Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Guro Jordheim

Implementering og identifisering av kritiske elementer i algebraundervisning

Ved Learning Study med variasjonsteori

Masteroppgave i Master i fagdidaktikk - studieretning matematikkdidaktikk
Veileder: Liping Ding
Mai 2024

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Guro Jordheim

Implementering og identifisering av kritiske elementer i algebraundervisning

Ved Learning Study med variasjonsteori

Masteroppgave i Master i fagdidaktikk - studieretning matematikkdidaktikk
Veileder: Liping Ding
Mai 2024

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne forskningen vil kunne gi nye refleksjoner rundt norske elvers svake algebraprestasjon på internasjonale kartleggingsprøver (PISA, TIMSS og TIMSS Advances). En Learning Study- tilnærming med variasjonsteori, ga nye innblikk i hvilke hensyn som er viktig å ta, da 35 norske 8.klasseelevers hadde sitt første møte med algebra.

De besvarte forskningsspørsmålene er; 1) hvordan kan teoretisk forutsagte kritiske elementer implementeres med variasjon i et undervisningsdesign?, og 2) hvilke kritiske elementer synliggjøres i kommunikasjonen i en påfølgende undervisningstime?. Kritiske elementer er de elementene med essensielle trekk og egenskaper for å oppnå en dypere forståelse av et tema. Metoden Learning Study gir retningslinjer i prosessen med å gjennomføre studien og analysere resultatet.

Identifisering av de kritiske elementene ved algebra, viser at det stort sett handler om en utvidelse av kunnskaper elevene forventes å ha lært fra tidligere (ref. Utdanningsdirektoratet, 2020). De identifiserte kritiske elementene fra teori om algebra er 1) et strukturelt og relasjonelt syn på likhetstegnet, 2) et strukturelt syn på aritmetiske regneregler, og 3) forståelse av symbol for ukjent. Disse kritiske elementene er implementer med variasjon. Gjennom kommunikasjon i klasserommet, og en påfølgende prøve, vil kritiske elementer bli synliggjort og observert, og vil derfor gjort mulig å lære.

Resultatet har belyst noen hensyn å ta i implementeringen av de teoretisk forutsagte elementene. Først, implementering av kritiske elementer med variasjon ved både kontrast og generalisering kan brukes samtidig med fusjon når det inkluderer elementer eleven forventes å ha lært fra tidligere. Kritiske elementer blir synliggjort i undervisning. For det andre, hvis fusjon brukes med flere kritiske elementer før de varieres separat, kan et fokus på elementene som elevene allerede har oppdaget i samme undervisning, føre til at et kritisk element blir oversett.

Det er viktig å være klar over visse nyanser der kritiske elementer er inkludert i eksempler. Spesielt når de presenteres etter hverandre. Et tredje funn, basert på kommunikasjon, viser at bruken av variasjon kan korrumpere visse kritiske elementer. Om et kritisk element blir synliggjort før en oppgave der dette kan brukes, vil dette potensielt overskygge et annet kritisk element.

Undervisning basert på teoretisk identifiserte kritiske elementer, kan rettlede i avgrensing av læringsobjektet i videre undervisningsplanlegging. Da vil undervisning baseres på elementene elevene har størst utbytte av, i forståelsen for læringsobjektet. Observasjoner fra kommunikasjonen i klasserommet viser hvilke kritiske elementer som synliggjøres, og hva som er gjort mulig å lære.

Nøkkelbegrep Variasjonsteori · Learning Study · Algebra · Kritiske elementer

Abstract

This research adds reflections on Norwegian Students' poor algebraic performance on international comparative studies (PISA; TIMSS and TIMSS Advanced). A Learning Study approach with variation theory got performed in 8th grade classrooms with 35 students, facing algebra.

The answered research questions are, 1) how design an algebra lesson with variation, implemented with theoretically proposed critical aspects, and 2) what critical aspects are made visible, through communication in the classroom. Critical aspects are the necessary aspects that are essential for deeper understanding of the subject. The Learning Study approach provides guidelines in conducting and analyzing the study.

The procedure of identifying critical aspects of algebra shows that it mostly includes an expansion of students expected pre-knowledge from earlier grades (ref. Utdanningsdirektoratet, 2020). Theoretically detected critical aspects were 1) a structural and relational approach to the equal sign, 2) a structural view of arithmetic rules, and 3) understanding symbols for variables. These critical aspects are implemented with variation. Through communication in the classroom, and a following post-test, will discerned critical aspects be detected, and therefore shows that it is made possible to learn.

Results from the study points out considerations when implementing critical aspects from theory. First, implementing critical aspects with variation by both contrast and generalization, can be used simultaneously with fusion when the aspects are expected pre-knowledge. The critical aspects are made visible in the lesson. Second, if fusion is applied with several critical aspects, before they are varied separately, a focus on the aspects that students already have discerned, within the same lesson, may cause a critical aspect to be overlooked.

It is important to be aware of certain nuances in which critical elements are provided in examples. Especially when they are presented one after the other. A third finding, based on communication that took place, showed that the use of variation can corrupt certain critical aspects. If a critical aspect is made visible before a task where the same critical aspect can be used, this critical aspect will potentially overshadow another critical aspect.

A focus on theoretically identified critical aspects also has the potential to further delineate the object of learning, such that it has a greater benefit in student learning of the defined object. Communication in the classroom shows what critical aspects are made visible, and therefore what students have the opportunity to learn.

Keywords Variation Theory · Learning Study · Algebra · Critical aspects

Forord

Arbeidet med denne masteroppgaven har vært en interessant reise gjennom fordypningen med å forstå og oppfatte elevers læring gjennom en spesifikk læringsteori; variasjonsteori.

Utfordring underveis i arbeidet med denne oppgaven har hovedsakelig dreid seg om å samle og kartlegge teori slik at budskapet formidles på en måte som gjør at leseren får et riktig bilde av stoffet og konklusjonen. Dette inkluderer oversettelse av engelske tekster. Et direkte oversatt ord på engelsk har ikke alltid den samme meningen på norsk. Budskapet vil, dersom ord i tekster blir direkte oversatt, få en ganske annen betydning. Håper leseren finner innholdet informativ og interessant.

Min bakgrunn fra matematikkstudier i USA har påvirket evnen til å se verdien til grunnskoleelevers matematiske elementer i lys av mer avansert matematikk. I tillegg har jeg i USA tatt fag som psykologi, og på UiO, filosofi, som har satt sine preg på denne masteren. Denne studien mener jeg har et viktig budskap i bevisstgjøring av matematiske elementer som er grunnleggende for en matematisk forståelse.

En stor takk til læreren som lot meg bruke klassen sin og selg selv til å gjennomføre studien. Takk til min mor som har lest igjennom kapitlene ikke bare en eller to, men ofte tre ganger for korrektur. Min bror, kusine og tante har alle satt sitt lille preg på teksten i revidering. Spesielt en stor takk til alle som ga tilbakemelding og støttet meg under de "hektiske" ukene før levering. Den med aller mest nytte har vært veileder, Liping Ding. Uten viktig veiledning og tilbakemeldinger av ypperste klasse hadde ikke produktet vært av like god kvalitet. Hun stilte opp helt til siste slutt, noe jeg setter enormt stor pris på.

God lesing!

Guro Jordheim

Trondheim, mai 2023

Innholdsfortegnelse

Oversikt over tabeller og figurer

Kapittel 1 Innledning

1.1 Faglig og samfunnsmessig relevans

For å tilføre kontekst til denne masteroppgaven inkluderes fakta fra norske elevers kompetanse i algebra. Resultater på internasjonale tester viser at norske elever presterer svakt i algebra (Grønmo & Hole, 2017). TIMSS, PISA og TIMSS advanced er internasjonale kartlegginger av bl.a. matematikkunnskaper. Boken skrevet av Grønmo og Hole (2017), viser og drøfter resultater fra TIMSS Advanced, TIMSS og PISA fra 1995 til 2015. Her er et par utdrag fra boken;

> *«utfordringene i norsk skole er at våre elever presterer alarmerende svakt i algebra». (s. 84)*

> *«... algebra igjen og igjen utmerker seg som det området hvor norske elevers prestasjoner er svake.» (s. 81)*

PISA-resultatet fra 2022 viser at norske elevers prestasjonen igjen har gått ytterligere ned i matematikk (Jensen et al. 2023). I tillegg ligger Norge i 2022, under gjennomsnittet, og blant alle 80 land som deltok er tilbakegangen størst blant islandske og norske elever (Jensen et al., 2023). Hva som forårsaker norske elevers svake prestasjon i algebra har Grønmo og Hole (2017) ingen åpenbar forklaring på. Gardiner ((2004) ref. i Grønmo & Hole, 2017) mener et økt fokus på anvendt matematikk i norsk skole, har ført til nedprioritering av kunnskapen innen ren matematikk som algebra og aritmetikk. I et moderne samfunn, med en akselererende teknologisk utvikling, vil elever trenge god base i ren matematikk (Grønmo & Hole, 2017). Et område som ses på som nødvendig, er algebra (Grønmo & Hole, 2017). Algebraisk tenkning går ut på å lete etter mønster, systemer, variabler og sammenhenger (Gyldendal, 2023). Det snakkes om at algebraisk tenking skal undervises allerede fra 1.klasse på barneskolen (Gyldendal, 2023). Det går ut på å, i undervisning, ta med seg tankesett og ideer bak algebra (Gyldendal, 2023). Elevene skal utvikle en algebraisk tankegang ved å overføre kunnskap fra en situasjon til en annen, som skal danne grunnlag for generalisering og en dypere forståelse (Gyldendal, 2023).

Det aller meste av mer avansert matematikk bygger på nettopp dette matematiske språket som algebra er (Grønmo & Hole, 2017). Et viktig argument fra Grønmo & Onstad ((2013a, s. 166) ref. i Grønmo & Hole, 2017) er at god tallkunnskap er grunnleggende for videre læring av algebra. Resultater fra deres egne analyser, gir grunn til å stille spørsmål om hvorvidt det ikke hadde vært bedre å bruke mer tid på tall tidligere for å frigjøre mer tid til læring av algebra senere (Grønmo & Hole, 2017). De overnevnte faktorene gjør det aktuelt å teste påvirkningen av en læringsteori på undervisningsdesign og norske elevers læring av algebra.

1.2 Problemstilling

Det generelle formålet med denne forskningen er å kunne tilføye kunnskap til forskningsfeltet matematikkdidaktikk. Studien er tenkt til å gjennomføre en Learning Study som inkluderer læringsteorien; variasjonsteori. Variasjonsteori er et syn på hvordan elevene tilegner seg kunnskap. Learning Study handler om *hvordan* man i undervisningen bruker en spesifikk læringsteori. Den handler også om hvordan undervisningstimen skal analyseres etterpå for å kunne gi kunnskap og erfaring om undervisning i matematikk. En Learning Study som er variasjonsteorietisk orientert vil kunne bidra til forbedring av klasseromspraksis som legger til rette for en dypere læring i matematikk generelt (Pang og Ling, 2012), og algebra spesielt. Et sammendrag av publiserte studier viser at (1) elevers prestasjon økte etter en slik skoletime, (2) svake elever hadde en tendens til å lære mest, (3) den observerte læringen elevene gjorde, skjedde ikke bare rett etter timen, men ble ofte tydeligere etterhvert, (4) resultat på nasjonale prøver økte i klassene som implementerte Learning Study, (5) Learning Study hadde tydeligere bedre resultat sammenlignet med Lesson Study (Lo, Pong, & Chik, 2005; Holmqvist, Gustavsson og Wernberg, 2008; Maanula, 2011; Marton og Pang, 2006, 2008; Pang, 2010; Pang og Marton, 2003, 2005, 2007; Lo, 2009 ref. i Marton og Pang, 2013). Om en lærer blir bevisst på prinsippene i Learning Study mener Kullberg og Marton, (2024) at det fører til bedre implementering av oppgaver og eksempler i undervisning og bedre læring for elevene. For at elever skal lære et matematisk tema tilstrekkelig, er det innenfor temaer poengtert spesifikke elementer som er nødvendig for en dyp forståelse. Slike elementer er kritiske og essensielle for å kunne få en dyp forståelse. Disse blir referert til som kritiske elementer. Forskningsspørsmålene er følgende;

1. Hvordan designe en undervisning basert på teoretisk forutsagte kritiske elementer med variasjonsteori i en time i algebra ved bruk av Learning Study?

2. Hvilke kritiske elementer observeres i algebraundervisning, basert på elevers formuleringer, og en påfølgende prøve etter timen, ved bruk av Learning Study.

1.3. Oppbygning av masteroppgaven

Kapittel 2 vil starte med teori om hva algebra innebærer i en didaktisk tilnærming. I tillegg hva som teori mener er kritiske elementer for å lære algebra. Prinsippene til variasjonsteori vil bli forklart. Disse prinsippene brukes til å forklare resultatet og analysen. Til slutt vil teori om Learning Study med en variasjonsteoretisk tilnærming bli presentert.
Kapittel 3 er metodekapittelet. Studien er gjennomført med en metode kalt Learning Study. Spesifikke steg og prinsipper følges i gjennomføringen av en Learnings Study.
I **Kapittel 4** presenteres resultatet av gjennomføringen. Som en del av Learning Study er det å analysere datamaterialet en del av funnet.
Kapittel 5 inneholder drøfting av aspekter rundt forskningskonteksten. Ut ifra funnene fra studien vil resultatet ses fra forskjellige vinkler.
Kapittel 6 gir sammendrag av studiens funn, studiens praktiske verdig og forslag til videre forskning.

Det vil være interessant å se om resultatet reflekterer de mange studiene som er gjort tidligere. Da er det grunn for at prinsippene i metoden og læringsteorien bør få større bevissthet blant norske lærere. Ikke for å erstatte undervisningsrutiner, men heller bevisstgjøre lærere på prinsippene slik at de kan gjøre nytte der de har potensiale. I likhet med andre læringsteorier som kognitivsme, bruker allerede lærere tidvis prinsippene til variasjonsteori, ved å f.eks. presentere to like uttrykk med forskjellige verdier. Dette, uten at de selv trenger å ha formening om hva variasjonsteori er. Likevel, kan en større bevissthet på denne læringsteorien være et verdifullt pedagogisk verktøy. Lærere kan da i større grad skreddersy undervisning for bedre læring. Å lære algebra med variasjonsteoretiske prinsipper øker ikke nødvendigvis elevers motivasjon (Baskoro, 2021).

Dermed trenger ikke en slik læringsteori å overskygge andre metoder for læring og undervisning, men heller virke som et verktøy.

Kapittel 2. Teori

2.1. Sammenlignbare internasjonale tester i algebra

TIMSS er en internasjonal undersøkelse som kartlegger hvert deltakende lands faglig prestasjon, undervisningspraksis, elevers holdninger, skolemiljø, utdanningssystemer og læreplan over tid (uio.no, 2015), hvor 64 land deltok i 2019. TIMSS Advanced kartlegger elever med matematikk og fysikk som fordypningsfag på videregående skole (uio.no, 2015). Det kommer frem i rapporten av Grønmo og Hole, 2019) at innenfor matematikk, presterer norske elever relativt svakt i temaet algebra. Den internasjonale rapporten fra TIMSS 2015, viser at norske elevers algebraprestasjon er svakere enn alle deltakende land, unntatt land med lite ressurser til utdanning og arabiske land (Grønmo & Hole, 2017). TIMSS undersøkelsen fra 2019 viser at norske elever presterte enda dårligere i matematikk enn tidligere år, med en liten økning i algebraprestasjonen fra 2015 (timss2019.org, 2019). PISA undersøker 15-åringers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing, der 80 land deltok (Jensen et al. 2023). Grønmo og Hole (2017) har analysert og sammenlignet norske elevers prestasjon i algebra på alle de nevnte internasjonale testene (PISA, TIMSS og TIMSS Advanced) fra 1995 til 2015. Det virker ikke som Grønmo og Hole (2017) kan poengtere nok hvor alarmerende svakt norske elever presterer i algebra. PISA undersøkelsen fra 2022 viser at norske elevers prestasjon i matematikk har gått ytterligere ned (Jensen, 2023). Flere kilder (Bergem et al., 2016; Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010; Grønmo et al., 2004b; Grønmo, Hole & Onstad, 2016; Grønmo & Onstad, 2012; Grønmo et al., 2012) påpeker også at ikke bare elever, men også lærerstudenter presterer dårlig i algebra (Grønmo & Hole, 2017).

2.2 Algebra og introduksjon til ligninger

Algebra er selve inngangsporten til mer avansert matematikk (Stephens et al. 2013). For mange elever, grunnet mangel på mestring, har denne inngangsporten forblitt lukket (Stephens et al. 2013). Stephens et al. (2013) nevner 5 konsepter som er viktig for å mestre algebra; (1) generalisere aritmetikk, (2) likninger, uttrykk, likhet og ulikhet, (3) forståelse for hvordan elementer fungerer, (4) resonnement om proporsjoner, og (5) variabel/ukjent (Stephens et al., 2013). I denne studien vil fokuset være på elevers forståelse av 1; likhetstegnet, 2; strukturelle syn på aritmetiske regneregler og 3; innføring av en *ukjent* eller *variabel.* Algebra innfører en abstrakthet til matematikken som ses på som et gap mellom aritmetikk og algebra (Kaput, 2008). Nedenfor vil hvert av disse tre konseptene beskriver mer utdypende.

2.2.1 Likhetstegnet

Studien til Stephens, A. et al. (2013), samlet informasjon fra 290 elever på mellomtrinnet i introduksjon til algebra. De fant at mange elever manglet en robust forståelse av likhetstegnet. Noe som gjorde at det å tolke, rekonstruere og løse ligninger, spesielt når flere ledd er involvert, ble utfordrende (Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 2007 ref. i Stephens et. al (2013). Stephens et. al, (2013) beskriver i studien tre grader av forståelse for likhetstegnet. Disse går fra en simpel til en mer avansert forståelse som elever innehar.

Den første forståelsen går ut på at likhetstegnet blir tolket som en operasjon. Altså, at likhetstegnet stimulerer til å *gjør noe* isteden for et symbol som betyr likhet. Elever som har dette synet på matematikk kan bl.a. tolke 8 = 8 og 15 = 5+10 som *feil,* siden det ikke gjøres en operasjon eller den gjøres *bakvendt*. En slik operasjonell forståelse for likhetstegnet har blitt observert i både grunnskole, videregående og på høyskolenivå. Den andre forståelsen går ut på å bruke likhetstegnet som en *relasjon* ved beregning. Likhetstegnet blir sett på som et symbol på relasjonen mellom to utregninger, altså det *"samme som"*. Å ha en *«samme som»* tilnærming til likhetstegnet ses på som en mer korrekt måte å oppfatte tegnet på. En relasjonell tilnærming gjør at eleven mestrer f.eks. oppgaven 8 + 4 = __ + 5, ved å *regne ut*. Den siste, og mest utvikla forståelsen for likhetstegnet, ifølge Stephens et al. (2013), er å se på det som *relasjon ved struktur*. Det vil si at i tillegg til å se på likhetstegnet som *«samme som»*, har en i tillegg evnen til å finne generelle strukturer i regnestykket. Hos en elev med denne forståelsen vil ligningen 8 + 4 = __ + 5, løses uten nødvendigvis å regne ut. Kieran ((2007), ref i Stephens et al. (2013)) hevder at en slik strukturell algebraisk forståelse er evnen til å *se* de abstrakte ideene som gjemmer seg bak symboler. Selv på barnetrinnet kan elever begynne å utvikle et strukturelt syn på likhetstegnet (Stephens et al. 2013).

Oppgavene og eksemplene som brukes i matematikkundervisningen bør ha et formål. Dette er oppgaver som sant/usant og åpne oppgaver som ikke er a+b=__. Det kan være oppgaver med operasjoner på begge sider av likhetstegnet, for at elevene skal få et relasjonelt syn på likhetstegnet. I tillegg, oppgaver som får elever til å identifisere og generalisere aritmetiske regneregler, og oppgaver som inneholder store tall slik at elevene ikke fristes til å *regne ut*.

2.2.2. Strukturelt syn på regneoperasjoner

Undervisning av aritmetikk i barneskolen fokuserer ofte på prosedyrer for å kalkulere riktig svar (Schifter, 2018). Algebra innebærer bl.a. at elevene legger merke til, artikulerer og rettferdiggjør strukturelle egenskaper ved operasjonene (Schifter, 2018). Hver operasjon har et unikt sett med strukturer. For eksempel, å endre rekkefølgen på ledd i et addisjonsuttrykk endrer ikke verdien av uttrykket, men å endre rekkefølgen på ledd i et subtraksjonsuttrykk gjør det (med mindre verdien til uttrykket er 0) (Schifter, 2018). Et annet eksempel er, si et addisjonsutrykk hvor et ledd øker med en, da vil verdien av utrykket også øke med en. Ved et multipliseringsuttrykk derimot, ved å øke et ledd med en, vil uttrykkets verdi øke med verdien av multiplikator. Fokus på slike strukturer i addisjon-, subtraksjon-, multiplikasjon-, og divisjonsutrykk hjelper elevene å se på operasjonen, ikke bare som en prosess eller algoritme, men heller som et matematisk objekt i seg selv (Schifter, 2018). Når elevene er i stand til å oppdage slike karakteristiske trekk ved det matematiske objektet som er unike for hver enkel operasjon, vil eleven kunne videre gjenkjenne og bruke disse (Schifter, 2018). Struktur innenfor operasjoner inkludere kommutative, assosiative, distributive, inverse og identitetslovene for regneoperasjoner. De inkluderer også strukturer som kan avledes fra disse lovene (Schifter, 2018). Ofte innebærer elevers individuelle løsningsstrategier slike strukturer. F.eks. å løse oppgaven, 15+39. Det viser seg, i følge (Shifter, 2018), at elever overfører 1 til ledd nr. 2 slik at regnestykket blir 14+40, som er lettere å løse. For å hjelpe elevene med å oppdage slike strukturer, nevner også Davis (1964) (ref. i Schifter, 2018), som likhetstegnet, aktiviteter som går ut på at elevene skal avgjøre om et gitt talluttrykk er sant eller usant. Elevene oppfordres til å anvende strukturell tenkning, det vil si å analysere strukturer for å svare på oppgaven (Schifter, 2018).

Elevers evne til å oppdage slike strukturer vil derfor være essensielt i å lære algebra (Schifter, 2018). Dette fordi operasjoner ikke lenger vil ha som hensikt å være en operasjon eller algoritme, men heller være et matematisk abstrakt objekt (Schifter, 2018). I mer avansert matematikk, f.eks. ved læring av serier og rekker, er det helt essensielt å kunne finne strukturer i uttrykk som inkluderer regneoperasjoner, for å kunne både forstå og formulere et uttrykk. Et kjent eksempel er å ved å kombinere første og siste ledd i en serie, og deretter koble alle ledd mot hverandre slik at summen av serien kan formuleres som et uttrykk. Uten en strukturell forståelse vil slike matematiske elementer være utfordrende.

Variasjon i underliggende strukturer i aritmetiske regnereglene, kan synliggjøre strukturen (Kullberg, 2010). Målet er ikke at elevene skal lære seg hva f.eks. begrepet *kommutativ* betyr. Heller at de skal kunne gjenkjenne en slik struktur i uttrykk slik at de kan bruke dette trekket i andre kontekster. Elevers evne til å oppdage slike strukturer er essensielt i å lære algebra (Schifter, 2018). Disse strukturene følger ofte aritmetiske lover. Tabellen under gir en oversikt over aritmetiske lover fra MacDuffee, (2024).

Regel	**Egenskaper**
$x + y = y + x$	kommutativ
$x \bullet y = y \bullet x$	kommutativ
$x + (y + z) = (x + y) + z$	assosiativ
$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$	assosiativ
$x \bullet (y \pm z) = (x \bullet y) \pm (x \bullet z)$	fordeling
$x + 0 = x$	identitet
$x \bullet 1 = x$	identitet
$x + (- x) = 0$	identitet
$x \bullet 0 = 0$	identitet

Tabell 2.1: Aritmetiske regneregler hentet fra MacDuffee, (2024).

2.2.3. Innføring av ukjent/variabel

Studier gjort på elevers syn på variabler har vist at mange elever har utilstrekkelige forestillinger når det kommer til bruk av bokstav-symboler i algebra (Asquit et. al 2007). Misforståelsene fra elvene inkluderer å se variabler som forkortelser eller etiketter isteden for bokstaver som representerer *en mengde* (Asquit et. al 2007). Under arbeid med elevers læring av en variabel, poengterer Rushford (2011) viktigheten med å skille mellom begrepet ubestemte mengder og symbolene som brukes for å representere dem. Altså, hva symbolet er, har ikke alltid noe med konteksten å gjøre. Matematikere bestemte seg for å bruke bokstaver til å representere en ukjent, og lærere har en tendens til å gjøre det samme i undervisning (Molina et al., 2018). Dette har en forvirrende effekt på mange elever (Molina et al., 2018). Det er tilfeller av studier som viser at elever kan finne en en-til-en korrespondanse til tall og hvilket nummer bokstaven har i alfabetet (Brizuela et al. 2015 ref. i Molina et al., 2018). I tillegg, ser elevene en bokstav og fort assosierer det med en betydning ifra noe de leser og skriver (MacGregor og Stacey, 1997 ref. i Molina et al., 2018).

2.3 Variasjonsteori

Variasjonsteori har en dyp filosofisk forankring og kan brukes på alle området som omhandler læring ved hvordan vi oppfatte verden, dette inkluderer også læring av matematiske begreper. Variasjonsteorien går ut ifra at *læring* skjer kun gjennom variasjon (Marton og Booth, 1997). Kognitive teorier anser læring som en dannelse av mentale representasjoner (Marton og Booth, 1997). Til forskjell tolker variasjonsteori læring fra et relasjonelt og perseptuelt (sanselig) perspektiv (Marton og Booth, 1997).

Ference Marton, en svensk forsker, har utviklet et rammeverk for hvordan variasjonsteori kan brukes i læring av matematikk. De underliggende ideene er hentet fra Marton og Booth (1997) og Marton og Tsui (2004). I sine artikler er det tre aspekter som er sentrale i læring ved variasjon, og forklares i de neste delkapitlene. Det første aspektet handler om å se på hva som er *gjort mulig å lære* i en læringssituasjon. Så kommer en filosofisk fordypning av de grunnleggende ideene i forståelsen for læring ved variasjon. Det andre aspektet handler om de *kritiske elementene* ved læringsobjektet som er essensielt for elevers forståelse av konsepter. Siste aspektet er Martons beskrivelse av *fire variasjonsmønster* som skal veilede i eksempeldesign. Altså, eksempler for å få elevene til å bevisstgjøre seg på elementer i læren av matematiske begreper. Det vil si, nødvendige, og ofte utfordrende elementer som er essensielle for å forstå begreper. Ifølge teori, er en forståelse for de nevnte elementene i algebra (forståelse for likhetstegnet, et strukturelt syn på aritmetiske regneregler og innføring av en *ukjent* eller *variabel)* kritiske elementer og essensielt for en dypere forståelse for algebra. Sagt med andre ord, for å kunne bedre mestre algebra.

Guo et al. (2012) har gjort en omfattende litteraturgjennomgang av studier gjort med variasjonsteori. De ser på effekten av variasjon ved å analysere eksempler som fokuserer på likheter og de som fokuserer på forskjeller. I tillegg adresserer studier av Marton og Pang (2013) og Pang og Ling (2012) viktige elementer i variasjonsdesign. Kullberg og

Marton (2024) sin bok illustrerer flere studier gjort med variasjonsteori. Den demonstrerer hvordan variasjonsteori kan være et verktøy for lærere i tilrettelegging av effektiv læring.

Begreper	**Forklaring i Kullberg og Marton, (2024 s.29)**
Læringsobjekt	Læringsobjektet beskriver hva som skal læres. F.eks. innføring i algebra.
Kritiske elementer	Elementer som elever må bevisstgjøre seg på, og som er essensielt og kritisk for å forstå læringsobjektet.
Trekk	Spesifikke trekk og egenskaper av et kritisk element.
Dimensjon av variasjon	Elementet (kritisk eller ikke) som varieres slik at de kommer tilsynet.

Tabell 2.2: Begrepsforklaringer hentet fra Kullberg og Marton, (2024 s.29)

2.3.1 Hva er gjort mulig å lære og hva er ikke mulig å lære

Det første forskningsspørsmålet handler om hvordan designe en undervisningstime som implementerer de teoretisk forutsagte kritiske elementene i en undervisningstime. Ved variasjon innenfor opplevelser og inntrykk, vil forskjellige elementer tydeliggjøres for elever (Marton & Tsui, 2004). Elevene blir sensible for elementene om dimensjonen av variasjon tydeliggjør disse. Variasjon er nødvendig for å oppfatte nye sider ved det som skal læres. En konklusjon fra flere studier (e.g., Bartolini Bussi et al. 2013; Huang and Yeping 2017; Marton 2015; Marton og Pang 2013; Sun 2011; Watson and Mason 2006) viser at måten pensumet håndteres og hvilke elementer som gjøres mulig å oppfatte, påvirker hva som er mulig for elevene å lære. Analyser av «hva som er mulig å lære» fra undervisningstimer vil også gi svar på «hva som ikke er mulig lære» (Kullberg et al. 2017). Observasjoner fra en større studie av lærere som deltok i en 1,5 års utdanning med variasjonsteori, viste at lærere som hadde deltatt på denne studien, var bedre på å gjøre materialet tilgjengelig for elevene. Bruken av variasjonsteori viste at elever hadde større utbytte når det gjaldt å oppfatte ukjent stoff de før ikke var bevisst på (Marton og Pang, 2006). Om elever ikke lærer det som var målet med læring har de ikke klart å bevisstgjøre seg på de riktige elementene.

Å oppdage noe ved å variere gjelder også abstrakte elementer. Forskning på barns måter å løse aritmetiske regneoppgaver viste at, når barn løste enkle additive oppgaver (som 2+3= eller 1+5=.. etc.), kunne de endre strategi fra å starte med første ledd til å starte med leddet med høyest verdi (Carpenter & Moser, 1984 ref. I Marton & Tsui, 2004). Elevene endret altså rekkefølgen i leddene under utregning av en addisjonsoppgave. Da oppdaget eleven at, innenfor addisjon, vil ikke rekkefølgen ha noe å si (Marton og Tsui, 2004). Det trenger nødvendigvis ikke å være slik at jo mer variasjon, jo mer lærer elevene (Marton og Tsui, 2004). Elementene må oppleves med en viss type dimensjon av variasjon (Marton og Tsui, 2004). For eksempel det å løse en oppgave på forskjellige måter krever erfaring med variasjon innenfor løsningsstrategier (Marton og Tsui, 2004).

Et *ord* for eksempel, kan ha *samme* betydning selv om konteksten varierer (Pang og Marton, 2013). De fleste gjenkjenner at et kjøretøy er en bil, selv om de aldri har sett akkurat den type bil før. Dette kan være fordi de har erfart andre biler i samme kontekst. Det samme gjelder alt fra lekebiler til en gammel rustholk som er i ferd med å forvitres av naturen. Begge vil bli gjenkjent som biler, men i en ny kontekst. Til sammenligning nevner Marton og Pang, (2013) at om vi hadde bodd i en verden kun bestående av fargen grønn, ville vi ikke være i stand til å observere det grønne. En kan heller ikke vite hva kinesisk er bare ved å høre språket om en ikke har hørt noe annet språk (Marton og Pang, 2013). Når et barn blir presentert for tre baller med samme størrelse, form og materiale, men varierer i farger. Da er det sannsynlig at fargene opptar barnets oppmerksomhet. Dette fordi det er nettopp dette elementet som varierer (Pang og Ling, 2012).

2.3.2 Variasjonsteori - læring gjennom hvordan vi oppfatte verden

Det finnes utallige teorier på hvordan elever *tilegner seg kunnskap*. I implementering av teoretisk forutsagte kritiske elementer vil den grunnleggende ideen bak læring være til hjelp. Marton og Booth, (1997), gjorde undersøkelser på to grupper av studenter og elever om deres egne erfaringer med læring. Den første gruppa var 29 universitetsstudenter fra England, og den andre gruppa var kinesiske grunnskoleelever, mellom 12 og 18 år. Det syntes å være en sammenheng mellom hvordan disse to gruppene lærte (Marton & Booth, 1997). Denne sammenhengen blir av Marton & Booth, (1997) utdypet fenomenologisk. Nemlig at, læring baserer seg hva vi bevisstgjør oss på i vår opplevelse av verden. For å se noe på en bestemt måte, må personen legge merke til visse trekk ved objektet. Altså, det må gjøres tydelig for bevisstheten, rett og slett oppdages (Marton & Tsui, 2004). Fenomenologien stammer fra et sosiokulturelt syn på læring som nevner at læring skjer på to måter. Først, gjennom sosialt samvær og deretter hvordan det innlemmes inne i den enkelte individs hode (Vygotsky, 1997). Hva folk oppfatter i situasjoner avhenger av flere aspekter, som tidligere erfaring, holdning, mental tilstand etc., som bare er noen få aspekter i en lang liste der det er umulig å nevne alle. Det vil si, det er variasjon i folks måter å oppleve verden på (Marton & Booth, 1997). Det som derimot skiller variasjonsteori fra andre sosiokulturelle kognitive læringsteorier, er at det er ikke de sosiale og kulturelle omgivelsene rundt individet som fabrikkerer læring (Guo og Pang, 2012). Isteden, ser variasjonsteorien på læring som en endring i måten vi ser omverdenen på (Marton og Booth, 1997). Med andre ord, en ny måte å se noe på (Marton og Booth, 1997). Denne mye måten å se noe på, er konstruert mellom individet og fenomenet, og går ut på å legge merke til visse kritiske trekk ved fenomenet (Marton, 1999). Dette er grunnen til at det er vanskelig å finne en "riktig" måte å undervise på, nettopp fordi det finnes ingen *one-size-fits-all*. Denne variasjonen gir et innblikk i hva individer velger å bevisstgjøre seg på i en gitt situasjon (Marton & Booth, 1997). Variasjonen i valg forklarer også hvorfor noen individer lærer bedre enn andre (Marton & Booth, 1997). Et fenomen er nettopp hvordan ting i den virkelige verden viser seg eller fremtres for oss («fenomen,» 2019). Det trenger ikke å være overensstemmende med hvordan tingene *egentlig* er eller *i virkeligheten* er («fenomen,» 2019). Fenomenologien undersøker opplevelsen kun basert på bevisstheten til et individ (Selvi, 2008).

Variasjonsteorien baserer seg, som nevnt, på ideen om at læring *er* en forandring i måten vi ser og opplever verden rundt oss på (Pang og Ling, 2012). Et objekt eller et fenomen har mange sider og elementer, f.eks. former, størrelser, funksjoner osv. (Pang og Ling, 2012). Enhvers oppfatning av et fenomen blir definert etter denne personens oppfatning og hva som, etter denne personens oppfatning, skiller seg fra andre fenomen (Pang og Ling, 2012). To personer kan oppleve samme fenomen, men deres oppfatning fokuserer og oppfatter ubevisst forskjellige elementer ved fenomenet (Pang og Ling, 2012). De vil da oppleve fenomenet på forskjellige måter (Pang og Ling, 2012). Læring er dermed et resultat av forandring i hvilke elementer av fenomenet som blir oppfattet (Pang og Ling, 2012). Når læring har skjedd, klarer derfor personen å oppfatte disse elementene som den ikke var i stand til å oppfatte før, og/eller er denne personen i stand til å oppfatte forholdet mellom disse elementene på en bedre måte (Pang og Ling, 2012). Variasjonsteorien poengterer at variasjon i presentasjonen av fenomen og objekter, vil gjøre elevene i stand til å utvide sin forståelse og oppfatning (Marton og Pang (2006). Dette betyr at de sannsynligvis vil se fremtidige hendelser basert på disse elementene og funksjonen til elementene (Marton & Tsui, 2004). En person vil ubevisst bruke tidligere erfaring til å håndtere nye situasjoner. Evnen til å se elementer i situasjonen i form av hva slags påvirkning dette elementet har i konteksten er essensielt. Marton & Tsui (2004) mener også at det er viktig å kunne legge merke til elementer som kan komme til å ha en essensiell påvirkning i et annet konkret tilfelle. I denne konteksten brukes ordet «element». Som, i denne forskningskonteksten, refereres til alle, inkludert egenskapene, til matematiske posisjoner, symboler, strukturer, visuelle kontekster osv. En elevs evne til å oppdage slike elementer, påvirkes av de variasjonene en elev har møtt tidligere.

2.3.3 Kritiske elementer

Kritiske elementer er elementer ved et matematisk konsept som er nødvendig å forstå for en dypere forståelse (Kullberg og Marton, 2024). For å kunne implementere kritiske elementer i undervisning slik at de blir gjort mulig å lære for elevene, trenger en lærer å vite hva de kritiske elementene er og ha tilstrekkelig kunnskap om de. Elementene som er kritiske for læring er de ofte utfordrende, men nødvendige elementene for å kunne forstå konseptet (Kullberg og Marton (2024). Variasjonene innenfor slike elementer gjør at elevene bygger erfaringer og får en bredere og dypere forståelse for begrepet (Marton & Booth, 1997). For å være i stand til å bevisstgjøre oss på et element i den gitte konteksten må elementet ha en *verdi/funksjon* (Marton & Booth, 1997). Dette kan en lærer fremkalle ved eksemplene han/hun velger å presentere elevene for i undervisning.

Variasjonsteori er orientert slik at fokuset ligger på *innholdet*, altså «hva som oppleves og hvordan det oppleves» (Marton og Booth, 1997). Det som skal oppleves, det vil si tiltenkt læringsobjekt, referer til en bestemt måte å se noe på. Det kan også gjelde en bestemt ferdighet som skal utvikles hos elever i undervisning (Marton og Pang, 2006). Ifølge variasjonsteori blir trekk og elementer ved et fenomen og eksempler på fenomenet analysert som kritisk eller ukritisk for elvers forståelse og læring. Kritiske trekk er trekk som kan ved misoppfatninger eller ubevissthet, forårsaker vanskeligheter for elever i læringsprosessen. Ifølge Marton og Pang (2008), bør elevers allerede kunnskap om læringsobjektet tas i betraktning når de identifiserer de kritiske elementene ved læringsobjektet.

Begrep	Beskrivelse i Kullberg og Marton (2024)
Brukt samtidig	Opplevelsen av noe (fenomen, konsept, trekk e.l.) samtidig som et annet.
Tiltenkt læringsobjekt	Forklarer læringsmålet for undervisning.
Gjort mulig å lære	Forklarer hva som er gjort mulig å lære i undervisning, analysert fra et lærer/forsker-perspektiv.
Faktisk lært	Forklarer den kunnskapen elevene har tilegnet seg/de kritiske elementene de har bevisstgjort seg på.

Tabell 2.3: Begrepsforklaringer hentet fra Kullberg og Marton, (2024, s.29)

2.3.4 Variasjonsmønstre

I prosessen med å gjøre kritiske elementer mulig å lære i undervisning har Marton & Tsui (2004) identifisert variasjonsmønster som kan fremkalle læring. Variasjon skal gjøre det mulig å skille mellom elementer, altså ikke bare ubevisst akkumulere matematiske eksempler (Kullberg et al., 2017). Nøkkelen for å forstå hva variasjonsteorien handler om er nettopp å variere fremstillingene av begreper på en slik måte at elevene klarer å oppfatte og å bli bevisst på elementene ved begrepet (Kullberg et al., 2017). For at elevene skal kunne oppfatte sentrale elementer ved tema må eleven også bli presentert for variasjonen innenfor begrepet slik at disse elementene kommer til synet (Kullberg et al., 2017). For å kunne oppfatte bestemte trekk, må eleven oppleve variasjon i den dimensjonen (Guo og Pang, 2012). Mønster av variasjon i eksempler kan struktureres på en måte som får elevene til å oppfatte disse sentrale elementene (Kullberg et al., 2017). Når vi ser nærmere på hva som er mulig å lære i undervisning, koker det ned til mønster av variasjon ved illustrasjoner og samtaler mellom lærere og elever (Kullberg et al., 2017). Når læreren blir klar over hvilke elementer slike mønster av variasjon kan fremkalle av bevissthet hos elevene, vil det kunne ha et større potensiale for læring (Kullberg et al., 2017). Lærerens plan på hva elevene skal lære trenger ikke reflektere hva elevene faktisk har lært. Derfor er det viktig for en lærer å være bevisst på hvilke elementer elevene forstår betydningen av. Det er blitt konkludert flere ganger at det har en fordel å bruke flere eksempler isteden for bare ett (Kullberg et al., 2017). Henholdsvis, to eksempler er bedre enn ett, og at to eksempler presentert sammen er bedre en to eksempler presentert separat (Rittle-Johnson and Star 2009, p. 529 ref. I Kullberg et al., 2017). I kontekst for variasjonsteorietiske prinsipper vil da spørsmålet handle om hva slags type variasjon som er mest hensiktsmessig for at eleven skal kunne ha størst læringsutbytte (Kullberg et al., 2017). Når eksempler sammenlignes, vil elevenes evne til å lære påvirkes av deres tidligere erfaringer (Rittle-Johnson et al., 2009, ref. I Kullberg et al., 2017). I tillegg skriver Watsen og Mason (2006) ref. I Kullberg et al. (2017), at klokt planlagte oppgaver, som klart viser variasjon, har større læringspotensial sammenlignet med ustrukturerte. I en relativt lignende studie gjort av Pillay (2013) ref. I Kullberg et al. (2017) fant de at ved å presentere en funksjon, for deretter å presentere en annen av ulik karakter hadde mindre læringsutbytte for elevene, sammenlignet med eksempler av funksjoner som ble diskutert samtidig. De fant dermed ut, at ved å presentere to typer funksjoner samtidig førte til at elevene oppdaget de sentrale elementene i hver type funksjon (Kullberg et al., 2017).

I variasjonsmønster er det nødvendig å være oppmerksom på hva som varierer og hva som holdes konstant for å kunne forstå hva som er *mulig å lære*. Variasjonsmønstrene har til hensikt å veilede i forming av eksempler slik at elevene blir bevisst på, oppfatter, eller skiller ut elementene som er kritiske for læring. Marton & Kullberg (2024) beskriver tre ulike variasjonsmønstre; kontrast, generalisering og slå sammen (fusjon). Kontrast og generalisering kategoriseres som separasjon, fordi det handler om å håndtere ett enkelt element av gangen.

Marton’s teoretiske konstruksjon		**Forklaringer i Martons verker**
	Kontrast For å oppleve noe, må en person oppleve noe annet å sammenligne det med. Kontrast oppstår når en elev opplever variasjon av ulike verdier eller funksjoner i et element av et fenomen. I kontrast varierer det kritiske elementet, mens andre elementer holdes invariant.	Når du lærer om rødt, kontrasterer en rødt med andre farger (f.eks. blått, grønt), og når du lærer den geometriske formen trekanten, kontrasterer de forskjellige geometriske formene (f.eks. sirkel og firkant) (Marton og Kullberg, 2024, s.27).

<table>
<tr><td>Separasjon

Separasjon handler om at ett enkelt element håndteres av gangen. Dette gjøres gjennom kontrast eller generalisering.</td><td>Generalisere

Generalisering oppstår når en elev ønsker å bruke sine tidligere erfaringer i ulike kontekster. For å forstå et læringsobjekt fullt ut, må eleven oppleve mange forskjellige eksempler for å generalisere begrepet. I en generalisering holdes det kritiske elementet invariant, mens andre elementer varierer.</td><td>For å bruke de samme eksemplene som med kontrast ovenfor vil det f.eks. innebære å vise mange røde objekter for å se «rødheten» til rødt i flere ting (rød kjole, rød lue, rød kopp), eller peke på typer trekanter (f.eks. likesidet, likebente, skalerte) for å vise likhetene til trekanter (Marton og Kullberg, 2024, s.27).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Slå sammen/fusjon

Hvis det er flere kritiske aspekter som eleven må ta i betraktning samtidig, må de alle oppleves samtidig. I hverdagen er det sjelden at bare ett aspekt av noe varierer om gangen, i tillegg til den enklestes reaksjonsmønster i en gitt situasjon.</td><td>For eksempel, hvis en lærer ønsker å lære elevene hva en rødstrupe er, bør han/hun utsette elevene for samtidig variasjon i alle kritiske elementer ved en rødstrupe (f.eks. fjær, størrelse og lyd). Elevene vil forstå et konsept hvis de samtidig kan bevisstgjøre seg på alle kritiske elementer ved konseptet (Marton og Tsui, 2004, s. 16).</td></tr>
</table>

Tabell 2.4: Oversikt over variasjonsmønster hentet fra Marton og Kullberg, (2024, s.27).

Forskere (Ki 2007; Marton og Tsui 2004; Pang 2002 ref. i Guo og Pang, 2012) har foreslått at *separasjon* bør brukes først, for å hjelpe elevene med å bevisstgjøre seg på hvert kritiske element separat. Deretter å *slå sammen* som variasjon av flere kritiske elementer samtidig. For eksempel i en sann/usann oppgave om forståelse for struktur i et uttrykk, kan 3 + 7 = 7 +3 bevisstgjøre elever på kommutativitet, ved å *separere* hver side av likhetstegnet. Uttrykket 4 • (5 + 3) = 4 • 3 + 4 • 5, kan gjøre elevene bevisst på at en multiplikator må multipliseres med alle ledd i parentesen, kalt fordeling. Deretter foreslår Ki (2007); Marton og Tsui, (2004); Pang (2002) (ref. i Guo og Pang, 2012) å *fusjonere* kritiske elementer som varierer samtidig. Et eksempel på kritiske elementene slått sammen kan se slik ut; 24 • (9 + 3) = 24 • 3 + 24 • 9. Her er kommutativitet og fordeling elementer som er nødvendig for å se strukturen i uttrykket. *Generalisering* kan brukes for at elevene skal kunne bruke elementene i andre kontekster. Studier viser at et uheldig utfall ved variasjon kan skje når det brukes eksempler fra ulike kontekster. Da kan elevene betrakte ulike situasjonen som separat og uavhengig. En mer effektiv metode er å variere kritiske elementer innenfor samme kontekst (Pang, 2000 ref. i Guo og Pang, 2012). Å holde konteksten konstant hjelper elevene med å rette sitt fokus på de varierende elementene, som skal oppfattes.

Guo og Pang (2011) fant i sin studie en effekt i samhandling mellom kunnskapen elevene sitter med fra tidligere og mønster av variasjon og invariant. Ut ifra deres funn konkluderte de med at (a) en burde først nøye planlegge variasjon i eksempler som får elevene til å bevisstgjøre seg på de kritiske elementer av det tiltenkte læringsobjektet, (b) deretter slå sammen disse kritiske elementene i eksempler slik at de presenteres samtidig, og (c) elever på forskjellig mestringsnivåer vil få forskjellig utbytte av eksemplene og derfor ha en forskjellig effekt av de samme eksemplene (Guo og Pang, 2012). Tradisjonelle studier på variasjonsteori som inkluderer tavleundervisning fokuserer oftest på å identifisere hvilke kritiske elementer som gjelder hele klassen (Guo og Pang, 2012). Dette fordi tavleundervisning foran hele klassen er den vanligste praktiserte formen for undervisning. Siden elever vil ha forskjellig utbytte av de samme eksemplene, er det derfor viktig at læreren skaffer informasjon på elevers kompetanse slik at han/hun også kan tilpasse eksempler individuelt (Guo og Pang (2012).

Hvor stor variasjon eksempler bør ha, bør også tas i betraktning i design av eksempler. Sweller (2010) ref. i Guo og Pang (2012) mener eksempler som har stor variasjon, altså med flere elementer involvert, har en større kognitiv belastning på elevene. Hvis f.eks. representasjonene forblir de samme (som å kun holde seg til matematiske uttrykk) vil det øke tilgjengelige arbeidsminne for å kun trenge å konsentrere seg om matematiske elementenes egenskaper. Utbyttet av eksempler med stor variasjon, f.eks. stor variasjon i representasjon og kontekst, vil ha en reversert effekt når elevens arbeidsminne er overbelastet (Sweller et al. (1998). Hvis variasjon ikke tas i betraktning ved utforming av eksempler, kan elevene ha problemer med å finne likheter (Guo og Pang, 2012). Det vil si, Guo og Pang (2012) nevner at når eksempler ble gitt med for mye variasjon, var det vanskelig for å elevene å finne likheter. Det samme gjaldt hvis eksempler ble gitt med for lite variasjon, da oppdaget elevene irrelevant likhet (Guo og Pang, 2012). For å kunne lære et matematisk begrep ordentlig, er det anbefalt å velge eksempler basert på kritiske elementer, og gjennom de fire variasjonsmønstrene (Guo og Pang, 2012). Hovedbegreper i variasjonsteori er presentert og oversatt til norsk fra Marton og Kullberg, (2024) i følgende tabell:

	Forklart i Kullberg og Marton, 2024
Variasjonsmønster	Variasjonsmønstrene er kontrast, generalisering og slå sammen (fusjon).
Separasjon	Når ett enkelt kritiske element varieres av gangen. Dette gjøres gjennom kontrast og generalisering.
Kontrast	Ett kritiske element varieres, mens andre holdes invariant.
Generalisering	Det kritiske elementet holdes invariant, mens andre elementer varieres.
Slå sammen/fusjon	Flere kritiske elementer varieres samtidig, for å se hvordan de fungerer sammen.

Tabell 2.5: Begrepsforklaringer, hentet fra Kullberg og Marton, (2024, s.29).

2.4 Learning Study

2.4.1 Bruk av variasjonsteori i Learning Study

Studien baseres på metoden Learning Study. Den gir retningslinjer i implementering av de teoretisk forutnevnte kritiske elementene i undervisning, og se hvilke kritiske elementer som observeres i undervisning, basert på kommunikasjonen. Et element ved Learning Study er fokus på læringsobjektet. Begrunnelsen for pedagogiske valg skal være drevet av læringsobjektet (Pang og Marton, 2013). Læreren jobber mot å identifisere effektive måter å hjelpe elevene med å forstå konseptene gjennom undervisning (Pang og Marton, 2013). I lærerens arbeid med å identifisere effektive måter å undervise på, er variasjonsteoretisk tilnærming en ofte brukt læringsteori i Learning Study. Hvert matematiske begrep består av forskjellige komponenter og elementer som noen elever (ennå) ikke har mestret (Pang og Marton, 2013). Mårtensson (2019 ref. i Pang og Runesson, 2019) rapporterte hvordan lærere i en Learning Study klarte å identifisere elevenes vanskeligheter ved å identifisere hva disse kritiske elementene var. Mårtensson (2019 ref. i Pang og Runesson, 2019) viste at etter hvert som lærerne systematisk reflekterte over og testet ulike måter å håndtere innholdet, dukket det opp ny kunnskap om hva de kritiske elementene faktisk var (Pang og Runesson, 2019). De fleste variasjonsteorietiske utprøvninger er blitt gjort med Learning Study (Marton og Pang, 2013). Sentralt i Learning Study er da å bruke variasjonsteorietiske prinsipper konsekvent gjennom undervisningstimen (Marton og Pang, 2013). Når kritiske elementer er identifisert, er neste steg å designe undervisningen slik at disse elementene synliggjøres for elevene. Da planlegges oppgaver og aktiviteter med variasjonsmønster som har hensikt å bevisstgjøre elevene på elementers trekk.

Pang og Ling (2012) beskriver to relevante elementer Learning Study.

Konseptuelt rammeverk for Learning Study (Pang og Ling 2012, s. 592)	
Fokuser på læringsobjektet.	Dette betyr å identifisere hva som er viktig å lære og identifisere kritiske elementer, for at elevene skal forstå læringsobjektet
Bruke variasjon i hver del av prosessen	Dette, for å hjelpe lærere å bli oppmerksom på de ulike elementene av variasjonsteori. Ulike variasjonsmønster brukes.

Tabell 2.6: Konseptuelt rammeverk for Learning Study. (Pang og Ling, 2012, s.592)

2.4.2 Analysering av datamaterialet

Learning Study er til for å studere og reflektere over hvordan undervisning gjennomføres i klasserommet i forhold til elevenes læringsutbytte. Learning Study tilfører en *linse* for å observere, analysere og evaluere undervisningstimen, og et felles språk for å diskutere og dele deres forståelse av undervisningen (Pang, 2006). Denne teori-baserte forskningen utforsker elevenes måter å forstå og tilnærme seg pensum på (Marton og Pang, 2013). Et sentralt trekk ved Learning Study er å ta hensyn til variasjoner i elevenes forståelse av læringsobjektet. Studien til Ko (2019) ref. i Pang og Runesson (2019) nevner at lærerens vurderingspraksis endret seg etter en Learning Study. Læreres vurderingspraksis gikk fra å vurdere elevene i karakterform til å vurdere med en baktanke å forbedre læring. I tillegg endret lærerne undervisningsmetodene slik at de ble elevsentrerte (Ko, 2019 ref. i Pang og Runesson, 2019). Analyseprosessen av Learning Study baserer seg på 3 sentrale spørsmål (Pang og Ling, 2012);

1. Hva er læringsmålet?
2. Hva er gjort mulig å lære?
3. Hva har elevene faktisk lært?

Pang & Ling (2012) mener at gjennom disse tre spørsmålene vil en kunne finne sammenheng mellom undervisningen og forståelsen hos elevene, slik at informasjonen senere kan bli brukt i undervisningsplanlegging og generalisering av praksis (Pang & Ling, 2012). Dette er knyttet opp mot Kullberg et al. (2017) teori på hva som er gjort mulig å lære ved variasjon i undervisning. Metoden brukes for å svare på det andre forskningsspørsmålet, om hvilke elementer som blir synliggjort i undervisning og derfor gjort mulig å lære.

Det som er distinkt når en bruker Learning Study som metode er at problemstillingen nesten utelukkende går ut på «hvordan kan X undervises slik at elevene lærer X?» (Pang & Ling, 2012). Hver Learning Study seanse har derfor et spesifikt læringsmål, X. Hvor snevert innholdet i «X» er, kan også variere fra et større begrep/tema til spesifikke elementer innenfor temaet (Pang & Ling, 2012).

Målet med å analysere ut ifra variasjonsteorietisk perspektiv er ikke bare å reflektere over hva som er hensikten med undervisning og hva vi tror skjer. Heller, hva som faktisk skjedde og konkret hva elevene lærte (Kullberg og Marton, 2024). Fokuset er derfor på hva som foregikk i undervisningen og dermed hva som ble gjort mulig å lære om emnet (Kullberg &

Marton, 2024). Hva som faktisk skjedde i klasserommet baserer seg på hva læreren gjorde og elevenes interaksjoner (Kullberg og Marton, 2024). Mer spesifikt, elevenes kommunikasjon med hverandre og læreren, samt fagstoffet og deres bidrag i den kollektive dynamikken (Kullberg og Marton, 2024). Den kollektive dynamikken og fokuset i klasserommet skal også ses på i lys av læringsutfallet. Dette skal analyseres som en helhet (Kullberg og Marton, 2024).

Kapittel 3 Metode

3.1 Learning Study

Med metoden Learning Study ble et undervisningsopplegg designet, og deretter vurdert effekten av den (Pang og Ling, 2012). Dette fører til utvikling av egen ferdighet, og samtidig tilegne seg kunnskap som andre også kan dra nytte av (Pang & Ling, 2012). Learning Study bruker konsekvent en spesifikk læringsteori som gir en praktisk tilnærming (Pang og Ling, 2012). Rammeverket til metoden Learning Study følger visse trinn, hvor hver time planlegges, gjennomføres og revideres, for så å kunne gjøre prosessen igjen. Første forskningsspørsmål besvares gjennom disse Learning Study pinsippene, sammen med bruk av variasjonsteori hentet fra (Kullberg og Marton, 2024):

Prinsipper	**Prinsippets underliggende spørsmål**
1. Definere læringsobjektet	Hva skal elevene lære? Hva skal til for å lære dette? Hvilken forståelse og kunnskap sitter elevene med?
2. Utforkning av elevers allerede kunnskap.	Hva kan elevene fra tidligere?
3. Identifisere kritiske elementer.	Hva er avgjørende for å lære den tiltenkte kunnskapen? (Ofte basert på elevers tidligere kunnskap)
4. Designe undervisning som skal synliggjøre kritiske elementer.	Hvordan synligjøres kritiske elementene for elevene i undervisning med bruk av variasjonsmønster?

	Velge/designe aktiviteter som kan brukes til å belyse de kritiske

Tabell 3.1: Prinsipper i Learning Study (Kullberg og Marton, 2024).

Identifiseringen av de kritiske elementene innenfor læringsobjektet er basert på forskning. Og elevers tidligere kunnskap baseres på lærerplanen for tidligere trinn. Oppgavene i undervisningen er designet på bakgrunn av variasjonsmønster som skal synliggjøre de kritiske elementene. Her er ett eksempel i en sann/usann oppgave:

Oppgave	Kritisk element	Variasjon
Sann eller usann? 7 + 3 = 3 + 7 6 + 5 = 5 + 7	Strukturelt syn på aritmetisk regneregler; kommutativ egenskap	*Kontrast* Ser hva kommutativ er og et eksempel på hva det ikke er. Variasjon av det kritiske elementet. *Generalisering* Posisjonen til ledd i et addisjonsuttrykk er ubetydelig. Ukritiske elementer, som verdien til tall, er variert.

Tabell 3.2: Eksempel på datamaterialet; utforming av undervisningstime.

Det andre forskningsspørsmålet handler om hvordan elevene erfarte undervisningen; *Hvilke kritiske elementer observeres i algebraundervisning, basert på elevers formuleringer og en påfølgende test etter timen, ved bruk av Learning Study.*

De teoretiske prinsippene som skal besvare det andre forskningsspørsmålet baseres på Learning Study prinsipp om *hva som er gjort mulig å lære og hva elevene faktisk har lært.* Variasjonen i elevsvar gir mulighet til å oppfatte trekk som stammer fra elevenes ulike måter å oppleve elementene på (Marton og Kullberg, 2024). For å finne ut hva som er gjort mulig å lære ble kommunikasjonen i klasserommet analysert. Hvilke og hvordan kritiske

elementer ble forklart i klasserommet. En prøve ble gitt etter endt undervisning og gir referanse til hva som ble mulig å lære i undervisning.
De kritiske elementene som elevene testes i prøven er følgende:

Oppgave	**Kritiske elementer**
(15 + 2) • 5 = 15 + 2 • 5	Prioriteringsregel eller fordeling, likhetstegnet
3 • 3 + 3 + 3 + 3 = 3^2 + 9	Potens og multiplikativitet, likhetstegnet
-2 + (- 2) – (- 4) = 0	Regning med negative tall, likhetstegnet
2 • ⊡ = 4 • 15	Symbol for ukjent, dobling/halvering, likhetstegnet
9 = y • y	Symbol for ukjent, potens, multiplikasjon
9 = x + x +x	Symbol for ukjent, multiplikatvitet
(7 + 3)*m* = 7 + 3	Symbol for ukjent, fordeling, identitet (x • 1 = x)

Tabell 3.3: Oversikt over kritiske elementer i prøve-oppgavene.

3.2 Feltstudie

Feltstudien er gjort på en norsk 8.klasse med 35 elever. Elevene var fordelt på 3 klasser i separate skoletimer med samme læringsobjekt. En og samme lærer underviste alle tre skoletimene på 45 min. Jeg var til stede som observatør. Alle elevene har tidligere fulgt samme undervisning gjennom hele året. Elevene er tilfeldig fordelt i de tre klassene. En naturlig variasjon forekom i klassene. Basert på studiens deltakere, tas det utgangspunkt i at elevene er et gjennomsnittlig utvalg. Utgangspunktet er at klassene har en lik fordeling i mestringsnivåer i møtet med algebra. Jeg og lærer hadde to møter på forhånd der vi gikk igjennom de variasjonsteoretiske prinsippene og hvordan utføre undervisningstimen basert på Learning Study. Temaet for undervisningstimen var innføring i algebra. Det ble gjort detaljerte notater av kommunikasjonen i klasserommet. Etter undervisningstimen gjorde elevene en prøve.

Det første steget i en Learning Study er å velge ut et læringsobjekt som elevene forventes å utvikle. Hovedfokuset i en Learning Study er å finne ut hvordan elever kan hjelpes slik at de tilegner seg tilstrekkelig kunnskap om læringsobjektet (Pang og Runesson, 2019). I en tradisjonell Learning Study samarbeider lærere først med planlegging av timen. Etter at læringsobjektet er definert, skal de kritiske elementene ved læringsobjektet identifiseres. I utformingen av timen, bruker da lærere systematisk og bevisst kun variasjonsteori (ref.

Marton og Booth, 1997; Marton og Tsui, 2004; Marton og Pang, 2006) til veiledning. De bruker dette rammeverket i identifisering og håndtering av kritiske elementer som skal varieres og hva som skal forbli invariant (Pang og Runesson, 2019). I denne studien vil ikke fokuset være på lærerutvikling og samarbeid, men utelukkende se på hvilken effekt undervisningen har på elevers læring. Fortsettelsen på prinsippene som brukes i studien fortsetter fra Tabell 3.1 slik:

Oversikt over prosessen til feltstudien (Kullberg og Marton, 2024)
4. Gjennomføre undervisning
5. Finn ut hva elevene har lært (gjennomfør en posttest eller intervju).
6. Analyser elevens læring i forhold til hvordan læringsobjektet ble utformet i timen og identifiser kritiske elementer. Revider leksjonen. Hva er gjort mulig å lære /hva er ikke gjort mulig å lære.
7. Oppsummer de identifiserte kritiske elementene, undervisningsaktivitetene og variasjonsmønstrene. Presenter og diskuter funnene.

Tabell 3.4: Oversikt over prosessen til feltstudien

Learning Study kan gjøres som en iterativ prosess og vil kunne gjøres i flere runder.

3.3 Metode for analyse

Learning Study spesifiserer prinsipper for å analysere undervisningen for å finne ut hvilke kritiske elementer elevene er bevisste på. I analysen av undervisningsdesignet vil valg i prosessen med å utvikle undervisningen forklares ut ifra variasjonsmønster. Analysen av undervisningstimen vil, sammen med bruken av variasjonsteori, analysere hva som er mulig å lære i løpet av timen. Hva som er gjort mulig å lære vil ses gjennom hvilke kritiske elementer som blir synliggjort ut ifra kommunikasjonen i klasserommet. Dette ut ifra en analyse av hvilke trekk ved innholdet som synliggjøres av dimensjoner av variasjon i undervisningen. Ved å se på hva som er gjort mulig å lære, gir også potensiale til å svare på hva som ikke er gjort mulig å lære. Analysen av resultatet skal ha som fokus å kun se på hvilke elementer som ble nevnt, ikke på hva hver enkeltelev bevisstgjorde seg på og heller ikke hva de lærte. I lys av Learning Study vil analysen gi en pekepinn potensiale for hva elevene kan lære. Prøven elevene tok etter undervisning vil refereres til når observert kritiske elementer identifiseres.

3.4 Etikk og validitet

Denne studien foretar ingen behandling av personopplysninger som kan identifiseres tilbake til forskningens deltakere, derfor vil ikke søknad til SIKT være nødvendig.

I denne studien er det essensielt å skape sammenheng mellom det teoretiske rammeverket, forskningsspørsmål og dataanalyse, noe som krever nøyaktige revideringer og innsats. Mitt måle med arbeidet er å ha en så vitenskapelig orientert masteroppgave som mulig, uten subjektive tanker eller ideer. Det er viktig at datainnsamlingen og prosessen med dataanalysen er så transparent og konkret som mulig. For at fremtidige masterstudenter eller andre, i ettertid kan gjenta forskningsmetodene for å sammenligne studiet med denne.

Kapittel 4 Resultat

4.1 Implementasjon av kritiske elementer i undervisningsdesign

Siden norske elever presterer relativt svakt på internasjonale tester i algebra (Jansen, 2023), er læringsobjektet definert som innføring i algebra. De identifiserte kritiske elementer er basert på teoretiske forutnevnte elementer som elever på generell basis har problemer med. De valgte kritiske elementene inkluderer, ifølge lærerplanen (ref. Udir), elementer og begreper som elevene tidligere skal ha lært. Det vil si, aritmetiske regneregler (med eller uten en strukturell forståelse) og likhetstegnet (selv om det dreier seg om en operasjonell tilnærming). Bruken av ukjent er det eneste som vil være *et nytt element* for elevene.

I undervisningsdesignet blir fusjon brukt som variasjonsmønster på oppgaver med flere kritiske elementer der elever forventes å ha en forkunnskap. Som likhetstegnet og struktur ved aritmetisk regneregel samtidig. Oppgavene er designet med en gjennomføringsplan som går ut på at elevene blir bedt om å løse oppgavene uten å *regne ut* svaret. Dette for at de kritiske elementene skal komme fram gjennom kommunikasjonen i klasserommet, slik at de synliggjøres for klassen. I undervisningsdesignet er også to uttrykk presentert samtidig, for at elevene skal kunne skille elementene fra hverandre. I noen oppgaver er også tall med høy verdi brukt, for at elevene ikke skal fristes til å regne ut svaret, men heller finne svaret ut ifra struktur.

Undervisningsdesignet er delt inn i to ulike deler. Den første delen inneholder *sann/usann*-oppgaver, der elevene skal avgjøre om uttrykkene som presenteres er *sanne* eller *usanne*. Den andre delen inneholder symbol for ukjent, og går ut på at elevene skal bytte ut symbolet med et heltall slik at uttrykket stemmer. Oppgavene som inkluderer symbol for ukjent vil også inkludere kritiske elementer fra sann/usann-oppgavene for å tilføre variasjon ved generalisering. Variasjon ved generalisering, ved at det kritiske elementet holdes invariant mellom oppgavene, mens andre elementer varierer. Selv om generalisering går under kategorien separasjon, som i prinsippet handler om at kun ett kritisk element skal synliggjøres av gangen, er det tatt tilfølge at de aritmetiske regnereglene er noe elevene skal ha lært fra tidligere. Undervisningsdesignet er satt opp i en tabell. Hvilken dimensjon av variasjoner og kritiske elementer er plassert i midterste kolonne. Hvilket variasjonsmønster som er brukt er forklart for hver oppgave/oppgavepar og plassert i høyre kolonne. Eksemplene brukt i undervisning står i høyre kolonne. Del en og to kommer i nevnt rekkefølge nedenfor.

Del en:

Eksempler brukt i undervisning Elevene skal avgjøre om uttrykket er *sant* eller *usant.*	**Dimensjon av variasjon/ synliggjøring av hvilket kritiske element**	**Variasjonsmønster** *Kontrast, generalisering og fusjon*
3 + 7 = 7 + 3 *(sant)* 6 + 5 = 5 + 7 *(usant)*	Struktur av aritmetiske regneregler; kommutativ Struktur iht. likhetstegnet	Kontrast: Ser hva kommutativ er og hvor det ikke er tilfelle. Generalisere: I de to stykkene kan den kommutative strukturen oppfattes. Posisjonen til ledd i en

		addisjonsoppgave er ubetydelig.
10 – 3 = 11 - 4 *(sant)*	Struktur iht. likhetstegnet; det som trekkes fra er en mindre på venstre og en mer på høyre.	Kontrast; se sammenhengen på hver side av likhetstegnet
20 - (- 9) = 29 *(sant)* - 9 - (- 9) = 9 *(usant)*	Subtraksjon av negative tall/aritmetiske regneregler	Kontrast: utgangspunktet varier ved at minuenden er et negativt tall vs. positivt tall (om dette er et element som ikke er bevisstgjort enda) Generalisering: Det første leddet behandles som et utgangspunkt i subtraksjonsuttrykk. Det blir et kritiske element ved struktur til uttrykket.
4 • 15 = 2 • 30 *(sant)*	Struktur iht. likhetstegnet og i aritmetisk regneregler; dobling/halvering	Kontrast: variasjon i struktur. Sammenheng mellom faktorer i et multiplikasjonsuttrykk. Dobling og halvering synliggjøres i det andre uttrykket.
(14 + 3) • 2 = 14 + 3 • 2 *(usant)* 4 • (5 + 3) = 4 • 5 + 4 • 3 *(sant)*	Struktur iht. likhetstegnet og aritmetisk regneregel; prioriteringsregler og/eller fordeling (multiplisere ut).	Kontrast mellom uttrykkene: fordeling (a(x+y)=ax+ay) vs. hvordan det ikke ser ut. Det finnes også kontrast ved bruk av prioriteringsregel. Kontrast: bruke fordeling eller prioriteringsregel. Mest sannsynlig påvirker hva som

		står på høyre side av likhetstegnet hvilket element som elevene velger å fokusere på. Fusjon; se forbi prioriteringsregelen for å heller se etter strukturen. Se forskjellen på sidene av likhetstegnet. Se sammenheng med valg av strategi ved både prioriteringsregel og fordeling.
$4 + 4 + 4 + 4 = 4^4$ *(usant)* $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \bullet 4$ *(sant)*	Struktur i aritmetiske regneregler; forskjell og sammenheng mellom multiplikativitet og potens.	Kontrast: potens vs. multiplikativitet. Elementet multiplikativitet er variert. Generalisering: Elevene kan her se hva som istedenfor 4^4 eller 4 + 4 + 4 + 4 kan byttes ut med for at uttrykket skal være sant. Da bruker de elementer de har gjort seg bevisst på i annet uttrykk.

Tabell 4.1: Del en av undervisningsdesign

Del to:

Eksempler fra undervisning	**Dimensjon av variasjon/ synliggjøring av hvilket kritiske element**	**Variasjonsmønster** *Kontrast, generalisering og fusjon*

Elevene skal finne ut hva symbolet må være for at uttrykket blir sant?		
27 + 76 = ⊡ + 27 *(svar: 76)* 17 • n = 93 • 17 *(svar: 93)*	Struktur av aritmetiske regneregler; kommutativ Struktur iht. likhetstegnet. Variasjon av variabel.	Generalisering; posisjonen til både ledd og faktorer i addisjon- og multiplikasjonsoppgave er ubetydelig. Også verdien til tall er ubetydelig. Fusjon: I tillegg variere bruken av symbol fra forrige uttrykk.
11 – 3 = x – 4 *(svar: 12)*	Struktur (en mindre på venstre og en mer på høyre) Struktur iht. likhetstegnet. Variasjon av variabel.	Kontrast; se sammenhengen på hver side av likhetstegnet. Generalisering: bruke strategi fra tidligere oppgaver i nytt eksempel. Fusjon: I tillegg variere bruken av symbol fra forrige uttrykk.
20 – Δ = 29 *(svar: -9)* -m - (-9) = 9 *(svar: 0)*	Subtraksjon av negative tall/aritmetiske regneregler. Struktur iht. likhetstegnet. Variasjon av variabel.	Kontrast: utgangspunktet varier ved at minuenden er et negativt tall vs. positivt tall (om dette er et element som ikke er bevisstgjort enda) Generalisering: Det første leddet behandles som et utgangspunkt i subtraksjonsuttrykk. Det blir

		et kritiske element ved struktur iht. likhetstegnet. Fusjon: I tillegg variere bruken av symbol fra forrige uttrykk.
4 = ½ • v *(svar: 8)*	Struktur: dobling/halvering med brøk. Struktur iht. likhetstegnet. Variasjon av variabel.	Kontrast: en annen form for struktur ved dobling/halvering Generalisering: Struktur ved dobling og halvering brukt i annet uttrykk. Fusjon: I tillegg variere bruken av symbol fra forrige uttrykk.
x • 50 = 8 • 25(*svar: 4)*	Struktur iht. likhetstegnet og i aritmetisk regneregler; dobling/halvering. Variasjon av variabel.	Kontrast: variasjon i struktur. Sammenheng mellom faktorer i et multiplikasjonsuttrykk. Dobling og halvering. Generalisering: bruke strategi fra tidligere oppgaver i nytt eksempel Fusjon: I tillegg variere bruken av symbol fra forrige uttrykk.
(7 + 3)p = 14 + 6 *(svar: 2)*	Struktur av aritmetiske regneregler; fordelingsregel og/eller	Genralisering: bruke fordelingsregelen i et nytt uttrykk.

	dobling, regne ut parentesen. Struktur iht. likhetstegnet. Variasjon av variabel.	Kontrast: ved at det ikke skrives som (7p + 3p). Det kritiske elementet varierer. Om ikke elevene har bevisstgjort seg på strukturen forårsaket av fordeling, vil potensielt prioriteringsregelen brukes. Fusjon: I tillegg variere bruken av symbol fra forrige uttrykk.
16 = y • y *(svar: 4)*	Potens og/eller multiplikativitet. Struktur iht. likhetstegnet. Variasjon av variabel.	Generalisering; bruke strategi fra tidligere oppgaver i nytt eksempel Fusjon: I tillegg variere bruken av symbol fra forrige uttrykk.

Tabell 4.2: Del to av undervisningsdesign

Både variasjon ved generalisering (holde det kritiske elementene invariant, mens det andre varierer) og variasjon ved kontrast (variere det kritiske elementet, holde andre invariant) kan begge identifiseres i de inkluderte uttrykkene selv om oppgaven inneholder flere kritiske elementer.

4.2 Kritiske elementer observert i undervisning

Her kommer en total oversikt over hvordan de kritiske elementer fra undervisningsdesignet, synliggjøres i kommunikasjon i klasserommet. Alle elevsvar vil referees til som "Elev". Dette fordi forskningsspørsmålet handler om å identifisere kritiske elementer generelt. De planlagte oppgave diskuteres i timen. Elevenes og lærerens forklaringer er samlet under hvert enkelt kritiske element, derfor kommer de ikke i kronologisk rekkefølge. Disse observasjonene sammen med undervisningsdesignet skaper et potensiale for læring. Siden det dreier seg om observasjoner gjort på hele klassen, reflekterer det ikke hva enkeltelever faktisk har lært (Marton og Kullberg, 2024). Det vil heller vises i resultatet på prøven. I undervisningsdesignet i forrige delkapittel er de kritiske elementene og hva som gjort mulig å lære, presisert. I dette delkapittel vil hva som er gjort mulig å lære presiseres under hver kategori av kritiske elementer ut ifra hva som er synliggjort i kommunikasjonen.

Sann/usann-oppgaver som omhandler aritmetisk struktur på kommutativitet.

3 + 7 = 7 + 3 *(sant)*

6 + 5 = 5 + 7 *(usant)*

> *Elev: Sant! Fordi det er det samme ..., vi bruker de samme tallene der, og det er bare 3 og 7 da. Men den andre er det akkurat samme tall, der er det 6 og der er det 7 og da er det ikke det.*
> *Elev: likhetstegnet betyr liksom det samme som da, så på den øverste er det samme med 3 og 7 og 3 og 7 og på den nederste er det 5 og 6 og 6 og 7 og det er ikke det samme.*
> *...*
> *Elev: Det er sant*
> *Elev: Det er jo akkurat likt.*
> *Elev: Svaret er 10 og det er det samme som 7+3.*
> ...
> *Elev: Vi tenker at det er sant, fordi svaret blir jo det samme. Og likhetstegnet betyr jo det samme som.*
> *Elev: Ja, for du ser at et 10 tall og et 7 tall og et pluss tall. Og det samme verdi uansett hva som er først og hva som er bakerst.*
> *...*
> *Elev: fordi 6+5 er 11 og 5+7 er 12.*

Her spør læreren om kommutativitet også gjelder andre regneoperasjonene.

> *Lærer: Bra, er det noen tegn* (les: regneoperasjon) *jeg kan bytte ut plussen med slik at det ikke blir sant? Vil dere diskutere det sånn superkjapt? Er det noen tegn som gjør at det ikke blir sant?*
> *Elev: ikke gange ...*

Elev: Dele, gange, minus ...
Elev: ikke gange!
Elev: ånei ... ikke gange, dele
Lærer: Hvorfor ikke gange da?
Elev: fordi 3 ganger 7 er det samme som 7 ganger 3.
Lærer: At det spiller ingen rolle hvilken rekkefølge vi ganger i? Men viss vi setter minustegnet der og subtraherer ...
Elev: da blir det minus 4 på den første siden og 4 på den andre.

Her et et utdrag fra da læreren stilte spørsmålet om de kan se svaret uten å regne ut, for å lede elevene i prosessen med å finne/forklare strukturen.

Elev: Det er sant! 3+7, og 7+3 blir 10.
Lærer: Har dere kommet frem til det samme? Går det an å se at dette er sant uten å regne det ut?
Elev: Ja
Lærer: Hvordan da?
Elev: fordi det står er lik, man bare ser det, vi går liksom ikke i første klasse. Man ser det.
Lærer: Ja, behøver ikke å si det, vi prøver å finne ut hvorfor vi ser det.
Elev: Det er det samme på begge sider
Elev: Når det er pluss er det samme hvilken rekkefølge.

Det kritiske elementet for struktur ved kommutativitet er forklart når det gjelder addisjon. Elementet er synliggjort gjennom variasjon ved kontrast. En av klassene inkluderte også forklaringer på hvilke regneregler kommutativitet gjelder og ikke. I tillegg er en "det samme som"-tilnærming til likhetstegnet gjort mulig å lære.

"Hva må symbolet være?"-oppgaver som omhandler elementene aritmetisk struktur på kommutativitet og variabel

17 • n = 93 • 17

Elev: 93,
Lærer: 93 ja, om vi bytter ut symbolet med 93 så blir uttrykket sant?
Elev: Du bytter n-en med 93.
...

Elev: 93!

Lærer: Ja, og vi ser det av samme grunn sant. Hvordan ser vi at det er 93 sånn kjapt?

Elev: Fordi det er 93 på den andre siden.

27 + 76 = $\boxed{\bullet}$ + 27

Elev: 76!

Lærer: Det kom veldig fort. Hvordan så dere det så kjapt?

Elev: Jeg bare veit det.

Lærer: Det er fint å sette ord på det selv om det er lett

Elev: 27 pluss 76 er et tall. Og det tallet skal bli det samme som 27 pluss noe. Og det er 76.

E: fordi man bare flytter man rundt også.. mumling ...

L: Speile der liksom

E: Ja!

...

Her blir den ukjente referert til som "boksen der".

Elev: Fordi for å finne..., 27 er på begge sidene. Og det er 76, jeg kan ikke ta noe annet, da blir det ikke det samme svaret. Det må være 76.

Elev: 76 må være inni den boksen der.

Det er tydelig at uttrykk med en kommutativ struktur ble forklart i alle 3 klassene. Dette kritiske elementet er tydeliggjort og derfor gjort mulig å lære for elevene i undervisning.

Sann/usann-oppgave som omhandler elementene struktur iht. likhetstegnet; en mindre på venstre og en mer på høyre

10 – 3 = 11 – 4

Elev: om man tar den på høyre sida der er det jo 11 og det er en mer enn 10. og da kan man også ta minus en mer! Og da er det like mye, så vi har egentlig bare pluss på en på hver og da blir det like mye minus... Eller svaret blir.

...

Elev: hvis du har 10 minus 3 så blir det 7 og så kan man bare legge på en der så trenger man legge på en til der for at det skal bli likt.

10 – 3 = x – 4

Elev: 9 nei ... 11
Elev: 11
Elev: Fordi det er som den oppgaven vi hadde isted, sånn 11 - 4 er 8 og 3 så blir det 7.
Elev: Sånn når man ser 4ern som er en mer en 3 og så har man plussa begge tallene sånn at det blir 11 minus 4, og så da blir det samme, ja.. 7.
...
Elev: hvis du har 10 minus 3 så blir det 7 og så kan man bare legge på en der så trenger man legge på en til der for at det skal bli likt.

Dette kritiske elementet struktur iht. likhetstegnet har fått tilstrekkelige forklaringer i alle 3 klassene. Det gjør at det er gjort mulig å lære. Elevene ble fristet til å regne ut, enten for å dobbeltsjekke, eller gi en akseptert forklaring. En annen grunn til at vi kunne se at elevene oppfattet denne strukturen var fordi en elev refererte til en lignende oppgave de hadde hatt tidligere. Variasjonsmønsteret generalisering viste at elevene klarte å bruke samme strategi i tilsvarende oppgave fra tidligere. Det kritiske elementet innføring av symbol for ukjent, er det eneste som er forandret i den andre oppgaven. Dette kan både være variasjon ved kontrast og generalisering. Kontrast fordi det kritiske elementet for innføring av symbol for ukjent, er variert. Og generalisering fordi det kritiske elementet strukturen i det algebraisk uttrykket, er holdt invariant.

"Sann/usann"-oppgaver som omhandler elementene aritmetisk struktur på prioriteringsregler og/eller fordelingsregel (x (a + b) = x • a + x • b)

(14 + 3) • 2 = 14 + 3 • 2

I denne variasjonen virker det mer naturlig for å elevene å finne svaret ved å bruke prioriteringsregel.

Elev: Usant,

Lærer: Usant fordi?

Elev: Hvis det er parentes så tar man den først, men viss det ikke er det tar man gange. Da blir det 3 ganger 2 som blir 6, så pluss 14 som er 20. Men det er ikke det samme som 14 pluss 3 og ganger 2 som er 34.

Lærer: Noen andre, hvordan diskuterte dere?

Elev: Jaa.. egentlig det samme. Jeg så det med en gang at det blir ulikt uansett hva når det er parentes, så blir det og du har samme tall uten parentesen så blir det ikke samme. Med mindre du har en ... nei.. jo ... nei... nei det var ikke det.

4 • (5 + 3) = 4 • 5 + 4 • 3.

Elevens forklaring følger prioriteringsregel, og ikke fordelingsregel. Fordelingsregelen hadde potensielt belyst aritmetisk struktur i større grad.

Elev: På den første er det 5 pluss 3 i parentes, så da skal man regne ut det først. Og så skal man gange med 4, og på den andre skal man gange med 5 og 4 og 3 og så skal man plusse de sammen.

Lærer: og dere husker regnerekkefølgen. Og det gjør at dere klarer å finne samme svaret på hver side. Og det var sikkert det dere fikk til i stad også da jeg skrev oppgaven feil, så fant dere ut at det ikke ble likt og ikke var likt. Hva skjer når vi multipliserer 4 med den parantesen, 5+3?

Elev: Det blir 32

Lærer: Ja det gjør det, eller det blir det sikkert, jeg har ikke regna det ut. 5 6 7 8 ja, men kan vi si det på en eller annen måte at det blir 5 +3 4 ganger for eksempel. Hvordan passer det med det som står på andre siden?

E: Først er det 5 ganger 4 som blir 20 og så tar du 4 ganger 3 blir 12.

(7+3)m = 14 + 6

Elev: Fordi jeg så at 7 + 3 er 10. Så da må det være gange mellom 10 og m og da, og så plussa jeg det andre og da blir det 20...

Elev: Det jeg tenkte først var det blir 10, og 10 + 10 blir jo 20. Men så kom jeg på at man måtte jo, viss det ikke står noen tegn mellom parentesen og et tall da må det være gange.

Lærer: Ja, det var mange som husket at det var ganger mellom der..
Elev: Jeg gjorde egentlig bare 7 ganger 2 er 14 og 3 ganger 2 er 6.

Her synliggjøres to strategier. Den ene er først å regne ut det som er inne i parentesen, altså følge prioriteringsregel. Den andre nevnte strategien har det kritiske elementet med aritmetisk strukturelt syn med fordeling. I den sist nevnte oppgaven kan bruken av fordeling identifiseres som struktur innenfor aritmetiske regneregel ved at eleven observerer at "*7 ganger 2 er 14 og 3 ganger 2 er 6".* Dette elementet har blitt mulig å lære. Den blir bare nevnt én gang i én av timene, derfor vil to av klassene ikke fått synliggjort dette elementet i undervisning. Derfor har det ikke blitt synliggjort i to av timene. Observasjonen viser at variasjonsmønsteret kontrast bør brukes med mindre variasjon innenfor det kritiske elementet som omhandler aritmetisk struktur med fordeling. I tillegg kan rekkefølgen på oppgavene påvirke hvilken strategi elevene bruker i kommende oppgaver. Det blir som om bevisstgjøring av et strukturelt syn korrumperer bevisstgjøring av et annet, når en lignende oppgave kommer.

Sann/usann- og hva må symbolets verdi være- oppgaver som omhandler elementene aritmetisk struktur på dobling og halvering

4 • 15 = 2 • 30

Elev: Det er sant fordi begge to har en 6er, fordi ...mumling... 2 ganger 15 det er 30, 30 pluss 30 som er 60. Og så er det bare ... mumling... som er 60.
Elev: Eller jeg viste på en måte at det var riktig men jeg brukte regninga for da vet.
Elev: man vet at det...man kan se det.. det som jeg gjorde var at jeg viste at 2 ganger 30 er 60, og så da 15 er halvparten av 30 og da må man ha det 4 ganger. Men man kan se det uten å regne fordi hmm... fordi man ser at 30 og 15, 15 er halvparten og så står det 2 ganger 30 og for å få det må man doble.

x • 50 = 8 • 25

Elev: du tenker sånn 50 er dobbelt så mye som 25
Elev: 25 er halvparten av 50, så blir det 4 på x-en
...

Elev: Jeg tenkte at 25 at det er halvparten av 50 da må halvparten av 8 være riktig svar, så da får jeg 4.
Elev: Jeg gjorde akkurat det samme og da slipper man på en måte å regne på det. Man så bare regna jeg ut sånn for å sjekke.
Lærer: Så du dobbeltsjekka etterpå? Og at den framgangsmåten stemte.
Elev: De ga litt mening fordi først så bare tenkte jeg sånn 50 er dobbelt så mye som 25 så kan man på en måte tenke sånn fylle opp en boks så kan man ta 2 av 25 eller en av 50 liksom, og da blir det jo, viss man kan ta 25 to ganger så blir det jo halvparten av 8, og det blir 4.
...
Elev: Er det sånn at det blir 4... 4 ganger 2 er 8, og så 25 ganger 2 er 50 og så plutselig blir det 4. Jeg skjønte ikke...
Lærer: Hvis skal finne det ut uten å regne ut, så er jo 25, det er jo halvparten av 50. Viss det er halvert, så må vi doble den. Nei...., nei, den er dobbel, da må den halveres.

Kommunikasjonen viser at dette kritiske elementet synliggjøres under kommunikasjon i undervisning.

Hva må symbolets verdi være-oppgaver som omhandler elementene aritmetisk struktur på dobling og halvering med brøk.

4 = ½ • v

Elev: 8 hva da??
Elev: det er en halv av noe skal bli 4
Elev: 4 er halvparten av 8 liksom
Elev: bare regn det som er å regne
Elev: Det er 8 fordi ½ er det samme som en halv. Og en halv ganger 8 blir 4.

Elev: En halv nå, i denne situasjonen liksom, må gange med 2 for at det skal bli en hel, kan man egentlig bare tenke 4 ganger 2 da som svar.
...
Elev: Fordi at du kan tenke, eller ihvertfall sånn jeg tenker da, ihverfall vis det hadde vært et større tall så hadde jeg tenkt at jeg må doble 4 siden det er ehmm en hel

hver gang.. ikke sant siden det er en halv. Da er det jo en halv pluss en halv er jo en hel, så da bare dobler du det tallet du skal ha fram. Så blir det 4 ganger 2.

Lærer: så siden det er en halv, så tenker du at det må være det dobbelte av 4.

Elev: Ja

Elev: viss det er sånn en halv av 4, så er jo det 2, men det kan jo også være det så svaret kan også være 2 og?

Elev: neii

Elev: jo

Elev: nei for at en halv ganger 2 så hadde det vært en

Elev: Men en halv av 4!

Lærer: hvis du tar 4 og deler på 2. Halvparten av 4.

Elev: Ja og da blir det også 2, 2 ganger 2 er 4.

Lærer: Så ville du da bytta v-en med 2?

Elev: Jeg ville gjort det.

Lærer: Jeg skriver opp elev sin ide. Du som kom frem til 8, hva tenker du?

Elev: Jeg tenker en halv ganger 8 er 4.

Lærer: Ja

Elev: Hva må man gange det med for å få...

Lærer: Hva må man gange en halv, 0,5 med for å få 4?

Elev: ja, det er det dobbelte, så du skal gange en halv med 2 for å få det, er det bare det dobbelte av det tallet.

Lærer: Vi kan jo tenkte 50 øringen da, hvis du har, hvor mange 50 øringen må du ha for å få 4 kroner. Da har du halve sant?

Elev: 8

Lærer: 8, ja, da er det det som er det riktige svaret.

Elev: Det kan jo også være hundre

Lærer: Hvis vi tar den da... hvis vi multipliserer et helt tall med en brøk. Hvordan var det vi skulle gjøre det?

Elev: bare oppe

Lærer: Bare oppe ja, bare med teller. Det er det samme som en ganger 2 delt på 2.

Elev: Ja

Elev: Hva er 2 delt på 2 som er....

Elev: men det kan jo også være 4,

Lærer: Hvis vi delern i 4 så kan det bli 4. Hvis du har en hel og delern i 4 får du 4 små.

...

Elev: fordi det er en halv, så skal jeg finne ut hvor mange tall det er plass til i 4. Og det er 8.

Lærer: Ja, noen andre måter å tenke på?

Elev: 8 delt på 2?

Elev: Man kan tenke at 0,5. nå vi har en halv, så må man ha dobbelt så mye som det på andre siden. ... for å få liksom... viss det hadde vært 4 opp så 1 delt på det så hadde det vært..

Elev: om det hadde vært 8, hadde det vært 16. Viss det hadde vært 8 isteden for 4 så hadde vi fått seg.

Lærer: Ja, hva må vi dele på 3 for å få 4 måtte vi tenkt da.

Elev: 12

Lærer: 12 delt på 3 er fire, sant det

Det kritiske elementet som omhandler å synliggjøre den aritmetiske strukturen i uttrykket kan i dette tilfellet være dobling og halvering. Det kan også løses ved brøkregning, uten å se "dobling og halverings"-strukturen. Elevene nevner i sine forklaringer elementer som "dobbelte" og "halv". Detter synliggjør bevissthet om at brøk også er et ledd i en slik type aritmetisk struktur.

Læreren refererer til egenskaper ved brøk og påpeker underveis at bare telleren skal multipliseres med et heltall i brøkregning. Dette er et kritisk element som ikke nødvendigvis handler om å *se* struktur, men heller regnereglene som omhandler brøk. For å se på hva som varierer i forhold til tidligere dobling og halveringsoppgaver er kritiske elementer invariant. Invariant ved at strukturen på oppgaven variere, men det kritiske elementet holdt invariant. På samme måte som et kritisk element potensielt kan bli manipulert av tidligere oppgaves strategi, kan også et aritmetisk strukturelt syn fremkalles i møtet med påfølgende oppgaver.

Sann/usann-oppgaver som omhandler elementet subtraksjons av negative tall og struktur iht. likhetstegnet.

20 - (- 9) = 29 *(sant)*

- 9 - (- 9) = 9 *(usant))*

Elev: tror ikke det har noe å si om det blir parentes eller ikke for det står 20 minus minus 9, og da blir det to minuser uansett og da blir det pluss så da blir det 20 pluss 9.

Elev: det er usant, fordi du har minus 9 pluss 9, og da blir det null istedenfor 9.

...

Elev: det er sant, men vi blir litt forvirra over den parentesen. For det er jo pluss når det er minus og minus, men jeg veit ikke om det blir det samme når det er en parentes der.

Elev: Da blir minus og minus pluss da?

Lære: Den paratesen er der mest for å vise at minus 9 er en egen verdi.

Elev: så når det er en parentes der er det egentlig ingenting å regne ut i parentesen..

Lærer: Det er sant

Elev: for da blir det jo bare en løsning.

Lærer: noen ganger har vi parentesen og ikke måtte følge regner ... eller hva heter det ... overkjøre regnerekkefølgen.. nei ... jo, sier jeg det riktig. De reglene for hvilke tegn vi bruker først, overkjører det med en parentes, ellers så holder det jo orden på negative tall. Så da vet vi at minus og minus gir pluss, og da blir det jo riktig. Vi prøve på å forklare hvordan minus minus blir pluss. Og det er kjempevanskelig å forklare det. Jeg fant en forklaring på youtube ... eller jeg lette etter forklaring, og fant noen, men de var så innmari avanserte iforhold til det nivået vi er på, så jeg har ikke funnet noen gode enda. Men du kan jo tenke deg da at du skylder 20 kroner, nei du har 20 kroner i banken. Hvis du ikke har så mye penger så er det bare 20 kroner igjen på kontoen din. Og så skylder du 9 kroner til en kompis, så egentlig hvor mye penger har du da? Hvis du skylder 9 kroner og så har du bare 20?

Elev: ehhh... jeg tror det blir feil ...

Lærer: jaa ...

Elev: hvis du ...

Elev: 11

Lærer: jaja, jeg skal videre, 11.Men hvis du får moren din da til å betale ..., ja ... da må hun betale dobbelt så mye. Hun må betale kompisen, så isteden for å betale ...

Elev: men blir det ikke, men viss en kompis skylder deg 20 og den andre skylder deg 9. Tilsammen skal du ha 29.

Elev: men da blir det ikke minus.

Elev: Jo, du har jo gått i minus, du har jo gitt bort 20 kroner. Så da er du i minus. Så gir du 9 kroner til en annen en, så er du også i minus.
Elev: Ja, men da gir du det tilbake, da går du jo ikke i minus, da går du i pluss.
Lærer: Hvis du får det tilbake går du i pluss. Det er lettere enn å om du skal ta minus ...
Elev: Hvis du får det tilbake da går du bare i null ....
...
Elev: Det er jo 20+9.
Lærer: Ja, hvorfor blir det 20+9 når det står 20 minus minus 9?
Elev: minus minus blir pluss

Lærer: Når vi multipliserer så er minus og minus pluss. Vi kan bruke tallinja som eksempel. Hvis vi har null, viss jeg skriver 4 pluss minus 2. ehmm min.. nei. Begynner der... minus 2, så har jeg 4 der. Da kan vi jo tenke oss at hva er differensen mellom 4 og -2, eller hva er mellom 4 og minus 2?
Elev: 6
Lærer: men her tenker jeg jo litt feil egentlig. 4+(-2), ehmm... 1..2...3... 4 + -2, det er altså -2 som skal legges til, og minus 2 er jo negativt så vi må ta minus 1 og så minus 1 til, så da havner vi på 2 der.
Elev: Så svaret er 2?
Lærer: 4 + -2 er det samme som 4 - 2 og blir 2. Det er ikke alltid den tallinja blir så logisk for oss.
Elev: Jeg trodde pluss og minus var pluss.
Lærer: Hm?
Elev: Jeg trodde pluss pluss minus var pluss. Det er minus og pluss bare i....

Synligheten av elementene i regneoperasjoner med negative tall er varierende. En forståelse for subtraksjon med negative tall handler om at første leddet ses på som et *utgangspunkt.* Den må ikke forveksles med addisjon som har kommutativ egenskap der rekkefølgen ikke har noe å si. Forskjell i subtraksjons og addisjonsuttrykk er at summen eller differansen øker eller minker i verdi ut ifra om leddet/subtrahend er negative eller positive, som kan være forvirrende for elver og lærer.

De fire regneoperasjonen har forskjellige egenskaper når det kommer til negative tall. Ved subtraksjon av negativt tall, som i uttrykket –9 **- (-**9), er differansen den samme som summen i uttrykket −9 + 9. I multiplikasjon og divisjon derimot er det fortegnene til faktorer/teller/nevner sammen som avgjør om verdien til produkt eller kvotient er positiv eller negativ. Disse nevnte kritiske elementene er, ut ifra kommunikasjonen i timen, vanskelig å avgjøre gard av synlighet.

Når dette kritiske elementet skal forklares gjennom praktiske eksempler viser kommunikasjonen at dette elementet er en didaktisk utfordring. Det er utfordrende å finne fysisk konkrete eksempler fra dagliglivet på noe som er negativt. Mennesker har skapt negative beskrivelser av fenomener, som temperatur, elektrisk ladning, etc.. Det er likevel vanskelig å observere et naturlig fenomen med negativ verdi i seg selv. Derfor kan undervisning med variasjon kun innenfor aritmetisk og algebraisk form med tall og symboler være en bedre måte å synliggjøre dette kritiske elementet. Strukturene i egenskapene til negative tall i de fire regneartene kan bevisstgjøres ved variasjon med generalisering. Det vil også gjøre det mulig å kontekstualisere disse egenskapene til andre matematiske fenomen beskrevet med negative tall. I videre læring av matematikk er dette et kritisk element. For eksempel i en funksjonen f(x)= 20 – x , der x = - 9, vil det være nødvendig å kunne finne f(x) ved å regne 20 – (-9).

Lærer prøver å synliggjøre elementet med et annet eksempel som har tall med mindre verdier.

4 – (-2) og –4 - (-2)

Lærer: Hva med 4 – (-2) hvis vi skal prøve å vise det samme på tallinja.
Elev: 4!, ...6....4.... 2!, nei det er 6!
Lærer: Så der kan kanskje finne hvor mye det er mellom 4 og -2 for der skal vi finne differansen, i og med at det står minus her. Så der, fra 4 minus 2... 4..5..6.. Så det blir jo på samme måte som den. Tegne tallinja helt ned til 29, eller opp til 29. Hva med minus 4 minus minus 2?
Elev: Det blir minus 2! minus 2.
Lærer: Ja, hvordan tenker dere da?
Elev: jeg vet ikke, jeg bare vet det.
Elev: Fordi det blir minus minus gir pluss.
Elev: og når man har pluss så går det mot null.

Lærer: Ja, så dere tenker egentlig disse fortegnene som at minus minus gir pluss sånn at man regner ut etterhvert liksom? Eller? Hjelp meg gjennom det....
Elev: Når man plusser på et vanlig tall på en negativt tall så går det alltid mot null.
Lærer: Ja, det gjør det jo, for da blir det mer og mer positivt
Elev: Og da er det 2. Også er det da er jo 4 minus 2, 2. Så da er det minus...
Elev: Man kan liksom ikke gjøre noe med minus 4, man må forholde seg til neste.
Lærer: For det er der vi starter?
Elev: Ja.
Lærer: Og så, den forklaringen jeg har sett eller hørt mest av er kanskje at jeg skal ta bort minus 2, og de ligger jo her. At vi må opp dit. Sa havner vi her. Det er ikke kjempelett å forklare dette, altså. Jeg vet at vi kan forklare det algebraisk, når vi blir gode på algebra og ligninger, så kan vi bevise det, at det stemmer.

Et uttrykk med samme form, men ulike verdier inkluderes. Her nevner elevene at minuend skal behandles som et utgangspunkt. Det er usikkert om de har generalisert dette elementet slik at de bruker de i nye uttrykk og kontekster. Dette trekket blir synliggjort.

20 – Δ = 29,

Elev: det er om man setter minus 9 i boksen, da blir det 20 minus 9 og da blir det pluss 20,
...
Elev: Men viss det er minus 20, så blir det jo minus 20 pluss 9 og da blir jo det 11.

-m - (-9) = 9

Elev: 1!
Elev: Usant!.. Det går jo ikke.....
Elev: minus null
Elev: Skal den byttes ut med null?
Lærer: God ide! Hvorfor det?
Elev: Fordi at viss det blir, det blir, okei minus null da, man kan si det, og så pluss, minus minus 9, det blir det samme som pluss 9. Og da blir det 0 pluss 9 som er 9.
Lærer: Andre tanker? Går det an å si minus 0? Det funker jo det
Elev: Jeg tror det er null jeg

...

Elev: Fordi hvis du tar minus og minus sammen blir det pluss.

...

Elev: Man kan jo ta 10 pluss null.

Elev: Hva blir minus minus minus?

Lærer: Godt spørsmål

Elev: ehm ... blir det...

Elev: Pluss minus!

Elev: Det blir vell minus for de første blir pluss og den tredje blir minus.

Elev: men da blir det pluss pluss minus, pluss og minus

Elev: Sant ja.....!

Elev: Pluss og minus gir minus

Elev: eller?

Elev: ja, pluss og minus gir minus

...

Lærer: Ja, så da kan dere ikke tenke på det i stad. Hva må vi sette inn her da for at det skal bli 9?

Elev: Null

Elev: Null

Kommunikasjonen gjort i klasserommet dreier seg hovedsakelig om hva pluss og minus og minus og minus blir, og blir synliggjort. Som nevnt etter dialogen i klasserommet som oppstod i sann/usann-oppgavene er det varierende synliggjøring av hvordan regneoperasjoner som inkluderer negative tall utføres. Variasjonsmønsteret i oppgavene som inneholdt variabel var hensikten at elevene kunne bruke samme strategi, men i en ny kontekst. Elevene kom raskere frem til forklaring, da samme type uttrykk med innføring av en variabel ble inkludert. Subtraksjon av negative tall er et kritisk element som med varierende suksess har blitt synliggjort i kommunikasjonen i klasserommet.

Sann/usann-oppgaver som omhandler elementene aritmetisk struktur på potens og multiplikativitet

$\mathbf{4 + 4 + 4 + 4 = 4^4}$

$\mathbf{3 + 3 + 3 + 3 = 3 \bullet 4}$

Elev: Den øverste er usann fordi, jeg kan bare si sånn hvis jeg regner da, 4 pluss 4 er 8, så blir 16, og hvis man skulle fått 16 med potens hadde det blitt 4^2, fordi det er 4 ganger 4.

Elev: Jeg tror den er sann. Skal det ikke ganges med 3 da siden den, og så er det pluss ikke sant?
...
Elev: Den nederste er riktig for det er 3 ganger 4 og den øverste er også fire ganger fire, men den er skrevet feil, det er egentlig ikke 4 i fjerde.
Elev: Forskjellen er at den nede blir det 16, og eller den første blir det blir jo 16 og den 4 i fjerde blir jo da 64 ... nei ... jo??
Elev: Hvis det er potens da er det 4 ganger 4 ganger 4 ganger4 ... men nå er det ikke det. Og da blir det et annet svar.
Elev: 3+3+3+3 er det samme som 3 ganger 4, og men det er 4+4+4+4 og det blir ikke det samme som 4 ganger 4 ganger 4 ganger 4.
Lærer: nei.
Elev: hvis det hadde stått 4 ganger 4 hadde det gått.
...
Elev: Vi tenkte øverst så blir det potens, potens fordi potens så må man gange alle sammen, men nederst, det blir, da er det bare ganging.
Elev: Ja fordi viss du har potens tar man 4 ganger 4 ganger 4 gange 4, men der sånn er det 4+4+4+4. Så da er ikke det det samme. Og på den nederste er det ... mumling ...
Lærer: Hvordan kunne man ha skrevet den øverste annerledes da, for å få det riktig.
Elev: 4 ganger 4

Det kritiske elementet som omhandler potens og multiplikativitet synliggjøres i kommunikasjonen i undervisning. Det er blitt gjort mulig å lære. Variasjon ved kontrast viser hva potens er og hva det ikke er, i likhet med multiplikativitet.

Hva må verdien til symbolet være-oppgave hvor det kritiske elementet er symbol for variabel.

27 + 76 = ⊡ + 27
17 • n = 93 • 17

Elev: Er det symbolet?

Lærer: Ja, dette er symbolet, det kunne vært en stjerne eller hva som helst. Så hva må vi bytte det symbolet med for at det skal bli sant.

...

Elev: Et tall eller en bokstav?

Lærer: Et tall.

...

Elev: Er ikke n hva som helst?

Elev: jo

Lærer: Hva må n være for at det skal bli riktig?

Her er kommunikasjon som omhandler symbolet inkludert. Det oppklares at 1) symbolet kunne vært hvilket som helst symbol, 2) symbolet er et manipulert tall og 3) "n (les: symbolet) kan være hva som helst" av tall.

Kritiske uplanlagte elementer som ble observert i undervisning var trekket der beskrivelsen av (-x) når x= 0.

Elev: det går vel an å si minus null vel? Det blir vel bare ingenting i minus?

...

Elev: Null minus minus ... pluss 9 er lik null.

Elev: Men det går jo ikke an å skrive minus null liksom.

Elev: Man kan jo det ..?!? Det er bare ingenting.

Elev: null er jo.. null, midt imellom minus og pluss

Elev: man kan jo skrive minus forran null, man kan jo fortsatt skrive pluss forran null?

Elementet (-0) diskuteres. Dette er et element som er kritiske i algebraisk tenkning innenfor funksjoner, som kommer senere i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Et eksempel er funksjonsuttrykket $f(x) = (- x) + 3$. For å finne $f(0)$, må verdien null settes inn, slik at $f(0) = (-0) + 3$, og $f(0) = 3$.

I sann/usann-oppgaver som omhandler elementet subtraksjons av negative tall, er bruk av parentes et kritisk element.

20 - (- 9) = 29

> *Elev: Jeg er ikke helt sikker på parentesen, men to minuser blir pluss.*
>
> *Elev: det er sant, men vi blir litt forvirra over den parentesen. For det er jo pluss når det er minus og minus, men jeg veit ikke om det blir det samme når det er en parentes der.*
> *Lærer: Den paratesen er der mest for å vise at minus 9 er en egen verdi.*
> *Elev: så når det er en parentes der er det egentlig ingenting å regne ut i parentesen.*
> *...*
> *Elev: Jeg trodde det bare var i potens*
> *Lærer: Ja riktig, fordi vi har brukt det i potens ...*
> *...*
> *Elev: Hvorfor står det i parentes da det bare er ett tall? Hvorfor står det at.. blir det 29? Ja, for det står jo ... hvordan veit vi at det står jo en parentes med bare ett tall ... mumling ...*
> *Lærer: eh... 20 minus minus 9. Jeg tenkte jeg skulle vise med litt mindre tall bare.*
> *Elev: Den parentesen viser at det er minus 9 sånn at man ikke forvirrer seg sjøl og viss vi ikke hadde hatt parentes hadde det vært et pluss da, da hadde det vært minus minus no, og nå ser man at det er et minus.*
> *Elev: Kan man skrive sånn?*
> *Lærer: Parentesen er for å vise at det er et negativt tall. Da får vi litt mer orden på det. Jeg har aldri sett at det har blitt skrevet sånn.*

Bruk av parentesen er et kritisk element i algebra og et sentralt element i videre opplæring i matematikk for elvene (Wladis, 2022). Elementet som omhandler parentesen i oppgavens kontekst var ikke et av de forutsagte kritiske elementene hentet fra teori, men et kritiske element observert i undervisning, som noen elever ikke har en fullstendig forståelse for. Elementet i den oppgavens kontekst ble gjort mulig å lære i timen.

Kritiske elementer som ikke synliggjøres:

Et kritisk element som ikke ble synliggjort i undervisning var strukturen til den aritmetiske regneregelen fordeling; "x • (y ± z) = (x • y) ± (x • z)"

4 • (5 + 3) = 4 • 5 + 4 • 3

Lærer: Hva skjer når vi multipliserer 4 med den parentesen, 5+3?
Elev: Det blir 32
Lærer: Ja det gjør det, eller det blir det sikkert, jeg har ikke regna det ut. 5 6 7 8 ja, men kan vi si det på en eller annen måte at det blir 5 +3 4 ganger for eksempel. Hvordan passer det med det som står på andre siden?
Elev: Først er det 5 ganger 4 som blir 20 og så tar du 4 ganger 3 blir 12.

Her er ikke strukturen til fordeling nevnt i undervisning. Det ikke har blitt synliggjort i kommunikasjonen. Som nevnt blir det i en av klassene en i løsning av (7+3)m = 14 + 6 at "*7 ganger 2 er 14 og 3 ganger 2 er 6".*

4.3 Resultater fra prøve tatt etter endt undervisning

Resultater fra første time:

Utrykk	**Riktig svar**	**Feil svar**	**Ingen svar**
(15 + 2) • 5 = 15 + 2 • 5	71%	29%	0%
3 • 3 + 3 + 3 + 3 = 3^2 + 9	86%	14%	0%
- 2 + (- 2) - (- 4) = 0	86%	7%	7%
2 • $\boxed{\bullet}$ = 4 • 15	64%	29%	7%
9 = y • y	71%	22%	7%
9 = x + x +x	86%	0%	14%
(7 + 3)*m* = 7 + 3	36%	43%	21%

Tabell 4.3: Resultat fra prøven etter første undervisningstime

Utrykk	**Riktig svar**	**Feil svar**	**Ingen svar**
(15 + 2) • 5 = 15 + 2 • 5	89%	11%	0%

$3 \bullet 3 + 3 + 3 + 3 = 3^2 + 9$	89%	11%	0%
$- 2 + (- 2) - (- 4) = 0$	56%	44%	0%
$2 \bullet \boxdot = 4 \bullet 15$	78%	22%	0%
$9 = y \bullet y$	100%	0%	0%
$9 = x + x + x$	100%	0%	0%
$(7 + 3)m = 7 + 3$	0%	89%	11%

Tabell 4.4: Resultat på prøven etter andre undervisningstime

Utrykk	**Riktig svar**	**Feil svar**	**Ingen svar**
$(15 + 2) \bullet 5 = 15 + 2 \bullet 5$	92%	0%	8%
$3 \bullet 3 + 3 + 3 + 3 = 3^2 + 9$	83%	17%	0%
$- 2 + (- 2) - (- 4) = 0$	50%	17%	33%
$2 \bullet \boxdot = 4 \bullet 15$	75%	0%	25%
$9 = y \bullet y$	75%	8%	17%
$9 = x + x + x$	66%	0%	33%
$(7 + 3)m = 7 + 3$	42%	25%	33%

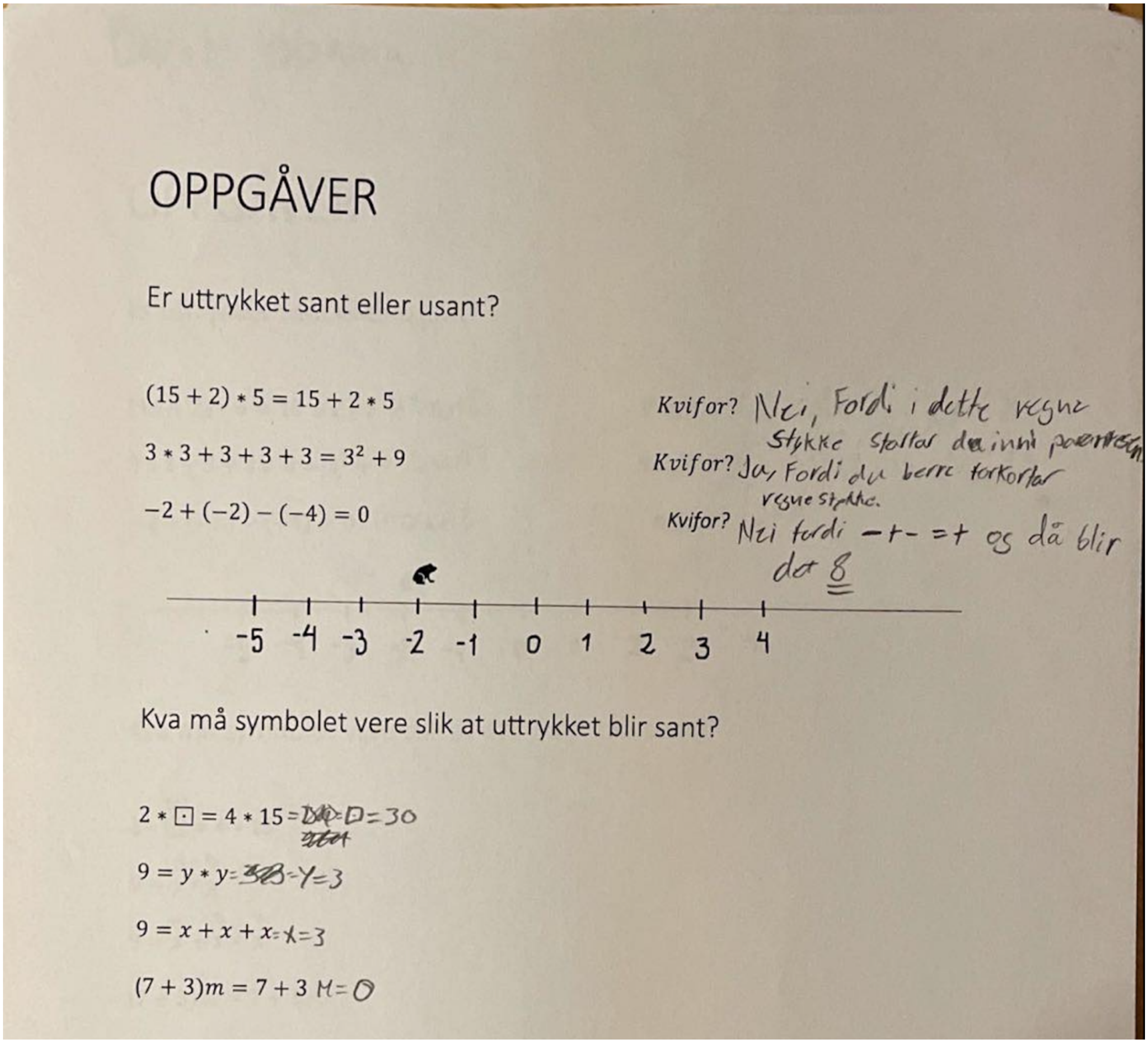
Tabell 4.5: Resultat på prøven etter tredje undervisningstime

Utrykk	**Riktig svar**	**Feil svar /Ingen svar**
$(15 + 2) \bullet 5 = 15 + 2 \bullet 5$	83%	17%
$3 \bullet 3 + 3 + 3 + 3 = 3^2 + 9$	86%	14%
$- 2 + (- 2) - (- 4) = 0$	66%	33%
$2 \bullet \boxdot = 4 \bullet 15$	71%	29%
$9 = y \bullet y$	80%	20%
$9 = x + x + x$	83%	17%

$(7 + 3)m = 7 + 3$	29%	71%

Tabell 4.6: Resultat på prøven fra alle tre klassene

Eksempel fra to prøver:



OPPGÅVER

Er uttrykket sant eller usant?

$(15 + 2) * 5 = 15 + 2 * 5$ Kvifor? Nei, Fordi i dette regne stykke startar du inni parentesen

$3 * 3 + 3 + 3 + 3 = 3^2 + 9$ Kvifor? Ja, Fordi du berre forkortar regne stykke.

$-2 + (-2) - (-4) = 0$ Kvifor? Nei fordi $- + - = +$ og då blir det $\underline{\underline{8}}$

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

Kva må symbolet vere slik at uttrykket blir sant?

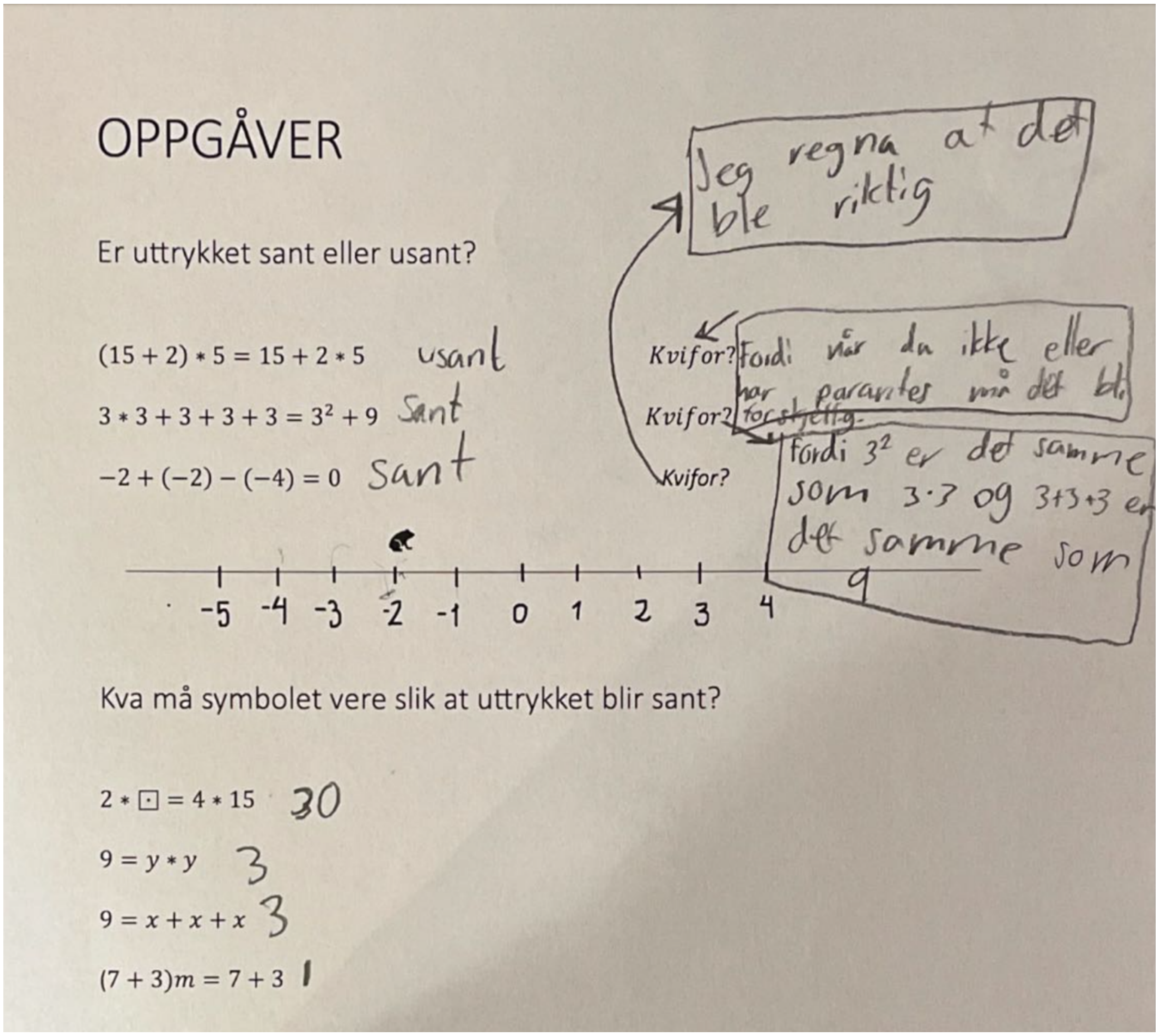
$2 * \boxed{\cdot} = 4 * 15 = \square = 30$

$9 = y * y = y = 3$

$9 = x + x + x = x = 3$

$(7 + 3)m = 7 + 3$ $M = 0$

Figur 4.1: Anonymt svar på prøve av elev



Figur 4.2: Anonymt svar på prøve av elev

Selv om kritiske elementer blir synliggjort i undervisning betyr ikke dette at alle elevene i klassen har blitt bevisst på hva de er. Prøven vil heller ikke gi svar på hva som er lært i timen, men heller brukes som en referanse i diskusjonen om hva som er gjort mulig å lære i timen. Resultatet fra prøvene viser at oppgaven som skiller seg mest ut av de elevene ikke klarte, var oppgaven (7+3) m = 7 + 3. Hele 71% av klassen svarte feil på denne oppgaven. De fleste svarene var m = 0. Strukturen er lik en av oppgavene elevene hadde i undervisning. Forskjellen fra eksempelet i undervisning, er at denne oppgaven ikke inkluderer det kritiske elementet som omhandler strukturen rundt likhetstegnet ved dobling og halvering ((7+3)p = 14 +6) . Variabelen som elevene skal finne har også ulik verdi fra oppgaven i undervisning. De aritmetiske strukturene som elevene kan bruke i løsningsstrategi er fordeling og/eller prioriteringsregelen. Et kritisk element som er essensielt i denne oppgaven er også den aritmetiske strukturen som omhandler identitet. Identitet, både som x • 1 = x og x • 0 = 0. Dette kritiske elementet ble ikke synliggjort i undervisning, og kan indikere at elevene ikke har gjort seg bevisst på dette i en slik oppgave.

Oppgaven som 33% av elevene svarte feil på var sann/usann-oppgaven - 2 + (- 2) - (- 4) = 0, og var oppgaven nest flest svarte feil. Denne omhandler det kritiske elementet regning med negative tall. Regning med negative tall ble ut ifra kommunikasjonen i klasserommet et element som hadde varierende synlighet. Oppgaven på prøven inneholdt ett ledd mer i uttrykket, sammenlignet med oppgavene som ble gjennomgått i undervisning. Det gjør utregningen mer utfordrende, fordi de i tillegg må inkludere addisjon med negativt tall. Ut ifra denne prøven ser vi at 66% av elevene hadde riktig svar. En tallinje ble inkludert i prøven som kunne være til hjelp for å se at utgangspunktet i regnestykket var –2. Det er usikkert hvor mange elever som har, og i hvilken grad, de har bevisstgjort seg på det kritiske elementet som omhandler subtraksjon av negative tall.

Oppgavene flest elever svarte riktig på var oppgavene som inneholdt de kritiske elementene multiplikativitet, potens (både med og uten variabel) og prioriteringsregel eller fordeling. Oppgavene som innehold å finne verdien til den ukjente slik at uttrykket ble riktig var også noe de fleste svarte riktig på.

4.4 Analyse av observasjoner fra undervisning

I utførelsen av undervisning er det viktig for en lærer å være bevisst på de kritiske elementene undervisningen legger til rette for. Dette for å bruke variasjonen til å rettlede ved å stille spørsmål og spille videre på de strategiene og elementene som er tiltenkt. Som oppsummering av de observerte elementene som synligjøres ved kommunikasjonen i klasserommet, viser at det både er elementer som synliggjøres, elementer som var tenkt å synliggjøres, men som ikke ble synliggjort og observasjon av nye kritiske elementer. Her er en oversikt over følgende:

Tenkt synliggjort, som var mulig å lære.	**Tenkt synliggjort, som ikke var mulig å lære**	**Observerte nye kritiske elementer**
Kommutativitet, potens, multiplikativitet, dobling og halvering, prioriteringsregel, likhetstegnet og symbol for ukjent. Subtraksjon av negative tall (variert synlighet).	Fordeling,	Identitet ($x \bullet 1 = x$ og $x \bullet 0 = 0$)

Tabell 4.7: Synliggjort kritiske elementer fra kommunikasjonen i klasserommet

Variasjon ved kontrast og generalisering viser at elevene synliggjorde mange av de tiltenkte kritiske elementene, som nevnt under hvert eksempel ovenfor. Dette på tross av at fusjon også ble brukt. I analysen av timene er fokuset på undervisningen, ikke læreren (Kullberg og Marton, 2024). Selv om dette ikke er en del av forskningsspørsmålene, har lærer en påvirkning på elementers synliggjøring.

Funn fra prøven etter undervisning er at når de kritiske elementene prioriteringsregel, symbol for ukjent, og identitetsloven ($x \bullet 1 = x$ og $x \bullet 0 = 0$) blir brukt i samme oppgave, svarer 74% av klassen feil. Oppgaven, $(15 + 2) \bullet 5 = 15 + 2 \bullet 5$), på prøven som inneholdt kritiske elementet prioriteringsregelen, var en oppgave 83% svarte riktig på. I tillegg svarte henholdsvis 71%, 81% og 83% av elevene riktig på de resterende oppgavene som inneholdt kritiske elementet symbol for ukjent ($2 \bullet \square = 4 \bullet 15$, $9 = y \bullet y$ og $9 = x + x + x$). Det gjør at en kan tenkte seg flere grunner til at elevene ikke fikk til oppgaven $(7+3)m = 7+3$. Det kan komme av at oppgaven inneholdt fusjon av de allerede bevisstgjorte elementene og et nytt kritisk element. Det kritiske elementet undervisningen ikke synliggjorde var aritmetiske regnereglene, identitet og fordeling. Denne informasjonen gir inntrykk av et videre undervisningsdesign burde inneholde bevisstgjøring av disse elementene, før de blir brukt sammen i et uttrykk.

Elevene diskuterte en stund om det gikk an å skrive «minus null». Dette skjer ofte i en funksjon når en skal putte inn null i f.eks. $f(x) = - x+3$. Dette ble derfor en god læring i abstraktheten og egenskapen til elementer. Dette kritiske elementet var ikke en del av de planlagte kritiske elementene og bør noteres for å tilføre abstrakthet til matematikkundervisning.

Ut fra resultatet inneholder det kritiske elementet som omhandler regneoperasjoner med negative tall trekk som med varierende hell ble bevisstgjort. Det kan observeres både i undervisning og på prøven etter timen. Negative tall innenfor matematikkhistorie, er et relativt nytt fenomen sammenlignet med positive rasjonale tall (Rogers, 2009). Dette er fordi det ikke er noe naturlig fenomen som er negativt med det blotte øye (Rogers, 2009). Mennesker har skapt negative verdier for å beskrive fenomener, men utenom dette er de vanskelig å forestille seg. For eksempel hvorfor akkurat minus og minus gir pluss.

Da oppgaver som inneholdt både kritisk element for fordeling og prioriteringsregel ble brukt i undervisning, ble elevenes fokus ofte på prioriteringsregler og ikke på strukturen som viser fordelingsregelen. Et variasjonselement innenfor ligninger er om hvilken side av likhetstegnet har påvirkning på hva elvene bevisstgjøre seg på. Utrykkene inneholdt parentes på venstre side, og kan tenkes å være noe elevene fokuserer på først. Å kunne gjøre operasjoner på begge sider av likhetstegnet er et kritisk element i tilnærming til likhetstegnet. Variasjon med generalisering, der utregningene skjer på først på den ene side, og så på den andre, kan være med å bevisstgjøre dette. Altså, at alle andre elementer som operasjoner, verdien til tall etc. holdes invariant, mens utregning varierer fra den ene til den andre siden av likhetstegnet.

En avgjørende faktor kan være at uttrykket der prioriteringsregel er mest naturlig å bruke ble presentert først for elevene. Da velger elevene å bruke denne strategien for å finne en løsning. De vil da i det neste eksempelet som inneholdt parentes bruke denne strategien som ble synliggjort på den forrige oppgaven. Dette kan være en viktig detalj å være bevisst på i undervisningsdesignet. Dette fordi det er vanskelig å avgjøre om elevene ikke er bevisst på dette kritiske elementet, eller om det blir korrumperte av tidligere oppgavers bruk av strategi. På samme måte viste resultatet at bruken av variasjon også har et potensiale i å få elevene til å synliggjøre et tiltenkt kritisk element i en oppgave de i utgangspunktet ikke ville blitt synliggjort.

Kapittel 5 Diskusjon

5.1 Aspekter ved forskningskonteksten

I prosessen med å designe undervisning er identifisering av de kritiske elementene innenfor læringsobjektet et viktig utgangspunkt. Designer og lærer av undervisning må også ha kunnskap om hvilke kritiske elementer som faktisk finnes innenfor ulike temaer. F.eks. innenfor tilnærming til likhetstegnet. En lærer kan vite hva likhetstegnet er for noe, men ikke være bevisst på trekk ved elementet som, relasjonell tilnærming ved utregning eller struktur (ref. Stephens et al. 2013) Derfor er det nødvendig også å designe undervisning fra teoretisk forutsagte kritiske elementer. 1) fordi det kan gi et mer fullstendig bilde på de kritiske elementer som skal til for å forstå temaet, og 2) det kan gi svar på hvilke misoppfattelser som er vanlige og viktig å være oppmerksom på. I følge (Pang og Ling, 2012) er vanlig praksis innenfor Learning Study å kartlegge elevers forkunnskaper utgangspunktet i en slik prosess. I denne studien, er det av sammensatte årsaker at identifiseringen av de kritiske elementene kun er basert på teoretisk identifiserte kritiske elementer. Lærerens evne til å bevisstgjøre seg på elevenes misoppfatninger og kunnskapsmangel bør kombineres med de kritiske elementene som eksisterer.

Undervisningsdesignet i denne oppgaven hadde et bredt læringsobjekt. Det gjorde at bruken av variasjon inneholdt et bredt spekter av kritiske elementer. Det nevnes i Marton og Kullberg (2024), at det ofte er vanskeligere å identifisere kritiske elementer hvis læringsobjektet er for bredt. En utfordring er å avgrense læringsobjektet på en hensiktsmessig måte (Marton og Kullberg, 2024). Hvis du identifiserer mange nye kritiske elementer, kan det også tyde på at læringsobjektet er for bredt og at du må avgrense det og presisere det (Marton og Kullberg, 2024). Et bredt læringsobjekt kan derimot gi informasjon om hvordan læringsobjektet burde avgrenses videre, for et mer målrettet fokus på det som gruppen med elever bør jobbe videre med.

5.1.1 Anvendt matematikk

Som nevnt i innledning skårer norske elever relativt svakt på internasjonale tester i matematikk (Grønmo og Hole, 2017; Mullins et al., 2020, s. 201; OECD, 2023). Algebra blir sett på som området hvor prestasjonen er svakest (Grønmo og Hole, 2017). Når teoretisk identifiserte kritiske elementer i algebra blir implementert og analysert i en norsk skoleklasse, kan teorier og refleksjoner på hva årsaken hypotetisk kan være. Metoden kan finne kunnskapshull i elevers første møte med algebra. Dette vil være kritiske elementer innenfor algebra elevene må bevisstgjøre seg på for å få en dypere forståelse for temaet. Ser vi på den norske eksamensutformingen for 10.klasse 2024, testes elevene bare i anvendte oppgaver (eksamen, 2024). Det kan ha både fordeler og ulemper. Ulempene, gjør at det gir et signal til norske lærere om at anvendt kunnskap er noe de bør reflekter i undervisning. Anvendte oppgaver inneholder hverdagslige elementer i konteksten. Ifølge Sweller (2010) ref. i Guo og Pang (2012), har oppgaver med mye variasjon og innhold i konteksten, en større belastning på kapasiteten til arbeidsminnet. Arbeidsminne er den lille mengden informasjon som kan holdes i tankene og brukes i utførelsen av kognitive oppgaver, i motsetning til langtidshukommelsen, den enorme mengden informasjon som lagres i ens liv (Cowan, 2013). Dette fører til at potensialet innenfor oppdagelsen av for eksempel aritmetiske strukturer vil overskygges, siden kapasitet brukes på konteksten og ikke på det matematiske elementet. Selv om det matematiske elementet blir bevisstgjort vil det være lite kapasitet igjen til å andre matematiske elementer som elevene potensielt kunne brukt kapasitet på.

5.1.2 Lærerens bevissthet på kritiske elementer

Selv om elementene i læreplanen legger vekt på strukturen til operasjonene for å kunne bruke de effektivt, (Utdanningsdirektoratet, 2020), må læreren også forstå de underliggende strukturene for å opprettholde intensjonen til læreplanen. Det er læreren som, som svar på hva elevene sier og gjør, stiller spørsmål, understreker en ide eller kommer med forslag for å hjelpe studentene til og vurderer og utvikle nye alternativer (Schifter, 2018). Første forskningsspørsmål handler om hvordan kritiske elementer forutnevnt fra teori skal implementeres. En fordel med å identifisere kritiske elementer ut ifra teori, gjør at det ikke avhenger at en lærers, potensielt varierende kunnskap eller oversikt over hvilke kritiske elementer som finnes.

Fokuset bør være på hva elevene skal bevisstgjøre seg på, og målet er å finne måter å synliggjøre dette for elevene. Variasjonsteorien mener variasjon er nødvendig for at de skal klare å oppfatte dette. Det vil da være nødvendig for lærere å bevisstgjøre seg på det. En slik undervisningsstruktur kan se svært forskjellig ut. Undervisning med variasjon kan også inneholde anvendt matematikk. For at arbeidsminnet ikke skal belastes burde konteksten holdes invariant (Sweller, 2010) ref. i Guo og Pang,2012). Undervisning med variasjon trenger ikke overskygge andre undervisningsrutiner. En læreres bevissthet på hvordan variasjon i eksempler kan brukes for at elevene skal oppfatte elementer kan være et viktig verktøy i undervisning av algebra. Kvaliteten av en undervisning avhenger av lærerens kompetanse på variasjoner og han/hennes innsikt i kritiske elementer på temaet og hos elevene. Et viktig prinsipp i variasjonsteori er lærerens bevissthet på hva de kritiske elementer innenfor algebra er (Pang og Ling, 2013). I Grønmo og Hole (2017) nevnes det at også lærerstudenter presterer svak i algebra. Hypotetisk vil det da være spesielt utfordrende for lærere med lav mestring i algebra å i tillegg få en oppfattelse av elevers forståelse og hvilke kritiske elementer som enda ikke er oppfattet, om de selv ikke har bevisstgjort seg på disse.

> *«Norge har, i likhet med de andre nordiske landene, en profil i sin matematikkundervisning som legger mer vekt på anvendt matematikk enn på ren matematikk (Grønmo, 2010; Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Grønmo & Olsen, 2006; Olsen & Grønmo, 2006). Dette gjenspeiler at bruk av matematikk i dagliglivet har vært en drivende kraft i utviklingen av læreplaner i de nordiske landene»* (Grønmo, 2010).

Grønmo (2010) viser til at anvendelse tar utgangspunkt i at et autentisk fenomen som kan matematiseres i en modell som opererer innenfor ren matematikk. Etter dette kan det relateres tilbake til den virkelige verden (Grønmo, 2010). Videre argumenterer Grønmo (2010) at kompetanse innen ren matematikk er noe som kreves i arbeidet med autentisk problemstillinger. Hun mener det er problematisk at grunnleggende ren matematikk er nedprioritering i norsk skole. Om ikke kritiske elementer i matematikken beherskes, vil studering av anvendte problemer være bortkastet (Grønmo 2010). Arbeidet med anvendt matematikk har sine styrker, men den mister sitt potensiale om elevene ikke har forstått matematikken som ligger til grunn. En god balanse på dette er viktig.

5.1.3 Praktisering av variasjon i undervisning

Som nevnt i introduksjonen trenger ikke undervisning med variasjonteoretiske prinsipper overta undervisningspraksis. Den kan brukes i den allerede brukte undervisningspraksisen. Argumentet for dette er at lærere har forskjellige styrker. Noen lærere er dyktige historiefortellere, mens andre er kreative i design av plakater, konkreter, artefakt osv. I følge Kullberg og Marton (2024), og resultatet av denne forskningen, viser at evnen til å kunne identifisere de kritiske elementene innenfor det definerte læringsobjektet, både i undervisningsdesign og gjennomføring av undervisning er viktig. Dette inkluderer evnen til å observere de kritiske elementer som elevene enda ikke har bevisstgjort seg på.

5.1.4 Måter å identifisere kritiske elementer

En allerede utfordring innen forskning i utdanning er å fange elevers strategier og metoder (Cobb et al., 2003). Metoden Learning Study fokuserer på å identifisere disse elementene ved å teste eller intervjue elever, observere undervisning, dele med og hente erfaring fra andre lærere og/eller lese seg opp (Kullberg og Marton, 2024). I konteksten til norsk skole kunne det også være hensiktsmessig om læreplanen eller utdanningsdirektoratet la frem forskningsbaserte kritiske elementer lærere kunne lene seg på når de planlegger undervisning. Da spesielt i algebra, siden det er her vi scorer svakest (Grønmo & Hole, 2017). Det er også hensiktsmessig å gjøre lærere oppmerksom på disse elementene tidlig, siden aritmetiske regneoperasjoner og likhetstegnet er elementer elevene lærer fra tidlige klassetrinn. Det vil kunne hjelpe elever til en dypere forståelse for algebra (algebraisk tenking). Også kritiske elementer innenfor regneoperasjoner med negative tall vil være nyttig å være bevisst på når dette temaet introduseres.

En matematikktime designet på måten som er gjort i denne forskningen er ensidig. Undervisning med variasjonsteori trenger ikke se slik ut. Et slikt undervisningsdesign tydeliggjør effekten av variasjonsmønstre. På en annen side kan undervisning også inneholde elementer av konkreter, andre representasjoner og kontekster etc. Det viktige er fokuset på de kritiske elementene, og hvordan elevene kan gjøre seg bevisst på disse. Sagt med andre ord; hva som skal læres, og hvordan elevene kan lære nettopp dette. Enhver undervisningstime kan analyseres i lys av variasjonsteori (Kullberg og Marton, 2024). Variasjonsteori er en viktig ressurs i nettopp å tilrettelegge for læring (Kullberg og Martom, 2024) og Learning Study er viktig i og kartlegging og gjennomføring (Pang og Ling, 2013).

5.1.5 Evaluere undervisning

Ved observasjon og lytting til elevers tenkemåter i klasserommet, blir lærere mer bevisst på elevers tenking (Verhoef og Tall, 2011 i Jansen, 2021). Dette fører til at lærere har et større potensiale i å tilrettelegge for bedre læring (e.g. Ming Cheung og Yee Wong, 2014 i Jansen, 2021) som tanker rundt negative tall og generalisering av aritmetiske regneregler. I denne studien inkluderes aritmetiske strukturer innenfor negative tall, potens og multiplikativitet i prøven etter undervisning. Denne prøven ble gjennomføre rett etter endt undervisning, og kan derfor inkludere læringen som har skjedd på kort sikt i tillegg til elementene elevene har bevisstgjort seg fra før. Akkurat hva elevene har lært på lang sikt er vanskelig å få et fullstendig bilde av. Likevel gir den svar på trender som har skjedd i undervisning, og er en nyttig form for å evaluere undervisning for å gi kunnskap til forbedring.

5.1.6 Et fenomenologisk syn på undervisning med variasjon

I en fenomenologisk tilnærming til læring vil en elevs kunnskap og erfaring gi tilbakemelding til hverandre (Selvi, 2008). Erfaring betyr tilegnelse av kunnskap i enhver situasjon der et individ deltar (Selvi, 2008). Selvi (2008) skriver at offisielle læringsintuisjoner prøver å skape et felleskap der folk har lignende følelser, atferd og forståelse, og derfor ignoreres elevenes individuelle forskjeller. Disse forskjellene mellom elever er nødvendig for at elevene skal bli individer, og slike forskjeller bør støttes ved å bruke fenomenologisk tilnærming (Selvi, 2008). Fenomenologisk læring er knyttet til søken etter mening med selvopplevelser og oppfatning (Selvi, 2008). Elevene må oppmuntres til å beskrive, undersøke og forklare sine følelser, opplevelser og tanker (Selvi, 2008). Det å kunne se strukturer, generalisere, ha muligheten til å legge merk til, oppdage sammenhenger og mønster og bli bevisst på elementer er viktig bare i hverdagen. Det gjelder f.eks. i hvordan skal man håndtere ulike mennesker. Jo flere personer en møter, jo bedre klarer man å skille ulike personligheter. Det handler om å oppleve variasjon innenfor forskjellige kontekster for å kunne beskrive situasjonen bedre. Både for elevenes hverdagsliv og videre utdanning i mer avansert matematikk er derfor evnen til å kunne bruke variasjon til å finne essensielle elementer ved situasjonen helt nødvendig. Dette samme gjelder i matematikken. Fordi læring av matematikk, og utvikling av algoritmisk tenking, går ut på å se strukturer, generalisere, ha muligheten til å legge merk til, oppdage sammenhenger og mønster og bli bevist på elementer (Gyldendal, 2023), er dette en viktig læring for rett og slett å utvikle seg som menneske i livet generelt.

Edwards, en forsker innen matematikkutdanning på universitetsnivå, og Ward, en underviser av ren matematiker på universitet, skrev en artikkel om overraskende funn i undervisning av reell analyse. Den beskriver hvordan elevers individuelle syn på matematiske begreper skiller seg fra den matematiske definisjonen (Edward og Ward, (2004). Hverdagslige ord som "gruppe", "kontinuitet", "likhet" osv. har en annen betydning i matematikken (Edward og Ward, (2004). De skriver at mange lærere forventer at elevene får er korrekt syn på begreper via definisjon. Deres funn indikerer at elevenes uriktige syn på begreper erstatter definisjonens formulering (Edward og Ward, (2004). Erfarne matematikere vil i større grad skape et passende bilde basert på definisjonen (Edward og Ward, (2004). Mange elever tenker at definisjoner skal være definert illustrerende, men det er en fare med dette (Edward og Ward, (2004). Det kan tenkes at om en elvene opplever variasjon innenfor elementene som tilhører begrepet kan det hjelpe de å utvikle en dypere forståelse, og derfor også tolke definisjonene bedre. En aritmetisk regneregel defineres ofte med symboler som ($a(b + c) = a \bullet b + a \bullet c$). For at en elev skal kunne få et riktig bilde på denne definisjonen trenger den å oppleve variasjon av ulike tallverdier. Også endring av rekkefølge på operasjonene kan være hensiktsmessig. Som å endre hvilken side av likhetstegnet parentesen står.

5.1.7 Korrumpering og fremkalling

Ut ifra analysen av resultatet kan variasjon i oppgaver som implementerer kritiske elementer i uttrykk kunne påvirke hvilke strategier elevene bruker, og hvilke elementer elevene gjør seg bevisst på. Om to uttrykk presenteres rett etter hverandre, vil strategien i den første oppgaven kunne påvirke hvilken strategi elevene bruker i den kommende. Dette spesielt om uttrykkene inneholder tegn, formuleringer, struktur som ligner på hverandre. Guo et al. (2012) skriver om dilemmaet mellom å velge eksempler som viser forskjeller eller likheter i sammenligning av eksempler. De konkluderte med følgende. 1) elementer og deres funksjon som er kritisk for elevers forståelse bør identifisere og sammenlignes i eksempeldesign, 2) forskjeller og likheter (les: kontrast og generalisering) bør begge tas i betraktning i eksempeldesign, og 3) elever med forskjellig forkunnskaper vil oppfatte ulike elementer som er kritisk for deres læring og bør individuelt tilpasses (Guo et al., 2012). I lys av konklusjonen til Guo et al. (2012) vil det være nødvendig i eksempeldesign også å se på hvilke eksempler som korrumperer og fremkaller bruken av ulike strategier for elevene. Det kan analyses ut fra hvilke kritiske elementer som er tiltenkt å bruke og hvilke kritiske elementer som elevene vil kunne potensielt kan ta i bruk.

5.2 Resultatet sammenlignet med tidligere forskning

En strategi som blir sett på som svært viktig innenfor læring er å sammenligne flere undervisningssekvenser med samme læringsmål (Kullebrg og Marton, 2024). Dette gjør det lettere å kunne identifisere og påpeke forskjeller i hvordan samme pensum blir undervist og hva elevene har lært (Kullebrg og Marton, 2024). Her kommer noen sammenligninger med andre studier.

Flere studier (Ki 2007; Marton og Tsui 2004; Pang 2002 ref. i Guo og Pang, 2012) viser til at separasjon bør brukes først for å hjelpe elevene med å bevisstgjøre seg på hvert kritiske element separat. Det reflekterer også funn gjort i denne studien. Eleven i denne studien slet med å finne verdien til den ukjente i denne oppgaven (7+3)m = 7+3. Det kritiske elementet som omhandler struktur i aritmetiske regneregelen identitet ble ikke gjort mulig å lære. De fleste svarte at m= 0. Elevene har dermed ikke klart å bevisstgjøre seg på dette elementet når de får denne oppgaven.

Funn i studien til Stephens et.al., 2013 informerer om at tidlig algebraarbeid, ved å fremheve utbredelsen av operasjonssynet og ved å identifisere oppgaver som har potensial til å hjelpe elevene til å begynne å tenke på ligninger på en strukturell måte, bør skje helt i begynnelsen av deres tidlige algebraerfaringer. (Stephens et.al., 2013) Sammenlignet med denne studien er de kritiske elementene som omhandler struktur ved aritmetiske regneregler viktig i elevers forståelse av algebra, og å løse ligninger.

Det har vist seg at lærere kan bruke funn om kritiske elementer og variasjonsmønstre i aktiviteter og oppgaver når de underviser nye eller samme elevgrupper (Kullberg og Marton, 2024). De kritiske elementene bør imidlertid ikke ses på som hugget i stein, siden det kan være andre kritiske elementer som ennå ikke er identifisert, og kritiske elementer kan variere mellom grupper og alder (Kullberg og Marton, 2024). I denne studien var det mellom 0 og 3 elever i hver undervisningstime som hadde minimal deltakelse, både i diskusjon med læringspartner og diskusjonen i plenum. De kritiske elementene som er gjort mulig å lære i denne time, reflekterer ikke læring til alle elever.

I Kullberg (2010) beskrives prosessen med en Learning Study gjort på de kritiske elementene som omhandler addisjon og subtraksjon av negative tall. Metoden for studien er en Learning Study der de designer og reviderer 4 undervisningstimer i 4 forskjellige klasser på samme nivå. De inkluderte alle mulige sammensetninger innenfor operasjoner og tallverdi (negativ og positiv). Konklusjonen var at når elevene hadde mulighet til å bevisstgjøre seg på de kritiske elementene, lærte også flere elever det tiltenkte læringsobjektet (Kullberg (2010); Marton og Kullberg, 2024). Gjennom de fire undervisningstimene identifiserte de følgende kritiske elementer; 1) forskjellen mellom fortegnene for subtraksjon og negative tall, 2) å se på subtraksjon som en forskjell, 3) kommutativ lov gjelder ikke ved subtraksjon, og 4) det numeriske systemet (større tall til høyre) (Kullberg (2010); Marton og Kullberg, 2024). Gjennom de fire undervisningstimene kunne undervisningsdesignet tilpasses ut ifra hvilke kritiske elementer som ble observert. Slik ble resultatet etter endte undervisninger:

Oppgave	Time 1 Prøve før/ prøve etter	Time 2 Prøve før/ prøve etter	Time 3 Prøve før/ prøve etter
Addisjon (-5) + (-2) =	24% / 65%	53% / 65%	29% / 86%
Subtraksjon (-5) – (-2) =	35% / 29%	41% / 65%	29% / 86%

Tabell 5.1: Resultat fra Kullberg (2010) sin forskning på undervisning med negative tall

Kullberg (2010); Marton og Kullberg (2024), fant at når de samme kritiske elementene ble implementert i timene av andre lærere som ikke hadde deltatt i Learning Studyen, genererte det lignende læringsutbytte for elevene deres. Dette antyder at de kritiske elementene kan være nyttige for andre lærere og elever (Kullberg (2010); Marton og Kullberg, 2024).

En studie gjort av Pillay (2013) ref. I Kullberg et al. (2017) fant de at ved å presentere en funksjon, for deretter å presentere en annen av ulik karakter hadde mindre læringsutbytte for elevene, sammenlignet med eksempler av funksjoner som ble diskutert samtidig. Det viser også resultatet av denne forskningen. F.eks. når uttrykkene «27 + 76 = ▣ + 27» og «17 • n = 93 • 17» ble presentert samtidig kunne elevene gjøre seg bevisst på at kritiske elementet for kommutativ gjelder både addisjon og multiplikasjon.

Kapittel 6 Konklusjon

6.1 Sammendrag av forskningsfunn

I denne masteroppgaven er målet å svare på følgende forskningsspørsmål;

1. Hvordan designe en undervisning basert på teoretisk forutsagte kritiske elementer med variasjonsteori i en time i algebra ved bruk av Learning Study?

2. Hvilke kritiske elementer observeres i algebraundervisning, basert på elevers formuleringer, og en påfølgende test etter timen, ved bruk av Learning Study.

Resultatkapittelet viser at produktet av et undervisningsdesign bør nøye planlegges ut ifra det identifiserte læringsobjekt. Å ha god oversikt over kritiske elementer innenfor algebra virker viktig, også i oppfattelsen av nye. Når kritiske elementer skal identifiseres innenfor læringsobjektet viser at en teoretisk gjennomgang bør gjøres i de fleste tilfeller. Når forskning gir beskrivelser på hvilke kritiske elementer som er nødvendig å bevisstgjøre seg på for å få en dypere forståelse for læringsobjektet, vil det øke implementering og bevisstgjøring av disse i klasserommet. Når kritiske elementer inneholder kunnskap som elevene, ifølge læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020), er det viktig å vurdere hvor fusjon skal brukes som variasjonsmønster og ikke. Dette viser seg å ha en påvirkning på elementene elevene velger å synligjøre. Når elevene snakker om disse i klasserommet, synliggjøres elementer for elevene som ikke har bevisstgjort seg på dem. Konklusjonen fra dette er at synliggjøringen var følgende i undervisning:

Kritiske elementer som ble synliggjort.	**Kritiske elementer som ikke ble synliggjort.**	**Observerte nye kritiske elementer.**

Kommutativitet, potens, multiplikativitet, dobling og halvering, prioriteringsregel, likhetstegnet og symbol for ukjent. Subtraksjon av negative tall (variert synlighet).	Fordeling,	Identitet ($x \bullet 1 = x$ og $x \bullet 0 = 0$)

Tabell 6.1: Synliggjort kritiske elementer fra kommunikasjonen i klasserommet

Om elementet variabel skal undervises, er det ikke tilstrekkelig for en lærer å bare vite hva det er, men også vite hvilke typer misoppfatninger som er vanlig at elevene har og kan hindre en dypere forståelse for elementet. Funn fra prosessen med å finne kritiske elementer i algebra viser at det handler i stor grad om elementer elevene tidligere skal ha lære som er kritiske. Da viser jeg til strukturelt syn på aritmetikken og et strukturelt syn i henhold til likhetstegnet.

Variasjon med kontrast, generalisering og fusjon hadde bevisstgjørende effekt på elevene. F.eks. når et symbol for ukjent ble innført, referert elevene tilbake til uttrykket uten et symbol for ukjent. Da ble det kritiske elementet for struktur på aritmetiske regneregler hold invariant, mens det kritiske elementet for ukjent ble variert ved at det var til stede og ved at symbolet varierte. Elementene som synliggjøres gir svar på hva som er gjort mulig å lære og hvilke elementer elevene kan bevisstgjøre seg på i undervisningstimen. Det gir også svar på hvilke kritiske elementer elevene som ikke er gjort mulig å lære ut ifra undervisningsdesignet.

Et annet funn fra observasjonen viser at, ut ifra kommunikasjonen i klasserommet, kan bruken av variasjon korrumpere visse kritiske elementer. Om et kritisk element blir synliggjort før en oppgave der samme kritiske element kan brukes, vil dette kritiske elementet potensielt overskygge et annet kritisk element. Et eksempel på dette er oppgaven $4 \bullet (5 + 3) = 4 \bullet 5 + 4 \bullet 3$. I uttrykket som elevene diskuterte før dette var $(14 + 3) \bullet 2 = 14 + 3 \bullet 2$. I det sistnevnte uttrykket er det naturlig å bruke prioriteringsregelen til å finne løsningen. Derfor kan det tenkes at, siden venstre siden av likhetstegnet er i uttrykket $4 \bullet (5 + 3) = 4 \bullet 5 + 4 \bullet 3$ har samme struktur, virket det naturlig for elevene å bruke samme strategi. På samme måte viste resultatet at bruken av variasjon også har et potensiale i å få elevene til å bruke den tiltenkte strategien i en oppgave de i utgangspunktet kanskje ikke ville brukt denne strategien. Et eksempel er uttrykket 4 = ½ *v. Her bruker elevene dobling og halvering som argumenter, selv om det ikke er en åpenbar dobling og halveringsoppgave som "4 • 15 = 2 • 30".

En annen variasjon observert fra datamaterialet er at, selv om kritiske elementer som symbol for ukjent, struktur iht. likhetstegnet og prioriteringsregel, er alle synliggjort i undervisning, vil fusjon av et nytt kritisk element i en prøve, vise at elevene ikke har bevisstgjort seg på det nye elementet. Det vises i oppgaven på prøva "(7+3)m = 7+3. Her er identitet (x • 1 = x og x • 0 = 0) det nye kritiske elementet. Om fusjon brukes på kritiske elementene før de blir variert separat, vil et fokus på elementene elevene allerede har bevisstgjort seg på, gjøre at det nye fusjonerte kritiske elementet blir oversett.

Ut ifra de observerte kritiske elementene som ble synliggjort finnes det fordeler ved å implementere forutsagte kritiske elementer fra teori. Det gjør at undervisningen kan fange opp elementer på en objektiv måte, uavhengig av lærerens kunnskaper. En objektiv evaluering av elementene som blir synliggjort vil kunne hjelpe å avgrense videre definering av læringsobjektet. En skreddersydd definering av læringsobjektet vil da kunne gi elevene undervisning på området som har størst begrensning for forståelsen for temaet. I denne studien, tyder det på at en videre avgrensing, bør være på variasjonsmønsteret separasjon innenfor struktur med de aritmetiske regnereglene fordeling og identitet. I tillegg kan det være hensiktsmessig å bruke kontrast på oppgaver som inneholder prioriteringsregel, for at elevene skal se når dette kritiske elementet brukes og ikke. Etterpå bør fordeling og identitet brukes med fusjon sammen med andre aritmetiske regneregler. En annen nyttig avgrensing kan være en time som baseres på regneoperasjoner med negative tall. Da vil det være nyttig å lese seg opp på de kritiske elementene som er observert i en lignende undervisning (ref. Kullberg (2010); Kullberg og Marton (2024)).

6.2 Forskningen praktiske verdi

Denne forskningen har gitt et forslag på hvordan en kan bruke teoretisk forutsagte kritiske elementer med variasjon i et undervisningsdesign. På grunnlag av dette, har vi kunnet sett hvilke av disse elementene som synliggjøres i undervisning. Det har belyst noen hensyn å ta i implementeringen av de teoretisk forutsagte elementene. Blant annet at i synliggjøring av de kritiske elementene, viser at både variasjon med kontrast og generalisering kan brukes sammen med fusjon når elementene er noen elevene skal ha lært fra tidligere. Det er viktig å være bevisst på nyansene i hvilke kritiske elementer eksemplene inneholder. Spesielt når de presenteres etter hverandre. Undervisning av kritiske elementene basert på teori, kan også hjelpe med å avgrense videre undervisningsdesign slik at det for elevene har størst utbytte i å forstå læringsobjektet.

Siden fokuset i norsk skole (eksamen, 2024; Grønmo og Hole, 2017) har hatt et økende fokus på anvendt matematikk, er det viktig å ta i betraktning hvilke kritiske elementer elevene gjør seg bevisst på. Det er i en undervisning med anvendte eksempler viktig å kunne legge merke om elevene mangler forståelse for matematiske konsepter eller om elevene sliter med matematisering av fenomener fra omverdenen.

6.3 Forslag til videre forskning

Et forslag til videre forskning er å se på om norske lærere, med tanke på algebraprestasjon, har tilstrekkelig kunnskap i å identifisere kritiske elementer innenfor algebra. Dette gjelder observerte kritiske elementer fra undervisningstime, hvilke elementer som skaper dypere læring for læringsobjektet, og hvilke kritiske elementer som generelt skaper misoppfatninger på læringsobjektet. Da er det nødvendig å teste en mengde læreres evne til å identifisere 1) hvilke kritiske elementer som finnes, 2) kritiske elementer som elever ofte sliter med, 2) måter å tilrettelegg og oppfatte disse i undervisning, og evt. nye. Dette blir en forskning på læreres kunnskap, og ikke på elevers kunnskap.

En annen vinkling er om de kritiske elementene innenfor algebra norske elever ikke har gjort seg bevisst på, som forårsaker den svake prestasjonen, er de samme som lærere ikke har gjort seg bevisst på.

Grønmo og Hole (2017) nevner også at en hypotese på elevers svake algebraprestasjon kan komme av at matematikken har prioritert anvendt matematikk. En kan se for seg at anvendt matematikk tilfører en bred variasjon i kontekst og representasjonsformer. Studier (Guo og Pang, 2012) har vist at dette kan føre til et overbelastet arbeidsminne, noe som reverserer effekten av eksempelbruk på elevers læring. Derfor er et forslag til videre forskning å se på balansen mellom anvendt matematikk og ren matematikk i bruk av variasjonsteoretisk tilnærming. Da vil effekten av variasjon innenfor uttrykk i en autentisk kontekst, kunne variere i ulik grad for å se om kritiske elementene kom ende bevisstgjøres.

I lys av den norske 10.klasse-eksamen i matematikk fra 2024 (eksamen, 2024), som bare inneholder oppgaver med anvendt matematikk, vil det være en fordel å se om kompetanse på andre arenaer enn matematikk i preger matematikk-vurderingen. Reflektere kunnskapen i matematikk kunnskapen eleven viser på en prøve med hverdagslige kontekster.

Et siste forslag til videre forsking er å utvide og utvikle læringsteorien variasjonsteori i lys av hvilke kritiske elementer som har potensialet til å både fremkalle og korrumpere bruken av andre. En måte å se på dette aspektet er å knytte det opp det eksisterende rammeverket. En annen måte er å utvide rammeverket slik at dette aspektet blir bevisstgjort og en del av det eksisterende i bevisstgjøring av effekten variasjon har.

Referanseliste

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249–272. https://doi.org/10.1080/10986060701360910

Baskoro, I., (2021). Variation theory-based mathematics teaching: The new method in improving higher order thinking skills. *Journal of Physics: Conference Series. (1957)* https://doi.org/10.1088/1742-6596/1957/1/012016

Cobb, P., & Confrey (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher.* 3(2) 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009.
English, L. D., Kirshner, D., & Burkhardt, H. (2016). *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. XI, 726). Routledge.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *The American Mathematical Monthly*, *111*(5), 411–424. https://doi.org/10.2307/4145268

Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole.* Oslo, Unipub.

Grønmo L. S. & Hole, A., (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken*. Cappelen Damm Akademisk.

Gu, L., Hunag, R., & Marton F., (2004). Teaching with Variation: A Chinese Way of Promoting Effective Mathematics Learning. *How Chinese Learn Mathematics.* (309-347). https://doi.org/10.1142/9789812562241_0012

Guo, J. P., Pang, M. F., Yang, L.Y., & Ding, Y. (2012). Learning from comparing multiple examples: On the dilemma of “similar” or “different”. *Educational Psychology Review*, 24(2), 251–269. https://doi.org/10.1007/s10648-012-9192-0

Hole, A., Borge, I. C. & Grønmo, L. S. (2021). From upper secondary school to university calculus: Language difficulties versus conceptual difficulties. ICME-14, Shanghai, China.

Jansen, S., Knippels, M.-C.P.J. & van Joolingen, W.R. (2021), Lesson study as a research approach: a case study, *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 10(3), 286-301. https://doi.org/10.1108/IJLLS-12-2020-0098

Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? I J.J. Kaput, D.W. Carraher & M.L. Blanton (Red.), Algebra in the early grades, (s. 5-18). Dartmouth: Erlbaum.

Kullberg, Angelika. (2010). What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics. Gothenburg studies in educational science. https://doi.org10.13140/RG.2.2.17823.76967.

Kullberg, A., Marton, F., & Runesson, U. K. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM Mathematics Education*. (559–569) https://doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4

Kullberg, A., Ingerman, Å., & Marton, F., (2024). Planning and Analyzing Teaching: Using the Variation Theory of Learning. https://doi.org/10.4324/9781003194903.

MacDuffee, C. (2024, January 12). *arithmetic*. *Encyclopedia Britannica*. https://www.britannica.com/science/arithmetic

MacDuffee, C. (2024, January 12). *arithmetic*. *Encyclopedia Britannica*. https://www.britannica.com/science/arithmetic

Marton, F. (1999). Variatio est mater Studiorum. In: Opening address delivered to the 8th European Association for Research on Learning and Instruction Biennial Conference, Goteborg, Sweden, August 24–28.

Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah N.J.: Lawrence Erlbaum.

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 15(2), 193–220. **https://**doi.org/10.1207/s15327809jls1502_2

Marton, F., & Pang, M. F. (2013). Meanings are acquired from experiencing differences against a background of sameness, rather than from experiencing sameness against a background of difference: Putting a conjecture to test by embedding it into a pedagogical tool. *Frontline Learning Research*, 1(1), 24–41. https://doi.org/10.14786/flr.v1i1.16

Marton, F., & Tsui, A. B. (2004). Classroom discourse and the space of learning. Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781410609762

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P, Kelly, D. L., & Fishbein B., (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science.* TIMSS & PIRLS International Study Center. https://timss2019.org/reports/wp-content/themes/timssandpirls/download-center/TIMSS-2019-International-Results-in-Mathematics-and-Science.pdf

OECD (2023), PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education, PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/53f23881-en

Pang, M. F. (2006). The use of learning study to enhance teacher professional learning in Hong Kong. *Teaching Education*, 17, 27–42.

Pang, M. F., & Ling, M. L. (2012). Learning study: Helping teachers to use theory, develop professionally, and produce new knowledge to be shared. *Instructional Science*, 40(3), 589–606, doi: 10.1007/s11251- 011-9191-4

Pang, M. F., & Marton, F., (2005) Learning Theory as Teaching Resource: Enhancing Students' Understanding of Economic Concepts. *Instructional Science* 33 (2), 159–191. https://doi.org/10.1007/s11251-005-2811-0

Pang, M. F., & Runesson, U. K., (2019), The Learning study: recent trends and developments. International. *Journal for Lesson and Learning Studies*, 8(3), 162-169. https://doi.org/10.1108/IJLLS-07-2019-093.

Rogers, L., (2009) The History og Negtative Numbers, *University of Cambridge. https://nrich.maths.org/5961*

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educ Stud Math*, 69, 149-163. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9148- y.

Selvi, K. (2008). Phenomenological Approach in Education. In: Tymieniecka, AT. (eds) *Education In Human Creative Existential Planning. Analecta Husserliana,* vol. 95 (39-51). https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6302-2_4

Schifter, D., (2018). Early Algebra as Analysis of Structure: A Focus on Operations. C. Kieran, C. (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (309-327) Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_13

Stephens A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler I., Gardiner A. M., & Marum, T., (2013) Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior* (32). 173-182. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.001

UiO. (2023, 05. desember). PISA https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/

Tjønneland, E., (30. oktober 2019). fenomen. I Store norske leksikon. Store norske leksikon. Hentet 23.mai, 2024 fra https://snl.no/fenomen

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1–10 (MAT01-05), Kompetansemål etter 4. trinn.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv18?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1–10 (MAT01-05), Kompetansemål etter 6. trinn.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv21?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1–10 (MAT01-05), Kompetansemål etter 8. trinn.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv17?lang=nob

Eksamen (2024). *MAT0015 Matematikk 10 årstrinn.* Utdanningsdirektoratet

Gyldendal Akademisk (2023, 07. november). Om faget: Hva er algebraisk tenkning?

Vygotskij, L.S., Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. & Souberman, E. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes. Cambridge,* Mass: Harvard University Press.

Wladis, C., Sencindiver, B., & Offenholley, K. (2022) An Exploration of How College Students Think About Parentheses in the Context of Algebraic Syntax.. *Proceedings of the 44th Annual Psychology of Mathematics Education-North America (PME-NA) Conference*, *44*. HAL ID: hal-04418311

NTNU

Kunnskap for en bedre verden