul og sykler som ikke samsvarer med det han har gjort. Vi kan ikke finne igjen utregningen som han snakker om (ti pluss ti er tjue, og tre mindre enn ti er syv …) i tegningen hans.

Vi kan ikke se noen åpenbar bruk av *gester* i dette utdraget. Han gestikulerte verken med hendene eller inkluderte bevegelser underveis i forklaringen sin. Derfor er det ingen spesifikke gester å analysere i dette utdraget.

4.1.4 Utforskingsverktøy

Når det kommer til å løse problemet med tegning som et *utforskningsverktøy*, var det ni elever som brukte tegningen på denne måten. Det som kjennetegner å bruke tegning som et *utforskingsverktøy* er at tegning blir brukt for å gjennomskue strukturen i problemet og klargjøre rollene til de involverte tallstørrelsene. Gjennom å prøve seg frem med ulike visuelle fremstillinger, forkaste eller revidere den påbegynte tegningen, kan elevene finne en løsning på problemet. Vi skal nå se på ett eksempelet fra eleven «June» og hvordan hennes tegning ble brukt som *utforskingsverktøy*.

Figur 8: June, piktografisk, utforskingsverktøy

9. June: **[Tegner barn, noe viskes ut før hun tegner på nytt eller tegner videre. Hun teller alle barna hun har tegnet, men teller ikke ferdig og begynner å sette tall hos hvert barn. Hun oppdager at hun mangler noen barn, så tegner hun noen til. Hun bruker ulike fargeblyanter til å fargelegge barna. Da hun er ferdig å tegne, legger hun ned blyanten og begynner å bevege seg på stolen]**

10. Forsker: *Hva har du tegnet nå da June?*

11. June: *Ti barn*

12. Forsker: *Ti barn ja. Husker du hva de ti barna skulle?*

13. June: *Tre, tre, tre* **[Tegner et tretall ved siden av hvert barn]**

14. Forsker: *Hva gjorde du nå?*

15. June: *Tegnet tre kjeks, bare at det skrives tre på*

16. Forsker: *Hva betyr det når det står tre der da?*

17. June: *Tre kjeks*

June tegnet barna og kjeksene med ulike fargeblyanter. Hun eksperimenterte med ulike fremstillinger av problemet og endret tegningen sin fortløpende for å vise forståelsen sin (linje 10-13). Hun tegnet, telte, visket ut, og reviderte tegningen sin flere ganger i løpet av sekvensen. Det viser prosessen der June prøvde ut ulike visuelle fremstillinger og gjorde endringer underveis, noe som gjør tegningen til et verktøy for utforsking.

21. June: *Og en to tre fire fem seks syv åtte ni ti elleve tolv tretten fjorten femten* **[Stopper å telle og tar opp arket, slipper det løst ned på pulten igjen. Visker ut tre-tallene]**

22. Forsker: *Hva tenkte du nå da?*

23. June: **[Fortsetter å viske uten å svare. Setter to streker der tretallet stod før. Visker ut den ene streken og finner en ny**

blyant og skriver tallet 1 på svarsetningen. Hun snur arket til neste oppgave]

…

28	*Forsker:*	*Jeg så i sted at du skrev tre på alle, og så, hva gjorde du etter det?*
29	*June:*	*Visket det ut*
30	*Forsker:*	*Ok, hva tenkte du da?*
31	*June:*	*Fordi at tre, det blir jo femten her* **[peker på barnet som hun har nummerert som nummer fem]** *og når jeg tok to så ble det faktisk femten der* **[Peker på den første streken hos det barnet hun har nummerert som åtte]**
32	*Forsker:*	*Ja, hva mener du med det, at det ble femten der?*
33	*June:*	*At to blir liksom, bare at bare, den stopper der fordi at tretten fjorten femten*

Videre kommer June frem til at barna får en kjeks hver og da konkluderer hun med at hun har delt ut ti kjeks. De fem siste kjeksene vil hun først gi til en voksen og tegner et større barn på tegningen. Da vi utfordret henne på å dele de ut til barna, sa hun først at det ikke går fordi dersom barna får en kjeks til hver, blir det 20 kjeks. Til slutt innser hun at hun kan dele kjeksene i to og slår fast at hvert barn får en og en halv kjeks hver.

June visket ut og endret detaljer mens hun utforsket ulike måter å løse problemet på (linje 21 og 23). Forklaringen på linje 29 og 31 viser at hun forkastet noe av det påbegynte arbeidet sitt fordi hun finner ut at løsningen ikke ble riktig mens hun tegnet, noe som er typisk for bruken av tegning som *utforskingsverktøy*. Gjennom disse eksemplene kan vi se hvordan June kontinuerlig tilpasset tegningen sin, reviderte og forkastet løsningsforslag mens hun utforsket problemet. Hun brukte tegningen aktivt som et verktøy for å representere ulike antall kjeks hun vil dele ut, og forkastet det da hun oppdaget at det ikke gikk. Det kan være tendenser til at denne utforskingen skjer systematisk, noe som ville ført til at tegningen havnet i kategorien *støtte for system*. Likevel er ikke dette åpenbart og tydelig at June hadde en systematisk tilnærming da hun testet ut ulike løsninger.

Første gangen vi skulle kategorisere Junes bruk av tegning i denne oppgaven, var vi litt usikre på om vi mente at den ble brukt som et *utforskingsverktøy* eller som *støtte for system*. Derfor ser vi det hensiktsmessig å avklare hvorfor vi til slutt mener at dette er bruk av tegning som *utforskingsverktøy*. La oss ta en titt på definisjonene til de to kategoriene først (presentert i rammeverket i delkapittel 3.7.1). Dahl (2020) har definert *utforskningsverktøy* slik:

> Når tegningen fungerer som et utforskningsverktøy, handler det om at tegningen brukes for å gjennomskue strukturen og klargjøre rollen til de involverte tallstørrelsene. Elevenes tegneaktivitet kjennetegnes av at de prøver seg frem med ulike visuelle fremstillinger, de forkaster eller reviderer en påbegynt tegning, og de stopper opp og diskuterer oppgaveteksten og tegningen underveis. (Dahl, 2020, s. 207)

På den andre siden er *støtte for system* definert slik:

> En passiv tegning uten bevegelse. Tegninger brukes i en elimineringsprosess ved systematisk sortering av elementer og oppbygging av en struktur (Saundry & Nicol, 2006). Tegningen er avgjørende for å løse oppgaven, og elever bruker den ofte til å telle og telle igjen for å bekrefte løsningen sin. (Kleven, 2022, s. 3)

Dahl (2020) understreker at *støtte for system* er en metode der elever systematisk kan teste ut løsninger og hvor hovedfunksjonen er å hjelpe elevene med å holde oversikt over oppgavens elementer. For å begrunne hvorfor vi mener at June bruker tegningen som *utforskingsverktøy* har vi sett nærmere på hvordan hun interagerer med tegningen og problemet. Først ser vi på hvordan June eksperimenterer aktivt med ulike visuelle fremstillinger av problemet. Hun reviderer tegningen sin flere ganger, bruker ulike fargeblyanter og endrer detaljer mens hun utforsker ulike måter a løse problemet på. Dette mener vi indikerer at hun bruker tegningen for å prøve å gjennomskue strukturen i problemet og for å klargjøre rollene til de involverte tallstørrelsene. Derfor er denne bruken av tegning kategorisert som *utforskingsverktøy*.

I dette utdraget kan vi se at June brukte fysiske *gester* i form av peking (linje 29). Pekingen skjer for å kommunisere det hun testet ut tidligere i utdraget. Da hun pekte på barnet hun tegnet som nummer 5, var det for å markere at det var så langt hun kom da hun delte ut tre kjeks til hver. Da var det kun fem barn som fikk kjeks. Det samme gjaldt da hun pekte på barnet hun tegnet som nummer åtte, da delte hun ut to til hver og kom til åtte barn før hun hadde brukt opp alle kjeksene. Pekingen gjorde hun for å tydeliggjøre de muntlige forklaringene hun gjorde; da June pekte på barn nummer fem mens hun sier «… det blir femten her», ble det tydelig hvilket barn hun snakker om.

4.2 Tegning

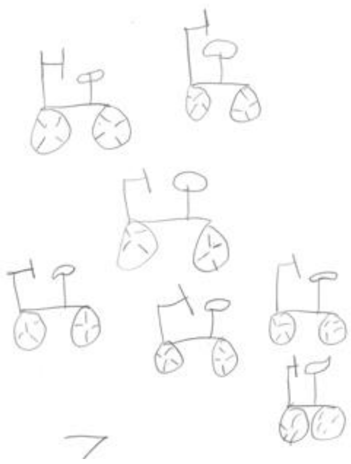
Vi valgte også å se på tegningenes utseende for å se om det kunne kobles til hvordan elevene brukte tegningen i problemløsningen. Datamaterialet viste oss at flertallet tegnet tegninger som var *piktografiske*. Kun to tegninger var *ikoniske*, og en tegning ble kategorisert som *kun symboler*. I denne delen skal vi presentere noen eksempler på tegninger som ble kategorisert innenfor alle fire kategoriene for tegningens utseende; *piktografiske tegninger*, *ikoniske tegninger*, *symbolske tegninger* og *kun symboler*.

4.2.1 Piktografisk tegning

Av alle 30 tegningene, ble 26 av de kategoriserte som *piktografiske tegninger*. Innenfor disse 26 tegningene var det en ulik grad av detaljer i tegningene. For at en tegning skal bli kategorisert som piktografisk, inneholder den som nevnt flere detaljer enn det som er nødvendig for å representere problemet. En piktografisk tegning har ofte et realistisk fokus på historien, derav flere detaljer. Vi kommer til å trekke frem to eksempler fra eleven «June» på piktografiske tegninger, der det første eksempelet er fra kjeksoppgaven, og det andre eksempelet er en tegning fra hjuloppgaven.

Figur 9*: June, piktografisk, utforskningsverktøy*

I figur 9 ser vi det samme eksempelet som ble presentert i delkapittel 4.1.4 om utforskningsverktøy. Det er et eksempel på en besvarelse hvor tegningen aktivt ble brukt for å løse kjeksproblemet. June tegnet alle barna og begynte deretter å dele ut kjeks til hvert barn. Besvarelsen er en piktografisk tegning som inneholder mange detaljerte elementer og farger. Hun brukte lang tid på å tegne barna, viske bort og tegne på nytt gjentatte ganger. Tegningen ble kategorisert som piktografisk fordi den inneholdt detaljrike elementer som ikke er relevante for å finne en løsning på problemet, for eksempel hår, klær og sko. Det gjør at tegningen har et realistisk fokus på problemet hvor historien og elementene i problemet kommer tydelig frem gjennom realistiske og detaljerte representasjoner.

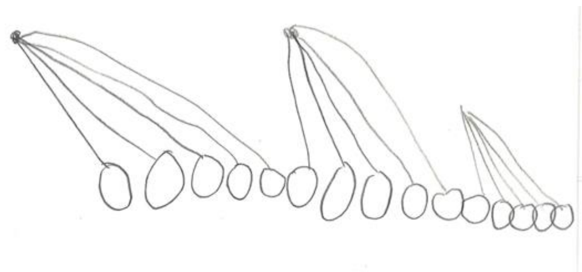


Figur 10*: June, piktografisk, støtte for system*

I figur 10 finnes det et annet eksempel av en piktografisk tegning av hjuloppgaven. June arbeidet med historien gjennom å tegne sykler. Her har hun ikke plukket ut utelukkende matematisk relevant informasjon, som kunne vært for eksempel enkle sirkler for å representere hjulene. Eleven har tegnet sete på alle syklene, og presiserte i tillegg at det var viktig å ha noe å sitte på. Et sykkelsete vil ikke i denne oppgaven være matematisk relevant for å komme frem til en løsning på problemet. Selv om tegningen, sammenlignet med det første eksempelet, inneholder færre detaljer og farger, er den også detaljert i form av hjul, sykkelstyre og sete. Slike detaljer gir et realistisk bilde på historien, men de er ikke nødvendige for å komme frem til en løsning på problemet, og derfor er denne tegningen kategorisert som *piktografisk*.

4.2.2 Ikonisk tegning

Det var et færre antall *ikoniske tegninger*, med kun tre tilfeller. At en tegning blir kategorisert som *ikonisk* vil si at den har et matematisk søkelys på spørsmålet og har enkle former og representasjoner. Det vil si at elevene plukket ut de matematiske opplysningene i problemet som var hensiktsmessige for å komme frem til en løsning, og representerte disse med forenklede representasjoner som tellestreker eller andre enkle former og symboler. For eksempel vil elevene i kjeksoppgaven kunne tegne en sirkel som en representasjon av et barn uten noen spesielle realistiske detaljer. En utfordring vi møtte på i analysen av kjeksoppgaven, var å skille mellom *ikoniske*-kjeks og *piktografiske*-kjeks. Siden kjeks ofte er runde, kan det være vanskelig å vite om eleven har tegnet ut fra konteksten, eller ut fra problemet. Det var noe vi måtte være klar over også i sykkeloppgaven. Derfor var det i denne delen av analysen nødvendig å se på intervjuene i tillegg, for å vite hva elevene selv sa om det de hadde tegnet. På denne måten sikret vi at vi hadde plassert de ikoniske tegningene i riktig kategori. For å vise eksempler på hvordan elevers tegninger kan være ikoniske, vil vi trekke frem to ulike besvarelser fra kjeksoppgaven.



***Figur 11**: Odin, ikonisk, konkretiseringsmateriale*

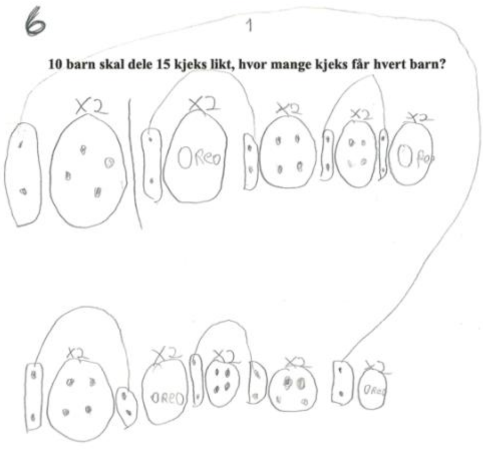
Det første vi ønsker å se på er eksempelet i figur 11. Dette er den samme tegningen som ble trukket frem i delkapittel 4.1.1. Odins besvarelse er en representasjon som fremhevet de matematiske elementene i problemet gjennom enkle former og streker. Tegningen viser et høyt nivå av abstraksjon uten noen realistiske detaljer knyttet til problemet, og blir derfor kategorisert som ikonisk. Dersom man ikke kjenner til konteksten, er det vanskelig å si noe om hva formene i tegningen representerer. Eleven har benyttet streker som kan tyde på at tegningen ble brukt aktivt for å komme frem til en løsning.

Figur 12*: Roar, ikonisk, utforskningsverktøy*

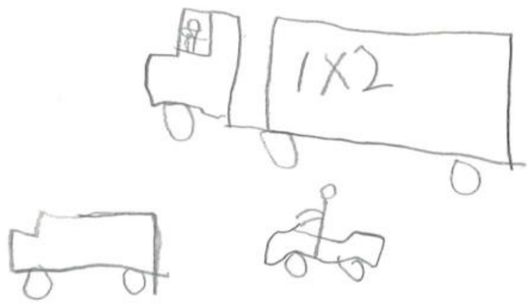
Det andre eksempelet vi har valgt å trekke frem finnes i figur 12. Denne tegningen inneholder enkle former som sirkler, halvsirkler, streker og piler. Ser man kun på tegningen, kan man ikke vite hvilket matematisk problem eleven har forsøkt å løse. Dermed er man avhengig av konteksten for å forstå løsningsforslaget. Eleven var mer opptatt av de matematiske opplysningene i oppgaven fremfor historien, og har derfor kun tegnet enkle representasjoner for kjeksene. Den største sirkelen har en pil med et ti-tall til høyre, og det representerer at alle barna har fått én kjeks hver. Eleven har tegnet fem sirkler øverst til høyre i tegningen, som han har «delt i to» ved å sette en strek på midten av hver av dem. Disse fem kjeksene har han representert på nytt, men bare i form av ti halvsirkler (til venstre i tegningen). Slik kom han frem til at barna får én hel og én halv kjeks hver.

4.2.3 Symbolske tegninger

Flere av tegningene inneholdt flere representasjoner som tekst, tall og symbol. Som det ble nevnt tidligere vil barn ofte supplere tegninger med skriftlige eller muntlige forklaringer, dersom de føler at tegningen ikke er forståelig nok eller når barnet selv føler at det ikke er nøyaktig nok (Papandreou, 2014). I vårt datamateriale kunne vi identifisere flere tilfeller av tall, bokstaver eller ord. Av 26 piktografiske tegninger, inneholdt seks av disse tall og/eller bokstaver. For å vise hvordan noen elever inkluderte symboler i sine tegninger vil vi presentere elevbesvarelser som finnes i figur 11 og figur 12.



Figur 13: *Nathaniel, piktografisk og symbolsk, støtte for system*



Figur 14*: Viljar, piktografisk og symbolsk, støtte for system*

I figur 13 og figur 14 ser vi to eksempler på *symbolske tegninger*, hvor begge elevene har benyttet seg av tall og bokstaven «x» i en kombinasjon med hverandre. Denne bruken av symboler gjør at de blir kategorisert som *symbolske tegninger*. Begge elevene laget *piktografiske tegninger* hvor de inkluderte symboler underveis og etter de tegnet. Nathaniel har, som vi kan se i figur 13, også inkludert bruken av ord der han har skrevet «oreo» i noen av kjeksene.

4.2.4 Kun symboler

I et av intervjuene var det én elev som ikke ønsket å tegne for å finne en løsning på oppgaven. Som vi så i eksempelet til Kevin under bruken av tegning (figur 7, delkapittel 4.1.3) brukte han bare tall i sin besvarelse. Her hadde symboler den rollen at de utelukkende skulle representere problemet, og ikke som et supplement til en tegning. Vi skal nå se på den samme tegningen, for å eksemplifisere kategorien *kun symboler.* Derfor er denne tegningen kategorisert som *kun tallsymboler*.

Figur 15: *Kevin, kun symboler, visualisering*

I figur 15 kan vi se at Kevin har representert sin løsning med tall. Ut ifra tegningen er det ikke mulig å se hvordan han har kommet frem til et svar på oppgaven. Det vil også være vanskelig å konkludere med det faktum at Kevin faktisk kom frem til en korrekt løsning. Siden tallene er skrevet opp i intervaller på to, kan det være mulig å tolke at hvert tall skal representere antall hjul (og dermed antall sykler). Likevel var det avgjørende i dette tilfellet, å se på transkripsjonen av intervjuet med Kevin, for å avklare hva tallene betyr.

5 Diskusjon

Tidligere forskning viser at tegning er et viktig verktøy å bruke i matematikk, både når det kommer til problemløsning og når det gjelder kommunikasjon (Bakar et al., 2016; Dahl, 2020; Papandreou, 2014; Saundry & Nicol, 2006). Problemstillingen i denne studien var: *Hvordan blir tegning brukt i åtte 2. klassingers problemløsning, og hvilke kjennetegn kan vi finne i tegningens utseende?* For å svare på problemstillingen så vi på ulike måter å bruke tegning på, både *for* problemløsning og *av* problemløsning. Datamaterialet vårt bestod av totalt 30 elevbesvarelser, der tre av tegningene ble produsert etter at problemet var løst, og dermed tegnet *av* problemløsning. Resten av de 27 tegningene ble tegnet *for* problemløsning, og produsert underveis i problemløsningsprosessen. Av alle 30 besvarelser, ble 16 av de brukt som *støtte for system*, ni ble brukt som *utforskingsverktøy*, to besvarelser som *konkretiseringsmateriale*, mens tre besvarelser ble til gjennom *visualisering* og produsert underveis og i etterkant av problemløsningen.

5.1 Konkretiseringsmateriale

Vi har kun ett eksempel som viser hvordan en elev bruker tegning som *konkretiseringsmateriale*. Odin sitt arbeid med kjeksoppgaven (figur 3, delkapittel 4.1.1) indikerer at han mangler erfaring med å bruke tegningen på en effektiv måte i dette tilfellet. Odin har brukt streker for å «dele» ut kjeks og på den måten brukt tegningen som *konkretiseringsmateriale*, men da Odin skulle presentere elementene i oppgaven, har han ikke fått det til riktig. I denne delen av oppgaven behandlet Odin tegningen først og fremst som en direkte representasjon av den første løsningen han prøvde ut, heller enn et verktøy for å forstå og utforske problemet. På den ene siden viste Odin at han kunne reprodusere noe ved problemet ved å tegne 15 kjeks, men uten tilstrekkelig oversikt over hvordan disse elementene kunne manipuleres for å finne den korrekte løsningen. Det vil si at han ikke klarte å overføre informasjonen fra problemet om «ti barn», til tegningen sin. Odin virket å bli fastlåst av det første løsningsforslaget sitt; «fem til hver», uten å vurdere flere løsningsalternativer til problemet. Edens og Potter (2007) peker på at det er en sammenheng mellom hvor godt eleven kan se for seg og tegne hvordan problemer ser ut, og i hvilken grad eleven greier å løse problemet. Her kan det være mulig at Odin ikke greide å se for seg problemet og fant det utfordrende å tegne hvordan problemet kunnen se ut, noe som kan være årsaken til at Odin ikke kom frem til riktig løsning på problemet. Det kan tenkes at dersom Odin hadde hatt god nok oversikt over elementene i oppgaven, ville det vært enklere å bruke tegningen aktivt for å utforske problemet, noe Saundry og Nicol (2006) sier er typisk når man bruker tegningen som konkretiseringsmateriale. I Odin sitt tilfelle er det relevant å si noe om veiledning og støtte i tegneprosessen. Odin var vårt første intervju og vi tror at vi kan ha vært påpasselige med å ikke hjelpe til for mye underveis. Vi minnet Odin på den informasjonen som stod i oppgaveteksten, at det var «ti barn», men det virket som at Odin godtok at hans eget løsningsforslag ikke hadde like mange barn som problemet sa. Vi kan si at Odins tilnærming virker å være en intuitiv, men ufullstendig bruk av tegning, som hadde potensiale til å gi ham riktig svar dersom en mer utforskende tilnærming ble brukt. Derfor kan det med dette tilfellet konkluderes med at det er avgjørende at eleven forstår problemet og rollene i problemet først, for å kunne oppnå en riktig løsning gjennom tegning som *konkretiseringsmateriale*. Dette er en viktig begrensning ved denne tilnærmingen, men også ved tilnærmingen *støtte for system* som krever god oversikt over elementene og de ulike rollene elementene har i problemet. På den andre siden vil ikke tilnærmingen *utforskingsverktøy* stille like store krav til å ha kontroll på rollene til elementene, fordi det kan være en del av utforskingen å avklare rollene underveis. Pedagogisk sett bør lærere derfor ikke bare oppmuntre til å representere problemet i form av tegning, men også aktivt veilede og instruere elever i hvordan de kan bruke tegningen som et middel for utforsking. Det vil innebære å oppmuntre til strategier for å revidere og manipulere tegninger som en del av problemløsningsprosessen, slik at for eksempel Odin kunne løsrevet seg fra å kun representere sitt første løsningsforslag.

5.2 Støtte for system

Det var høyest forekomst av bruk av tegning som *støtte for system*, noe vi kan se i sammenheng med det Bakar et al. (2016) sier om at elever som brukte tegning underveis i problemløsningen sin, først brukte tegningen til å presentere problemet og deretter som et telleverktøy. Det indikerer at elevene i denne studien også så det mest hensiktsmessig å presentere problemet med relevante objekter tett knyttet til konteksten. Felles for alle tegningene som ble kategorisert som *støtte for system* var at de ble brukt til å holde oversikt over elementene i oppgaven, og kunne bli brukt til å telle over. Samtidig var disse tegningene uten bevegelse, altså uten streker eller piler som skulle representere regneoperasjoner. Tegningene som ble kategorisert som *støtte for system* viste heller et statisk bilde på problemet. Ved å lage en tegning som inneholder alle elementene i oppgaven, vil det gjøre det enkelt for eleven å telle, teste ut eller sjekke løsninger. Tidligere har vi sett på eksempler fra Kevin sitt arbeid med hester og høns-oppgaven (figur 4, delkapittel 4.1.2), der han brukte tegningen som *støtte for system*. Kevin brukte tegningen på en måte der han kunne håndtere informasjonen på en strukturert måte i en organisert rekkefølge. Ved å legge til antall bein for hver ny tegning han lager, opprettholder han den sekvensielle behandlingen av dataene ved å bryte ned problemet til en serie av enkle, håndterbare deler som han løser én etter én. Denne måten å løse problemet på støtter Kevin i å utføre nøyaktige beregninger på det totale antallet bein, som gir mindre sjanse for å gjøre feil. Kevin teller høyt og skriver ned tall ved hvert bein, slik at prosessen blir konkret og synlig. Dette er ikke bare telling, men også en visualisering av problemløsningen og stegene i den. Kevin bryter ned problemet til enkle, håndterbare deler, slik at vanskelighetsgraden reduseres; fra den abstrakte informasjonen om 20 bein på gården, til en tydelig representasjon av problemet ved å tegne dyrene, før han gir en visuell bekreftelse på at problemet er løst riktig ved å skrive ned tall og vise at det blir 20 bein. Denne beregningen gjør at vi kan følge problemløsningen som Kevin gjør, steg for steg.

Selv om analysen vår ikke har sett på hvorvidt elevenes løsninger er korrekte eller ikke, kan det være fruktbart for fremtidige undersøkelser å se på denne sammenhengen. Vi vet at tidligere forskning har indikert at det finnes en positiv sammenheng mellom tegning og problemløsning, og at tegningen kan gjøre elevene i stand til å finne en løsning på problemet (Bakar et al., 2016). I vårt datamateriale så vi at tegning hadde en positiv effekt på problemløsningsprosessen, særlig i kjeksoppgaven. Noen av elevene hevdet tidlig at den oppgaven ikke var mulig løse, men etter å ha utforsket med ulike fremgangsmåter med tegning, kom de likevel frem til riktig svar. Likevel klarte ikke alle å komme frem til en riktig løsning på problemet. Selv om elevene tegnet alle elementene som var relevante å inkludere for å få finne den riktige løsningen, var det ikke en selvfølge at de ville komme frem til en riktig løsning. Dette kan tyde på manglende kunnskap og erfaring om hvordan utnytte tegning som et hjelpemiddel i matematikk. Derfor er det viktig at lærere legger opp til hvordan elevene kan se på tegning som matematiske elementer og representasjoner, men også hvilke metoder og strategier man kan bruke for å få et utbytte av aktiviteten. Slike strategier kan innebære å lære elevene hvordan de kan identifisere og forstå de ulike elementene i problemet, og rollen de har. Dette kan gjøres gjennom å gå gjennom eksempler der man viser tydelig hvordan tegningen kan brukes for å utforske problemet ved å for eksempel vise ulike måter å tegne problemet på.

5.3 Utforskingsverktøy

Av 30 elevbesvarelser, ble 9 av disse tegningene brukt som *utforskingsverktøy*. For å repetere, så kjennetegnes bruken av tegning på denne måten at den blir brukt for å gjennomskue strukturen i problemet og klargjøre rollene til elementene. Dersom elevene mestrer det, kan tegningen brukes som støtte for å finne en løsning (Dahl, 2020). June er en av de ni elevene som brukte tegning som *utforskingsverktøy*, og eksempelet (figur 8, delkapittel 4.1.4) illustrerer både styrker og svakheter ved denne tilnærmingen. Gjennom denne tilnærmingen brukte June tegningen til å visualisere og utforske ulike løsninger på problemet, noe vi kan se i sammenheng med forskning som peker på tegningens verdi for å fremme forståelse og problemløsning (Dahl, 2020). Her har tegningen en verdi for June ved at hun ikke bare kan se en representasjon av problemet, men også aktivt arbeide med det i et visuelt format, som åpner opp for utforsking av løsningsmetoder. Imidlertid ser vi også en mulig utfordring i Junes arbeid: risikoen for å miste konsentrasjonen på hva problemet egentlig handler om, og bli for opptatt av de visuelle og kreative aspektene ved tegneprosessen. Junes tilfelle viser hvordan tegning i problemløsning kan lede til mange og gjentatte endringer i tegningen, som kan distrahere eleven bort fra løsningen på problemet. June brukte lang tid på å skrive tall og tegne kjeks, og på et tidspunkt virket hun å gi opp. Dette viser hvordan en slik tilnærming kan føre til at man utforsker seg bort fra problemet, og viktigheten av å ha en balanse mellom utforsking og fokus for å komme frem til en løsning. Til tross for disse utfordringene klarte June å komme frem til en konkret løsning gjennom veiledning fra oss. Dette fremhever igjen betydningen av lærerens rolle som veileder og støtte. Veiledning under tegning som *utforskingsverktøy* bør derfor rette oppmerksomheten mot å veilede elevene i å balansere mellom utforsking og fokus.

5.4 Visualisering

Tre tegninger ble brukt som et verktøy for å kommunisere løsningen sin. Vi vet nå at ifølge Saundry og Nicol (2006) kjennetegner *visualisering* som tilnærming at barna ser for seg problemet i holdet, og kan noen ganger tenke høyt før tegneprosessen starter. Barnet kan også skrive ned et numerisk svar på papiret. De peker også på at det kan virke som om barnet er forvirret over problemet eller ikke vite hva de skal tegne, men det tyder ofte på at barnet har bearbeidet informasjonen i problemet på en visuell måte (Saundry & Nicol, 2006). Selv om elevene ikke brukte tegning som et verktøy for å løse problemet, er det likevel verdifullt å se hvordan de har produsert tegningen. Det gir oss et innblikk i å se hva elevene har verdsatt som viktig informasjon for å formidle problemet og løsningen til noen andre. I vårt datamateriale kom det tydelig frem at elevene tegnet for å kommunisere løsningen til oss. De presiserte at de visste svaret, og produserte en tegning etter forespørsel fra oss. Det underbygger Papandreou (2014) sin påstand om at tegneaktiviteten er et anerkjent og visuelt språk som kan hjelpe elever med å uttrykke seg og kommunisere med andre. Tegningene representerer et uttrykk for en løsnings- og tankeprosess hos elevene, og kan dermed fortelle oss noe om den interne problemløsningsprosessen. Dersom vi ser på eksempelet med Kevin og arbeidet med sykkeloppgaven (figur 15, delkapittel 4.2.4), så fikk vi se hvordan en tegning med kun symboler ble produsert i etterkant av problemløsningen. Han skrev ned tall (ett tall for hver sykkel) med intervaller på to, som skulle vise hvor mange hjul det ble totalt. Da Kevin skulle forklare hvordan han kunne vite at det ble syv sykler, ga han en forklaring som ikke stemte overens med tegningen. De regneoperasjonene som han forklarte (ti pluss ti er tjue …), er det ikke mulig å se i arbeidet hans. Dette sier oss noe om at vi ikke kan ta for gitt at det alltid vil være en kobling mellom det eleven gjør for å løse oppgaven, og det eleven tegner eller sier i etterkant. Dette er enda et argument for hvorfor det er viktig med veiledning gjennom tegneprosessen for å unngå mistolkninger i elevenes arbeid.

5.5 Ikonisk og piktografisk

Ut fra vårt datamateriale var det et vesentlig flertall som tegnet *piktografiske tegninger*. Flertallet av tegningene inneholdt med andre ord detaljer, farger og realistiske elementer som blir etterspurt i oppgaveteksten, men som ikke var nødvendige for å kunne løse oppgaven. Junes besvarelse på kjeksoppgaven (figur 9, delkapittel 4.2.1) er et eksempel på en *piktografisk tegning* som inneholder mange situasjonsrelaterte detaljer. Som det kom frem i både tegningen og intervjuet var June veldig nøyaktig i sin tegneprosess. Hun forkastet tegningene sine flere ganger og var opptatt av at tegningene ikke var fine nok, noe som gjorde at hun mistet oppmerksomheten på selve problemet. Det resulterte i at hun etter hvert gikk mer over på å representere kjeksene med tall og enklere symboler. Det kan fremstå som at i det hun begynte å tegne, ble hun opphengt i hvordan tegningen skulle se ut og glemte å rette oppmerksomheten på de matematiske elementene og strukturen i oppgaven. I det hun gikk over til tall og enklere former, ble det enklere for henne å komme frem til en løsning på oppgaven. Det ga oss et inntrykk av at hun selv oppdaget at hun ble for engasjert i selve tegneaktiviteten som førte til at hun glemte at det var en oppgave hun skulle løse. Det resulterte i at hun distanserte seg fra tegneaktiviteten, men heller la vekt på å tegne noe enklere som kunne representere de matematiske elementene. Disse funnene er i tråd med Rellensmann et al. (2017) sin påstand om at detaljrike tegninger kan forvirre fremgangsmåten. Det kan tenkes at June hadde kommet frem til en løsning tidligere, dersom hun ikke hadde vært så opptatt av hvordan tegningen skulle se ut.

Selv om *piktografiske tegninger* kan inneholde mye unødvendig informasjon, ser vi likevel på dem som nyttig. Ved å se på kun tegningene, viser våre resultater at de *piktografiske tegningene* formidler konteksten tydeligere enn de *ikoniske tegningene*. Tegningene består av opplysninger som elevene har vektlagt som viktig for løsningen, og gjenspeiler historieelementene i oppgavene. Det gjør at de *piktografiske tegningene* kommuniserer en mer detaljert beskrivelse av løsningene, som gjør det lettere å få et innblikk i elevenes tanker og mentale bilder. Ut fra vårt datamateriale virket det også som at de elevene som tegnet *piktografisk*, husket bedre hva konteksten og oppgaven handlet om. Elever kan selvsagt tegne *piktografisk* uten å ha klart å løse oppgaven, men de hadde likevel riktig oppfatning av hva oppgaven etterspurte.

Kun tre av tegningene ble kategorisert som *ikoniske tegninger*, med få og enkle representasjoner. *Ikoniske tegninger* vil også kunne fortelle oss noe om barns interne representasjoner (Athey, 2007). Med få eksempler i vårt datamateriale, er det vanskelig å si noe generelt om hva som kjennetegner løsninger i *ikoniske tegninger*. Likevel kan det vi har funnet, bekrefte påstanden om at de elevene som tegnet *ikonisk*, har en bedre evne til å tenke abstrakt (Crespo & Kyriakides, 2007). Odin sin besvarelse, som vi kan se i figur 3 og 11 (delkapittel 4.1.1 og 4.2.2), er en *ikonisk tegning* med et høyt abstraksjonsnivå. Han trakk ut de matematiske elementene fra oppgaven og representerte de med abstrakte former og streker uten noen særlige detaljerte elementer fra historien i oppgaven. Det gir oss et inntrykk av at han er i stand til å omgjøre informasjon i problemløsningsoppgaver til abstrakte elementer. Resultatene fra vår analyse viser at elevene som tegnet *ikonisk*, brukte tegninger som et verktøy for å løse problemet. I figur 12 (delkapittel 4.2.2) ser vi Roar sin besvarelse på kjeksoppgaven, hvor han har benyttet abstrakte former for å representere sin løsning. Selv om Roar kun tegnet representasjoner for kjeksene, var de abstrakte representasjonene tilstrekkelige for å komme frem til riktig løsning på problemet. Han la frem de matematiske elementene som var nødvendige for å komme frem til en løsning, og brukte i likhet med Odin, tegningen som et verktøy for problemløsning. Det kan tenkes at elevene som tegner *ikoniske tegninger*, også er mer i stand til å se en større matematisk sammenheng. Slik kan problemløsningsoppgaver også få en overføringsverdi til andre matematiske elementer, og at elevene klarer å se problemet i en annen kontekst enn kun den gitte konteksten.

5.6 Symbolsk tegning og kun symboler

Av det innsamlede elevarbeidet, var det syv besvarelser som benyttet symboler i arbeidet sitt. Seks av besvarelsene inneholdt symboler som et tillegg til tegningen, mens én av besvarelsene inneholdt *kun symboler*. Som tidligere nevnt, er det ifølge Papandreou (2014) vanlig at barn supplerer tegningene sine med tall, symboler og andre representasjoner for å forbedre formidlingen av tegningen sin. Det stemmer overens med våre funn, da flere av disse elevene la til tall og symboler etter at de ble spurt om å forklare løsningen sin. Likevel fant vi tilfeller av at elevene tegnet symboler uoppfordret, noe som kan tolkes som en naturlig del av løsningsprosessen der elevene har utviklet en mer abstrakt tenkning. Elevene har utviklet uttrykksformer og er i stand til å representere elementene i oppgaven med mer standardiserte uttrykk. Ut fra våre funn, har de også lettere for å tenke abstrakt, gjennom å forstå at en representasjon også kan erstattes med symbol eller tall. De som ikke benyttet seg av symbol i sin besvarelse, var i større grad avhengig av å tegne alle elementene for å løse oppgaven. Det kan også tenkes at det å veksle mellom flere representasjoner, krever en evne til å abstrahere opplysningene, slik at de er i stand til å oversette de slik at de blir nyttige i konteksten.

I arbeidet med tegningen til Kevin, som ble kategorisert som *kun symboler* (figur 15, delkapittel 4.2.4), uttrykte han at han ikke ønsket å tegne for å løse oppgaven. Han visste svaret, og trengte derfor ikke å tegne. Det kan tyde på at eleven hadde en klar løsningsmetode for seg internt, men kanskje ikke klarte å se for seg en måte å tegne det på. Samtidig vil vi gjenta at det ikke nødvendigvis er slik at det eleven sier og tegner, er en nøyaktig representasjon av hva de har tenkt eller sett for seg da de løste oppgaven mentalt. Dette gjør det utfordrende å få et korrekt bilde på hvordan eleven faktisk har kommet frem til en løsning, og derfor blir vår tolkning i hovedsak basert på elevens forklaring. Et slik tilfelle kan ses i sammenheng med Battista (2016) og Papandreou

(2009) som hevder at barn kan bli mer forvirret av å tegne dersom de har sett for seg en løsning, og at de heller vil bruke andre representasjoner, som for eksempel symboler, for å klare å komme frem til en løsning. Et slik tilfelle kan ses i sammenheng med (Battista, 2016; Papandreou, 2009) som hevder at barn kan bli mer forvirret av å tegne dersom de har sett for seg en løsning, og at de heller vil bruke andre representasjoner, som for eksempel symboler, for å klare å komme frem til en løsning. Dermed kan vi ikke si for sikkert om Kevin så for seg løsningen med *kun symboler* først, eller som et resultat av at han ble bedt om å tegne og kommunisere løsningen sin. I denne elevbesvarelsen, er det en fordel at vi observerte problemløsningsprosessen og hadde mulighet til å stille spørsmål om besvarelsen. Et slik tilfelle kan ses i sammenheng med Battista (2016) og Papandreou (2009) som hevder at barn kan bli mer forvirret av å tegne dersom de har sett for seg en løsning, og at de heller vil bruke andre representasjoner, som for eksempel symboler, for å klare å komme frem til en løsning. Dermed kan vi ikke si for sikkert om Kevin så for seg løsningen med *kun symboler* først, eller som et resultat av at han ble bedt om å tegne og kommunisere løsningen sin. I denne elevbesvarelsen, er det en fordel at vi observerte problemløsningsprosessen og hadde mulighet til å stille spørsmål om besvarelsen.

5.7 Tegning som et ferdig produkt

Vi vet at det tidligere har blitt forsket mest på tegning som et ferdig produkt (Dahl, 2020). Når elever har produsert en tegning, har de laget en representasjon av egne tanker og forståelse (Cartwright, 2023). Selv om forskningen i nyere tid ser mer på hvilke fordeler tegneprosessen har, er det likevel nyttig å fortsatt se på tegningene som en egenprodusert representasjon. Ved å se på elevers tegning i matematikkundervisningen, får lærere en unik innsikt i elevenes tankegang (Thom & McGarvey, 2015). Det er flere faktorer som påvirker kjennetegn i hvordan elevers tegninger ser ut. Her spiller det en rolle både hvor stor interesse de har for tegning som en aktivitet, hvilke faglige kunnskaper de har, men også hvordan tegneferdighetene deres har utviklet seg. Selv om samtlige av elevene svarte at de likte å tegne og syntes det var morsomt å tegne i matematikksammenheng, uttrykte flere av informantene en bekymring over at de ikke var flinke til å tegne. Situasjoner der elevene skal tegne i en matematisk sammenheng, foran noen de ikke kjenner godt, kan påvirke elevenes arbeid. Det kan for noen elever skape et stort ønske om å prestere, som resulterer i at de blir mer selvkritiske til egen produksjon.

Selv om elevene er godt kjent med tegneaktiviteten, var de ikke altfor kjente med å tegne i matematikksammenhengen. Det at elevene har en manglende erfaring med tegning i matematikkfaget, kan være en årsak til bekymringene og utfordringene elevene uttrykte i arbeid med oppgavene. Å ikke ha kjennskap til metoder og strategier for å tegne i matematikk, kan gjøre det vanskelig å løse problemløsningsoppgaver med representasjoner gjennom tegning. Dette kan sees i sammenheng med Bakar et al. (2016) sine funn, der det oppstod vanskeligheter i tegneprosessen på grunn av mangel på erfaring med å tegne for å representere matematiske begreper. De hevder også ut fra sin studie at barna manglet erfaringer med å tegne matematiske representasjoner, fordi de ikke produserte spontane tegninger. På en annen side fikk vi inntrykk av at elevene hadde en frykt for at tegningene deres skulle bli misforstått. Selv da vi ikke etterspurte det, var det flere som supplerte med tall, symboler, gestikuleringer eller muntlige forklaringer.

5.8 Gester

I analysen viste vi flere tilfeller av gester underveis i problemløsningen. Vi fant kun ett tilfelle der eleven benyttet gestikulering aktivt for å finne en løsning, mens de aller fleste brukte gester for å kommunisere løsningen sin. Noen få benyttet ikke gester i det hele tatt. Generelt sett var det flest tilfeller av peking og andre bevegelser, som ble brukt for å vise til noe på tegningen.

Gestikulering og ikke-verbale uttrykk er en viktig komponent i elevers tenkning og språk (McNeill, 2005; Radford, 2009), og spiller derfor en betydelig rolle i elevers kommunikasjon og tenkning under problemløsning med tegning. Gjennom analysen av datamaterialet vårt har vi identifisert flere tilfeller av bruk av fysiske gester som en del av problemløsningsprosessen sin. Vi så et eksempel på hvordan gestikulering kan bli brukt for å kommunisere en løsning, gjennom Stian sitt arbeid med hester og høns-oppgaven (figur 5, delkapittel 4.1.2). Avslutningsvis skulle han svare på hvordan han kunne være sikker på at han hadde tegnet 20 bein. Stian bevegde blyanten over hvert bein på tegningen, mens han telte høyt. Underveis i problemløsningen sa Stian hvor mange bein han hadde, men uten å telle beina høyt eller peke. Derfor virker det som om Stian bruker peking med blyanten for å sikre at han har tenkt riktig, og at han faktisk har 20 bein til slutt. I dette tilfellet skjedde gestikuleringen etter at han hadde løst oppgaven, og han pekte med blyanten for vise at løsningen var riktig, og for å formidle løsningen til oss. En annen måte å bruke gester på så vi da Odin brukte peking aktivt i kjeksoppgaven for å finne en løsning (figur3, delkapittel 4.1.1). Han brukte pekingen for å vise hvordan han hadde fordelt noen kjeks. Etter at han pekte på punktet som han fordelte kjeks til, tegnet han et nytt punkt og fordelte fem nye kjeks dit. Fordi Odin kun bruker gester i kun ett tilfelle, er det ikke grunnlag nok til å kunne si noe generelt om Odins bruk av gester eller om gester faktisk er en integrert del av hans måte å kommunisere på i matematikk. Likevel virker peking å være en naturlig del av Odins måte å kommunisere på i akkurat denne situasjonen, og pekingen samsvarer med det han sier. Dermed underbygger våre funn påstandene om at gester ofte blir brukt for å kommunisere i matematikk (Alibali et al., 2014; Arzarello et al., 2009; Radford, 2009).

I to av de utdragene som ble presentert i analysekapittelet, der begge gjaldt eleven Kevin, var det ingen bruk av gester. Det første tilfellet var hester og høns-problemet der Kevin tegnet en *piktografisk tegning* og brukte tegningen som *støtte for system* (figur 4, delkapittel 4.1.2). I det andre tilfellet jobbet Kevin med sykkeloppgaven, og lagde en tegning som inkluderte *kun symboler* og der han tegnet i etterkant av problemløsningen, kategorisert som *visualisering* (figur 7, delkapittel 4.1.3). Det kan tenkes at Kevin foretrakk å bruke andre måter å uttrykke seg på i arbeidet med disse oppgavene, altså gjennom tegning, skriving og verbalt språk. Selv om Kevin ikke brukte gester, løste han begge problemene riktig. Derfor er det viktig å peke på at fraværet av gester ikke nødvendigvis indikerer at problemløsningsprosessen er mindre effektiv eller i mindre grad fører til en korrekt løsning på problemet.

Selv om vi nå har sett litt på hvordan elevene i denne studien brukte og ikke brukte gester, er det viktig å erkjenne at det også her finnes noen begrensninger. Vi skal være forsiktige med å generalisere funnene våre da dette er en studie begrenset til et sett med fire oppgaver og et utvalg på kun åtte elever. Derfor vil det være nødvendig med mer omfattende forskning for å kunne trekke konklusjoner eller se sammenhenger mellom gestikulering og problemløsning i matematikkundervisningen. Forskningen kan imidlertid sette søkelys på hvordan ulike typer oppgaver eller ulike aldersgrupper kan påvirke bruken av gester, og det kan også være interessant å se på hvordan lærerstøtte kan påvirke elevers bruk av gester.

6 Avslutning

I denne studien har vi undersøkt hvordan 2.trinnselever bruker tegning i arbeid med problemløsningsoppgaver. Ved å se nærmere på hvordan elever går frem for å bruke tegning i problemløsning, ønsket vi å belyse hvilken funksjon tegning kan ha i matematikkfaget. I tillegg ville vi vise hvordan tegninger kan analyseres for å gi oss et innblikk i matematikken som ligger i dem. Vi mener at vår masteroppgave belyser et relevant og viktig tema for matematikklærere i grunnskolen, da flere forskere har fremhevet viktigheten av tegning for å gi oss innsikt i barns tanker, forståelsesnivå og kommunikasjonsmåter (Papandreou, 2014; Woleck, 2001). I tillegg har det blitt påpekt at tegning har en positivt innvirkning på evnen til å løse problemløsningsoppgaver (Bakar et al., 2016; Edens & Potter, 2007). Problemstillingen for vår studie var; *hvordan blir tegning brukt i åtte 2. klassingers problemløsning*? For å finne et svar på problemstillingen, ble det utformet to forskningsspørsmål: 1. *Hvilke strategier bruker elevene for å løse problemet gjennom tegning?* og 2. *Hvilke kjennetegn kan vi finne i tegningens utseende?* Ved å besvare disse spørsmålene, vil det samlet gi oss et svar på problemstillingen. Siden det ikke var et mål å finne den «beste» måten å bruke tegning på, eller den «riktige» måten å tegne på, vil konklusjonen bære preg av det.

Vi har sett en variert bruk av tegning som et verktøy i matematikkfaget. Gjennom bruken av tegning som *konkretiseringsmateriale*, *støtte for system*, *utforskingsverktøy* og *visualisering*, har vi sett hvordan forståelsen kan påvirkes av hvordan man ser for seg det matematiske problemet og løsningen på det. 27 av 30 elevbesvarelser ble brukt som et hjelpemiddel *for* problemløsning, mens de tre resterende elevbesvarelsene ble laget som et resultat *av* problemløsning. Metoden som flest elever benyttet var *støtte for system*, og den viser hvordan tegning på denne måten kan hjelpe elevene med å organisere elementene i problemet, noe som kan være kritisk for å komme frem til en riktig løsning. Når det gjelder bruk av tegning som *utforskingsverktøy* ser vi gjennom June sin bruk av tegning hvordan tegning både kan være en hjelp, men også en distraksjon. Dette viser behovet for veiledning fra lærere i å balansere mellom utforsking og fokus slik at elevene ikke «går seg vill» underveis i prosessen.

I tegningenes utseende har vi sett et flertall som velger å tegne *piktografisk* i en slik problemløsningskontekst. Observasjonene vi gjorde tilsier at tegning er en engasjerende metode også i matematikkfaget, men at elevene ikke vet hvordan de kan utnytte potensiale i tegneaktiviteten. Dermed kan det lett bli mye oppmerksomhet på å tegne detaljerte og realistiske tegninger fremfor å plukke ut de matematiske elementene. De *ikoniske* tegningene viser at elevene forsøker å gjøre nettopp det, altså å velge ut de mest relevante elementene og finne beskrivende representasjoner for å komme frem til en løsning. Det varierer hvilke representasjoner elevene finner som best beskrivende, men resultatene i delkapittel 4.2.3 bekrefter påstanden om at elever ofte tyr til symboler for å forbedre kommunikasjonen sin (Papandreou, 2014).

Når elevene mangler erfaring på å bruke tegning som et verktøy i matematikkfaget, er det vanskelig å skille ut hva de bør vektlegge som viktig. Derfor bør lærere støtte elevene i denne prosessen og lære de ulike metoder og strategier for å bruke tegning i en matematisk sammenheng. Tegning er viktig både som et verktøy *for* problemløsning, men også som et middel for kommunikasjon, altså *av* problemløsning. Resultatene viser at flere elever benytter seg av *gester* for å forbedre kommunikasjonen av sine besvarelser. Basert på analysen av datamaterialet og funnene i drøftingskapittelet, kan vi dermed konkludere med at elever bruker tegning på mange ulike måter, men uavhengig av strategi, kan tegning spille en viktig rolle i problemløsningsoppgaver.

Avslutningsvis er det viktig å påpeke at vår kvalitative forskning er unik, i form av at funnene baserer seg på en spesifikk kontekst. Våre resultater er basert på et lite utvalg med kun åtte andreklassingers arbeid med fire problemløsningsoppgaver, og derfor vil det være utfordrende å skulle generalisere funnene våre. Dersom en lignende forskning blir gjort kan resultatene ha likhetstrekk med vår studie, men de kan også gi andre resultater på grunn av studiens begrensninger.

7 Didaktiske implikasjoner og videre forskning

Etter å ha drøftet funnene for bruk av tegning og tegningens utseende, er det tydelig at det trengs en bevisst integrering av tegning som et lærings- og problemløsningsverktøy. Det er som nevnt viktig at lærere kan gi veiledning til elevene i hvordan bruke tegning som et effektivt verktøy i problemløsning, og da trenger lærere opplæring i hvordan de best kan veilede elever på dette. En slik opplæring kan for eksempel innebære å finne gode matematiske oppgaver som legger opp til et behov for å tegne. I tillegg vil det være nyttig om lærere får en innføring i hvordan de på best mulig vis kan lære elever nyttige metoder og strategier for å løse oppgaver med hjelp av tegning. Ved å ha noen konkrete tips til lærerveiledninger, kan det være at flere lærere tørr å inkludere tegning som en integrert aktivitet i matematikkundervisningen.

Videre forskning er nødvendig for å utforske hvilke typer tegninger som er mest effektive for ulike matematiske problemer, og ulike veiledningsstrategier som kan forbedre bruken av tegning i matematikkundervisningen. Dette kan for eksempel være å veilede elever som henger seg opp i detaljer i tegningen og mister oppmerksomheten på problemet (slik vi så i eksempelet med June). Veiledningen bør vektlegge og hjelpe elevene å tegne enkle figurer og tegninger. Konkrete aktiviteter kan være å utfordre elevene i å tegne få detaljer og eventuelt ha et maks antall figurer de får lov å tegne. Her er det viktig å legge opp til tilbakemeldinger underveis, og stille krav til oppgaven som fremmer en positiv utvikling. Dette er viktig fordi at det ikke skal gå ut over elevenes motivasjon eller selvtillit. Det må formidles på en slik måte at elevene ikke føler at det de har produsert ikke er bra nok, men kan få hjelp til å øke læringsutbyttet og se potensialet i det de har produsert. En annen aktivitet kan være å arbeide med en detaljert tegning, der elevene skal «fjerne» detaljer uten å påvirke det matematiske problemet. Uavhengig av hvilke aktiviteter man jobber med, er det viktig å huske på at ikke alle vil ha samme nytte av tegning, for eksempel gjennom kulturelle eller individuelle forskjeller, og derfor må veiledning til bruken og bruk av tegning i undervisningen, tilpasses elevenes individuelle behov og evner. Dette krever at lærere har en kontinuerlig evaluering og refleksjon rundt elevers, og egen bruk av tegning i klasserommet. Det handler om å skape en læringskultur der tegning er anerkjent som en del av matematikkundervisningen, og på den måten kan både elever og lærere lære av hverandre.

Analysen av elevenes bruk av gester avslører også noen didaktiske implikasjoner knyttet til gestikulering. Selv om gestikulering synes å spille en vesentlig rolle i elevenes kommunikasjon om problemløsningen sin, og at gester også kan brukes aktivt for å komme frem til en løsning. Det blir derfor viktig at lærere er oppmerksomme på, og kan støtte opp under elevenes naturlige bruk av gester, enten det gjelder å kommunisere løsningen sin eller å bruke gester aktivt for å finne en løsning. På den andre siden avdekket også analysen at noen elever valgte å ikke bruke gester i det hele tatt. Her vil vi understreke viktigheten av å tillate og støtte hver enkelt elevs foretrukne kommunikasjonsform. Avslutningsvis vil vi igjen påpeke studiens begrensninger som handler om et lite utvalg elever og et begrenset sett med oppgaver som de jobbet med. Det vil derfor være nødvendig med et mer omfattende forskningsgrunnlag for å kunne trekke konklusjoner om sammenhengen mellom bruk av gester og arbeid med problemløsning i matematikkundervisningen.

Referanseliste

Alibali, M. W., Nathan, M. J., Wolfgram, M. S., Church, R. B., Jacobs, S. A., Johnson Martinez, C. & Knuth, E. J. (2014). How teachers link ideas in mathematics instruction using speech and gesture: A corpus analysis. *Cognition and Instruction*, *32*(1), 65–100. https://doi.org/10.1080/07370008.2013.858161

Ardianik, Widayat, E., Izzah, N. & Kusmiyati. (2020). The level of student`s creative thinking through solving open ended mathematics from learning style: Systematic reviews in pharmacy. *Systematic Reviews in Pharmacy*, *11*(9), 207–213.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97–109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Athey, C. (2007). *Extending thought in young children: A parent-teacher partnership*. SAGE Publications Ltd. https://doi.org/10.4135/9781446279618

Bakar, K. A., Way, J. & Bobis, J. (2016). Young children's drawings in problem solving. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Battista, M. T. (2016). *Reasoning and sense making in the mathematics classroom, pre-K-grade 2*. National Council of Teachers of Mathematics.

Befring, E. (2007). *Forskningsmetode med etikk og statistikk* (2. utg). Samlaget.

Berry, J. (2014). Developing mathematical reasoning. *Mathematics in School*, *43*(1), 23–26. http://www.jstor.org/stable/24767782

Bjørndal, C. R. P. (2011). *Det vurderende øyet: Observasjon, vurdering og utvikling i undervisning og veiledning* (2. utg.). Gyldendal akademisk.

Boaler, J. (2010). The road to reasonning. I K. Brodie (Red.), *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms* (s. v–vii). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8

Bobis, J. & Way, J. (2018). Building connections between children's representations and their conceptual development in mathematics. I V. Kinnear, M. Y. Lai & T. Muir (Red.), *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning* (s. 55–72). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7153-9_4

Bragg, L. A., Herbert, S., Loong, E. Y.-K., Vale, C. & Widjaja, W. (2016). Primary teachers notice the impact of language on children's mathematical reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(4), 523–544. https://doi.org/10.1007/s13394-016-0178-y

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brooks, M. (2009). Drawing, visualisation and young children's exploration of "big ideas". *International Journal of Science Education*, *31*(3), 319–341. https://doi.org/10.1080/09500690802595771

Calicchio, S. (2023). *Problemløsning i 4 trinn: Hvordan forstå og takle problemer ved hjelp av de beste strategiene fra psykologi og beslutningsvitenkap.* Stefano Calicchio.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(5), 428. https://doi.org/10.2307/749152

Carruthers, E & Worthington, M. (2005). Making sense of mathematical graphics: The development of understanding abstract symbolism. *European Early Childhood Education Research Journal*, *13*(1), 57–79. https://doi.org/10.1080/13502930585209561

Carruthers, E & Worthington, M. (2006). *Children's mathematics: Making marks, making meaning*. SAGE Publications Ltd. https://doi.org/10.4135/9781446213780

Cartwright, K. (2023). Interpreting young children's multiplicative strategies through their drawn representations. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00450-4

Christoffersen, L & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt.

Clark, T., Foster, L., Bryman, A & Sloan, L. (2021). *Bryman's social research methods*. Oxford university press.

Clarke, D. M., Clarke, D. J & Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian Curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *17*(3), 28–32.

Cohen, L., Manion, L & Morrison, K. (Keith R. B.). (2018). *Research methods in education* (8.utg.). Routledge.

Crespo, S. M & Kyriakides, A. O. (2007). Research, reflection, practice: To draw or not to draw: exploring children's drawings for solving mathematics problems. *Teaching Children Mathematics*, *14*(2), 118–125. https://doi.org/10.5951/TCM.14.2.0118

Dahl, H. (2020). Tegning som verktøy for å utforske multiplikative situasjoner. I V. L. Nilssen & S.-M. Høynes (Red.), *Samtaleorientert matematikk—Et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (s. 193–221). Fagbokforlaget.

DeWindt, A. M & Goldin, G. (2003). Children's visual imagery. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *2*, 1–42.

Edens, K & Potter, E. (2007). The relationship of drawing and mathematical problem solving: draw for math tasks. *Studies in art education*, *48*(3), 282–298. https://doi.org/10.1080/00393541.2007.11650106

Elia, I., Gagatsis, A. & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, *17*(6), 658–672. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.011

Essen, G. V & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *The Journal of Educational Research*, *83*(6), 301–312. https://doi.org/10.1080/00220671.1990.10885976

Goldin, G. (2003). A research companion to principles and standards for school mathematics. I J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Red.), *Representation in school mathematics: A unifying research perspective* (s. 275–285). NCTM.

Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. I L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Gree (Red.), *Theories of mathematical learning* (s. 397–430). Erlbaum.

Hiebert, J. (Red.). (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding* (Nachdr). Heinemann.

Kleven, A. H. (2022). A framework for analysing drawings as tools for mathematical reasoning. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del — Verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. M. Anderssen & J. Rygge, Overs.). (3. utg). Gyldendal akademisk.

Kwon, O. N., Park, J. H. & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, *7*(1), 51–61. https://doi.org/10.1007/BF03036784

Lambert, E. B. (2006). Can drawing facilitate problem-solving? An exploratory study. *Australasian Journal of Early Childhood*, *31*(2), 42–47. https://doi.org/10.1177/183693910603100207

Lester, F. K. (Red.). (2003). *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-grade 6*. National Council of Teachers of Mathematics.

Lester, F. K. & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. I P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (s. 117–135). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(2), 165–190. https://doi.org/10.1023/A:1003956417456

Mackenzie, N. & Knipe, S. (2006). Research dilemmas: Paradigms, methods and methodology. *Issues in educational research*, *16*(2), 193–205.

Mason, J. & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Deakin University.

McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. University of Chicago Press.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren*. Universitetsforlaget.

Papandreou, M. (2009). Preschoolers' semiotic activity: Additive problem-solving and the representation of quantity. I *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4*(1), 321-328.

Papandreou, M. (2014). Communicating and thinking through drawing activity in early childhood. *Journal of Research in Childhood Education*, *28*(1), 85–100. https://doi.org/10.1080/02568543.2013.851131

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept «open-ended problem». I Y. Helsingin, *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (6. utg., s. 7–11).

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter* Høyskoleforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 111–126. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3

Rellensmann, J., Schukajlow, S. & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 53–78. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Rienecker, L. & Stray Jørgensen, P. (2013). *Den gode oppgaven: Håndbok i oppgaveskriving på universitet og høyskole* (2. utg). Fagbokforlaget.

Saundry, C. & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *5*, 57–63.

Soundy, C. S. & Drucker, M. F. (2009). Drawing opens pathways to problem solving for young children. *Childhood Education*, *86*(1), 7–13. https://doi.org/10.1080/00094056.2009.10523101

Staksrud, E., Kolstad, I., Bang, K. J., Bomann-Larsen, L., Fretheim, K., Granaas, R. C., Harpviken, K. B., Haugen, H. Ø., Jakobsen, K. A., Johnsen, R., Lie, M. H., Lile, H. S., Nevøy, A., Nilsen, T. K., Skilbrei, M.-L., Enebakk, V., Steen-Johnsen, K., Anjum, R. L., Aardal, B., … Wittek, A. L. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. De nasjonale forskningsetiske komiteene

Sykler i parken. (u.å.). Hentet 22. april 2024, fra https://www.matematikk.org/tekstnott.html?tid=189725

Thom, J. S. & McGarvey, L. M. (2015). The act and artifact of drawing(s): Observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM*, *47*(3), 465–481. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0697-0

Thomas, N. D., Mulligan, J. T. & Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 117–133. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00106-2

Vaismoradi, M., Turunen, H. & Bondas, T. (2013). Content analysis and thematic analysis: Implications for conducting a qualitative descriptive study. *Nursing & Health Sciences*, *15*(3), 398–405. https://doi.org/10.1111/nhs.12048

Vale, C., Widjaja, W., Herbert, S., Bragg, L. A. & Loong, E. Y. K. (2017). Mapping variation in children's mathematical reasoning: The case of 'what else belongs?' *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(5), 873–894. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9725-y

Velez, I. & Ponte, J. (2013). *Representations and reasoning strategies of grade 3 students in problem solving. Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Ankara: Middle East Technical University.

Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings*. The roles of representation in school mathematics,* 215–227.

Yackel, E. & Hanna, G. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Red.). (2003). *A research companion to principles and standards for school mathematics* National Council of Teachers of Mathematics.

Vedlegg

Vedlegg 1: Intervjuguide

Vedlegg 2: Transkripsjonsguide

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeskjema til foreldre og foresatte

Vedlegg 1: Intervjuguide:

- Hva har du tegnet?
- Hva tenkte du her?
- Kan du forklare tegningen din?
- Hva betyr x i tegningen din?
- Hvorfor tegnet du dette?
- Hvordan visste du at du ville tegne det?
- Hva har du skrevet her?
- Hvordan brukte du tegningen til å løse oppgaven?
- Kan du vise hva du tenkte ved å bruke tegningen?
- Er det noe mer du har lyst til å si om denne oppgaven?
- Vil du gå videre til neste oppgave?

Vedlegg 2: Transkripsjonsguide:

- Muntlige utsagn blir presentert i kursiv skrift.
- **[Ikke-verbale hendelser blir presentert i fet skrift i klamme]**
- **[Gester blir presentert i blå, fet skrift i klamme]**
- 1-5 sekunder stillhet blir presentert med «...»
- Ord og uttrykk med kraft blir presentert med understreking og utropstegn!

Vedlegg 3: Informasjonsskriv og samtykkeskjema til foreldre og foresatte:

Vil du delta i forskningsprosjektet «Arbeid med tegning i matematikk?»

Dette er et spørsmål til deg/dere om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet vårt er å se på hvordan elever på 2. trinn bruker tegning for å løse matematikkoppgaver. Som masterstudenter i matematikkdidaktikk synes vi det er interessant å se på hvordan elever bruker ulike strategier for å løse oppgaver i matematikk. Derfor håper vi at vi med denne studien vil kunne bidra til å forbedre vår forståelse av hvordan elever på 2. trinn utvikler sine matematiske kunnskaper og ferdigheter gjennom bruk av tegning, og at resultatene potensielt kan støtte utviklingen av mer effektive undervisningsmetoder.

Formål

Formålet med dette prosjekter er å samle inn datamateriale til vår masteroppgave i matematikkdidaktikk. Den foreløpige problemstillingen vår er "Hvordan bruker noen på 2. trinn tegning i arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk?".

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Institutt for lærerutdanning ved NTNU er ansvarlig for prosjektet. Vi, Iselin og Siri, er hovedansvarlige for å samle inn, bearbeide og lagre datamateriale. Vi er 25 og 24 år og er mastergradsstudenter i matematikkdidaktikk ved NTNU i Trondheim.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Utvalget til prosjektet vårt er tilfeldig, men vi ønsker å kunne si noe generelt om elever på 2. trinns bruk av tegning i matematikkfaget.

Hva innebærer det for barnet ditt å delta?

Dersom du/barnet ditt velger å delta i prosjektet vårt, vil det innebære at barnet ditt løser noen oppgaver i matematikk sammen med oss. Etter at eleven har jobbet med oppgavene vil vi ha en matematisk samtale der vi reflekterer rundt aktiviteten og stiller spørsmål til løsningene. Hele gjennomførelsen vil ta ca. 30 minutter.

Det vil bli gjort videoopptak underveis, som skal transkriberes og anonymiseres i etterkant. Det vil derfor ikke være mulig å spore besvarelsene tilbake til enkeltpersoner. Dersom det er ønskelig, kan du/dere på forhånd få se spørreskjemaet vi støtter oss på gjennom samtalen, ved å kontakte en av oss eller vår veileder.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du og barnet ditt velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller ditt barn hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Dersom barnet ditt ikke skal delta i prosjektet vil hen delta i ordinær undervisning i klasserommet.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om barnet ditt til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Datamaterialet vil være tilgjengelig for oss, Iselin og Siri, samt vår veileder ved NTNU.
- Vi kommer ikke til å behandle andre personopplysninger enn navn på ditt barn, men likevel erstatter vi navn og kontaktopplysninger med en egen kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Deltakere vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon, men masteroppgaven vår vil bli publisert våren 2024.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes i mai 2024, ca. dato for prosjektslutt er 26. mai 2024. Videoopptak og øvrig datamateriale vil slettes umiddelbart etter prosjektslutt. Dette med unntak av masteroppgaven vår som publiseres på vegne av NTNU. Masteroppgaven med tilhørende vedlegg inneholder anonymiserte opplysninger og disse vil kunne gjenbrukes til videre forskning.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke. På oppdrag fra NTNU har Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du/ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
• innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
• å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
• å få slettet personopplysninger om deg
• å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU ved prosjektansvarlig og veileder Ole Enge, tlf. 98483281
- Mastergradsstudent Iselin Søberg, tlf. 40617846.
- Mastergradsstudent Siri Fossum, tlf. 45290964
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til vurderingen som er gjort av personverntjenestene fra Sikt, kan du ta kontakt via:

• Epost: personverntjenester@sikt.no eller telefon: 73 98 40 40.

Dersom du/dere ønsker å delta, svar innen fredag 26.01.24.

Med vennlig hilsen

Ole Enge Prosjektansvarlig	Iselin Søberg Student	Siri Fossum Student
Ole Enge	Iselin Søberg	Siri Fossum

NTNU

Kunnskap for en bedre verden