Bacheloroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

John Aslak Wee Kleven

Ultraprodukter og anvendelser i kommutativ algebra

Ultraproducts and applications in commutative algebra

Bacheloroppgave i matematikk
Veileder: Petter Andreas Bergh
Mai 2024

$$
\begin{tikzcd}
 & U(A) \arrow[rr] \arrow[rrrd, dashed] & & U(A)/\mathfrak{a}^e \arrow[rd, dashed] & \\
A \arrow[ru] \arrow[rr] & & A/\mathfrak{a} \arrow[ru] \arrow[rr] & & C_\natural
\end{tikzcd}
$$

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

John Aslak Wee Kleven

Ultraprodukter og anvendelser i kommutativ algebra

Ultraproducts and applications in commutative algebra

Bacheloroppgave i matematikk
Veileder: Petter Andreas Bergh
Mai 2024

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Ultraprodukter og anvendelser i kommutativ algebra
Ultraproducts and applications in commutative algebra

John Aslak Wee Kleven

2024-05-31

Sammendrag

Denne oppgaven gir en introduksjon til ultraprodukter, med sikte for å gjøre algebra med dem. Ultraproduktet, en konstruksjon fra modellteorien, er et slags gjennomsnitt av objektene det tar inn: Et ultraprodukt av ringer $(A_w)_{w \in W}$ tilfredsstiller nøyaktig de samme "enkle" egenskapene som "nesten alle" av A_w-ene har.

Etter en gjennomgang av, filtre, som vil beskrive hvordan man skal ta gjennomsnittet, definerer vi ultraprodukter, beviser Łoś' teorem, og bygger teori for ultraprodukter av ringer. Vi viser noen rare resultater om algebraisk lukka kropper og at uendelige ringer ikke kan bli førsteordensaksiomatisert, og vi ser analyse fra et nytt perspektiv med ikkestandard analyse. Vi introudserer ultrahylsteret og bruker den til å vise noen resultater om uniforme begrensninger i teorien av polynomringer over kropper, og ser på kataprodukter, som skal prøve å løse det problemet om at ultraprodukter sjelden er noetherske. Til slutt drøfter vi temaer ikke diskutert i denne oppgaven, som for eksempel ultraprodukter av og i kategorier.

Denne oppgaven er tospråklig og skrevet på både norsk og engelsk. Den norske versjonen begynner på side 1, og den engelske på side 131.

Abstract

This thesis gives an introduction to ultraproducts, with a view towards doing algebra with them. The ultraproduct, a construction from model theory, is a sort of average of the objects it takes in: An ultraproduct of rings $(A_w)_{w \in W}$ satisfies the same "simple" properties that "almost all" of the A_w-s have.

After taking a look at filters, which will describe how to take the average, we define ultraproducts, prove Łoś' theorem, and build theory of ultraproducts of rings. We show some weird results algebraically closed fields and that infinite rings cannot be first-order axiomatized, and see analysis from a different perspective with nonstandard analysis. We introduce the ultra-hull and use it to prove some results on uniform bounds in the theory of polynomial rings over fields, and look at cataproducts, which are supposed to solve the problem of ultraproducts being rarely Noetherian. At the end we discuss some topics we haven't looked at in this thesis, like ultraproducts in and of categories and further nonstandard analysis, and refer to further reading for those interested.

This thesis is bilingual and written in both Norwegian and English. The English version begins on page 131, and the Norwegian version on page 1.

Innhold

Contents

Kapittel 1

Introduksjon

Denne bacheloroppgaven har to mål. Det første er å gi en grundig innføring i hva ultraprodukter er og hva man kan gjøre med dem – hovedsakelig i algebra – og det andre er å gjøre kommutativ algebra med dem.

Et ultraprodukt av en familie av ringer $(A_w)_{w \in W}$ kan bli tenkt på som et slags gjennomsnitt av dem: den tilfredsstiller visse "ukompliserte" algebraiske egenskaper hvis og bare hvis flesteparten ringene i familien gjør det. Hvordan man tar dette gjennomsnittet vil bli avgjort ved å velge et fritt ultrafilter $\mathcal{F}$ på indeksmengden W. Det kan ikke bli valgt på noen konstruktiv måte, så ultraproduktet er en innbyrdes ikkekonstruktiv konstruksjon. Denne intuisjonen bryter ned i spesialtilfellet hvor alle A_w-ene er like en A, hvor ultraproduktet kalles ultrapotensen til A. Her vil ultraproduktet ta A og legge til flere, "ikke-standarde" elementer til A. Ultraproduktkonstruksjonen avhenger av valg av $\mathcal{F}$, og generelt kan en endring av $\mathcal{F}$ medføre en endring av ultraproduktet opp til isomorfi. Vi vil imidlertid se at spørsmålene vi er interesserte i[1] ikke er påvirka av dette. I ordene til [41, s. 2] oppfører ultraprodukter seg nesten om de var intrinsisk definert.

For å forstå begynnelsen av oppgaven burde leser kunne tilsvarende et første emne om ringer og blant annet være komfortabel med første isomorfiteorem, polynomringer i vilkårlig mange variable, noetherske ringer, og kroppsteori som algebraisk lukka kropper, algebraiske tillukninger til kropper, og brøkkropper. Leser burde også være kjent med grunnleggende kategorisk konsepter som

[1] La oss håpe at ingen modellteoretikere leser denne oppgaven.

kategorier, funktorer, produkter og hvordan funktorer kan bevare dem, og naturlige transformasjoner. For kapittel 4 bør leser være kjent med metriske rom og standardkonsepter der (kontinuitet, åpne/lukka mengder, konvergens, uniform kontinuitet). I digresjoner vil vi kunne bruke mer avanserte konsepter, som (kategoriske) grenser og adjungerte funktorer. Fra og med kapittel 5 antas det også at leseren er kjent med grenser/kogrenser, tensorprodukter av moduler, og mer avanserte kategoriske konsepter som abelske kategorier og eksakte funktorer. Vi vil introdusere den logikken og (hovedsakelig kommutative) algebraen vi vil ha behov for underveis. Jeg har valgt anta at leserne ikke kan kommutativ algebra da det undervises langt sjeldnere ved NTNU enn den andre algebraen vi vil bruke.

Målet om å introdusere ultraproduktet er hvorfor jeg har valgt å definere ultraproduktet for mengder før oppgaven går videre med det vi er interessert i, nemlig ultraprodukter av ringer og andre algebraiske strukturer, og er også hvorfor vi se på Łoś' teorem[2] i full generalitet. Det andre valget muliggjør også visse typer argumenter som ikke ville være tilgjengelige om man hadde en svakere version av teoremet, som de hvor man bruker teoremet på påstander som kvantifiserer over delmengder, en teknikk vi vil få nytte av flere ganger.

For å prøve å være pedagogisk har jeg prøvd å være så stringent som mulig i begynnelsen av oppgaven. Vi gir også mange bevis som er utelatt i [41], og fyller inn detaljer i bevis derfra[3]. Jeg tror dette vil være til nytte for leserne, som jeg antar ikke har sett ultraprodukter før. Praktisk anvendelse av Łoś' teorem har spesielt mange subtiliteter som kan være vanskelig å ha kontroll på ved første møte, og mange forfattere velger å identifisere kanoniske bijeksjoner uten å si ifra.

Denne oppgaven er ikke ment å være en lærebok, så vi er frie fra deres begrensninger og forventninger, som den moderne trenden om å blant annet være "slank" og "effektiv". Oppgaven er ment å være utforskende. Den har mange digresjoner ment å se kjente resultater og konsepter i nytt lys, peke leser i retninger vi ikke skal se på eller jeg ikke kan noe om, eller besvare naturlige spørsmål jeg selv har tenkt på. De blir ikke brukt for videre teoribygging. Digresjonene er en viktig del av oppgaven; for å forstå noe godt er det min mening at man bør ha ha sett det fra flere innfallsvinkler, og digresjonene er ment å hjelpe med dette. Disse valgene har gjort at oppgaven har blitt mye lengre enn det den kunne ha vært. (Det samme kan sies om mitt valg å gjøre den

[2] Omtales omtrent "wåsh".

[3] I noen bevis, som de til det som for oss er proposisjon 6.2.7 og teorem 3.9.12, er spesielt mange detaljer utelatt.

tospråklig). Digresjonene gjør også at oppgaven ikke er skrevet for at leseren skal forstå og sette pris på alt. Valget om å se på oppgaven som en spasertur med mange omveier og fine resultater langs veien gjør at jeg ville lurt meg selv om jeg trodde at jeg skrev for alle. Jeg håper at dette imidlertid gjør at mange vil kunne få noe ut av oppgaven; eksponering til det ukjente er tross alt bra.

Mine egne bidrag i denne oppgaven er hovedsakelig at jeg har fylt inn detaljer [41] har utelatt – noen ganger ansvarsløse mengder – og et håndfull ganger generalisert resultater derfra, kommet med et funktorielt perspektiv av ultraprodukter og noen ganger egen utforskning, som for eksempel i avsnitt 5.9, hvor jeg ser på ultraprodukter av moduler. Følgende bevis er mine egne: De i avsnittene 2.3, 3.7, 4.2, 5.8 og 5.9, alle funktorielle resultater, alle digresjoner, lemmaer og eksempler i avsnitt 3.9, og bevisene til lemma 6.2.11 og teorem 6.3.5.

Struktur

Kapittelstrukturen er følgende:

(ii) I kapittel 2 studerer vi filtre, som vi vil bruke for å kunne "ta gjennomsnittet" ultraprodukter skal være. Vi viser også hvordan man kan tolke frie ultrafiltre som visse sannsynlighetsmål.

(iii) Kapittel 3 markerer begynnelsen av den spennende delen av oppgaven. Vi introduserer ultraprodukter, diskuterer og beviser Łoś' teorem, det såkalte fundamentalteoremet for ultraprodukter. Deretter retter vi vår oppmerksomhet mot ultraprodukter av ringer, og bygger grunnleggende teori for dem. Vi avslutter kapittelet med noen interessante resultater om algebraisk lukka kropper, og en digresjon om hvordan ultraprodukter lar oss vise at man ikke kan finne førsteordensaksiomatiseringer av uendelige ringer.

(iv) I kapittel 4 ser vi på hvordan vi kan bruke ultraprodukter til å se på analyse fra et nytt perspektiv, med ikkestandard analyse. Vi vil gi intuitive karakteriseringer av noen konsepter fra analysen, som at kontinuitet av en funksjon er ekvivalent med at en uendelig liten endring i input gir en uendelig liten endring i output.

(v) I kapittel 5 vil vi repetere algebra vi vil ha behov for senere i oppgaven; den har blitt plassert her for å bedre flyten i de senere kapitlene. Etterpå ser vi hvordan noen av disse konseptene oppfører seg med henhold på ultraprodukter. De syv første repetisjonsavsnittene er alle uavhengige av hverandre og kan leses i den rekkefølge man ønsker.

(vi) I kapittel 6 introduserer vi ultraalgebraer, en spesiell ultraalgebra kalt et ultrahylster, og vi bruker disse til å vise tre resultater om uniforme begrensninger i teorien av polynomringer.

(vii) I kapittel 7 gir vi en kort introduksjon til kataprodukter, en modifikasjon av ultraproduktet som vi definerer for noetherske lokale ringer. Ultraprodukter viser seg å sjelden være noetherske, mens kataproduktene ofte er det. Vi viser at et kataprodukt av DVR-er selv er en DVR, og at dette ikke holder for ultraprodukter.

(viii) I det siste kapittelet, kapittel 8, vil vi skissere og nevne temaer vi ikke har sett på i oppgaven, som ultraprodukter i og av kategorier og videre ikkestandard analyse, og henviser til videre lesning for de interesserte.

Følgende diagram (eller kogger om man vil) viser hvordan kapitlene avhenger av hverandre:

$$
\begin{tikzcd}
 & 4 & & 6 \\
2 \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[r] & 5 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 7 \\
 & & & 8
\end{tikzcd}
$$

Bærekraft

Den nåværende bærekraftsstrategien til IE-fakultetet[4], hvor IMF[5] er underlagt, har et punkt som sier at alle bachelor- og masteroppgaver ved fakultetet skal inneholde en bærekraftsrefleksjon [15]. Som ledd i strategien ble det nylig lagt til et formelt krav for de ovennevnte gradsoppgavene under instituttet om at det skal reflekteres i lys av FNs bærekraftsmål [16]. Siden dette er en oppgave i ren matematikk vurderer jeg bærekraft å ikke være relevant for den, og at fakultetets krav om at alle studentoppgaver skal reflektere over deres bærekraftrelevans er en fornærmelse av alt det viktige arbeidet som gjøres for å nå bærekraftsmålene.

[4]Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk.
[5]Institutt for matematiske fag.

Takk

Jeg takker min veileder Petter for å la meg begynne på et prosjekt ingen av oss kunne noe om og å gi meg frie tøyler til å utforske ultraprodukter som jeg ville. Uten ham hadde denne oppgaven blitt langt på nær så lærerik og lang som den ble.

Jeg vil takke min mor Elisabeth og venn Bjørn for å ha korrekturlest en betydelig og liten del av oppgaven henholdsvis.

Til slutt ønsker jeg å takke min medsammensvoren i mengdelærekriminalitet Denis for å ha utforska matematikk med meg og for mange opplysende diskusjoner gjennom studietida og Vg3.

Notasjon og konvensjoner

I denne oppgaven vil $\subseteq$ bety delmengde og $\subset$ ekte delmengde[6]. Null er ikke et naturlig tall. Vi skriver $\mathbb{P}$ for mengden av primtall. Vi skriver $\mathbb{F}_p$ og $\mathbb{Q}_p$ for Galoiskroppen med p elementer, også kjent som $\mathbb{Z}/(p)$, og kroppen av de rasjonale p-adiske tallene henholdsvis. Den algebraiske tillukningen til en kropp k skrives $\overline{k}$. Algebraen vi gjør er kommutativ, så vi følger dets konvensjoner: Alle ringer her er kommutative og unitære, og alle ringhomomorfier sender 1 til 1. Videre har hver underring $B \subseteq A$ samme enhet som A. Nullringen er en ring, men ikke et integritetsområde. Kategorier trenger ikke å være lokalt små, men Hom-mengder vil i alle tilfeller bli kalt mengder, uavhengig av om hvorvidt de er mengder eller ei. Underkategorier trenger ikke å være fulle. Kategorien av ringer kalles CRing. Isomorfier skrives med $\simeq$, og samme symbol brukes også for uendelig nærhet. Alle funktorer er kovariante med mindre noe annet er sagt. For en mengde I skriver vi $\mathcal{P}(I)$ for dets potensmengde, og $\mathcal{P}^{\text{fin}}(I)$ for mengden av alle dets endelige delmengder.

[6] Jeg er forferdet over det at noen syns at det er en god idé å skrive $\subsetneq$ og håper at menneskeheten kollektivt tar seg sammen og fjerner dette pinlige symbolet fra matematikken.

Kapittel 2

Filterteori

Et ultraprodukt av en samling av objekter indeksert over en indeksmengde I skal være et slags gjennomsnitt av dem, slik at ultraproduktet vil ha egenskaper som "mange" av objektene har. For å kunne definere ultraprodukter trenger vi da et slags sannsynlighetsmål på indeksmengden I som lar oss skille mellom "store" og "små" delmengder av I. Den rollen vil filtre ha, og i dette kapittelet vil vi bygge teorien for filtre for å kunne definere og jobbe med ultraprodukter.

I dette kapittelet vil I være en fiksert ikketom mengde som alle våre filtre vil være over. Vi definerer komplementer til å være relative til I, så for $A \subseteq I$ lar vi komplementet A^c være $I \setminus A$.

2.1 Filtre og ultrafiltre

Husk at potensmengden $\mathcal{P}(X)$ til en mengde X er mengden av alle dets delmengder.

Definisjon 2.1.1. Et filter $\mathcal{F}$ på en ikketom mengde I er en mengde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ slik at

(i) (Svak nedad lukkethet): For $A, B \in \mathcal{F}$ vil $A \cap B \in \mathcal{F}$, og

(ii) (Sterk oppad lukkethet): For $A \subseteq B \subseteq \mathcal{P}(I)$ med $A \in \mathcal{F}$, så vil $B \in \mathcal{F}$.

For eksempel er $\mathcal{F} = \{I\}$ og $\mathcal{F} = \mathcal{P}(I)$ to eksempler man alltid har. Siden hvert filter er ikketomt vil alle filtre på I inneholde I selv.

Lemma 2.1.2. La $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$. Følgende er ekvivalent:

(i) $\mathcal{F}$ er et filter,

(ii) For hver $A, B \subseteq I$ vil $A \cap B \in \mathcal{F}$ hvis og bare hvis $A, B \in \mathcal{F}$, og

(iii) For hver naturlige n og $A_1, \cdots, A_n \subseteq I$ vil $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$ hvis og bare hvis $A_i \in \mathcal{F}$ for hver i.

Bevis. Punkt (iii) er ekvivalent med (ii) ved induksjon, så (i) $\Leftrightarrow$ (ii) gjenstår. Anta at $\mathcal{F}$ er et filter, og skal vise

$$A \cap B \in \mathcal{F} \iff A, B \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Vi får $\Leftarrow$ av filteraksiom (i), og $\Rightarrow$ av filteraksiom (ii).

Anta at $\mathcal{F}$ isteden tilfredsstiller (1). Vi får (i) av $\Leftarrow$, så (ii) gjenstår. Dersom $A \subseteq B \subseteq \mathcal{P}(I)$ og $A \in \mathcal{F}$ har vi $A = A \cap B \in \mathcal{F}$ slik at $B \in \mathcal{F}$, som viser (ii). □

Definisjon 2.1.3. Et filter $\mathcal{F}$ er *ekte* dersom det har følgende ekvivalente egenskaper: (i) $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(I)$, og (ii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Bevis. Dette er det kontrapositive av ekvivalensen $\emptyset \in \mathcal{F} \iff \mathcal{F} = \mathcal{P}(I)$, som følger direkte av filteraksiom (ii). □

Kommentar 2.1.4. Noen forfattere krever at filtre også tilfredsstiller $\emptyset \notin \mathcal{F}$, slik at $\mathcal{P}(I)$ ikke er et filter og alle filtre er ekte.

I algebraen er vi interesserte i maksimale idealer, som er idealer $\mathfrak{m} \subsetneq A$ som er så store at det fins ingen andre idealer mellom $\mathfrak{m}$ og idealet $\mathfrak{a} = A$. Vi er også interessert i tilsvarende for filtre.

Definisjon 2.1.5. Et ekte filter $\mathcal{F}$ på I er et *ultrafilter* dersom disse ekvivalente betingelsene holder:

(i) $\mathcal{F}$ er et maksimalt ekte filter: for hvert filter $\mathcal{G}$ på I slik at $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I)$ vil enten $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ eller $\mathcal{G} = \mathcal{P}(I)$, og

(ii) For hver $A \subseteq I$ vil enten $A \in \mathcal{F}$ eller $A^c = I \setminus A \in \mathcal{F}$.

Slike filtre kalles også maksimale filtre.

Bevis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Anta $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I)$; skal vise at den andre inklusjonen er en likhet. Da fins $A \subseteq I$ slik at $A \in \mathcal{G}$ og $A \notin \mathcal{F}$. Følgelig $A^c \in \mathcal{F}$ så $A^c \in \mathcal{G}$, slik at $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{G}$ og $\mathcal{G}$ er ekte ved definisjon 2.1.3.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Anta at $\mathcal{F}$ er maksimalt og velg $A \subseteq I$. Anta at $A^c \notin \mathcal{F}$, skal vise at $A \in \mathcal{F}$. La nå

$$\mathcal{G} = \{X \subseteq I \mid X \supseteq B \cap A \text{ for en } B \in \mathcal{F}\}$$

slik at vi har en kjede $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I)$ hvor $A \in \mathcal{G}$.

Påstand. $\mathcal{G}$ er et filter. Oppad lukkethet er per definisjon, så snitt gjenstår. Dersom $X, Y \in \mathcal{G}$ vil $X = B \cap A$ og $Y = B' \cap A$ for $B, B' \in \mathcal{F}$. Da vil $X \cap Y \supseteq (B \cap B') \cap A$, slik at $X \cap Y \in \mathcal{G}$, og vi har (i).

Påstand. $\mathcal{G} \neq \mathcal{P}(I)$. Dette er fordi $A^c \notin \mathcal{G}$, og nøkkelingrediensen er det at $A^c \notin \mathcal{F}$. Dersom, for motsigelse, $A^c \in \mathcal{G}$ ville vi hatt $B \cap A \subseteq A^c$ for en $B \in \mathcal{F}$. Siden $A \cap A^c = \emptyset$ vil da $B \subseteq A^c$, slik at $A^c \in \mathcal{F}$ ved filteraksiom (ii), motsigelse.

Ved maksimalitet av $\mathcal{F}$ på kjeden $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(I)$ vil $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ slik at $A \in \mathcal{F}$. □

Ultrafiltre har en nyttig egenskap om hvordan de oppfører seg med henhold på unioner:

Lemma 2.1.6. Dersom $\mathcal{F}$ er et ultrafilter vil

$$A \cup B \in \mathcal{F} \iff A \in \mathcal{F} \text{ eller } B \in \mathcal{F}$$

for hver $A, B \subseteq \mathcal{P}(I)$.

Bevis. Vi har at

$$\begin{aligned} A \cup B \in \mathcal{F} &\iff (A \cup B)^c \notin \mathcal{F} \\ &\iff A^c \cap B^c \notin \mathcal{F} \\ &\iff A^c \notin \mathcal{F} \text{ eller } B^c \notin \mathcal{F} \\ &\iff A \in \mathcal{F} \text{ eller } B \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

hvor vi bruker De Morgans lov og lemma 2.1.2. □

Korollar 2.1.7. Dersom $\mathcal{F}$ er et ultrafilter vil

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F} \implies A_i \in \mathcal{F} \text{ for en } i.$$

Videre, hvis A_i-ene er parvis disjunkte er i unik.

Bevis. Første del følger av induksjon på lemma 2.1.6. Dersom, for motsigelse, $A_i \in \mathcal{F}$ og $A_j \in \mathcal{F}$ for $i \neq j$ vil $\emptyset = A_i \cap A_j \in \mathcal{F}$, som motsier det at $\mathcal{F}$ er et ultrafilter. □

Eksempel 2.1.8. Gitt en ikketom $X \subseteq I$ kan vi definere et filter

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq I \mid X \subseteq A\}.$$

Dette filteret kalles det prinsipale filteret/hovedfilteret generert av X, og filtre på denne formen kalles prinsipale. Dersom X er en ettpunktsmengde er $\mathcal{F}$ et ultrafilter. Den motsatte implikasjonen holder også: For $x \in X$ vil $\{x\}^c \notin \mathcal{F}$ da $X \not\subseteq \{x\}^c$, og siden $\mathcal{F}$ er et ultrafilter vil $\{x\} \in \mathcal{F}$, så $X \subseteq \{x\} \subseteq X$ slik at inklusjonen er en likhet og X er en ettpunktsmengde.

Digresjon 2.1.9. Navnet kan motiveres av å komme fra en mer generell konstruksjon. Man kan vise at ethvert snitt av filtre på I er selv et filter på I. Tilsvarende algebraen kan man så definere et filter $\mathcal{F}$ generert av en samling $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ som snittet av alle filtre som inneholder F – det minste filteret som inneholder F. Eksempel 2.1.8 er tilfellet $F = \{X\}$. Ved lemma 2.1.2 kan man vise at at om $\mathcal{F}$ er generert av $F = \{X_1, \cdots, X_n\}$, så vil det også være generert av $\{X_1 \cap \cdots \cap X_n\}$, så man er hovedsakelig mest interesserte i om hvorvidt et filter er generert av ett element $F = \{X\}$ eller ei. Denne konstruksjonen er likevel nyttig. Vi har allerede sett den; filteret $\mathcal{G}$ i beviset for definisjon 2.1.5 er nemlig det generert av $\mathcal{F} \cup \{A\}$.

Eksempel 2.1.10. Husk at en mengde $A \subseteq I$ er koendelig dersom komplementet $A^c = I \setminus A$ er endelig. Anta at I er uendelig, og la

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq A \mid A \text{ er koendelig}\}$$

Da er $\mathcal{F}$ et filter, som kalles Frechétfilteret eller koendeligfilteret på I.

Filtre har et resultat som minner om Krulls teorem for idealer.

Teorem 2.1.11 (Ultrafilterlemma)**.** Hvert ekte filter på I kan bli utvidet til et ultrafilter på I.

Bevis. (skisse) Dette er en enkel anvendelse av Zorns lemma. Betrakt den ikketomme partielt ordna mengden av ekte filtre på I, med inklusjon $\subseteq$ som ordning. Gitt en kjede $(\mathcal{F}_n)_{n\in\Lambda}$, la $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\Lambda} \mathcal{F}_n$. Da kan man sjekke at $\mathcal{F}$ er et ekte filter, og det et er per konstruksjon en øvre grense til kjeden. Ved Zorns lemma vinner vi. □

Kommentar 2.1.12. Det er kjent at ultrafilterlemmaet er uavhengig av ZF med aksiomet av betinga utvalg (DC) [36, thm. 2] og svakere i ZF enn utvalgsaksiomet [35][1]. Krulls teorem er i motsetning ekvivalent med utvalgaksiomet og dermed Zorns lemma i ZF [20]. En konsekvens av det første er at man ikke kan eksplisitt konstruere frie ultrafiltre, da slike konstruksjoner (hva enn "eksplisitt" betyr, eller burde bety) må man kunne gjøre i ZF+DC.

2.2 Frie ultrafiltre

For "sannsynlighetsmålet" vi skal lage på I vil vi at alle punktmengder har mål null. I filter-terminologi betyr dette at vi er interessert i ultrafiltre $\mathcal{F}$ på I som inneholder ingen punktmengder. Om et slikt ultrafilter skulle inneholde en endelig mengde $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ vil

$$A = \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\} \in \mathcal{F}$$

og ved korollar 2.1.7 vil $\{a_i\} \in \mathcal{F}$ for en i. Følgelig må de ultrafiltrene vi er interesserte i inneholde ingen endelige mengder. Dette gir intuitiv mening; i et "gjennomsnitt" av ringer $\{A_i\}_{i \in I}$ med I uendelig vil vi ikke at en endring av endelig mange A_i skal kunne påvirke gjennomsnittet.

Definisjon 2.2.1. Et ultrafilter $\mathcal{F}$ er *fritt* dersom det tilfredsstiller følgende ekvivalente betingelser:

(i) $\mathcal{F}$ inneholder ingen punktmengder,

(ii) $\mathcal{F}$ inneholder ingen endelige mengder,

(iii) $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, og

(iv) $\mathcal{F}$ er ikkeprinsipalt.

Bevis. Vi viser (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Dette er gjort i diskusjonen i begynnelsen av avsnittet.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Velg $i \in I$. Da vil $\{i\} \notin \mathcal{F}$, så $\{i\}^c \in \mathcal{F}$ slik at $\bigcap \mathcal{F} \subseteq \{i\}^c \not\ni i$, som gir $i \notin \bigcap \mathcal{F}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Om $\mathcal{F}$ for motsigelse var prinsipalt ville $\mathcal{F} = \{A \subseteq I \mid X \subseteq A\}$ for en ikketom $X \subseteq I$. Men da vil $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$, motsigelse.

[1] Artikkelen viser strengt at det boolske primidealteormet er svakere enn ZFC, men dette tereoemet er kjent å være ekvivalent med ultrafilerlemmaet i ZF; se for eksempel [40, s. 338ff].

(iv) $\Rightarrow$ (i): Anta, for motsigelse, at $\{i\} \in \mathcal{F}$ for en $i \in I$. La $\mathcal{G}$ være det prinsipale ultrafilteret generert av $\{i\}$. Da har vi en kjede $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$, og siden $\mathcal{G}$ er et ultrafilter vil definisjon 2.1.5 gi $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Så $\mathcal{F}$ er prinsipal, motsigelse. $\square$

Det gjenstår å vise at frie ultrafiltre fins. Ved punkt (ii) over fins ingen frie ultrafiltre på endelige I, så det optimale resultatet ville vært om de fantes for alle uendelige I. Vi kan brukte ultrafilterlemmaet til å vise dette:

Teorem 2.2.2. For hver uendelige I fins et fritt ultrafilter på I.

Bevis. Betrakt Frechétfilteret $\mathcal{F} = \{A \subseteq A \mid A \text{ er koendelig}\}$ fra eksempel 2.1.10. Ved ultrafilterlemma, teorem 2.1.11, fins et ultrafilter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(I)$. Påstår at $\mathcal{G}$ er fri. Om $\mathcal{G}$ for motsigelse inneholdt en endelig mengde A ville ultrafilteret per konstruksjon også inneholdt det koendelige komplementet $A^c \in \mathcal{F}$, som motsier at $\mathcal{G}$ er et ultrafilter. Følgelig inneholder $\mathcal{G}$ ingen endelige mengder, så det er fritt. $\square$

Digresjon 2.2.3. I lys av beviset til teorem 2.2.2 ser vi at et ultrafilter på en mengde I er fritt også hvis og bare hvis det inneholder Frechétfilteret på I.

2.3 Digresjon: Målteoretisk tilnærming

Vi motiverte filtre som et slags degenerert sannsynlighetsmål som vi skulle bruke for å kunne modde ut likhet nesten overalt for ultraproduktene våre, selv om vi ikke formulerte det slik. I denne digresjonen vil vi presisere hva som mentes med det ved å oversette filteraksiomene til målteoretisk språk.

Gitt en delmengde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$, definer $\mu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0, 1\}$ ved

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & A \in \mathcal{F}, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi kan også gå den andre veien; gitt en $\nu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0, 1\}$ kan vi lage en tilhørende mengde $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I)$ ved

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq I \mid \nu(A) = 1\}.$$

Disse to konstruksjonene er inverse bijeksjoner. Dette er kjent som den den kanoniske bijeksjonen mellom potensmengden $\mathcal{P}(X)$ og mengden[2] 2^X. Denne

[2] I mengdelæren er X^Y notasjon for mengden av alle funksjoner $Y \to X$. Her er 2 en mengde med to elementer, for eksempel som ordinal.

bijeksjonen er skyldig i å være årsaken til hvorfor mange matematikere skriver 2^X for potensmengden $\mathcal{P}(X)$. For våre formål lar korrespondansen oss snakke om et tilhørende "mål" for et filter $\mathcal{F}$, og motsatt.

Fikser heretter en mengde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$, og la $\mu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ være den tilhørende funksjonen. Dersom $\mathcal{F}$ er et ekte filter vil μ tilfredsstille:

(0) $\mu(\emptyset) = 0$.

(1) $\mu(A) = \mu(B) = 1 \implies \mu(A \cap B) = 1$ for hver $A, B \subseteq I$.

(2) For hver $A \subseteq B \subseteq I$ vil $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Om $\mathcal{F}$ i tillegg er et ultrafilter har vi en betingelse man kan tolke som et skjult Carathéodorykrav på I;

(3) $\mu(A) + \mu(A^c) = 1$ for hver $A \subseteq I$,

og vi får også en annen tolkning av (1);

(1') $\mu(A) = \mu(B) = 0 \implies \mu(A \cup B) = 0$ for hver $A, B \subseteq I$.

Til slutt, dersom $\mathcal{F}$ også er fri har vi i tillegg

(4) Alle punktmengder har mål null.

Implikasjonene går den andre veien, også. Vi har

Lemma 2.3.1. La $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ være en mengde, og $\mu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ den tilhørende funksjonen. Da har vi følgende ekvivalenser:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ er ekvivalent med (0)

(ii) Filteraksiom (i) er ekvivalent med (1).

(iii) Filteraksiom (ii) er ekvivalent med (2).

(iv) Ultra-egenskapen "enten $A \in \mathcal{F}$ eller $A^c \in \mathcal{F}$ for hver $A \subseteq I$" er ekvivalent med (3).

(v) Ved tilstedeværelsen av ultra-egenskapen vil (1) være ekvivalent med (1').

(vi) Frihetsegenskapen "$\{i\} \notin \mathcal{F}$ for hver $i \in I$" er ekvivalent med (4).

Bevis. Påstandene er i all hovedsak direkte oversettelser av hverandre, med noen subtile unntak. Vi vil se på sistnevnte her.

Først; gitt ultra-egenskapen, som er ekvivalent med (3) uten videre betingelser på $\mathcal{F}$, så er filteraksiom (i) ekvivalent med (1). Velg fikserte $A, B \subseteq I$. Da har vi implikasjoner

$$\begin{array}{ccc} A \in \mathcal{F} \text{ og } B \in \mathcal{F} & \Longrightarrow & A \cap B \in \mathcal{F} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ A^c \notin \mathcal{F} \text{ og } B^c \notin \mathcal{F} & \Longrightarrow & A^c \cup B^c \notin \mathcal{F} \end{array}$$

Her er de vertikale ekvivalensene ved ultra-egenskapen, og vi bruker De Morgans lov. Vi gjenkjenner den øvre delen som filteraksiom (i) på A, B, og den nedre delen som en påstand (1') for A^c, B^c. Vi kvantifiserer disse over alle $A, B \subseteq I$ og bytter navn på A^c og B^c i (1'), og får

$$\begin{array}{c} (\forall A, B \subseteq I)(A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}) \\ \Updownarrow \\ (\forall A, B \subseteq I)(A, B \notin \mathcal{F} \implies A \cup B \notin \mathcal{F}) \end{array}$$

hvor vi så gjenkjenner den nedre påstanden som (1').

Den andre subtile delen er ekvivalensen mellom (2) og filteraksiom (ii) uten ytterligere betingelser på $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$. Den målteoretiske påstanden (2) er tilsynelatende sterkere enn (ii), som ser ut som som spesialtilfellet $\mu(A) = 1$. Man kan vise denne ekvivalensen ved å sjekke de fire tilfellene man får, eller ved å observere at negasjonene til (ii) og (2) lyder

$$\begin{aligned} \neg(\text{ii}): &\quad (\nexists A, B \subseteq I)(A \subseteq B \text{ og } A \in \mathcal{F} \text{ og } B \notin \mathcal{F}) \\ \neg(2): &\quad (\nexists A, B \subseteq I)(A \subseteq B \text{ og } \mu(A) = 1 \text{ og } \mu(B) = 0) \end{aligned}$$

og at disse er ekvivalente ved oversettelse. □

Fra denne oversettelsen får vi en første karakterisering av når $\mathcal{F}$ er et filter med diverse egenskaper vi er interesserte vi.

Korollar 2.3.2. La $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ være en mengde og $\mu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0, 1\}$ den tilhørende funksjonen. Da

(i) $\mathcal{F}$ er et filter hviss (1) og (2),

(ii) $\mathcal{F}$ er et ekte filter hviss (0), (1) og (2),

(iii) $\mathcal{F}$ er et ultrafilter hviss (0), (1), (2), og (3), og i så fall holder også (1').

(iv) $\mathcal{F}$ er et fritt ultrafilter hviss (0), (1), (2), (3), og (4).

Her er en tabell som visualiserer situasjonen:

Referanse	Filterteoretisk påstand	Målteoretisk påstand
(0)	$\emptyset \notin \mathcal{F}$	$\mu(\emptyset) = 0$
(1)	$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$	$\mu(A), \mu(B) = 1 \Rightarrow \mu(A \cap B) = 1$
(1')	$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$	$\mu(A), \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = 0$
(2)	$\mathcal{F} \ni A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow B \in \mathcal{F}$	$A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
(3)	enten $A \in \mathcal{F}$ eller $A^c \in \mathcal{F}$	$\mu(A) + \mu(A^c) = 1$
(4)	$\mathcal{F}$ inneholder ingen punktmengder	Alle punktmengder har μ-mål null

Tabell 2.3.3: En tabell som viser hvordan man kan oversette aksiomene for at $\mathcal{F}$ et fritt ultrafilter på I, til målteoretiske påstander om μ. Alle påstander er kvantifisert "for hver $A, B \subseteq I$". Ekvivalensen mellom påstandene i (1') forutsetter (3).

Ved karakteriseringen over vil μ, når $\mathcal{F}$ er fin nok, se og føles ut som et mål. Dette utelukker imidlertid ikke muligheten for at μ ikke er et mål, men kun ser ut som et. Men, for å sitere en kjent matematiker; om det ser ut som et mål, svømmer som et mål, og kvakker som et mål, så er det mest sannsynlig et mål. Det er derfor nærliggende å se om noen av filtertypene vi er interesserte i får μ til å bli en eller annen form for mål.

Definisjon 2.3.4. La X være en mengde. En (konkret) boolsk algebra på A er en mengde $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ slik at

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$,

(ii) For hver $A \in \mathcal{B}$ vil komplementet $A^c = X \setminus a$ ligge i $\mathcal{B}$, og

(iii) Om A og B ligger i $\mathcal{B}$, så vil også unionen $A \cup B$ ligge i $\mathcal{B}$.

Ved De Morgans lover og andre mengdelæretriks er boolske algebraer også lukka under en del flere mengdeteoretiske operasjoner, som endelige snitt og mengdedifferanser.

Definisjon 2.3.5. En funksjon $m: \mathcal{B} \to [0, \infty]$ for $\mathcal{B}$ en boolsk algebra er et endelig additivt mål dersom $m(\emptyset) = 0$ og for alle disjunkte $A, B \in \mathcal{B}$ vil vi ha $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Lemma 2.3.6. Anta at $m: \mathcal{B} \to [0, \infty]$ er et endelig additivt mål. For alle $A, B \in \mathcal{B}$ vil da

$$m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Bevis. Vi har disjunkte dekomponeringer

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \cup (A \setminus B) \\ B &= (A \cap B) \cup (B \setminus A) \\ A \cup B &= (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

og ved å anvende m og å bruke endelig additivitet får vi

$$\begin{aligned} m(A) &= m(A \cap B) + m(A \setminus B) \\ m(B) &= m(A \cap B) + m(B \setminus A) \\ m(A \cup B) &= m(A \cap B) + m(A \setminus B) + m(B \setminus A) \end{aligned}$$

og ved å kombinere disse vil

$$m(A)+m(B) = m(A \setminus B)+m(B \setminus A)+2m(A \cap B) = m(A \cap B)+m(A \cup B). \quad \square$$

For mer om boolske algebraer, endelig additive mål og hva man kan gjøre med de henvises den interesserte l leseren til enhver innledende lærebok i målteori, som [43, s. 67ff, s. 74ff].

Vi kan nå gi en betingelse på $\mathcal{F}$ gjør μ til et endelig additivt mål, og karakterisere hvilke filtre man får når μ er et endelig additivt mål.

Proposisjon 2.3.7. La $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ være en mengde og $\mu: \mathcal{P}(I) \to \{0, 1\}$ den tilhørende funksjonen. Da er $\mathcal{F}$ er et ultrafilter hvis og bare hvis μ er et endelig additivt mål som tilfredsstiller $\mu(I) = 1$.

Bevis. Ved korollar 2.3.2 er det nok å vise at betingelsen på μ er ekvivalent med de målteoretiske betingelsene (0), (1), (2) og (3) på μ.

Anta først at $\mathcal{F}$ er et ultrafilter. Ved korollar 2.3.2 har vi da (0), (1), (2) og (3). Følgelig vil $\mu(I) = 1$ ved (3), å la $A = \emptyset$ og å bruke (0). Det gjenstår å vise at μ er endelig additiv. Anta at $A, B \subseteq I$ er disjunkte. Vi skal vise

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{2}$$

Ved disjunkthet vil spesielt Da vil spesielt $\mu(A \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$ ved (0), så den den kontrapositivt versjonen av (1) gir at minst én av A og B har mål null. Uten tap av generalitet $\mu(B) = 0$. Det er to tilfeller: Om $\mu(A) = 1$ vil monotonisitet (2) gi $\mu(A \cup B) = 1$, og da sier (2) at $1 = 1 + 0$, som stemmer. Motsatt, om $\mu(A) = 0$ vil (1'), som fås av (1) og (3), gi at $\mu(A \cup B) = 0$, slik at (2) sier $0 = 0 + 0$, som stemmer. Dette fullfører den ene implikasjonen.

Anta nå at den tilhørende μ er et endelig additivt mål med $\mu(I) = 1$; skal vise at $\mathcal{F}$ er et ultrafilter. Siden $\mu(\emptyset) = 0$ har vi $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(2): Dersom $A \subseteq B$ har vi en disjunkt union $B = (B \setminus A) \cup A$, som gir

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

og vi har monotonisitet.

(1): Dersom $\mu(A) = \mu(B) = 1$ vil monotonisitet gi $\mu(A \cup B) = 1$, slik at lemma 2.3.6 gir

$$\mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B),$$

slik at $\mu(A \cap B) = 1$. Så vi har (1), som kan oversettes til filteraksiom (i)

Vi har nå vist at $\mathcal{F}$ er et ekte filter (ved korollar 2.3.2), så siste punkt er å vise det som tilsvarer at $\mathcal{F}$ er ultra, nemlig Carathéodorykravet (3) på I. For $A \subseteq I$ har vi $A \cup A^c = I$ slik at $\mu(A \cup A^c) = 1$, og $A \cap A^c = 0$ gir $\mu(A \cap A^c) = 0$. Da vil lemma 2.3.6 gi $\mu(A) + \mu(A^c) = 1 + 0 = 1$, og vi er ferdige. □

Avslutningsvis vil vi nevne at målteori ikke er den eneste måten å tolke ultrafiltre; de kan også bli tolka algebraisk. I begynnelsen av avsnitt 3.9 vil vi se at ultrafiltrene på W kan bli tolka som de maksimale idealene av k^W for en vilkårlig kropp k.

Ultrafiltre er mystiske skapninger. Vi vil senere se at kontinuumshypotesen[3] kan dukke opp når man stiller naturlige spørsmål om ultraprodukter. For å gi leseren en følelse av hva slags oppførsel man kan få når man studerer ultrafiltre avslutter vi kapittelet med et sitat[4] fra Jan van Mill om ultrafiltrene på $\omega = \mathbb{N}_0$ (ekvivalent, på $\mathbb{N}$) i [44]:

> Rommet $\beta\omega$ er et monster med tre hoder. Om man jobber i en modell hvor kontinuumshypotesen (forkortet CH) holder, så ser man kun det første hodet. Dette hodet smiler, er vennlig og får deg til å føle deg komfortabel med å jobbe med $\beta\omega$. Jeg kjenner ikke til

[3] Kontinuumshypotesen sier at det ikke fins noen mengder med kardinalitet strengt mellom $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$. Den er kjent å være uavhengig av ZFC.

[4] Oversettelsen er min egen.

mange åpne problemer om $\beta\omega$ hvis svar er ukjent under CH. $(\dots)$. Om man jobber i en modell hvor CH ikke holder, så vil man se det andre hodet av $\beta\omega$. Dette hodet prøver konstant å forvirre deg og du vil aldri kunne avgjøre om den snakker sant. $(\dots)$. Etter å ha lest de to første avsnittene kan leseren føle at $\beta\omega$ er et forferdelig vesen siden det ser ut som at alle påstander om det avhenger av spesielle mengdeteoretiske antagelser. Hva kan "virkelig" (= i ZFC) bli sagt om $\beta\omega$? Svaret til dette spørsmålet er: en del. Det tredje hodet av $\beta\omega$ er dets hode i ZFC. På grunn av de første to hodene er dette nokså vagt, men noen deler av det er veldig tydelige. Om man vil se den tydelige delen må man jobbe som en slave og finne opp geniale kombinatoriske argumenter. Man må bruke spesielle egenskaper ved $\beta\omega$ og ikke kun globale egenskaper. (...)

Kapittel 3

Ultraprodukter, Łoś' teorem og ultraringer

I dette kapittelet vil vi bane vei for resten av oppgaven ved å introdusere hovedkarakteren til fortellinga – ultraproduktet. Vil vi definere det, tolke det som en funktor, diskutere "ultraproduktenes fundamentalteorem" Łoś' teorem[1], bygge grunnleggende teori av ultraprodukter av ringer, og se på noen interessante anvendelser av ultraprodukter til algebraisk lukka kropper. Vi avslutter kapittelet med en digresjon om det at det ikks ikke fins førsteordensaksiomatiseringer av kjente ringer som $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Fra nå av vil W være en fiksert indeksmengde og $\mathcal{F}$ et fritt ultrafilter på W. Med mindre noe annet er sagt er alle ultraprodukter med hensyn på W og $\mathcal{F}$.

3.1 Ultraprodukter av mengder

Definisjon 3.1.1. For en samling $(X_w)_{w\in W}$ av ikketomme mengder lar vi dets ultraprodukt være mengden

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} X_w = \left(\prod_{w\in W} X_w\right) / \sim,$$

[1] Uttales omtrent "wåsh".

hvor ekvivalensrelasjonen på det kartesiske produktet er

$$(x_w) \sim (y_w) \iff \{w \in W \mid x_w = y_w\} \in \mathcal{F}.$$

Vi vil ofte være opptatt av mengder på formen over. For elementer $x = (x_w)_{w \in W}$ og $y = (y_w)_{w \in W}$, innfører vi notasjonen $[\![x = y]\!]$ for mengden $\{w \in W \mid x_w = y_w\}$. Generelt, for $\varphi(w)$ er en førsteordensformel med w som fri variabel lar vi $[\![\varphi]\!]$ være mengden av alle $w \in W$ hvor $\varphi(w)$ er sann.

Proposisjon 3.1.2. $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

Bevis. Refleksivitet: Har $[\![x = x]\!] = W \in \mathcal{F}$ da alle filtre på W fanger W. Symmetri følger av det at likhet selv er symmetrisk. Transitivitet: Anta $[\![x = y]\!] \in \mathcal{F}$ og $[\![y = z]\!] \in \mathcal{F}$. Da vil $\mathcal{F} \ni [\![x = y]\!] \cap [\![y = z]\!] \subseteq [\![x = z]\!]$ silk at $[\![x = z]\!]$ også fanges av $\mathcal{F}$ ved filteraksiom (ii). $\square$

Ultraproduktet vil vi også kalle $\operatorname{ulim} X_w$ eller $X_\natural$. Vårt valg av notasjon følger [41]. I annen litteratur, spesielt i ikkestandard analyse har det vært vanlig å kalle ultraproduktet ${}^*X$. Vi vil kalle X_w-ene for *approksimasjonene* til $X_\natural$.

Som faktormengde har vi en kanonisk projeksjon $\prod_{w \in W} X_w \to X_\natural$. Projeksjonen i $X_\natural$ av en følge $x = (x_w)_{w \in W}$ vil vi kalle $\operatorname{ulim}_{w \in W} x_w$, $\operatorname{ulim} x_w$, eller $x_\natural$. Denne notasjonen vil bli rettferdiggjort av en identifikasjon vi vil gjøre ved slutten av avsnitt 3.2.3.

I tilfellet hvor alle X_w-ene er like en X, kalles $X_\natural$ *ultrapotensen* til X. I så fall har vi en kanonisk funksjon $X \to X_\natural$ som sender $x \in X$ til ekvivalensklassen av konstantfølgen med x i hver posisjon. Denne kalles *diagonalimbeddingen* til $X_\natural$. Denne er injektiv, så vi kan tenke på X som en delmengde av $X_\natural$, slik at å ta en ultrapotens er en prossess som “legger til flere elementer” til X. Dette synet har man i ikkestandard analyse, som driver utelukkende med ultrapotenser,

Der kaller man elementer av $X_\natural$ som ikke ligger i X for *ikkestandarde elementer* av X.

Definisjon 3.1.3. Gitt en samling funksjoner $f_w \colon X_w \to Y_w$ for $w \in W$, definer en funksjon $X_\natural \to Y_\natural$, kalt ultraproduktet av f_w-ene, $f_\natural$ eller $\operatorname{ulim}_{w \in W} f_w$, ved

$$\left(\operatorname*{ulim}_{w \in W} f_w\right)\left(\operatorname*{ulim}_{w \in W} x_w\right) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} f(x_w).$$

Proposisjon 3.1.4. Funksjonen $f_\natural$ er veldefinert.

Bevis. Anta at $x_\natural = y_\natural$, altså at $\{w \in W \mid x_w = y_w\} \in \mathcal{F}$. Da vil

$$\mathcal{F} \ni \llbracket x = y \rrbracket \subseteq \llbracket f(x) = f(y) \rrbracket.$$

Følgelig vil $\mathcal{F}$ også fange mengden til høyre ved filteraksiom (ii). $\square$

Kommentar 3.1.5. Notasjonen $f_\natural$ for ultraproduktet av funksjonene $f_w \colon X_w \to Y_w$ er rettferdiggjort på mengdeteoretisk nivå av det at om vi ser på hver f_w som mengden

$$f_w = \{(x_w, f(x_w)) \mid x_w \in X_w\},$$

så vil ultraproduktet av f_w-ene som funksjoner samsvare med ultraproduktet av dem som mengder om vi identifiserer alle mengdene $\operatorname{ulim}_{w\in W}(x_w, y_w)$ med $(\operatorname{ulim}_{w\in W} x_w, \operatorname{ulim}_{w\in W} y_w)$. I det kommende avsnitt 3.2.3 vil vi vise at det er en kanonisk bijeksjon mellom disse, og vi vil identifisere den der.

3.2 Funktorialitet for mengder

Ultraproduktet har både en virkning på objekter og en på funksjoner. Dette antyder til at det kanskje er en funktor, som viser seg å stemme. I dette avsnittet vil vi undersøke funktorialiteten til ultraproduktet ved å finne kategoriske oversettelser av fenomener vi har sett hittil. Hensikten er å gi bedre intuisjon for oppførselen til ultraproduktet ved å se på det kategorisk. Vi vil også løse problemet om hvordan vi kan få et ultraprodukt av funksjoner $f_w \colon X_w \times Y_w \to Z_w$ til å være en funksjon $X_\natural \times Y_\natural \to Z_\natural$, som er det siste hinderet før vi kan ta et ultraprodukt av ringer og – etter man har sjekka ringaksiomene – få en ring.

Dette funktorielle synet vil også la oss gi en kategorisk innpakning av egenskaper vi hittil har sett ved ultraproduktet. I denne omgangen vil vi kun se på ultraprodukter av mengder. Dette har fordelen av at når vi senere kommer til ultraprodukter av andre strukturer som ringer eller moduler kan vi overføre våre resultater til den nye kategorien ved å sjekke at alle morfiene vi bruker i argumentene våre her også blir morfier der.

3.2.1 Produktkategorier

For at ultraproduktet skal være en funktor må den ha et domene. Siden den tar imot flere, “uavhengige” objekter eller funksjoner er det nærliggende å tenke at domenet er et eller annet produkt.

Definisjon 3.2.1. Gitt en samling av kategorier $\mathcal{C}_i$ for I en indeksmengde og $i \in I$, definer produktkategorien $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ som følger:

(i) Objektene er tupler $(C_i)_{i\in I}$ hvor hver C_i er et objekt i $\mathcal{C}_i$.

(ii) En morfi $f\colon (C_i)_{i\in I} \to (D_i)_{i\in I}$ er en tuppel $(f_i)_{i\in I}$ av morfier $f_i\colon C_i \to D_i$ i $\mathcal{C}_i$ for hver $i \in I$ henholdsvis.

(iii) Identitetsmorfien $\mathrm{id}\colon (C_i)_{i\in I} \to (C_i)_{i\in I}$ er $(\mathrm{id}_i)_{i\in I}$.

(iv) Komposisjon er gjort punktvis.

Kommentar 3.2.2. Produktkategorien $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ er, som navnet kan antyde, kategorien som tilfredsstiler universalegenskapen til produktet i Cat.

Vi vil ofte skrive en potens $\prod_{i\in I} \mathcal{C}$ som $\mathcal{C}^I$ for enkethets skyld. Denne notasjonen brukes også for funktorkategorien $\mathrm{Fun}(I, \mathcal{C})$, hvor I sees på som en kategori med ingen morfier utenom de påkrevd av kategoriaksiomene. Vår produktkategori $\prod_{i\in I} \mathcal{C}$ er imidlertid isomorf med $\mathrm{Fun}(I, \mathcal{C})$, så dette innfører ingen notasjonskonflikt.

Digresjon 3.2.3. Når man lærer kategoriteori ser man på produktet som en konstruksjon, men vi kan nå tenke på det som en funktor siden vi nå har riktig domene. Produktet i Set kan vi se på som en funktor $\prod_{i\in I}\colon \mathrm{Set}^I \to \mathrm{Set}$ som sender en objekt $(X_i)_{i\in I}$ til det kartesiske produktet $\prod_{i\in I} X_i$, og en morfi $(f_i\colon X_i \to Y_i)_{i\in I}$ til funksjonen $f\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ ved $f((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I}$. I det generelle tilfellet må vi være mer forsiktige. Vi har ikke et kanonisk valg av produkt, så vi må for hvert objekt X i $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ velge en representant for produktet av X, og la vår produktfunktor sende X til den. Virkningen på morfier blir da den som fås av å bruke universalegenskapene til de valgte representantene. Dette kan sees på som et korollar av det at et valg av grenser $\varprojlim$ over $\mathcal{I}$ er en funktor $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ dersom $\mathcal{C}$ inneholder alle grenser over en liten kategori $\mathcal{I}$ [37, prop. 3.6.1], siden produktet blir spesialtilfellet hvor $\mathcal{I}$ er en diskret kategori. Dette er egentlig ikke lov generelt, da samlingen av objekter til $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ er ofte en klasse og man kan ikke gjøre utvalg på klasser i ZFC, men slikt er algebraikere vant med å feie under teppet. Denne ikke-entydigheten til $\prod$ og $\varprojlim$ som funktorer er ikke et problem i praksis: Alle valg av $\varprojlim$, og spesialtilfellet $\prod$, er naturlig isomorfe, som om man har synet om at man kun skal kunne skille mellom objekter ved isomorfi, så kan man ikke skille mellom dem. Man kan forestille seg hvordan en slik naturlig isomorfi ville sett ut, eller se på det som en konsekvens av det at hvert valg av

$\varprojlim\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ er høyreadjungert til diagonalfunktoren $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})$, og det at høyre/venstreadjungerte funktorer er unike opp til naturlig isomorfi [26, s. 85, 88].

Den interesserte leseren henvises til [26, kap. II.3] for mer om produktkategorier.

3.2.2 Digresjon: Eksistens i ZFC

Når man gjør kategoriteori hender det ofte at man jobber med konstruksjoner eller påstander som er umulige eller ulovlige å formulere i alminnelig ZFC. Derfor har mange en berettiget skepsis når kategoriteoretikere behandler klasser som om de var mengder uten å tenke nøye på detaljene, selv om de har gode intensjoner; matematikkens grunnlag er tross alt ZFC – i hvert fall for de fleste av oss. Det er både nærliggende og interessant å undersøke om hvorvidt konstruksjonen vi nettopp har gjort er lovlig i ZFC, selv om vanlig praksis i kategoriteori er å ignorere mengdelæreproblemer eller å bruke diverse utvidelser av ZFC. Dette er en av få deler av oppgaven hvor vi ikke følger vanlig kategorisk praksis; resten av oppgaven inneholder flere forbrytelser mot mengdelæren.

I definisjon 3.2.1 skjuler det seg to kartesiske produkter;

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\left(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i\right) &= \prod_{i\in I}\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i), \text{ og} \\ \mathrm{Hom}_{\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i}\big((X_i)_{i\in I},(Y_i)_{i\in I}\big) &= \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i,Y_i), \end{aligned} \tag{1}$$

så spørsmålet om produktkategorien $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ fins er et om hvorvidt de kartesiske produktene over fins som klasser. Å ha en samling klasser $(X_i)_{i\in I}$ kan bli tolket på to måter:

(i) Man har en samling formler $\varphi_i(x)$ som sier $x \in X_i$ for hver x og $i \in I$, og

(ii) Man har en formel $\varphi(x,i)$, sier $x \in X_i$ for hver x og $i \in I$.

I det første tilfellet sier vi at formlene $(\varphi_i(x))_{i\in I}$ karakteriserer samlingen, og i det andre sier vi at $\varphi(x,i)$ karakteriserer den. I den generelle situasjonen (i) vil det generelt være vanskelig å lage interessante nye klasser. Det er ikke plass til alle $\varphi_i(x)$-ene i én formel om I er uendelig, siden formler skal ha endelig lengde. Spesialtilfellet (ii) er av denne grunn mye mer passende for klasseteori.

Denne situasjonen er nevneverdig i å inntre ofte og å tillate oss å kvantifisere over I, slik at det er syntaktisk lov å formulere formler som $(\forall i \in I)(x \in X_i)$.

Lemma 3.2.4. Dersom $(X_i)_{i\in I}$ er en samling klasser indeksert over en mengde I som er karakterisert av en formel $\varphi(x, i)$, så fins det kartesiske produktet $\prod_{i\in I} X_i$ som klasse.

Bevis. Dette handler om å sjekke definisjonene av kartesiske produkter i tilfellet for klasser, og å være observant på når vi kvantifiserer over I. Vi vil gjengi definisjonene her: For klasser X og Y, defineres $X \times Y$, $X \subseteq Y$ og klassefunksjoner $f\colon X \to Y$ som blåkopier av de tilsvarende definisjonene for mengder (jf. [21, s. 9ff]):

$$\begin{aligned} &X \times Y = \{z \mid (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = (x, y))\}, \quad \text{og} \\ &X \subseteq Y \iff (\forall x)(x \in X \to x \in Y) \end{aligned}$$

En klassefunksjon $f\colon X \to Y$ er da en underklasse $f \subseteq X \times Y$ slik at for hver $z \in f$ fins $x \in X$ og unik $y \in Y$ slik at $z = (x, y)$. Vi kan nå definere det kartesiske produkt av klasser X_i indeksert over en mengde I, med nøyaktig samme formel som den for produkter (sammenlikn f.eks. [21, s. 53]):

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f \mid f\colon I \to \mathrm{Set} \text{ er en klassefunksjon og } f(i) \in X_i \text{ for hver } i \in I\} \quad (2)$$

Vi har lov til å kvantifisere over I her fordi $\varphi(x, i)$ karakteriserer alle X_i-ene; den siste delen sier formelt $(\forall i \in I)(\varphi(f(i), i))$. □

Kommentar 3.2.5. Når man ser (2) kan man tenke seg at produktet $\prod_{i\in I} X_i$ burde inneholde alle klassefunksjoner $f\colon I \to \mathrm{Set}$, istedenfor "bare" alle mengdefunksjoner $f\colon I \to \mathrm{Set}$. I dette tilfellet sammenfaller de to konseptene, siden I er en mengde: For en klassefunksjon $f\colon I \to \mathrm{Set}$, definer en klassefunksjon $g\colon I \to \mathrm{Set}$ ved $g(i) = (i, f(i))$. Generelt er bildet til en klassefunksjon under en mengde selv en mengde [21, s. 4], så bildet $g(I) = f$ er en mengde, og klassefunksjonen vi begynte med viste å være en funksjon i skjul.

Vi kan nå vise en betingelse for at produktkategorier skal finnes.

Proposisjon 3.2.6. Anta at $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ er en samling av kategorier indeksert over en mengde I slik at

(i) Objektklassene $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$ for $i \in I$ er karakterisert av en formel $\varphi(x, i)$, og

(ii) Hom-mengdene $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(x, y)$ for $i \in I$ og $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$ karakteriseres av en formel $\psi(f, x, y, i)$.

Da fins produktkategorien $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ i ZFC.

Bevis. Bruk lemma 3.2.4 på både objektene og morfiene ved (1). □

For denne oppgavens formål er proposisjon 3.2.6 mer enn nok. Nesten alle produkter vi vil se på er produkter av én kategori, som åpenbart tilfredsstiller hypotesene gitt i proposisjonen.

Digresjon 3.2.7. Med samme triks som for lemma 3.2.4 kan man vise under samme betingelse at for en samling klasser $(X_i)_{i\in I}$ så fins unionen $\bigcup_{i\in I} X_i$ og snittet $\bigcap_{i\in I} X_i$ som klasser. Man kan bruke unionen for å konstruere koproduktet til en samling kategorier, tilsvarende slik vi har gjort for produktet.

3.2.3 Funktorialitet og egenskaper

Vi har nå nesten alt av det vi trenger for å gi en kategorisk tolkning av ultraproduktet. Vi vil at det skal være en funktor med domene Set^W, så vi må også definere $X_\natural$ når noen av X_w-ene er tomme. Vi bør ikke bruke vår vanlige definisjon i dette tilfellet. Vi vil ikke at et ultraprodukt skal være påvirka av "små" endringer. Om en X_w er tom blir $\prod_{w\in W} X_w$ tom, og dermed også $X_\natural$ om vi brukte den naive definisjonen. Vår løsning blir følgende: Om $[\![X_w = \emptyset]\!] \in \mathcal{F}$ lar vi $X_\natural = \emptyset$. Ellers, om $[\![X_w = \emptyset]\!] \notin \mathcal{F}$ lar vi $X_\natural$ være et ultraprodukt hvor de tomme $X_w$ene erstattes med ikketomme mengder. Dette blir veldefinert ved konvensjon 3.2.17, en identifikasjon vi vil gjøre senere. Husk at fra mengdelæren at for hver mengde B fins en unik funksjon $\emptyset \to B$, og at det ikke fins noen funksjoner $B \to \emptyset$ med mindre $B = \emptyset$. Gitt funksjoner $f_w \colon X_w \to Y_w$ vil, i tilfellene $[\![X_w = \emptyset]\!] \in \mathcal{F}$ og $[\![Y_w = \emptyset]\!] \in \mathcal{F}$, det være en unik funksjon $X_\natural \to Y_\natural$, som vi da lar være $f_\natural$: Vi har ikke behov for ultraprodukter av ikke-nødvendigvis ikketomme mengder utover for i proposisjonen under, da når vi spesialiserer til ultraprodukter av algebraiske strukturer vil alle disse være ikketomme. Vi kan nå si:

Proposisjon 3.2.8. Ultraproduktet av mengder er en funktor

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} \colon \mathrm{Set}^W \to \mathrm{Set}\,.$$

Bevis. Dette er en ukomplisert verifikasjon. Anta først at alle A_w, B_w og C_w-ene er ikketomme. For komposisjon, anta at vi har

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$$

i Set^W, og skriv $A = (A_w)_{w\in W}$, $f = (f_w)_{w\in W}$, og så videre. Da vil $f_\natural \circ g_\natural$ og $(f \circ g)_\natural$ være funksjoner $A_\natural \to C_\natural$. Velg $a_\natural \in A_\natural$. Vi regner:

$$(f \circ g)_\natural(a_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} (f \circ g)_w(a_w) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f_w(g_w(a_w)),$$

og samtidig,

$$(f_\natural \circ g_\natural)(a_\natural) = f_\natural\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} g_w(a_w)\right) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f_w(g_w(a_w)),$$

så komposisjon bevares. Identiteter gjenstår. Husk at identitetsmorfien til et objekt $(A_w)_{w\in W}$ er $\mathrm{id} = (\mathrm{id}_w)_{w\in W}$ hvor $\mathrm{id}_w \colon A_w \to A_w$ er identitetsfunksjonene. Følgelig vil $\mathrm{id}_\natural \colon A_\natural \to A_\natural$ være

$$\mathrm{id}_\natural\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} a_w\right) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} \mathrm{id}_w(a_w) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} a_w$$

slik at $\mathrm{id}_\natural$ er identitetsfunksjonen til $A_\natural$. Tilfellet hvor noen av A_w, B_w, og C_w-ene er tomme, er utelatt. □

Vi har tilsvarende et funktorialitetssyn på ultrapotenser:

Proposisjon 3.2.9. Ultrapotensen over W er en endofunktor[2] $\mathrm{ulim} \colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$, og diagonalimbeddingene danner en naturlig transformasjon $\mathrm{id}_{\mathrm{Set}} \to \mathrm{ulim}$ av funktorer $\mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$.

Bevis. Dette er en uproblematisk verifikasjon. Ultrapotensen sin virkning samsvarer med komposisjonen av funktorer $\mathrm{Set} \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Set}^W \xrightarrow{\mathrm{ulim}} \mathrm{Set}$ hvor Δ er diagonalfunktoren som sender X til konstantfølgen $(X)_{w\in W}$ og gjør tilsvarende på morfiene. Så for funktorialitet er det nok å sjekke at Δ virkelig er en funktor. Det kan bli sjekka manuelt, eller ved å se at Δ er funktoren som induseres av å bruke universalegenskapen til produktet Set^W på en en samling identitetsmorfier $\mathrm{id} \colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ indeksert over W.

[2] En endofunktor er en funktor fra en kategori til seg selv.

Velg mengder A og B. Skriv ι_A for diagonalimbeddingen $A \to B_\natural$, og tilsvarende for B. Det at diagonalimbeddingene danner en naturlig transformasjon oversettes til at følgende diagram kommuterer for alle mengder A, B og funksjoner $f\colon A \to B$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "f"] & A_\natural \arrow[d, "f_\natural"] \\
B \arrow[r, "\iota_B"] & B_\natural
\end{tikzcd}$$

som er rett fram å sjekke. □

Etter vi har identifisert diagonalimbeddingene, som vi vil gjøre senere i dette avsnittet, så kan man tolke den ovennevnte naturlige transformasjonen som at for hver funksjon $f\colon X \to Y$ er ultrapotensen $f_\natural\colon X_\natural \to Y_\natural$ en utvidelse av den.

Vi har lyst til å definere ultraproduktet av $f_w\colon A_w \times B_w \to C_w$ til å være en funksjon $A_\natural \times B_\natural \to C_\natural$, istedenfor $(\mathrm{ulim}_{w\in W} A_w \times B_w) \to C_\natural$, for å kunne overføre binæroperasjoner til algebraiske strukturer som grupper og ringer. Én mulig løsning til å få et ultraprodukt av f_w-ene på formen $A_\natural \times B_\natural \to C_\natural$, er $g\colon A_\natural \times B_\natural \to C_\natural$ gitt ved

$$g\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} a_w, \operatorname*{ulim}_{w\in W} b_w\right) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f_w(a_w, b_w),$$

som ved et liknende argument som det i proposisjon 3.1.4 er veldefinert. Man kan sjekke at dette også er lik $f_\natural(\mathrm{ulim}_{w\in W}(a_w, b_w))$, den andre kandidaten for hva g kunne ha vært.

Siden én gyldig definisjon av g er som prekomposisjon av $f_\natural$ har vi en sak for at $f_\natural$ og g burde i en viss forstand gjøre det samme, og det hadde vært meget trist om det ikke var et slikt resultat. Vi har tross alt lyst til at et ultraprodukt av en flervariabel funksjon skal fortsette å være flervariabel. Én tenkelig løsning til dette problemet er om det viste seg at $(A \times B)_\natural$ på en eller annen kanonisk måte var i bijeksjon med $A_\natural \times B_\natural$. I så fall, dersom g var lik komposisjonen

$$A_\natural \times B_\natural \xrightarrow{\simeq} (A \times B)_\natural \xrightarrow{f_\natural} C_\natural,$$

så burde kanonisiteten til bijeksjonene gjøre at $f_\natural$ og g så å si "gjør det samme". Dette viser seg å stemme, og det vil vi på nå.

I overgangen fra potens til produkt bytter funktorene domene fra Set til Set^W, så for å si at ultraproduktet bevarer produkter trenger vi å vite hvordan produktene i Set^W ser ut.

Lemma 3.2.10. (Produkter i produktkategorier) Velg to ikketomme mengder I og J. Anta at $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ er en samling kategorier slik at hver $\mathcal{C}_i$ har alle produkter indeksert over J. Da vil $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ ha alle produkter over J, og kan konstrueres slik: For objekter $(B_j)_{j\in J}$, få dekomponering $B_j = (B_{i,j})_{i\in I}$ for objekter $B_{i,j}\in\mathcal{C}_i$ for hver $j\in J$. La så $B = \left(\prod_{j\in J} B_{i,j}\right)_{i\in I}$, og la de tilhørende projeksjonsmorfiene være $\pi_j\colon B\to B_j$ ved $\pi_j = (\pi_{i,j})_{i\in I}$ hvor $\pi_{i,j}\colon \prod_{k\in J} B_{i,k}\to B_{i,j}$ er projeksjon. Da er B sammen med disse projeksjonsmorfiene et produkt av objektet $(B_j)_{j\in J}$ i $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$.

Bevis. Dette er en ukomplisert verifikasjon av universalegenskapen til produktet. Den etterlates til leseren, som oppfordres til å holde tunga rett i munnen. $\square$

Proposisjon 3.2.11. I Set vil ultraproduktet ulim: $\mathrm{Set}^W\to\mathrm{Set}$ kommutere med endelige produkter i den forstand at den sender endelige produktkjegler til (endelige) produktkjegler. Spesielt, for hver samling $(X_{i,w})_{i\in I,w\in W}$ med I endelig fins en kanonisk bijeksjon

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W}\prod_{i\in I} X_{i,w}\simeq\prod_{i\in I}\operatorname*{ulim}_{w\in W} X_{i,w}.$$

Bevis. Siden I er endelig er det nok å vise at det holder i tilfellet $|I| = 2$ og gjøre resten ved induksjon. Om man vil gjøre alt samtidig må man styre mer med notasjonen, men argumentet er ellers det samme som det under.

For å vise at ulim sender produktkjegler til produktkjegler er det nok å vise at ulim sender én produktkjegle til en produktkjegle, da alle produktkjegler er isomorfe med hverandre som kjegler. Vi velger vårt produkt i Set til å være det kartesiske, og vi bruker lemma 3.2.10 for vårt produkt i Set^W. Velg $A = (A_w)_{w\in W}$ og $B = (B_w)_{w\in W}$. Anta først at alle A_w- og B_w-ene er ikketomme. For hver $w\in W$ har vi projeksjoner

$$A_w \xleftarrow{\pi_w^1} A_w\times B_w \xrightarrow{\pi_w^2} B_w$$

hvor vi med $\times$ mener kartesisk produkt. Ved lemma 3.2.10 fins produktet $A\times B$ i Set^W, og vi har en formel

$$(A_w)_{w\in W}\times(B_w)_{w\in W} = (A_w\times B_w)_{w\in W}$$

og projeksjoner $\pi^1 = (\pi_w^1)_{w\in W}$ og $\pi^2 = (\pi_w^2)_{w\in W}$. Vi får så funksjoner

$$\pi_\natural^1\colon (A\times B)_\natural\to A_\natural \quad \text{og} \quad \pi_\natural^2\colon (A\times B)_\natural\to B_\natural,$$

som vi kan kombinere for å få $\alpha\colon (A\times B)_\natural \to A_\natural \times B_\natural$ med formel

$$\alpha\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W}(a_w,b_w)\right) = \left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} a_w, \operatorname*{ulim}_{w\in W} b_w\right).$$

Dette gir et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} A_\natural \arrow[d, "\mathrm{id}"] & (A\times B)_\natural \arrow[l, "\pi^1_\natural"'] \arrow[r, "\pi^2_\natural"] \arrow[d, "\alpha"] & B_\natural \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ A_\natural & A_\natural \times B_\natural \arrow[l, "\pi^3"'] \arrow[r, "\pi^4"] & B_\natural \end{tikzcd} \tag{3}$$

hvor den nedre raden er (den kanoniske) produktkjegla til $A_\natural$ og $B_\natural$, og den øvre er ulim anvendt på produktkjegla $A \longleftarrow A\times B \longrightarrow B$ i Set^W. Følgelig vil ulim sende produktkjegler til produktkjegler om α er en isomorfi, da diagrammet over vil danne en isomorfi av kjegler. Påstår at α er en isomorfi.

For å vise surjektivitet, velg $\operatorname{ulim}_{w\in W}(a_w,b_w)$ i kodomenet. Da vil

$$\alpha\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} a_w, \operatorname*{ulim}_{w\in W} b_w\right) = \operatorname*{ulim}_{w\in W}(a_w,b_w),$$

så funksjonen er surjektiv. For injektivitet; om $(a,b)_\natural = (c,d)_\natural$, altså

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W}(a_w,b_w) = \operatorname*{ulim}_{w\in W}(c_w,d_w)$$

vil $\mathcal{F} \ni [\![(a,b)=(c,d)]\!] \subseteq [\![a=c]\!]$ slik at $a_\natural = c_\natural$. Samme argument gir $b_\natural = d_\natural$, så α er injektiv.

Følgelig, siden α er en isomorfi vil øvre rad i diagrammet være en produktkjegle, slik at ulim bevarte produktkjegla vi begynte med. Det gjenstår å argumentere for formelen

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} \prod_{i\in I} X_{i,w} \simeq \prod_{i\in I} \operatorname*{ulim}_{w\in W} X_{i,w}.$$

Den kanoniske isomorfien fås som følger: For en samling $(X_i)_{i\in I}$ av objekter i Set^W, få dekomponering $X_i = (X_{i,w})_{w\in W}$. Da vil lemma 3.2.10 gi et kanonisk produkt

$$\prod_{i\in I} X_i = \left(\prod_{i\in I} X_{i,w}\right)_{w\in W}$$

så siden ulim bevarer endelige produkter får vi en kanonisk isomorfi $\operatorname{ulim}_{w\in W} X \simeq \prod_{i\in I} \operatorname{ulim}_{w\in W} X_i$. Ved å bruke dekomponeringen kan det skrives som

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} \prod_{i\in I} X_{i,w} \simeq \prod_{i\in I} \operatorname*{ulim}_{w\in W} X_{i,w}.$$

La oss nå anta at ikke alle av $X_{i,w}$-ene er ikketomme. Det kan forekomme på to måter:

(i) $[\![A=\emptyset]\!] \notin \mathcal{F}$ og $[\![B=\emptyset]\!] \notin \mathcal{F}$

(ii) Minst én av $[\![A=\emptyset]\!]$ og $[\![B=\emptyset]\!]$ fanges av $\mathcal{F}$.

I det første tilfellet vil definisjonen av ultraproduktet tilsi at vi erstatter alle de tomme A_w- og B_w-ene med en ikketom mengde. Da er vi i en situasjon hvor alle mengdene er ikkenull, så vi kan anvende argumentet over. Anta nå at vi er i det andre tilfellet, hvor uten tap av generalitet $[\![A=\emptyset]\!] \in \mathcal{F}$. Da vil $A_\natural = \emptyset$. Videre,

$$\mathcal{F} \ni [\![A=\emptyset]\!] \subseteq [\![A\times B=\emptyset]\!]$$

slik at $(A\times B)_\natural$ også blir den tomme mengden. Siden begge disse er tomme får vi en unik bijeksjon $\alpha\colon (A\times B)_\natural \to A_\natural \times B_\natural$, og man kan sjekke at diagrammet (3) fortsatt kommuterer. Følgelig er bildet av ulim-funktoren under en produktkjegle (isomorf med) en produktkjegle i alle tilfeller, så den bevarer alle endelige produkter. □

Vi kan nå enkelt ta "flervariable ultrapotenser/-produker" av flervariable funksjoner som $f\colon A\times B \to C\times D$, ved at say $g\colon A_\natural \times B_\natural \to C_\natural \times D_\natural$ blir komposisjonen

$$A_\natural \times B_\natural \xrightarrow{\simeq} (A\times B)_\natural \xrightarrow{f_\natural} (C\times D)_\natural \xrightarrow{\simeq} C_\natural \times D_\natural$$

hvor isomorfiene (bijeksjonene) er de man får av proposisjon 3.2.11. Man kan sjekke at dette samsvarer med å definere

$$g\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W}(a_w,b_w)\right) = \left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} g_1(a_w,b_w), \operatorname*{ulim}_{w\in W} g_2(a_w,b_w)\right)$$

hvor $g_1\colon A\times B\to C$ og $g_2\colon A\times B\to D$ er den første og andre komponenten til g henholdsvis. Mer generelt, for hver samling av funksjoner

$$f_w\colon A_w^1 \times\cdots\times A_w^n \to B_w^1 \times \cdots \times B_w^m$$

for $w \in W$, skriv $f_w^i \colon A_w^1 \times \cdots \times A_w^n \to B_w^i$ for den i-te komponenten til f, og la $g \colon A_\natural^1 \times \cdots \times A_\natural^n \to B_\natural^1 \times \cdots \times B_\natural^m$ ved

$$g\big(a_\natural^1, \ldots, a_\natural^n\big) = \left(f_\natural^1 \left(\operatorname*{ulim}_{w \in W} (a_w^1, \ldots, a_w^n) \right), \cdots, f_\natural^m \left(\operatorname*{ulim}_{w \in W} (a_w^1, \ldots, a_w^n \right) \right).$$

Da kan man sjekke at følgende diagram kommuterer,

$$\begin{tikzcd}
(A^1 \times \cdots \times A^n)_\natural \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "f_\natural"] & A_\natural^1 \times \cdots \times A_\natural^n \arrow[d, "g"] \\
(B^1 \times \cdots \times B^m)_\natural \arrow[r, "\simeq"] & B_\natural^1 \times \cdots \times B_\natural^m
\end{tikzcd}$$

hvor de horisontale bijeksjonene er de passende α-ene fra beviset til proposisjon 3.2.11.

Når man jobber på mengdenivå er det styr å måtte ha kontroll på kanoniske bijeksjoner mellom produkter av ultraprodukter og ultraprodukter av produkter. I lys av proposisjon 3.2.11 velger vi dermed å identifisere alle de kanoniske bijeksjonene vi får av proposisjonen.

Konvensjon 3.2.12. Fra nå av vil vi identifisere de kanoniske bijeksjonene på formen

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} \prod_{i \in I} X_{i,w} \simeq \prod_{i \in I} \operatorname*{ulim}_{w \in W} X_{i,w}$$

som fås av proposisjon 3.2.11. Spesielt er et ultraprodukt av flervariable funksjoner en flervariabel funksjon.

Vi har brukt notasjonen $x_\natural$ for et element av et ultraprodukt $X_\natural$. La oss også identifisere dette:

Konvensjon 3.2.13. For mengder $x_w \in X_w$ identifiserer vi $\iota \colon \{x_\natural\} \to X_\natural$ gitt ved $\iota(x_\natural) = \overline{(x_w)_{w \in W}}$, slik at $x_\natural \in X_\natural$.

Følgelig kan vi si at

Korollar 3.2.14. For mengder x_w, y_w for $w \in W$ vil $[\![x_w \in X_w]\!] \in \mathcal{F}$ hvis og bare hvis $x_\natural \in X_\natural$.

Ved konvensjon 3.2.13 kan vi vise et nyttig resultat vi ellers hadde måtte identifisert, nemlig at $\natural$ "kommuterer med å ta endelige mengder":

Lemma 3.2.15. Gitt mengder $x_{i,w}$ for $1 \leq i \leq n$ og $w \in W$ vil

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} \{x_{1,w}, \ldots, x_{n,w}\} = \{x_{1,\natural}, \ldots, x_{n,\natural}\}.$$

Bevis. Vi viser først $\supseteq$. Vi har $x_{i,w} \in \{x_{1,w}, \ldots, x_{n,w}\}$ for hver $w \in W$, så ved konvensjon 3.2.13 vil $x_{i,\natural} \in \operatorname{ulim}_{w \in W}\{x_{1,w}, \ldots, x_{n,w}\}$ for hver i, slik at vi har $\supseteq$. Siden mengdene $\{x_{1,w}, \ldots, x_{n,w}\}$ har alle kardinaliet n for hver $w \in W$ kan man vise at mengden $\operatorname{ulim}_{w \in W}\{x_{1,w}, \ldots, x_{n,w}\}$ også er endelig med kardinalitet n, slik at inklusjonen $\supseteq$ er en likhet. □

Dette gir en annen synsvinkel på proposisjon 3.2.11. Siden 2-tupler vanligvis defineres $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, og n-tupler lages med disse, vil lemma 3.2.15 gi at $\operatorname{ulim}_{w \in W}(a_w, b_w) = (a_\natural, b_\natural)$, og tilsvarende for lengre tupler.

Det er også hensiktsmessig å identifisere diagonalimbeddingene.

Konvensjon 3.2.16. Fra nå av vil vi også identifisere alle diagonalimbeddinger.

Ultraproduktet $\iota_\natural \colon A_\natural \to B_\natural$ av inklusjoner $\iota_w \colon A_w \to B_w$ kan man vise at er injektiv. Videre er den kanonisk; ikke bare som ultraprodukt av kanoniske funksjoner, men man kan også se det ved å kikke på dets formel.

Konvensjon 3.2.17. Vi identifiserer ultraprodukter av funksjoner hvor nesten alle av dem er inklusjoner.

Fra denne konvensjonen får vi også at om $[\![X_w = Y_w]\!] \in \mathcal{F}$, så vil $X_\natural = Y_\natural$: La $f_w \colon X_w \to Y_w$ være identiteten for de w hvor $X_w = Y_w$, og noe annet ellers. Da er $f_\natural$ en inklusjon ved konvensjonen over, så $X_\natural \subseteq Y_\natural$, men man kan vise at den også er bijektiv, så disse mengdene blir like.

Kommentar 3.2.18. Ultraprodukter kommuterer med mange flere mengdeteoretiske operasjoner (opp til kanoniske bijeksjoner), for eksempel endelige unioner og snitt, og mengdedifferanser. Det fins også enkle formler for hvordan de behandler uendelige mengdeoperasjoner som generelle unioner, snitt og produkter. Se [18, kap. 13.8] og [33, s. 15ff] for mer.

3.3 Ultraringer I

Dersom A_w-ene er ringer kan man tenke seg to måter $A_\natural$ kan bli en ring på. Den ene dersom ekvivalensrelasjonen som lager $A_\natural$ viste seg å komme fra et ideal, og den andre dersom ultraproduktene av ringoperasjonene $+_\natural \colon A_\natural \times A_\natural \to A_\natural$

og $\cdot_\natural \colon A_\natural \times A_\natural \to A_\natural$ ga $A_\natural$ en ringstruktur. Det viser seg at begge disse danner ekvivalente ringstrukturer på $A_\natural$.

Proposisjon 3.3.1. Et ultraprodukt av ringer er en ring, både som faktorringen antydet til i definisjon 3.1.1, og ved å ta ultraproduktet av ringoperasjonene til approksimasjonene, og disse ringstrukturene er like. Nullelementet er $0_\natural$ og identiteten er $1_\natural$.

Bevis. Velg ringer A_w for $w \in W$. Husk at $A_\natural = \left(\prod_{w\in W} A_w\right)/\sim$. Vi viser at først $\sim$ kommer fra et ideal. La $\mathfrak{a} = \{a \in \prod_{w\in W} A_W \mid [\![a = 0]\!] \in \mathcal{F}\}$. Dersom $\mathfrak{a}$ er et ideal vil den induserte ekvivalensrelasjonen være $\sim$, så vi verifiserer det. For $a, b \in \mathfrak{a}$ har vi $\mathcal{F} \ni [\![a = 0]\!] \cap [\![b = 0]\!] \subseteq [\![a + b = 0]\!]$ slik at $\mathcal{F}$ fanger mengden til høyre og $a + b$ ligger i $\mathfrak{a}$. For $a \in \mathfrak{a}$ og $r \in \prod_{w\in W} A_w$ har vi $\mathcal{F} \ni [\![a = 0]\!] \subseteq [\![ra = 0]\!]$ slik at $\mathcal{F}$ fanger mengden til høyre, og $ra \in \mathfrak{a}$. Følgelig er $\mathfrak{a}$ et ideal, og $A_\natural$ får struktur som faktorring av $\prod_{w\in W} A_w$. Statusen til $1_\natural$ og $0_\natural$ som identitets- og nullelement følger av det at de er projiseringene til identiteten og nullelementet i produktringen.

For resten er det nok å vise at ultraproduktene $+_\natural \colon A_\natural \times A_\natural \to A_\natural$ og $\cdot_\natural \colon A_\natural \times A_\natural \to A_\natural$ gjør det samme som ringoperasjonene gitt av $\mathfrak{a}$. Det kommer av det at ringoperasjonene i produktringen $\prod_{w\in W} A_w$ gjøres punktvis; detaljene etterlates til leseren. $\square$

Kommentar 3.3.2. Ringen $A_\natural$ avhenger av valget av ultrafilter på W, og det er $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))|$ ultrafiltre på W [21, s. 75]. Det er naturlig å spørre om dette valget kan påvirke ringen opp til isomorfi. Følgende "syntetiske" eksempel bekrefter at valget er viktig: La $W = \mathbb{N}$, og A_n veksle mellom å være B eller C alt avhengig av om hvorvidt n er et par- eller oddetall. Da vil $A_\natural$ være isomorf med enten B eller C – hvilken avgjøres av om $\mathcal{F}$ fanger partallene eller oddetallene. Mer subtilt er det at valget også er viktig for ultrapotenser. La $W = \mathbb{N}$. Det har blitt vist at kontinuumhypotesen, som er uavhengig av ZFC, impliserer at $\mathbb{R}_\natural$ er unik opp til isomorfi [18, kap. 3.16]. Videre er det "folklore" at negasjonen til kontinuumshypotesen impliserer at $\mathbb{R}_\natural$ ikke er unik opp til isomorfi. For flere resultater av denne typen, se [17].

Digresjon 3.3.3. Konstruksjonen har en rent algebraisk karakterisering, se [41, kap. 2.5].

Ringer som er isomorfe med et ultraprodukt av ringer kalles ultraringer etter [41]. Vi vil skrive $+$ og $\cdot$ for ringoperasjonene til ultraringer, ikke $+_\natural$ og $\cdot_\natural$.

I mange tilfeller kan vi overføre ting vi har punktvis for hver $w \in W$ til å holde for ultraproduktet. Vi vil snart at dette følger av et mer generelt prinsipp kalt Łoś' teorem, men inntil videre må vi nøye oss med dette:

Lemma 3.3.4. Velg ringer A_w og B_w for $w \in W$. Da holder følgende:

(i) Ultraproduktet $f_\natural \colon A_\natural \to B_\natural$ av ringhomomorfier $f_w \colon A_w \to B_w$ er en ringhomomorfi.

(ii) Dersom hver A_w er en kropp, så er $A_\natural$ det.

Bevis. Første punkt etterlates til leseren; vi viser (ii). Velg $0 \neq a_\natural \in A_\natural$, som gir $[\![a \neq 0]\!] \in \mathcal{F}$. Definer $b_\natural \in A_\natural$ ved

$$b_w = \begin{cases} a_w^{-1}, & a_w \neq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Kravet $a_w \neq 0$ er ekvivalent med $w \in [\![a \neq 0]\!]$, så $[\![ab = 1]\!] = [\![a \neq 0]\!] \in \mathcal{F}$ slik at $a_\natural b_\natural = 1_\natural$, og $A_\natural$ er en kropp. $\square$

I argumentet over hadde vi lyst til å definere $(\operatorname{ulim} a_w)^{-1} = \operatorname{ulim} a_w^{-1}$, men vi kunne ikke gjøre det fordi a_w^{-1} ikke nødvendigvis fantes for hver $w \in W$. Dette viste seg å ikke være et problem da a_w^{-1} fantes for nesten hver w. Denne typen triks er vanlig i ultrafilterargumenter.

3.4 Funktorialitet for ringer

Vi definerte opprinnelig ultraproduktet for mengder, men er egentlig intresserte i det for ringer. Vi vil nå sjekke at funktorialitetsresultatene vi hadde i avsnitt 3.2 også holder i kategorien CRing av ringer.

Proposisjon 3.4.1. Ultraproduktet av ringer er en funktor

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} \colon \mathrm{CRing}^W \to \mathrm{CRing},$$

og ultrapotensen er en funktor $\operatorname{ulim}_{w \in W} \colon \mathrm{CRing} \to \mathrm{CRing}$. For sistnevnte danner diagonalimbeddingene en naturlig transformasjon $\mathrm{id}_{\mathrm{CRing}} \to \operatorname{ulim}$ av funktorer $\mathrm{CRing} \to \mathrm{CRing}$.

Bevis. Ved proposisjoner 3.2.8 og 3.2.9 er de funktorer på mengdenivå, så vi må kun sjekke at alle funksjonene vi så disse proposisjonene er ringhomomorfier. Det etterlates til leseren. □

Spesielt er diagonalimbeddingen av en ring til dets ultrapotens en ringhomomorfi.

Proposisjon 3.4.2. Ultraproduktet av ringer $\operatorname{ulim}\colon \mathrm{CRing}^W \to \mathrm{CRing}$ bevarer endelige produkter.

Bevis. Følg beviset til proposisjon 3.2.11, bruk lemma 3.3.4(i) ved behov og observer at funksjonen α er en ringhomomorfi fordi den kan fås ved universalegenskapen til produktet $A_\natural \times B_\natural$. □

Ved slutten av avsnitt 3.2.3 identifiserte vi produkter av ultraprodukter som ultrapotenser av produkter, alle diagonalimbeddinger og ultraprodukter av inklusjoner. Fra det over har vi i tillegg at når man begynner med ringer, så er alle disse identifikasjonene gjort av ringisomorfier.

3.5 Łoś' teorem for ringer

Vi har lyst til å kunne overføre egenskaper mellom et ultraprodukt $A_\natural$ og dets approksimasjoner A_w i større generalitet enn det vi har allerede sett, for eksempel i proposisjon 3.3.1 og lemma 3.3.4. Det ville vært fint om vi kunne vist et overføringsteorem som ville håndtert alle spesialtilfellene vi har sett hittil. Løsningen på problemstillingen over er Łoś' teorem, et resultat fra modellteorien som også kalles ultraproduktenes fundamentalteorem. For oss vil Łoś' teorem ha samme rolle som det såkalte overføringsprinsippet fra ikkestandard analyse, som er et spesialtilfelle av Łoś. Teoremet er kritisk for alt arbeid med ultraprodukter, så for en myk introduksjon vil vi gi tre versjoner av teoremet med ulike nivåer av generalitet og behov for modellteori. I dette avsnittet vil vi gi en modellteori-fri versjon og en sterkere versjon som tillater kvantorer, begge fra [41]. Begge disse versjonene handler om ringer/algebraer. I neste avsnitt vil vi gi den ordentlige versjonen av Łoś' teorem som vi vil bruke i resten av oppgaven.

Før vi begynner, la oss illustrere styrken av det ved hva man kan vise med den. Lemma 3.3.4 er en umiddelbar konsekvens av Łoś' teorem. Her er noen flere eksempler:

Proposisjon 3.5.1. Velg funksjoner $f_w\colon X_w \to Y_w$, ringer A_w, og elementer $a_w \in A_w$. Da holder følgende:

(i) $f_\natural$ er injektiv hviss nesten hver f_w er det.

(ii) $f_\natural$ er surjektiv hviss nesten hver f_w er det.

(iii) $f_\natural$ er bijektiv hviss nesten hver f_w er det.

(iv) $A_\natural$ er et integritetsområde hviss nesten alle av A_w-ene er det.

(v) $A_\natural$ er en kropp hviss nesten hver A_w-ene er det.

(vi) Ultraproduktet $a_\natural$ av elementer $a_w \in A_w$ er en enhet hviss nesten alle av a_w-ene er det.

(vii) Et ultraprodukt av mengder med kardinalitet $\leq n$ er en mengde med kardinalitet $\leq n$.

For B_w en samling av A-algebraer, så har $B_\natural$ kanonisk struktur som A-algebra, enten ved å la A virke punktvis eller ved å ta ultraproduktet av ringhomomorfiene $A \to B_w$ som gir algebrastrukturene til B_w-ene og å bruke lemma 3.3.4.

Vi kan nå gi den første versjonen av Łoś' teorem:

Proposisjon 3.5.2 (Likningversjon av Łoś)**.** La A være en ring og B_w være A-algebraer. Velg $n \in \mathbb{N}_0$ og $f \in A[x_1, \ldots, x_n]$, og la $b_w \in B_w^n$ være n-tupler av elementer i B_w for hver $w \in W$. Da vil $f(b_\natural) = 0$ i $B_\natural$ hvis og bare hvis $f(b_w) = 0$ i B_w for nesten hver w. Tilsvarende holder for likninger på formen $\neq 0$.

Bevis. Tilfellet $n = 0$ sier at for $a \in A$ vil $a \cdot 1 = 0$ i $B_\natural$ hvis og bare hvis $a \cdot 1 = 0$ i B_w for nesten hver w. Dette er en enkel verifikasjon.

Anta heretter $n \geq 1$. Det er nok å vise at $\operatorname{ulim}_{w \in W} f(b_w) = f(b_\natural)$. Uformelt og i praksis tenker vi på påstandene "$f(b_w) = 0$" og "$f(b_\natural) = 0$" som å si at vi må erstatte hver x_i i f med den tilsvarende komponenten i b_w eller $b_\natural$ og bruker A-algebrastrukturen der nødvendig for å få likninga påstandene skal representere, men vi trenger formaliseringa for beviset. Skriv $(b_w)_n$ for den n-te komponenten til b_w, og $(b_\natural)_n$ for den n-te komponenten til $b_\natural$ (konvensjon 3.2.12). Elementet $f(b_w)$ i B_w er bildet av f under (den unike) ringhomomorfien $g_w \colon A[x_1, \ldots, x_n] \to B_w$ som sender $x_i \mapsto (b_w)_i$ for hver i, under f. Disse fins; ta ringhomomorfien $A \to B_w$ og bruk universalegenskapen til polynomringen (korollar 5.4.2) Tilsvarende er $f(b_\natural)$ i $B_\natural$ lik bildet av f under (den unike) ringhomomorfien $\psi\colon A[x_1,\dots,x_n] \to B_\natural$ som sender $x_i \mapsto (b_\natural)_i$ for hver i, under the element f. Definer komposisjonen

$$\varphi\colon A[x_1,\dots,x_n] \xrightarrow{\iota} (A[x_1,\dots,x_n])_\natural \xrightarrow{g_\natural} B_\natural$$

hvor ι er diagonalimbeddingen. Den er en ringhomomorfi ved lemma 3.3.4, og $\varphi(x_i) = \mathrm{ulim}_{w\in W}(b_w)_i = (b_\natural)_i$, slik at universalegenskapen til polynomringen $A[x_1,\dots,x_n]$ gir $\varphi = \psi$. Da vil

$$f(b_\natural) = \varphi(f) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} g_w(f) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f(b_w)$$

og vi er ferdige. □

Merk at siden hver ring har kanonisk struktur som $\mathbb{Z}$-algebra kan man også bruke proposisjonen over i situasjoner hvor man i utgangspunktet kun har ringer.

Eksempel 3.5.3. La oss vise proposisjon 3.5.1(vi), at for ringer A_w og elementer $a_w \in A_w$ for hver $w \in W$, så er $a_\natural$ en enhet hvis og bare hvis nesten alle av a_w-ene er det. Ved Łoś (proposisjon 3.5.2) får at for hvert valg av elementer $b_w \in A_w$ vil

$$a_w b_w = 1_w \text{ for nesten hver } w \iff a_\natural b_\natural = 1_\natural \tag{4}$$

Om nesten alle av a_w-ene er enheter lar vi b_w være a_w^{-1} for de w den fins og hva som helst ellers. Da vil (4) gi $a_\natural b_\natural = 1_\natural$ slik at $a_\natural$ er en enhet i $A_\natural$. For den andre veien, om $a_\natural$ var en enhet, vil den ha en invers $b_\natural$. Bruk så (4).

I eksempelet over måtte vi styre litt med å velge b_w-er for å kompensere for det at proposisjon 3.5.2 ikke håndterer kvantorer. Vi kan unngå dette ved å bruke en sterkere versjon av Łoś. Denne bruker konseptet av formler fra logikken. Vi vil ikke gå inn på hva de er nå, siden vi vil gjøre det i neste avsnitt.

Proposisjon 3.5.4 (Likningsversjona av Łoś med kvantorer)**.** Velg A en ring, og A-algebraer B_w for $w \in W$. Velg en formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ i språket av A-algebraer med n frie variable. For elementer $x_{1,w},\dots,x_{n,w}$ av A_w vil $\varphi(x_{1,\natural},\dots,x_{n,\natural})$ holde i $B_\natural$ hvis og bare hvis $\varphi(x_{1,w},\dots,x_{n,w})$ holder i A_w for nesten hver w.

Bevis. Utelatt. Dette er forsåvidt et spesialtilfelle av av Łoś' teorem (thm. 3.6.13), som vi vil se på i neste avsnitt. □

Nå kan vi vise proposisjon 3.5.1 punkt (vi) ved å isteden "overføre" påstanden $\varphi(a) \equiv (\exists b)(ab = 1)$ i språket av $\mathbb{Z}$-algebraer (ringer) mellom A_w-ene og $A_\natural$.

Eksempel 3.5.5. La oss vise proposisjon 3.5.1(iv), nemlig at A_w er integritetsområder for nesten hver w hviss $A_\natural$ er et. La φ være formelen

$$(\forall x, y)(xy = 0 \to [x = 0 \text{ eller } y = 0]).$$

Gi ringene A_w og $A_\natural$ struktur som $\mathbb{Z}$-algebraer. Da vil proposisjon 3.5.4 gi at φ holder i A_w (at A_w er et integritetsområde) for nesten hver w hviss den holder i $A_\natural$, altså at $A_\natural$ er et integritetsområde.

3.6 Łoś i full styrke

Vi vil nå studere den fulle versjonen av Łoś' teorem. Kostanden for å få en versjon av Łoś som kan bli brukt i "alle" situasjoner er at vi får et resultat som er langt mer teknisk enn de to versjonene vi hittil har sett. Til gjengjeld får vi den "riktige" versjonen av resultatet for generell bruk av ultraprodukter i ikkestandard analyse, algebra og matematikk ellers. I motsetning er de svakere versjonene av Łoś vi har gitt over ad hoc. Førstegangslesere, fortvil ikke! Det er viktigst å vite hvordan man anvender teoremet. Vi vil gi en fullstendig rettferdiggjøring av hvorfor resultatet er sant og vi kan bruke det slik vi vil.

For å kunne formulere Łoś trenger vi noe terminologi fra modellteorien. Vi vil følge [28] og [21] med noen forenklinger.

Definisjon 3.6.1. Et (førsteordens) språk $\mathcal{L}$ er en samling av ulike symboler delt i følgende kategorier: (i) Paranteser: "(" og ")", (ii) Konnektiver: "$\wedge$" og "$\neg$", (iii) Kvantor: "$\forall$", (iv) Variabelsymboler, (v) Likhet: "$=$", (vi) Uendelig mange konstantsymboler, (vii) For hver $n \in \mathbb{N}$, en samling n-ære funksjonssymboler, og (viii) For hver $n \in \mathbb{N}$, en samling av n-ære relasjonssymboler.

Med n-ær mener vi at det tar n argumenter. For eksempel er binærfunksjoner de 2-ære funksjonene. Et eksempel på et språk er det av ringer, et hvor man har to konstantsymboler 0 og 1, og to binære funksjoner $+$ og $\times$. For to strenger φ og ψ vil vi skrive $\varphi \equiv \psi$ for å si at de er identiske.

Definisjon 3.6.2. La $\mathcal{L}$ være et språk. Et term av $\mathcal{L}$ er en ikketom endelig streng t av symboler slik at

(i) t er et variabelsymbol, eller

(ii) t er et konstantsymbol, eller

(iii) $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$, hvor f er et n-ært funksjonssymbol og hver t_i er et term av $\mathcal{L}$.

Definisjon 3.6.3. La $\mathcal{L}$ være et språk. En formel i $\mathcal{L}$ er ikketom endelig streng φ av symboler av $\mathcal{L}$ slik at

(i) $\varphi \equiv (t_1 = t_2)$ for t_1 og t_2 termer i $\mathcal{L}$, eller

(ii) $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$ for R er et n-ært relasjonssymbol og t_i-ene termer i $\mathcal{L}$, eller

(iii) $\varphi \equiv (\neg\alpha)$ for α en formel i $\mathcal{L}$, eller

(iv) $\varphi \equiv (\alpha \wedge \beta)$ for α og β formler i $\mathcal{L}$, eller

(v) $\varphi \equiv (\forall v)(\alpha)$ for v et variabelsymbol og α en formel i $\mathcal{L}$.

Kommentar 3.6.4. Vi velger å bruke paranteser i punkt (i) for å sørge for at en formel ikke kan bli tolket på flere måter. Dette er ikke den eneste måten å sørge for at formler har unik lesbarhet – sammenlikn våre definisjoner med de i [28].

For å gjøre formler enklere å lese vil vi unnlate dem der ingen forvirring kan oppstå. Vi har definert formler relativt minimalistisk; vi mangler mange symboler vi har lyst til å bruke, som eksistenskvantoren $\exists$, adjunksjonssymbolet $\wedge$ implikasjonspilen $\to$ og ekvivalenspilen $\leftrightarrow$. Vi kunne ha definert førsteordensspråk til å inneholde disse, men det vil komplisere definisjoner og bevis vi vil gjøre. Det er derfor enklest å definere dem som forkortelser, for eksempel

$$a \wedge b \equiv \neg(\neg a \vee \neg b), \quad a \to b \equiv \neg a \vee b, \quad (\exists x)(\varphi(x)) \equiv \neg(\forall x)(\neg\varphi(x))$$

og så videre. Vi kan så sjekke, når vi har definert "sannhet", at disse forkortelsene oppfører seg slik vi vil at de skal. Vi kan så definere ytterliggere forkortelser som $(\forall x \in X)$, $(\exists x \in X)$, og så videre.

Definisjonene vi har gitt hittil er rent syntaktiske. De forteller kun hva som er lov å formulere, men ikke mer. Vi vil nå definere de tingene vi skal tolke disse formlene til å handle om.

Definisjon 3.6.5. En struktur $\mathfrak{A}$ av et førsteordensspråk $\mathcal{L}$ består av følgende data:

(i) En ikketom mengde A, som kalles universet til strukturen.

(ii) For hvert konstantsymbol c av $\mathcal{L}$, et element $c^{\mathfrak{A}}$ av A.

(iii) For hvert n-ære funksjonssymbol f i $\mathcal{L}$, en funksjon $f^{\mathfrak{A}}\colon A^n \to A$, og

(iv) For hvert n-ære relasjonssymbol R i $\mathcal{L}$, en n-ær relasjon $R^{\mathfrak{A}}$ på A.

Eksempel 3.6.6. Dersom $\mathcal{L}$ er språket $\{0, 1, +, \cdot\}$ av ringer, så vil en struktur av språket være en mengde A med elementer $0, 1 \in A$ og to binærfunksjoner $+, \cdot\colon A \times A \to A$.

Intuitivt vil strukturer være konteksten hvor vi har lyst til å tolke påstander. Vi kan også tolke termer i strukturer: For en struktur $\mathfrak{A}$ kan vi tolke i $\mathcal{L}$ til å "henvise til" et element i A. Gitt en funksjon $f\colon \mathrm{Vars} \to A$, hvor Vars er mengden av variabelsymboler i $\mathcal{L}$, kan vi lage en funksjon $g\colon \mathrm{Trmr} \to A$ som angir hvert term dets "tolkning" i A, hvor hvert variabelsymbol u erstattes med $f(u)$. Slike funksjoner kalles termtilordningsfunksjoner. For den formelle definisjonen, se [28, def. 1.7.3].

Det gjenstår å kunne snakke om sannhet av påstander i en struktur, altså når en struktur "tilfredsstiller" en "påstand". For det trenger vi å kunne snakke om om frie variable. Intuitivt er dette variable som man "kan erstatte" for ulike verdier, slik at vi ikke kan unikt tolke formler med frie variabler.

Definisjon 3.6.7. Velg en formel φ i et språk $\mathcal{L}$, og et variabelsymbol v. Vi sier at v er fri i φ dersom

(i) φ er på formen som (i) eller (ii) i definisjon 3.6.3, og v inngår i φ, eller

(ii) $\varphi \equiv (\neg\psi)$ hvor ψ er en formel og v er fri i ψ, eller

(iii) $\varphi \equiv (\psi \wedge \phi)$ og v er fri i minst én av ψ og ϕ, eller

(iv) $\varphi \equiv (\forall u)(\psi)$ hvor u ikke er samme variabelsymbol som v, og v er fri i ψ.

Definisjon 3.6.8. En setning i et språk $\mathcal{L}$ er en formel uten frie variable.

Frie variable henviser ikke til noe element i universet til en struktur, så setninger er de formlene vi bør kunne angi sannhetsverdier.

Definisjon 3.6.9. La $\mathfrak{A}$ være en $\mathcal{L}$-struktur, φ en formel i $\mathcal{L}$ og f en termtilordningsfunksjon. Da vil $\mathfrak{A}$ *tilfresstille* φ *med tilordning* f dersom påstanden man får om $\mathfrak{A}$ ved å erstatte termene t i φ med $f(t)$ – utenom frie variable i kontekster hvor de kvantifiseres over – er sann, hvor $\forall$, $\wedge$ og $\neg$ tolkes som vanlig.

Merk at dersom φ har frie variable kan sannhetsverdien til φ avhenge av termtilordningsfunksjonen f, men ikke dersom φ har ingen frie variable (se f.eks. [28, kor. 1.7.8]). Følgelig,

Definisjon 3.6.10. En $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{A}$ tilfredsstiller en setning φ om den tilfredsstiller φ for alle valg (ekvivalent, et valg) av termtilordningsfunksjoner. I så fall sier vi at φ er sann i $\mathcal{A}$.

Eksempel 3.6.11. La $\mathcal{L}$ være språket av ringer, og la $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$ og $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ være strukturene de burde være. Da er setninga $\varphi \equiv (\exists x)(x \cdot x + 1 = 0)$ i $\mathcal{L}$ sann i $\mathbb{C}$ og usann i $\mathbb{Z}$. La $f\colon \mathrm{Trmr} \to \mathbb{Z}$, $g\colon \mathrm{Trmr} \to \mathbb{C}$ være termtilordningsfunksjonene som sender variabelen t til 2, og alle andre variabelsymboler til 0. Da er $\psi \equiv (\exists y)(y \cdot t = 1)$ sann i $\mathbb{C}$ med hensyn på f, og ikke sann i $\mathbb{Z}$ med hensyn på g.

Vi kan nå involvere ultraprodukter.

Definisjon 3.6.12. La $\mathcal{L}$ være et førsteordensspråk. For en samling av $\mathcal{L}$-strukturer $\mathfrak{A}_w$, definerer vi ultraproduktet $\mathfrak{A}_\natural$ til å være $\mathcal{L}$-strukturen som følger:

(i) For c et konstantsymbol i $\mathcal{L}$, la $c^{\mathfrak{A}_\natural} = \operatorname{ulim}_{w \in W} c^{\mathfrak{A}_w}$.

(ii) For R et n-ært relasjonssymbol, definer den n-ære relasjonen $R^{\mathfrak{A}_\natural}$ på $\mathfrak{A}_\natural$ ved

$$R^{\mathfrak{A}_\natural}(x_{1,\natural}, \ldots, x_{n,\natural}) \iff \{w \in W \mid R^{\mathfrak{A}_w}(x_{1,w}, \ldots, x_{n,w})\} \in \mathcal{F}.$$

(iii) For et n-ært funksjonssymbol f, la $f^{\mathcal{A}_\natural} = \operatorname{ulim}_{w \in W} f^{\mathcal{A}_w}$.

Man kan sjekke at punkt (ii) er veldefinert. Siden strukturer har ikketomme universer per definisjon, vil alle ultraprodukter av strukturer være ultraprodukter av ikketomme mengder. Ergo har vi ikke behov for tilleggsdefinisjonen fra avsnitt 3.2.3 for å håndtere tomme mengder.

Vi er nå klare for å gi den modellteoretiske versjonen av Łoś.

Teorem 3.6.13 (Łoś)**.** La W være en mengde og $\mathcal{F}$ et ultrafilter på W. Velg et førsteordensspråk $\mathcal{L}$ og $\mathcal{L}$-strukturer $\mathfrak{A}_w$ for hver $w \in W$. Velg en formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathcal{L}$ med $n \geq 0$ frie variable. For hvert valg $x_{1,w}, \ldots, x_{n,w} \in A_w$ for hver $w \in W$ vil da

$$\varphi(x_{1,w}, \ldots, x_{n,w}) \text{ i } \mathfrak{A}_w \text{ for } \mathcal{F}\text{-nesten hver } w \iff \varphi(x_{1,\natural}, \ldots, x_{n,\natural}) \text{ i } \mathfrak{A}_\natural\ .$$

Bevis. Dette er det lengste beviset i denne oppgaven. Ved første lesing bør dette hoppes over eller skumleses. Vi følger [21, thm. 12.3] grovt. Definisjonen av formler er induktiv; formler kan lages fra "enklere" formler, og alle formler kan bli lagd ved å gjøre nok av standardoperasjonene (negasjon, konjunksjon, kvantor) på de "enkleste" formlene, som er de som lages av relasjoner, eller å si at to ting er like. Siden formler skal være endelige kan hver formel bli lagd ved å gjøre endelig mange av de ovennevnte operasjonene på de "enkleste" formlene. Vi kan derfor bevise påstander om alle formler ved å gjøre induksjonsbevis på punktene i definisjon 3.6.3. Bevis på denne formelen kan også bli formulert som vanlige induksjonsbevis på antallet negasjoner, konnektiver og kvantorer i formelen. Denne teknikken kalles induksjon på strukturen/kompleksiteten til formelen, og er standard i matematisk logikk.

(i) Anta at $\varphi \equiv (t_1 = t_2)$ for termer t_1 og t_2 i $\mathcal{L}$. Velg termtilordningsfunksjoner $f_w\colon \mathrm{Trmr} \to A_w$ for hver $w \in W$. Skriv nå $f_\natural\colon \mathrm{Trmr} \to A_\natural$ for ultraproduktet

$$f_\natural(u) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f_w(u).$$

Med språket av tilordningsfunksjoner må vi vise at

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_w \text{ tilfredsstiller } \varphi \text{ mhp. } f_w \text{ for nesten hver } w \\ \iff &\mathfrak{A}_\natural \text{ tilfredsstiller } \varphi \text{ mhp. } f_\natural \end{aligned}$$

som kan pakkes opp til å si "$f_w(t_1) = f_w(t_2)$ for nesten hver w hviss $f_\natural(t_1) = f_\natural(t_2)$", som holder per definisjon av ultraproduktet.

(ii) Relasjoner: Anta at $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$ for R en n-ær relasjon i $\mathcal{L}$. Argumentet her er i samme stil som (i), og etterlates til leseren

(iii) Negasjon: Anta nå at φ er en formel hvor Łoś holder. Vi skal vise at den holder for formelen $\neg\varphi$. Igjen, velg tilordningsfunksjoner $f_w\colon \mathrm{Trmr} \to A_w$, og la $f_\natural\colon \mathrm{Trmr} \to A_\natural$ være som over. Induksjonshypotesen sier

$$\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w\ \} \in \mathcal{F} \iff \mathfrak{A}_\natural \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_\natural. \tag{5}$$

Det kontrapositive av (5) lyder

$$\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w\ \} \notin \mathcal{F} \iff \neg(\mathfrak{A}_\natural \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_\natural)$$

slik at, ved komplement-egensskapen til ultrafiltre (definisjon 2.1.5(ii)),

$$\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har ikke } \varphi \text{ mhp. } f_w\} \in \mathcal{F} \iff \mathfrak{A}_\natural \text{ har ikke } \varphi \text{ mhp. } f_\natural,$$

Å ikke ha φ (mhp. f_w eller $f_\natural$) er ekvivalent med å ha $\neg\varphi$ (mhp. f_w eller $f_\natural$), så vi er ferdige.

(iv) Konjunksjon: Anta at φ og ψ er formler hvor Łoś holder. Velg termtilordningsfunksjoner $f_w\colon \mathrm{Trmr} \to A_w$, og la $f_\natural\colon \mathrm{Trmr} \to A_\natural$ som over. Da vil φ tilfredsstille (5), og tilsvarende holder for ψ. Vi har at

$$\begin{aligned} &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \wedge \psi \text{ mhp. } f_w\} \\ = &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w\} \cap \{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \psi \text{ mhp. } f_w\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Følgelig,

$$\begin{aligned} &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \wedge \psi \text{ mhp. } f_w\} \\ \iff &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w\} \in \mathcal{F} \text{ og} \\ &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \psi \text{ mhp. } f_w\} \in \mathcal{F}\} \\ \iff &A_\natural \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_\natural, \text{ og } A_\natural \text{ har } \psi \text{ mhp. } f_\natural \\ \iff &A_\natural \text{ har } \varphi \wedge \psi \text{ mhp. } f_\natural \end{aligned}$$

hvor vi i første ekvivalens brukte (6) og lemma 2.1.2(ii), og i den andre induksjonshypotesene til φ og ψ.

(v) Kvantor: Anta at φ er en formel hvor Łoś holder. Vi skal vise at Łoś også holder for $\psi \equiv (\forall u)(\varphi)$, hvor u er et variabelsymbol. Definisjonen av sannhet med termtilordningsfunksjoner er litt mer komplisert for kvantorer. Den riktige definisjonen er at en struktur $\mathfrak{A}$ tilfredsstiller ψ mhp. f dersom for hver $a \in A$ vil $\mathfrak{A}$ tilfredsstille φ mhp. f^a, hvor $f^a\colon \mathrm{Trmr} \to A$ er termtilordningsfunksjonen som sender $u \mapsto a$, og ellers gjør det samme som f [28, def. 1.7.4].

Velg termtilordningsfunksjoner $f_w\colon \mathrm{Trmr} \to A_w$, og få $f_\natural\colon \mathrm{Trmr} \to A_\natural$. Induksjonshypotesen blir igjen likning (5). Velg $a_w \in A_w$ for hver $w \in W$. Siden induksjonshypotesen var for alle valg av termtilordningsfunksjoner vil

$$\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w^{a_w}\} \in \mathcal{F} \iff \mathfrak{A}_\natural \text{ har } \varphi \text{ mhp. } \operatorname*{ulim}_{w \in W} f_w^{a_w}.$$

Merk at

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} f_w^{a_w} = (f_\natural)^{a_\natural}. \tag{7}$$

Ved å kvantifisere over alle valg av a_w-er, dvs. elementer av $\prod_{w \in W} A_w$, får vi

$$\begin{aligned} &(\forall \text{valg } a_{w'} \in A_{w'} \text{ for } w' \in W)(\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w^{a_w}\} \in \mathcal{F}) \\ \iff &(\forall a_\natural \in A_\natural)(\mathfrak{A}_\natural \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_\natural^{a_\natural}). \end{aligned} \tag{8}$$

Implikasjonen ($\Rightarrow$) fås av å bruke utvalgsaksiomet til å velge representanter a_w for en gitt $a_\natural$, og å så bruke induksjonshypotesen på hver w separat. Implikasjonen ($\Leftarrow$) fås ved å betrakte $a_\natural$ i $A_\natural$, å benytte likning (7) og å bruke induksjonshypotsen. Vi gjenkjenner den nedre påstanden som at $\mathfrak{A}_\natural$ tilfredsstiller $\psi \equiv (\forall u)(\varphi)$. Hva med den øvre? Det vi har lyst til å vise er

$$\begin{aligned} &(\forall a \in \prod_{w' \in W} A_{w'})(\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w^{a_w}\} \in \mathcal{F}) \\ \iff &\{w \in W \mid (\forall a \in A_w)(\mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w^a)\} \in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{9}$$

Det kontrapositive av denne ekvivalensen er

$$\begin{aligned} &(\exists a \in \prod_{w' \in W} A_{w'})(\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w^{a_w}\} \notin \mathcal{F}) \\ \iff &\{w \in W \mid (\forall a \in A_w)(\mathfrak{A}_w \text{ har } \varphi \text{ mhp. } f_w^a)\} \notin \mathcal{F} \end{aligned}$$

som, ved definisjon 2.1.5(ii) er ekvivalent med

$$\begin{aligned} &(\exists a \in \prod_{w' \in W} A_{w'})(\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ har } \neg\varphi \text{ mhp. } f_w^{a_w}\} \in \mathcal{F}) \\ \iff &\{w \in W \mid (\exists a \in A_w)(\mathfrak{A}_w \text{ har } \neg\varphi \text{ mhp. } f_w^a\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Denne ekvivalensen, som er ekvivalent med (9), kan enkelt verifiseres og detaljene etterlates til leseren. Så (9) er sann, slik at den nedre påstanden i (8), som sier at $\mathfrak{A}_\natural$ tilfredsstiller $\psi \equiv (\forall u)(\varphi)$, er ekvivalent med den nedre påstanden i (9), som sier at $\mathfrak{A}_w$ tilfredsstiller $\psi \equiv (\forall u)(\varphi)$ for nesten hver w. Det var det vi skulle vise, så vi er ferdige. $\square$

Kommentar 3.6.14. Det er verdt å reflektere over hvor i beviset vi brukte våre sterkeste antagelser. Antagelsen om at $\mathcal{F}$ er et ultrafilter ovenfor kun et vanlig filter trengtes i negasjonssteget og kvantorsteget, og utvalgsaksiomet ble brukt i kvantorsteget.

Teoremet over er fint, men det gir oss et stort spørsmål: Hvilket språk, og hvilke strukturer bør vi bruke? Dersom vi har lyst til å snakke om kun én ring av gangen. Det lar oss imidlertid ikke snakke om funksjoner mellom vilkårlige mengder, og spesielt ringhomomorfier, samt viktige delmengder som idealer. Det naive valget av struktur er altså ofte ikke nok. Vi har behov for et språk med plass til all matematikk vi vil gjøre, så en struktur som kan gjøre mengdelære virker lovende. Det passer dessuten med vårt syn på ultraproduktet som en konstruksjon man gjør på mengder.

Når vi bruker Łoś vil vi bruke språket av mengdelæren, som kun inneholder en binærrelasjon $\in$, med et univers som er stort nok for våre formål, men som likevel er liten nok til å være en mengde. Vi vil gjøre dette etter [18, kap. 13]. Hver gang vi bruke Łoś vil vi lage en mengde en mengde X som inneholder alle mengder vi er opptatt av den gangen vi skal bruke teoremet, for eksempel en samling av ringer man er opptatt av, heltallene, samt de mengdene man kan få av å gjøre vanlige mengdeteoretiske operasjoner på dem. Gitt en mengde X definerer vi *superstrukturen* til X som mengden $\mathbb{U} = \mathbb{U}(X)$ induktivt ved

$$\mathbb{U}_0 = X, \qquad \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n \cup \mathcal{P}(\mathbb{U}_n), \qquad \mathbb{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n.$$

Superstrukturer er lukka under de fleste mengdeteoretiske operasjonene man gjør i praksis, men ikke alle. For eksempel, definer rangen til en gitt $x \in \mathbb{U}$ som den minste n slik at $x \in \mathbb{U}_n$. For en vilkårlig delmengde $A \subseteq \mathbb{U}$ vil $A \in \mathbb{U}$ være ekvivalent med at A sine elementer har begrensa rang. Følgelig er $\mathbb{U}$ lukka under hverken vilkårlige delmengder og unioner, men universet er lukka under unioner av elementer med begrensa rang, for eksempel endelige unioner, og vilkårlige unioner av elementer og delmengder av hver $\mathbb{U}_n$.

Det er ikke hensiktsmessig å gå videre inn på detaljene her. De interesserte leserene kan finne detaljene i [18, kap. 13], Tilhengere av Grothendieckuniverser kan og bør erstatte $\mathbb{U}$ med et univers.

Et problem med definisjonene vi har gjort av førsteordensspråk er at alle funksjoner i en struktur har hele universet som domene i hver variabel; partielle funksjoner er ikke tillatt. Én mulig løsning er å definere førsteordensspråk til å tillate partielle funksjoner og relasjoner, eller ved å la funksjoner være definert som relasjoner for formålene til Łoś' teorem, men det fins en mer elegant løsning. Vi kan lure oss unna ved å bruke synet på funksjoner som mengder som ble nevnt i kommentar 3.1.5. En funksjon $f\colon X \to Y$ er bare en viss mengde $f \subseteq X \times Y$, og med dette synet sier påstanden $y = f(x)$ at $(x, y) \in f$. Tilsvarende kan man gjøre for relasjoner, og med det kan vi snakke om partielle funksjoner og relasjoner i mengdelærens språk uten å legge til flere komplikasjoner.

For mer om superstrukturer, se f.eks. [18, kap. 13], [33, Appendiks A], og [7, kap. 4.4].

Eksempel 3.6.15. La oss vise proposisjon 3.5.1(i), som sier at for funksjoner $f\colon X_w \to Y_w$ indeksert over $w \in W$, så er $f_\natural$ injektiv hviss nesten alle av f_w-ene er det. La $X = \bigcup_{w\in W} X_w \cup Y_w$, og få superstruktur $\mathbb{U}(X)$. Denne vil inneholde alle funksjonene $f_w\colon X_w \to Y_w$, så vi kan behandle dem som mengder. Språket $\mathcal{L}$ har konstantsymboler g og B, og vi vil se på g som en funksjon. La φ være formelen

$$\varphi(g, A) \equiv (\forall x, y \in A)(g(x) = g(y) \to x = y).$$

Merk at g er et konstantsymbol, så φ over er egentlig ikke lov å formulere. Med $g(x)$ mener vi den unike c slik at $(x, c) \in g$, så $g(x) = g(y)$-delen sier egentlig $(\forall a \in A)(\forall b \in A)((x, a) \in g \wedge (y, b) \in g \to a = b)$. Vi har ihvertfall

$$\varphi(f_w, X_w) \equiv (\forall x, y \in X_w)(f_w(x) = f_w(y) \to x = y)$$

som sier at f_w er injektiv. Łoś gir

$$\varphi(f_w, X_w) \text{ for nesten hver } w \iff \varphi(f_\natural, X_\natural)$$

Formelen til høyre sier $(\forall x, y \in X_\natural)(f_\natural(x) = f_\natural(y) \to x = y)$, så Łoś gir at $f_\natural$ er injektiv hviss nesten hver f_w er det. Det må understrekes at man i praksis ikke tenker på superstrukturer når man gjør bevis som dette.

I praksis tenker man ikke på hva φ, og forsåvidt universet $\mathbb{U}(X)$, bør være for å kunne bruke Łoś. Isteden tenker man at man begynner med en samling formler eller termer

$$\varphi_w \equiv (\forall x, y \in A_w)(f_w(x) = f_w(y) \to x = y)$$

går direkte til dets "$\natural$-utvidelse"

$$\varphi_\natural \equiv (\forall x, y \in A_\natural)(f_\natural(x) = f_\natural(y) \to x = y)$$

som vi kan bruke i Łoś' teorem. Vi velger å bruke ordet utvidelse fordi det gjøres i ikkestandard analyse, hvor man bruker ultrapotenser og ordbruken gir mening. Den ordentlige definisjonen er følgende:

Definisjon 3.6.16. Velg et språk $\mathcal{L}$, strukturer $\mathfrak{A}_w$ for $w \in W$, og la $\mathfrak{A}_\natural$ være ultraproduktet. For ethvert valg $x_{1,w}, \ldots, x_{n,w}$ av elementer av A_w er $\natural$-utvidelse av formelen $\varphi_w \equiv \varphi(x_{1,w}, \ldots, x_{n,w})$ i hver $\mathfrak{A}_w$ henholdsvis, formelen $\varphi_\natural \equiv \varphi(x_{1,\natural}, \ldots, x_{n,\natural})$.

Vi kan nå rettferdiggjøre vår bruk av partielle funksjoner.

Lemma 3.6.17. Velg mengder a_w, b_w for $w \in W$, og betrakt mengdelærens språk.

(i) Utvidelsen til $\varphi_w \equiv (a_w \in b_w)$ er $\varphi_\natural \equiv (a_\natural \in b_\natural)$.

(ii) Utvidelsen til $\tau_w = (a_w, b_w)$ er $\tau_\natural \equiv (a_\natural, b_\natural)$.

Bevis. Den første er per definisjon. Den andre er en inkarnasjon av konvensjon 3.2.12:

$$(a_w, b_w)_\natural = \operatorname*{ulim}_{w \in W}(a_w, b_w) = \left(\operatorname*{ulim}_{w \in W} a_w, \operatorname*{ulim}_{w \in W} b_w\right) = (a_\natural, b_\natural). \qquad \square$$

Merk at $\in$-en i punkt (i) er binærrelasjonen $\in_\natural$, ultraproduktet av $\in$-relasjonene til hver individuelle $\mathfrak{A}_w$, ikke nødvendigvis vanlig mengdeteoretisk inklusjon. Vi velger å tolke det slik på grunn av korollar 3.2.14.

For funksjoner $f_w \colon A_w \to B_w$, elementer $a_w \in A_w$ og mengder x_w kan vi nå beregne $\natural$-utvidelsen til formlene $x_w = f_w(a_w)$ med vårt "funksjon som mengde"-syn fra kommentar 3.1.5:

$$\begin{aligned} (x_w = f_w(a_w))_\natural &\iff ((a_w, x_w) \in f_w)_\natural \iff (a_w, x_w)_\natural \in f_\natural \\ &\iff (a_\natural, x_\natural) \in f_\natural \iff x_\natural = f_\natural(a_\natural) \end{aligned}$$

hvor vi i de midterste ekvivalensene brukte lemma 3.6.17. Med dette kan vi trygt bruke Łoś for våre formål slik vi har lyst til.

3.7 Ultraringer II

Med Łoś' teorem i verktøykassen vil vi fortsette med å studere ultraprodukter av ringer. Selv om resultatet kan se ut til å trivialisere ultraprodukter, så stemmer dette ikke. Ringer har mange interessante andreordenskonsepter som Łoś a priori ikke kan si noe om. Vi vil se at med noe arbeid kan vi likevel snakke om flere av disse. Vi vil også vise førsteordensresultater som er enkle nå som vi har Łoś.

Lemma 3.7.1. Velg mengder $A_w \subseteq B_w$. Da vil $A_\natural \subseteq B_\natural$ ved konvensjon 3.2.17. For hver $b_\natural \in B_\natural$ vil $b_\natural \in A_\natural$ hvis og bare hvis $[\![b_w \in A_w]\!] \in \mathcal{F}$.

Bevis. Dette kan tenkes på som et spesialtilfelle av konvensjon 3.2.13, men med en ekvivalens. ($\Rightarrow$): Ved konvensjonen betyr det at det fins $a_w \in A_w$ slik at $a_\natural = b_\natural$. Følgelig vil $\mathcal{F} \ni [\![a_w = b_w]\!] \subseteq [\![b_w \in A_w]\!]$, slik at $\mathcal{F}$ fanger mengden til høyre.

($\Leftarrow$): For $w \in [\![b_w \in A_w]\!]$, velg $a_w = b_w \in A_w$, og vilkårlig ellers. Da vil $\mathcal{F} \ni [\![a_w \in B_w]\!] \subseteq [\![a_w = b_w]\!]$, slik at $a_\natural = b_\natural$. $\square$

Lemma 3.7.2. Velg funksjoner $f_w \colon X_w \to Y_w$ og delmengder $A_w \subseteq Y_w$. Da vil

$$f_\natural^{-1}(A_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} f_w^{-1}(A_w).$$

Bevis. Høyresida er en delmengde av $X_\natural$ ved konvensjon 3.2.17. Velg $x_\natural \in X_\natural$. Da vil

$$\begin{aligned} x_\natural \in f_\natural^{-1}(A_\natural) &\iff f_\natural(x_\natural) \in A_\natural \\ &\iff [\![f_w(x_w) \in A_w]\!] \in \mathcal{F} \\ &\iff \left[\!\!\left[x_w \in f_w^{-1}(A_w) \right]\!\!\right] \in \mathcal{F} \\ &\iff x_\natural \in \operatorname*{ulim}_{w \in W} f_w^{-1}(A_w) \end{aligned}$$

ved lemma 3.7.1. □

Korollar 3.7.3. For gruppehomomorfier $f_w \colon A_w \to B_w$ vil

$$\ker(f_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} \ker(f_w).$$

Bevis. Ved Łoś er $A_\natural$ og $B_\natural$ grupper og $f_\natural$ en gruppehomomorfi, så resultatet er lov å formulere. Resultatet følger av lemmaet over sammen med det at $0_\natural$ er nullelementet i $B_\natural$ ved et argument som likner på det til proposisjon 3.3.1. □

Proposisjon 3.7.4. For idealer $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$ er $\mathfrak{a}_\natural \subseteq A_\natural$ et ideal. Videre har vi en kanonisk isomorfi

$$\varphi \colon \operatorname*{ulim}_{w \in W} A_w/\mathfrak{a}_w \xrightarrow{\simeq} A_\natural/\mathfrak{a}_\natural.$$

hvor vi med kanonisk mener at vi har $\pi_\natural = \varphi \circ \pi$, hvor $\pi \colon A_\natural \to A_\natural/\mathfrak{a}_\natural$ og $\pi_w \colon A_w \to A_w/\mathfrak{a}_w$-ene er alle projeksjoner. Videre er φ unik i å tilfredsstille $\pi_\natural = \varphi \circ \pi$.

Bevis. Vi har $\mathfrak{a}_\natural \subseteq A_\natural$ ved konvensjon 3.2.17. Mengden $\mathfrak{a}_\natural$ blir et ideal ved Łoś, da å være et ideal er en førsteordensegenskap. Vi har projeksjoner $\pi_w \colon A_w \to A_w/\mathfrak{a}_w$. Ultraproduktet

$$\pi_\natural \colon A_\natural \to \operatorname*{ulim}_{w \in W} A_w/\mathfrak{a}_w$$

er en surjektiv ringhomomorfi ved proposisjon 3.5.1 og lemma 3.3.4. Dets kjerne er $\ker(\pi_\natural) = \operatorname{ulim}_{w \in W} \ker(\pi_w) = \mathfrak{a}_\natural$ ved korollar 3.7.3. Isomorfien, formelen, og unikheten følger nå av første isomorfiteorem. □

Definisjon 3.7.5. La A være en ring. For et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ er $\mu(\mathfrak{a})$ minste antall generatorer for idealet;

$$\mu(\mathfrak{a}) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid (\exists a_1, \dots, a_n \in A)(\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n))\}$$

med konvensjon $\mu((0)) = 0$.

At $\mathfrak{a}$ ikke er endeliggenerert vil si at $\mu(\mathfrak{a}) = \infty$, så noetherskhet av ringen A kan bli formulert som at $\mu(\mathfrak{a})$ er endelig for alle dets idealer $\mathfrak{a} \subseteq A$.

Proposisjon 3.7.6. Velg idealer $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$. Da vil $\mu(\mathfrak{a}_\natural) \leq n$ hvis og bare hvis $\mu(\mathfrak{a}_w) \leq n$ for nesten hver w. Tilsvarende $\mu(\mathfrak{a}_\natural) = n$ hvis og bare hvis $\mu(\mathfrak{a}_w) = n$ for nesten hver w. Videre, $\mathfrak{a}_w = (a_{1,w}, \dots, a_{n,w})$ holder for nesten hver w hvis og bare hvis

$$\mathfrak{a}_\natural = (a_{1,\natural}, \dots, a_{n,\natural}).$$

Bevis. Det første følger av det siste. Den fås av å anvende Łoś på

$$(\forall a \in A_w)[a \in \mathfrak{a}_w \leftrightarrow (\exists b_1, \dots, b_n \in A_w)(a = \sum_{i=1}^{n} b_i a_{i,w})],$$

som sier at $\mathfrak{a}_w$ er idealet generert av $a_{1,w}, \dots, a_{n,w}$.

For ulikhetsdelen; om n er minimal slik at $\mathfrak{a}_\natural$ har $\leq n$ generatorer, så kan ikke nesten alle av $\mathfrak{a}_\natural$-ene ha $\leq n-1$ generatorer, men nesten hver av dem har $\leq n$ generatorer. Tilsvarende gjøres den andre veien. □

Korollar 3.7.7. Velg $n \in \mathbb{N}$ og idealer $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$. Da vil $\mu(\mathfrak{a}_\natural) > n$ hvis og bare hvis $\mu(\mathfrak{a}_w) > n$ for nesten hver w.

Bevis. Se på negasjonen av proposisjon 3.7.6. □

Vi kan nå gi et eksempel på en ultraring med et ultraprodukt av endeliggenererte idealer som selv ikke er endeliggenerert, som illustrerer behovet for uniforme begrensninger i proposisjon 3.7.6. La $W = \mathbb{N}$, og velg ringer og endeliggenererte idealer $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$ slik at $\mu(\mathfrak{a}_w) = w$ for hver w. For hver fikserte n vil $\mu(\mathfrak{a}_w) > n$ for nesten hver w. Ved korollar 3.7.7 vil $\mu(\mathfrak{a}_\natural) > n$ for hver $n \in \mathbb{N}$, slik at $\mathfrak{a}_\natural$ ikke er endeliggenerert. For et konkret eksempel, la k være en kropp, $A_w = k[x_1, \dots, x_w]$ og $\mathfrak{a}_w = (x_1, \dots, x_w)$.

Korollar 3.7.8. Anta at $\mathfrak{a}_w, \mathfrak{b}_w \subseteq A_w$ er endeliggenererte idealer med uniforme begrensninger $\mu(\mathfrak{a}_w) \leq n$ og $\mu(\mathfrak{b}_w) \leq m$ for hver w. Da vil idealproduktet kommutere med ultraproduktet;

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} \mathfrak{a}_w \mathfrak{b}_w = \mathfrak{a}_\natural \mathfrak{b}_\natural.$$

Bevis. Ved å legge til overflødige generatorer som nuller kan vi uten tap av generalitet anta at likhet i de uniforme begrensningene. Skriv $\mathfrak{a}_w = (a_{1,w}, \ldots, a_{n,w})$ og $\mathfrak{b}_w = (b_{1,w}, \ldots, b_{m,w})$. Da vil de punktvise idealproduktene være

$$\mathfrak{a}_w \mathfrak{b}_w = (\{a_{i,w} b_{j,w}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}),$$

som er en regneregel for produkter av idealer i kommutative ringer. Følgelig, ved proposisjon 3.7.6 to ganger og regneregelen igjen vil

$$\mathfrak{a}_\natural \mathfrak{b}_\natural = (a_{1,\natural}, \ldots, a_{n,\natural})(b_{1,\natural}, \ldots, b_{m,\natural}) = (\{a_{i,\natural} b_{j,\natural}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} \mathfrak{a}_w \mathfrak{b}_w. \qquad \square$$

Proposisjon 3.7.9. Velg ringer A_w og idealer $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$. Da er $\mathfrak{a}_\natural$ et primideal (hhv. maksimalt) hvis og bare hvis nesten hver $\mathfrak{a}_w$ er primidealer (hhv. maksimale).

Bevis. Det første fås av Łoś på setningene

$$(\forall x, y \in A_w)(xy \in \mathfrak{a}_w \to (x \in \mathfrak{a}_w \text{ eller } y \in \mathfrak{a}_w)).$$

Husk at et ideal $\mathfrak{a} \subset A$ er maksimalt hvis og bare hvis $\mathfrak{a} + (x) = A$ for hver $x \notin \mathfrak{a}$. Altså er $\mathfrak{a}_\natural$ maksimal hviss

$$\mathfrak{a}_\natural \neq A_\natural \wedge (\forall a_\natural \in A_\natural)(a_\natural \notin \mathfrak{a}_\natural \to \mathfrak{a}_\natural + (a_\natural) = A_\natural),$$

og ved å anvende Łoś og proposisjon 3.7.6 på dette er vi ferdige. $\square$

Vi kunne også ha vist resultatet over via faktorringkarakteriseringene av primidealer og maksimale idealer, ved proposisjon 3.5.1 og proposisjon 3.7.4. Mer generelt vil proposisjon 3.7.4 gi at ultraprodukter av idealer bevarer egensakper som kan bli karakterisert som førsteordensegenskaper på faktorringene som kun kvantifiserer over ringen.

Vi ser at idealene av $A_\natural$ på formen $\mathfrak{a}_\natural$ har mange fine egenskaper. La oss gi dem et eget navn:

Definisjon 3.7.10. Idealer av $A_\natural$ som er et ultraprodukt av idealer i approksimasjonene er kalt *interne*.

Proposisjon 3.7.11. Velg ringer A_w og $n > 0$. Da vil $A_\natural$ ha karakteristikk n hvis og bare hvis nesten hver A_w har karakteristikk n. Motsatt, $A_\natural$ har karakteristikk $\neq n$ hvis og bare hvis nesten hver A_w har karakteristikk $\neq n$.

Bevis. Bruk Łoś' teorem på setningene

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = 0.$$

Den andre delen følger av Łoś på setninga over med $\neq 0$ isteden. □

Korollar 3.7.12. Velg ringer A_w. Dersom kun endelig mange A_w har karakteristikk n for hver $n > 0$, så vil $A_\natural$ ha karakteristikk null.

Korollaret over lar oss i noen tilfeller overføre informasjon mellom situasjoner i karakteristikk null og > 0.

Vi ser at vi får mye av å se på interne idealer, men generelt er man opptatt av *alle* idealer til en ring, ikke bare visse spesielle idealer, selv om de kan være veldig interessante av seg selv.

Proposisjon 3.7.13. Dersom $\mathfrak{a} \subseteq A_\natural$ er et endeliggenerert ideal, så er det internt, slik at $A_\natural/\mathfrak{a}$ en ultraring.

Bevis. Per antagelse har $\mathfrak{a}$ generatorer $a_{1,\natural}, \ldots, a_{n,\natural}$. La nå $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$ være generert av $a_{1,w}, \ldots, a_{n,w}$. Da vil proposisjon 3.7.6 gi $\mathfrak{a}_\natural = (a_{1,\natural}, \ldots, 1_{n,\natural}) = \mathfrak{a}$. Det siste følger nå av proposisjon 3.7.4. □

I ultraringer har vi tilgang på en ny operasjon vi ikke hadde før. Vi ikke behov for den i denne oppgaven, men den er verdt å nevne. Eksponensiering i en ring er en funksjon $\exp\colon A_w \times \mathbb{N} \to A_w$ gitt ved $\exp(x, n) = x^n$. Ultraproduktet av disse blir en funksjon $\exp_\natural\colon A_\natural \times \mathbb{N}_\natural \to A_\natural$ ved

$$\exp_\natural(a_\natural, n_\natural) = a_\natural^{n_\natural} = \operatorname*{ulim}_{w \in W} a_w^{n_w}.$$

Ved Łoś vil denne ultraeksponensiering ha de samme regnereglene som vanlig eksponensiering.

Digresjon 3.7.14. Anta at hver A_w har primkarakteristikk p_w for hver $w \in W$. Da har $A_\natural$ karakteristikk null ved korollar 3.7.12. Ringene A_w har tilhørende Frobeniusendomorfier $F_w\colon A_w \to A_w$ gitt ved $F_w(a) = a^{p_w}$. Da vil ultraproduktet få en "ultra-Frobenius"-endomorfi $F_\natural\colon A_\natural \to A_\natural$ ved $F_\natural(a_\natural) = a_\natural^{p_\natural}$. Så vi har klart å overføre Frobeniusendomorfiene, et klassisk karakteristikk p-fenomen, til noe liknende i karakteristikk null. Boka [41] bruker denne for å overføre visse resultater om stram tillukning, som enklest gjøres for karakteristikk p, til karakteristikk null.

3.8 Łoś-filosofi

I dette avsnittet vil vi på overordnet nivå peke på noen prinsipper som gjennomgår når man arbeider med ultraprodukter og man kan tenke seg at fås av Łoś' teorem. Vi har allerede sett dem i aksjon.

Definisjon 3.8.1. Velg mengder X_w. En delmengde $Y \subseteq X_\natural$ er *intern* dersom den er på formen $Y_\natural = \operatorname{ulim}_{w \in W} Y_w$ for delmengder $Y_w \subseteq X_w$. Delmengdene av $X_\natural$ som ikke er interne kalles eksterne.

Ved konvensjon 3.2.17 har vi en inklusjon

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} \mathcal{P}(X_w) \subseteq \mathcal{P}(X_\natural) \tag{10}$$

fra mengden av interne delmengder av $X_\natural$ til mengden av alle dets delmengder. Kvantorer som kvantifiserer over $\mathcal{P}(X_w)$ blir av Łoś gjort om til kvantorer over mengden til venstre i (10). Dermed:

Prinsipp 3.8.2. Łoś' teorem kan kun snakke om interne objekter, som interne delmengder av et ultraprodukt.

Dette er en stor begrensning i den forstand at man ofte er interessert i *alle* underobjekter til et objekt eller *alle* morfiene mellom to ultraobjekter. Til gjengjeld kan man få mye av å vite at man har et internt objekt. For eksempel gir Łoś på velordningsprinsippet til $\mathbb{N}$ gir at de hypernaturlige tallene $\mathbb{N}_\natural$ er "internt velordna": Enhver ikketomme *interne* delmengde av $\mathbb{N}_\natural$ har et minimum, så man kan blant annet gjøre intern induksjon på $\mathbb{N}_\natural$. Tilsvarende er $\mathbb{R}_\natural$ internt Dedekindkomplett. Dette gjør det naturlig å spørre hvilke klasser av "pene" objekter viser seg å være interne. I proposisjon 3.7.6 ser vi for eksempel at endeliggenererte idealer av $A_\natural$ er alle interne.

Interne objekter er interessante å studere av seg selv. Lesere som vil lære mer om dem henvises til [18, kap. 11]. Følgende er et eksempel på en ekstern mengde:

Proposisjon 3.8.3. Anta at paret $(W, \mathcal{F})$ tilfredsstiller $\mathbb{N} \neq \mathbb{N}_\natural$. Da er mengden $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ er en ekstern delmengde av de hypernaturlige tallene $\mathbb{N}_\natural$.

Bevis. Ved Łoś på velordningsprinsippet vil hver ikketomme interne delmengde av $\mathbb{N}_\natural$ ha et minimum. Dersom $N \in \mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ var et slikt hypotetisk minimum, så kan man sjekke at $N - 1$ også må ligge i $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$, slik at N ikke kunne være dette minimumet, og $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ kan ikke være intern. $\square$

Prinsipp 3.8.4. Et ultraprodukt av objekter som er definert nesten overalt er entydig definert.

Vi så et eksempel av dette da vi beviste lemma 3.3.4; for å konstruere inversen $b_\natural$ til $0 \neq a_\natural \in k_\natural$ trengte vi kun å definere b_w for de w hvor a_w hadde en invers, som var nesten alle.

Prinsipp 3.8.5. For å få en andreordensegenskap til å bli bevart av ultraprodukter må man ofte legge til en uniform begrensning på alle approksimasjonene.

Man har ofte lyst til å kvantifisere over $\mathbb{N}$, mengdene $\{1, \ldots, n\}$, eller de endelige delmengdene til en gitt mengde – for eksempel når man definerer idealet generert av en mengde og produkter av idealer. I slike situasjoner er ofte grunnen til at man vil at mengdene skal være endelige fordi algebraiske operasjoner kun kan gjøres endelig mange ganger. Om man tar et ultraprodukt av objekter med en egenskap med en slik egenskap kvantifiseringa over mengdene $\{1, \ldots, n\}$ for $n \in \mathbb{N}$ bli gjort om til kvantifisering over $\{1, \ldots, N\}$ for $N \in \mathbb{N}_\natural$. Om N ligger i $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ viser det seg at $\{1, \ldots, N\}$ er uendelig, og ultraproduktet har ikke sjans bevare ikke egenskapen man begynte med. Dette løses av en uniform begrensning: Siden $\{1, \ldots, n\}_\natural = \{1, \ldots, n\}$ vil kvantifisering over denne mengden bli bevart.

Eksempel 3.8.6. Proposisjoner 3.5.1(vii) og 3.7.6, og korollar 3.7.8.

3.9 Ultrakropper

Tilsvarende ultraringer har vi:

Definisjon 3.9.1. En kropp som er (isomorf med) et ultraprodukt av kropper kalles en ultrakropp.

Ultrakropper har en enkel algebraisk og pedagogisk karakterisering [14, thm. 2.2], [24, thm. 8.1]. Dersom $(k_w)_{w\in W}$ er en familie kropper, så er det en bijeksjon mellom idealene til $A = \prod_{w\in W} k_w$ og mengden av filtre på W. Den sender $\mathfrak{a} \subseteq A$ til $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(W)$ slik at for $X \subseteq W$ vil $X \in \mathcal{F}$ hvis og bare hvis $(e_w)_{w\in W} \in \mathfrak{a}$, hvor $(e_w)_{w\in W}$ er følgen som er 0 i posisjonene til X og 1 ellers. Denne bijeksjonen, og dets invers, er begge voksende. Under den vil prinsipale ideale tilsvare prinsipale filtre, og maksimale idealer ultrafiltre. Videre, siden $\mathcal{F}$ lager samme ekvivalensrelasjon på A som $\mathfrak{a}$ vil ultraproduktet $k_\natural$ med hensyn på $\mathcal{F}$ være lik $A/\mathfrak{a}$. Følgelig kan ultrakroppen $k_\natural$ bli konstruert som A modulo et ikkeprinsipalt maksimalt ideal, hvis eksistens man kan vise med et algebraisk argument som minner om beviset til teorem 2.2.2.

Proposisjon 3.9.2. Et ultraprodukt av algebraisk lukka kropper er det selv.

Bevis. Velg kropper k_w. Med noe arbeid kan man vise dette ved å anvende Łoś på påstanden om at hver k_w er algebraisk lukka. Vi kan imidlertid gjøre det på enklere vis: For $n \in \mathbb{N}$, skriv

$$\varphi_{n,w} \equiv (\forall a_1, \ldots, a_n \in k_w)(\exists \alpha \in k_w)(a_n \neq 0 \to a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0).$$

Ved Łoś vil $\varphi_{n,\natural}$ holde i $k_\natural$ for hver naturlige n, slik at $k_\natural$ er algebraisk lukka. □

Spesialtilfellet av korollar 3.7.12 for kropper sier at dersom kun endelig mange k_w har karakteristikk p for hvert primtall p, så vil $k_\natural$ ha karakteristikk null. Kropper med karakteristikk null som oppstår som ultraprodukt av kropper med positiv karakteristikk kalles Lefschetzkropper [41]. Følgelig er $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ en algebraisk lukka Lefschetzkropp med karakteristikk null. Her er $\mathbb{P}$ primtallene og $\overline{\mathbb{F}}_p$ den algebraiske tillukningen til den endelige kroppen $\mathbb{F}_p$.

Vi vil nå begynne å vise den overraskende isomorfien

$$\mathbb{C} \simeq \operatorname*{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p \tag{11}$$

hvor $\mathcal{F}$ er et vilkårlig fritt ultrafilter på $\mathbb{P}$. Fra dette blir $\mathbb{C}$ et eksempel på en Lefschetzkropp. Selve isomorfien vil komme fra følgende teorem:

Teorem 3.9.3 (Steinitz)**.** To overtellbare algebraisk lukka kropper med samme karakteristikk og kardinalitet er isomorfe.

Bevis. Utelatt. Se [41, thm. 2.4.7] for en skisse. Galoisteorien som brukes i beviset kan man finne blant annet i [27, kap. VI]. □

Isomorfiene man får av Steinitz' teorem er riktignok høyst ikkekanoniske. For kardinalitetsberegningene vi vil gjøre vil vi få nytte av følgende teorem:

Teorem 3.9.4 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** Om $|A| \leq |B|$ og $|B| \leq |A|$, så vil $|A| = |B|$. Altså, om det fins injeksjoner $A \to B$ og $B \to A$, så fins en bijeksjon mellom A og B.

Bevis. Se [21, thm. 3.2]. □

Husk at vi skriver $\aleph_0$ for kardinaliteten til de naturlige tallene, og $\mathfrak{c}$ for kardinaliteten til de reelle tallene.

Eksempel 3.9.5. De hyperkomplekse tallene $\mathbb{C}_\natural$, med indeksmengde $W = \mathbb{N}$, er isomorf med $\mathbb{C}$ ved Steinitz' teorem. Først og fremst er $\mathbb{C}_\natural$ algebraisk lukka ved proposisjon 3.9.2. Siden $\mathbb{C}_\natural$ er en faktorring av $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ får vi

$$|\mathbb{C}_\natural| \leq |\mathbb{C}^\mathbb{N}| = |\mathfrak{c}^{\aleph_0}| = |\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}| = |2^{\aleph_0 \times \aleph_0}| = |2^{\aleph_0}| = \mathfrak{c},$$

så $\mathbb{C}_\natural$ sin kardinalitet er minst $\mathfrak{c}$ siden den inneholder $\mathbb{C}$, og høyst $\mathfrak{c}$ ved beregninga over. Ved Cantor-Schröder-Bernstein må $\mathbb{C}_\natural$ ha kontinuumskardinalitet.

Skriv $\mathbb{F}$ for høyresida i (11). Som observert gir korollar 3.7.12 og proposisjon 3.9.2 at $\mathbb{F}$ er algebraisk lukka og har karakteristikk null, så for å kunne bruke Steinitz må vi beregne dets kardinalitet. Kroppen $\mathbb{F}$ er lagd av algebraiske tillukninger av kjente kropper, og algebraiske tillukninger kan selv bli lagd av polynomringer, så vi begynner med å beregne kardinaliteten til polynomringer.

Lemma 3.9.6. La A være en ring og I en mengde. Da vil polynomringen $A[\{x_i\}_{i \in I}]$ ha kardinalitet $\max(\aleph_0, |A|, |I|)$. Spesielt har den kardinalitet $\max(|A|, |I|)$ om A er uendelig og $\max(\aleph_0, |I|)$ om A er endelig.

Bevis. Det er nok å vise de to siste, da de sammen impliserer den generelle formelen. Anta først at A er uendelig. For et polynom $f \in A[\{x_i\}_{i \in I}]$, definer en tilhørende $g\colon \mathcal{P}^{\text{fin}}(I \times \mathbb{N}) \to A$ som sender $\{(i_1, n_1), \ldots, (i_m, n_m)\} \subseteq I \times \mathbb{N}$ til f sin koeffisient til leddet $x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_m}^{n_m}$. Slike g har endelig støtte. Følgelig får vi en injeksjon $A[\{x_i\}_{i \in I}] \to \mathcal{P}^{\text{fin}}(\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A)$. Ved [21, oppg. 5.2, s. 51] vil $|\mathcal{P}^{\text{fin}}(\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A)| = |\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A|$. Siden A er uendelig har denne mengden kardinalitet $\max(|A|, |I|)$. Polynomringen $A[\{x_i\}_{i \in I}]$ har en inklusjon fra A, og en injeksjon fra I ved $i \mapsto x_i$, så kardinaliteten til $A[\{x_i\}_{i\in I}]$ er både oppad og nedad begrensa av $\max(|A|, |I|)$. Ved Cantor-Schröder-Bernstein er kardinaliteten til $A[\{x_i\}_{i\in I}]$ lik $\max(|A|, |I|)$.

Om A isteden er endelig får vi estimater:

(i) Om I er endelig, $|\mathcal{P}^{\text{fin}}(\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A)| = 2^{2^{|I|} \times |A|} < \aleph_0$, og

(ii) Om I er uendelig, $|\mathcal{P}^{\text{fin}}(\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A)| = |\mathcal{P}^{\text{ fin}}(I \times A)| = |I \times A| = |I|$.

Følgelig blir $\max(\aleph_0, |I|)$ en øvre grense for kardinaliteten til polynomringen. For en nedre, merk at vi har injeksjoner $\mathbb{N} \to A[\{x_i\}_{i\in I}]$ ved $n \mapsto x_i^n$ for $i \in I$, og $A \to A[\{x_i\}_{i\in I}]$ ved $a \mapsto a \cdot x_i$. Følgelig er $\max(\aleph_0, |I|)$ også en nedre grense til kardinaliteten til ringen, så ved Cantor-Schröder-Bernstein er vi ferdige. □

Vi skal nå beregne kardinaliteten til den algebraiske tillukninga til en kropp. Selv om tilfellet for endelige kropper er nok for våre formål, så vil det uendelige tilfellet gi mange eksempler hvor vi kan anvende Steinitz' teorem, så vi viser også dette. Vi begynner med det uendelige tilfellet.

Proposisjon 3.9.7. Hver uendelige kropp har samme kardinalitet som dets algebraiske tillukning.

Bevis. Vi analyserer størrelsene av ringene/kroppene som inngår i standard-argumentet som viser at $\overline{k}$ fins, se f.eks. [30, s. 11]. La k være en kropp, og $\Sigma \subseteq k[x]$ mengden av irredusible polynomer i $k[x]$. Ved å anvende lemma 3.9.6 to ganger (og [21, s. 51]) får vi at

(i) $k[x]$ har samme kardinalitet som k, og

(ii) $k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$ har samme kardinalitet som $\Sigma \subseteq k[x]$.

Siden $k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$ inneholder en kopi av k vil de ha samme kardinalitet, ved Cantor-Schröder-Bernstein. Videre i prossessen definerer man et ideal $\mathfrak{a} \subseteq k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$ generert av alle $f(x_f)$ for $f \in \Sigma$. Dette idealet kan man vise at er ekte, slik at man kan utvide det til et maksimalt ideal $\mathfrak{m} \subseteq k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$. Vi lar så $k' = k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]/\mathfrak{m}$. Vi har en kanonisk inklusjon $k \to k'$. Siden polynomringen har samme kardinalitet som k må k' være i bijeksjon med k ved Cantor-Schröder-Bernstein.

Om k nå er kroppen vi er interessert i kan vi iterativt gjøre konstruksjonen over og få en tellbar kjede $k \subseteq k_1 \subseteq k_2 \subseteq k_3 \subseteq \cdots$ av kropper med samme kardinalitet. Man kan så vise at unionen (eller kogrensen) er algebraisk lukka og inneholder tillukningen $\overline{k}$. Unionen, og dermed $\overline{k}$, har høyst kardinalitet

$|k| \times \aleph_0$, som er lik $|k|$ da k er uendelig. Samtidig inneholder $\overline{k}$ en kopi av k, så Cantor-Schröder-Bernstein gir $|\overline{k}| = |k|$. $\square$

Eksempel 3.9.8. Ringene $\mathbb{C}[\{x_i\}_{i\in I}]$ har alle kontinuumskadinalitet for $|I| \leq \mathfrak{c}$ ved lemma 3.9.6. Brøkkroppene $\mathbb{C}(\{x_i\}_{i\in I})$ har da kardinalitet $\leq \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ [21, s. 51], slik at Cantor-Schröder-Bernstein gir at de alle også har kontinuumskardinalitet. Ved proposisjon 3.9.7 vil de tilhørende algebraiske tillukningene $\overline{\mathbb{C}(\{x_i\}_{i\in I})}$ ha kontinuumskardinalitet. Ved Steinitz' teorem kan vi konkludere med at disse er alle isomorfe med $\mathbb{C}$, og trekke den overraskende konklusjonen om at det fins en ekte kroppsutvidelse $\mathbb{C} \subset k$ slik at $k \simeq \mathbb{C}$. Ved et perspektivskifte har $\mathbb{C}$ en endomorfi som ikke er en automorfi. Man kan gjøre tilsvarende på andre kropper som $\mathbb{C}((x))$, $\mathbb{Q}(\{x_i\}_{i\in I})$ hvor $|I| = \mathfrak{c}$, og de p-adiske tallene $\mathbb{Q}_p$.

Eksempel 3.9.9. Hvert integritetsområde A med karakteristikk null og kardinalitet $\leq \mathfrak{c}$ kan bli imbedda inn i $\mathbb{C}$. Uten tap av generalitet, anta at $|A| = \mathfrak{c}$, da om A var mindre kan vi erstatte A med dets polynomring i $\mathfrak{c}$ variabler, som har kontinuumskardinalitet ved lemma 3.9.6. Følgelig har brøkkroppen $k = \mathrm{Frac}(A)$ også kontinuumskardinalitet, så den algebraiske tillukningen $\overline{k}$ har kontinuumskardinalitet ved proposisjon 3.9.7. Da vil Steinitz gi $A \subseteq \overline{k} \simeq \mathbb{C}$.

Proposisjon 3.9.10. Hver endelige kropp sin algebraiske tillukning er tellbar uendelig.

Bevis. Vi gjør samme analyse som i det uendelige tilfellet. Anta at k er en kropp med $|k| \leq \aleph_0$. Da vil $k[x]$ og dermed også $k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$ ha kardinalitet $\leq \aleph_0$ for hver $\Sigma \subseteq k[x]$ ved lemma 3.9.6, slik at k' også har det. Så kjeden $k \subseteq k_1 \subseteq k_2 \subseteq \cdots$ er av kropper hvor alle har kardinalitet $\leq \aleph_0$. Den tellbare unionen har så kardinalitet $\leq \aleph_0$, og tillukningen $\overline{k}$ ligger inni denne. Algebraisk lukka kropper er alle uendelige, så kardinaliteten må være $\aleph_0$ ved Cantor-Schröder-Bernstein. $\square$

Ved å kombinere proposisjoner 3.9.7 og 3.9.10 får vi at for en vilkårlig kropp k vil $|\overline{k}| = \max(\aleph_0, |k|)$. Ved teoremet over er hver $\overline{\mathbb{F}}_p$ tellbar uendelig, som er det første steget i å vise at $\mathbb{F}$ har kontinuumskardinalitet. Siden hver $\overline{\mathbb{F}}_p$ har samme kardinalitet som $\mathbb{N}$ og indeksmengden $\mathbb{P}$ er tellbar uendelig kan vi konstruere en bijeksjon mellom $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ og $\operatorname{ulim}_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$, hvor $\mathbb{N}$ her fås ultrafilteret som induseres av en bijeksjon mellom seg og $\mathbb{P}$. Så det er nok å vise at de hypernaturlige tallene (med $W = \mathbb{N}$) har kontinuumskardinalitet, et resultat som er interessant av seg selv.

Lemma 3.9.11. Med indeksmengde $W = \mathbb{N}$ vil $\mathbb{N}_\natural$ ha kontinuumskardinalitet.

Bevis. De hypernaturlige tallene $\mathbb{N}_\natural$ er en faktormengde av $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, så vi har en projeksjon $\pi\colon \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\natural$. Ved utvalg gir det en injeksjon $\mathbb{N}_\natural \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Husk at vi har $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, altså at $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ og $\mathbb{R}$ har samme kardinalitet [21, s. 37]. Vi regner:

$$|\mathbb{N}_\natural| \leq |\mathbb{N}^\mathbb{N}| = \aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

hvor vi benytter [21, thms 3.5, 5.16(i)]. Bijeksjonen mellom $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}$ og $2^{\aleph_0 \times \aleph_0}$ er et spesialtilfelle av de kanoniske bijeksjonene

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y, Z)).$$

Det gjenstår å få en nedre grense til $|\mathbb{N}_\natural|$. Vi vil gjøre et argument inspirert av ikkestandard analyse, hvor det er rett fram å konstruere en surjeksjon $\mathbb{N}_\natural \to \mathbb{R}$, og dermed også en injeksjon som går den andre veien. Vi har en bijeksjon $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, så ved proposisjon 3.5.1 eller funktorialitet får vi en bijeksjon $\mathbb{Q}_\natural \to \mathbb{N}_\natural$, så det er nok å vise at $|\mathbb{Q}_\natural| \geq \mathfrak{c}$. La $C \subseteq \mathbb{Q}^\mathbb{N}$ være mengden av rasjonale Cauchyfølger. Definer så en surjektiv funksjon $f\colon C \to \mathbb{R}$ ved $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Husk at ekvivalensrelasjonen til $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$ som lager $\mathbb{Q}_\natural$ er

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff [\![x_n = y_n]\!] \in \mathcal{F}.$$

Påstand. Funksjonen $f\colon C \to \mathbb{R}$ er konstant på ekvivalensklassene til $\sim$.

Husk at enhver delfølge av en konvergent følge er konvergent med samme grense. Dersom $x \sim y$ for $x, y \in C$ vil $[\![x_n = y_n]\!] \in \mathcal{F}$. Denne mengden er uendelig siden $\mathcal{F}$ er fri, så ved å restriktere x og y til denne mengden får vi to delfølger av x og y som er like og dermed har samme grense. Siden x og y er konvergente (som reelle følger) må de ha samme grenser som delfølgene, slik at $f(x) = f(y)$.

Ved påstanden og utvalg kan vi utvide f til en surjektiv funksjon $\mathbb{Q}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ som er konstant på ekvivalensklassene til $\sim$. Ved å modde ut $\sim$ får vi en surjektiv funksjon $\mathbb{Q}_\natural \to \mathbb{R}$, som vi ved utvalg kan bruke til å lage en injektiv funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}_\natural$. Følgelig vil $\mathfrak{c} \leq |\mathbb{Q}_\natural| = |\mathbb{N}_\natural| \leq \mathfrak{c}$, så ved Cantor-Schröder-Bernstein vil $\mathbb{N}_\natural$ ha kontinuumskardinalitet. □

Vi har nå alle brikkene på plass til å vise:

Teorem 3.9.12 (Lefschetzprinsippet)**.** For hvert frie ultrafilter på primtallene $\mathbb{P}$ har vi en isomorfi

$$\mathbb{C} \simeq \operatorname*{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p.$$

Bevis. Vi kombinerer resultatene vi hittil har vist. Hver $\overline{\mathbb{F}}_p$ er tellbar uendelig ved proposisjon 3.9.10. Mengdene $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ og $\operatorname{ulim}_{w\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ er så i bijeksjon med hverandre ved å bruke en bijeksjon $\mathbb{N} \to \mathbb{P}$ for å gi $\mathbb{N}$ et passende ultrafilter. Ved lemma 3.9.11 vil $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ ha kontinuumskardinalitet. Den er også en algebraisk lukka kropp med karakteristikk null (proposisjoner 3.7.11 og 3.9.2). Ved Steinitz' teorem (3.9.3) er vi ferdige. □

Isomorfien over kan bli brukt til å overføre resultater mellom de komplekse tallene og Galoiskroppene $\mathbb{F}_p$. Før vi kan vise slike resultater trenger vi en egenskap ved endelige kropper.

Lemma 3.9.13. La k være en endelig kropp, og velg $a \in \overline{k}$. Da er $k(a)$ endelig[3].

Bevis. Dette beviset krever litt kroppsteori. Elementet a er algebraisk over k, så ved kroppsteori er kroppsutvidelsen $k \subseteq k(a)$ av endelig grad, altså at $\dim_k(k(a))$ er endelig. Siden k er endelig er $k(a)$ da endelig. □

Digresjon 3.9.14. Fra dette kan vi vise at om k er endelig, så er $\overline{k}$ en union/kogrense av en oppadgående kjede av endelige kropper. Om $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en bijektiv følge i $\overline{k}$, som er tellbar uendelig ved proposisjon 3.9.10, så er $\overline{k}$ unionen av endelige kropper $k \subseteq k(a_1) \subseteq k(a_1, a_2) \subseteq k(a_1, a_2, a_3) \subseteq \cdots$.

Digresjon 3.9.15. Vi kan bruke Steinitz' teorem og Frobeniusendomorfier (se digresjon 3.7.14) til å konstruere en såkalt "vill" automorfi av $\mathbb{C}$, altså en som hverken er identiteten eller komplekskonjugasjon. Skriv $F_p\colon \overline{\mathbb{F}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$ for Frobeniusendomorfien $F_p(a) = a^p$ for hver p. De er alle injektive da $\overline{\mathbb{F}}_p$ er en kropp. Videre, for hver fikserte y har polynomet $x^p - y$ et nullpunkt da $\overline{\mathbb{F}}_p$ er algebraisk lukka, så F_p er surjektiv og en automorfi. Påstår at hverken F_p eller $F_p \circ F_p$ er lik identiteten på $\overline{\mathbb{F}}_p$. Polynomet $x^p - x$ har endelig mange røtter, så F_p har endelig mange fikspunkter. Kroppen $\overline{\mathbb{F}}_p$ er uendelig, så F_p kan ikke være identiteten. Tilsvarende har polynomet $x^{2p} - x$ også endelig mange røtter, så $F_p \circ F_p$ har endelig mange fikspunkter og kan dermed heller ikke være identiteten. Ved funktorialitet og Łoś får vi en ultra-Frobeniusautomorfi $F_\natural$ på $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ som ikke er identiteten og heller ikke kvadreres til den. Ved Steinitz kan vi overføre dette til en tilsvarende situasjon i $\mathbb{C}$. For mer om de ville automorfiene til de komplekse tallene, se [46].

[3] Den enkleste definisjonen av $k(a)$ er at det er underkroppen av $\overline{k}$ generert av k og a. Gitt litt kroppsteori kan man alternativt definere det som $k[x]/(f)$ hvor f er minimalpolynomet til a over k.

Vi kan nå vise en anvendelse av Lefschetzprinsippet.

Teorem 3.9.16 (Ax-Grothendieck)**.** Ethvert injektive polynom $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ er også surjektivt.

Med polynom $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mener vi n-tuppel av polynomer $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, altså en n-tuppel av elementer av $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, alternativt en funksjon $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (injektivt) indusert av et slikt element. Vil vi se ved slutten av avsnittet at teoremet også holder for alle algebraisk lukka kropper.

Bevis. Betrakt påstanden for en vilkårlig kropp k. Vi viser den først for endelige kropper, så $\overline{\mathbb{F}}_p$, og til slutt $\mathbb{C}$.

(i) Dersom k er endelig er k^n endelig, så injektiv impliserer surjektiv for polynomer $k^n \to k^n$ fordi dette holder generelt for funksjoner på en endelig mengde.

(ii) La $k = \overline{\mathbb{F}}_p$. Velg et injektivt polynom $f = (f_1, \dots, f_n) \in \overline{\mathbb{F}}_p[x_1, \dots, x_n]^n$ og $x \in \overline{\mathbb{F}}_p$. La S være mengden av koeffisienter til alle f_i-ene, sammen med x. Den er endelig. Kroppen $\mathbb{F}_p(S)$ er så endelig ved induksjon på lemma 3.9.13, og per konstruksjon vil $f \in \mathbb{F}_p(S)[x_1, \dots, x_n]^n$. Ved (i) er f, sett på som funksjon $\mathbb{F}_p(S)^n \to \mathbb{F}_p(S)^n$ surjektiv og dermed treffer x, slik at f som funksjon på $\overline{\mathbb{F}}_p$ i helhet er surjektiv.

(iii) Idéen er å bruke isomorfien til å dytte dette til en haug med polynomer i $\overline{\mathbb{F}}_p$ vi kan anvende (ii) på. La $k = \mathbb{C}$, og velg $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^n$ et injektivt polynom. Skriv

$$f_i = \sum_\alpha a_{i,\alpha} X^\alpha$$

i multiindeksnotasjon. For enkelthets skyld, identifiser en av isomorfiene $\mathbb{C} \simeq \operatorname{ulim} \overline{\mathbb{F}}_p$ vi får av Steinitz' teorem 3.9.12. Da vil $a_{i,\alpha} = a_{i,\alpha,\natural}$ for $a_{i,\alpha,p} \in \overline{\mathbb{F}}_p$ for hver p. La $f_{i,p}$ være det tilhørende $\overline{\mathbb{F}}_p$-polynomet

$$f_{i,p} = \sum_\alpha a_{i,\alpha,p} X^\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p[x_1, \dots, x_n]$$

og få polynomer $f_p = (f_1, \dots, f_n) \in \overline{\mathbb{F}}_p[x_1, \dots, x_n]^n$. Ved Łoś' teorem er nesten alle av f_p-ene injektive siden f er det, så (ii) gir at nesten alle av dem er surjektive. Ved Łoś er $f = f_\natural$ surjektiv, og vi er ferdige. □

Én annen anvendelse av Lefschetzprinsippet er at det lar oss vise et modellteoretisk overføringsprinsipp mellom de algebraisk lukka kroppene av null og positiv karakteristikk. For å få dets fulle styrke trenger vi en karakterisering for når algebraisk lukka kropper tilfredsstiller de samme førsteordenssetningene. Vi følger [22, kap. 1].

Definisjon 3.9.17. La $\mathcal{L}$ være et førsteordensspråk. To $\mathcal{L}$-strukturer $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ er *elementært ekvivalente* om de tilfredsstiller samme førsteordenspåstander.

Eksempel 3.9.18. Ved Łoś vil en ring A være elementært ekvivalent med alle dets ultrapotenser $A_\natural$, og mer generelt, en struktur $\mathfrak{A}$ og alle dets ultrapotenser $\mathfrak{A}_\natural$.

Eksempel 3.9.19. En kropp k er reell-lukka[4] om den er elementært ekvivalent med $\mathbb{R}$. De defineres vanligvis ikke slik, men kan karateriseres sånn, se f.eks. [22, thm. 1.16]. Et eksempel er de reelle algebraiske tallene, ringen av reelle tall som er nullpunkt til et polynom i $\mathbb{Z}[x]$, også kalt heltallstillukningen til $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$, og kroppen av Puiseuxrekker med koeffisienter i $\mathbb{R}$ [5, thm. 2.79, eks. 2.12, thm. 2.90]. Denne klassen kropper kan bli karakterisert som å være de k hvor -1 ikke er en sum av kvadrattall og $k(\sqrt{-1}) = k[x]/(x^2+1)$ er algebraisk lukka [5, thm. 2.14]. For mer om disse, se f.eks. [27, kap. XI.2].

Digresjon 3.9.20. Et fint eksempel på en elementær ekvivalens er den mellom kroppene $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Q}_p$ og $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p((t))$. Dette resultatet heter Ax-Kochen-prinsippet. Her er $\mathbb{Q}_p$ de p-adiske rasjonale tallene og $\mathbb{F}_p((t))$ kroppen av formelle Laurentrekker (alternativt, brøkkroppen til potensrekkeringen $\mathbb{F}_p[[t]]$) over $\mathbb{F}_p$ i én variabel, og valget av fritt ultrafilteret på $\mathbb{P}$ er vilkårlig. Ved Łoś impliserer dette at en førsteordenspåstand i språket av kropper holder for $\mathbb{Q}_p$ for alle utenom endelig mange p hvis og bare hvis det holder for $\mathbb{F}_p((t))$ for alle utenom endelig mange p. Det ble opprinnelig vist i [3] at ringene var isomorfe ved tilstedeværelsen av kontinuumshypotesen, og senere at de var elementært ekvivalente uten antagelsen om kontinuumshypotesen [9]. I [42] ble det vist at kontinuumshypotesen var nødvendig for at de alltid skulle være isomorfe. For en eksposisjon om den elementære ekvivalensen, se [25, thm. 5.2.3], eller [7, thm. 5.4.12, kor. 5.4.18].

Teorem 3.9.21. To algebraisk lukka kropper er elementært ekvivalente hvis og bare hvis de har samme karakteristikk.

[4]Engelsk: *real closed.*

Bevis. Utelatt; se [22, thm. 1.13]. Beviset bruker Steinitz' og Löwenheim-Skolem-teoremet fra modellteorien, se for eksempel [28, kor. 3.4.11]. □

Vi kan nå vise følgende modellteoretiske resultat, som slik som Lefschetz-prinsippet lar oss relatere algebraisk lukka kropper med positiv og null karakteristikk:

Teorem 3.9.22 (Karakteristikk-overføringsprinsippet)**.** La φ være en førsteordenssetning i språket av kropper. Følgende er ekvivalent:

(i) φ holder i en (derav alle) algebraisk lukka kropp av karakteristikk null,

(ii) Det fins uendelig mange primtall p slik at φ holder i en (derav alle) algebraisk lukka kropp med karakteristikk p, og

(iii) Det fins kun endelig mange primtall p slik at φ ikke holder i en (derav ingen) algebraisk lukka kropp med karakteristikk p.

Bevis. Nøkkelobservasjonen er at $\mathbb{F} = \operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$, er algebraisk lukka med karakteristikk null for alle frie ultrafiltre på $\mathbb{P}$, og dermed er elementært ekvivalent med alle andre algebraisk lukka kropper med karakteristikk null.

(i) $\Rightarrow$ (iii): La E være den eksepsjonelle mengden primtall i (iii). Anta, for motsigelse, at E er uendelig. Ved ultrafilterlemma (teorem 2.1.11), få et fritt ultrafilter på $\mathbb{P}$ som fanger E. Ved teorem 3.9.21 holder ikke φ for alle $\overline{\mathbb{F}}_p$ med $p \in E$, så ved Łoś vil φ heller ikke holde i $\mathbb{F}$, som motsier (i) ved teorem 3.9.21.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Se på komplementet til den eksepsjonelle mengden primtall.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ved ultrafilterlemma (teorem 2.1.11), lag et fritt ultrafilter på $\mathbb{P}$ som fanger en slik uendelig mengde primtall E. Ved teorem 3.9.21 vil φ holde for hver $\overline{\mathbb{F}}_p$ for de p i E, så ved Łoś vil den holde for $\mathbb{F}$. Ved teorem 3.9.21 igjen holder φ for alle algebraisk lukka kropper med karakteristikk null. □

Karakteristikk-overføringsprinsippet lar oss gi et kortere argument for overgangen fra $\overline{\mathbb{F}}_p$-ene til $\mathbb{C}$ i beviset til Ax-Grothendieck-teoremet 3.9.16, da det kan bli formulert som en samling førsteordenspåstander $\varphi(n)$ som sier at teoremet holder for alle polynomer av grad $\leq n$. I lys av denne observasjonen gir teorem 3.9.21 at Ax-Grothendieck holder for hver algebraisk lukka kropp, ikke kun $\mathbb{C}$ og $\overline{\mathbb{F}}_p$-ene. Et slikt argument lar oss vise den sterke versjonen av teoremet uten å gå via Lefschetzprinsippet, da etter man har vist teoremt for hver $\overline{\mathbb{F}}_p$ kan man bruke $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ som sin karakteristikk null-kropp man kan så anvende teorem 3.9.21 på.

3.10 Digresjon: Førsteordens aksiomatiseringer av ringer

Når studenter først lærer om de reelle tallene på ordentlig er det en elefant i rommet – kompletthetsaksiomet. Det er langt mer komplisert og teknisk enn de andre aksiomene man har vennet seg til gjennom skolegangen, og noen studenter kan begynne å tro at foreleser liker å pine dem uten grunn. Siden kompleksiteten stammer av det at det er en andreordenspåstand kan man spørre om hvorvidt man kan kvitte seg med det til fordel for noen forhåpentligvis enklere førsteordensaksiomer. Det er også interessant av grunnlagshensyn å vite om det fins en førsteordens aksiomatisering til heltallene, for fra det kan man kvitte seg med Peano-aksiomene og lage en førsteordens aksiomatisering av de naturlige tallene. Mer generelt kan man stille spørsmålet om hvorvidt en gitt ring kan bli førsteordensaksiomatisert.

Tilfellet hvor A er endelig er åpenbar: Ringen kan bli aksiomatisert av en førsteordenspåstand som sier at A har n elementer, navngir de n elementene, og angir hele addisjons- og gangetabellen til ringen.

I modellteorien er det velkjent at svaret til spørsmålet stilt over er nei i det uendelige tilfellet. Beviset er en enkel anvendelse av kompaktehtsteoremet: Utvid språket til ringen ved å legge til en haug med konstantsymboler (av vilkårlig stor kardinalitet). Lag deretter en samling av alle førsteordenssetningene som A tilfredsstiller, sammen med en haug med påstander som sier at alle konstantsymbolene vi la til i språket er alle parvis ulike. Siden A er uendelig vil hver endelige delmengde av disse aksiomene (og i dette utvida språket) ha en modell – nemlig A – så ved kompakthetsteoremet kan vi trylle fram en modell som tilfredsstiller *alle* aksiomene. Den vil være elementært ekvivalent med A, men ha vilkårlig stor kardinalitet, så den kan ikke være isomorf med A. For detaljene, se [28, korr. 3.4.12]

I argumentet over er det et ultraprodukt som gjør det tunge arbeidet (i den forstand at man kan vise kompakthetsteoremet ved hjelp av ultraprodukter), så vi kan vise dette resultatet uten modellteori ved lage ultraproduktet selv. Til gjengjeld får vi et langt mindre elegant bevis, siden vi ikke kan skjule detaljene bak kompakthetsteoremet.

Vi trenger et lemma fra filterteorien.

Lemma 3.10.1. Dersom $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ er en mengde slik at $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ for alle naturlige n og $A_1, \ldots, A_n \in F$, så kan F bil utvidet til et ekte filter på I.

Bevis. (skisse) Idéen er å la $\mathcal{F}$ være filteret generert av F og å vise at dette filteret er ekte. I praksis lar man

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq I \mid B \supseteq A_1 \cap \cdots \cap A_n \text{ for en } n \text{ og noen } A_1, \ldots, A_n \in F\}$$

(som viser seg å være lik filteret generert av F) og at dette er et ekte filter som inneholder F. □

Slike F sies å ha *endelig snitt-egenskapen*[5].

Proposisjon 3.10.2. La A være en uendelig mengde. For hver uendelige mengde κ fins en indeksmengde W og et ultrafilter på den slik at den tilhørende ultrapotensen $A_\natural$ har kardinalitet $\geq |\kappa|$.

Bevis. Vår plan er å finne på en indeksmengde W, et tilhørende ultrafilter, og funksjoner $f_w\colon \kappa \to A$ for $w \in W$ slik at komposisjonen

$$\kappa \xrightarrow{\iota} \kappa_\natural \xrightarrow{f_\natural} A_\natural$$

er injektiv. Det som følger er en forenkla versjon av ultraproduktbeviset til kompakthetsteoremet, se for eksempel [6, kap. 5.4] eller [7, kor. 4.1.11]. Velg indeksmengde $W = \mathcal{P}^{\text{fin}}(\kappa)$, mengden av alle endelige delmengder av κ. For $E \in W$, definer

$$X_E = \{j \in W \mid E \subseteq j\}$$

og la

$$F = \{X_E \subseteq W \mid E \in W\} \subseteq \mathcal{P}(W).$$

Påstand. F har endelig snitt-egenskapen.

Dette følger av følgende observasjoner:

(i) For $E \in W$ vil $E \in X_E$ slik at X_E er ikketom.

(ii) For $E, G \in W$ vil $E \cap G \in W$.

(iii) For $E, G \in W$ vil $X_E \cap X_G = X_{E \cap G}$.

Utvid nå F til et ekte filter på W ved lemma 3.10.1, og ved ultrafilterlemma (teorem 2.1.11) utvid dette til et ultrafilter $\mathcal{F}$ på W som inneholder F.

Påstand. For $\alpha, \beta \in \kappa$ vil $X_{\{\alpha,\beta\}} \in \mathcal{F}$.

[5]Engelsk: *finite intersection property*.

Dette er siden $\{\alpha, \beta\}$ ligger i W (mengden er endelig) gir at $X_{\{\alpha,\beta\}}$ ligger i F og dermed også $\mathcal{F}$.

For hver $w \in W$ er w en endelig delmengde av κ. Siden A er endelig kan vi for hver w velge en funksjon $f_w \colon \kappa \to A$ som skiller mellom disse elementene.

Påstand. For to ulike $\alpha, \beta \in \kappa$ og $w \in X_{\{\alpha,\beta\}}$ vil $f_w(\alpha) \neq f_w(\beta)$.

Denne er ved å pakke opp definisjonene. Betingelsen på w sier at $\{\alpha, \beta\} \subseteq w$, og ved definisjonen av f_w vil da funksjonen skille mellom α og β.

Ved observasjonene over får vi at for to ulike $\alpha, \beta \in \kappa$ vil

$$\mathcal{F} \ni X_{\{\alpha,\beta\}} \subseteq \{w \in W \mid f_w(\alpha) \neq f_w(\beta)\}$$

så $\mathcal{F}$ fanger også mengden til høyre, slik at $f_\natural(\iota(k)) \neq f_\natural(\iota(k))$ hvor $\iota \colon \kappa \to \kappa_\natural$ er diagonalimbeddingen. Følgelig er komposisjonen $\kappa \to A_\natural$ av diagonalimbeddingen $\kappa \to \kappa_\natural$ og $f_\natural \colon \kappa_\natural \to A_\natural$ injektiv, slik at $A_\natural$ sin kardinalitet er minst κ. $\square$

Kommentar 3.10.3. Indeksmengden W i beviset over har samme kardinalitet som κ, se [21, oppg. 5.2].

Vårt ønskede resultat fås som korollar.

Korollar 3.10.4. La A være en uendelig ring. Da fins en ring B som er elementært ekvivalent med A, men med større kardinalitet. Spesielt er B ikke isomorf med A.

Bevis. Ved lemmaet over kan vi få en ultrapotens $A_\natural$ med større kardinalitet enn A, og ved Łoś er den elementært ekvivalent med A. Denne $A_\natural$ er for stor for å kunne være isomorf med A. $\square$

Det er ikke i alle tilfeller behov for å ta en ultrapotens over en stor indeksmengde for å øke kardinaliteten. Som vi så i lemma 3.9.11 vil $\mathbb{N}_\natural$ i tilfellet $W = \mathbb{N}$ ha kontinuumskardinalitet, og fra det følger det at $\mathbb{Z}_\natural$, $\mathbb{Q}_\natural$ og $\mathbb{R}_\natural$ også alle har kontinuumskardinalitet når indeksmengden er tellbar. Spesielt er $\mathbb{N}$ (som monoide), $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ ikke førsteordensaksiomatiserbare. I begynnelsen av neste kapittel vil vi se at $\mathbb{R}_\natural$ også ikke er isomorf med $\mathbb{R}$, selv om de i dette tilfellet har samme kardinalitet.

Kapittel 4

Ikkestandard analyse

Som en avstikker til algebraen denne oppgaven egentlig handler om, og før vi begynner med å gjøre mer avansert algebra vil vi gjøre litt ikkestandard analyse for å illustrere det som en anvendelse av ultraprodukter. Vi vil hovedsakelig karakterisere kjente fenomener fra analysen ved hjelp av ultraprodukter og se at de ofte har enklere og mer intuitive beskrivelser enn de man har med den vanlige ε-formalismen. Når vi har definert grunnleggende konsepter som uendelig nærhet vil vi se at de ovennevnte karakteriseringene har færre kvantorer enn standardversjonene (da noen av dem skjules bak våre nye konsepter). Siden vi allerede har Łoś' teorem og er komfortable med å bruke det har vi allerede betalt for inngangsbilletten til verdenen av ikkestandard analyse. Vi følger [18], en introduksjon til de hyperreelle tallene og ikkestandard analyse, og [11], som hovedsakelig gjør mer avansert (ikkestandard) analyse.

I dette kapittelet er ultraprodukter ultrapotenser, og paret $(W, \mathcal{F})$ er slik at $\mathbb{N} \neq \mathbb{N}_\natural$. Mer om det senere.

4.1 De hyperreelle tallene

Ved Łoś er de hyperreelle tallene $\mathbb{R}_\natural$ en ordna kropp. Vi vil skrive $\leq$ for dets ordning. I ikkestandard analyse skriver man $^*\mathbb{R}$ for de hypereelle tallene, og generelt * for alle "ikkestandarde utvidelser" – det vi kaller ultraprodukter. Vi bruker den – unnskyld ordspillet – ikkestandarde notasjonen $\natural$ for å være i tråd med notasjonen i resten av oppgaven.

Som ultrapotens har $\mathbb{R}_\natural$ en diagonalimbedding $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\natural$ som vi identifiserte i konvensjon 3.2.16. Vi har tidligere sett at diagonalimbeddingen er en ringhomomorfi. Man kan sjekke at den bevarer også ordninga $\leq$ på $\mathbb{R}_\natural$, så den er en strengt voksende ringhomomorfi. Vi vil bruke denne for å relatere de vanlige reelle tallene og de hyperreelle tallene. Vi har også en absoluttverdifunksjon $|\cdot|\colon \mathbb{R}_\natural \to \mathbb{R}_\natural$, som ved Łoś oppfører seg som forventa.

Definisjon 4.1.1. Velg $r \in \mathbb{R}_\natural$.

(i) r er *infinitesimal* om $|r| < x$ for hver $0 < x \in \mathbb{R}$. Mengden av infinitesimaler kaller vi $\mathbb{I}$.

(ii) r er *begrensa* om $|r| < x$ for en $x \in \mathbb{R}$. Mengden av begrensa tall skrives $\mathbb{L}$.

(iii) r er *ubegrensa* om den ikke er begrensa.

(iv) r er *nevneverdig* om den er begrensa og ikke en infinitesimal.

Digresjon 4.1.2. Man kan definere infinitesimaler og begrensa elementer til hver ordna kropp k, slik at disse konseptene er intrinsiske. Husk at ordna kropper har karakteristikk null. Vi kan definere infinitesimalene til k som de x hvor $-1/n < x < 1/n$ for hver $n \in \mathbb{N}$, og de begrensa elementene som de x hvor det fins $n \in \mathbb{N}$ slik at $-n < x < n$. For $\mathbb{R}_\natural$ er dette ekvivalent med definisjonene vi ga definisjon 4.1.1. Med disse begrepene kan vi si at en ordna kropp er arkimedisk hvis og bare hvis den ikke har ikketrivielle infinitesimaler, ekvivalent ikke har ubegrensa elementer.

Merk at null er en infinitesimal, og den eneste reelle infinitesimalen. La oss vise at ikketrivielle infinitesimaler fins. Anta først at $W = \mathbb{N}$ og $\mathcal{F}$ er et vilkårlig fritt ultrafilter på W. La

$$\varepsilon = [(1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)], \quad \text{og} \quad \omega = 1/\varepsilon = [(1, 2, 3, 4, \ldots)].$$

Påstår at ε er en infinitesimal. Den er positiv fordi $[\![1/n \geq 0]\!] = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, og videre, for hver reelle $r > 0$ fins kun endelig mange n slik at $r > 1/n$, $[\![1/n < r]\!] \in \mathcal{F}$, slik at ε er en infinitesimal.

Problemstillingen om hvorvidt $\mathbb{R}_\natural$ har en ikketriviell infinitesimal er ekvivalent med om hvorvidt $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ er ikketom: Gitt en ikkenull infinitesimal ε er $\lfloor 1/|\varepsilon| \rfloor$ i $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$, og gitt $N \in \mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ er $1/N$ en ikkenull infinitesimal. Med denne karakteriseringa ser vi at gitt en indeksmengde W med kardinalitet $> \aleph_0$ kan vi bruke proposisjon 3.10.2 og kommentar 3.10.3 til å få et ultrafilter $\mathcal{F}$ på W hvor $|\mathbb{N}_\natural| = |W| > \aleph_0$, slik at $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ spesielt er ikketom.

Digresjon 4.1.3. Det er en enklere måte å få et par $(W, \mathcal{F})$ slik at $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ er ikketom for en vilkårlig W: Man kan også vise at om $\mathcal{F}$ har en ekstra egenskap kalt tellbar ukompletthet (se definisjon 7.2.2), så kan man gjøre et liknende argument for å få at $\mathbb{R}_\natural$ har ikketrivielle infinitesimaler.

For å unngå å måtte kreve den sterke betingelsen $W = \mathbb{N}$ velger vi å isteden kreve at vi har en infinitesimal:

Konvensjon 4.1.4. I dette kapittelet vil paret $(W, \mathcal{F})$ tilfredsstille $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N} \neq \emptyset$.

Om $X \subseteq \mathbb{R}$ vil vi skrive $X_\natural^\infty$ for de ubegrensa elementene av $X_\natural$, slik at $\mathbb{N}_\natural^\infty$ er mengden av ubegrensa hypernaturlige tall og $\mathbb{R}_\natural^\infty$ den av ubegrensa hyperreelle tall.

Digresjon 4.1.5. Som lovet ved slutten av forrige kapittel kan vi nå vise at $\mathbb{R}_\natural$ ikke er isomorf med de reelle tallene. Intuitivt er det eneste aksiomet for $\mathbb{R}$ vi a priori ikke har for $\mathbb{R}_\natural$, at førstnevnte er (Dedekind-)komplett. Dette er det siste aksiomet man trenger for å entydig bestemme $\mathbb{R}$ opp til isomorfi, så enhver forskjell mellom $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}_\natural$ må være mulig å oppdage med kompletthet. Mengden av infinitesimaler $\mathbb{I}$ er ikketom og har ingen supremum: Hver reelle $r > 0$ er en øvre skranke for $\mathbb{I}$, så ingen reelle, og dermed nevneverdige tall kan være supremum for $\mathbb{I}$. Følgelig gjenstår infinitesimalene. Men om ε er supremumet til $\mathbb{I}$, så vil det motsi det at $2\varepsilon \in \mathbb{I}$. Følgelig har ikke $\mathbb{I}$ et supremum, og $\mathbb{R}_\natural$ er ikke Dedekindkomplett. Man kan også vise $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}_\natural$ ved å vise at$\mathbb{R}_\natural$ ikke tilfredsstiller den arkimediske egenskapen, med $\omega = 1/\varepsilon$ som moteksempel, for ε en ikketriviell infinitesimal.

Proposisjon 4.1.6. Mengden av begrensa tall $\mathbb{L}$ er en underring av $\mathbb{R}_\natural$, og $\mathbb{I}$ er et ideal av den. Mengden $\mathbb{N}_\natural^\infty$ er lukka under addisjon med elementer fra seg selv og $\mathbb{Z}$. Mengden $\mathbb{R}_\natural^\infty$ er lukka under addisjon med elementer fra seg selv med samme fortegn, og $\mathbb{L}$, og multiplikasjon med elementer fra $\mathbb{R}_\natural \smallsetminus \mathbb{I}$.

Bevis. Vi viser kun at om $a \in \mathbb{L}$ og $b \in \mathbb{I}$, så vil $ab \in \mathbb{I}$. Vi har $|a| \leq m$ for en $m \in \mathbb{N}$ og $|b| \leq 1/n$ for hver $n \in \mathbb{N}$, så $|ab| \leq m/n$ for hver $n \in \mathbb{N}$. Gitt $N \in \mathbb{N}$ kan vi nå velge n stor nok til at $|ab|$ er mindre enn $1/N$, så ab er en infinitesimal. □

Kommentar 4.1.7. Resultater som det over har analogier til resultater om følger. La $W = \mathbb{N}$. Ved valget av W kan vi projisere reelle følger $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ til hypereelle tall $a_\natural$. Man kan vise at om (a_n) er begrensa, så er $a_\natural$ det, og at om (a_n) konvergerer mot null, så er $a_\natural$ en infinitesimal. Påstanden om at $\mathbb{I}$ er et ideal i $\mathbb{L}$ blir da parallell med det at mengden c_0 av reelle følger som konvergerer mot null er et ideal i ringen ℓ^∞ bestående av de begrensa følgene.

Et nyttig resultat om de hypernaturlige tallene er at de ubegrensa hypernaturlige tallene er der de skal være, nemlig til høyre for alle de vanlige naturlige tallene.

Proposisjon 4.1.8. De ubegrensa hypernaturlige tallene er de ikkestandarde hypertallene: Vi har $\mathbb{N}_\natural^\infty = \mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$.

Bevis. ($\subseteq$): Dette sier at et ubegrensa hypernaturlig tall ikke kan være naturlig, som er per definisjon. ($\supseteq$): Velg $N \in \mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$. Da vil $N \neq n$ for hver $n \in \mathbb{N}$. Ved Łoś på setningene

$$\varphi_n \equiv (\forall m \in \mathbb{N})(n \neq 1 \wedge \cdots \wedge n \neq m \to n \geq m)$$

for hver $n \in \mathbb{N}$ må $N \geq n$ for hver $n \in \mathbb{N}$, slik at N er ubegrensa. $\square$

Det fins mange andre intuitive resultater som relaterer denne klassifiseringa av de hyperreelle tallene i "liten", "medium" og "stor". For eksempel, for hver $0 \neq x \in \mathbb{R}_\natural$ vil x være infinitesimal hvis og bare hvis $1/x$ er ubegrensa.

Digresjon 4.1.9. Ringen $\mathbb{L}$ er en valuasjonsring, en ring hvor $x \in \mathbb{L}$ eller $x^{-1} \in \mathbb{L}$ holder for hver $0 \neq x \in \mathbb{R}_\natural$. Av dette følger det at $\mathbb{L}$ har et unikt maksimalt ideal (som vi i neste kapittel vil kalle å være *lokal*), og $\mathbb{I}$ er nettopp dette maksimale idealet. Følgelig er $\mathbb{L}/\mathbb{I}$ en kropp. Om noen sider vil vi se hvilken kropp det er snakk om.

Definisjon 4.1.10. Definer følgende ekvivalensrelasjoner på $\mathbb{R}_\natural$:

$$x \simeq y \iff x - y \in \mathbb{I} \quad \text{og} \quad x \sim y \iff x - y \in \mathbb{L}.$$

Ekvivalensklassen til x under $\simeq$ er *haloen* til x, og den skrives $\operatorname{hal}(x)$. Ekvivalensklassen under $\sim$ er *galaksen* til x, og den skrives $\operatorname{gal}(x)$.

Kommentar 4.1.11. Det er også vanlig å kalle $\operatorname{hal}(x)$ for monaden til x og å skrive $\mu(x)$ isteden.

Vi vil selvfølgelig tolke $\simeq$ som uendelig nærhet. Med disse nye begrepene kan man tenke på $\mathbb{I}$ som haloen til null, og $\mathbb{L}$ som galaksen til null (og hele $\mathbb{R}$). Faktisk er alle galakser og haloer forskyvninger av disse; for hver $x \in \mathbb{R}_\natural$ vil

$$\operatorname{hal}(x) = x + \mathbb{I}, \quad \text{og} \quad \operatorname{gal}(x) = x + \mathbb{L}.$$

Lemma 4.1.12. Om $x, y \in \mathbb{R}$ med $x \simeq y$, så vil $x = y$.

Bevis. I så fall er $x - y$ infinitesimal og reell, men null er den eneste reelle infinitesimalen. $\square$

Lemma 4.1.13. Om $a \simeq x \leq y \simeq b$ med $a, b \in \mathbb{R}$, så vil $a \leq b$.

Bevis. Vi får $a \leq b + \varepsilon$ for ε en infinitesimal. Om nå $a > b$ for motsigelse vil $b < a \leq b + \varepsilon$, slik at $a \simeq b$, og lemma 4.1.12 gir $a = b$, motsigelse. $\square$

Kommentar 4.1.14. Siden $\sim$ og $\simeq$ er ekvivalensrelasjoner er ulike haloer og galakser disjunkte. Spesielt er $\mathrm{hal}(a)$ og $\mathrm{hal}(b)$ ulike og disjunkte for reelle $a \neq b$ ved lemma 4.1.12. Man kan vise at om to haloer eller galakser er ulike, så er hvert element i det ene større enn hvert element i det andre. Dette lar oss ordne haloene og galaksene, og man kan stille spørsmål om hvordan disse ordningene oppfører seg. Man kan for eksempel vise at galaksene er tett ordna: For hver ubegrensa $\omega \in \mathbb{R}_\natural$, er funksjonen $[0,1] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}_\natural)$ ved $t \mapsto \mathrm{gal}(t\omega)$ injektiv. Ved forskyvning er det minst $\mathfrak{c}$ galakser mellom hver to ulike galakser.

Her er noen andre nyttige regneregler:

Lemma 4.1.15. Anta at $a, b, c, d \in \mathbb{L}$ med $a \simeq b$ og $c \simeq d$. Da vil $a \pm c \simeq b \pm d$, $ac \simeq bd$, og om $c \not\simeq 0$, så vil $a/c \simeq b/d$. Videre, om $x \simeq y$ i $\mathbb{R}_\natural$ og $a \in \mathbb{L}$ vil $ax \simeq ay$.

Bevis. Skriv $\varepsilon = a - b$ og $\delta = c - d$. Det første følger av det at

$$(a + c) - (b + d) = \varepsilon + \delta,$$

en infinitesimal fordi det er en sum av to infinitesimaler (proposisjon 4.1.6), og tilsvarende for subtraksjon. For det andre, observer at

$$ac = (b + \varepsilon)(d + \delta) = bd + \varepsilon d + b\delta + \varepsilon\delta,$$

og siden de tre leddene til høyre er infinitesimaler (proposisjon 4.1.6) må $ac \simeq bd$. Ved mutliplikasjonsregneregelen er det nok å vise at $1/c \simeq 1/d$ for den om divisjon. Vi regner:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{d + \delta} = \frac{d - \delta}{d^2 - \delta^2} \simeq \frac{d - \frac{\delta^2}{d}}{d\big(d - \frac{\delta^2}{d}\big)} = \frac{1}{d},$$

hvor vi bruker nevneverdigheten til d for å få at alle nevnerene er nevneverdige, som brukes til å vise den $\simeq$-en over. For det siste, merk at $ax - ay = a(x - y)$, og $x - y$ er en infinitesimal silk at $a(x - y)$ er det ved proposisjon 4.1.6. $\square$

Når vi har en ikkestandard karakterisering av konvergens av følger vil vi se at regneregelen over viser seg å være den fundamentale beregningen man trenger for at addisjon, multiplikasjon, divisjon og subtraksjon skal være kontinuerlige

Proposisjon 4.1.16. Hver $x \in \mathbb{L}$ er uendelig nærme et unikt reelt tall $\operatorname{sh}(x)$, som vi vil kalle *skyggen* til x.

Bevis. Velg $x \in \mathbb{L}$. Ved begrensethet får vi $r \in \mathbb{R}$ slik at $|x| < r$, altså $-r < x < r$. La nå $A = \{s \in \mathbb{R} \mid s < x\}$. Da er r en øvre skanke til A, og den er ikketom da $-r \in A$, så $s = \sup(A)$ fins. Påstår at $x \simeq s$. Velg en reell $\varepsilon > 0$. Vi må ha $s + \varepsilon \notin A$, da ellers ville $s + \varepsilon \leq \sup(A)$, slik at $x \leq s + \varepsilon$. Dersom vi ikke hadde $s - \varepsilon \leq x$, altså om $x > s - \varepsilon$, så ville $s - \varepsilon$ vært en øvre skranke for A slik at $\sup(A) \leq s - \varepsilon$, som ikke stemmer. Følgelig $s - \varepsilon \leq x \leq s + \varepsilon$ for hver reelle $\varepsilon > 0$. Dermed $|x - s| \leq \varepsilon$ for hver slike ε, slik at $x \simeq s$. Unikhet følger av lemma 4.1.12. $\square$

Fra lemma 4.1.15 og lemma 4.1.13 har skyggefunksjonen flere fine regneregler:

Proposisjon 4.1.17. Funksjonen $\operatorname{sh}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ er en surjektiv voksende ringhomomorfi. Videre, om b er en enhet i $\mathbb{L}$, altså $b \not\simeq 0$, så vil $\operatorname{sh}(b) \neq 0$ og $\operatorname{sh}(a/b) = \operatorname{sh}(a)/\operatorname{sh}(b)$.

Kommentar 4.1.18. Man kan regne ut at $\ker(\operatorname{sh}) = \mathbb{I}$, slik at første isomorfiteorem gir $\mathbb{L}/\mathbb{I} \simeq \mathbb{R}$. Om vi begynner konstruksjonen med $\mathbb{Q}$ istedenfor $\mathbb{R}$, får vi en surjektiv ringhomomorfi $\operatorname{sh}\colon \mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L} \to \mathbb{R}$. Første isomorfiteorem på den gir $(\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L})/(\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{I}) \simeq \mathbb{R}$, slik at vi får en alternativ konstruksjon til de reelle tallene [18, kap. 18.1]. Mengdene $\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L}$ og $\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{I}$ kan bli definert intrinsisk som $\mathbb{Q}_\natural$ sine begrensa elementer og infinitesimaler henholdsvis; se digresjon 4.1.2.

Digresjon 4.1.19. I beviset til lemma 3.9.11 ble det nevnt at vi gjorde et argument inspirert av ikkestandard analyse for å vise at $|\mathbb{N}_\natural| \geq |\mathbb{R}|$ i tilfellet $W = \mathbb{N}$, men hvor man ved mangel på ikkestandard maskineri måtte gjøre argumentet “for hånd”. Argumentet vi gjorde er en forkledt versjon av det ovennevnte lemmaet: Siden vi har en bijeksjon $|\mathbb{N}_\natural| = |\mathbb{Q}_\natural|$ er det nok å lage en surjeksjon $\mathbb{Q}_\natural \to \mathbb{R}$. Siden $\mathbb{Q}$ er tett i $\mathbb{R}$ er bildet til skyggefunksjonen under $\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L}$ lik hele $\mathbb{R}$, som gir en surjektiv funksjon $\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L} \to \mathbb{R}$. Den kan vi utvide til en surjektiv $\mathbb{Q}_\natural \to \mathbb{R}$.

Istedenfor å nå karakterisere konsepter som kontinuitet og konvergens av reelle funksjoner går vi isteden til metriske rom for kostnadsfri generalitet.

4.2 Ikkestandard analyse i metriske rom

Vi vil nå studere metriske rom. Gitt en funksjon $f\colon X \to Y$ får vi en ultrapotens $f_\natural\colon X_\natural \to Y_\natural$. Den utvider f med hensyn på diagonalimbeddingene $X \to X_\natural$ og $Y \to Y_\natural$. I proposisjon 3.2.9 formulerte vi dette fenomenet som en viss naturlig transformasjon. Metodologien i ikkestandard analyse går i stor grad ut på å studere objekter ved å se på deres ultrapotenser, så det er ikke noe poeng i å skille mellom f og $f_\natural$. Derfor:

Konvensjon 4.2.1. I dette kapittelet vil vi ikke skille mellom en funksjon $f\colon X \to Y$ og dets ultrapotens $f_\natural\colon X_\natural \to Y_\natural$.

I analyse kvantifiserer man ofte over mengden $\mathbb{R}^{>0}$ av strengt positive reelle tall. Vi kan bruke Łoś på mengden av de strengt positive hyperreelle tallene, da $(\mathbb{R}^{>0})_\natural = (\mathbb{R}_\natural)^{>0}$. Dette følger av $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in \mathbb{R}^{>0} \leftrightarrow x > 0)$, slik at Łoś gir $(\forall x \in \mathbb{R}_\natural)(x \in (\mathbb{R}^{>0})_\natural \leftrightarrow x > 0)$, og $x > 0$ er ekvivalent med $x \in (\mathbb{R}_\natural)^{>0}$. Vi kan derfor skrive $\mathbb{R}_\natural^{>0}$ uten notasjonskonflikt. Mer generelt gir samme type argument at om R er en n-ær relasjon på en mengde X vil

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in X_\natural^n \mid R_\natural(x_1, \ldots, x_n)\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid R(x_1, \ldots, x_n)\}_\natural.$$

Disse mengdene er dermed interne, så vi kan bruke Łoś med dem.

Definisjon 4.2.2. La (X, d) være et metrisk rom. Definer en ekvivalensrelasjon $\simeq$ på $X_\natural$ ved

$$x \simeq y \iff d(x, y) \text{ er infinitesimal}$$

for hver $x, y \in X_\natural$. Ekvivalensklassen til x under $\simeq$ er haloen til x, og den skrives $\mathrm{hal}(x)$. Definer videre en ekvivalensrelasjon $\sim$ ved

$$x \sim y \iff d(x, y) \text{ er begrensa}$$

for hver $x, y \in X_\natural$. Ekvivalensklassen til x under $\sim$ er *galaksen* til x, og skrives $\mathrm{gal}(x)$.

Alle standarde elementer av $X_\natural$, altså de som også ligger i X er av begrensa avstand fra hverandre og ligger i samme galakse. Inspirert av ringen av begrensa hypereelle tall kaller vi denne galaksen $\mathbb{L}(X)$.

En følge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i et metrisk rom X er egentlig en funksjon $a\colon \mathbb{N} \to X$, så den har en utvidelse $a_\natural\colon \mathbb{N}_\natural \to X_\natural$, som vi vil kalle dets utvidede hyperfølge.

Intuitivt vil vi at konvergens av en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mot $L \in X$ skal bety at om man går "veldig langt ut" i følgen, så er alle elementene "veldig nærme" L.

Dette fungerer ikke i standard analyse, da kvantorrekkefølgen er feil, men den ikkestandard-analytiske karakteriseringen av konvergens av følger formulerer akkurat denne intuisjonen:

Proposisjon 4.2.3. La X være et metrisk rom. En følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mot $L \in X$ hvis og bare hvis $x_N \simeq L$ for hver $N \in \mathbb{N}_\natural^\infty$.

Bevis. ($\Leftarrow$): Siden $x_N \simeq L$ vil spesielt $d(x_N, L) < r$ for hver reelle $r > 0$. Følgelig,

$$(\forall r \in \mathbb{R}^{>0})(\exists N \in \mathbb{N}_\natural)(\forall m \in \mathbb{N}_\natural)(m \geq N \to d(x_m, L) < r),$$

så Łoś på den indre delen av setninga over hvor r er fiksert gir

$$(\forall r \in \mathbb{R}^{>0})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(m \geq N \to d(x_m, L) < r),$$

som er det vi ville ha.

($\Rightarrow$): Vi har $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(m \geq N \to d(x_m, L) < \varepsilon)$. Fikser en slik ε og få N. For hver $M \in \mathbb{N}_\natural^\infty$ vil da $M \geq N$ (proposisjon 4.1.8), så ved Łoś på den indre delen av påstanden over med ε og N fiksert vil $d(x_M, L) < \varepsilon$. Siden dette holder for hver reelle $\varepsilon > 0$ må $d(x_M, L)$ være infinitesimal for hver $M \in \mathbb{N}_\natural^\infty$, og vi er ferdige. □

Med denne karakteriseringa kan vi enkelt vise at grenser av følger er unike med et intuitivt ε-fritt argument: Om $(x_n) \to L$ og $(x_n) \to L'$ vil $L \simeq x_N \simeq L'$ for $N \in \mathbb{N}_\natural^\infty$. Så $L \simeq L'$, slik at $d(L, L')$ er infinitesimal. Men siden L og L' ligger i X er $d(L, L')$ et reelt tall. Null er den eneste reelle infinitesimalen, så avstanden er null og $L = L'$.

Ved konvergenskarakteriseringa over og lemma 4.1.15 kan vi vise at de fire regneartene i $\mathbb{R}$ bevarer grenseverdier av følger slik at $\mathbb{R}$ er en topologisk kropp. For eksempel, om vi har konvergente følger $(a_n) \to a$ og $(b_n) \to b$, så vil $ab \simeq a_N b_N$ for hver $N \in \mathbb{N}_\natural^\infty$, slik at $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to ab$. Følgelig er multiplikasjon er kontinuerlig. Tilsvarende kan man gjøre for de tre andre regneartene.

Proposisjon 4.2.4. La X være et metrisk rom. En følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er Cauchy hvis og bare hvis $x_N \simeq x_M$ for hver $N, M \in \mathbb{N}_\natural^\infty$.

Bevis. ($\Rightarrow$): Velg $\varepsilon > 0$, og få $m \in \mathbb{N}$ slik at

$$(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq N \to d(x_n, x_m) \leq \varepsilon).$$

Bruk Łoś. For $N, M \in \mathbb{N}_\natural^\infty$ vil da $N, M \geq m$, slik at $d(x_N, x_M) < \varepsilon$. Dette holder for hver reelle $\varepsilon > 0$, så $d(x_N, x_M)$ er en infinitesimal og $x_N \simeq x_M$.

($\Leftarrow$): Velg $\varepsilon > 0$. Vi har

$$(\exists N \in \mathbb{N}_\natural)(\forall n, m \in \mathbb{N}_\natural)(n, m \geq N \to d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

ved å la N være ubegrensa. Bruk nå Łoś. □

La oss nå rette vår oppmerksomhet mot funksjoner. Intuitivt er en funksjon kontinuerlig om en uendelig liten endring i input gir en uendelig liten endring i output. Dette viser seg å være den ikkestandarde karakteriseringen av kontinuitet:

Proposisjon 4.2.5. En funksjon $f\colon X \to Y$ mellom metriske rom er kontinuerlig i $x \in X$ hvis og bare hvis $x \simeq y \implies f(x) \simeq f(y)$. for hver $y \in X_\natural$. Alternativt formulert, $f(\mathrm{hal}(x)) \subseteq \mathrm{hal}(f(x))$ for hver $x \in X_\natural$.

Bevis. ($\Rightarrow$): Velg $\varepsilon > 0$, og få $\delta > 0$ slik at

$$(\forall y \in X)(d(x, y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Bruk Łoś og få spesielt at for hver $y \in X_\natural$ vil $x \simeq y$ implisere $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Dette holder for hver reelle $\varepsilon > 0$, så vi må ha $f(x) \simeq f(y)$.

($\Leftarrow$): Gitt en reell $\varepsilon > 0$ har vi

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_\natural^{>0})(d(x, y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

ved å la δ være en infinitesimal. Bruk nå Łoś. □

Med proposisjonen over i bakhodet er det naturlig å spørre hvilke $f\colon X \to Y$ har den sterkere betingelsen om at $x \simeq y$ impliserer $f(x) \simeq f(y)$ for hver $x, y \in X_\natural$, uten ekstrabetingelsen $x \in X$.

Proposisjon 4.2.6. En funksjon $f\colon X \to Y$ mellom metriske rom er uniformt kontinuerlig hvis og bare hvis $x \simeq y \implies f(x) \simeq f(y)$ for hver $x, y \in X_\natural$.

Bevis. ($\Rightarrow$): Velg en reell $\varepsilon > 0$, og få reell $\delta > 0$ slik at

$$(\forall x, y \in X)(d(x, y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Bruk nå Łoś og få spesielt at $x \simeq y$ impliserer at $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Dette holder for hver reelle $\varepsilon > 0$, så vi må ha $f(x) \simeq f(y)$ når $x \simeq y$.

($\Leftarrow$): Velg $\varepsilon > 0$. Da har vi

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{\natural}^{>0})(\forall x, y \in X_{\natural})(d(x,y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

ved å la δ være en infinitesimal. Bruk nå Łoś. □

Husk at $B(x, \varepsilon)$ er den åpne ballen i X bestående av elementene med avstand $< \varepsilon$ fra x. For å generalisere dette vil vi skrive

$$B_{\natural}(x, \varepsilon) = \{y \in X_{\natural} \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

for hver $x \in X_{\natural}$ og $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\natural}^{>0}$. Disse mengdene er interne; om vi velger approksimasjoner $x = x_{\natural}$ og $\varepsilon = \varepsilon_{\natural}$ vil $B_{\natural}(x_{\natural}, \varepsilon_{\natural}) = \operatorname{ulim}_{w \in W} B(x_w, \varepsilon_w)$. Spesielt vil vi ha at $B_{\natural}(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon)_{\natural}$ for hver $x \in X$ og reelle $\varepsilon > 0$.

Haloene kan bli karakterisert mer topologisk, med en formel:

Proposisjon 4.2.7. La X være et metrisk rom. For hver $x \in X$ vil

$$\operatorname{hal}(x) = \bigcap_{\substack{x \in U \subseteq X \\ \text{åpen}}} U_{\natural}.$$

Bevis. ($\subseteq$): Velg $y \simeq x$ i $X_{\natural}$, og en åpen $x \in U \subseteq X$. Ved åpenhet, få reell $\varepsilon > 0$ slik at $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Ved konvensjon 3.2.17 vil $y \in B(x, \varepsilon)_{\natural} \subseteq U_{\natural}$., og følgelig ligger y i snittet.

($\supseteq$): Anta at y ligger i det store snittet, og velg $\varepsilon > 0$. Vi har at $B(x, \varepsilon)$ er en åpen mengde som inneholder x, så $y \in B_{\natural}(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon)_{\natural}$. Dette holder for hver reelle $\varepsilon > 0$, så $x \simeq y$. □

La oss karakterisere egenskaper ved mengder:

Proposisjon 4.2.8. La X være et metrisk rom, og velg $A \subseteq X$.

(i) $a \in A$ er et indre punkt hvis og bare hvis $\operatorname{hal}(a) \subseteq A_{\natural}$, altså hviss for hver $x \in X_{\natural}$ vil $x \simeq a$ implisere $x \in A_{\natural}$.

(ii) A er åpen hvis og bare hvis $\operatorname{hal}(a) \subseteq A$ for hver $a \in A$.

(iii) $b \in X$ er et tillukningspunkt til A (dvs. ligger i tillukningen til A) hvis og bare hvis det fins $a \in A_{\natural}$ slik at $a \simeq b$, altså hviss $\operatorname{hal}(b) \cap A_{\natural}$ er ikketom.

(iv) A er lukka hvis og bare hvis for hver $x \in A$ og $x \simeq y \in X_{\natural}$, så vil $y \in A_{\natural}$.

(v) A er begrensa hvis og bare hvis $A_\natural \subseteq \mathbb{L}(X)$.

(vi) $b \in X$ er et opphopningspunkt til A hvis og bare hvis det fins $b \neq a \in A_\natural$ slik at $a \simeq b$, ekvivalent at $\mathrm{hal}(b) \cap A_\natural$ har et annet element enn b

Bevis. (i) Om a er indre vil $a \in B(a, \varepsilon) \subseteq A$ for en reell $\varepsilon > 0$. Følgelig vil $\mathrm{hal}(a) \subseteq B(a, \varepsilon)_\natural \subseteq A_\natural$. Motsatt, om $\mathrm{hal}(a) \subseteq A$ vil $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}_\natural)(B_\natural(x, \varepsilon) \subseteq A_\natural)$. Bruk nå Łoś.

(ii) Å være åpen er ekvivalent med at alle elementer er indre, så dette følger av forrige punkt.

(iii) Anta at b ligger i tillukninga til A, altså at $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0})(B(b, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset)$. Bruk Łoś, la ε være en infinitesimal og ved kommutering av ultraproduktet og endelige snitt (en anvendelse av korollar 3.2.14), alternativt ved å omformulere setninga, få $B_\natural(b, \varepsilon) \cap A_\natural \neq \emptyset$. Vi er nå ferdige, da $B_\natural(b, \varepsilon) \subseteq \mathrm{hal}(b)$. Anta motsatt at $\mathrm{hal}(b) \cap A_\natural \neq \emptyset$, og velg $c \in \mathrm{hal}(b) \cap A_\natural$. Fra dette får vi $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}_\natural)(B_\natural(b, \varepsilon) \cap A_\natural \neq \emptyset)$ ved å la ε være en infinitesimal som er stor nok, for eksempel $2d(b, c)$. Bruk nå Łoś.

(iv) Å være lukka vil si at $A = \overline{A}$, så dette følger av forrige punkt.

(v) Om A er begrensa, få $x \in X$ og reell $r > 0$ slik at $A \subseteq B(x, r)$. Følgelig får vi (ved konvensjon 3.2.17) $A_\natural \subseteq B(x, r)_\natural = \{y \in X_\natural \mid d(x, y) < r\} \subseteq \mathbb{L}(X)$. Motsatt har vi $(\exists r \in \mathbb{R}^{>0}_\natural)(\exists x \in X_\natural)(A_\natural \subseteq B(x, r)_\natural)$ ved å la r være ubegrensa. Bruk så Łoś.

(vi) For b et opphopningspunkt vil $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0})(\exists a \in A)(a \neq b \wedge d(a, b) < \varepsilon)$. Bruk nå Łoś, og la ε være en infinitesimal. Motsatt, om $\mathrm{hal}(b) \cap A_\natural$ har et annet element enn b, vil $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0})(\exists a \in A_\natural)(a \neq b \wedge d(a, b) < \varepsilon)$. Bruk så Łoś på den indre delen av setninga hvor ε er fiksert. □

Punkt (ii) gir spesielt at haloene avgjør topologien på X.

Kapittel 5

Kommutativ algebra

Målet med dette kapittelet er å repetere algebra vi har behov for senere i oppgaven. Dette er for det meste, men ikke kun, kommutativ algebra, og vi vil bruke de første syv avsnittene av kapittelet på dette. Disse avsnittene er alle uavhengige av hverandre og kan leses i den rekkefølgen man vil. Kapittelet kan også hoppes over om man er villig til å bla tilbake ved behov. I flere tilfeller unngår vi bevisst å *kun* gi det vi har behov for senere for å gi leserne ikke kjent med dette bedre intuisjon og følelse for konseptene og konstruksjonene. Etter dette dedikerer vi to avsnitt til å undersøke ultraprodukter gitt konseptene fra dette kapittelet. For å kunne fortere nå ultraprodukter vil vi utelate mange standardbevis.

Fra dette punktet vil vi anta mer av leseren enn gjort hittil, for eksempel i leserens evne til å fylle inn detaljer i bevis på egenhånd. Vi vil få behov for litt homologisk algebra i form av eksakte funktorer og flathet senere i kapittelet, men vil ikke bruke plass på å diskutere det her. For fine bøker om temaet henvises leseren til [45] og [38]. Bøkene [30] og [10] er to klassiske referanser for kommutativ algebra.

5.1 Primidealer

Husk at et ekte ideal $\mathfrak{p} \subset A$ er et primideal dersom $xy \in \mathfrak{p}$ impliserer $x \in \mathfrak{p}$ eller $y \in \mathfrak{p}$ for alle $x, y \in A$. Vi skriver $\operatorname{Spec}(A)$ for mengden av primidealer til A.

Definisjon 5.1.1. Krulldimensjonen $\dim(A)$ til en ring A er lik supremum av lengden av alle kjedene av primidealer til A telt i antall ekte inklusjoner.

Ved vår definisjon vil nullringen ha dimensjon $-\infty$. Noen forfattere gir den dimensjon -1 isteden. Ved Krulls teorem har hver ring utenom nullringen et maksimalt ideal, så nullringen blir ihvertfall den eneste med strengt negativ dimensjon.

Det er en fin relasjon mellom noetherske og artinske ringer.

Teorem 5.1.2 (Akizuki-Hopkins)**.** En ring A er artinsk hvis og bare hvis den er noethersk og har dimensjon ≤ 0.

Bevis. Se [30, thm. 8.5]. □

5.2 Lokalisering

Lokalisering er en konstruksjon som lar oss formelt invertere elementer i en ring.

Definisjon 5.2.1. La A være en ring. En mengde $S \subseteq A$ er *multiplikativt lukka* om $1 \in S$ og $xy \in S$ for hver $x, y \in S$.

Velg en ring A og multiplikativt lukka mengde $S \subseteq A$. Definer en relasjon $\sim$ på $A \times S$ som følger:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff (\exists u \in S)(at - bs = 0)$$

Dette er en ekvivalensrelasjon. Skriv $S^{-1}A$ for faktormengden $(A \times S)/\sim$, og antydende a/s for ekvivalensklassen til (a, s). Definer to binæroperasjoner $+$ og $\cdot$ på $S^{-1}A$ som følger:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \text{og} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

Man kan vise at disse operasjonene er veldefinerte, og at $S^{-1}A$ blir en ring med dem. Ringen $S^{-1}A$ kalles lokaliseringa av A med hensyn på S. Den kommer med en kanonisk ringhomomorfi $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ gitt ved $\varphi(a) = a/1$.

Lokalisering har en universalegenskap som er veldig nyttig for å konstruere utgående ringhomomorfier.

Proposisjon 5.2.2. Anta at $f\colon A \to B$ er en ringhomomorfi slik at $f(s)$ er en enhet for hver $s \in S$. Da vil f unikt faktoriseres gjennom φ; det fins en unik ringhomomorfi $h\colon S^{-1}A \to B$ slik at $h = f \circ \varphi$.

Bevis. Se [30, prop. 3.1]. □

Ringhomomorfien φ sender elementer av S til enheter, og om $\varphi(a) = 0$ vil $as = 0$ for en $s \in S$. Disse observasjonene lar oss beregne kjernen som $\ker(\varphi) = \{a \in A \mid (\exists s \in S)(as = 0)\}$. Ringen $S^{-1}A$ sammen med den kanoniske φ har også en egen universalegenskap. Den viser at de to ovennevnte egenskapen for φ, sammen med en tredje egenskap om elementene til $S^{-1}A$, karakteriserer paret $(S^{-1}A, \varphi)$.

Korollar 5.2.3. Velg ringer A og B, og $S \subseteq A$ multiplikativt lukka. Anta at $f\colon A \to B$ er en ringhomomorfi slik at

(i) $f(s)$ er en enhet for hver $s \in S$,

(ii) $f(a) = 0$ impliserer at $as = 0$ for en $s \in S$, og

(iii) Hvert element i B er på formen $f(a)f(s)^{-1}$ for $a \in A$, $s \in S$.

Da fins en unik isomorfi $h\colon S^{-1}A \to B$ slik at $f = h \circ \varphi$.

Bevis. Bruk proposisjon 5.2.2 for eksistens, og (i)-(iii) over for at det er en isomorfi. Se [30, kor. 3.2] for detaljene. □

5.3 Lengde

Dette avsnittet innhold blir kun brukt i avsnitt 5.9. I vår framstilling vil vi følge en kombinasjon av [30, kap. 6] og [2, kap. 1.1]. Det er mye mer ved lengde enn vi vil se på her. Fikser en ring A og modul M.

Definisjon 5.3.1. En generalisert komposisjonsrekke til M er en kjede av undermoduler $M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n$ slik at hver M_i/M_{i-1} er enkel eller null. En komposisjonsrekke er en generalisert komposisjonsrekke hvor hver M_i/M_{i-1} er kun enkel. I begge tilfellene er lengden antallet ekte inklusjoner.

En generalisert komposisjonsrekke kan bli tenkt på som en komposisjonsrekke med ekstra ledd, for eksempel om man er mer opptatt av inklusjoner ovenfor ekte inklusjoner. En kjede $M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n$ av undermoduler av M er av maksimal lengde hvis og bare hvis den er en komposisjonsrekke.

Teorem 5.3.2 (Jordan-Hölder)**.** La A være en ring, og M en A-modul. Da er alle komposisjonsrekker til M like lange.

Bevis. Se [30, prop. 6.7] eller [2, thm. 1.2]. □

Definisjon 5.3.3. La M være en A-modul. Lengden $\ell(M)$ til M, også skrevet $\ell_A(M)$, er følgende like tall:

(i) Supremum av lengdene av alle kjedene av undermoduler til M telt i antall ekte inklusjoner,

(ii) Infimum av lengdene til alle (generaliserte) komposisjonsrekker til M, og

(iii) Lengden til alle komposisjonsrekker til M.

Eksempel 5.3.4. Nullmodulen er den eneste modulen med lengde null. De enkle modulene er modulene med lengde én.

Om man bygger teorien til lengde med utgangspunkt i komposisjonsrekker slik som [2], så er (ii) typisk den innledende definisjonen av lengde før man har vist Jordan-Hölder-teoremet, hvor man så bytter til (iii). Det at disse tallene er like holder også i det uendelige tilfellet. Punkt (i) er nyttig når man jobber med kjeder av undermoduler, mens de to andre er nyttigere når man jobber i en kontekst hvor man har komposisjonsrekker. Med det sagt er forskjellen mellom punkt (i) og punktene (ii) og (iii) hovedsakelig i perspektiv.

Proposisjon 5.3.5. En modul M har endelig lenge hvis og bare den er både noethersk og artinsk.

Bevis. Se [30, prop 6.8] eller [2, prop. 1.5]. □

Spesielt vil hver modul med endelig lengde være endeliggenerert. Ringer hvor den motsatte implikasjonen holder av spesiell interesse.

Proposisjon 5.3.6. La A være en ring. Da er A artinsk hvis og bare hvis hver endeliggenererte A-modul har endelig lengde.

Bevis. Se [2, kor. 3.2]. □

Spesielt vil en artinsk ring ha endelig lengde som modul over seg selv, en interessant invariant for artinske ringer.

Proposisjon 5.3.7 (Additivitet)**.** Om $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ er kort eksakt, så vil M ha endelig lengde hvis og bare hvis L og N har det. I så fall vil $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$.

Bevis. Første del er ved proposisjon 5.3.5 og [30, prop. 6.3]. Det siste ved [30, prop 6.9] eller [2, kor. 1.3]. □

Korollar 5.3.8. Anta at M har endelig lengde. Hver undermodul $N \subseteq M$ har endelig lengde, og $\ell(N) \leq \ell(M)$ med likhet hvis og bare hvis $N = (0)$.

Bevis. Se på den kort eksakt følgen $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$. □

5.4 Nyttige universalegenskaper

Én måte å forstå et objekt er ved å se på hvordan det relateres til andre. Denne filosofien gjennomsyrer kategorisk tenkning og har gitt oss ønsket om å karakterisere visse algebraiske konstruksjoner ved hjelp av universalegenskaper. I praksis lar de oss slippe å måtte gang på gang verifisere at en ønsket homomorfi til eller fra et visst konstruert objekt er veldefinert og har en bestemt egenskap hver gang vi skulle ha behov for den, som gir universalegenskaper stor praktisk nytte. Rent metamatematisk kan vi også være tilfreds ved at slike homomorfier også utnytter konstruksjonens "fulle logiske styrke" ved at universalegenskaper karakteriserer objekter opp til isomorfi.

I beviset til proposisjon 3.5.2 brukte vi universalegenskapen til polynomringen. I én variabel lyder den:

Proposisjon 5.4.1. Velg ringer A og B, en ringhomomorfi $f\colon A \to B$, og $a \in A$. Da fins en unik ringhomomorfi $g\colon A[x] \to B$ som utvider f og sender $x \mapsto a$.

Bevis. Slike g tilfredsstiller $g\left(\sum_{i=1}^n b_i x^i\right) = \sum_{i=1}^n f(b_i)a^n$, og unikhet følger. Å sjekke at g er en ringhomomorfi etterlates til leseren. □

Fra én variabel kan vi gå til flere ved induksjon.

Korollar 5.4.2. Velg en ringhomomorfi $f\colon A \to B$, n et naturlig tall og $a_i \in A$ for $1 \leq i \leq n$. Da fins en unik ringhomomorfi $g\colon A[x_1, \ldots, x_n] \to B$ som utvider f og sender $x_i \mapsto a_i$ for hver i.

Denne egenskapen vil unikt karakterisere paret $(A[x_1, \ldots, x_n], x_1, \ldots, x_n)$ opp til isomorfi. Universalegenskapen har også en algebra-versjon.

Korollar 5.4.3. La B og C være A-algebraer. For hver $n \in \mathbb{N}$ og valg $c_1, \ldots, c_n \in C$ fins en unik A-algebrahomomorfi $g\colon B[x_1, \ldots, x_n] \to C$ sender $x_i \mapsto c_i$ for hver i.

Bevis. Etterlatt til leseren. □

Faktorringer har også en nyttig universalegenskap.

Proposisjon 5.4.4. Anta at $f\colon A \to B$ er en ringhomomorfi, og velg et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ slik at følgende ekvivalente betingelser holder: (i) $\mathfrak{a} \subseteq \ker(f)$, og (ii) f er konstant på ekvivalensklassene til $\mathfrak{a}$. Da fins en unik ringhomomorfi $g\colon A/\mathfrak{a} \to B$ slik at $f = g \circ \pi$ hvor $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ er projeksjon, altså slik at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd} & A/\mathfrak{a} \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Bevis. (skisse) Om den skulle finnes må den ha formen $g(\overline{a}) = f(a)$. Vis så at dette er veldefinert og en ringhomomorfi. □

5.5 Utvidelser og kontraksjon

Ofte er man i en situasjon hvor man har to ringer med en viss relasjon mellom seg, og har lyst til å relatere idealer, både alle og spesielle typer, mellom dem. For eksempel er man i en slik situasjon når man har lyst til å karakterisere idealene og primidealene i $A/\mathfrak{a}$ ved å relatere dem med visse idealer av A. Her kan vi tenke oss at "relasjonen" mellom dem er projeksjonen $A \to A/\mathfrak{a}$. Flere eksempler kan man finne innen lokalisering; se for eksempel [30, prop. 3.11, 4.8]. Dette motiverer et ønske om å formalisere idéen av å gå frem og tilbake mellom idealer til to ringer, som vi vil gjøre her.

Definisjon 5.5.1. Velg en ringhomomorfi $f\colon A \to B$, og idealer $\mathfrak{a} \subseteq A$ og $\mathfrak{b} \subseteq B$. Definer så idealer $\mathfrak{a}^e = (f(\mathfrak{a}))$ og $\mathfrak{b}^c = f^{-1}(\mathfrak{b})$ med hensyn på f. Idealet $\mathfrak{a}^e$ kalles utvidelsen til $\mathfrak{a}$, og $\mathfrak{b}^c$ kalles kontraksjonen til $\mathfrak{b}$.

Idealet $\mathfrak{a}^e$ altså er det generert av alle $f(a)$ for $a \in \mathfrak{a}$, så det er et ideal per definisjon. Mengden $\mathfrak{b}^c$ er et ideal fordi det er kjernen til komposisjonen av ringhomomorfier $A \longrightarrow B \longrightarrow B/\mathfrak{b}$. I anvendelser vil det være klart hvilken ringhomomorfi utvidelser og kontraksjoner gjøres med hensyn på. Man kan vise at kontraksjonen til et primideal er et primideal. Følgelig vil $f\colon A \to B$ indusere en funksjon $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, og med dette blir Spec en kontravariant funktor CRing $\to$ Set[1].

Denne konstruksjonen har flere fine egenskaper. Utvidelser og kontraksjon er spesielt monoton; om $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$ i A vil $\mathfrak{a}^e \subseteq (\mathfrak{a}')^e$, og om $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}'$ i B vil $\mathfrak{b}^c \subseteq (\mathfrak{b}')^c$. Dette lar oss dytte kjeder av idealer mellom A og B. Flere egenskaper kan man finne i [30, s. 9ff].

Lemma 5.5.2. La $f\colon A \to B$ være en ringhomomorfi, og velg et ideal $\mathfrak{a} = (\{a_i\}_{i\in I})$. Da vil $\mathfrak{a}^e = (\{f(a_i)\}_{i\in I})$.

Bevis. Etterlatt til leseren. □

Utvidelser gir en naturlig måte å modde ut to idealer i én ring etter hverandre, nemlig ved å utvide det andre idealet til å ligge i riktig ring. Vi har

Lemma 5.5.3. La A være en ring, og $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ idealer. Da har vi kanoniske isomorfier $(A/\mathfrak{a})/\mathfrak{b}^e \simeq A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \simeq (A/\mathfrak{b})/\mathfrak{a}^e$, hvor utvidelsen $\mathfrak{a}^e$ er med hensyn på $\pi_1\colon A \to A/\mathfrak{b}$, og $\mathfrak{b}^e$ med hensyn på projeksjonen $\pi_2\colon A \to A/\mathfrak{a}$.

Bevis. Ved symmetri følger den andre isomorfien av den første. Skriv $\pi_3\colon A/\mathfrak{a} \to (A/\mathfrak{a})/\mathfrak{b}^e$ for projeksjonen, og la $f\colon A \to (A/\mathfrak{a})/\mathfrak{b}^e$ være komposisjonen $f = \pi_3 \circ \pi_2$. Da vil $\ker(f) = \pi_3^{-1}(\ker(\pi_2)) = \pi_3^{-1}(\mathfrak{b}^e) = \mathfrak{b}^{ec}$. Siden $\mathfrak{a} = \ker(\pi_3)$ vil $\mathfrak{a} \subseteq \ker(f)$, så $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}^{ec}$ slik at $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^{ec}$. Man kan så regne seg fram til at disse er like, slik at isomorfien følger ved første (eller tredje) isomorfiteorem. □

Lemma 5.5.4. La $f\colon A \to B$ være en ringhomomorfi, og velg idealer $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$. Da vil $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^e = \mathfrak{a}^e\mathfrak{b}^e$.

Bevis. Etterlatt til leseren. Husk at produktet av to genererte idealer $(a_i)_{i\in I}$ og $(b_j)_{j\in J}$ er lik $(a_ib_j)_{i\in I, j\in J}$. Lemma 5.5.2 vil også være nyttig. Se ellers [30, oppg. 1.18]. □

[1]Kodomenet er vanligvis Top. Objektet $\mathrm{Spec}(A)$ har en kanonisk topologi, men det har vi ikke behov for her.

5.6 Trofast flathet

I neste kapittel, døpt "uniforme begrensninger", har vi behov for kunnskap om trofast flathet, som vi vil se på her. Vi har ikke behov for det før neste kapittel, så lesere som vil kan utsette dette avsnittet til senere.

Husk at en A-modul M er *flat* dersom funktoren $-\otimes_A M\colon \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ er eksakt, ovenfor kun høyreeksakt. Dette er ekvivalent med samme definsijon, men hvor funktoren isteden har kodomene Ab, da $\mathrm{Mod}(A)$ og Ab har de samme kjernene og kokjernene, altså at inklusjonene $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Ab}$ er alle trofast eksakte[2]. Husk også at om $f\colon A \to B$ er en ringhomomorfi så får B kanonisk A-modul- og A-algebrastruktur ved å la $a \cdot b = f(a) \cdot b$.

Definisjon 5.6.1. En ringhomomorfi $f\colon A \to B$ er *flat* om B er flat som A-modul.

Definisjon 5.6.2. En A-modul M er trofast flat om den er flat og $N \otimes_A M = (0)$ impliserer $N = (0)$ for hver A-modul N. Videre er en ringhomomorfi $f\colon A \to B$ trofast flat om B er trofast flat som A-modul.

Betingelsen over kan også bli formulert som å si at $N \otimes_A M \neq (0)$ for hver A-modul $N \neq (0)$. Dette kravet kan alternativt bli erstattet med å si at den ovennevnte tensoreringsfunktoren er trofast eksakt [38, s. 152]. Ved å bruke denne og dekomponere kjedekomplekser til korte følger fås en tilsvarende karakterisering for kjedekomplekser.

Om M er en A-modul og vi har en ringhomomorfi $f\colon A \to B$, så er $M \otimes_A B$ naturlig en B-modul ved å la $b \cdot (m \otimes b') = m \otimes (bb')$, og å utvide lineært. Denne konstruksjonen kalles skalarutvidelse.

Proposisjon 5.6.3. Om M er en flat A-modul og $f\colon A \to B$ en ringhomomorfi, så er $M \otimes_A B$ flat som B-modul. Tilsvarende holder også om M er trofast flat.

Bevis. Dette er fordi vi har, for hver B-modul N (som også blir en A-modul via f, og også en A-B-bimodul), en isomorfi

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \simeq M \otimes_A (B \otimes_B N) \simeq M \otimes_A N$$

av abelske grupper som er naturlig i N. Den fås av å komponere de naturlige isomorfiene over, som man kan finne mer om i [30, prop. 2.14, oppg. 2.15].

[2] En funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mellom abelske kategorier er trofast eksakt om hver gitte følge i $\mathcal{A}$ er eksakt hvis og bare hvis den induserte følgen i $\mathcal{B}$ er det – ikke at at F er både trofast og eksakt.

Dette gir en naturlig isomorfi $(M \otimes_A B) \otimes_B (-) \simeq M \otimes_A F(-)$ av funktorer $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Ab}$, hvor $F\colon \mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(A)$ er skalarrestriksjon i henhold til f. Følgelig, om M i $\mathrm{Mod}(A)$ er flat (henholdsvis trofast flat), så er $M \otimes_A B$ det i $\mathrm{Mod}(B)$. □

Husk at om $\mathfrak{a} \subseteq A$ er et ideal og M er en A-modul, så vil $M/\mathfrak{a}M$ få kanonisk struktur som $A/\mathfrak{a}$-modul. Dette følger av det generelle prinsippet om at en A-modul M får kanonisk struktur som $A/\mathfrak{b}$-modul for hvert ideal $\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{Ann}_A(M)$.

Korollar 5.6.4. Velg M en A-modul og velg et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Om M er flat, så er $M/\mathfrak{a}M$ en flat $A/\mathfrak{a}$-modul, og tilsvarende for trofast flathet.

Bevis. Dette er ved proposisjon 5.6.3 og isomorfien $M \otimes_A A/\mathfrak{a} \simeq M/\mathfrak{a}M$ av $A/\mathfrak{a}$-moduler. □

Proposisjon 5.6.5. Dersom $f\colon A \to B$ er trofast flat vil $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ for hvert ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Spesielt er f injektiv.

Bevis. Vi ser først på tilfellet $\mathfrak{a} = (0)$. Den sier $(0) = (0)^{ec} = (0)^c = \ker(f)$, altså at f er injektiv, som vi viser. Velg $a \in \ker(f)$, og betrakt $(a) \otimes_A B$, hvor $(a) \subseteq A$ er idealet sett på som modul. I dette tensorproduktet vil et vilkårlig element tilfredsstille

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes a \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes f(a) \cdot b_i = 0,$$

så $(a) \otimes_A B = (0)$. Ved trofast flathet vil $aA = (0)$, så $a = 0$ og f er injektiv.

Anta nå at $\mathfrak{a} \neq (0)$. Om vi tenker på B som en A-modul er $\mathfrak{a}B$ en B-undermodul, som man kan sjekke at er lik $\mathfrak{a}^e$. Ved korollar 5.6.4 er $B/\mathfrak{a}^e$ en trofast flat $A/\mathfrak{a}$-modul. La $g\colon A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{a}^e$ være den kanoniske ringhomomorfien $g(\overline{a}) = \overline{f(a)}$. Da vil følgende diagram kommutere:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"] & B \arrow[d, "\pi_2"] \\
A/\mathfrak{a} \arrow[r, "g"] & B/\mathfrak{a}^e
\end{tikzcd}$$

Denne g induserer også den samme $A/\mathfrak{a}$-modulvirkningen på $B/\mathfrak{a}^e$ som den som brukes i korollar 5.6.4, så den er trofast flat. Ved argumentet over er g injektiv. Vi regner:

$$\begin{aligned}\ker(\pi_2 \circ f) &= f^{-1}(\ker(\pi_2)) = f^{-1}(\mathfrak{a}^e) = \mathfrak{a}^{ec}, \text{ og}\\ \ker(g \circ \pi_1) &= \ker(\pi_1) = \mathfrak{a}.\end{aligned}$$

Ved kommutativitet av firkanten vil $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$, og vi er ferdige. □

Om $f\colon A \to B$ tilfredsstiller $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$ for hvert ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, så kalles f syklisk ren [41]. Sykliske rene ringhomomorfier, herunder de trofast flate, har fine egenskaper. De er injektive ved argumentet over, og visse kjedebetingelser til B kan for eksempel bli overført til å også holde for A. For eksempel, om B er noethersk eller artinsk, så er A det også. Videre er kontraksjon av primidealer $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ surjektiv [30, prop. 3.16], en interessant relasjon mellom primidealene til ringene.

Proposisjon 5.6.5 er hvorfor [41] sier at trofast flate inklusjoner "bevarer idealstrukturen" til A. Sånn sett kan man tenke på slike inklusjoner som spesielt fine. Betingelsen $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ karakteriserer også trofast flate ringhomomorfier blant de flate [30, oppg. 16, s. 45].

Vi har allerede sett en ringhomomorfi av interesse som ofte er trofast flat:

Eksempel 5.6.6 ([41, kor. 3.3.3])**.** La A være noethersk. Da er diagonalimbeddingen $A \to A_\natural$ inn til ultrapotensen trofast flat.

5.7 Diskrete valuasjonsringer

Definisjon 5.7.1. En diskret valuasjon på en kropp k er en surjektiv funksjon $v\colon k \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ slik at (i) $v(xy) = v(x) + v(y)$ og (ii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ for hver $0 \neq x, y \in k$.

Når man har en slik v er det vanlig å utvide den til $v\colon k \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ved å kreve at $v(0) = \infty$.

Definisjon 5.7.2. En diskret valuasjonsring (DVR) er et integritetsområde A hvor det fins en diskret valuasjon $v\colon \mathrm{Frac}(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ på brøkkroppen $\mathrm{Frac}(A)$ slik at $A = \{x \in \mathrm{Frac}(A) \mid v(x) \geq 0\}$.

Kommentar 5.7.3. Å være en DVR impliserer at ringen også er et euklidsk område, så DVR-er kan plasseres i den lange kjeden av implikasjoner av pene ringegenskaper som inneholder integritetsområder, heltallslukka ringer (se [30, kap. 5]), UFD-er, PID-er og euklidske områder.

Husk at en ring A er lokal om den har et unikt maksimalt ideal $\mathfrak{m}$. Vi skriver ofte $(A, \mathfrak{m})$ eller $(A, \mathfrak{m}, k)$ for lokale ringer, hvor $k = A/\mathfrak{m}$ er residyekroppen. Husk også at et integritetsområde B er en valuasjonsring om for hver $0 \neq x \in \mathrm{Frac}(B)$ vil $x \in B$ eller $x^{-1} \in B$ med hensyn på inklusjonen $B \subseteq \mathrm{Frac}(B)$. Valuasjonsringer er spesielt lokale. Diskrete valuasjonsringer har en spesielt enkel struktur. Her er noen egenskaper:

Proposisjon 5.7.4. La A være en DVR med valuasjon $v\colon \mathrm{Frac}(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Da holder følgende:

(i) A er en valuasjonsring.

(ii) Enhetene de elementene med valuasjon null.

(iii) A er lokal med $\mathfrak{m} = \{x \in A \mid v(x) \neq 0\}$, og $\mathfrak{m}$ er et hovedideal.

(iv) Hvert ideal er enten null eller en potens av $\mathfrak{m}$, og $\mathfrak{m}^n = \{x \in A \mid v(x) \geq n\}$.

(v) Hvert ideal er enten null eller på formen (x^n) for en $n \geq 0$, for en $x \in A$.

Bevis. Utelatt. Se [30, prop. 9.2] og [32, thm. 11.1, 11.2] for inspirasjon. □

Spesielt er diskrete valuasjonsringer PID-er, og dermed også noetherske.

Lemma 5.7.5. Anta at $(A, \mathfrak{m})$ er et lokalt integritetsområde som ikke er en kropp slik at $\mathfrak{m} = (x)$ er et hovedideal og $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = (0)$. Da er A en DVR.

Bevis. (skisse) Definer $v\colon A \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{N}$ ved $v(a) = \max\{n \geq 0 \mid a \in \mathfrak{m}^n\}$. Den er surjektiv siden $v(x) = 1$. Vis at denne tilfredsstiller DVR-aksiomene Utvid den nå til en funksjon $v\colon \mathrm{Frac}(A) \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ ved å kreve at $v(a/b) = v(a) - v(b)$, som er veldefinert, og vis at denne også tilfredsstiller DVR-aksiomene. It is surjective because $v(x) = 1$. □

5.8 Ultraprodukter og lokalitet

Nå som vi vet hva lokalisering og lokale ringer er vil vi benytte anledninga til å se hvordan de oppfører seg med hensyn på ultraprodukter. Vi begynner med lokale ringer.

Proposisjon 5.8.1. Velg ringer A_w. Da er $A_\natural$ lokal hvis og bare hvis nesten alle av A_w-ene er det. Videre, om $(A_w, \mathfrak{m}_w, k_w)$ er lokal for nesten hver w er $\mathfrak{m}_\natural$ det maksimale idealet til $A_\natural$, og residyekroppen er kanonisk isomorf med $k_\natural$.

Bevis. Husk at en ring A er lokal hvis og bare hvis

$$A \neq \{0\} \text{ og } (\forall x, y \in A)(x \text{ og } y \text{ er ikke enheter} \to x + y \text{ er ikke en enhet}).$$

Dette er en førsteordensegenskap, så Łoś gir første del. Resten fås ved proposisjoner 3.7.4 og 3.7.9. □

I kommutativ algebra er lokalisering en viktig konstruksjon, så det er naturlig å spørre hvordan den oppfører seg med hensyn på ultraprodukter. Intuitivt kan man tenke seg at de burde kommutere med ultraprodukter da konstruksjonen av lokaliseringa ikke kvantifiserer over noe annet enn ringen og dets multiplikativt lukka delmengde. Dette viser seg å stemme, og vi vil vise det nå.

Lemma 5.8.2. For multiplikativt lukka mengder $S_w \subseteq A_w$ er ultraproduktet $S_\natural \subseteq A_\natural$ også multiplikativt lukka.

Bevis. Łoś. □

Proposisjon 5.8.3. Velg multiplikativt lukka mengder $S_w \subseteq A_w$, og skriv $\varphi_w \colon A_w \to S_w^{-1} A_w$ for de kanoniske morfiene. Da vil

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} S_w^{-1} A_w \simeq S_\natural^{-1} A_\natural.$$

Videre tilfredsstiller paret $(\operatorname{ulim}_{w \in W} S_w^{-1} A_w, \varphi_\natural)$ universalegenskapen til lokaliseringa av $A_\natural$ med hensyn på $S_\natural$.

Bevis. Skriv B for ultraproduktet av $S_w^{-1} A_w$-ene, og $\psi \colon A_\natural \to S_\natural^{-1} A_\natural$ for den kanoniske morfien. Ringhomomorfien $\varphi_\natural \colon A_\natural \to B$ sender elementer av $S_\natural$ til enheter ved Łoś på at hver φ_w gjør tilsvarende. Videre er hvert element av B på formen $\varphi_\natural(a_\natural)\varphi_\natural(s_\natural)^{-1}$ for alle $a_\natural \in A_\natural$ og $s_\natural \in S_\natural$, ved Łoś på påstanden om at hver φ_w gjør tilsvarende. Videre er kjernen

$$\ker(\varphi_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} \ker(\varphi_w) = \{a_\natural \in A_\natural \mid (\exists s_\natural \in S_\natural)(s_\natural a_\natural = 0)\}$$

ved korollar 3.7.3 og Łoś. Ved korollar 5.2.3 er vi ferdige. □

Siden brøkkroppen til et integritetsområde A kan bli konsturet som lokaliseringa $S^{-1}A$ hvor $S = A \setminus \{0\}$ vil brøkkropp-konstruksjonen spesielt kommutere med ultraprodukter Vi kan bruke dette til å vise at ultraproduktet bevarer valuasjonsringer.

Korollar 5.8.4. Velg integritetsområder A_w. Da er $A_\natural$ en valuasjonsring hvis og bare hvis nesten hver A_w er det.

Bevis. Ultraproduktet $A_\natural$ er et integritetsområde. Ved proposisjon 5.8.3 har vi en isomorfi $\mathrm{Frac}(A_\natural) \simeq \mathrm{ulim}_{w\in W} \mathrm{Frac}(A_w)$, og denne kommuterer med inklusjonene $A_\natural \subseteq \mathrm{Frac}(A_\natural)$ og $A_\natural \subseteq \mathrm{ulim}_{w\in W} \mathrm{Frac}(A_w)$. Gitt dette kan vi oversette valuasjonsring-påstanden til $A_\natural$, som snakker om $\mathrm{Frac}(A_\natural)$ og inklusjonen $A_\natural \subseteq \mathrm{Frac}(A_\natural)$, til en som snakker om $\mathrm{ulim}_{w\in W} \mathrm{Frac}(A_w)$ og den tilhørende inklusjonen, som man så kan bruke Łoś på. □

5.9 Moduler

Velg ringer A_w og moduler $M_w \in \mathrm{Mod}(A_w)$ for hver $w \in W$ henholdsvis. Skriv $+_w \colon M_w \times M_w \to M_w$ og $\cdot_w \colon A_w \times M_w \to M_w$ for moduloperasjonene. Ultraproduktene av disse funksjonene har form $+_\natural \colon M_\natural \times M_\natural \to M_\natural$ og $\cdot_\natural \colon A_\natural \times M_\natural \to M_\natural$, så det ser ut som at $M_\natural$ burde bli sett på som en $A_\natural$-modul. Ved Łoś ser vi at $M_\natural$ med disse operasjonene er en $A_\natural$-modul. Tilsvarende som for ringer kan man sjekke at operasjonene $+_\natural$ og $\cdot_\natural$ også kan fås ved å betrakte $A = \prod_{w\in W} A_w$-modulen $M = M_\natural = \left(\prod_{w\in W} M_w\right)/\sim$, og å se at idealet $\mathfrak{a} \subseteq A$ fra ekvivalensrelasjonen $\sim$ på A ligger i $\mathrm{Ann}_A(M)$, slik at M også får struktur som $A/\mathfrak{a} = A_\natural$-modul.

Mye av det vi har vist for ringer har tilsvarende versjoner for moduler.

Proposisjon 5.9.1. (i) Ultraproduktet av moduler er en funktor

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} \colon \prod_{w\in W} \mathrm{Mod}(A_w) \to \mathrm{Mod}(A_\natural).$$

(ii) Ultrapotensen $\mathrm{ulim}_{w\in W} \colon \mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(B_\natural)$ er også en funktor.

(iii) Ultraproduktet av moduler kommuterer med endelige produkter.

Bevis. Etterlatt til leseren. Mye av arbeidet ble allerede gjort i proposisjoner 3.2.8, 3.2.9 og 3.2.11. □

Proposisjonen over illustrer en av fordelene av å først definere ultraprodukter for mengder før man senere spesialiserer seg. Resultatet over får vi nærmest gratis, da nesten alt av arbeidet ble gjort da vi viste tilsvarende for mengder.

Modulkategorier er betraktelig penere enn CRing i den forstand at de er abelske. Dette byr på spørsmålet om hvorvidt ultraproduktet for moduler har fine homologiske egenskaper som additivitet og eksakthet. Vi må imidlertid ikke haste; før det er mulig å stille disse spørsmålene må vi sjekke at domenet er abelsk.

Lemma 5.9.2. Dersom $\mathcal{A}_i$ er en abelsk kategori for hver $i \in I$, så er produktkategorien $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ også abelsk.

Bevis. Etterlatt til leseren. Man må sjekke mye, men det er et typisk kategorisk bevis hvor man ved hvert steg har kun én ting man kan gjøre, og det viser seg å være det rette. Idéen er at man gjør alt punktvis, blant annet for addisjon i Hom-mengdene, biprodukter, kjerner, og kokjerner. □

Proposisjon 5.9.3. Ultraproduktet ulim: $\prod_{w\in W} \mathrm{Mod}(A_w) \to \mathrm{Mod}(A_\natural)$ av moduler er en eksakt funktor.

Bevis. Vi må først vise at den er additiv. Gitt $f, g\colon M \to N$ i produktkategorien, få dekomponeringer $f_w, g_w\colon M_w \to N_w$ i hver $\mathrm{Mod}(A_w)$. Da vil $f + g = (f_w + g_w)_{w\in W}$ ved beviset til lemma 5.9.2. For hver $w \in W$ har vi

$$(\forall m \in M_w)[(f + g)(m) = f(m) + g(m)]$$

slik at Łoś gir at $(f + g)_\natural = f_\natural + g_\natural$. For å vise at funktoren er eksakt er det nok å vise at funktoren bevarer kjerner og epimorfier. Vi vil få behov for to lemmaer hvis bevis etterlates til leseren:

Lemma 5.9.4. For hver ring A vil epimorfi være ekvivalent med surjektiv for morfiene i $\mathrm{Mod}(A)$.

Lemma 5.9.5. For kategorier $\mathcal{C}_i$, $i \in I$ vil en morfi $f = (f_i)_{i\in I}$ i $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ være en epimorfi hvis og bare hvis hver f_i er det.

Anta nå at $f\colon M \to N$ er en epimorfi i $\prod_{w\in W} \mathrm{Mod}(A_w)$, og få dekomponering $f = (f_w\colon M_w \to N_w)_{w\in W}$. Ved lemmaer 5.9.4 og 5.9.5 er hver f_w i $\mathrm{Mod}(A_w)$ en epimorfi og dermed surjektiv. Ved proposisjon 3.5.1 er $f_\natural$ surjektiv, slik at lemma 5.9.5 gir at $f_\natural$ er en epimorfi.

Det gjenstår å vise at kjerner er bevart. Velg $f\colon M \to N$ i $\prod_{w\in W} \mathrm{Mod}(A_w)$. Vi skal vise kjernen $\ker(f) \xrightarrow{\iota} M$ sendes til en kjerne for $M_\natural$. Siden alle kjerner er isomorfe kan vi uten tap av generalitet anta at $\ker(f)$ er vår foretrukne inkarnasjon $(\ker(f_w))_{w\in W}$ med strukturmorfi $\iota = (\iota_w\colon \ker(f_w) \to M_w)_{w\in W}$. Ved korollar 3.7.3 vil

$$\ker(f)_\natural = \operatorname*{ulim}_{w\in W} \ker(f_w) = \ker(f_\natural)$$

og virkningen til $\iota_\natural$ er

$$\iota_\natural(a_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} \iota_w(a_w) = a_\natural.$$

Dette er den klassiske kjernen til $f_\natural$, så ulim bevarer kjerner og funktoren er eksakt. □

Vi vil ikke få behov for det i denne oppgaven, men vi får nå at ultraproduktet gjør ting eksakte funktorer gjør, som å bevare biprodukter og homologi. I $\prod_{w\in W} \mathrm{Mod}(A_w)$ kan begge disse bli gjort punktvis ved lemma 5.9.2. Vi får også et resultat analogt til proposisjon 3.7.4, men slipper å bruke Łoś for å vise det. Vi kan isteden henvise til abstrakt tullball.

Korollar 5.9.6. Velg ringer A_w og $N_w \subseteq M_w$ i $\mathrm{Mod}(A_w)$ for hver $w \in W$ henholdsvis. Da fins en kanonisk isomorfi av $A_\natural$-moduler

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} M_w/N_w \simeq M_\natural/N_\natural.$$

Bevis. Skriv $\iota_w\colon N_w \to M_w$ for inklusjonene. Modulen til venstre er ulim-funktoren anvendt på kokjernen til $(\iota_w)_{w\in W}$, og det til høyre er kokjernen av ultraproduktet $\iota_\natural\colon N_\natural \to M_\natural$. Ultraproduktet er eksakt, så den bevarer kokjerner og disse må være isomorfe. □

Tilsvarende idealer i definisjon 3.7.5 har vi:

Definisjon 5.9.7. La M være en A-modul. Da lar vi $\mu(M)$ være infimum av alle mulige antall generatorer til M, med konvensjon om at nullmodulen har null generatorer.

Proposisjon 5.9.8. Velg moduler $M_w \in \mathrm{Mod}(A_w)$. Da vil $\mu(M_\natural) \leq n$ hvis og bare hvis $\mu(M_w) \leq n$ for nesten hver w. Videre, $M_w = (m_{1,w}, \dots, m_{n,w})$ holder for nesten hver w hvis og bare hvis $M_\natural = (m_{1,\natural}, \dots, m_{n,\natural})$.

Bevis. Gjør det samme som proposisjon 3.7.6, mutatis mutandis. □

Proposisjon 5.9.9. Hver endeliggenererte $A_\natural$-modul er intern.

Bevis. I samme stil som beviset til proposisjon 3.7.13. □

Vi vil nå vise at endelig lengde lar seg overføre til ultraprodukter av moduler, gitt en uniform betingelse på lengdene, og ut vil vi få en betingelse for når et ultraprodukt av ringer er noethersk. Dette generaliserer [41, prop. 2.4.17], som blir et korollar for oss. Vi trenger først et teknisk lemma.

Lemma 5.9.10. Velg ringer A_w og moduler $M_w \in \mathrm{Mod}(A_w)$. Dersom $\ell(M_w) \leq d$ for nesten hver w, så er hver undermodul av $M_\natural$ intern.

Bevis. Anta, for motsigelse, at N ikke er endeliggenerert. Dette duger, da endeliggenerert impliserer intern ved proposisjon 5.9.9. Velg $n_1 \in N \smallsetminus \{0\}$, og iterativt

$$n_2 \in N \smallsetminus (n_1), \quad n_3 \in N \smallsetminus (n_1, n_2), \quad \dots, \quad n_d \in N \smallsetminus (n_1, \dots, n_{d-1}),$$

som gir en kjede i $M_\natural$ på formen

$$(0) \subset (n_1) \subset (n_1, n_2) \subset \cdots \subset (n_1, \dots, n_{d-1}) \subset (n_1, \dots, n_d) \subseteq M_\natural.$$

Velg representanter $n_i = n_{i,\natural}$ for $n_{i,w} \in M_w$. Vi har at

$$(\forall 1 \leq i \leq d)(n_{i,\natural} \in (n_{1,\natural}, \dots, n_{i,\natural}) \text{ og } n_{i,\natural} \notin (n_{1,\natural}, \dots, n_{i-1,\natural})).$$

Ved Łoś og proposisjon 5.9.8 vil

$$(\forall 1 \leq i \leq d)(n_{i,w} \in (n_{1,w}, \dots, n_{i,w}) \text{ og } n_{i,w} \notin (n_{1,w}, \dots, n_{i-1,w}))$$

for nesten hver w, si for hver w i $Y \in \mathcal{F}$. For disse w oversettes dette til

$$(0) \subset (n_{1,w}) \subset (n_{1,w}, n_{2,w}) \subset \cdots \subset (n_{1,w}, \dots, n_{d,w}) \subseteq M_w.$$

Observer at det er d ekte inklusjoner i denne kjeden. Kall X mengden av alle w hvor $\ell(M_w) \leq d$. Den ligger i $\mathcal{F}$ per antagelse. For $w \in X \cap Y \in \mathcal{F}$ vil lengdebetingelsen på M_w da gi at siste inklusjon er en likhet. Ved proposisjon 5.9.8 vil da $M_\natural = (n_{1,\natural}, \dots, n_{d,\natural})$, en motsigelse. □

Proposisjon 5.9.11. For ringer A_w og moduler $M_w \in \mathrm{Mod}(A_w)$ vil $\ell(M_\natural) \leq d$ hvis og bare hvis $\ell(M_w) \leq d$ for nesten hver w.

Bevis. ($\Rightarrow$): Anta at $\ell(M_\natural) \leq d$. Velg en generalisert komposisjonsrekke

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_d = M_\natural$$

for $M_\natural$. Hver M_i får så endelig lengde ved korollar 5.3.8, er endeliggenererte ved proposisjon 5.3.5, og interne ved proposisjon 5.9.9. Få dekomponeringer $M_i = M_{i,\natural}$ for $M_{i,w}$ for hver $1 \leq i \leq d$ og $w \in W$. Ved Łoś får vi kjeder

$$M_{0,w} \subseteq M_{1,w} \subseteq \cdots \subseteq M_{d,w} = M_w \tag{1}$$

for nesten alle av w-ene, si for hver $w \in X \in \mathcal{F}$.

Påstand. Disse er generaliserte komposisjonsrekker for nesten hver w.

Faktormodulene $M_i/M_{i-1} = M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural}$ er alle enkle eller null for hver $1 \leq i \leq d$, altså

$$\begin{aligned}(\forall 1 \leq i \leq d)(M_i/M_{i-1} = 0 \text{ eller } (\forall N \subseteq M_i/M_{i-1} \text{ intern undermodul})\\ (N = 0 \text{ eller } N = M_i/M_{i-1}))\end{aligned}$$

hvor vi kvantifiserer over interne undermoduler, ovenfor alle, for å kunne bruke Łoś. Ved Łoś får vi tilsvarende for nesten hver w, si for alle $w \in Y \in \mathcal{F}$ men hvor vi kvantifiserer over alle undermoduler av $M_{i,w}/M_{i-1,w}$. Følgelig er (1) en generalisert komposisjonsrekke for hver $w \in X \cap Y \in \mathcal{F}$, slik at nesten hver M_w har lengde $\leq d$.

($\Leftarrow$): For nesten hver w, si for hver $w \in X \in \mathcal{F}$, få generaliserte komposisjonsrekker

$$M_{0,w} \subseteq M_{1,w} \subseteq \cdots \subseteq M_{d,w} = M_w.$$

Dytter vi dette til $M_\natural$ får vi entydig definerte $M_{0,\natural}, \ldots, M_{d,\natural}$, og ved Łoś en kjede

$$M_{0,\natural} \subseteq M_{1,\natural} \subseteq \cdots \subseteq M_{d,\natural} = M_\natural. \tag{2}$$

Påstår at dette er en generalisert komposisjonsrekke slik at $\ell(M_\natural) \leq d$. Ved korollar 5.9.6 vil

$$M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural} \simeq \operatorname*{ulim}_{w \in W} M_{i,w}/M_{i-1,w}.$$

Nesten alle av modulene i ultraproduktet til høyre er enkle eller null. I tilfellet hvor nesten alle av dem er null (ved lemma 2.1.6 eller Łoś), er ultraproduktet også null, så vi ser på de i for nesten alle er enkle. Ved Łoś' teorem får vi at alle interne undermoduler av $M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural}$ er enten null eller $M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural}$. Modulene $M_{i,w}/M_{i-1,w}$ har alle lengde $\leq d$ ved proposisjon 5.3.7, så lemma 5.9.10 gir at alle undermoduler av $M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural}$ er interne, slik at påstanden om de interne undermodulene av $\operatorname{ulim}_{w\in W} M_{i,w}/M_{i-1,w}$ gir at den er enkel. Følgelig er (2) en generalisert komposisjonsrekke av lengde d for $M_\natural$, slik at denne modulen har lengde $\leq d$. $\square$

Én annen vei man kan gå for å vise resultatet er ved å vise at å ha lengde $\leq d$ er en førsteordensegenskap, og å så anvende Łoś. Dette gjøres i [22, prop. 9.1].

Ved å ta infimum av alle d slik at lengdene er $\leq d$ får vi en tilsvarende versjon av proposisjonen hvor man isteden tester for likhet. For en ring A, vil $\ell_A(A) < \infty$ være ekvivalent med at A er artinsk ved proposisjoner 5.3.5 og 5.3.6. Spesialtilfellet $M_w = A_w$ gir da følgende ringteoretiske korollar:

Korollar 5.9.12. Velg ringer A_w. Da vil $A_\natural$ være artinsk med lengde $\leq d$ hvis og bare hvis A_w er artinsk med lengde $\leq d$ for nesten hver w. Tilsvarende holder også når man tester for $= d$.

I dette tilfellet er A også noethersk, ved teorem 5.1.2. Videre vil den uniforme begrensningen og "nesten hver"-betingelsen gå bort i ultrapotenstilfellet, slik at en ring A er artinsk hvis og bare hvis dets ultrapotens $A_\natural$ er det.

Kapittel 6

Uniforme begrensninger

I dette kapittelet vil vi anvende ultraprodukter til å vise tre eksistensresultater om skranker til problemstillinger om idealer i teorien av polynomringer over kropper. Vi vil konstruere det såkalte ultrahylstret til endeliggenererte $k_\natural$-algebraer, og bruke denne konstruksjonen til å vise de ovennevnte eksistensresultatene. Dette kapittelet vil nært følge [41].

6.1 Ultraalgebraer

Om B_w er en A_w-algebra for hver $w \in W$ henholdsvis, så er $B_\natural$ en $A_\natural$-algebra ved å la strukturhomomorfien $A_\natural \to B_\natural$ være ultraproduktet av strukturhomomorfiene $A_w \to B_w$.

Definisjon 6.1.1. En ultra-$A_\natural$-algebra er en $A_\natural$-algebra som er en intern $A_\natural$-algebra. Altså et ultraprodukt at nesten alle A_w-algebraer B_w, og $A_\natural$-algebrastrukturen er ultraproduktet av A_w-algebrastrukturene til hver B_w henholdsvis.

Sammen danner disse en kategori.

Definisjon 6.1.2. Kategorien av ultra-$A_\natural$-algebraer Ult-$A_\natural$-alg er underkategorien av $A_\natural$-alg som har ultra-$A_\natural$-algebraer som objekter, og morfiene mellom to ultra-$A_\natural$-algebraer $B_\natural$ og $C_\natural$ er de $A_\natural$-algebrahomomorfiene som er ultraprodukter av funksjoner f_w, hvor nesten alle er A_w-algebrahomomorfier.

Morfiene i Ult-$A_\natural$-alg kalles ultra-$A_\natural$-algebrahomomorfier. Vi velger eksplisitt å kun kreve at nesten alle av morfiene $f_w \colon B_w \to C_w$ for $w \in W$ til å være algebrahomomorfier for å for å få mer nytte av Łoś.

6.2 Ultrahylstre

For resten av kapittelet, fikser kropper k_w for hver $w \in W$. I dette avsnittet vil vi konstruere ultrahyhlstret $U(B)$ til en endeliggenerert (som algebra) $k_\natural$-algebra B. Vi vil gjøre konstruksjonen trinnvis, først for polynomalgebraene $k_\natural[x_1, \dots, x_n]$ og deretter for endeliggenererte $k_\natural$-algebraer. Det kan se ut som at det er unødvendig å bruke kropper, men om vi skulle ha generalisert konstruksjonen ville vi trengt at $k_\natural$ var noethersk, for eksempel om k_w-ene var artinske med begrensa lengde ved korollar 5.9.12.

Definisjon 6.2.1. La A være $k_\natural$-algebraen $k_\natural[x_1, \dots, x_n]$. Ultrahylstret $U(A)$ til A er da ultra-$k_\natural$-algebraen gitt ved

$$U(A) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} k_w[x_1, \dots, x_n].$$

Elementer av $U(A)$ kan tenkes på som "ultrapolynomer" med koeffisienter i $k_\natural$ som, i motsetning til vanlige polynomer, også kan ha hypernaturlig grad.

Strukturhomomorfien til $U(A)$, $f \colon k_\natural \to U(A)$ kan tenkes på som en $k_\natural$-algebrahomomorfi. Ved universalegenskapen til $A = k_\natural[x_1, \dots, x_n]$, korollar 5.4.3, la $g \colon A \to U(A)$ være den unike $k_\natural$-algebrahomomorfien som utvider f og sender x_i i A til $(x_i)_\natural$ i $U(A)$ for hver i. Ved notasjonsmisbruk vil vi også kalle $(x_i)_\natural$ for x_i. Notasjonsmisbruken kan motiveres av det at g er en inklusjon:

Proposisjon 6.2.2. Morfien $A \to U(A)$ er injektiv.

Bevis. Skriv $f \colon k_\natural[x_1, \dots, x_n] \to \operatorname{ulim}_{w \in W} k_w[x_1, \dots, x_n]$. Anta at

$$f\left(\sum_i a_{i,\natural} X^i\right) = f\left(\sum_i b_{i,\natural} X^i\right),$$

og uten tap av generalitet er begge disse summene over samme mengde. Da vil $\sum_i a_{i,\natural} X^i = \sum_i b_{i,\natural} X^i$ i $U(A)$, hvor forskjellen mellom elementene av A og de av $U(A)$ skjules av multiindeksnotasjonen. Følgelig må $\sum_i a_{i,w} X^i = \sum_i b_{i,w} X^i$ i $k_w[x_1, \dots, x_n]$ for nesten hver w. For disse w må da $a_{i,w} = b_{i,w}$ for alle i, slik at $a_{i,\natural} = b_{i,\natural}$ og f er injektiv. $\square$

Vi vil tenke på $A \to U(A)$ som en inklusjon. Ultrahylsterkonstruksjonen har en universalegenskap:

Proposisjon 6.2.3. La $A = k_\natural[x_1, \dots, x_n]$. Velg en ultra-$k_\natural$-algebra $C_\natural$ og $k_\natural$-algebrahomomorfi $f\colon A \to C_\natural$. Da kan f bli unikt utvida til en ultra-$k_\natural$-algebrahomomorfi $g\colon U(A) \to C_\natural$.

Bevis. Skriv $A_w = k_w[x_1, \dots, x_n]$.

(i) Eksistens: Velg representatner $c_{i,w} \in C_w$ for $f(x_i) = c_{i,\natural}$ i $C_\natural$. Ved universalegenskapen til hver A_w som ring, korollar 5.4.2, få ringhomomorfier $g_w\colon A_w \to C_w$ som sender $x_i \mapsto c_{i,w}$ og utvider strukturhomomorfiene $k_w \to C_w$. Siden den utvider strukturhomomorfiene blir det hver g_w en k_w-algebrahomomorfi henholdsvis. Siden $A_\natural = U(A)$ vil $g_\natural\colon U(A) \to C_\natural$ og $g_\natural(x_i) = c_{i,\natural} = f(x_i)$, slik at g utvider f.

(ii) Unikhet: Anta at både $g = g_\natural$ og $h = h_\natural$ utvider f. Da vil Łoś gi at for nesten hver w vil $g_w(x_i) = h_w(x_i)$ for hver i, og i tillegg vil begge utvide strukturhomomorfiene $k_w \to C_w$. Ved unikheten i universalegenskapen til A_w (korollar 5.4.2) vil $g_w = h_w$ for disse nesten hver w, slik at $g_\natural = h_\natural$. □

Universalegenskapen over beskriver $U(A)$ opp til en fin isomorfi i Ult-$k_\natural$-alg.

Vi ga en beskrivelse av $U(A)$ som å intuitivt kunne også ha polynomer av hyperendelig grad. Dette viser seg å karakterisere A som delmengde av $U(A)$. Skriv $\deg\colon k_w[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{N}$ for gradsfunksjonen som angir graden til polynomet. Ultraproduktet av disse gir en gradsfunksjon for $U(A)$, nemlig $\deg_\natural\colon U(A) \to \mathbb{N}_\natural$.

Lemma 6.2.4. Et element $f_\natural \in U(A)$ ligger i A (med hensyn på morfien $A \to U(A)$) hvis og bare hvis $\deg_\natural(f_\natural) \in \mathbb{N}$.

Bevis. Skriv $\iota\colon A \to U(A)$ for inklusjonen. ($\Rightarrow$): Siden $f \in A$ (mhp. inklusjonen) vil $f = \sum_i a_{i,\natural} X^i$. Da vil

$$\iota(f) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} \sum_i a_{i,w} X^i.$$

Hver approksimasjon til $\iota(f)$ har samme grad som f, så $\deg(\iota(f)) = \deg(f) \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$): Anta $\deg(f_\natural) = n \in \mathbb{N}$, og skriv $f = \operatorname{ulim}_{w \in W} \sum_i a_{i,w} X^i$. Nesten alle av approksimasjonene $f_w = \sum_i a_{i,w} X^i$ har begrensa grad ved Łoś på påstanden $\deg_\natural(f_\natural) \leq n$, og uten tap av generalitet alle. Da vil $\iota(\operatorname{ulim}_{w \in W} f_w)$ være $f_\natural$, og vi er ferdige. □

Vi skal nå utvide definisjonen til endeliggenererte algebraer, men for dette vil vi benytte en generell dekomponering av endeliggenererte algebraer.

Lemma 6.2.5. Hver endeliggenererte (som algebra) A-algebra er på formen $A[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ for et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A[x_1, \ldots, x_n]$.

Bevis. Anta at B er generert (som A-algebra) av $b_1, \ldots, b_n$. Ved universalegenskapen til polynomalgebraen, korollar 5.4.3, få en A-algebrahomomorfi $f\colon A[x_1, \ldots, x_n] \to A$ som sender $x_i \mapsto b_i$ for hver i. Da er $\mathrm{Im}(f) \subseteq A$ er en underalgebra som inneholder $b_1, \ldots, b_n$, så den er lik A og f er surjektiv. Ved første isomorfiteorem vil $A \simeq A[x_1, \ldots, x_n]/\ker(f)$ som ringer, og ved å sjekke at et visst diagram kommuterer er dette også en isomorfi av A-algebraer. $\square$

Definisjon 6.2.6. La B være en endeliggenerert $k_\natural$-algebra, slik at $B = A/\mathfrak{a}$ for en $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]$. Ringen A er noethersk ved Hilberts basisteorem, så $\mathfrak{a}$ er endeliggenerert, og dermed også $\mathfrak{a}^e \subseteq U(A)$. (lemma 5.5.2). Da er $\mathfrak{a}^e$ intern proposisjon 3.7.13, så $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{b}_\natural$ for $\mathfrak{b}_w \subseteq k_w[x_1, \ldots, x_n]$. Da lar vi ultrahylsteret til B være

$$U(B) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} k_w[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{b}_w.$$

Ved proposisjon 3.7.4 har vi en kanonisk isomorfi av $k_\natural$-algebraer

$$\varphi\colon U(B) \to U(A)/\mathfrak{a}^e.$$

Denne lar oss tenke på $U(B)$ "som" $U(A)/\mathfrak{a}^e$ når vi jobber i $k_\natural$-alg, og med i denne kategorien får vi da tilgang på $U(A)/\mathfrak{a}^e$ sin universalegenskap.

Idealet $\mathfrak{a}$ ligger i kjernen til komposisjonen $A \to U(A) \to U(A)/\mathfrak{a}^e$, så ved proposisjon 5.4.4 blir den unikt faktorisert gjennom projeksjonen $A \to A/\mathfrak{a}$. Ved isomorfien φ (og dets kommuteringsrelasjon), og å huske $B = A/\mathfrak{a}$ får vi en unik morfi $B \to U(B)$ som får følgende diagram til å kommutere:

$$\begin{tikzcd}
U(A) \arrow[r] & U(B) \\
A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

og vi lar dette være vår kanoniske morfi $B \to U(B)$.

Vår definisjon av $U(B)$ er ikke veldefinert, da vil valgte en dekomponering $B \simeq k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$. For å vise unikhet av konstruksjonen opp til en pen isomorfi, viser vi at vi beholder universalegenskapen vi så i proposisjon 6.2.3:

Proposisjon 6.2.7. La B være en endeliggenerert $k_\natural$-algebra. Hver morfi $B \to C_\natural$ av $k_\natural$-algebraer kan bli unikt utvidet til en ultra-$k_\natural$-algebrahomomorfi $U(B) \to C_\natural$.

Bevis. Vi har en dekomponering $B = A/\mathfrak{a}$ for $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]$ og et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Velg en $k_\natural$-algebrahomomorfi $A/\mathfrak{a} \to C_\natural$. Ved å komponere med projeksjonen får vi en morfi $A \to C_\natural$, så ved universaleegenskapen til $U(A)$ får vi en unik ultra-$k_\natural$-algebrahomomorfi $U(A) \to C_\natural$. Siden $\mathfrak{a}$ ligger i kjernen til $A \to U(A) \to C_\natural$, da komposisjonen er lik $A \to A/\mathfrak{a} \to C_\natural$, ligger $\mathfrak{a}^e$ i kjernen til $U(A) \to C_\natural$. Ved universalegenskapen til faktorringen, proposisjon 5.4.4, får vi en unik indusert $U(A)/\mathfrak{a}^e \to C_\natural$. Ved litt kommutativitetsjaging følger unikheten til denne morfien som den eneste som utvider $A \to C_\natural$ mhp. $A \to U(A)/\mathfrak{a}^e$ av unikheten til $U(A) \to C_\natural$ fra universalegenskapen til $U(A)$, proposisjon 6.2.3. Vi kan så bruke den kanoniske isomorfien $U(B) \simeq U(A)/\mathfrak{a}^e$ til å overføre dette til en unik morfi $U(B) \to C_\natural$. For argumentet over sier et kommutativt diagram mer enn tusen ord:

$$\begin{tikzcd}
 & U(A) \arrow[rr] \arrow[rrr, dashed] & & U(A)/\mathfrak{a}^e \arrow[dr, dashed] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr] & & A/\mathfrak{a} \arrow[ur] \arrow[rr] & & C_\natural
\end{tikzcd}$$

Det gjenstår å vise at morfien $g\colon U(A)/\mathfrak{a}^e \to C_\natural$ "er" en morfi i Ult-$k_\natural$-alg ovenfor kun $k_\natural$-alg. Som nevnt over har vi en kanonisk isomorfi

$$\varphi\colon U(A)/\mathfrak{a}^e \xrightarrow{\simeq} \operatorname*{ulim}_{w \in W} A_w/\mathfrak{b}_e$$

hvor $A_w = k_w[x_1, \ldots, x_n]$, for endeliggenererte idealer $\mathfrak{b} \subseteq k_w[x_1, \ldots, x_n]$ for hver $w \in W$. Isomorfien tilfredsstiller $\varphi \circ \pi = \pi_\natural$ hvor $\pi\colon U(A) \to U(A)/\mathfrak{a}^e$ og $\pi_w\colon A_w \to A_w/\mathfrak{b}_w$ er alle projeksjoner. Vår morfi $U(B) \to C_\natural$ er $\varphi^{-1} \circ g$. Vi skal vise at denne er en ultramorfi. Skriv $j_\natural\colon U(A) \to C_\natural$ for den kanoniske morfien. Siden $\mathfrak{a}^e \subseteq \ker(j_\natural)$ vil korollar 3.7.3 gi at $\mathfrak{b}_w \subseteq \ker(j_w)$ for nesten hver w. Ved universalegenskapen til faktorringen, få $h_w\colon A_w/\mathfrak{b}_w \to C_w$ slik at for disse w, så vil $j_w = h_w \circ \pi_w$ hvor $\pi_w\colon A_w \to A_w/\mathfrak{b}_w$. Da gir Łoś at $j_\natural = h_\natural \circ \pi_\natural$. Samtidig har vi $j_\natural = g \circ \pi$, hvor $\pi\colon U(A) \to U(A)/\mathfrak{a}^e$ er projeksjon. Til sammen vil da

$$j_\natural = g \circ \pi = h_\natural \circ \pi_\natural = (h_\natural \circ \varphi) \circ \pi.$$

Ved unikheten i universalegenskapen som lagde g må da $h_\natural \circ \varphi = g$, slik at $h_\natural = \varphi^{-1} \circ g$ og vår morfi $U(B) \to C_\natural$ er en ultramorfi. □

Gitt en morfi $f\colon A \to B$ mellom to endeliggenererte $k_\natural$-algebraer gir universalegenskapen en unik morfi slik at følgende firkant kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
U(A) \arrow[r, dashed] & U(B) \\
A \arrow[u] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Om vi nå velger en representant fra hver isomorfiklasse til $U(A)$ for hver A, silk man også må gjøre for andre funktorielle konstruksjoner definert ved universalegenskaper, for eksempel $\varprojlim$ og produkter, diskutert i digresjon 3.2.3, får vi:

Proposisjon 6.2.8. Ultrahylsteret er en funktor $U\colon \text{FinGen-}k_\natural\text{-alg} \to \text{Ult-}k_\natural\text{-alg}$.

Med synet på U som en funktor kan vi tolke de kanoniske vertikale morfiene i firkanten over som en naturlig transformasjon $\mathrm{id}_{k_\natural\text{-alg}} \to I \circ U$, hvor I er inklusjonen fra Ult-$k_\natural$-alg til $k_\natural$-alg.

Digresjon 6.2.9. Om vi vil ha et diagram for universalegenskapen som skiller mellom vanlige og ultra-morfier nytter det å ikke tenke på Ult-$k_\natural$-alg som en underkategori av $k_\natural$-alg i den forstand at vi har en inklusjon $I\colon \text{Ult-}k_\natural\text{-alg} \to k_\natural\text{-alg}$. Skriv $f\colon A \to I(U(A))$ for den kanoniske morfien. Da lyder universalegenskapen som følger: For hver morfi $g\colon A \to I(C_\natural)$ i $k_\natural$-alg fins en unik morfi $h\colon U(A) \to C_\natural$ i Ult-$k_\natural$-alg slik at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
I(U(A)) \arrow[rr, "\exists! I(h)"] & & I(C_\natural) \\
& A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Inspirert av diagrammet kan vi lage kanoniske funksjoner

$$\mathrm{Hom}_{\text{Ult-}k_\natural\text{-alg}}(U(A), C_\natural) \to \mathrm{Hom}_{k_\natural\text{-alg}}(A, I(C_\natural))$$

som sender $h \mapsto I(h) \circ f$. Ved universalegenskapen er de alle umiddelbart bijektive. Videre er disse sammen naturlige i både A og $C_\natural$. Det kan se ut som at vi har funnet en venstreadjungert til inklusjonen $I\colon \text{Ult-}k_\natural\text{-alg} \to k_\natural\text{-alg}$, men det har vi ikke. Vi har kun vist eksistensen av $U(A)$ for endeliggenererte $k_\natural$-algebraer A, ikke alle. For oss nå er dette isteden en "nesten-adjungert" til inklusjonen. Det hadde vært fint om vi visste om et objekt med samme universalegenskap som $U(A)$ fantes for hver A, men det er ikke hensiktsmessig for denne oppgaven å utforske problemstillingen.

Her er vår grunn til hvorfor vi er interesserte i ultrahylstre:

Proposisjon 6.2.10. La A være en endeliggenerert $k_\natural$-algebra. Da er den kanoniske morfien $A \to U(A)$ trofast flat. Spesielt er den injektiv og tilfredsstiller $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ for hvert ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$.

Bevis. Utelatt. Se [41, thm. 4.2.2]. Argumentet der bruker maskineri vi ikke har tilgjengelig her. Det siste er ved proposisjon 5.6.5. $\square$

De neste to resultatene vil vi trenge for teorem 6.3.4.

Lemma 6.2.11. La A være en endeliggenerert $k_\natural$-algebra, og $\mathfrak{a} \subseteq A$ et ideal. Da har vi en isomorfi $U(A)/\mathfrak{a}^e \simeq U(A/\mathfrak{a})$ av $k_\natural$-algebraer.

Bevis. Vi har $A = k_\natural[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{b}$ for en n og et ideal $\mathfrak{b} \subseteq k[x_1, \dots x_n]$. Siden A er noethersk er $\mathfrak{b}$ endeliggenerert og dermed intern. Velg representanter $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_\natural$. Da vil $\mathfrak{a}$ tilsvare et ideal $\mathfrak{e} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ som inneholder $\mathfrak{b}$ og slik at $\mathfrak{e}^e = \mathfrak{a}$. Som over, velg også representanter $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_\natural$ og $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\natural$. Ved endeliggenererthet, lemma 5.5.2 og proposisjon 3.7.6, kan man sjekke at $\mathfrak{e}_w^e = \mathfrak{a}_w$ for nesten hver w. Ved lemma 5.5.3 vil $A/\mathfrak{a} = (k_\natural[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{b})/\mathfrak{e}^e \simeq k_\natural[x_1, \dots, x_n]/(\mathfrak{e} + \mathfrak{b})$. Videre, ved en tilsvarende teknikk vil $\operatorname{ulim}_{w\in W} \mathfrak{e}_w^e = \mathfrak{a}^e$ hvor $\mathfrak{e}_w^e$ er med hensyn på $k_w[x_1, \dots, x_n] \to k_w[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{b}_w$ og $\mathfrak{a}^e$ med hensyn på $A \to U(A)$.

Ved definisjonen av $U(A/\mathfrak{a})$ har den en representant

$$\begin{aligned} U(A/\mathfrak{a}) &= \operatorname*{ulim}_{w\in W} k_w[x_1, \dots, x_n]/(\mathfrak{e}_w + \mathfrak{b}_w) \simeq \operatorname*{ulim}_{w\in W} (k_w[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{b}_w)/\mathfrak{e}_w^e \\ &\simeq \left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} k_w[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{b}_w\right) \Big/ \left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} \mathfrak{e}_w^e\right) = U(A)/\mathfrak{a}^e \end{aligned}$$

ved lemma 5.5.3 og proposisjon 3.7.4, og vi er ferdige. $\square$

Proposisjon 6.2.12. La A være en endeliggenerert $k_\natural$-algebra. Da er A et integritetsområde hvis og bare hvis $U(A)$ er det. Mer generelt er et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ prim hvis og bare hvis utvidelsen $\mathfrak{a}^e \subseteq U(A)$ er det.

Bevis. For den ene implikasjonen, om $\mathfrak{a}^e \subseteq U(A)$ er prim, så er kontraksjonen $\mathfrak{a}^{ec}$ det, men $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ ved trofast flathet (proposisjon 6.2.10), og vi har den ene implikasjonen. Den andre implikasjonen er utelatt; se [41, thm. 4.3.4], eller originalkilden [13, thm. 2.5] for et annet argument. Gitt den første påstanden følger den andre ved å se på $A/\mathfrak{a}$ og å bruke lemma 6.2.11. □

6.3 Uniforme begrensninger

Vi vil nå anvende ultraprodukter til å vise de lovede resultatene om polynomringer over kropper. De ble alle opprinnelig vist med standarde teknikker; ikkestandarde argumenter har kommet senere. For mer om historien til resultatene, se [14, avs. 7]. Våre bevis for de to første teoremene vil være etter [41, kap. 4.4], som selv følger [13].

Teorem 6.3.1. Velg $d, n \in \mathbb{N}$. Da fins $b \in \mathbb{N}$ slik at for hver kropp k, tall $s \in \mathbb{N}$ og elementer $f_0, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ med grad $\leq d$ slik at $f_0 \in (f_1, \ldots, f_s)$, så fins $g_1, \ldots, g_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ av grad $\leq b$ slik at $f_0 = g_1 f_1 + \cdots + g_s f_s$.

Vi trenger et lemma.

Lemma 6.3.2. Velg en kropp k. Hvert ideal i $k[x_1, \ldots, x_n]$ som kan bli generert av polynomer med grad $\leq d$ kan bli generert av $\binom{d+n}{n}$ polynomer med grad $\leq d$.

Bevis. Ved kombinatorikk kan man telle seg fram til at det er $\binom{d+n}{n} = \binom{d+n}{d}$ monomer i $k[x_1, \ldots, x_n]$ med grad $\leq d$. La $\mathfrak{a}$ være et ideal som kan bli generert av polynomer $\{f_i\}_{i \in I}$ av grad $\leq d$. Uten tap av generalitet er I endelig: Siden $k[x_1, \ldots, x_n]$ er noethersk kan man velge et maksimalt element i mengden av alle idealer generert av alle endelige delmengder av $\{f_i\}_{i \in I}$, og dette idealet må være $\mathfrak{a}$. Så $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_s)$, hvor hver f_i har grad $\leq d$.

Fikser en total ordning $<$ på mengden av disse $\binom{d+n}{n}$ monomene. For hver $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, med grad $\leq d$, la $\ell(f)$ være den største monomen (uten å ta hensyn til koeffisenter) i f i henhold til $<$, og $\ell(0) = -1$.

Vi vil nå trinnvis redusere ℓ-verdiene til generatorene $f_1, \ldots, f_s$. Anta at $\ell(f_i) = \ell(f_j)$ for $f_i, f_j \neq 0$. Skriv a_i og a_j for koeffisientnee til monomet $\ell(f_i) = \ell(f_j)$ i henholdsvis f_i og f_j, som er begge ikkenull da f_i og f_j er det. Da vil $f_j - \frac{a_j}{a_i} f_i$ ikke ha monomet $\ell(f_j)$, og siden $\ell(f_i) = \ell(f_j)$ er det største monomet til både f_i og f_j må $\ell(f_j - \frac{a_j}{a_i}{}_i) < \ell(f_j)$. Erstatt nå f_j med $f_j - \frac{a_j}{a_i} f_i$.

Denne prossessen vil fjerne et monom fra mengden av monomer til de opprinnelige generatorene $f_1, \ldots, f_s$, telt med multiplisitet. Denne er endelig, så om vi gjentar prossessen nok ganger vil den slutte. Da ender vi opp i en situasjon hvor $\ell(f_i) \neq \ell(f_j)$ for alle ikkenull f_i, f_j med $i \neq j$. Det er høyst $\binom{d+n}{n}$ slike polynomer, så ved å fjerne nullene i $f_1, \ldots, f_s$ får vi at $\mathfrak{a}$ kan bli generert av $\leq \binom{d+n}{n}$ polynomer av grad $\leq d$, og ved å legge til nuller ved behov er vi ferdige. □

Bevis av teorem 6.3.1. Kvantorrekkefølgen til det vi skal vise er følgende:

$$(\forall d, n \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})(\forall k \text{ kropp})(\exists s \in \mathbb{N})(\forall f_0, \ldots, f_s)(\exists g_1, \ldots, g_s)(\cdots)$$

Anta, for motsigelse, at påstanden er feil. Da blir kvantorrekkefølgen

$$(\exists d, n \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N})(\exists k \text{ kropp})(\forall s \in \mathbb{N})(\exists f_0, \ldots, f_s)(\forall g_1, \ldots, g_s)(\cdots)$$

så få d og n. Før vi velger polynomer kan vi uten tap av generalitet ta samme s for hver b. Det er fordi om vi har $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ med grad $\leq d$ vil lemma 6.3.2 gjelde for idealet $(f_0, \ldots, f_s)$, så vi kan erstatte disse generatorene med $s' = \binom{d+n}{n}$ andre generatorer, fortsatt med grad $\leq d$.

Følgelig får vi for hver $w \in \mathbb{N}$ en kropp k_w og elementer $f_{0,w}, \ldots, f_{s,w}$ slik at

(i) Hver $f_{i,w}$ har grad $\leq d$, og

(ii) $f_{0,w} \in (f_{1,w}, \ldots, f_{s,w})$, altså $f_{0,w}$ er en lineærkombinasjon av $f_{i,w}$-ene, og

(iii) Om $f_{0,w} = g_1 f_{1,w} + \ldots + g_s f_{s,w}$ for $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, så vil minst én g_i ha grad $> w$.

Vi går nå til ultraproduktet, med indeksmengde $W = \mathbb{N}$. Skriv $A_w = k_w[x_1, \ldots, x_n]$ og $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]$. Da vil $U(A) = A_\natural$. Ved (i) og lemma 6.2.4 ligger $f_{i,\natural}$-ene i A, ikke kun $U(A)$. La $\mathfrak{a} \subseteq A$ være idealet generert av $f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}$. Da vil $\mathfrak{a}^e \subseteq U(A)$ per definisjon 5.5.1 være idealet i $U(A)$ generert av $f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}$. Ved proposisjon 3.7.6 på (ii) vil

$$f_{0,\natural} \in (f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}) = \mathfrak{a}^e,$$

hvor idealet til venstre er generert i $U(A)$. Siden $f_{0,\natural}$ ligger i A vil trofast flathet av inklusjonen $A \to U(A)$ (proposisjon 6.2.10) gi $f_{0,\natural} \in \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$. Ved definisjonen av $\mathfrak{a}$ får vi en lineærkombinasjon

$$f_{0,\natural} = g_1 f_{1,\natural} + \cdots + g_s f_{s,\natural} \tag{1}$$

for $g_i \in A$. Motsigelsen kommer nå av å sammenlikne (1) med (iii), som vi kan se på to måter. Ved Łoś på (iii) vil minst én av g_i-ene ha grad større enn det ubegrensede hypernaturlige tallet $\omega = \operatorname{ulim}_{n\in\mathbb{N}} n$. Det er umulig, da elementene av A har endelig grad ved lemma 6.2.4. Alternativt kan man ta Łoś på (1) og få lineærkombinasjoner $f_{0,w} = g_{1,w}f_{1,w} + \cdots + g_{s,w}f_{s,w}$ for nesten hver $w \in \mathbb{N}$. Videre har vi en uniform begrensning $\deg(g_{i,w}) \leq m$ for hver i for nesten hver w. Man kan nå la w bli tilstrekkelig stor, som vil motsi (iii). □

Kommentar 6.3.3. For et alternativt bevis, se [14, thm. 7.5].

Følgende resultat lar oss teste når visse idealer er primidealer ved å teste primalitet på elementer meg begrensa grad. Beviset er i samme stil som det over.

Teorem 6.3.4. Velg $d, n \in \mathbb{N}$. Da fins $b \in \mathbb{N}$ slik at for hver kropp k og hvert ideal $\mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ generert av polynomer av grad $\leq d$, så er $\mathfrak{a}$ et primideal hvis og bare hvis for alle polynomer $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ av grad $\leq b$, så vil $fg \in \mathfrak{a}$ implisere at $f \in \mathfrak{a}$ eller $g \in \mathfrak{a}$.

Bevis. Den ene implikasjonen i (den andre) ekvivalensen er per definisjon, så vi slipper å vise det. Vi gjør motsigelse. Denne gangen er kvantorrekkefølgen

$$(\forall d, n \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})(\forall k \text{ kropp})(\forall \mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n] \text{ s.a. } \cdots)(\mathfrak{a} \text{ prim } \longleftarrow (\cdots))$$

så for $d, n \in \mathbb{N}$, få $b \in \mathbb{N}$ slik at

$$(\forall b \in \mathbb{N})(\exists k \text{ kropp})(\exists \mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n] \text{ s.a. } (\cdots))(\mathfrak{a} \text{ ikke prim og } (\cdots)).$$

Altså, for hver $w \in \mathbb{N}$ får vi et ideal $\mathfrak{a}_w \subseteq k_w[x_1, \ldots, x_n]$ slik at

(i) $\mathfrak{a}_w$ er generert av polynomer av grad $\leq d$,

(ii) $\mathfrak{a}_w$ er ikke et primideal, og

(iii) For $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ av grad $\leq w$ vil $fg \in \mathfrak{a}_w$ implisere $f \in \mathfrak{a}_w$ eller $g \in \mathfrak{a}_w$.

Skriv $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]$. Ved lemma 6.3.2 kan vi ta hver $\mathfrak{a}_w$ til å ha samme antall generatorer, si $\mathfrak{a}_w = (f_{1,w}, \ldots, f_{s,w})$. Vi går nå til A og $U(A)$. Siden hver $f_{i,w}$ har grad $\leq d$ vil $f_{i,\natural}$ ligge i A ved lemma 6.2.4. La nå $\mathfrak{a} = (f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}) \subseteq A$. være idealet generert av disse ultraproduktene i A.

Påstand. $\mathfrak{a}^e = (f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}) = \mathfrak{a}_\natural$, hvor det midterste idealet er generert i $U(A)$.

Den første likheten er ved lemma 5.5.2, og den andre ved proposisjon 3.7.6.

Påstand. $\mathfrak{a}$ er et primideal.

Ved Łoś på (iii) får vi at for hver $f, g \in U(A)$ av grad $\leq \omega = \operatorname{ulim}_{n \in \mathbb{N}} n$, så vil $fg \in \mathfrak{a}_\natural$ implisere $f \in \mathfrak{a}_\natural$ eller $g \in \mathfrak{a}_\natural$. Hver $f, g \in A$ har grad $\leq \omega$, da dette er et ubegrensa hypernaturlig tall, og elementene av A har endelig grad ved lemma 6.2.4. Følgelig, om $fg \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}_\natural$ vil $f \in \mathfrak{a}_\natural$ eller $g \in \mathfrak{a}_\natural$. Uten tap av generalitet velger vi den første. Da vil $f \in \mathfrak{a}_\natural^c = \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ ved trofast flathet (proposisjon 6.2.10), så $\mathfrak{a}$ er et primideal.

Vi er nå i en situasjon hvor $\mathfrak{a}$ er et primideal, men ikke $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}_\natural$ ved proposisjon 3.7.9. Dette motsier proposisjon 6.2.12, og vi er ferdige. □

Det tredje og siste "uniforme begrensninger"-resultatet vi vil se på, hvis formulering er hentet fra [14, thm. 7.4], er et som gir en skranke til Hilberts basisteorem.

Teorem 6.3.5. Velg $d, n \in \mathbb{N}$. Da fins $m \in \mathbb{N}$ slik at for hver kropp k vil hver oppadgående kjede av idealer i $k[x_1, \ldots, x_n]$ generert av polynomer av grad $\leq d$ ha lengde $\leq m$, dvs. $\leq m$ ekte inklusjoner.

Bevis. Vi gjør samme type argument som i de to foregående teoremene. Anta, for motsigelse, at påstanden er usann. La $W = \mathbb{N}$. Ved samme analyse av kvantorene som over, få $d, n \in \mathbb{N}$, og for hver $w \in W$, kropper k_w og idealer $\mathfrak{a}_{i,w} = (f_{1,i,w}, \ldots, f_{s,i,w}) \subseteq k_w[x_1, \ldots, x_n]$ slik at

(i) Hver $f_{j,i,w}$ har grad $\leq d$,

(ii) Idealene danner en kjede $\mathfrak{a}_{1,w} \subseteq \mathfrak{a}_{2,w} \subseteq \mathfrak{a}_{3,w} \subseteq \cdots$ for hver $w \in W$, og

(iii) For hver w vil den ovennevnte kjeden i $k_w[x_1, \ldots, x_n]$ ha $> w$ ekte inklusjoner.

Her bruker vi lemma 6.3.2 for å få en uniform begrensning s på antallet generatorer til idealene. Ved å fjerne overflødige idealer antar vi uten tap av generalitet at de første w inklusjonene i (ii) er alle ekte for hver w. Skriv $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]$ slik at $U(A) = \operatorname{ulim}_{w \in W} k_w[x_1, \ldots, x_n]$. Ved Łoś på punktene (i) og (ii) har vi en kjede

$$\mathfrak{a}_{1,\natural} \subset \mathfrak{a}_{2,\natural} \subset \mathfrak{a}_{3,\natural} \subset \cdots \tag{2}$$

i $U(A)$, med alle inklusjonene ekte. Ved Łoś på (i) med lemma 6.2.4 viser det seg at hver $f_{j,i,\natural}$ ligger i A, ovenfor kun i $U(A)$. La nå $\mathfrak{b}_i = (f_{1,i,\natural}, \ldots, f_{s,i,\natural})$

være idealet generert i A. Ved lemma 5.5.2 vil $\mathfrak{b}^e = \mathfrak{a}_{i,\natural}$, så trofast flathet (proposisjon 6.2.10) gir

$$\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_i^{ec} = \mathfrak{a}_{i,\natural}^c \tag{3}$$

for hver i. Ved monotonisitet av kontraksjon og (3) får vi da en kjede $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{b}_3 \subseteq \cdots$ i A. Siden A er noethersk vil $\mathfrak{b}_N = \mathfrak{b}_{N+1}$ for en N, slik at (3) gir at $\mathfrak{a}_{N,\natural} = \mathfrak{a}_{N+1,\natural}$, som motsier (2). $\square$

Kapittel 7

Kataprodukter

Et av problemene med ultraprodukter er at vi ikke kan forvente at de er noetherske. I dette kapittelet vil vi se på én mulig måte å håndtere dette problemet, kataproduktet, som vi vil definere for noetherske lokale ringer. Det vil være en viss faktorring av det vanlige ultraproduktet. Ved å se på kataproduktet vil vi miste Łoś' teorem, men til gjengjeld får vi en konstruksjon som ofte bevarer egenskaper ultraproduktet ikke kan, som noetherskhet. Som faktorring vil kataproduktet likevel være nært relatert ultraproduktet, så vårt tidligere arbeid var ikke forgjeves. I dette kapittelet vil vi nært følge [41].

7.1 Problemet

Før vi definerer kataprodukter, la oss illustrere "problemet". I korollar 5.9.12 så vi et relativt snevert tilfelle hvor ultraproduktet ble noethersk. La oss nå se på det motsatte.

Proposisjon 7.1.1. Velg indeksmendge $W = \mathbb{N}$. Anta at $(A_w, \mathfrak{m}_w)$ er lokale ringer med hver $\mathfrak{m}_w$ ikke nilpotent, og med en uniform begrensning $\mu(\mathfrak{m}_w) \leq n$ for en n og hver w. Da er $(A_\natural, \mathfrak{m}_\natural)$ lokal og $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n \neq (0)$, slik at $A_\natural$ ikke er noethersk.

Bevis. Lokalitet er ved proposisjon 5.8.1. Velg $0 \neq a_w \in \mathfrak{m}_w^w$ for hver w. For hver $n \geq w$ vil $a_w \in \mathfrak{m}_w^n$, så $a_w \in \mathfrak{m}_w^n$ holder for nesten hver w. Ved Łoś og korollar 3.7.8 vil $a_\natural \in \operatorname{ulim}_{w\in W} \mathfrak{m}_w^n = \mathfrak{m}_\natural^n$ for hver n, så $\mathfrak{a}_\natural$ er et ikkenull element i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n$. Om $A_\natural$ var noethersk ville Krulls snitteorem [30, kor. 10.18] ha gitt at dette snittet var null, så $A_\natural$ kan ikke være noethersk. $\square$

Kommentar 7.1.2. En noethersk lokal ring er artinsk hvis og bare hvis det maksimale idealet er nilpotent [30, prop. 8.6], så antagelsen om at de maksimale ikke er nilpotente over sier kun at A_w-ene ikke er artinske.

Proposisjonen over er et stort problem for ultraproduktenes plan om å ta over verden; ikkenoetherske ringer er tross alt skumlere for algebraikere enn epler er for engelske leger.

7.2 Løsninga

Definisjon 7.2.1. Anta at $(A_w, \mathfrak{m}_w)$ er noetherske lokale ringer for nesten hver w. Da er kataproduktet $A_\sharp$ definert til å være faktorringen

$$A_\sharp = A_\natural \Big/ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n.$$

Advarsel. Vær oppmerksom på forskjellen mellom symbolene $\natural$, som brukes for ultraprodukter, og $\sharp$, som brukes for kataprodukter.

Som vanlig er en en hvor alle A_w-ene er like. Som faktorring av ultraproduktet får vi en projeksjon $A_\natural \to A_\sharp$. I katapotenstilfellet vil vi da ha homomorfier $A \to A_\natural \to A_\sharp$. Før vi kan gi hovedresultatet til kataprodukter trenger vi et nytt adjektiv for ultrafiltre.

Definisjon 7.2.2. Et ultrafilter $\mathcal{F}$ på en uendelig mengde W er *tellbart ukomplett* om det fins en funksjon $f\colon W \to \mathbb{N}$ slik at for hver $n \in \mathbb{N}$ vil mengden $\{w \in W \mid f(w) \geq n\}$ bli fanget av $\mathcal{F}$.

Merk at å være tellbart ukomplett er en sterkere egenskap enn å være fri. Hvert frie ultrafilter på en tellbar uendelig mengde er tellbart ukomplett, da hver bijeksjon $W \to \mathbb{N}$ duger.

Lemma 7.2.3. La W være en uendelig mengde. Da fins et tellbart ukomplett fritt ultrafilter $\mathcal{F}$ på W.

Bevis. Velg parvis disjunkte, ikketomme $U_n \subseteq W$ for $n \in \mathbb{N}$ slik at W er lik unionen av U_n-ene. La nå

$$A = \{U_n \subseteq W \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{B \subseteq W \mid B \text{ er koendelig}\}, \text{ og}$$
$$F = \{B^c \subseteq W \mid B \in A\}.$$

Vi skal verifisere at F har endelig snitt-egenskapen. Vi viser først at ingen endelig union av elementer av A er hele W. Siden en endelig union av endelig mengder er endelig, og ved å muligens gjøre unionen større, kan vi anta uten tap av generalitet at vi har en endelig union $\bigcup_{i=1}^n U_i \cup B$ for en endelig mengde B. For hver $m > n$, velg $x_m \in U_m$. Da vil $x_m \notin \bigcup_{i=1}^n U_i$. Siden det er uendelig mange x_m kan ikke B inneholde alle, så minst én x_m ligger ikke i denne endelige unionen.

Ved å oversette påstanden til å handle om F får vi at den tilfredsstiller endelig snitt-egenskapen, slik at vi kan utvide F til et ultrafilter $\mathcal{F}$ på W (lemma 3.10.1 og teorem 2.1.11). Dette ultrafilteret må være fritt, siden den fanger alle koendelige mengder. Vi kan nå definere $f\colon W \to \mathbb{N}$ som følger: For $w \in W$, la $f(w)$ være den unike $n \in \mathbb{N}$ slik at $w \in U_n$. Da vil $\{w \in W \mid f(w) \leq n\} = U_1 \cup \dots \cup U_n$, som er liten da hver U_i er liten i $\mathcal{F}$ og lemma 2.1.6, og vi er ferdige. □

Hovedegenskapen ved kataprodukter er følgende:

Teorem 7.2.4. Anta at $(A_w, \mathfrak{m}_w)$ er noetherske lokale med en uniform begrensning $\mu(\mathfrak{m}_w) \leq n$ for en n og hver w. Anta videre at ultrafilteret $\mathcal{F}$ på W er tellbart ukomplett. Da er $A_\sharp$ komplett og noethersk lokal.

Bevis. Utelatt. Se [41, thm. 8.1.4, komm. 8.1.5]. □

Kommentar 7.2.5. Å være komplett betyr at den kanoniske ringhomomorfien $A_\sharp \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_\sharp/\mathfrak{m}_\sharp^n$ er en isomorfi, hvor $\mathfrak{m}_\sharp$ er det maksimale idealet til $A_\sharp$ og morfiene er de kanoniske. Denne grensen kalles kompletteringa til $A_\sharp$ i idealet $\mathfrak{m}_\sharp$. Kjernen til ringhomomorfien er $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\sharp^n$, så injektivitet er ekvivalent med at denne er null. Etter at man har definert Caucyfølger og konvergente følger i $A_\sharp$ med hensyn på $\mathfrak{m}_\sharp$ vil surjektivitet være ekvivalent med påstanden om at hver Cauchyfølge (mhp. $\mathfrak{m}_\sharp$) konvergerer (mhp. $\mathfrak{m}_\sharp$). For mer om komplettering, se [32, sek. 8] og [10, kap. 7].

Et eksempel på en fin type ring vi ikke kan forvente at blir bevart av ultraprodukter er det å være en diskret valuasjonsring (DVR), en spesiell klasse noetherske ringer, da å være en DVR tilsynelatende ikke er en førsteordensegenskap. Vi vil nå vise at kataprodukter bevarer denne egenskapen. Beviset under er inspirert av [41], men gjøres på en annen måte. Med dette argumentet viser vi i tillegg at idealet man modder ut for å konstruere kataproduktet er eksternt.

Proposisjon 7.2.6. Velg DVR-er A_w for hver w, og anta at paret $(W, \mathcal{F})$ tilfredsstiller $\mathbb{N} \neq \mathbb{N}_\natural$. Da er kataproduktet $A_\sharp$ også en DVR. Videre er idealet $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n$ i ultraproduktet $A_\natural$ eksternt og uendeliggenerert.

Bevis. Husk fra digresjon 4.1.3 at betingelsen på $\mathcal{F}$ tilfredsstilles om ultrafilteret er tellbart ukomplett. Velg diskrete valuasjoner $v_w\colon A_w \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, og maksimale idealer med generatorer $\mathfrak{m}_w = (\pi_w) \subseteq A_w$. Da er $A_\natural$ lokal med $\mathfrak{m}_\natural = (\pi_\natural)$ som maksimale ideal (proposisjoner 3.7.6 og 5.8.1). Domenet til ultraproduktet $v_\natural$ er $\operatorname{ulim}_{w\in W}(\operatorname{Frac}(A_w) \smallsetminus \{0\}) = (\operatorname{ulim}_{w\in W} \operatorname{Frac}(A_w)) \smallsetminus \{0\}$, ved korollar 3.2.14. Følgelig er $v_\natural$ definert for hver $x_\natural \neq 0$ i $A_\natural$. (Denne mengden er også i kanonisk bijeksjon med $\operatorname{Frac}(A_\natural) \smallsetminus \{0\}$ ved proposisjon 5.8.3.)

Påstand. $\mathfrak{a} = \{0\} \cup \{x_\natural \in A_\natural \smallsetminus \{0\} \mid v_\natural(x_\natural) \in \mathbb{N}_\natural^\infty\}$.

($\subseteq$): Velg $0 \neq a_\natural \in \mathfrak{a} = (\pi_\natural)$, og anta for motsigelse at $v_\natural(a_\natural) \in \mathbb{N}$. Da har vi en uniform begrensning $v_w(a_w) = n = v_\natural(a_\natural)$ for nesten hver w, slik at $(a_w) = (\pi_w^n) = \mathfrak{m}_w^n$ ved proposisjon 5.7.4, for disse samme nesten hver w. Ved proposisjon 3.7.6 vil da $\mathfrak{a} = (a_\natural) = (\pi_\natural^n) = \mathfrak{m}_\natural^n$. Da må $\mathfrak{m}_\natural^{n+1} = \mathfrak{m}_\natural^n$. Siden idealene er endeliggenererte vil korollar 3.7.8 gi at $\mathfrak{m}_w^{n+1} = \mathfrak{m}_w^n$ i A_w for nesten hver w, og spesielt minst én w. Dette motsier det at A_w-ene er DVR-er; elementene som genererer hver $\mathfrak{m}_w^t$ har valuasjon t, slik at disse to idealene ikke kan være like.

(Med mer maskineri kan man enklere se dette med Nakayams lemma i $A_\natural$ eller en A_w, og det at DVR-er ikke er kropper, og følgelig også $A_\natural$ ved Łoś, slik at $\mathfrak{m}_w = (0)$ og $\mathfrak{m}_\natural = (0)$ er begge umulige.)

($\supseteq$): Anta at $v_\natural(a_\natural) \in \mathbb{N}_\natural^\infty$. For hver $n \in \mathbb{N}$ vil da $v_w(a_w) \geq n$ for nesten hver w, slik at $a_w \in \mathfrak{m}_w^n$ ved proposisjon 5.7.4, og korollar 3.7.8 med Łoś gir $a_\natural \in \mathfrak{m}_\natural^n$. Siden dette var for hver n vil $a_\natural \in \mathfrak{a}$.

Påstand. $\mathfrak{a}$ er et primideal og $A_\sharp$ er en DVR.

Anta at $x_\natural y_\natural \in \mathfrak{a}$. Da vil $v_\natural(x_\natural) + v_\natural(y_\natural) = v_\natural(x_\natural y_\natural) \in \mathbb{N}_\natural^\infty$ ved formelen over, så minst én av $v_\natural(x_\natural)$ og $v_\natural(y_\natural)$ må ligge i $\mathbb{N}_\natural^\infty$, slik at minst én av dem ligger i $\mathfrak{a}$ ved formelen, og $\mathfrak{a}$ er et primideal.

For å vise at $A_\sharp$ er en DVR, skriv $\mathfrak{m}_\sharp = \mathfrak{m}_\natural^e$ for det (unike) maksimale idealet til $A_\sharp$, hvor utvidelsen er med hensyn på den kanoniske $A_\natural \to A_\sharp$. Ved lemma 5.5.4 vil $\mathfrak{m}_\sharp^n = (\mathfrak{m}_\natural^n)^e$, og man kan regne ut at $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\sharp^n = (0)$. Vi kan nå bruke lemma 5.7.5 til å konkludere at $A_\sharp$ er en DVR.

Påstand. $\mathfrak{a}$ er ekstern og ikke endeliggenerert.

Vi vil gjøre et "ikkestandard" Łoś-argument som kan minne om hvordan vi brukte teoremet i kapittel 4 – med mer avanserte setninger og uten å se på approksimasjoner. For et annet argument for kun uendeliggenerert-delen, se [41, s. 2.4.19].

Husk at hvert endeliggenererte ideal er internt (proposisjon 3.7.13), så det er nok å vise at $\mathfrak{a}$ er ekstern. Intuitivt blir dette antydet til av formelen for $\mathfrak{a}$ over, da $\mathbb{N}_\natural^\infty$ er en ekstern delmengde av $\mathbb{N}_\natural$ (proposisjon 3.8.3). Proposisjon 5.7.4 sier at hvert ideal i en DVR A med valuasjon v er på formen $\{x \in A \mid v(x) \geq n\}$ for $n \in \mathbb{N}_0$. Ved Łoś på denne påstanden anvendt på A_w-ene (og mye om og men om man vil sjekke detaljene), vil hvert ikketrivielle interne ideal i $A_\natural$ være på formen $\{x_\natural \in A_\natural \mid v_\natural(x_\natural) \geq N\}$ for $N \in \mathbb{N}_\natural$. Men $\mathfrak{a}$ er ikke på denne formen! For hver $N \in \mathbb{N}_\natural^\infty$ kan vi ved surjektivitet av $v_\natural$ få en $x_\natural \in A_\natural$ med valuasjon N, som må ligge i $\mathfrak{a}$. Følgelig kan ikke $\mathfrak{a}$ være på den ovennevnte formen, så $\mathfrak{a}$ er ekstern og uendeliggenerert. □

Kommentar 7.2.7. Betingelsen $\mathbb{N}_\natural \neq \mathbb{N}$ trengs for å sørge for at $\mathfrak{a}$ ikke er nullidealet, hvor andre del av konklusjonen ikke kan gjelde. Vi får at $A_\natural$ er en DVR uansett, se for eksempel beviset i det over var inspirert av.

Det at $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n$ ikke er endeliggenerert viser at ultraproduktet ikke kan være noethersk, som viser at selv i dette veldig fine tilfellet, så bevarer ikke ultraproduktet noetherskhet. Videre viser det at ultraproduktet $A_\natural$ i dette tilfellet ikke er en DVR.

Kataproduktet har et trofast flathets-resultat som tilsvarer det i eksempel 5.6.6:

Teorem 7.2.8. Anta at A er en noethersk lokal ring. Da er den kanoniske homomorfien inn til kataproduktet $A \to A_\sharp$ trofast flat.

Bevis. Utelatt. Se [41, thm. 8.1.15]. □

7.3 Funktorielt syn

Som for ultraproduktet kan man se på kataproduktet som en funktoriell konstruksjon. Husk at en ringhomomorfi $f\colon (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ mellom lokale ringer er lokal om $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$. Med disse som morfier danner de lokale ringene en kategori vi vil kalle LCRing. Vi vil også skrive NLCRing for underkategorien av LCRing bestående av de noetherske lokale ringene.

Anta at vi er gitt noetherske lokale ringer $(A_w, \mathfrak{m}_w)$ og $(B_w, \mathfrak{n}_w)$, med lokale ringhomomorfier $f_w \colon A_w \to B_w$. Det induserer en morfi mellom ultraproduktene $f_\natural \colon A_\natural \to B_\natural$. Ved Łoś på at hver f_w er lokal er $f_\natural$ selv lokal. Ved å blant annet bruke lemma 5.5.4 vil lokalitet av $f_\natural$ implisere at homomorfien

$$A_\natural \longrightarrow B_\natural \longrightarrow B_\natural \Big/ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{n}_\natural^n$$

har $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n$ i sin kjerne, så ved universalegenskapen til faktorringen (proposisjon 5.4.4) får vi en unik $f_\sharp \colon A_\sharp \to B_\sharp$ slik at følgende firkant kommuterer:

$$\begin{array}{ccc} A_\natural & \xrightarrow{f_\natural} & B_\natural \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_\sharp & \xrightarrow{f_\sharp} & B_\sharp \end{array}$$

Vi får:

Proposisjon 7.3.1. Kataproduktet er en funktor $\mathrm{NLCRing}^W \to \mathrm{LCRing}$. Videre, om filteret $\mathcal{F}$ er tellbart ukomplett er katapotensen en endofunktor $\mathrm{NLCRing} \to \mathrm{NLCRing}$.

Bevis. Det andre følger fra det første ved å prekomponere med diagonalfunktoren $\Delta \colon \mathrm{NLCRing} \to \mathrm{NLCRing}^W$, og å bruke teorem 7.2.4. Funktorialitet i første del følger av unikheten av den induserte $f_\sharp$ i konstruksjonen over, og lokalitet av den følger av det at ultraprodukt-homomorfien $f_\natural \colon A_\natural \to B_\natural$ er lokal, samt kommutering av firkanten. $\square$

Kapittel 8

Veien videre

Selv om denne oppgavens slutt nærmer seg, så betyr det ikke at fortellinga må slutte. Ultraproduktets – hovedkarakterens – reise om å nå verdensherredømme vil fortsette; vi vil bare slutte å være fortellerstemmen. I dette siste kapittelet vil vi skissere noen temaer vi ikke har sett på i denne oppgaven, og henvise til videre lesning for de interesserte.

8.1 Ultraprodukter av andre strukrurer

Ved Łoś vil ultraprodukter av objekter i en gitt førsteordensstruktur naturlig være samme type førsteordensstruktur. Man kan likevel få interessant teori om man prøver å ta ultraprodukter av andre typer strukturer, muligens ved å justere definisjonen litt. For eksempel topologiske rom (se [4]) og Banachrom (se [19]).

Man kan også definere et ultraprodukt av kategorier. Gitt kategorier $\mathcal{C}_w$ for $w \in W$ kan man for eksempel definere et ultraprodukt $\mathcal{C}_\natural = \operatorname{ulim}_{w\in W} \mathcal{C}_w$ til å ha objekter

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\natural) = \coprod_{U\in\mathcal{F}} \prod_{w\in U} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_w),$$

og morfier

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\natural}((A_w)_{w\in U},(B_w)_{w\in V}) = \left(\coprod_{\mathcal{F}\ni Z\subseteq U\cap V}\prod_{w\in Z}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_w}(A_w,B_w)\right)/\sim,$$

hvor ekvivalensrelasjonen er

$$(f_w)_{w\in Z}\sim(g_w)_{w\in V} \iff (\exists\mathcal{F}\ni U\subseteq Z\cap V)(f_w=g_w \text{ for hver } w\in U).$$

I denne definisjonen velger vi å unnlate å modde ut noe som helst på objektene fordi man like godt kan ha mange objekter som er alle isomorfe og få morfier som er enklere å jobbe med. En konsekvens av dette er at vi får mange objekter $(A_w)_{w\in U}$ for hver $U\in\mathcal{F}$ i $\mathcal{C}_\natural$ som skal representere det samme objektet "$A_\natural$", som alle er kanonisk isomorfe. Morfiene har også blitt definert slik at en morfi $f_\natural\colon(A_w)_{w\in U}\to(B_w)_{w\in V}$ mellom to objekter er entydig bestemt av dets approksimasjoner/"verdier" nesten overalt, og at det er mulig å ha morfier i $\mathcal{C}_\natural$ mellom $(A_w)_{w\in U}$ og $(B_w)_{w\in V}$ selv om det skulle finnes en w hvor det ikke fantes noen morfier mellom A_w og B_w, to egenskaper vi hadde lyst på i kategorien Ult-$A_\natural$-alg av ultra-$A_\natural$-algebraer fra avsnitt 6.1.

Undertegnede kjenner ikke til litteratur hvor grunnleggende teori til ultraprodukter av kategorier bygges. Det er imidlertid mye interessant å gjøre; artikkelen [31] antyder for eksempel til at et ultraprodukt av triangulerte kategorier er selv triangulert. Her er noen spørsmål kan komme til tankene av en slik konstruksjon: Er det kategoriske ultraproduktet en funktor $\mathrm{Cat}^W\to\mathrm{Cat}$? I så fall, hva bevarer den? Monomorfier eller epimorfier? Grenser eller kogrenser? Har den en adjungert? Hvilken egenskaper har diagonalimbeddingen i ultrapotenstilfellet? Bevarer ultraproduktet additive eller abelske kategorier? I så fall, bevarer den additivtet og eksakthet av funktorer (morfier)? Hvordan oppfører den seg med hensyn på lokalisering av kategorier, og spesielt deriverte kategorier? Om det er mulig å restriktere den til $\mathcal{A}^W\to\mathcal{A}$ for $\mathcal{A}$ en (pre)additiv eller (pre)abelsk kategori med alle ultraprodukter indeksert over W, er denne funktoren additiv eller eksakt?

8.2 Ultraprodukter i kategorier

I kapittel 3 var det et punkt hvor vi ville at ultraproduktet skulle være en funktor

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W}\colon \mathrm{Set}^W\to\mathrm{Set},$$

men vi støtte på problemer som kom fra den tomme mengden: Et produkt $\prod_{w\in W} X_w$ blir tomt om så få som én av X_w-ene er tomme. Om vi lot vår opprinnelige definisjon 3.1.1 gjelde i dette tilfellet ville den éne tomme X_w-en gjøre en uakseptabelt stor påvirkning på det ønskelige ultraproduktet $X_\natural$.

Den kategoriske forklaringen av problemet er at $\emptyset$ er det strengt initielle objektet[1] i Set; i en vilkårlig kategori vil hvert produkt som inneholder et strengt initielt objekt være dette strengt initielle objektet opp til isomorfi.

Det at vi måtte komme med en nødløsning for å håndtere disse problemene antyder til at vår definisjon av ultraproduktet $X_\natural$ som en faktormengde av $\prod_{w\in W} X_w$ ikke er det kategorisk "rette" synet på ultraprodukter.

I en kategori $\mathcal{C}$ med tilstrekkelig mange produkter og kogrenser kan vi definere ultraproduktet til en familie objekter $(A_w)_{w\in W}$ som den filtrerte kogrensen

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} A_w = \varinjlim_{U\in\mathcal{F}} \prod_{w\in U} A_w \tag{1}$$

hvor morfiene er projeksjonene $\prod_{w\in U} A_w \to \prod_{w\in V} A_w$ for $V \subseteq U$, begge i $\mathcal{F}$. Som vanlig vil vi tillate oss å kalle det $A_\natural$. Denne definisjonen er opprinnelig fra [34]. Med denne definisjonen er løsningene til våre ovennevnte problemer bakt inn i universalegenskapen, og vi får mye av det vi er vant med, for eksempel:

(i) Funktorialitet: Gitt morfier $f_w\colon X_w \to Y_w$ og $U \in \mathcal{F}$ får vi kanoniske morfier $f_U\colon \prod_{w\in U} X_w \to \prod_{w\in U} Y_w$ ved funktorialitet av produktet (se digresjon 3.2.3). Sammen med restriksjonsmorfiene danner disse en naturlig transformasjon mellom de rette funktorene i kogrensene for $X_\natural$ og $Y_\natural$, så ved funktorialitet av $\varinjlim$ får vi en kanonisk morfi $f_\natural\colon X_\natural \to Y_\natural$. Denne $f_\natural$ er unik i å få følgende diagram til å kommutere for hver $U \in \mathcal{F}$:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in U} A_i \arrow[r, "\prod_{i\in U} f_i"] \arrow[d] & \prod_{i\in U} B_i \arrow[d] \\
A_\natural \arrow[r, "f_\natural"] & B_\natural
\end{tikzcd}$$

Følgelig, om man velger representanter får man en funktor $\mathcal{C}^W \to \mathcal{C}$.

[1] Et objekt A i en kategori er strengt initielt om det er initielt og hver morfi med A som kodomene er en isomorfi.

(ii) Diagonalimbedding: Gitt $A \in \mathcal{C}$ har vi morfier

$$A \to \prod_{w \in W} A \to A_\natural$$

hvor første morfi fås av universalegenskapen til produktet. Vi kunne ha isteden lagd en slik morfi ved å erstatte W-en i produktet over med en vilkårlig $U \in \mathcal{F}$, men dette lager samme morfi.

Digresjon 8.2.1. Kogrensen over kan bli tolket ved hjelp av knipper. Gitt $\mathcal{C}$, W, $\mathcal{F}$ og $(A_w)_{w\in W}$ som over kan vi gi W topologien hvor de åpne mengdene er de mengdene som fanges av $\mathcal{F}$, sammen med $\emptyset$, og definere en "$\mathcal{C}$-valuert knippe" $\mathcal{G}$ ved

$$\mathcal{G}(U) = \prod_{w \in U} A_w$$

hvor vi med dette mener at vi velger én representant fra hver isomorfiklasse for hver åpne U, og restriksjonsavbildningene er de kanoniske $\prod_{w\in U} A_w \to \prod_{w\in V} A_w$ for åpne $V \subseteq U \subseteq W$. Merk at da blir det tomme produktet $\mathcal{G}(\emptyset)$ det terminelle objektet i $\mathcal{C}$. Da vil (1) bli oversatt til

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} A_w = \varinjlim_{\substack{\emptyset \neq U \subseteq W \\ \text{åpen}}} \mathcal{G}(U)$$

med restriksjonene til $\mathcal{G}$ som morfier: Ved å sammenlikne med stilker kan dette tolkes som at man "zoomer inn" overalt, men ikke noe spesifikt sted. Det kan hjelpe på visualiseringa at W er irredusibel som topologisk rom, slik at de åpne mengdene i kogrensen er alle "store".

Selv om (1) har fine egenskaper og virker som en fornuftig generell definisjon av ultraprodukter, så er den ikke nødvendigvis bedre enn vår mengdeteoretiske definisjon på alle måter: Kategorien $\mathcal{C}$ må ha tilstrekkelig mange produkter og kogrenser for at det kategoriske ultraproduktet skal finnes, så det utelukker for eksempel kategorien av kropper, som ikke har alle produkter[2]. For et eksempel på en kategori hvor både mengdeteoretiske og kategoriske ultraprodukter fins, men ikke er isomorfe, se [39].

Overgangen til den kategoriske versjonen av ultraprodukter krever en ny versjon av Łoś' teorem. En versjon av Łoś for denne konteksten ble vist i [1]. For

[2] Morfier mellom kropper er injektive og kan tenkes på som inklusjoner, så om vi har en morfi $k \to k'$ må k og k' ha samme karakteristikk. Følgelig kan vi ikke ha produkter av kropper med ulik karakteristikk.

en eksposisjon, se masteroppgaven [8]. Den viser også at om $\mathcal{C} = \mathrm{Set}$ og hver X_w er ikketom, så vil den kategoriske versjonen av ultraproduktet samsvare med definisjon 3.1.1, se korollar 4.3.0.4.

8.3 Annen algebra

Vi har unnlatt å se på mange operasjoner og egenskaper man kan undersøke om hvorvidt blir bevart av ultraprodukter. For eksempel vil ultraprodukter kommutere med summer av idealer. Man kan så observere å være et Bézoutdomene[3] er en førsteordensegenskap, slik at ultraprodukter bevarer Bézoutdomener.

Det er flere eksempler på egenskaper hvis vanlige definisjon ikke er førsteordens, men som viser seg å være en førsteordensegenskap; som vi så etter proposisjon 5.9.11 er å ha lengde $\leq m$ en førsteordensegenskap. Vi vil nå gi et annet et. Husk at et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ er radikalt om $a^n \in \mathfrak{a}$ impliserer $a \in \mathfrak{a}$ for hver $a \in A$ og $n \in \mathbb{N}$. Den tilhørende ringegenskapen kalles at ringen er redusert: En ring A er redusert om nullidealet er radikalt, slik at et ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ er radikalt hviss $B/\mathfrak{b}$ er redusert. Intuitivt kan vi i utgangspunktet ikke forvente at disse egenskapene bevares av ultraprodukter da de kvantifiserer over de naturlige tallene, men de viser seg å være førsteordensegenskaper i skjul:

Lemma 8.3.1. Et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ er radikalt hvis og bare hvis $a^2 \in \mathfrak{a}$ impliserer $a \in \mathfrak{a}$ for hver $a \in A$.

Bevis. ($\Rightarrow$): Per definisjon. ($\Leftarrow$): Anta $a^n \in \mathfrak{a}$, skal vise $a \in \mathfrak{a}$. Få $m \in \mathbb{N}$ slik at ${}^{m}2 \geq n$, hvor ${}^{m}2$ er potenstårnet av m toere. Siden $\mathfrak{a}$ er et ideal vil $a^{({}^{m}2)} \in \mathfrak{a}$. Ved å bruke hypotesen gjentatte ganger vil $a^{({}^{m-1}2)} \in \mathfrak{a}$, $a^{({}^{m-2}2)} \in \mathfrak{a}$, og så videre til $a^4 = \left(a^2\right)^2 \in \mathfrak{a}$, slik at $a^2 \in \mathfrak{a}$ og $a \in \mathfrak{a}$. $\square$

Man kan også vise den ikketrivielle implikasjonen med en algoritme, istedenfor det svært "ueffektive" potenstårnargumentet: Om $a^n \in \mathfrak{a}$, og n er et partall vil $a^{n/2} \in \mathfrak{a}$ ved antagelsen, og betrakt denne. Om n isteden er et oddetall, betrakt $a^{n+1} \in \mathfrak{a}$. Om vi fortsetter denne prossessen vil eksponentene etter hvert gå ned til 2, hvor vi så kan bruke antagelsen en gang til til å få $a \in \mathfrak{a}$.

Proposisjon 8.3.2. Velg idealer og ringer $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$. Da er $\mathfrak{a}_\natural$ radikalt hvis og bare hvis nesten alle av $\mathfrak{a}_w$-ene er det. Videre er $A_\natural$ redusert hvis og bare hvis nesten hver A_w er det.

[3] Et Bézoutdomene er et integritetsområde hvor summen av to hovedidealer er et hovedideal.

Bevis. Ved lemma 8.3.1 er å være radikalt en førsteordensegenskap, og den første delen følger. Den andre delen følger ved å se på $\mathfrak{a}_w = (0) \subseteq A_w$ og å bruke proposisjon 3.7.4. □

I denne oppgaven har vi sett på kataprodukter, men vi har gjort veldig lite med dem. Boka [41] gjør mye mer med dem enn det vi gjør.

8.4 Videre ikkestandard analyse

I denne oppgaven har vi hatt et relativt snevert syn av ikkestandard analyse. Vi definerte noen konsepter for $\mathbb{R}_\natural$, og umiddelbart etterpå begynte å karakterisere kontinuitet og andre kjente egenskaper i metriske rom. For å få en bedre forståelse av ikkestandarde teknikker og hva den kan gi kan det være lurt å se på annen litteratur.

I første del av [18] utvikles reell analyse (fra perspektivet til en som kan det fra før av), senere ser den på mer avanserte anvendelser av ikkestandard analyse, som til målteori. Den viser også for eksempel at man kan konstruere kompletteringa til et metrisk rom (X, d) ved å ta standardgalaksen $\mathbb{L}(X)$ og å modde ut uendelig nærhet, se kapittel 18. Boka [23], en innføringsbok i kalkulus egnet for førsteklassinger ved høyskoler og universiteter, gir en mer elementær fremstilling av noe av den ovennevnte reelle analysen, og mye mer. Boka [29] gjør blant annet mye sannsynlighetsteori og statisikk, med anvendelser til økonomi.

Den ikkestandarde analysen vi gjorde i metriske rom kan bli generalisert til topologiske rom. Fikser et topologisk rom X. Inspirert av proposisjon 4.2.7 defineres haloen til $x \in X$ som

$$\mathrm{hal}(x) = \bigcap_{\substack{x \in U \subseteq X \\ \text{åpen}}} U_\natural .$$

Vi definerer nå "uendelig nærhet"-relasjonen $\simeq$ ved at $x \simeq y$ betyr at $y \in \mathrm{hal}(x)$. Denne relasjonen er ikke lenger symmetrisk, men den er ihvertfall det i Hausdorfftilfellet på elementene til X: Om X er Hausdorff vil $\mathrm{hal}(x)$ og $\mathrm{hal}(y)$ være disjunkte for hver $x \neq y$ i X, slik at $\simeq$ da blir symmetrisk på elementene i X. Om man velger riktig indeksmengde og ultrafilter får man tilgang på maskineri som lar en vise at denne disjunkt-betingelsen på standardhaloene karakteriserer Hausdorffrommene. Man kan også vise at analogt det vi så i kapittel 4, så avgjør haloene til X dets topologi. For mer om ikkestandard topologi, se se bøkene [11] og [12]. Disse gjør også ikkestandard funksjonalanalyse.

Bibliografi

[1] H. Andreka og I. Németi. «łoś holds in every category». I: *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 13 (1978), s. 361–376.

[2] Maurice Auslander, Idun Reiten og Sverre O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995. ISBN: 978-0-521-59923-8. DOI: `10.1017/CBO9780511623608`.

[3] James Ax og Simon Kochen. «Diophantine Problems Over Local Fields I». I: *American Journal of Mathematics* 87.3 (1965), s. 605–630. ISSN: 00029327, 10806377. DOI: `10.2307/2373065`. (Sjekket 22.04.2024).

[4] Paul Bankston. «Ultraproducts in topology». I: *General Topology and its Applications* 7.3 (1977), s. 283–308. ISSN: 0016-660X. DOI: `10.1016/S0016-660X(77)80006-8`.

[5] Saugata Basu, Richard Pollack og Marie-Françoise Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. 2. utg. Bd. 10. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, 2006. ISBN: 978-3-540-33098-1. DOI: `10.1007/3-540-33099-2`.

[6] J. L. Bell og A. B. Slomson. *Models and Ultraproducts: An Introduction*. 3. utg. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1969. ISBN: 9780720420548.

[7] C. C. Chang og H. J. Keisler. *Model Theory*. 3. utg. Bd. 73. Studies in Logic. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990. ISBN: 0444880542.

[8] Mark Jonathan Chimes. «Ultraproducts and Łoś's Theorem: A Category-Theoretic Analysis». Masteroppg. Stellenbosch: University of Stellenbosch, mar. 2017. DOI: `10019.1/101202`.

[9] Paul J. Cohen. «Decision procedures for real and p-adic fields». I: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 22.2 (1969), s. 131–151. DOI: 10.1002/cpa.3160220202.

[10] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer, 1995. ISBN: 978-0-387-94268-1. DOI: 10.1007/978-1-4612-5350-1.

[11] Martin Davis. *Applied Nonstandard Analysis*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2005. ISBN: 9780486442297.

[12] Francine Diener og Marc Diener. *Nonstandard Analysis in Practice*. Universitext. Springer, 1995. ISBN: 978-3-540-60297-2. DOI: 10.1007/978-3-642-57758-1.

[13] L. van den Dries og K. Schmidt. «Bounds in the theory of polynomial rings over fields. A nonstandard approach». I: *Inventiones mathematicae* 76 (1984), s. 77–91. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01388493.

[14] Paul C. Eklof. «Ultraproducts for Algebraists». I: *Handbook of Mathematical Logic*. Red. av Jon Barwise. Bd. 90. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 1977, s. 105–137. DOI: 10.1016/S0049-237X(08)71099-1.

[15] Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk. *Bærekraftstrategi 2022–2025 Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk*. Trondheim, 2022. URL: https://i.ntnu.no/documents/portlet_file_entry/1305837853/B%C3%A6rekraftstrategi+for+IE-fakultetet+%281%29.pdf/5c567179-a7cd-7867-1768-7fa474daa7c2 (sjekket 29.01.2024).

[16] Institutt for matematiske fag. *Emneplan MA2002 - Bachelorprosjekt i matematiske fag*. Trondheim, 2024. URL: https://www.ntnu.no/studier/emner/MA2002/2023 (sjekket 29.01.2024).

[17] Ilijas Farah og Saharon Shelah. «A dichotomy for the number of ultrapowers». I: *Journal of Mathematical Logic* 10.1 & 2 (2010), s. 45–81. DOI: 10.1142/S0219061310000936.

[18] Robert Goldblatt. *Lectures on the Hyperreals, An Introduction to Nonstandard Analysis*. Bd. 188. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998. ISBN: 978-0-387-98464-3.

[19] Stefan Heinrich. «Ultraproducts in Banach space theory.» I: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1980.313 (1980), s. 72–104. DOI: 10.1515/crll.1980.313.72.

[20] Wilfrid Hodges. «Krull Implies Zorn». I: *Journal of the London Mathematical Society* s2-19.2 (1979), s. 285–287. DOI: 10.1112/jlms/s2-19.2.285.

[21] Thomas Jech. *Set Theory*. 3. utg. Berlin: Springer, 2002. ISBN: 978-3-540-44085-7.

[22] Christian U. Jensen og Helmut Lenzing. *Model Theoretic Algebra. With particular emphasis on fields, rings and modules*. Algebra, Logic and Applications. CRC press, 1989. ISBN: 97828812471700. DOI: 10.1201/9780203746943.

[23] Howard Jerome Keisler. *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. 3. utg. New York: Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0-486-48452-5.

[24] Simon Kochen. «Ultraproducts in the Theory of Models». I: *Annals of Mathematics* 74.2 (1961), s. 221–261. ISSN: 0003486X. DOI: 10.2307/1970235.

[25] Alex Kruckman. *The Ax-Kochen Theorem: an application of model theory to algebra*. 2013. arXiv: 1308.3897 [math.LO].

[26] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. 2. utg. Bd. 5. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1987. ISBN: 978-0-387-98403-2. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8.

[27] Serge Lang. *Algebra*. 3. utg. Bd. 211. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2006. ISBN: 978-0-387-95385-4. DOI: 10.1007/978-1-4613-0041-0.

[28] Christopher C. Leary og Lars Kristiansen. *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. 2. utg. Geneso, NY: Milne Library Publishing, 2015. ISBN: 978-1-942341-07-9. URL: https://milneopentextbooks.org/a-friendly-introduction-to-mathematical-logic.

[29] Peter A. Loeb og Manfred P. H. Wolff. *Nonstandard Analysis for the Working Mathematician*. 2. utg. Springer Dordrecht, 2015. ISBN: 978-94-017-7326-3. DOI: 10.1007/978-94-017-7327-0.

[30] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. CRC Press, 1969. ISBN: 9780201407518.

[31] Angus MacIntyre. «Nonstandard analysis and cohomology». I: *Nonstandard Methods and Applications in Mathematics*. Red. av Nigel J. Cutland, Mauro Di Nasso og David A Ross. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2006, s. 174–192. DOI: 10.1017/9781316755761.008.

[32] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Overs. av Miles Reid. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1987. ISBN: 9781139171762. DOI: 10.1017/CBO9781139171762.

[33] Mauro Di Nasso, Isaac Goldbring og Martino Lupini. *Nonstandard Methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory*. Bd. 2239. Lecture Notes in Mathematics. Cham: Springer, 2019. ISBN: 978-3-030-17955-7. DOI: 10.1007/978-3-030-17956-4.

[34] Tadashi Ohkuma. «Ultrapowers in Categories». I: *Yokohama Mathematics Journal* 14 (1966), s. 17–37.

[35] David Pincus. «Adding Dependent Choice to the Prime Ideal Theorem». I: *Logic Colloquium 76*. Bd. 87. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 1977, s. 547–565. DOI: 10.1016/S0049-237X(09)70445-8.

[36] David Pincus og Robert M. Solovay. «Definability of Measures and Ultrafilters». I: *The Journal of Symbolic Logic* 42.2 (1977), s. 179–190. ISSN: 00224812. DOI: 10.2307/2272118.

[37] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. New York: Dover Publications, 2016. ISBN: 9780486809038.

[38] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. 2. utg. Universitext. Springer, 2009. ISBN: 978-0-387-24527-0. DOI: 10.1007/b98977.

[39] Ildikó Sain og Bui Huy Hien. «Category Theoretic Notions of Ultraproducts». I: *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 18.1 (1983), s. 309–317.

[40] Eric Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. San Diego: Academic Press, 1997. ISBN: 978-0-12-622760-4. DOI: 10.1016/B978-0-12-622760-4.X5000-6.

[41] Hans Schoutens. *The Use of Ultraproducts in Commutative Algebra*. Bd. 1999. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN: 978-3-642-13368-8. DOI: 10.1007/978-3-642-13368-8_3.

[42] Sharon Shelah. «Vive la différence II. The Ax-Kochen isomorphism theorem». I: *Israel Journal of Mathematics* 85 (1994), s. 351–390. DOI: 10.1007/BF02758648.

[43] Terence Tao. *An Introduction to Measure Theory*. Bd. 126. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2011. ISBN: 978-1-4704-6640-4.

[44] Jan van Mill. «An introduction to $\beta\omega$». I: *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Red. av Kenneth Kunen og Jerry E. Vaughan. Amsterdam: North-Holland, 1984, s. 503–567. ISBN: 978-0-444-86580-9. DOI: `10.1016/B978-0-444-86580-9.50014-8`.

[45] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994. ISBN: 9781139644136. DOI: `10.1017/CBO9781139644136`.

[46] Paul B. Yale. «Automorphisms of the complex numbers». I: *Mathematics Magazine* 39.3 (1966), s. 135–141. ISSN: 0025-570X. DOI: `10.1080/0025570X.1966.11975699`.

Stikkordsregister

Chapter 9

Introduction

This bachelor's thesis has two goals. The first is to give a proper introduction of what ultraproducts are and what one can do with them – primarily in algebra – and the other is to do commutative algebra with them.

An ultraproduct of a family of rings $(A_w)_{w \in W}$ can be thought of as a sort of average of them: it satisfies certain "uncomplicated" algebraic properties if and only if most of the rings in question do. How one takes this average will depend on the choice of a free ultrafilter $\mathcal{F}$ on the index set W. This cannot be done in any constructive way, so the ultraproduct is an inherently nonconstructive construction. This intuition breaks down in the special case where all of thw A_w-s are equal an A, where the ultraproduct is then called the ultrapower of A. Here, the ultraproduct will add more, "nonstandard" elements to A. The ultraproduct construction depends on the choice of $\mathcal{F}$, and in general changing $\mathcal{F}$ may change the ultraproduct up to isomorphism. We will nonetheless see that the questions we are interested in[1] aren't affected by the choice of $\mathcal{F}$. In the words of [41, p. 2], ultraproducts behave almost as if they were intrinsically defined.

To understand the beginning of the thesis, the reader should know equivalent to a first course on rings, and should among other things be comfortable with the first isomorphism theorem, polynomialrings in arbitrarily many variables, Noetherian rings, and some field theory like algebraically closed fields, algebraic closures of fields and fields of fractions. The reader should also be familiar with

[1] Let us hope no model theorists read this thesis.

basic categorical concepts like categories, functors, products and how functors can preserve them, and natural transformations. For Chapter 12, the reader should be familiar with metric spaces and their standard concepts (continuity, open/closed sets, convergence and uniform continuity). In digressions we may make use of more advanced concepts like (categorical) limits and adjoint functors. From Chapter 13 we will assume that the reader also is familiar with limits/colimits, tensor products of modules, and more advanced categorical concepts like abelian categories and exact functors. We will introduce the logic (and primarily commutative) algebra we will require along the way. I have chosen to assume that the reader does not know commutative algebra because it is taught at NTNU much more rarely than the other algebra we will make use of.

The goal of introducing ultraproducts is why I have chosen to define ultraprodcuts for sets before the thesis proceeds with what we are interested in, namely ultraproducts of rings and other algebraic structures, and is also why we look at Łoś' theorem[2] in full generality. The second choice also allws for certain kinds of arguments not available if one has one of the weaker versions of the theorem, like those where one uses the theorem on statements that quantify over subsets, a technique we will make use of multiple times.

To try to be pedagogical, I've tried to make the thesis as rigorous as possible in the beginning. We also give many proofs thatt are omitted in [41], and fill in details in proofs therefrom[3]. I think this will be to the benefit of the readers, who I assume haven't seen ultraproducts before. Practical use of Łoś' theorem has especially many subtleties that can be hard to have control of in a first meeting, and many authors choose to identify canonical bijections without saying so.

This thesis is not meant to be a textbook, so we are free from their limitations and expectations, such as the modern trend of being "lean" and "efficient". This thesis is ment to be explorative. It has many digressions mean to put known results in a new light, point the reader in directions the thesis won't discuss or I know nothing about, or ask natural questions the I myself have thought. They will not be used for further theory building. The digressions are an important part of the thesis; to understand something well, it is my opinion that one should have seen it from multiple points of view, and digressions are supposed to help with this. These choices has made this thesis much longer

[2]Pronounced approximately "wosh".

[3]In some proofs, like those of what for us are Proposition 14.2.7 and theorem 11.9.12, especially many details are left out.

than it could have been. (The same can be said of my choice of making it bilingual). The digressions also makes such that the thesis is not written for the reader to understand and appreciate everything. The choice of looking at the thesis as a walk with many detours and nice results along the way would make me a fool if I thought I wrote for everyone. I hope that this nevertheless makes it such that many can get something out of this thesis; exposure to the unknown is after all good.

My own contributions to this thesis are primarily filling in details omitted in [41] – sometimes irresponsibly many – and a handful times generalized results therefrom, coming with a functorial perspective of ultraproduts and sometimes doing my own investigation, for example in Section 13.9, where I look at ultraproducts of modules. The following proofs are my own: Those in Sections 10.3, 11.7, 12.2, 13.8 and 13.9, all functorial results, all digressions, lemmas and examples in Section 11.9, and the proofs of Lemma 14.2.11 and Theorem 14.3.5.

Structure

The chapter structure is as follows:

(ii) In Chapter 10 we study filters, which we will use to be able to "take the average" that the ultraproduct is supposed to be. We also show that filters can be interpreted as certain probability measures.

(iii) Chapter 11 marks the beginning of the interesting part of the thesis. We introduce ultraproducts, and discuss and prove Łoś' theorem, the so-called fundamental theorem of ultraproducts. Thereafter we focus our attention to ultraproducts of fields, and we build basic theory regarding them. We end the chapter with some interesting results about algebraically closed fields, and a digression on how ultraproducts let us show that one cannot find first-order axiomatizations of infinite rings.

(iv) In Chapter 12 we see how we can use ultraproducts to look at analysis from a new perspective, with nonstandard analysis. We will give intuitive characterizations of some concepts from analyis, such that continuity being equivalent to an infinitely small change in input giving an infinitely small change in output.

(v) In Chapter 13 we repeat algebra we will need later in the thesis; it has been placed here to improve the flow in the later chapters. Afterwards, we see how some of these concepts behave with respect to ultraproducts. The seven repetition sections are all independent of eachother and can be read in any order one pleases.

(vi) In Chapter 14 we give a short introduction to cataproducts, a modification of the ultraproduct which we define for Noetherian local rings. Ultraproducts turn out to rarely be Noetherian, but cataproducts often are. We show that the cataproduct of DVR-s itself is a DVR, and that this doesn't hold for ultraproducts.

(vii) In the last chatper, Chapter 16, we sketch and mention some topics we haven't looked at in the thesis, like ultraproducts in and of categories, and further nonstandard analysis, and refer to further reading for those interested.

The following diagram (or quiver if one prefers) shows how the different chapters depend on each other:

$$
\begin{tikzcd}
 & 12 & & 14 \\
10 \arrow[r] & 11 \arrow[u] \arrow[r] & 13 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 15 \\
 & & & 16
\end{tikzcd}
$$

Sustainability

The current sustainability strategy of the IE-faculty[4], where IMF[5] is, has a point that says that all bachelor's and master's theses at the faculty must contain a sustainability reflection. As a part of this strategy, a formal requirement was recently added for the aforementioned theses under the institute that they shall reflect in light of the sustainable development goals of the UN [16]. Since this is a thesis in pure mathematics, I view sustainability as not relevant for it, and that the faculty's requirement of all student theses reflecting on their relevance for sustainability an insult to all the important work being done to reach the sustainability goals.

[4]Faculty of Information Technology and Electrical Engineering. Norwegian: *Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk.*

[5]Department of Mathematical Sciences. Norwegian: *Institutt for matematiske fag.*

Thanks

I thank my advisor Petter for letting me begin a project none of us knew anything about and letting me explore ultraproducts as I pleased. Without him, this thesis would be far from as educational and long as it became.

I thank my mother Elisabeth and friend Bjørn for proofreading a sizeable and small part of the thesis respectively.

Lastly, I thank my partner in crimes again set theory Denis for discovering mathematics with me and for many enlightening discussions throughout our studies and last year of high school.

Notation and conventions

In this thesis, $\subseteq$ means subset and $\subset$ strict subset[6]. Zero is not a natural number. We write $\mathbb{P}$ for the set of primes. We write $\mathbb{F}_p$ and $\mathbb{Q}_p$ for the Galois field with p elements and field of rational p-adic numbers respectively. The algebraic closure of a field k is written $\overline{k}$. The algebra we do is commutative, and we follow its conventions: All rings are commutative and unital, and all ring homomorphisms send 1 to 1. Furthermore, every subring $B \subseteq A$ has the same unit as A. The zero ring is a ring, but not an integral domain. Categories needn't be locally small, but Hom-sets will in any case be called sets whether they are sets or not. Subcategories don't need to be full. The categori of rings is called CRing. Isomorphisms are written $\simeq$, and the same symbol is used for infinite closeness. All functors are covariant unless otherwise is specified. For a set I we write $\mathcal{P}(I)$ for the set of all its subsets, $\mathcal{P}^{\text{fin}}(I)$ for the set of all its finite subsets.

[6] I am horrified over the fact that some think it is a good idea to write $\subsetneq$ and hope humanity collectively gets its act together and removes this embarrasing symbol from mathematics.

Chapter 10

Filter Theory

An ultraproduct of a collection of objects indexed over an index set I is supposed to be a sort of average of them, such that the ultraproduct has properties that "many" of the objects have. To be able to define ultraproducts we need a sort of probability measure on the index set I which lets us differentiate between "large" and "small" subsets of I. Filters will have this role, and in this chapter we will build the theory to be able to define and work with filters.

In this chatper I will be a fixed nonempty set which all our filters will be over. We define complements to be relative to I, so for $A \subseteq I$ we let its complement A^c be $I \setminus A$.

10.1 Filters and ultrafilters

Recall that the power set $\mathcal{P}(X)$ of a set X is the set of all its subsets.

Definition 10.1.1. A $\mathcal{F}$ on a nonempty set I is a set $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ such that

(i) (Weak downwoards closure): For $A, B \in \mathcal{F}$, we have $A \cap B \in \mathcal{F}$, and

(ii) (Strong upwards closure): For $A \subseteq B \subseteq \mathcal{P}(I)$ with $A \in \mathcal{F}$, we have $B \in \mathcal{F}$.

For instance, $\mathcal{F} = \{I\}$ and $\mathcal{F} = \mathcal{P}(I)$ are two examples one always has. Since each filter is nonempty, all filters on I will contain I itself.

Lemma 10.1.2. Let$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$. The following are equivalent:

(i) $\mathcal{F}$ is a filter,

(ii) For all $A, B \subseteq I$, $A \cap B \in \mathcal{F}$ if and only if $A, B \in \mathcal{F}$, and

(iii) For each natural n and $A_1, \cdots, A_n \subseteq I$, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$ if and only if $A_i \in \mathcal{F}$ for all i.

Proof. Point (iii) is equivalent to (ii) by induction, so (i) $\Leftrightarrow$ (ii) remains. Suppose $\mathcal{F}$ is a filter. We want to show

$$A \cap B \in \mathcal{F} \iff A, B \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

We get $\Leftarrow$ by filter axiom (i), and $\Rightarrow$ by filter axiom (ii).

Suppose $\mathcal{F}$ instead satisfies (1). We get (i) by $\Leftarrow$, so (ii) remains. If $A \subseteq B \subseteq \mathcal{P}(I)$ and $A \in \mathcal{F}$, then $A = A \cap B \in \mathcal{F}$ such that $B \in \mathcal{F}$, which shows (ii). ☐

Definition 10.1.3. A filter $\mathcal{F}$ is *proper* if it has the following equivalent properties: (i) $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(I)$, and (ii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Proof. This is the contrapositive of the equivalence $\emptyset \in \mathcal{F} \iff \mathcal{F} = \mathcal{P}(I)$, which follows directly from filter axiom (ii). ☐

Remark 10.1.4. Some authors require that filters also satisfy $\emptyset \notin \mathcal{F}$, such that $\mathcal{P}(I)$ is not a filter and all filters are proper.

In algebra one is interested in maximal ideals, which are ideals $\mathfrak{m} \subseteq A$ that are so large there exist no other ideals between $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{a} = A$. We are also interested in the corresponding concept for filters.

Definition 10.1.5. A proper filter $\mathcal{F}$ on I is an *ultrafilter* if these equivalent conditions hold:

(i) $\mathcal{F}$ is a maximal proper filter: for any filter $\mathcal{G}$ on I such that $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I)$, we either have $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ or $\mathcal{G} = \mathcal{P}(I)$, and

(ii) For all $A \subseteq I$, we have either $A \in \mathcal{F}$ or $A^c = I \setminus A \in \mathcal{F}$.

Such filters are called maximal filters.

Proof. (ii) $\Rightarrow$ (i): Suppose $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I)$; want to show the second inclusion is an equality. We have $A \subseteq I$ such that $A \in \mathcal{G}$ and $A \notin \mathcal{F}$. Hence $A^c \in \mathcal{F}$, so $A^c \in \mathcal{G}$, such that $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{G}$ and $\mathcal{G}$ is proper by Definition 10.1.3.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Suppose $\mathcal{F}$ is maximal and pick $A \subseteq I$. Suppose $A^c \notin \mathcal{F}$, want to show $A \in \mathcal{F}$. Let

$$\mathcal{G} = \{X \subseteq I \mid X \supseteq B \cap A \text{ for a } B \in \mathcal{F}\}$$

such that we have a chain $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I)$ where $A \in \mathcal{G}$.

Claim. $\mathcal{G}$ is a filter. Upwards closure is by definition, so intersection remains. If $X, Y \in \mathcal{G}$, then $X = B \cap A$ and $Y = B' \cap A$ for $B, B' \in \mathcal{F}$. Then $X \cap Y \supseteq (B \cap B') \cap A$, such that $X \cap Y \in \mathcal{G}$, and we have (i).

Claim. $\mathcal{G} \neq \mathcal{P}(I)$. This is because $A^c \notin \mathcal{G}$, and the key ingredient is that $A^c \notin \mathcal{F}$. If, aiming for a contradiction, $A^c \in \mathcal{G}$, we would've had $B \cap A \subseteq A^c$ for a $B \in \mathcal{F}$. Since $A \cap A^c = \emptyset$, then $B \subseteq A^c$, such that $A^c \in \mathcal{F}$ by filter axiom (ii), contradiction.

By maximality of $\mathcal{F}$ on the chain $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(I)$ we have $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ such that $A \in \mathcal{F}$.

□

Ultrafilters have a useful property of how they behave regarding unions:

Lemma 10.1.6. If $\mathcal{F}$ is an ultrafilter, then

$$A \cup B \in \mathcal{F} \iff A \in \mathcal{F} \text{ or } B \in \mathcal{F}$$

for all $A, B \subseteq \mathcal{P}(I)$.

Proof. We have

$$\begin{aligned} A \cup B \in \mathcal{F} &\iff (A \cup B)^c \notin \mathcal{F} \\ &\iff A^c \cap B^c \notin \mathcal{F} \\ &\iff A^c \notin \mathcal{F} \text{ or } B^c \notin \mathcal{F} \\ &\iff A \in \mathcal{F} \text{ or } B \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

where we use De Morgans law and Lemma 10.1.2. □

Corollary 10.1.7. If $\mathcal{F}$ is an ultrafilter, then

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F} \implies A_i \in \mathcal{F} \text{ for an i} i.$$

Furthermore, if the A_i-s are pairwise disjoint, then i is unique.

Proof. The first part follows by induction on Lemma 10.1.6. If, aiming for a contradiction, $A_i \in \mathcal{F}$ and $A_j \in \mathcal{F}$ for $i \neq j$, then $\emptyset = A_i \cap A_j \in \mathcal{F}$, contradicting the fact that $\mathcal{F}$ is an ultrafilter. □

Example 10.1.8. Given a nonempty $X \subseteq I$, we can define a filter

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq I \mid X \subseteq A\}.$$

This filter is called the principal filter generated by X, and filters of this form are called principal. If X is a singleton, then $\mathcal{F}$ is an ultrafilter. The converse also holde: For $x \in X$, we have $\{x\}^c \notin \mathcal{F}$ since $X \not\subseteq \{x\}^c$, and since $\mathcal{F}$ is an ultrafilter, $\{x\} \in \mathcal{F}$, so $X \subseteq \{x\} \subseteq X$ such that the inclusion is an equality and X is a singleton.

Digression 10.1.9. The name can be motivated by coming from a more general construction. One can show that each intersection of filters on I is itself a filter on I. Correspondingly as one would do in algebra, one can define a filter $\mathcal{F}$ et filter $\mathcal{F}$ generert by a colletion $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ as the intersection of all the filters that contain F – the smallest filter that contains F. Example 10.1.8 is the case $F = \{X\}$. By Lemma 10.1.2 one can show that if $\mathcal{F}$ is generated by $F = \{X_1, \cdots, X_n\}$, then it will also be generated by $\{X_1 \cap \cdots \cap X_n\}$, so one is primarily interested in whether a filter is generated by one element $F = \{X\}$ or not. This construction is nevertheless useful. We have already seen it; the filter $\mathcal{G}$ in the proof of Definition 10.1.5 is in fact the one generated by $\mathcal{F} \cup \{A\}$.

Example 10.1.10. Recall that a set $A \subseteq I$ is cofinite if the complement $A^c = I \setminus A$ is finite. Suppose that I is infinite, and let

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq A \mid A \text{ is cofinite}\}$$

Then $\mathcal{F}$ is a filter, called the Frechét filter or the cofinite filter on I.

Filters have a result that can remind one of Krulls Theorem for ideals.

Theorem 10.1.11 (Ultrafilter lemma)**.** Every proper filter on I can be extended to an ultrafilter on I.

Proof. (sketch) This is a simple application of Zorns lemma. Consider the nonempty partially ordered set of proper filters on I, with the inclusion $\subseteq$ as the order. Given a chain $(\mathcal{F}_n)_{n\in\Lambda}$, let $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\Lambda} \mathcal{F}_n$. Then one can check that $\mathcal{F}$ is a proper filter, and that it by construction is an upper bound to the chain. We win by Zorns lemma. $\square$

Remark 10.1.12. It is known that the ultrafilter lemma is independent of ZF together with the axiom of dependent choice (DC) [36, Thm. 2], and weaker in ZF than the axiom of choice [35][1]. Krulls Theorem is instead equivalent to choice and hence Zorns lemma in ZF [20]. A consequence of the first part is that one cannot explicitly construct free ultrafilters, as such one must be able to do such a construction (whatever "explicit" means, or should mean) in ZF+DC.

10.2 Free ultrafilters

For the "probability measure" we are going to make on I, we want all singletons to have measure zero. In filter-theretic terms, we are interested in ultrafilters $\mathcal{F}$ on I which contain no singletons. Should such an ultrafilter contain a finite set $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, then

$$A = \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\} \in \mathcal{F}$$

and by Corollary 10.1.7 we'd get $\{a_i\} \in \mathcal{F}$ for an i. Hence the ultrafilters we are interested in not contain any finite sets. This makes intuitive sense; in a "average" of rings $\{A_i\}_{i\in I}$ with I infinite, we wouldn't want a change of finitely many A_i to be able to affect the average.

Definition 10.2.1. An ultrafilter $\mathcal{F}$ is *free* if the folloing equivalent conditions hold:

(i) $\mathcal{F}$ contains no singletons,

(ii) $\mathcal{F}$ contains no finite sets,

(iii) $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, and

(iv) $\mathcal{F}$ is nonprincipal.

[1] Strictly speaking, the article shows that the Boolean Prime Ideal Theorem is weaker than ZFC, but this theorem is known to be equivalent to the ultrafilter lemma in ZF; see for example [40, p. 338ff].

Proof. We show (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): This is done in the discussion at the beginning of the section.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Pick $i \in I$. Then $\{i\} \notin \mathcal{F}$, so $\{i\}^c \in \mathcal{F}$, such that $\bigcap \mathcal{F} \subseteq \{i\}^c \not\ni i$, implying $i \notin \bigcap \mathcal{F}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): If $\mathcal{F}$, aiming for a contradiction were principal, then $\mathcal{F} = \{A \subseteq I \mid X \subseteq A\}$ for a nonempty $X \subseteq I$. But then $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$, contradiction.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Suppose, aiming for a contradiction, that $\{i\} \in \mathcal{F}$ for an $i \in I$. Let $\mathcal{G}$ be the principal ultrafilter generated by $\{i\}$. Then we'd have a chain $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$, and since $\mathcal{G}$ is a ultrafilter, Definition 10.1.5 would give $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. So $\mathcal{F}$ is principal, contradiction. $\square$

It remains to show that free ultrafilters exist. By item (ii) above, there exist no free ultrafilters on finite I, so the optimal result would be if they'd exist for all infinite I. We can use the ultrafilter lemma to prove this:

Theorem 10.2.2. For all infinite I, there is a free ultrafilter on I.

Proof. Consider the Frechét filter $\mathcal{F} = \{A \subseteq A \mid A \text{ is cofinite}\}$ from Example 10.1.10. By the ultrafilter lemma, Theorem 10.1.11, there is an ultrafilter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(I)$. We claim that $\mathcal{G}$ is free. If $\mathcal{G}$, aiming for a contradiction contained a finite set A, the ultrafilter by construction would also contain the cofinite complement $A^c \in \mathcal{F}$, contradicting the fact that $\mathcal{G}$ is an ultrafilter. Therefore, $\mathcal{G}$ contains no finite sets and is hence free. $\square$

Digression 10.2.3. In light of the proof of Theorem 10.2.2, we see that an ultrafilter on a set I is free also if and only if it contains the Frechét filter on I.

10.3 Digression: Measure-theoretic approach

We motivated filters as a such of degenerated probability measure which we were going to use to be able to quotient out equality almost everywhere for our ultraproducts, even if we didn't quite use put it that way. In this digression we will specify what we meant by translating it to measure-theoretic language.

Given a subset $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$, define $\mu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ by

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & A \in \mathcal{F}, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

We can also go the other way; given a $\nu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$, we can make a corresponding set $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I)$ by

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq I \mid \nu(A) = 1\}.$$

These two constructions are inverse bijections. It is known as the canonical bijection between the power set $\mathcal{P}(X)$ and the set[2] 2^X. This bijection is guilty of being the reason why many mathematicians write 2^X for the power set $\mathcal{P}(X)$. For our purposes, the bijection lets us talk of a corresponding "measure" of a filter $\mathcal{F}$, and also go the other way around.

Fix a set $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$, and let $\mu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ be the corresponding function. If $\mathcal{F}$ is a proper filter, then μ satisfies

(0) $\mu(\emptyset) = 0$.

(1) $\mu(A) = \mu(B) = 1 \implies \mu(A \cap B) = 1$ for all $A, B \subseteq I$.

(2) For each $A \subseteq B \subseteq I$, we have $\mu(A) \leq \mu(B)$.

If $\mathcal{F}$ in addition is an ultrafilter, we have a condition we may interpret as a hidden Carathéodory condition on I;

(3) $\mu(A) + \mu(A^c) = 1$ for all $A \subseteq I$,

and we also get another interpretation of (1);

(1') $\mu(A) = \mu(B) = 0 \implies \mu(A \cup B) = 0$ for all $A, B \subseteq I$.

Finally, if $\mathcal{F}$ also is free, then we in addition have

(4) All singletons have measure zero.

The implications also go the other way. We have

Lemma 10.3.1. Let $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ be a set, and $\mu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ the corresponding function. Then we have the following equivalences:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ is equivalent to (0)

(ii) Filter axiom (i) is equivalent to (1).

(iii) Filter axiom (ii) is equivalent to (2).

[2] In set theory, X^Y is the notation for the set of all functions $Y \to X$. Here 2 is a set with two elements, for example as an ordinal.

(iv) The ultra-property "either $A \in \mathcal{F}$ or $A^c \in \mathcal{F}$ for each $A \subseteq I$" is equivalent to (3).

(v) In prescence of the ultra property, (1) is equivalent to (1').

(vi) The freedom property "$\{i\} \notin \mathcal{F}$ for all $i \in I$" is equivalent with (4).

Proof. The claims are mainly direct translations of each other, with some subtle exceptions. We will look at the at the latter here.

First; given the ultra property, which is equivalent to (3) without further conditions on $\mathcal{F}$, then filter axiom (i) is equivalent to (1). Fix $A, B \subseteq I$. Then we have implications

$$\begin{array}{ccc} A \in \mathcal{F} \text{ and } B \in \mathcal{F} & \Longrightarrow & A \cap B \in \mathcal{F} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ A^c \notin \mathcal{F} \text{ and } B^c \notin \mathcal{F} & \Longrightarrow & A^c \cup B^c \notin \mathcal{F} \end{array}$$

Here the vertial equivalences follow by the ultra property, and we use De Morgans law. We recognize the upper part as filter axiom (i) on A, B, and the lower part as (1') on A^c, B^c. We quantify these over all $A, B \subseteq I$ and change names on A^c and B^c in (1'), and get

$$\begin{array}{c} (\forall A, B \subseteq I)(A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}) \\ \Updownarrow \\ (\forall A, B \subseteq I)(A, B \notin \mathcal{F} \implies A \cup B \notin \mathcal{F}) \end{array}$$

where we recognize the lower statement as (1').

The other subtle part is the equivalence between (2) and filter axiom (ii) without further conditions on $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$. The measure-theoretic statement (2) is seemingly stronger than (ii), which looks like the special case $\mu(A) = 1$. One can show this equivalence by checking the four cases one gets, or by observing that the negations to (ii) and (2) are

$$\begin{aligned} \neg\text{(ii)}: &\quad (\nexists A, B \subseteq I)(A \subseteq B \text{ and } A \in \mathcal{F} \text{ and } B \notin \mathcal{F}) \\ \neg(2): &\quad (\nexists A, B \subseteq I)(A \subseteq B \text{ and } \mu(A) = 1 \text{ and } \mu(B) = 0) \end{aligned}$$

and that these are equivalent by translation. $\square$

From this translation we get a characterization of when $\mathcal{F}$ is a filter with various properties we are interested in.

Corollary 10.3.2. Let $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ be a set and $\mu: \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ the corresponding function. Then

(i) $\mathcal{F}$ is a filter iff (1) and (2),

(ii) $\mathcal{F}$ is a proper filter iff (0), (1) and (2),

(iii) $\mathcal{F}$ is an ultrafilter iff (0), (1), (2), and (3), and in that case (1') also holds.

(iv) $\mathcal{F}$ is a free ultrafilter iff (0), (1), (2), (3), and (4).

Here is a table that visualises the situation:

Reference	Filter-theoretic statement	Measure-theoretic statement
(0)	$\emptyset \notin \mathcal{F}$	$\mu(\emptyset) = 0$
(1)	$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$	$\mu(A), \mu(B) = 1 \Rightarrow \mu(A \cap B) = 1$
(1')	$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$	$\mu(A), \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = 0$
(2)	$\mathcal{F} \ni A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow B \in \mathcal{F}$	$A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
(3)	either $A \in \mathcal{F}$ or $A^c \in \mathcal{F}$	$\mu(A) + \mu(A^c) = 1$
(4)	$\mathcal{F}$ contains no singletons	All singletons have μ-measure zero

Table 10.3.3: A table that shows how one can translate the axioms of $\mathcal{F}$ being a free ultrafilter on I, to measure-theoretic statements about μ. All statements are quantified "for each $A, B \subseteq I$". The equivalence between the statements in (1') is in the prescence of (3).

By the characterization above, μ will, when $\mathcal{F}$ is nice enough, look and feel like a measure. This doesn't exclude the possibility of μ not being a measure, but only looking like one. However, to cite a wise mathematician; if it looks like a measure, swims like a measure and quacks like a measure, then it probably is a measure. It is therefore natural to see if any of the types of filters we're interested in make μ some sort of measure.

Definition 10.3.4. Let X be a set. A (concrete) boolean algebra on A is a set $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ such that

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$,

(ii) For each $A \in \mathcal{B}$, the complement $A^c = X \setminus A$ lies in $\mathcal{B}$, and

(iii) If A and B lie in $\mathcal{B}$, then so does the union $A \cup B$.

By De Morgans laws and other set-theoretic trickery, boolean algebras are closed under some other set-theoretic operations like finite intersections and set-theoretic differences.

Definition 10.3.5. A function $m\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ for $\mathcal{B}$ a boolean algebra is a finitely additive measure if $m(\emptyset) = 0$ and for all disjoint $A, B \in \mathcal{B}$, we have $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Lemma 10.3.6. Suppose $m\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ is a finitely additive measure. Then

$$m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

for all $A, B \in \mathcal{B}$.

Proof. We have disjoint decompositions

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \cup (A \setminus B) \\ B &= (A \cap B) \cup (B \setminus A) \\ A \cup B &= (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

and by applying m and using finite additivity, we get

$$\begin{aligned} m(A) &= m(A \cap B) + m(A \setminus B) \\ m(B) &= m(A \cap B) + m(B \setminus A) \\ m(A \cup B) &= m(A \cap B) + m(A \setminus B) + m(B \setminus A) \end{aligned}$$

and by combining these,

$$m(A)+m(B) = m(A\setminus B)+m(B\setminus A)+2m(A\cap B) = m(A\cap B)+m(A\cup B). \qquad \square$$

For more on boolean algebras, finitely additive measures and what one can do with them, the interested reader is referred to any introductory book on measure theory, such as [43, p. 67ff, p. 74ff].

We can now give a condition on $\mathcal{F}$ that makes μ a finitely additive measure, and characterize which one gets when μ is a finitely additive measure.

Proposition 10.3.7. Le $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ be a set and $\mu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0, 1\}$ the corresponding function. Then $\mathcal{F}$ is an ultrafilter if and only if μ is a finitely additive measure satisfying $\mu(I) = 1$.

Proof. By Corollary 10.3.2, it is enough to show that the requirement on μ is equivalent to the measure-theoretic conditions (0), (1), (2) and (3) on μ.

Suppose first that $\mathcal{F}$ is an ultrafilter. By Corollary 10.3.2 we then have (0), (1), (2) and (3). Consequently $\mu(I) = 1$ by (3), letting $A = \emptyset$ and using (0). It remains to show that μ is finitely additive. Suppose $A, B \subseteq I$ are disjoint. We want to show Vi skal vise

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{2}$$

By disjointedness we have $\mu(A \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$ by (0), so the contrapositive version of (1) implies that at least one of A and B has measure zero. Without loss of generality, $\mu(B) = 0$. There are two cases: If $\mu(A) = 1$, then monotonicity (2) gives $\mu(A \cup B) = 1$, and in that case, (2) says $1 = 1 + 0$, which is correct.

If we instead assume $\mu(A) = 0$, then (1'), which follows from (1) and (3), gives $\mu(A \cup B) = 0$, such that (2) says $0 = 0 + 0$, which is correct. This finishes one of the implications.

Suppose now that the corresponding μ is a finitely additive measure with $\mu(I) = 1$; want to show that $\mathcal{F}$ is an ultrafilter. Since $\mu(\emptyset) = 0$, we have $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(2): If $A \subseteq B$, we have a disjoint union $B = (B \smallsetminus A) \cup A$, which gives

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \smallsetminus A) \geq \mu(A)$$

and we have monotonicity.

(1): If $\mu(A) = \mu(B) = 1$, then monotonicity gives $\mu(A \cup B) = 1$, such that Lemma 10.3.6 gives

$$\mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B),$$

implying $\mu(A \cap B) = 1$. So we have (1), which we can translate to filter axiom (i)

We have now shown that $\mathcal{F}$ is a proper filter (by Corollary 10.3.2), so it remains to show that which corresponds to $\mathcal{F}$ being ultra, namely the Carathéodory condition (3) on I. For $A \subseteq I$ we have $A \cup A^c = I$ such that $\mu(A \cup A^c) = 1$, and $A \cap A^c = 0$ gives $\mu(A \cap A^c) = 0$. Then Lemma 10.3.6 gives $\mu(A) + \mu(A^c) = 1 + 0 = 1$, and we are done. □

Finally, we will mention that measure theory is not the only way to interpret ultrafilters; they can also be interpreted algebraically. We will see in the beginning of Section 11.9 that the ultrafilters on W can be interpreted as the maximal ideals of k^W for an arbitrary field k.

Ultrafilters are mysterious beings. We will later see that the continuum hypothesis[3] can appear when one asks natural questions pertaining ultraproducts. To give the user a feeling of what kind of behaviour one might get when studying ultrafilters, we end the chapter with a quote from Jan van Mill about the ultrafilters on $\omega = \mathbb{N}_0$ (equivalently, $\mathbb{N}$) in [44]:

> The space $\beta\omega$ is a monster having three heads. If one works in a model in which the Continuum Hypothesis (abbreviated CH) holds, then one will see only the first head. This head is smiling, friendly, and makes you feel comfortable working with $\beta\omega$. I do not know many open problems on $\beta\omega$ the answers of which are unknown under CH. (...) If one works in a model in which CH does not hold, then one will see the second head of $\beta\omega$. This head constantly tries to confuse you and you will never be able to decide whether it speaks the truth. (...) After reading the first two sections, the reader might feel that $\beta\omega$ is a horrible creature since it seems that all statements about it depend on special set theoretic assumptions. What can there 'really' (= in ZFC) be said about $\beta\omega$? The answer to this question is: quite a bit. The third head of $\beta\omega$ is its head in ZFC. Because of the first two heads, this head is rather vague, but some parts of it are very clear. If one wants to see the clear part, one will have to work like a slave, inventing ingeneous combinatorial arguments. One will have to use special properties of $\beta\omega$ and not only global properties. (...)

[3]The continuum hypothesis states that there are no sets with cardinality strictly inbetween that of $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$.

Chapter 11

Ultraproducts, Łoś' theorem and ultra-rings

In this chapter we will pave way for the rest of wthe thesis by introducing the main character of the story – the ultraproduct. We will define it, interpret it as a functor, discuss the "fundamental theorem of ultraproducts" Łoś' theorem[1], build fundamental theory of ultraproducts of rings, and see some interesting applications of ultraproducts to algebraically closed fields. We end the chapter with a digression of why there doesn't exist any first order axiomatizations of known rings like $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$.

From now on, W is a fixed index set and $\mathcal{F}$ a free ultrafilter on W. Unless otherwise is specified, all ultraproducts are on W with respect to $\mathcal{F}$.

11.1 Ultraproducts of sets

Definition 11.1.1. For a collection $(X_w)_{w\in W}$ of nonempty sets, we let its ultraproduct be the set

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} X_w = \left(\prod_{w\in W} X_w\right)/\sim,$$

[1]Pronounced approximately "wosh".

where the equivalence relation on the cartesian product is

$$(x_w) \sim (y_w) \iff \{w \in W \mid x_w = y_w\} \in \mathcal{F}.$$

We will often be interested in sets of the above form, For elements $x = (x_w)_{w\in W}$ and $y = (y_w)_{w\in W}$, we introduce the notation $[\![x = y]\!]$ for the set $\{w \in W \mid x_w = y_w\}$. In general, for $\varphi(w)$ a first-order formula with w a free variabe, we let $[\![\varphi]\!]$ be the set of all $w \in W$ in which $\varphi(w)$ holds.

Proposition 11.1.2. $\sim$ is an equivalence relation.

Proof. Reflexsivity: We have $[\![x = x]\!] = W \in \mathcal{F}$, as all filters on W catch W. Symmetry follows from equality itself being symmetric. Transitivity: Suppose $[\![x = y]\!] \in \mathcal{F}$, and $[\![y = z]\!] \in \mathcal{F}$. Then $\mathcal{F} \ni [\![x = y]\!] \cap [\![y = z]\!] \subseteq [\![x = z]\!]$ such that $[\![x = z]\!]$ is also caught by $\mathcal{F}$ by filter axiom (ii). □

We will also call the ultraproduct $\operatorname{ulim} x_w$ or $x_\natural$. Our choice of notation follows [41]. In other literature, especially in nonstandard analysis, it is common to call the ultraproduct ${}^*X$. We will call the X_w for *approximations* of $X_\natural$.

As a quotient set, we have a canonical projection $\prod_{w\in W} X_w \to X_\natural$. The projection in $X_\natural$ of a sequence $x = (x_w)_{w\in W}$ will be called $\operatorname{ulim}_{w\in W} x_w$, $\operatorname{ulim} x_w$, or $x_\natural$. This notation will be justified by an identification we will do at the end of Section 11.2.3.

In the case where all X_w-s are equal an X, $X_\natural$ is called the *ultrapower* of X. In that case we have a canonical function $X \to X_\natural$, which sends $x \in X$ to the equivalence class of the constant sequence with x in each position. This function is called the *diagonal embedding* of $X_\natural$. It is injective, so we can think of X as a subset of $X_\natural$, such that taking an ultrapower is a process that "adds more elements" to X. This view is used in nonstandard analysis, which deals primarily with ultrapowers, where elements of $X_\natural$ not in X are called *nonstandard elements* of X.

Definition 11.1.3. Given a collection of functions $f_w\colon X_w \to Y_w$ for $w \in W$, define a function $X_\natural \to Y_\natural$, called the ultraproduct of the f_w's, $f_\natural$ or $\operatorname{ulim}_{w\in W} f_w$, by

$$\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} f_w\right)\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} x_w\right) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f(x_w).$$

Proposition 11.1.4. The function $f_\natural$ is well-defined.

Proof. Suppose $x_\natural = y_\natural$, that is $\{w \in W \mid x_w = y_w\} \in \mathcal{F}$. Then

$$\mathcal{F} \ni [\![x = y]\!] \subseteq [\![f(x) = f(y)]\!].$$

Hence $\mathcal{F}$ also catches the set to the right by filter axiom (ii). $\square$

Remark 11.1.5. The notation $f_\natural$ for the ultraproduct of the function $f_w\colon X_w \to Y_w$ is justified on a set-theoretic level by the fact that if consider each f_w as the set

$$f_w = \{(x_w, f(x_w)) \mid x_w \in X_w\},$$

then the ultraproduct $f_\natural$ of the f_w-as functions will be equal to the ultraproduct of them as sets if we identify $\mathrm{ulim}_{w\in W}(x_w, y_w)$ with $(\mathrm{ulim}_{w\in W} x_w, \mathrm{ulim}_{w\in W} y_w)$. In the coming Section 11.2.3, we will se that there is a canonical bijection between these sets, and we will identify it there.

11.2 Functoriality for sets

The ultraproduct has an action on both objects and functions. This implies it might be a functor, which it turns out to be. In this section we will investigate the functoriality of the ultraproduct by finding categorical translations of phenomena we have already seen so far. The purpose is to give better intuition for the behaviour of the ultraproduct by looking at it categorically. We will also solve the problem of how we can get an ultraproduct of functions $f_w\colon X_w \times Y_w \to Z_w$ to be a function $X_\natural \times Y_\natural \to Z_\natural$, which is the last obstacle before we can take an ultraproduct of rings and – after checking the ring axioms – get a ring.

This functorial view will also give us a categorical packaging of ultraproduct properties we have already seen. This time we will only look at ultraproducts of sets. This has the advantage of when we are later interested in ultraproducts of other structures, then all we need to do is check that all the morphisms we use in our arguments here also become morphisms there.

11.2.1 Product categories

The ultraproduct needs a domain to be a functor. It is natural to think of the domain being some sort of product, as the ultraprodukt takes in multiple, “independent” objects and functions. SInce it takes in multiple, “independent” objects or functions, it is natural to think that the domain is some sort of product.

Definition 11.2.1. Given a collection of categories $\mathcal{C}_i$ for I an index set and $i \in I$, define the product category $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ as follows:

(i) The objects are tuples $(C_i)_{i \in I}$ where eavh C_i is an object of $\mathcal{C}_i$.

(ii) A morphism $f: (C_i)_{i \in I} \to (D_i)_{i \in I}$ is a tuple $(f_i)_{i \in I}$ of morphisms $f_i: C_i \to D_i$ in $\mathcal{C}_i$ for each $i \in I$ respeticely.

(iii) The identity morphism $\mathrm{id}: (C_i)_{i \in I} \to (C_i)_{i \in I}$ is $(\mathrm{id}_i)_{i \in I}$.

(iv) Composition is done pointwise.

Remark 11.2.2. The product category $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ is, as its name might suggest, the category that satisfies the universal property of the product in Cat.

We will often write a power $\prod_{i \in I} \mathcal{C}$ as $\mathcal{C}^I$ for convenience. This notation is also used for the functor category $\mathrm{Fun}(I, \mathcal{C})$, where I is viewed as a category with no morphisms other than those required by the category axioms. Our product category $\prod_{i \in I} \mathcal{C}$ is however isomorphic to $\mathrm{Fun}(I, \mathcal{C})$, so there is no notational conflict.

Digression 11.2.3. When one learns category theory, one often sees the product as a construction. Since we have the right domain, we can now think of it as a functor. The product in Set can be viewed as a functor $\prod_{i \in I}: \mathrm{Set}^I \to \mathrm{Set}$ which sends an object $(X_i)_{i \in I}$ to the cartesian product $\prod_{i \in I} X_i$, and a morphism $(f_i: X_i \to Y_i)_{i \in I}$ to the function $f: \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i$ given by $f((x_i)_{i \in I}) = (f_i(x_i))_{i \in I}$. We need to be more careful in the general case. We don't have a canonical choice of product, so for each object X in $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$, we need to pick a representative for the product of X, and let our product functor send X to it. The action on morphisms can then be made using the universal properties of our chosen representatives. This can be viewed as a corollary of the fact that a choice of limits $\varprojlim$ over $\mathcal{I}$ is a functor $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ if $\mathcal{C}$ contains all limits over a small category $\mathcal{I}$ [37, Prop. 3.6.1], since the product becomes the special case where $\mathcal{I}$ is a discrete category. This is not actally allowed in general, as the collection of objects of $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ is often a a class and one cannot do choice on classes in ZFC, but algebraists are used to sweep this under the rug. This non-uniqueness of $\prod$ and $\varprojlim$ as functors is not a problem in practice: All choices of limits of $\varprojlim$, and hence the special case $\prod$ are naturally isomorphic, so if we hold the view that one should only be able to distinguish between objects via isomorphism, then we are not able to differentiate between them. One can imagine how such a natural isomorphism might look, or see it as a consequence of the fact that each choice of $\varprojlim\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ is right adjoint to the diagonal functor $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})$, and left/right adjoints are unique up to natural isomorphism [26, p. 85, 88].

The interested reader is referred to [26, Chap. II.3] for more about product categories.

11.2.2 Digression: Existence in ZFC

When one does cateogry theory, it often happends that It happens often that when one does category theory, one works with constructions or statements that are impossible or illegal to formulate in ZFC. This is why many have a reasobale scepticism of when category theorists treat classes as if they were sets without thinking much of the details, even if they have good intentions; the foundations of mathematics is after all ZFC – at least for the most of us. It is both reasonable and interesting to investigate whether or not the construction we just did is legal in ZFC, even if normal practice in category theory is to ignore set-theoretic problems or use various extensions of ZFC. This is one of the few places of the thesis where we don't follow normal categorical practice; the rest of this thesis contains multiple crimes against set theory.

There are two hidden cartesian products in Definition 11.2.1:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\left(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i\right) &= \prod_{i\in I}\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i), \text{ and} \\ \mathrm{Hom}_{\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i}\big((X_i)_{i\in I},(Y_i)_{i\in I}\big) &= \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i,Y_i), \end{aligned} \tag{1}$$

so the question of whether or not the product category $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ exists is one of whether the cartesian products exist as classes or not. Having a collection of classes $(X_i)_{i\in I}$ can be interpreted in two ways:

(i) One has a collection of formulas $\varphi_i(x)$ that say $x \in X_i$ for each x and $i \in I$, and

(ii) One has a formula $\varphi(x,i)$, which says $x \in X_i$ for each x and $i \in I$.

In the first case, we say that the formulas $(\varphi_i(x))_{i\in I}$ characterise the class. It's hard to make interesting new classes in the general situation (i). There isn't enough space for all of the $\varphi_i(x)$-s in one formula if I is infinite, as formulas must have finite length. The special case (ii) is thus much more suited for class theory. It is worth mentioning in coming up often and letting us quantify over I, allowing us to make formulas like $(\forall i \in I)(x \in X_i)$.

Lemma 11.2.4. If $(X_i)_{i\in I}$ is a collection of classes indexed over a set I characterised by a formula $\varphi(x,i)$, then the cartesian product $\prod_{i\in I} X_i$ exists as a class.

Proof. This is about checking the defintiions of cartesian products in the case of classes, and noting where we quantify over I. We will recount the definitions here: For classes X and Y, we define $X \times Y$, $X \subseteq Y$ and class functions $f\colon X \to Y$ exactly like we do for sets (cf. [21, s. 9ff]):

$$\begin{aligned} &X \times Y = \{z \mid (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = (x,y))\}, \quad \text{and} \\ &X \subseteq Y \iff (\forall x)(x \in X \to x \in Y) \end{aligned}$$

A class function $f\colon X \to Y$ is then a subclass $f \subseteq X \times Y$ such that for each $z \in f$, there is $x \in X$ and a unique $y \in Y$ such that $z = (x, y$: We can now define the cartesian product of classes X_i indexed over a set I with exactly the same formula as that for products (cf. [21, s. 53]):

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f \mid f\colon I \to \text{Set is a class function and } f(i) \in X_i \text{ for each } i \in I\} \quad (2)$$

We are allowed to quantify over I here because $\varphi(x,i)$ characterises all of the X_i's; the last part says $(\forall i \in I)(\varphi(f(i), i))$. ☐

Remark 11.2.5. When one sees (2), one might think that a product $\prod_{i\in I} X_i$ should contain all class functions $f\colon I \to \text{Set}$ instead of "just" the corresponding set functions. In this case, the two concepts coincide since I is a set: For a class function $f\colon I \to \text{Set}$, define a class function $g\colon I \to \text{Set}$ by $g(i) = (i, f(i))$. In general, the image of a class function under a set is itself a set [21, p. 4], so the image $g(I) = f$ is a set, and the class function we began with was a set function all along.

We can now give a condition for product categories to exist.

Proposition 11.2.6. Suppose $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ is a collection of categories indexed over a set I such that

(i) The object classes $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$ for $i \in I$ are characterised by a formula $\varphi(x,i)$, and

(ii) The Hom-sets $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(x,y)$ for $i \in I$ and $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$ are characterised by a formula $\psi(f,x,y,i)$.

Then the product category $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ exists in ZFC.

Proof. Use Lemma 11.2.4 on both the objects and morphisms by (1). □

For the purposes of this thesis, Proposition 11.2.6 is more than enough. Almost all of the products we will look at are products of one category, which obviously satisfies the hypothesis in the proposition.

Digression 11.2.7. One can show with the same trick as for Lemma 11.2.4 that under the same hypothesis on a collection of classes $(X_i)_{i\in I}$, then the union $\bigcup_{i\in I} X_i$ and intersection $\bigcap_{i\in I} X_i$ also exist as classes. One can use the union to construct the coproduct of a collection of categories similarly to what we did for the product.

11.2.3 Functoriality and properties

We now have almost everything we need to give a categorical interpretation of the ultraproduct. We want it to be a functor with domain Set^w, so we must also define $X_\natural$ when some of the X_w are empty. We shouldn't use our normal definition in htis case. We don't want the ultraproduct to be affected by "small" changes. If one of the X_w is empty, then the product $\prod_{w\in W} X_w$ becomes empty, and hence $X_\natural$ if we used our normal definition. Our solution becomes as follows:

If $[\![X_w = \emptyset]\!] \in \mathcal{F}$, then we let $X_\natural = \emptyset$. Otherwise, if $[\![X_w = \emptyset]\!] \notin \mathcal{F}$, we let $X_\natural$ be an ultraprodukt where the empty X_w-s are replaced with nonempty sets. This is well-defined by Convention 11.2.17, an identification we will do later. Recall from set theory that for each set B there is a unique function $\emptyset \to b$, and that there is no function $B \to \emptyset$ unless $B = \emptyset$. Given functions $f_w \colon X_w \to Y_w$, and supposing $[\![X_w = \emptyset]\!] \in \mathcal{F}$ or $[\![Y_w = \emptyset]\!] \in \mathcal{F}$, then there is a unique function $X_\natural \to Y_\natural$, which we define $f_\natural$ as in these cases. For our purposes, we don't need ultraproducts of not necessarily empty sets except for the below proposition, as when we specialize to ultraproducts of algebraic structures, all of these will be nonempty. We can now say:

Proposition 11.2.8. The ultraproduct of sets is a functor

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} \colon \mathrm{Set}^W \to \mathrm{Set}\,.$$

Proof. This is a straightforward verification. Suppose first that all A_w, B_w and C_w are nonempty. For composition, suppose we have

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$$

in Set^W, and write $A = (A_w)_{w\in W}$, $f = (f_w)_{w\in W}$, and so on. Then $f_\natural \circ g_\natural$ and $(f\circ g)_\natural$ are functions $A_\natural \to C_\natural$. Pick $a_\natural \in A_\natural$. We calculate:

$$(f\circ g)_\natural(a_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w\in W}(f\circ g)_w(a_w) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f_w(g_w(a_w)),$$

and also,

$$(f_\natural \circ g_\natural)(a_\natural) = f_\natural\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} g_w(a_w)\right) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f_w(g_w(a_w)),$$

so composition is preserved. Identity remains.

Recall that the identity morphism of an object $(A_w)_{w\in W}$ is $\mathrm{id} = (\mathrm{id}_w)_{w\in W}$ where $\mathrm{id}_w \colon A_w \to A_w$ are the identity morphisms. Hence $\mathrm{id}_\natural \colon A_\natural \to A_\natural$ is

$$\mathrm{id}_\natural\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} a_w\right) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} \mathrm{id}_w(a_w) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} a_w$$

such that $\mathrm{id}_\natural$ is the identity morphism of $A_\natural$. The case where some of the A_w, B_w and C_w are empty is omitted. □

We have a corresponding functoriality view of ultrapowers:

Proposition 11.2.9. The ultrapower over W is an endofunctor[2] $\mathrm{ulim}\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$, and the diagonal embeddings form a natural transformation $\mathrm{id}_{\mathrm{Set}} \to \mathrm{ulim}$ of functors $\mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$.

Proof. This is an unproblematic verification. The ultrapower's actions equal the composition of functors $\mathrm{Set} \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Set}^W \xrightarrow{\mathrm{ulim}} \mathrm{Set}$ where Δ is the diagonal functor sending X to the constant sequence $(X)_{w\in W}$ and doing similarly on morphisms. Hence, for functoriality we need only check that Δ indeed is a functor. This can be checked manually, or by seeing that Δ is induced from the universal property of Set^W on a the collection of identity morphisms $\mathrm{id}\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ indexed over W.

[2]An endofunctor is a functor from a category to itself.

Pick sets A and B. Write ι_A for the diagonal embedding $A \to A_\natural$, and similarly for B.

The diagonal embeddings forming a natural transformation translates to the following diagram commuting for all choices of A and B, and functions $f\colon A \to B$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "f"] & A_\natural \arrow[d, "f_\natural"] \\ B \arrow[r, "\iota_B"] & B_\natural \end{tikzcd}$$

which is easy to check. □

Once we have identified the diagonal embeddings, which we will do later in this section, we may interpret the abovementioned natural transformation as each $f\colon X \to Y$ being extended by its ultrapower $f_\natural\colon X_\natural \to Y_\natural$.

We want to define the ultraproduct of $f_w\colon A_w \times B_w \to C_w$ to be a function $A_\natural \times B_\natural \to C_\natural$, instead of $(\operatorname{ulim}_{w\in W} A_w \times B_w) \to C_\natural$, in order to transfer binary operations of algebraic structures like groups and rings. One possible solution to get an ultraproduct of the f_w $A_\natural \times B_\natural \to C_\natural$, is $g\colon A_\natural \times B_\natural \to C_\natural$ given by

$$g\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} a_w, \operatorname*{ulim}_{w\in W} b_w\right) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f_w(a_w, b_w),$$

which by a similar argument to that in Proposition 11.1.4 is well-defined. One can check that this also is equal to er veldefinert. $f_\natural(\operatorname{ulim}_{w\in W}(a_w, b_w))$, the other candidate for what g could have been. Since one valid definition of g is as a precomposition of $f_\natural$, we have a case for $f_\natural$ and g in some sense doing the same thing, and it would be very sad if there was no such result. After all, we want an ultraproduct of a multivariable function to remain multivariable.

One imaginable solution to this problem would be if it turned out that $(A \times B)_\natural$ in one canonical way or another were in bijection with $A_\natural \times B_\natural$. In that case, if g was the composition

$$A_\natural \times B_\natural \xrightarrow{\simeq} (A \times B)_\natural \xrightarrow{f_\natural} C_\natural,$$

then the canonicity of the bijections should make $f_\natural$ and g so to speak "do the same thing". This turns out to be true, and we will now show this.

In the transition from power to product, the functors change domain from Set to Set^W, so we need to know what products look like in Set^W in order to show that the ultraproduct preserves them.

Lemma 11.2.10. (Products in product categories) Pick two nonempty sets I and J. Suppose $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ is a collection of categories such that each $\mathcal{C}_i$ has all products indexed over J. Then $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ has all products indexed over J, and they can be constructed as follows:

For objects $(B_j)_{j\in J}$, get the decomposition $B_j = (B_{i,j})_{i\in I}$ for objects $B_{i,j}\in\mathcal{C}_i$ for each $j\in J$. Now let $B = \left(\prod_{j\in J} B_{i,j}\right)_{i\in I}$, and let the corresponding projections be $\pi_j\colon B\to B_j$ by $\pi_j = (\pi_{i,j})_{i\in I}$ where $\pi_{i,j}\colon\prod_{k\in J} B_{i,k}\to B_{i,j}$ is projection. Then B together with these π_j-s is a product of the object $(B_j)_{j\in J}$ in $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$.

Proof. This is a straightforward verification of the universal property of the product. It is left to the reader, who is advised to be careful. $\square$

Proposition 11.2.11. The ultraproduct of sets $\operatorname{ulim}\colon \mathrm{Set}^W\to\mathrm{Set}$ commutes with finite product in the sense that it sends finite product cones to (finite) product cones. In particular, for each collection $(X_{i,w})_{i\in I,w\in W}$ med I endelig, there is a canonical bijection

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W}\prod_{i\in I} X_{i,w}\simeq\prod_{i\in I}\operatorname*{ulim}_{w\in W} X_{i,w}.$$

Proof. Since I is finite, it is enough to show this for the case $|I| = 2$ and use induction on the rest. The argument we will do is the same if one wants to do everything all at once, but the notation becomes worse.

To show that ulim sends product cones to product cones, it is enough to show that ulim sendt one product cone to a product cone, as all product cones are isomorphic as cones. We choose our particular product in Set to be the carteian, and we use Lemma 11.2.10 for our product in Set^W. Pick $A = (A_w)_{w\in W}$ and $B = (B_w)_{w\in W}$. Suppose first that all A_w-s and B_w-s are nonempty. For each $w\in W$ we have projections

$$A_w \xleftarrow{\pi_w^1} A_w\times B_w \xrightarrow{\pi_w^2} B_w$$

where the $\times$ is a cartesian product.

By Lemma 11.2.10, the product $A\times B$ in Set^W exists, and we have a formula

$$(A_w)_{w\in W}\times(B_w)_{w\in W} = (A_w\times B_w)_{w\in W}$$

and projections $\pi^1 = (\pi^1_w)_{w\in W}$ and $\pi^2 = (\pi^2_w)_{w\in W}$. We then get functions

$$\pi^1_\natural\colon (A\times B)_\natural\to A_\natural \quad\text{ and }\quad \pi^2_\natural\colon (A\times B)_\natural\to B_\natural,$$

which we can combine to get $\alpha\colon (A \times B)_\natural \to A_\natural \times B_\natural$ med formel

$$\alpha\left(\operatorname*{ulim}_{w \in W}(a_w, b_w)\right) = \left(\operatorname*{ulim}_{w \in W} a_w, \operatorname*{ulim}_{w \in W} b_w\right).$$

This gives a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
A_\natural \arrow[d, "\mathrm{id}"] & (A \times B)_\natural \arrow[l, "\pi^1_\natural"'] \arrow[r, "\pi^2_\natural"] \arrow[d, "\alpha"] & B_\natural \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
A_\natural & A_\natural \times B_\natural \arrow[l, "\pi^3"'] \arrow[r, "\pi^4"] & B_\natural
\end{tikzcd} \tag{3}$$

where the lower row is (the canonical) product cone of $A_\natural$ and $B_\natural$, and the upper is ulim applied to the product cone $A \longleftarrow A \times B \longrightarrow B$ in Set^W. Hence, if α is an isomorphism, then ulim sends product cones to product cones, as the diagram above will then be an isomorphism of cones. We claim that α is an isomorphism.

For surjectivity, pick $\operatorname{ulim}_{w \in W}(a_w, b_w)$ in the codomain. Then

$$\alpha\left(\operatorname*{ulim}_{w \in W} a_w, \operatorname*{ulim}_{w \in W} b_w\right) = \operatorname*{ulim}_{w \in W}(a_w, b_w),$$

so the function is surjective. For injectivity, if $(a, b)_\natural = (c, d)_\natural$, that is

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W}(a_w, b_w) = \operatorname*{ulim}_{w \in W}(c_w, d_w),$$

then $\mathcal{F} \ni [\![(a, b) = (c, d)]\!] \subseteq [\![a = c]\!]$, such that $a_\natural = c_\natural$. The same argument shows $b_\natural = d_\natural$, so α is injective.

Hence, since α is an isomorphism, the upper row in the diagram is a product cone, implying that ulim preserved the product cone we began with. It remains to argument for the formula

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} \prod_{i \in I} X_{i,w} \simeq \prod_{i \in I} \operatorname*{ulim}_{w \in W} X_{i,w}.$$

The canonical isomorphisms comes as follows: For a collection $(X_i)_{i \in I}$ of objects in Set^W, get a decomposition $X_i = (X_{i,w})_{w \in W}$. Then, Lemma 11.2.10 gives a canonical product

$$\prod_{i \in I} X_i = \left(\prod_{i \in I} X_{i,w}\right)_{w \in W}$$

so since ulim preserves finite products, we get a canonical isomorphism $\operatorname{ulim}_{w\in W} X \simeq \prod_{i\in I} \operatorname{ulim}_{w\in W} X_i$. By using the decomposition, it can be written as

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} \prod_{i\in I} X_{i,w} \simeq \prod_{i\in I} \operatorname*{ulim}_{w\in W} X_{i,w}.$$

Let us now assume that not all of the $X_{i,w}$-s are nonempty. This can happen in to ways:

(i) $[\![A=\emptyset]\!] \notin \mathcal{F}$ and $[\![B=\emptyset]\!] \notin \mathcal{F}$

(ii) At least one of $[\![A=\emptyset]\!]$ and $[\![B=\emptyset]\!]$ are caught by $\mathcal{F}$.

In the first case, the definition of the ultraproduct says that we replace all of empty A_w-s and B_w-s with a nonempty set. We are then in a situation where we can apply the above argument. Suppose now that we are in the second case, where without loss of generality $[\![A=\emptyset]\!] \in \mathcal{F}$. Then $A_\natural = \emptyset$. Furthermore,

$$\mathcal{F} \ni [\![A=\emptyset]\!] \subseteq [\![A\times B=\emptyset]\!]$$

such that $(A\times B)_\natural$ also becomes empty. Since both of these are empty, we have a unique bijection $\alpha\colon (A\times B)_\natural \to A_\natural \times B_\natural$, and one can check that the diagram (3) still commutes. Hence the image of the ulim functor under a finite product cone is (isomorphic to) a product cone in all cases, so it preserves finite products. $\square$

We can now easily take "multivariable ultraproducts/-powers" of multivariable functions such as $f\colon A\times B \to C\times D$, with the "ultrapower" $g\colon A_\natural \times B_\natural \to C_\natural \times D_\natural$ being the composition

$$A_\natural \times B_\natural \xrightarrow{\simeq} (A\times B)_\natural \xrightarrow{f_\natural} (C\times D)_\natural \xrightarrow{\simeq} C_\natural \times D_\natural$$

where the isomorphisms (bijections) are those we get from Proposition 11.2.11. One can check that this coincides with defining

$$g\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W}(a_w,b_w)\right) = \left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} g_1(a_w,b_w), \operatorname*{ulim}_{w\in W} g_2(a_w,b_w)\right)$$

where $g_1\colon A\times B\to C$ and $g_2\colon A\times B\to D$ are the first and other components of g respectively. More generally, for each collection of functions

$$f_w\colon A_w^1\times\cdots\times A_w^n \to B_w^1\times\cdots\times B_w^m$$

for $w \in W$, write $f^i_w\colon A^1_w \times \cdots \times A^n_w \to B^i_w$ for the i-th component of f, and let $g\colon A^1_\natural \times \cdots \times A^n_\natural \to B^1_\natural \times \cdots \times B^m_\natural$ by

$$g\big(a^1_\natural, \ldots, a^n_\natural\big) = \left(f^1_\natural\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W}(a^1_w, \ldots, a^n_w)\right), \cdots, f^m_\natural\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W}(a^1_w, \ldots, a^n_w)\right)\right).$$

One can then check that the following diagram commutes,

$$\begin{tikzcd}
(A^1 \times \cdots \times A^n)_\natural \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "f_\natural"] & A^1_\natural \times \cdots \times A^n_\natural \arrow[d, "g"] \\
(B^1 \times \cdots \times B^m)_\natural \arrow[r, "\simeq"] & B^1_\natural \times \cdots \times B^m_\natural
\end{tikzcd}$$

where the horizontal bijections are the fitting α-s from the proof of Proposition 11.2.11.

When one works on the level of sets, it is irritating to have to have contrl of the canonical bijections between products of ultraproducts and ultraproducts of products. We choose then in light of Proposition 11.2.11 to identify these canonical bijections

Convention 11.2.12. From now on, we will identify the canonical bijections of the form

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} \prod_{i\in I} X_{i,w} \simeq \prod_{i\in I} \operatorname*{ulim}_{w\in W} X_{i,w}$$

given by Proposition 11.2.11. In particular, the ultraproduct of a multivariable function is still a multivariable function.

We have used the notation $x_\natural$ for an element of an ultraproduct $X_\natural$. Let us identify these:

Convention 11.2.13. For sets $x_w \in X_w$, identify $\iota\colon \{x_\natural\} \to X_\natural$ given by $\iota(x_\natural) = \overline{(x_w)_{w\in W}}$, such that $x_\natural \in X_\natural$.

We can thus say

Corollary 11.2.14. For sets x_w, y_w for $w \in W$, we have $[\![x_w \in X_w]\!] \in \mathcal{F}$ if and only if $x_\natural \in X_\natural$.

By Convention 11.2.13, we can show a useful result we otherwise would have had to identify, namely that $\natural$ "commutes with taking finite sets":

Lemma 11.2.15. Given sets $x_{i,w}$ for $1 \leq i \leq n$ and $w \in W$,

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W}\{x_{1,w},\dots,x_{n,w}\} = \{x_{1,\natural},\dots,x_{n,\natural}\}.$$

Proof. Vi first show $\supseteq$. We have $x_{i,w} \in \{x_{1,w},\dots,x_{n,w}\}$ for each $w \in W$, so by Convention 11.2.13, $x_{i,\natural} \in \operatorname{ulim}_{w\in W}\{x_{1,w},\dots,x_{n,w}\}$ for each i, giving us $\supseteq$.

Since the sets $\{x_{1,w},\dots,x_{n,w}\}$ all have cardinality n for hver $w \in W$, one can show that the set $\operatorname{ulim}_{w\in W}\{x_{1,w},\dots,x_{n,w}\}$ also is finite with cardinality n, such that the inclusion $\supseteq$ is an equality. $\square$

This gives another perspektive of Proposition 11.2.11. Since 2-tuples are usually defined as $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$, and n-tuples are derived from these, Lemma 11.2.15 gives that $\operatorname{ulim}_{w\in W}(a_w,b_w) = (a_\natural,b_\natural)$, and correspondingly for longer tuples.

It is also appropriate to identify the diagonal embeddings.

Convention 11.2.16. From now on we will identify all diagonal embeddings.

The ultraproduct $\iota_\natural\colon A_\natural \to B_\natural$ of inclusions $\iota_w\colon A_w \to B_w$ can be shown to be injective. It is furthermore canonical; not only as an ultraproduct of canonical functions, one can also see this by looking at its formula.

Convention 11.2.17. We identify ultraproducts of functions where almost all of them are inclusions.

From this convention we also get that if $[\![X_w = Y_w]\!] \in \mathcal{F}$, then $X_\natural = Y_\natural$: Let $f_w\colon X_w \to Y_w$ be the identity for those w where $X_w = Y_w$, and something else otherwise. Then $f_\natural$ is an inclusion by the above convention, so $X_\natural \subseteq Y_\natural$. However, one can also show that it is bijective, so the sets must be equal.

Remark 11.2.18. Ultraproducts commute with many other set-theoretic operations (up to canonical bijections), for instance finite unions and intersections, and set difference. There are also simple formulas for how they behave with regard to infinite set-theoretic operations like infinite unions, intersections and products. See [18, Chap. 13.8] and [33, p. 15ff] for more.

11.3 Ultra-rings I

If the A_w-s are rings, then one can think of two ways $A_\natural$ could be a ring. The first would be if the equivalence relation that created $A_\natural$ turned out to come from an ideal, and the second would be if the ultraproducts of the ring operations $+_\natural : A_\natural \times A_\natural \to A_\natural$ and $\cdot_\natural : A_\natural \times A_\natural \to A_\natural$ themselves gave $A_\natural$ a ring structure. It turns out that these both give equivalent ring structures on $A_\natural$.

Proposition 11.3.1. An ultraproduct of rings is a ring, both as the quotient ring hinted at by Definition 11.1.1, and by taking the ultraproducts of the ring operations of the approximations. The zero element is $0_\natural$, and the identity is $1_\natural$.

Proof. Pick rings A_w for $w \in W$. Recall that $A_\natural = \left(\prod_{w\in W} A_w\right)/\sim$. We show first that $\sim$ comes from an ideal. Let $\mathfrak{a} = \{a \in \prod_{w\in W} A_W \mid [\![a = 0]\!] \in \mathcal{F}\}$. If $\mathfrak{a}$ were an ideal, then $\sim$ would be the induced equivalence relation. For $a, b \in \mathfrak{a}$, we have $\mathcal{F} \ni [\![a = 0]\!] \cap [\![b = 0]\!] \subseteq [\![a + b = 0]\!]$ so $\mathcal{F}$ catches the set to the right, and $a + b$ lies in $\mathfrak{a}$. For $a \in \mathfrak{a}$ and $r \in \prod_{w\in W} A_w$ we have $\mathcal{F} \ni [\![a = 0]\!] \subseteq [\![ra = 0]\!]$ such that $\mathcal{F}$ catches the set to the right, and $ra \in \mathfrak{a}$. Hence $\mathfrak{a}$ is an ideal, and $A_\natural$ gets a structure as a quotient ring. The status of $0_\natural$ and $1_\natural$ as zero and identity follow by projecting the zero and identity in the product ring$\prod_{w\in W} A_w$.

For the rest, it is enough to show that the ultraproducts $+_\natural : A_\natural \times A_\natural \to A_\natural$ and $\cdot_\natural : A_\natural \times A_\natural \to A_\natural$ do the same as the ring operations given by $\mathfrak{a}$. This follows from the fact that the ring operations in $\prod_{w\in W} A_w$ are done pointwise; the details are left to the reader. □

Remark 11.3.2. The ring $A_\natural$ deends on the choice of ultrafilter on W, and there are $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))|$ ultrafilters on W [21, p. 75]. It is natural to ask if this choice can affect the ring up to isomorphism. The following "synthetic" example confirms that the choice is important: Let $W = \mathbb{N}$, and A_n switch between being two nonisomorphic rings B and C depending on whether or not n is an even or odd number. Then $A_\natural$ will be isomorphic to either B and C, and which one is determined by $\mathcal{F}$ catching either the odd numbers or the even numbers. More subtle is the fact that the choice is also important for ultrapowers. Let $W = \mathbb{N}$. It has been shown that the continuum hypothesis, which is indepenednt of ZFC, implies that $\mathbb{R}_\natural$ is unique up to isomorphism [18, Chap. 3.16]. Furthermote, it is folklore that the negation of the continuum hypothesis implies that $\mathbb{R}_\natural$ is not unique up to isomorphism. For more results of this type, see [17].

Digression 11.3.3. The above construction has a purely algebraic characterisation, see [41, Chap. 2.5].

Rings which are isomorphic to an ultraproduct of rings is called an ultra-ring after [41]. We will write $+$ and $\cdot$ for the ring operations of ultra-rings, not $+_\natural$ and $\cdot_\natural$.

In many cases we can transfer results that hold pointwise for each $w \in W$ will hold for the ultraproduct. We will soon see that this follows from a more general principle called Łoś' theorem, but for the time being, we have to settle with the following:

Lemma 11.3.4. Pick rings A_w and B_w for each $w \in W$. Then the following holds:

(i) The ultraproduct $f_\natural \colon A_\natural \to B_\natural$ of ring homomorphisms $f_w \colon A_w \to B_w$ is a ring homomorphism.

(ii) If each A_w is a field, then so is $A_\natural$.

Proof. The first point is left to the reader; we show (ii). Pick $0 \neq a_\natural \in A_\natural$, giving $[\![a \neq 0]\!] \in \mathcal{F}$. Define $b_\natural \in A_\natural$ by

$$b_w = \begin{cases} a_w^{-1}, & a_w \neq 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Requirement $a_w \neq 0$ is equivalent to $w \in [\![a \neq 0]\!]$, so $[\![ab = 1]\!] = [\![a \neq 0]\!] \in \mathcal{F}$ such that $a_\natural b_\natural = 1_\natural$, making $A_\natural$ a field. $\square$

In the argument above, we wanted to define $(\operatorname{ulim} a_w)^{-1} = \operatorname{ulim} a_w^{-1}$, but we couldn't do it because a_w^{-1} didn't necessarily exist for each $w \in W$. It turned out not to be a problem, as a_w^{-1} existed for *almost each* w. This type of trick is usual in ultrafilter arguments.

11.4 Functoriality for rings

We originally defined ultraproducts of sets, but are primarily interested in rings. We will now check that the functoriality results we had in Section 11.2 also hold in the category CRing of rings.

Proposition 11.4.1. The ultraproduct of rings is a functor

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} \colon \mathrm{CRing}^W \to \mathrm{CRing},$$

and the ultrapower is a functor $\operatorname{ulim}_{w \in W} \colon \mathrm{CRing} \to \mathrm{CRing}$. Furthermore, in the latter case, the diagonal embeddings form a natural transformation $\mathrm{id}_{\mathrm{CRing}} \to \operatorname{ulim}$ of functors $\mathrm{CRing} \to \mathrm{CRing}$.

Proof. By Propositions 11.2.8 and 11.2.9, they are both functors on the level of sets, so we only need to check that all of the functions involved in the proofs of those propositions are ring homomorphisms. This is left to the reader. □

In particular, the diagonal embedding of a ring to its ultrapower is a ring homomorphism.

Proposition 11.4.2. The ultraproduct of rings $\mathrm{ulim}\colon \mathrm{CRing}^W \to \mathrm{CRing}$ preserves finite products.

Proof. Follow the proof of Proposition 11.2.11, using Lemma 11.3.4(i) when needed and observing that the function α is a ring homomorphism because it can be obtained by the universal property of the product $A_\natural \times B_\natural$. □

At the end of Section 11.2.3, we identified products of ultraproducts as ultraproducts of products, all diagonal embeddings and ultraproducts of inclusions. From the above we have in addition that when one has rings, all of the identified functions are ring isomorphisms.

11.5 Łoś' theorem for rings

We want to be able to transfer properties between an ultraproduct $A_\natural$ and its approximations A_w in greater generality than what we have already seen, for example in Proposition 11.3.1 and lemma 11.3.4. It would be nice if we could prove one "transfer theorems" to rule them all. The solution to this issue is Łoś' theorem, a model-theoretic result that is also called the fundamental theorem of ultraproducts. For us, Łoś' theorem will have the same role as the so-called transfer principle of nonstandard analysis, which is a special case of Łoś. The theorem is critical for all work on ultraproducts, so for a gentle introduction we'll give three versions of the theorem with different levels of generality and need for model theory. In this section we will give a model theory-free version and a stronger version allowing quantifiers, both from [41]. Both of these talk about rings and algebras. In the next section, we will give the proper version of Łoś' theorem which we will use in the rest of this thesis.

Before we begin, let us illustrate its strength with some results it can show. Lemma 11.3.4 is an immediate consequence of Łoś' theorem. Here are some more examples:

Proposition 11.5.1. Pick functions $f_w\colon X_w \to Y_w$, rings A_w, and elements $a_w \in A_w$. Then the following hold:

(i) $f_\natural$ is injective iff almost every f_w is.

(ii) $f_\natural$ is surjective iff almost every f_w is.

(iii) $f_\natural$ is bijective iff almost every f_w is.

(iv) $A_\natural$ is an integral domain iff almost every A_w is.

(v) $A_\natural$ is a field iff almost every A_w is.

(vi) The ultraproduct $a_\natural$ of elements $a_w \in A_w$ is a unit iff almost every a_w .is

(vii) An ultraproduct of sets of cardinality $\leq n$ is a set of cardinality $\leq n$.

For B_w a collection of A-algebras, $B_\natural$ has a canonical structure as an A-algebra, either by letting A act pointwise, and by taking the ultraproduct of the algebra structure ring homomorphisms $A \to B_w$ Lemma 11.3.4.

We can now give the first version of Łoś' theorem:

Proposition 11.5.2 (Equational Łoś)**.** Let A be a ring and B_w be A-algebras. Pick $n \in \mathbb{N}_0$ and $f \in A[x_1, \ldots, x_n]$, and let $b_w \in B_w^n$ be n-tuples of elements in B_w for every $w \in W$. Then $f(b_\natural) = 0$ in $B_\natural$ if and only if $f(b_w) = 0$ in B_w for almost every $w \in W$. A similar statments also holds for equations of the form $\neq 0$.

Proof. The case $n = 0$ says that for $a \in A$, we have $a \cdot 1 = 0$ in $B_\natural$ if and only if $a \cdot 1 = 0$ in B_w for almost each w. This is a simple verification.

Assume hereafter that $n \geq 1$. It is enough to show $\operatorname{ulim}_{w \in W} f(b_w) = f(b_\natural)$. Unformally and in practive, we think of the statements "$f(b_w) = 0$" and "$f(b_\natural) = 0$" as saying that we should replace each x_i in f with the corresponding component of b_w or $b_\natural$, and use the A_w- and $A_\natural$-structure when needed to get the equations the statements are supposed to represent, but we need the formalization for our proof here.

Write $(b_w)_n$ for the n-th component of b_w, and $(b_\natural)_n$ for the n-te component of $b_\natural$ (Convention 11.2.12). The element $f(b_w)$ in B_w is the image of f under the (unique) ring homomorphism $g_w \colon A[x_1, \ldots, x_n] \to B_w$ sending $x_i \mapsto (b_w)_i$ for each i.

These exist; take the ring homomorphism $A \to B_w$ and use the universal property of the polynomial ring (Corollary 13.4.2). Similarly, $f(b_\natural)$ i $B_\natural$ is the image of f under (the unique) ring homomorphism $\psi \colon A[x_1, \ldots, x_n] \to B_\natural$ sending $x_i \mapsto (b_\natural)_i$. Define the composition

$$\varphi \colon A[x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{\iota} (A[x_1, \ldots, x_n])_\natural \xrightarrow{g_\natural} B_\natural$$

where ι is the diagonal embedding. This is then a ring homomorphism by Lemma 11.3.4, and $\varphi(x_i) = \operatorname{ulim}_{w\in W}(b_w)_i = (b_\natural)_i$, such that the universal property of the polynomial ring $A[x_1,\ldots,x_n]$ gives $\varphi = \psi$. Hence

$$f(b_\natural) = \varphi(f) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} g_w(f) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} f(b_w)$$

and we are done. $\square$

Note that since each ring has a canonical structure as a $\mathbb{Z}$-algebra, we may also use the above proposition in situations where we only have rings to begin with.

Example 11.5.3. Let us show Proposition 11.5.1(vi), that for rings A_w and elements $a_w \in A_w$ for each $w \in W$, then $a_\natural$ is a unit if and only if almost every a_w is. By Łoś (Proposition 11.5.2) we have that for each choice of elements $b_w \in A_w$,

$$a_w b_w = 1_w \text{ for almost all } w \iff a_\natural b_\natural = 1_\natural \tag{4}$$

If almost all a_w ar units, then we let b_w be a_w^{-1} for the w where it exists, and something else otherwise. Then (4) gives $a_\natural b_\natural = 1_\natural$, such that $a_\natural$ is a unit in $A_\natural$. Going the other way, if $a_\natural$ were a unit, then it would have an inverse $b_\natural$. Then use (4).

In the example above, we had to do some work and pick b_w-s to compensate for the lack of quantifier handling in Proposition 11.5.2. We can avoid this by using a stronger version of Łoś. This one uses the concept of formulas from logic. We will not introduce them here, as we will introduce them in the next section.

Proposition 11.5.4 (Equational Łoś with quantifiers)**.** Let A be a ring, and pick A-algebras B_w for each $w \in W$. Pick a formula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ in the language of A-algebras with n free variables. For elements $x_{1,w},\ldots,x_{n,w}$ of A_w, we have that $\varphi(x_{1,\natural},\ldots,x_{n,\natural})$ holds in $B_\natural$ if and only if $\varphi(x_{1,w},\ldots,x_{n,w})$ holds in A_w for almost every $w \in W$.

Proof. Omitted. This is a corollary of Łoś' theorem at full strength (Theorem 11.6.13) which we will look at in the next section. $\square$

We can now show Proposition 11.5.1(vi) by instead "transferring" the statement $\varphi(a) \equiv (\exists b)(ab = 1)$ in the language of $\mathbb{Z}$-algebras (rings) between the A_w-s and $A_\natural$.

Example 11.5.5. Let us show Proposition 11.5.1(iv), namely that A_w is an integral domain for almost all w if and only if $A_\natural$ is one. Let φ be the formula

$$(\forall x, y)(xy = 0 \to [x = 0 \text{ or } y = 0]).$$

Give the rings A_w and $A_\natural$ structure as $\mathbb{Z}$-algebras. Then Proposition 11.5.4 says that φ holds in A_w (i.e. that A_w is an integral domain) for almost all w if and only if it holds in $A_\natural$, i.e. that itself is an integral domain.

11.6 Łoś at full strength

We will now study the full version of Łoś' theorem. The price we pay for a version of Łoś that can be used in "all" situations is that we get a result which is far more technical than the two versions we've seen until now. In return we get the "right" version of the result for general use of ultraproducts in nonstandard analysis, algebra, and other mathematics. In comparison to the weaker versions of Łoś we have given are ad hoc. First time readers, fear not! The most important part of this section is learning how to use the theorem. We will give a full justification of why the result is true, and why we can use it like we'd like to.

In order to formulate Łoś, we need some model-theoretic terminology. We will follow [28] and [21], with some simplifications.

Definition 11.6.1. A (first-order) language $\mathcal{L}$ is a collection of different symbols separated in the following categories: (i) Parantheses: "(" and ")", (ii) Connectives: "$\wedge$" and "$\neg$", (iii) Quantifier: "$\forall$", (iv) Variable symbols, (v) Equality: "$=$", (vi) Infinitely many constant symbols, (vii) For each $n \in \mathbb{N}$, a collection of n-ary function symbols, and (viii) For each $n \in \mathbb{N}$, a collection of n-ary relation symbols.

By n-ary we mean that it takes n arguments. For example, the binary functions are the 2-ary functions. An example of a language is that of rings, one with two constant symbols 0 and 1, and two binary functions $+$ and $\cdot$. Given two strings φ and ψ, we will write $\varphi \equiv \psi$ to say they are identical.

Definition 11.6.2. Let $\mathcal{L}$ be a language. A term of $\mathcal{L}$ is a nonempty finite string t of symbols such that

(i) t is a variable symbol, or

(ii) t is a constant symbol, or

(iii) $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$, where f is an nn-ary function symbol and each t_i is a term of $\mathcal{L}$.

Definition 11.6.3. Let $\mathcal{L}$ be a language. A formula is a nonempty finite string φ of symbols of $\mathcal{L}$ such that

(i) $\varphi \equiv (t_1 = t_2)$ for t_1 and t_2 terms of $\mathcal{L}$, or

(ii) $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$ for R an n-ary relation symbol and the t_i-s terms of $\mathcal{L}$, or

(iii) $\varphi \equiv (\neg\alpha)$ for α a formula in $\mathcal{L}$, or

(iv) $\varphi \equiv (\alpha \wedge \beta)$ for α and β formulas in $\mathcal{L}$, or

(v) $\varphi \equiv (\forall v)(\alpha)$ for v a variable symbol and α a formula in $\mathcal{L}$.

Remark 11.6.4. We use a parenthesis in point (i) to ensure that a formula cannot be interpreted in multiple ways. This is not the other way to ensure that formulas have unique readability – compare our definitions with that of [28].

To make formulas easier to read, we will avoid parentheses where no confusion can occur. We have defined formulas relatively minimanistically; we're currently lacking multiple symbols we want, like the existence quantifier $\exists$, the adjunction symbol $\wedge$, the implication arrow $\to$ and the equivalence arrow $\leftrightarrow$. We could've defined first-order languages to contain these, but that would complicate later definitions and proofs. It's thus easiest to define them as abbreviations, like

$$a \wedge b \equiv \neg(\neg a \vee \neg b), \quad a \to b \equiv \neg a \vee b, \quad (\exists x)(\varphi(x)) \equiv \neg(\forall x)(\neg\varphi(x))$$

and so on. We can check, when we have defined "truth", that these abbreviations behave like we want them to. We can then define further abbreviations like $(\forall x \in X)$, $(\exists x \in X)$ and so on.

The definitions we have given above are purely syntactical. They only say what can and cannot be formulated. We will now define the meaningful contexts that we want to interpret formulas in.

Definition 11.6.5. A structure $\mathfrak{A}$ of a first-order language $\mathcal{L}$ consists of the following data:

(i) A nonempty set A, called the universe of the structure.

(ii) For each constant symbol c of $\mathcal{L}$, an element $c^{\mathfrak{A}}$ of A.

(iii) For each n-ary function symbol f of $\mathcal{L}$, a function $f^{\mathfrak{A}}\colon A^n \to A$, and

(iv) For each n-ary relation symbol R in $\mathcal{L}$, an n-ary relation $R^{\mathfrak{A}}$ on A.

Example 11.6.6. If $\mathcal{L}$ is the language $\{0, 1, +, \cdot\}$ of rings, then a structure of the language will be a set A with elements $0, 1 \in A$ and two binary functions $+, \cdot\colon A \times A \to A$.

Structures should intuitively be context where we want to interpret statements. We can also interpert terms in structures: Let $\mathfrak{A}$ be an $\mathcal{L}$-structure. We can interpret a term in $\mathcal{A}$ to "refer to" an element of A Given a function $f\colon \mathrm{Vars} \to A$, where Vars is the set of variable symbols of $\mathcal{L}$, we can make a function $g\colon \mathrm{Trms} \to A$ which gives each term its "interpretation" in A, where each variable symbol u is replaced by $f(u)$. Such functions are called term assignment functions. For the formal definition, see [28, Def. 1.7.3].

It remains to discuss truth of a statement in a structure, i.e. when a structure "satisfies" a "statement". For that we need to be able to talk about ffree variables. Intuitively they are the variables one "can replace" with different values, such that formulas containing them cannot be uniquely interpreted.

Definition 11.6.7. Pick a formula φ in a language $\mathcal{L}$, and a variable symbol v. Then v is free in φ if

(i) φ is the same form as (i) or (ii) in Definition 11.6.3, and v occurs φ, or

(ii) $\varphi \equiv (\neg\psi)$ where ψ is a formula and v is free in ψ, or

(iii) $\varphi \equiv (\psi \wedge \phi)$ and v is free in at least one of ψ and ϕ, or

(iv) $\varphi \equiv (\forall u)(\psi)$ where u is not the same variable symbol as v, and v is free in ψ.

Definition 11.6.8. A sentence in a language $\mathcal{L}$ is a formula without any free variables.

Free variables don't correspond to any element in the universe of a structure, so sentences should be the formulas we should be able to give a truth value.

Definition 11.6.9. Let $\mathfrak{A}$ be a $\mathcal{L}$-structure, φ a formula in $\mathcal{L}$ and f a term assignment function. Then $\mathfrak{A}$ *satisfies* φ *with assignment* f if the statement one gets about $\mathfrak{A}$ by replacing the terms t of φ with $f(t)$ – except the free variables in contexts they are quantified over – is true, where $\forall$, $\wedge$, $\neg$ is interpreted as usual.

Note that if φ has free variables, then the truth value of φ depends on the choice of f, but not if φ has no free variables (see for instance [28, Cor. 1.7.8]). Hence,

Definition 11.6.10. A $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{A}$ satisfies a sentence φ if it satisfies φ with all (equivalently, any) term assignment functions. In that case, we say that φ is true in $\mathcal{A}$.

Eksempel 11.6.11. Let $\mathcal{L}$ be the language of rings, and let $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$ and $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ be the structures for the integers and complex numbers. Then the sentence $\varphi \equiv (\exists x)(x \cdot x + 1 = 0)$ in $\mathcal{L}$ true in $\mathbb{C}$ and false in $\mathbb{Z}$. Let $f\colon \mathrm{Trms} \to \mathbb{Z}$, $g\colon \mathrm{Trms} \to \mathbb{C}$ be the term assignment functions sending the variable t to 2, and all other variable symbols to 0. Then $\psi \equiv (\exists y)(y \cdot t = 1)$ is true in $\mathbb{C}$ with respect to f, and false in $\mathbb{Z}$ respect to g.

We can now involve ultraproducts.

Definition 11.6.12. Let $\mathcal{L}$ be a first-order language. For a collection of $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{A}_w$, we define the ultraproduct $\mathfrak{A}_\natural$ to be the following $\mathcal{L}$-structure:

(i) For a constant symbol c in $\mathcal{L}$, let $c^{\mathfrak{A}_\natural} = \mathrm{ulim}_{w \in W} c^{\mathfrak{A}_w}$.

(ii) If R is an n-ary relation symbol, define the n-ary relation $R^{\mathfrak{A}_\natural}$ on $\mathfrak{A}_\natural$ as

$$R^{\mathfrak{A}_\natural}(x_{1,\natural}, \ldots, x_{n,\natural}) \iff \{w \in W \mid R^{\mathfrak{A}_w}(x_{1,w}, \ldots, x_{n,w})\} \in \mathcal{F}.$$

(iii) For an n-ary function symbol f, let $f^{\mathcal{A}_\natural} = \mathrm{ulim}_{w \in W} f^{\mathcal{A}_w}$.

One can check that item (ii) is well-defined. Since strucutres have nonempty universes by definition, all ultraproducts of structures will be of nonempty sets. Hence we have no need for the additional definition from Section 11.2.3 to handle empty sets.

We are ready to give the model-theoretic version of Łoś.

Theorem 11.6.13 (Łoś)**.** Let W be a set and $\mathcal{F}$ an ultrafilter on W. Pick a first-order language $\ll$, and $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{A}_w$ for each $w \in W$. Pick a formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{L}$ with $n \geq 0$ free variables. For each choice $x_{1,w}, \ldots, x_{n,w} \in A_w$ for every $w \in W$,

$$\varphi(x_{1,w}, \ldots, x_{n,w}) \text{ i } \mathfrak{A}_w \text{ for } \mathcal{F}\text{-almost all } w \iff \varphi(x_{1,\natural}, \ldots, x_{n,\natural}) \text{ in } \mathfrak{A}_\natural\ .$$

Proof. This is the longest proof in this thesis. It should be skipped or skimmed in a first reading. We will rougly follow [21, Thm. 12.3]. The definition of formulas is inductive; formlas can be made from "simpler" formulas, and all formulas can be made by the doing enough of the standard operations (negation, conjunction, quantifier) on the "simplest" formulas, which are those made by relations, or saying that two things are equal. Sinde formulas are finite, each formula can be made by performing the standard operations finitely many times on the simplest formulas. We can therefor prove statements about all formulas by doing induction on the points in Definition 11.6.3. Proofs of this form can also be phrased as normal induction proofs on the number of negations, connectives and quantifiers in the formula. This technique is called induction on the structure/complexity of the formula, and is standard in mathematical logic.

(i) Suppose $\varphi \equiv (t_1 = t_2)$ for terms t_1 and t_2 in $\mathcal{L}$. Pick a term assignment function $f_w\colon \mathrm{Trms} \to A_w$ for each $w \in W$. Write $f_\natural\colon \mathrm{Trms} \to A_\natural$ for the ultraproduct

$$f_\natural(u) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} f_w(u).$$

With the language of term assignment functions, we need to show

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_w \text{ satisfies } \varphi \text{ wrt. } f_w \text{ for almost all } w \\ \iff &\mathfrak{A}_\natural \text{ satisfies } \varphi \text{ wrt. } f_\natural \end{aligned}$$

which can be unpacked to say "$f_w(t_1) = f_w(t_2)$ for almost all$w$ iff $f_\natural(t_1) = f_\natural(t_2)$", which holds by definition of the ultraproduct.

(ii) Relations. Suppose $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$ for an n-ary relation R in $\mathcal{L}$. The argument here is in the same style as that in (i), and is left to the reader.

(iii) Negation:

Suppose φ is a formula where Łoś holds. We want to show it also holds for the formula $\neg\varphi$. Again, choose a term assignment function $f_w\colon \mathrm{Trms} \to A_w$, and let $f_\natural\colon \mathrm{Trms} \to A_\natural$ be as above. The induction hypothesis says

$$\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w\ \} \in \mathcal{F} \iff \mathfrak{A}_\natural \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_\natural. \tag{5}$$

The contrapositive of (5) says

$$\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w\ \} \notin \mathcal{F} \iff \neg(\mathfrak{A}_\natural \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_\natural)$$

such that, by the complement property of ultrafilters, (Definition 10.1.5(ii)),

$$\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ doesn't have } \varphi \text{ wrt. } f_w\} \in \mathcal{F} \iff \mathfrak{A}_\natural \text{ doesn't have } \varphi \text{ wrt.. } f_\natural,$$

Not having φ (wrt. f_w or $f_\natural$) is the same as having $\neg\varphi$ (wrt. f_w or $f_\natural$), so we are done.

(iv) Conjunction: Suppose φ and ψ are formulas where Łoś holds. Pick term assignment functions $f_w\colon \mathrm{Trms} \to A_w$, and let $f_\natural\colon \mathrm{Trms} \to A_\natural$ be as above. Then φ satisfies (5), and similarly for ψ. We have

$$\begin{aligned} &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \wedge \psi \text{ wrt. } f_w\} \\ = &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w\} \cap \{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \psi \text{ wrt. } f_w\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Hence,

$$\begin{aligned} &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \wedge \psi \text{ wrt. } f_w\} \\ \iff &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w\} \in \mathcal{F} \text{ and} \\ &\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \psi \text{ wrt. } f_w\} \in \mathcal{F}\} \\ \iff &A_\natural \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_\natural, \text{ and } A_\natural \text{ has } \psi \text{ mhp. } f_\natural \\ \iff &A_\natural \text{ has } \varphi \wedge \psi \text{ wrt. } f_\natural \end{aligned}$$

where we in the first equivalence used (6) and Lemma 10.1.2(ii), and in the other the induction hypotheses for φ and ψ:

(v) Quantifier:

Suppose φ is a formula where Łoś holds. We want to show that Łoś also holds for $\psi \equiv (\forall u)(\varphi)$, where u is a variable symbol. The definition of truth with term assignment functions is a bit more complicated for quantifiers. The definition is that a structure $\mathfrak{A}$ satisfies ψ wrt. f if for each $a \in A$, $\mathfrak{A}$ satisfies φ wrt. f^α, where $f^a\colon \mathrm{Trms} \to A$ is the term assignment function sending $u \mapsto a$, and otherwise does the same as f.

Pick term assignment functions $f_w\colon \mathrm{Trms} \to A_w$, and get $f_\natural\colon \mathrm{Trms} \to A_\natural$. The induction hypothesis is again Equation (5). Pick $a_w \in A_w$ for each $w \in W$. Since the induction hypothesis holds for all choices of term assignment functions, we have

$$\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w^{a_w}\} \in \mathcal{F} \iff \mathfrak{A}_\natural \text{ has } \varphi \text{ wrt. } \operatorname*{ulim}_{w \in W} f_w^{a_w}.$$

Note that

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} f_w^{a_w} = (f_\natural)^{a_\natural}. \tag{7}$$

By quantifying over all choices of a_w-s, i.e. elements of $\prod_{w\in W} A_w$, we have

$$\begin{aligned} &(\forall \text{choices } a_{w'} \in A_{w'} \text{ for } w' \in W)(\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w^{a_w}\} \in \mathcal{F}) \\ \iff &(\forall a_\natural \in A_\natural)(\mathfrak{A}_\natural \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_\natural^{a_\natural}). \end{aligned} \tag{8}$$

The implication ($\Rightarrow$) can be obtained by using the axiom of choice to pick representatives a_w for a given $a_\natural$, and using the induction hypothesis on each w separately.

The implication ($\Leftarrow$) follows from considering $a_\natural$ in $A_\natural$, using Equation (7) and applying the induction hypothesis.

We recognize the lower statment at saying that $\mathfrak{A}_\natural$ satisfies $\psi \equiv (\forall u)(\varphi)$. What about the uppwer one? We want to show

$$\begin{aligned} &(\forall a \in \prod_{w'\in W} A_{w'})(\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w^{a_w}\} \in \mathcal{F}) \\ \iff &\{w \in W \mid (\forall a \in A_w)(\mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w^{a})\} \in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{9}$$

The contrapositive of this equivalence is

$$\begin{aligned} &(\exists a \in \prod_{w'\in W} A_{w'})(\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w^{a_w}\} \notin \mathcal{F}) \\ \iff &\{w \in W \mid (\forall a \in A_w)(\mathfrak{A}_w \text{ has } \varphi \text{ wrt. } f_w^{a})\} \notin \mathcal{F} \end{aligned}$$

which, by Definition 10.1.5(ii) is equivalent to

$$\begin{aligned} &(\exists a \in \prod_{w'\in W} A_{w'})(\{w \in W \mid \mathfrak{A}_w \text{ has } \neg\varphi \text{ wrt. } f_w^{a_w}\} \in \mathcal{F}) \\ \iff &\{w \in W \mid (\exists a \in A_w)(\mathfrak{A}_w \text{ has } \neg\varphi \text{ wrt. } f_w^{a}\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

This equivalence, which is equivalent to (9), can be simply verified and the details are left to the reader. So (9) is true, such that the lower statement in (8), which says $\mathfrak{A}_\natural$ satisfies $\psi \equiv (\forall u)(\varphi)$, is equivalent to the lower statement in (9), which says that $\mathfrak{A}_w$ satisfies $\psi \equiv (\forall u)(\varphi)$ for almost all w. That was what we were going to show, so we are done. $\square$

Remark 11.6.14. It's worth reflecting over where in the proof we used our strongest assumptions. The assumption of $\mathcal{F}$ being an ultrafilter instead of just a normal one was used in the negation and quantifier steps, while the axiom of choice was used in the quantifier step.

The theorem is nice, but it gives us a big question: What langeuage, and which structures should we use? If vi we only want to talk of one ring at a time, then we can let $\mathcal{L}$ be the language of rings. This doesn't however let us talk about functions between arbitrary sets, ring homomorphisms in particular, and important subsets like ideals. The naive choice of structure is thus often not enough. We need a language with space for all mathematics we will do, so a structure that could do set theory would be promising. So when using Łoś, we want to use the language of set theory, containing only a single binary relation $\in$, together with a universe large enough for our purposes, but which also is small enough to be a set. We will do this after [18, Chap. 13]. Every time we use Łoś, we will construct a set X containing all sets we are interested in for that particular use of the theorem, such as a collection of rings, the integers, and the sets one can get by using normal set-theoretic operations on them. Given a set X, we define its *superstructure* to be the set $\mathbb{U} = \mathbb{U}(X)$ defined inductively as

$$\mathbb{U}_0 = X, \qquad \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n \cup \mathcal{P}(\mathbb{U}_n), \qquad \mathbb{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n.$$

Superstructures are closed under most set-theoretic operations one does in practice, but not all. For instance, define the rank of a given $x \in \mathbb{U}$ as the smallest n such that $x \in \mathbb{U}_n$. For an arbitrary subset $A \subseteq \mathbb{U}$, the statment $A \in \mathbb{U}$ is equivalent to the elements of A having bounded rank. Hence $\mathbb{U}$ is closed under neither arbitrary subsets nor unions, but it is closed under finite unions, and arbitrary unions and subsets of each $\mathbb{U}_n$.

It is not appropriate to deliberate the details further here. The interested reader can find them in [18, Chap. 13]. Supporters of Grothendieck universes can and should replace $\mathbb{U}$ with a universe.

One problem with the definitions of first-order languages is that all functions in a structure have the entire universe as their domain; partial functions are not allowed. One possible solution would be to define first order languages to allow partial functions and relations, or letting functions be relations for the purposes of Łoś' theorem, but there is a more elegant solution. We can avoid the issue by using the view of functions as sets mentioned in Remark 11.1.5. A function $f\colon X \to Y$ is just a certain subset $f \subseteq X \times Y$, and the statment $y = f(x)$ just says $(x, y) \in f$. Similar can be done for relations, and with this we can have partial functions and relations in the language of set theory without introducing more complications.

Fore more on superstructures, see [18, Chap. 13], [33, Appendix A], and [7, Chap. 4.4].

Example 11.6.15. Let us show Proposition 11.5.1(i), which says that for functions $f\colon X_w \to Y_w$ indexed over $w \in W$, then $f_\natural$ is injective if and only if almost all of the f_w-s are. Let $X = \bigcup_{w\in W} X_w \cup Y_w$, and get the superstructure $\mathbb{U}(X)$.

It will contain all functions $f_w\colon X_w \to Y_w$, so we can treat them as sets. The language $\mathcal{L}$ has constant symbols g and B, and we will view g as a function. Let φ be the formula

$$\varphi(g, A) \equiv (\forall x, y \in A)(g(x) = g(y) \to x = y).$$

Note that g is a constant symbol, so φ is actually not legal to formulate. Since we by $g(x)$ mean the unique c such that $(x, c) \in g$, the part $g(x) = g(y)$ actually means $(\forall a \in A)(\forall b \in A)((x, a) \in g \wedge (y, b) \in g \to a = b)$. Nevertheless, we have

$$\varphi(f_w, X_w) \equiv (\forall x, y \in X_w)(f_w(x) = f_w(y) \to x = y)$$

which saus that f_w is injective. Łoś gives

$$\varphi(f_w, X_w) \text{ for almost all } w \iff \varphi(f_\natural, X_\natural)$$

The formula to the right says $(\forall x, y \in X_\natural)(f_\natural(x) = f_\natural(y) \to x = y)$, i.e. that $f_\natural$ is injective. It must be emphasised that one does not think of superstructures in practice when doing proofs like this.

In practice one does not think of what φ, and the universe $\mathbb{U}(X)$ should be before using Łoś. Instead one thinks that one begins with a collection of formulas

$$\varphi_w \equiv (\forall x, y \in A_w)(f_w(x) = f_w(y) \to x = y)$$

and then directly goes to its "$\natural$-extension"

$$\varphi_\natural \equiv (\forall x, y \in A_\natural)(f_\natural(x) = f_\natural(y) \to x = y)$$

in which Łoś' theorem can be used on. We pick the word extension here because it's the terminology used in nonstandard analysis, where all ultraproducts are ultrapowers and the term makes sense. The proper definition is as follows:

Definition 11.6.16. Pick a language $\mathcal{L}$, structures $\mathfrak{A}_w$ for $w \in W$, and let $\mathfrak{A}_\natural$ be its ultraproduct. For any choice $x_{1,w}, \dots, x_{n,w}$ of elements of A_w, the $\natural$-extension of the formula $\varphi_w \equiv \varphi(x_{1,w}, \dots, x_{n,w})$ in each $\mathfrak{A}_w$ respectively, is the formula $\varphi_\natural \equiv \varphi(x_{1,\natural}, \dots, x_{n,\natural})$.

We can now justify our use of partial functions.

Lemma 11.6.17. Pick sets a_w, b_w for $w \in W$, consider the language of set theory.

(i) The extension of $\varphi_w \equiv (a_w \in b_w)$ is $\varphi_\natural \equiv (a_\natural \in b_\natural)$.

(ii) The extension of $\tau_w = (a_w, b_w)$ er $\tau_\natural \equiv (a_\natural, b_\natural)$.

Proof. The first is by definition. The other is an incarnation of Convention 11.2.12:

$$(a_w, b_w)_\natural = \operatorname*{ulim}_{w \in W}(a_w, b_w) = \left(\operatorname*{ulim}_{w \in W} a_w, \operatorname*{ulim}_{w \in W} b_w\right) = (a_\natural, b_\natural). \qquad \square$$

Note that the $\in$ in point (i) is the binary relation $\in_\natural$ in $\mathfrak{A}_\natural$, not necessarily real set-theoretic inclusion. It is that because we have decided to interpret it as such by Corollary 11.2.14.

For functions $f_w \colon A_w \to B_w$, elements $a_w \in A_w$ and sets x_w, we can now compute the $\natural$-extensions to the formulas $x_w = f_w(a_w)$ with our "function as a set"-syn from Remark 11.1.5:

$$\begin{aligned}(x_w = f_w(a_w))_\natural \iff ((a_w, x_w) \in f_w)_\natural &\iff (a_w, x_w)_\natural \in f_\natural \\ \iff (a_\natural, x_\natural) \in f_\natural &\iff x_\natural = f_\natural(a_\natural)\end{aligned}$$

where we in the middel equivalence used Lemma 11.6.17. With this we can safely use Łoś for our purposes as we please.

11.7 Ultra-rings II

With Łoś' theorem in our toolkit we continue studying ultraproducts of rings. While the result may seemingly trivialize ultraproducts, this is not the case. Rings have many interesting second-order properties that Łoś a priori can't say anything about. We will see that with some work, we can still talk about multiple of these. We will also show first-order results that are easy now that we have Łoś.

Lemma 11.7.1. Pick sets $A_w \subseteq B_w$. Then $A_\natural \subseteq B_\natural$ by Convention 11.2.17. For each $b_\natural \in B_\natural$, we have $b_\natural \in A_\natural$ if and only if $[\![b_w \in A_w]\!] \in \mathcal{F}$.

Proof. This can be thought of as a special case of Convention 11.2.13, but with an equivalence. ($\Rightarrow$): By the convention, this means that there are $a_w \in A_w$ for $w \in W$ such that $a_\natural = b_\natural$. Hence $\mathcal{F} \ni [\![a_w = b_w]\!] \subseteq [\![b_w \in A_w]\!]$, such that $\mathcal{F}$ catches the set to the right.

($\Leftarrow$): For $w \in [\![b_w \in A_w]\!]$, pick $a_w = b_w \in A_w$, and arbitrary else. Then $\mathcal{F} \ni [\![a_w \in B_w]\!] \subseteq [\![a_w = b_w]\!]$, such that $a_\natural = b_\natural$. $\square$

Lemma 11.7.2. Pick functions $f_w \colon X_w \to Y_w$ and subsets $A_w \subseteq Y_w$. Then

$$f_\natural^{-1}(A_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} f_w^{-1}(A_w).$$

Proof. The right side is a subset of $X_\natural$ by Convention 11.2.17. Pick $x_\natural \in X_\natural$. Then,

$$\begin{aligned} x_\natural \in f_\natural^{-1}(A_\natural) &\iff f_\natural(x_\natural) \in A_\natural \\ &\iff [\![f_w(x_w) \in A_w]\!] \in \mathcal{F} \\ &\iff \left[\!\left[x_w \in f_w^{-1}(A_w)\right]\!\right] \in \mathcal{F} \\ &\iff x_\natural \in \operatorname*{ulim}_{w \in W} f_w^{-1}(A_w) \end{aligned}$$

by Lemma 11.7.1. $\square$

Corollary 11.7.3. For group homomorphisms $f_w \colon A_w \to B_w$, we have

$$\ker(f_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} \ker(f_w).$$

Proof. By Łoś, $A_\natural$ and $B_\natural$ are groups and $f_\natural$ is a group homomorphism, so the statement is valid. The result follows from the above lemma together with the fact that $0_\natural$ is the zero element of $B_\natural$, by an argument similar to that of Proposition 11.3.1. $\square$

Proposition 11.7.4. For ideals $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$, $\mathfrak{a}_\natural \subseteq A_\natural$ is an ideal. Furthermore, we have a canonical isomorphisms

$$\varphi \colon \operatorname*{ulim}_{w \in W} A_w/\mathfrak{a}_w \xrightarrow{\simeq} A_\natural/\mathfrak{a}_\natural.$$

where we by canonical mean that we have $\pi_\natural = \varphi \circ \pi$, where $\pi \colon A_\natural \to A_\natural/\mathfrak{a}_\natural$ and the $\pi_w \colon A_w \to A_w/\mathfrak{a}_w$-s are all projections. Furthermore, φ is unique in satisfying. $\pi_\natural = \varphi \circ \pi$.

Proof. We have $\mathfrak{a}_\natural \subseteq A_\natural$ by Convention 11.2.17. The set $\mathfrak{a}_\natural$ is an ideal by Łoś, as being an ideal is a first-order property. We have projections $\pi_w \colon A_w \to A_w/\mathfrak{a}_w$. The ultraproduct

$$\pi_\natural \colon A_\natural \to \operatorname*{ulim}_{w\in W} A_w/\mathfrak{a}_w$$

is a surjective ring homomorphism by Proposition 11.5.1 and lemma 3.3.4. Its kernel is $\ker(\pi_\natural) = \operatorname{ulim}_{w\in W} \ker(\pi_w) = \mathfrak{a}_\natural$ by Corollary 11.7.3. The isomorphism, formula and uniqueness follow now from the first isomorphism theorem. □

Definition 11.7.5. Let A be a ring. For an ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, $\mu(\mathfrak{a})$ is the smallest number of generators for the ideal;

$$\mu(\mathfrak{a}) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid (\exists a_1, \dots, a_n \in A)(\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n))\}$$

with the convention $\mu((0)) = 0$.

An ideal $\mathfrak{a}$ not being finitely generated says that $\mu(\mathfrak{a}) = \infty$, so Noetherianity of the ring A can be formulated as $\mu(\mathfrak{a})$ being finite for all its ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$.

Proposition 11.7.6. Pick ideals $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$. Then $\mu(\mathfrak{a}_\natural) \leq n$ if and only if $\mu(\mathfrak{a}_w) \leq n$ for almost all w. Similarly, $\mu(\mathfrak{a}_\natural) = n$ if and only if $\mu(\mathfrak{a}_w) = n$ for almost all w. Furthermore, $\mathfrak{a}_w = (a_{1,w}, \dots, a_{n,w})$ holds for almost all w if and only if

$$\mathfrak{a}_\natural = (a_{1,\natural}, \dots, a_{n,\natural}).$$

Proof. The first part follows from the last part. It is obtained by using Łoś on

$$(\forall a \in A_w)[a \in \mathfrak{a}_w \leftrightarrow (\exists b_1, \dots, b_n \in A_w)(a = \sum_{i=1}^{n} b_i a_{i,w})],$$

which says that $\mathfrak{a}_w$ is the ideal generated by $a_{1,w}, \dots, a_{n,w}$.

For the inequality part; if $\mu(\mathfrak{a}_\natural) = n$, then we cannot have $\mu(\mathfrak{a}_w) < n$ for almost all w, as then the above would give $\mu(\mathfrak{a}_\natural) < n$. The other implication goes similarly. □

Corollary 11.7.7. Pick $n \in \mathbb{N}$ and ideals $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$. Then $\mu(\mathfrak{a}_\natural) > n$ if and only if $\mu(\mathfrak{a}_w) > n$ for almost all w.

Proof. Look at the negation of Proposition 11.7.6. □

We can now give an example of an ultra-ring with an ultraproduct of finitely generated ideals that itself is not finitely generated, illustrating the need for uniform bounds in Proposition 11.7.6. Let $W = \mathbb{N}$, and pick rings and finitely generated ideals $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$ such that $\mu(\mathfrak{a}_w) = w$ for each w. For each fixed n, $\mu(\mathfrak{a}_w) > n$ for almost all w. By Corollary 11.7.7, we get $\mu(\mathfrak{a}_\natural) > n$ for each $n \in \mathbb{N}$, such that $\mathfrak{a}_\natural$ isn't finitely generated. For a concrete example, let k be a field, $A_w = k[x_1, \ldots, x_w]$ and $\mathfrak{a}_w = (x_1, \ldots, x_w)$.

Corollary 11.7.8. Suppose $\mathfrak{a}_w, \mathfrak{b}_w \subseteq A_w$ are finitely generated ideals with uniform bounds $\mu(\mathfrak{a}_w) \leq n$ and $\mu(\mathfrak{b}_w) \leq m$ for each w. Then the ideal product commutes with the ultraproduct;

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} \mathfrak{a}_w \mathfrak{b}_w = \mathfrak{a}_\natural \mathfrak{b}_\natural.$$

Proof. By adding unnecessary generators, such as zeros, we may assume without loss of generality that we have equality in the uniform bounds. Write $\mathfrak{a}_w = (a_{1,w}, \ldots, a_{n,w})$ and $\mathfrak{b}_w = (b_{1,w}, \ldots, b_{m,w})$. Then the pointwise ideal products are

$$\mathfrak{a}_w \mathfrak{b}_w = (\{a_{i,w} b_{j,w}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}),$$

which is a result holds in general for products of ideals in commutative rings. Hence, by Proposition 11.7.6 twice, and the abovementioned result

$$\mathfrak{a}_\natural \mathfrak{b}_\natural = (a_{1,\natural}, \ldots, a_{n,\natural})(b_{1,\natural}, \ldots, b_{m,\natural}) = (\{a_{i,\natural} b_{j,\natural}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} \mathfrak{a}_w \mathfrak{b}_w. \qquad \square$$

Proposition 11.7.9. Pick rings A_w and ideals $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$. Then $\mathfrak{a}_\natural$ is a prime ideal (resp. maxiaml) if and only if almost all of the $\mathfrak{a}_w$-s are prime ideals (resp. maximal).

Proof. The first is by Łoś on the sentences

$$(\forall x, y \in A_w)(xy \in \mathfrak{a}_w \to (x \in \mathfrak{a}_w \text{ or } y \in \mathfrak{a}_w)).$$

Recall that an ideal $\mathfrak{a} \subset A$ is maximal if and only if $\mathfrak{a} + (x) = A$ for each $x \notin \mathfrak{a}$. Hence $\mathfrak{a}_\natural$ is maximal if and only if

$$\mathfrak{a}_\natural \neq A_\natural \wedge (\forall a_\natural \in A_\natural)(a_\natural \notin \mathfrak{a}_\natural \to \mathfrak{a}_\natural + (a_\natural) = A_\natural),$$

and by applying Łoś and Proposition 11.7.6, we are done. $\square$

We could've also proven this via the quotient ring characterizations of prime and maxmial ideals, by Proposition 11.5.1 and Proposition 11.7.4. In more generality, Proposition 11.7.4 gives that ultraproducts of ideals preserve properties that can be characterizes as first-order properties of the quotient ring that quantify only over the ring.

We see that the ideals of $A_\natural$ of the form $\mathfrak{a}_\natural$ have many nice properties. Let us give them a name:

Definition 11.7.10. Ideals of $A_\natural$ that are ultraproducts of ideals in the approximations are called *internal*.

Proposition 11.7.11. Pick rings A_w and $n > 0$. Then $A_\natural$ has characteristic n if and only if almost each A_w has characteristic n. Furthermore, $A_\natural$ has characteristic $\neq n$ if and only if almost all A_w have characteristic $\neq n$.

Proof. Use Łoś' theorem on the sentences

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = 0.$$

The second part comes from using Łoś on the above sentence with $\neq 0$ instead. $\square$

Corollary 11.7.12. Pick rings A_w. If only finitely many of the A_w have characteristic n for every $n > 0$, then $A_\natural$ has characteristic zero.

The corollary lets us in some situations transfer information between situations in characteristic zero and > 0.

We see that we get a lot by looking at internal ideals, but in general we are interested in *all* of the ideals of a ring, not only certain special types of ideals, even though they can be very interesting themselves.

Proposition 11.7.13. If $\mathfrak{a} \subseteq A_\natural$ is a finitely generated ideal, then it is internal, such that $A_\natural/\mathfrak{a}$ is an ultra-ring.

Proof. By assumption, $\mathfrak{a}$ has generators $a_{1,\natural}, \ldots, a_{n,\natural}$. Let $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$ be generated by $a_{1,w}, \ldots, a_{n,w}$. Then Proposition 11.7.6 gives $\mathfrak{a}_\natural = (a_{1,\natural}, \ldots, 1_{n,\natural}) = \mathfrak{a}$. The last part follows now from Proposition 11.7.4. $\square$

In ultrarings we have access to a new operation. We won't need it in this thesis, but it's worth mentioning. Exponentiating in a ring is a function

$\exp_w\colon A_w \times \mathbb{N} \to A_w$ given by $\exp_w(x, n) = x^n$. The ultraproduct of these becomes a function $\exp_\natural\colon A_\natural \times \mathbb{N}_\natural \to A_\natural$ by

$$\exp_\natural(a_\natural, n_\natural) = a_\natural^{n_\natural} = \operatorname*{ulim}_{w\in W} a_w^{n_w}.$$

By Łoś, this ultra-exponentiation will have the same usual properties as normal exponentation.

Digression 11.7.14. Suppose each A_w has prime characteristic p_w for each $w \in W$. Then $A_\natural$ has characteristic zero by Corollary 11.7.12. The rings A_w have accompanying Frobenius endomorphisms $F_w\colon A_w \to A_w$ by $F_w(a) = a^{p_w}$. Then the ultraproduct gives a "ultra-Frobenius" endomorphism $F_\natural\colon A_\natural \to A_\natural$ by $F_\natural(a_\natural) = a_\natural^{p_\natural}$. We have managed to transfer Frobenius endomorphisms, a classical characteristic p phenomena, to something similar in characteristic zero. The book [41] uses this to transfer certain results about tight closure, which is simplest in characteristic p, to characteristic zero.

11.8 Łoś philosophy

In this section, we will discuss some principles which are prevalent when working with ultraproducts, and can be thought to follow from Łoś' theorem. We have already seen them in action.

Definition 11.8.1. Pick sets X_w. A subset $Y \subseteq X_\natural$ is *internal* if it is of the form $Y_\natural = \operatorname{ulim}_{w\in W} Y_w$ for subsets $Y_w \subseteq X_w$. The subsets of $X_\natural$ that aren't internal are called external .

By Convention 11.2.17 we have an inclusion

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} \mathcal{P}(X_w) \subseteq \mathcal{P}(X_\natural) \tag{10}$$

from the set of internal subsets of $X_\natural$ to the set of all its subsets. Quantifiers that quantify over $\mathcal{P}(X_w)$ are made by Łoś to quantify over the set to quantify over the set to the left in (10).

Principle 11.8.2. Łoś' theorem can only talk about internal objects, such as internal subsets of an ultraproduct.

This is a great limitation in the sense that one is often interested in *all* subobjects of an object, or *all* morphisms between two ultraobjects. In return, one gets a lot by knowing one has an internal object. For example, Łoś on the well ordering principle on $\mathbb{N}$ gives that the hypernatural numbers $\mathbb{N}_\natural$ are "internally well-ordered": Any nonempty *internal* subset of $\mathbb{N}_\natural$ has a minimum, Similarly it turns out that $\mathbb{R}_\natural$ is internally Dedekind complete. This makes it natural to which classes of "nice" objects turn out to be internal. In Proposition 11.7.6 we saw for example that finitely generated ideals are internal.

Internal and external objects are interesting to study by themselves. The reader who wants to know more is referred to [18, Chap. 11]. The following is an example of an external set:

Proposition 11.8.3. Suppose $(W, \mathcal{F})$ satisfies $\mathbb{N} \neq \mathbb{N}_\natural$. The set $\mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$ is an external subset of the hypernaturals $\mathbb{N}_\natural$.

Proof. By Łoś on the well ordering principle, all internal nonempty subsets of $\mathbb{N}_\natural$ has a minimum. If $N \in \mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$ was such a hypothetical minimum, then $N - 1$ would also have to lie in $\mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$, hence N not being a minimum after all, and $\mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$ can't be internal. □

Principle 11.8.4. An ultraproduct of objects defined almost everywhere is uniquely defined.

We saw an example of this when we proved Lemma 11.3.4; to construct the inverse $b_\natural$ to $0 \neq a_\natural \in k_\natural$, we only needed to define b_w for those w where a_w had an inverse, which was almost every.

Principle 11.8.5. For a second-order property to be preserved by ultraproducts, one often needs to add a uniform bound on all of the approximations.

One often wants to quantify over $\mathbb{N}$, the sets $\{1, \ldots, n\}$, or the finite subsets of a given set – for instance when defining the ideal generated by a set, and products of ideals. In such situations, the reason for the finitary condition is because algebraic operations can only be done finitely many times. If one takes an ultraproduct of objects with a property of this kind, then the quantifying over for example $\{1, \ldots, n\}$ for $n \in \mathbb{N}$ becomes quantifying over $\{1, \ldots, N\}$ for $N \in \mathbb{N}_\natural$. If N lies in $\mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$, then it turns out that $\{1, \ldots, N\}$ is infinite, and the ultraproduct then won't have a chance of preserving the property one began with. This is solved by a uniform bound. Since $\{1, \ldots, n\}_\natural = \{1, \ldots, n\}$, quantifying over these sets is preserved.

Example 11.8.6. Propositions 11.5.1(vii) and 11.7.6, and Corollary 11.7.8.

11.9 Ultra-fields

Corresponding to the ultra-rings, we have

Definition 11.9.1. A field that is (isomorphic to) an ultraproduct of fields is called an ultra-field.

Ultrafields have a simple algebraic and pedagogical characterization [14, Thm. 2.2], [24, Thm. 8.1]. If $(k_w)_{w\in W}$ is a family of fields, then there is a bijection between the ideals of $A = \prod_{w\in W} k_w$ and the set of filters on W. It sends $\mathfrak{a} \subseteq A$ to $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(W)$ such that for $X \subseteq W$, we have $X \in \mathcal{F}$ if and only if $(e_w)_{w\in W} \in \mathfrak{a}$, where $(e_w)_{w\in W}$ is the sequence that is 0 in the positions of X and 1 else. This bijection, and its inverse, are both increasing. Under it, principal ideals correspond to principal filters, and maximal ideals ultrafilters. Furthermore, since $\mathcal{F}$ makes the same equivalence relation on A as the corresponding ideal, we get that the ultraproduct $A_\natural$ is equal to the quotient ring $A/\mathfrak{a}$. Hence, the ultrafield $k_\natural$ can be constructed as A modulo a nonprincipal maximal ideal, whose existence can be shown with an algebraic argument which might remind one of the proof of Theorem 10.2.2.

Proposition 11.9.2. An ultraproduct of algebraically closed fields is also one.

Proof. Pick fields k_w. With some work one can show this by applying Łoś on the statement that each k_w is algebraically closed. However, we can do it simpler: For $n \in \mathbb{N}$, write

$$\varphi_{n,w} \equiv (\forall a_1, \ldots, a_n \in k_w)(\exists \alpha \in k_w)(a_n \neq 0 \to a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0).$$

By Łoś, $\varphi_{n,\natural}$ holds in $k_\natural$ for each natural n, such that $k_\natural$ is algebraically closed. □

The special case of Corollary 11.7.12 for fields states that if only finitely many k_w have characteristic p for each prime p, then $k_\natural$ has characteristic zero. Ultra-fields with characteristic zero which arise as ultraproducts of fields with positive characteristic will be called Lefschetz fields. Hence the field $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ is an algebraically closed characteristic zero Lefschetz field. Here $\mathbb{P}$ the primes and $\overline{\mathbb{F}}_p$ the algebraic closure of the finite field $\mathbb{F}_p$.

We will now begin showing the surprising isomorphism

$$\mathbb{C} \simeq \operatorname*{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p \tag{11}$$

where $\mathcal{F}$ is an arbitrary free ultrafilter on $\mathbb{P}$. From this $\mathbb{C}$ becomes an example of a Lefschetz field. The isomorphism will come from the following theorem:

Theorem 11.9.3 (Steinitz)**.** Two uncountable algebraically closed fields of the same characteristic are isomorphic.

Proof. Omitted. See [41, Thm. 2.4.7] for a sketch. The Galois theory needed for the proof can be found, among other places, in [27, Chap. VI]. □

The isomorphisms we get by Steinitz' theorem are however, highly noncanonical. We will make use of the following theorem for the cardinality computations we will do:

Theorem 11.9.4 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** If $|A| \leq |B|$ and $|B| \leq |A|$, then $|A| = |B|$. That is, if there are injections $A \to B$ and $B \to A$, then there is a bijection between A and B.

Proof. See [21, Thm. 3.2]. □

Recall that we write $\aleph_0$ for the cardinality of the natural numbers, and $\mathfrak{c}$ the cardinality of the reals.

Example 11.9.5. The hypercomplex numbers $\mathbb{C}_\natural$, with index set $W = \mathbb{N}$, is isomorphic to $\mathbb{C}$ by Steinitz' theorem. Firstly, $\mathbb{C}_\natural$ is algebraically closed by Proposition 11.9.2. Since $\mathbb{C}_\natural$ is a quotient ring of $\mathbb{C}^\mathbb{N}$, we have

$$|\mathbb{C}_\natural| \leq |\mathbb{C}^\mathbb{N}| = |\mathfrak{c}^{\aleph_0}| = |\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}| = |2^{\aleph_0 \times \aleph_0}| = |2^{\aleph_0}| = \mathfrak{c},$$

so the cardinality of $\mathbb{C}_\natural$ is at least $\mathfrak{c}$, since it contains $\mathbb{C}$. It is also at most $\mathfrak{c}$ by the computation above. By the Cantor-Schröder-Bernstein theorem, $\mathbb{C}_\natural$ has continuum cardinality.

Write $\mathbb{F}$ for the right side in (11). As observed earlier, Corollary 11.7.12 and Proposition 11.9.2 give that $\mathbb{F}$ is algebraically closed and has characteristic zero, so to use Steinitz, we need to compute its cardinality. The field $\mathbb{F}$ is built from algebraic closures of well-known fields, and the algebraic closure can itself be constructed from polynomial rings, so we begin by computing the cardinality of polynomial rings.

Lemma 11.9.6. Let A be a ring and I a set. The polynomial ring $A[\{x_i\}_{i\in I}]$ has cardinality $\max(\aleph_0, |A|, |I|)$. This is, in particular, $\max(|A|, |I|)$ if A is infinite, and $\max(\aleph_0, |I|)$ if A is finite.

Proof. It is enough to show the last two, as they together imply the general formula. Suppose first that A is infinite.

For a polynomial $f \in A[\{x_i\}_{i\in I}]$, define an accompanying $g\colon \mathcal{P}^{\text{fin}}(I \times \mathbb{N}) \to A$ which sends $\{(i_1, n_1), \dots, (i_m, n_m)\} \subseteq I \times \mathbb{N}$ to f's coeffient in the term $x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_m}^{n_m}$. Such g-s have finite support. Hence we get an injection $A[\{x_i\}_{i\in I}] \to \mathcal{P}^{\text{fin}}(\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A)$. By [21, ex. 5.2, s. 51], we have $|\mathcal{P}^{\text{fin}}(\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A)| = |\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A|$. Since A is infinite, the cardinality of this set is $\max(|A|, |I|)$. The polynomial ring $A[\{x_i\}_{i\in I}]$ has an inclusion from A, and an injection from I by $a \mapsto a \cdot x_i$, so the cardinality of $A[\{x_i\}_{i\in I}]$ is bounded both above and below by $\max(|A|, |I|)$. By Cantor-Schröder-Bernstein, the cardinality of $A[\{x_i\}_{i\in I}]$ is $\max(|A|, |I|)$.

If A instead is finite, we get estimates

(i) If I is finite, $|\mathcal{P}^{\text{fin}}(\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A)| = 2^{2^{|I|} \times |A|} < \aleph_0$, and

(ii) If I is infinite, $|\mathcal{P}^{\text{fin}}(\mathcal{P}^{\text{fin}}(I) \times A)| = |\mathcal{P}^{\text{ fin}}(I \times A)| = |I \times A| = |I|$.

Hence $\max(\aleph_0, |I|)$ is an upper bound of the cardinality of the polynomial ring. For a lower bound, note that we have injections $\mathbb{N} \to A[\{x_i\}_{i\in I}]$ by $n \mapsto x_i^n$ for $i \in I$, and $A \to A[\{x_i\}_{i\in I}]$ by $a \mapsto a \cdot x_i$ for any $i \in I$. Hence $\max(\aleph_0, |I|)$ is also a lower bound of the cardinality of the ring, so we are done by Cantor-Schröder-Bernstein. □

We will now compute the cardinality of the algebraic closure of a field. While the case of finite fields is enough for our purposes, the infinite case will give us many cases where we can apply Steinitz' theorem, so we prove this also. We begin with the infinite case.

Proposition 11.9.7. Every infinite field has the same cardinality as its algebraic closure.

Proof. We analyze the quantities of the rings/fields involvert in the classical argument showing that $\overline{k}$ exists, see e.g. [30, s. 11].

Let k be a field, and $\Sigma \subseteq k[x]$ the set of irredusible polynomials in $k[x]$.

By applying Lemma 11.9.6 twice (and [21, p. 51]) we get that

(i) $k[x]$ has the same cardinality as k, and

(ii) $k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$ has the same cardinality as $\Sigma \subseteq k[x]$.

Since $k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$ contains a copy of k, they must have the same cardinality, by Cantor-Schröder-Bernstein. Further in the process one defines an ideal $\mathfrak{a} \subseteq k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$ generated by all $f(x_f)$ for $f \in \Sigma$. This ideal can be shown to be proper, such that it can be extended to a maximal ideal $\mathfrak{m} \subseteq k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$. Now let $k' = k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]/\mathfrak{m}$. We have a canonical inclusion $k \to k'$. Since the polynomial ring hase the same cardinality as k, k' must be in bijection with k by Cantor-Schröder-Bernstein.

If k now is the field we are interested in, we may iteratively do the constructino above to get a countable chain $k \subseteq k_1 \subseteq k_2 \subseteq k_3 \subseteq \cdots$ of fields of the same cardinality. One can then show that the union (or colimit) is algebraically closed and contains the closure $\overline{k}$. The union, and thus $\overline{k}$ has cardinality at most $|k| \times \aleph_0$, which is equal to $|k|$ as k is infinite. At the same time, $\overline{k}$ contains a copy of k, so by Cantor-Schröder-Bernstein we have $|\overline{k}| = |k|$. □

Example 11.9.8. The rings $\mathbb{C}[\{x_i\}_{i\in I}]$ have all continuum cardinality when $|I| \leq \mathfrak{c}$ by Lemma 11.9.6. The fields of fractions $\mathbb{C}(\{x_i\}_{i\in I})$ then have cardinality $\leq \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ [21, p. 51], such that Cantor-Schröder-Bernstein gives that they all also have continuum cardinality. By Proposition 11.9.7, the associated algebraic closures $\overline{\mathbb{C}(\{x_i\}_{i\in I})}$ all have continuum cardinality. By Steinitz' theorem, we can conclude that these are all isomorphic to $\mathbb{C}$, and draw the surprising conclusion that there is a proper field extension $\mathbb{C} \subset k$ such that $k \simeq \mathbb{C}$. By a change of perspective, $\mathbb{C}$ has an endomorphism that is not an automorphism.

One can do similarly for other fields like $\mathbb{C}((x))$, $\mathbb{Q}(\{x_i\}_{i\in I})$ for $|I| = \mathfrak{c}$, and the p-adics $\mathbb{Q}_p$.

Example 11.9.9. Each integral domain A with characteristic zero and cardinality $\leq \mathfrak{c}$ can be embedded into $\mathbb{C}$. Without loss of generality, $|A| = \mathfrak{c}$, for otherwise we can replace A with its polynomial ring in $\mathfrak{c}$ variables, which then has continuum cardinality by Lemma 11.9.6. The field of fractions $k = \mathrm{Frac}(A)$ has also continuum cardinality, so the algebraic closure $\overline{k}$ has continuum cardinality by Proposition 11.9.7. Steinitz' theorem then gives $A \subseteq \overline{k} \simeq \mathbb{C}$.

Proposition 11.9.10. The algebraic closure of a finite field is countabily infinite.

Proof. We do the same analysis as in the infinite case. Suppose k is a field with $|k| \leq \aleph_0$. Then $k[x]$ and hence $k[\{x_i\}_{i\in\Sigma}]$ also have cardinality $\leq \aleph_0$ for each subset $\Sigma \subseteq k[x]$ by Lemma 11.9.6, such that k' also has cardinality $\leq \aleph_0$. So the chain $k \subseteq k_1 \subseteq k_2 \subseteq \cdots$ is one of fields that all have cardinality $\leq \aleph_0$. The countable union has thus cardinality $\leq \aleph_0$, and the closure $\overline{k}$ lies inside this. Algebraically closed fields are all infinite, so the cardinality must be $\aleph_0$ by Cantor-Schröder-Bernstein. $\square$

By combining Propositions 11.9.7 and 11.9.10 we get that for an arbitrary field k, we have $|\overline{k}| = \max(\aleph_0, |k|)$. By the theorem above, $\overline{\mathbb{F}}_p$ is countably infinite, which is the first step in showing that $\mathbb{F}$ has continuum cardinality. Siden hver $\overline{\mathbb{F}}_p$ has the same cardinality as $\mathbb{N}$, and the index set $\mathbb{P}$ is countably infinite, we can construct a bijection between $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ and $\operatorname{ulim}_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$, where $\mathbb{N}$ gets the ultrafilter induced by any bijection between it and $\mathbb{P}$. So it's enough to show that the hypernaturals (with $W = \mathbb{N}$) have continuum cardinality, a result which is interesting in and of itself.

Lemma 11.9.11. With index set $W = \mathbb{N}$, the hypernaturals $\mathbb{N}_\natural$ have continuum cardinality.

Proof. The hypernaturals $\mathbb{N}_\natural$ are a quotient set of $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, giving a projection $\mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\natural$, and by choice, an injection $\mathbb{N}_\natural \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Recall $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, i.e. that $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ and $\mathbb{R}$ have the same cardinality [21, p. 37]. We calculate:

$$|\mathbb{N}_\natural| \leq |\mathbb{N}^\mathbb{N}| = \aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\times\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

where we make use of [21, Thms 3.5, 5.16(i)]. The bijection between $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}$ and $2^{\aleph_0\times\aleph_0}$ is a special case of the canonical bijections

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(X \times Y, Z) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y, Z)).$$

Procuring a lower bound of $|\mathbb{N}_\natural|$ remains. We will do an argument inspired by nonstandard analys,s where constructing a surjection $\mathbb{N}_\natural \to \mathbb{R}$ is easy, and hence also an injection going the other way. We have a bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, so by Proposition 11.5.1 or functoriality, we get a bijection $\mathbb{Q}_\natural \to \mathbb{N}_\natural$, so it's enough to show that $|\mathbb{Q}_\natural| \geq \mathfrak{c}$.

Let $C \subseteq \mathbb{Q}^\mathbb{N}$ be the set of rational Cauchy sequences. Define a surjective function $f\colon C \to \mathbb{R}$ by $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Recall that the equivalence relation of $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$ that makes $\mathbb{Q}_\natural$ is

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff [\![x_n = y_n]\!] \in \mathcal{F}.$$

Claim. The function $f\colon C \to \mathbb{R}$ is constant on the equivalence classes of $\sim$.

Recall that a subsequence of a convergent sequence is convergent with the same limit. If $x \sim y$ for $x, y \in C$, we have $[\![x = y]\!] \in \mathcal{F}$. This set is infinite sine $\mathcal{F}$ is free, so by restricting x and y to this subset, we get two subsequences of x and y that are equal, and hence have the same limit. Since x and y are themselves convergent (as real sequences), they must have the same limits as these subseqences, so $f(x) = f(y)$.

By the claim, and choice, we may extend f to a surjective function $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ that also is constant on the equivalence classes of $\sim$. By quotienting we get a surjective function $\mathbb{Q}_\natural \to \mathbb{R}$, which we by choice use to get an injective function $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}_\natural$. Hence, $\mathfrak{c} \leq |\mathbb{Q}_\natural| = |\mathbb{N}_\natural| \leq \mathfrak{c}$, so by Cantor-Schröder-Bernstein, $\mathbb{N}_\natural$ has continuum cardinality. □

We now have all the pieces in place to show:

Theorem 11.9.12 (Lefschetz principle)**.** For any free ultrafilter on the primes $\mathbb{P}$, we have an isomorphism

$$\mathbb{C} \simeq \operatorname*{ulim}_{p \in \mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p.$$

Proof. We combine the results we have hitherto shown. Each $\overline{\mathbb{F}}_p$ is countably infinite by Proposition 11.9.10. The sets $\operatorname{ulim}_{p \in \mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ and $\operatorname{ulim}_{w \in \mathbb{N}} \mathbb{N}$ are then in bijection with each other, by using a bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{P}$ to give $\mathbb{N}$ a fitting ultrafilter. By Lemma 11.9.11, $\operatorname{ulim}_{p \in \mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ has continuum cardinality. It is an algebraically closed field with characteristic zero (Propositions 11.7.11 and 11.9.2). We are done by Steinitz' theorem (11.9.3). □

The above isomorphism can be used to transfer results between the complex numbers and the Galois fields $\mathbb{F}_p$. Before we can do things of this sort, we need a property of finite fields.

Lemma 11.9.13. Let k be a finite field, and pick $a \in \overline{k}$. Then $k(a)$ is finite[3].

Proof. This proof requires some field theory. The element a is algebraic over k, so by field theory, the field extension $k \subseteq k(a)$ is of finite degree, that is $\dim_k(k(a))$ is finite. Since k is finite, this implies that $k(a)$ also is. □

[3]The simplest definition of $k(a)$ is that it is the subfield of $\overline{k}$ generated by k and a. An alternative definition, requiring more field theory, is that it is $k[x]/(f)$ where f is the minimal polynomial of a over k.

Digression 11.9.14. From this we can show that if k is finite, then $\overline{k}$ is a union/colimit of an ascending chain of finite fields. If $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a bijective sequence in $\overline{k}$, which is countably infinite by Proposition 11.9.10, then $\overline{k}$ equals the union of finite field $k \subseteq k(a_1) \subseteq k(a_1, a_2) \subseteq k(a_1, a_2, a_3) \subseteq \cdots$.

Digression 11.9.15. We can use Steinitz' theorem and Frobenius endomorphisms (see Digression 11.7.14) to construct a so-called "wild" automorphism of $\mathbb{C}$, that is, one that is neither the identity nor complex conjugation. Write $F_p\colon \overline{\mathbb{F}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$ for the Frobenius endomorphism $F_p(a) = a^p$ for each p. These are all injective as $\overline{\mathbb{F}}_p$ is a field. Furthermote, for each fixed y, the polynomial $x^p - y$ has a root as $\overline{\mathbb{F}}_p$ is algebraically closed, so F_p is surjective and an automorphism. We claim that neither F_p nor $F_p \circ F_p$ equal the identity on $\overline{\mathbb{F}}_p$. The polynomial $x^p - x$ has finitely many roots, so F_p has finitely many fixed points. The field $\overline{\mathbb{F}}_p$ is infinite, so F_p cannot be the identity. Similarly, the polynomial $x^{2p} - x$ has finitely many roots, so $F_p \circ F_p$ has finitely many fixed points, and so also cannot be the identity. By functoriality and Łoś we get an ultra-Frobenius automorphism $F_\natural$ on $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ which is neither the identity nor squares to it. By Steinitz we may transfer this to a corresponding situation in $\mathbb{C}$. For more on the wild automorphisms of the complex numbers, see [46].

We can now show an application of the Lefschetz principle.

Theorem 11.9.16 (Ax-Grothendieck)**.** Any injective polynomial $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ is also surjective.

By polynomial $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ we mean an n-tuple of polynomials $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, that is an n-tuple of elements of $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, alternatively a function $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (injectively) induced by such an element We will see at the end of this section that this also holds for all algebraically closed fields.

Proof. Consider the statement for an arbitrary field k. We will first show it for finite fields, then $\overline{\mathbb{F}}_p$, and finally $\mathbb{C}$.

(i) If k is finite, then k^n is finite, so injective implies surjective because this is a general property of functions on a finite set.

(ii) Let $k = \overline{\mho}_p$. Pick an injective polynomial $f = (f_1, \dots, f_n) \in \overline{\mathbb{F}}_p[x_1, \dots, x_n]^n$ and $x \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Let S be the set of coefficients of all the f_i-s, together with x. It is finite. The field $\mathbb{F}_p(S)$ is then finite by induction on Lemma 11.9.13, and by construction, $f \in \mathbb{F}_p(S)[x_1, \dots, x_n]^n$. By (i), f is, seen as a function $\mathbb{F}_p(S)^n \to \mathbb{F}_p(S)^n$ surjective, and hence hits x, such that f as a function on $\overline{\mathbb{F}}_p$ is surjective.

(iii) The idea is to use the isomorphism by pushing this to a load of polynomials in $\overline{\mathbb{F}}_p$ that we then can apply (ii) on. Let $k = \mathbb{C}$, and pick an injective polynomial $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^n$. Write

$$f_i = \sum_\alpha a_{i,\alpha} X^\alpha$$

in multi-index notation. For simplicity, identify one of the isomorphisms $\mathbb{C} \simeq \operatorname{ulim} \overline{\mathbb{F}}_p$ we get from Steinitz' Theorem 11.9.12. Then $a_{i,\alpha} = a_{i,\alpha,\natural}$ for $a_{i,\alpha,p} \in \overline{\mathbb{F}}_p$ for each p. Let $f_{i,p}$ be the corresponding $\overline{\mathbb{F}}_p$-polynomial

$$f_{i,p} = \sum_\alpha a_{i,\alpha,p} X^\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p[x_1, \ldots, x_n]$$

and get polynomials $f_p = (f_1, \ldots, f_n) \in \overline{\mathbb{F}}_p[x_1, \ldots, x_n]^n$. By Łoś' theorem, almost all of the f_p are injective since f is, so by (ii) almost all of them are surjective. By Łoś, $f = f_\natural$ is surjective, and we are done. □

Another application of the Lefschetz principle is it letting us prove a model-theoretic transfer principle between the algebraically closed fields of zero and positive characteristic. In order to get it full strength, we need a characterization of when algebraically closed fields satisfy the same first order sentences. We follow [22, Chap. 1].

Definition 11.9.17. Let $\mathcal{L}$ be a first-order language. Two $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are *elementarily equivalent* if they satisfy the same first-order sentences.

Example 11.9.18. By Łoś, a ring A is elementarily equivalent to all its ultrapowers $A_\natural$, and more generally, a structure $\mathfrak{A}$ and all its ultrapowers $\mathfrak{A}_\natural$.

Example 11.9.19. A field k is real closed if it's elementarily equivalent to $\mathbb{R}$. They're not usually defined this way, but they can be characterized as such, see e.g. [22, Thm. 1.16]. One example is the real algebraic numbers, the ring of real numbers that are zeros of polynomials in $\mathbb{Z}[x]$, also called the integral closure of $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$, and the field of Puiseux series with coefficients in $\mathbb{R}$. [5, Thm. 2.79, ex. 2.12, Thm. 2.90]. This class of fields can be characterized as being those k that aren't algebraically closed, but $k(\sqrt{-1})$ is [5, Thm. 2.14]. For more of these, see for instance [27, Chap. XI.2].

Digression 11.9.20. A nice example of an elementary equivalence er den mellom kroppene $\operatorname{ulim}_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Q}_p$ and $\operatorname{ulim}_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{F}_p((t))$. This result is called the Ax-Kochen prcinciple. Here, $\mathbb{Q}_p$ are the p-adic rationals and $\mathbb{F}_p((t))$ the field of formal Laurent series (alternatively, the field of fractions of the power series ring $\mathbb{F}_p[[t]]$) over $\mathbb{F}_p$ in one variable, and the choice of free ultrafilter on $\mathbb{P}$ is arbitrary. By Łoś this implies that a first order sentence in the language of fields holds for all $\mathbb{Q}^u$ except finitely many p if and only if it holds for all $\mathbb{F}_p((t))$ for all except finitely many p. It was originally shown in [3] that the rings were isomorphic in the prescence of the continuum hypothesis , and later that they were elementarily equivalent without assuming the continuum hypothesis [9]. In [42] it was shown that the continuum hypothesis was necessary for them to always be isomorphic. For an exposition of the elementary equivalence,see se [25, Thm. 5.2.3], or [7, Thm. 5.4.12, Cor. 5.4.18].

Theorem 11.9.21. Two algebraically closed fields are elementarily equivalent if and only if they have the same characteristic.

Proof. Omitted; see [22, Thm. 1.13]. The proof uses Steinitz' and the Löwenheim-Skolem theorem from model theory, see e.g. [28, Cor. 3.4.11]. □

We can now prove the following model-theoretic result, which like the Lefschetz principle lets us relate the algebraically closed fields with zero and positive characteristic.

Theorem 11.9.22 (Characteristic transfer principle)**.** Let φ be a first order sentence in the language of fields. The following are equivalent:

(i) φ holds in one (hence all) algebraically closed field of characteristic zero,

(ii) There are infinitely many primes p such that φ holds in one (hence all) algebraically closed field with characteristic p, and

(iii) There are only finitely many primes p such that φ doesn't hold in once (hence none) algebraically closed field of characteristic p.

Proof. The key observation is that $\mathbb{F} = \operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$, is algebraically closed with characteristic zero for all free ultrafilters on $\mathbb{P}$, and hence elementarily equivalent to all other chacteristic zero algebraically closed fields.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Let E be the exceptional set of primes in (iii). Suppose, aiming for a contradiction, that E is infinite. By the ultrafilter lemma (Theorem 10.1.11), get a free ultrafilter on $\mathbb{P}$ that catches E. By Theorem 11.9.21, φ doesn't hold in all all $\overline{\mathbb{F}}_p$ with $p \in E$, so by Łoś it can't hold in $\mathbb{F}$, which contradicts (i) by Theorem 11.9.21.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Look at the complement of the set of exceptional primes.

(ii) $\Rightarrow$ (i): By the ultrafilter lemma (Theorem 10.1.11), make a free ultrafilter on $\mathbb{P}$ that catches such an infinite set of primes E. By Theorem 11.9.21, φ holds for each $\overline{\mathbb{F}}_p$ for those p in E, so by Łoś it holds for $\mathbb{F}$. By Theorem 11.9.21, φ also holds for all algebraically closed fields of characteristic zero. $\square$

The characteristic transfer principle lets us give a shortert argument for the transition between the $\overline{\mathbb{F}}_p$-s to $\mathbb{C}$ in the proof of the Ax-Grothendieck theorem, as it can be formulated as a collection of first-order sentences $\varphi(n)$ stating the theorem for all polynomials of degree $\leq n$. In light of this observation, Theorem 11.9.21 gives Ax-Grothendieck for all algebraically closed fields, as we already know it holds for $\mathbb{C}$ and each $\overline{\mathbb{F}}_p$. Such an argument also lets us avoid the Lefschetz principle in proving the strong version of the theorem, since we can use $\operatorname{ulim}_{p\in\mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$ as the characteristic zero field to apply Theorem 11.9.21 on.

11.10 Digression: First-order characterizations of rings

When students first learn about the real numbers, pardon the pun, for real, there is an elephant in the room – the completeness axiom. It is muc hmore complicated and technical than the other axioms one has gotten used to, and some students may begin to think that their lecturer likes to torment them without reason. Since the complexity comes from it being a second-order statement, one may ask about if it is possible to get rid of it in favour of some hopefully simpler first-order axioms. It is also interesting for foundational reasons to know if there exists a first-order axiomatization of the integers, for those could be used to replace the Peano axioms and make a first-order axiomatization of the naturals. More generally, one may ask whether or not a given ring A has a first-order axiomatization.

The case where A is finite is obvious. The ring can be axiomatized by a first-order sentence saying that A has n elements, names them and gives the entire addition and multiplication tables of the ring.

In model theory, it is well-known that the answer to the question in the infinite case is no. The proof is a simple application of the compactness theorem: Extend the language to include a new pile of constant symbols (of arbitrarily large cardinality). Make a collection of all first-order sentences that A satisfies, together with axioms saying all our new constant symbols are pairwise unequal. Since A is infinite, each finite subset of these axioms (in the extended language) has a model, namely A, so by the compactness theorem, we can conjure up a model satisfying *all* of the axioms. It will be elementarily equivalent to A, but have arbitrarily large cardinality, so it cannot be isomorphic to A. For the details, see [28, korr. 3.4.12]

In the argument above, an ultraproduct does the hard work (in the sense that the compactness theorem can be shown with ultraproducts), so we may show this result without model theory by making the ultraproduct ourselves. In return we get a much less elegant proof where we cannot hide the details behind the compactness theorem.

We need a filter-theoretic lemma.

Lemma 11.10.1. If $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ is a set such that $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ for all natural n and $A_1, \ldots, A_n \in F$, then F can be extended to a proper filter on I.

Proof. (sketch) The idea is to let $\mathcal{F}$ be the filter generated by F and showing that this filter is proper. In practice one lets

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq I \mid B \supseteq A_1 \cap \cdots \cap A_n \text{ for a } n \text{ and some } A_1, \ldots, A_n \in F\}$$

(which turns out to be the filter generated by F), and shows that this is a proper filter containing F. $\square$

Such F are said to have the *finite intersection property*[4].

Proposition 11.10.2. Let A be an infinite set. For each infinite set κ, there is an index set W and an ultrafilter on it such that the corresponding ultrapower $A_\natural$ has cardinality $\geq |\kappa|$.

Proof. Our plan is to find an index set W, an ultrafilter, and functions $f_w \colon \kappa \to A$ for $w \in W$ such that the composition

$$\kappa \xrightarrow{\iota} \kappa_\natural \xrightarrow{f_\natural} A_\natural$$

is injective. What follows is a simplified version of the ultraproduct proof of the compactness theorem, see e.g. [6, Chap. 5.4] or [7, Cor. 4.1.11]. Pick index set $W = \mathcal{P}^{\text{fin}}(\kappa)$, the set of all finite subsets of κ.

For $E \in W$, let

$$X_E = \{j \in W \mid E \subseteq j\}$$

and

$$F = \{X_E \subseteq W \mid E \in W\} \subseteq \mathcal{P}(W).$$

[4] Norwegian: *endelig snitt-egenskapen.*

Claim. F has the finite intersection property.

This follows from the following observations:

(i) For $E \in W$, $E \in X_E$ such that X_E is nonempty.

(ii) For $E, G \in W$, $E \cap G \in W$.

(iii) For $E, G \in W$, $X_E \cap X_G = X_{E \cap G}$.

Now extend F to a proper filter on W by Lemma 11.10.1, and by the ultra filter lemam (Theorem 10.1.11) to an ultrafilter $\mathcal{F}$ on W containing F.

Claim. For $\alpha, \beta \in \kappa$, we have $X_{\{\alpha,\beta\}} \in \mathcal{F}$.

This is because $\{\alpha, \beta\}$ lies in W, (the set is finite), so $X_{\{\alpha,\beta\}}$ lies in F and hence also $\mathcal{F}$.

For each $w \in W$, w is a finite subset of κ. Since A is infinite, we can for each w pick a function $f_w \colon \kappa \to A$ that differentiates between these elements.

Claim. For two different $\alpha, \beta \in \kappa$ and $w \in X_{\{\alpha,\beta\}}$, $f_w(\alpha) \neq f_w(\beta)$.

This one is by packing up thet definitions. The criterion on W says that $\{\alpha, \beta\} \subseteq w$, and by the definition of f_w, the function will differentiate between α and β.

By the observations above we get at that for two different $\alpha, \beta \in \kappa$, we have

$$\mathcal{F} \ni X_{\{\alpha,\beta\}} \subseteq \{w \in W \mid f_w(\alpha) \neq f_w(\beta)\}$$

so $\mathcal{F}$ also catches the set to the right, such that $f_\natural(\iota(k)) \neq f_\natural(\iota(k))$ where $\iota \colon \kappa \to \kappa_\natural$ is the diagonal embedding. Thus, the composition $\kappa \to A_\natural$ of the diagonal embedding $\kappa \to \kappa_\natural$ and $f_\natural \colon \kappa_\natural \to A_\natural$ is injective, such that the cardinality of $A_\natural$ is at least that of κ. $\square$

Remark 11.10.3. The index set W in the above proof has the same cardinality as κ, see see [21, Ex. 5.2].

Our desired result is obtained as a corollary.

Corollary 11.10.4. Let A be an infinite ring. Then there is a ring B that is elementarily equivalent to A, but with greater cardinality. In particular, B isn't isomorphic to A.

Proof. By the above lemma we can get an ultrapower $A_\natural$ with a greater cardinality than A, and by Łoś this is elementarily equivalent to A. This $A_\natural$ is too big to be able to be isomorphic to A. $\square$

One isn't required to take an ultrapower over a big index set to increase the cardinality. As we saw in Lemma 11.9.11, $\mathbb{N}_\natural$ in the case $W = \mathbb{N}$ has continuum cardinality, and from this it follows that $\mathbb{Z}_\natural$, $\mathbb{Q}_\natural$ and $\mathbb{R}_\natural$ also all have continuum cardinality with the same index set. In particular, $\mathbb{N}$ (as a monoid), $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$ are not first-order axiomatizable. In the beginning of the next chapter, we will see that $\mathbb{R}_\natural$ is not isomorphic to $\mathbb{R}$ with this index set, even if it has the same cardinality.

Chapter 12

Nonstandard analysis

As a detour to the algebra this thesis is actually about, and before we begin doing more advanced algebra, we will do nonstandard analysis to illustrate it as an application of ultraproducts. We will primarily characterize known phenomena from analysis by way of ultraproducts, and see that they often have simpler and more intuitive descriptions than the usual ones with their ε-formalism. When we have defined basic concepts like infinite closeness, we will see that the abovementioned characterizations have fewer quantifiers than the standard versions (because some of them are hidden behind our new concepts). Since we already have Łoś' theorem and are comfortable using it, we have already paid the entrance ticket to gain access to the world of nonstandard analysis. We follow [18], an introduction to the hyperreals and nonstandard analysis, and [11], which primarily does more advanced (nonstandard) analysis.

In this chapter, all ultraproducts are ultrapowers, and the pair $(W, \mathcal{F})$ is such that $\mathbb{N} \neq \mathbb{N}_\natural$. More on that later.

12.1 The hyperreal numbers

By Łoś' theorem, the hyperreals $\mathbb{R}_\natural$ are an ordered field. We write its order $\leq$. In nonstandard analysis, one writes ${}^*\mathbb{R}$ for the hyperreals, and in general * for all "nonstandard extensions" – what we call ultraproducts. We use the – pardon the pun – nonstandard notation $\natural$ to be in line with the notation of the rest of this thesis.

As an ultrapower, $\mathbb{R}_\natural$ has a diagonal embedding $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\natural$, which we identified in Convention 11.2.16. We have earlier seen that this embedding is a ring homomorphism. One can check that it also preserves the order $<$ on $\mathbb{R}_\natural$, making it a strictly increasing ring homomorphism. We will use this to relate the usual reals and the hyperreals. We also have an absolute value function $|\cdot|\colon \mathbb{R}_\natural \to \mathbb{R}_\natural$, which by Łoś acts as expected.

Definition 12.1.1. Pick $r \in \mathbb{R}_\natural$.

(i) r is an *infinitesimal* if $|r| < x$ for each$0 < x \in \mathbb{R}$. The set of infinitesimals is written $\mathbb{I}$.

(ii) r is *limited* if $|r| < x$ for an $x \in \mathbb{R}$. The set of limited numbers is written $\mathbb{L}$.

(iii) r is *unlimited* if it is not limited.

(iv) r er *appreciable* if it is limited and not an infinitesimal.

Digression 12.1.2. One can define infinitesimals and limited elements for each ordered field k, making these intrinsic concepts. Remember that ordered fields have characteristic zero. We can define the infinitesimals to k as those x such that $-1/n < x < 1/n$ for each $n \in \mathbb{N}$, and the limited elements as those x where there exists an n such that $-n < x < n$. In the case $\mathbb{R}_\natural$, this is equivalent to the definitions we gave above in Definition 12.1.1. With these concepts, we can say that an ordered field is archimedean if and only if it has no nontrivial infinitesimals, equivalently that it doesn't have any unlimited elements.

Note that zero is an infinitesimal, and is the only real one. Let us show that nontrivial infinitesimals exist. Suppose first $W = \mathbb{N}$, and let $\mathcal{F}$ be an arbitrary free ultrafilter on W. Let

$$\varepsilon = [(1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)], \quad \text{and} \quad \omega = 1/\varepsilon = [(1, 2, 3, 4, \ldots)].$$

We claim that ε is an infinitesimal. It is positive because $[\![1/n \geq 0]\!] = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, and furthermore, for each real $r > 0$, there are only finitely many n such that $r > 1/n$, $[\![1/n < r]\!] \in \mathcal{F}$, making ε an infinitesimal.

The issue on whether $\mathbb{R}_\natural$ has a nontrivial infinitesimal is equivalent to that of whether $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ is nonempty: Given a nonzero infinitesimal ε, $\lfloor 1/|\varepsilon| \rfloor$ is in $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$, and given $N \in \mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$, we have that $1/N$ is a nonzero infinitesimal. With this characterization, we see that given an index set W with cardinality $> \aleph_0$, we can use Proposition 11.10.2 and Remark 11.10.3 to get an ultrafilter $\mathcal{F}$ on W where $|\mathbb{N}_\natural| = |W| > \aleph_0$, such that $\mathbb{N}_\natural \smallsetminus \mathbb{N}$ in particular is nonempty.

Digression 12.1.3. There is an easier way of getting a pair $(W, \mathcal{F})$ with $\mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$ for an arbitrary W: One can show that if $\mathcal{F}$ has an added property called countable incompleteness, (see Definition 15.2.2), then one can do a similar argument to show that $\mathbb{R}_\natural$ has nontrivial infinitesimals.

To avoid requiring the strong condition $W = \mathbb{N}$, we instead assume only that we have an infinitesimal:

Convention 12.1.4. In this chapter, the pair $(W, \mathcal{F})$ satisfies $\mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$.

If $X \subseteq \mathbb{R}$, we will write $X_\natural^\infty$ for the set of unlimited elements of $X_\natural$, such that $\mathbb{N}_\natural^\infty$ is the set of unlimited hypernatural numbers, and $\mathbb{R}_\natural^\infty$ the set of unlimited hyperreals.

Digression 12.1.5. As promised at the end of the last chapter, we can now show that $\mathbb{R}_\natural$ is not isomorphic to the real numbers. Intuitively, the only axiom for $\mathbb{R}$ we a priori don't have for $\mathbb{R}_\natural$ is (Dedekind) completeness. This is the last axiom required to uniquely specify $\mathbb{R}$ up to isomorphism, so any difference between $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}_\natural$ must be detectable by completness. The set of infinitesimals $\mathbb{I}$ is nonempty and has no supremum: Every real $r > 0$ is an upper bound of $\mathbb{I}$, so no real, and hence appreciable number can be the supremum of $\mathbb{I}$. The infinitesimals remain. If an infinitesimal ε was the supremum of $\mathbb{I}$, then that would contradict 2ε lying in $\mathbb{I}$. Hence $\mathbb{I}$ has no suprermum, and $\mathbb{R}_\natural$ is not Dedekind complete. One can also show $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}_\natural$ by showing that $\mathbb{R}_\natural$ is not archimedean.

Proposition 12.1.6. The set of unlimited numbers $\mathbb{L}$ is a subring of $\mathbb{R}_\natural$, and $\mathbb{I}$ is an ideal of it. The set $\mathbb{N}_\natural^\infty$ is closed under addition, and addition with elements from $\mathbb{Z}$. The set $\mathbb{N}_\natural^\infty$ is closed under addition with elements from itself with the same sign, and $\mathbb{L}$, and multiplying by elements from $\mathbb{R}_\natural \setminus \mathbb{I}$.

Proof. We show only that if $a \in \mathbb{L}$ and $b \in \mathbb{I}$, then $ab \in \mathbb{I}$. We have $|a| \leq m$ for a $m \in \mathbb{N}$, and $|b| \leq 1/n$ for each $n \in \mathbb{N}$, so $|ab| \leq m/n$ for every $n \in \mathbb{N}$. Given $N \in \mathbb{N}$, we can pick n large enough so $|ab|$ is less than $1/N$, so ab is an infinitesimal. $\square$

Remark 12.1.7. Results like the above have analogues to results about sequences. Let $W = \mathbb{N}$. By our choice of W, we can project real sequences $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to hyperreal numbers $a_\natural$. One can show that if (a_n) is bounded, then so is $a_\natural$, and that if (a_n) converges to zero, then $a_\natural$ is an infinitesimal. The statement of $\mathbb{I}$ being an ideal in $\mathbb{L}$ is then parallel to the set c_0 of sequences converging to zero being an ideal of the ring ℓ^∞ of real bounded sequences.

A useful result about the hypernaturals is that the unlimited hypernatural numbers are where they should be, namely to the right of all the normal naturals.

Proposition 12.1.8. The unlimited hypernatural numbers are the nonstandard hypernaturals: We have $\mathbb{N}_\natural^\infty = \mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$.

Proof. ($\subseteq$): This says that an unlimited hypernatural cannot be natural, which is by definition.

($\supseteq$): Pick $N \in \mathbb{N}_\natural \setminus \mathbb{N}$. Then $N \neq n$ for all $n \in \mathbb{N}$. By Łoś on the sentences

$$\varphi_n \equiv (\forall m \in \mathbb{N})(n \neq 1 \wedge \cdots \wedge n \neq m \to n \geq m)$$

for each $n \in \mathbb{N}$, we have $N \geq n$ for each $n \in \mathbb{N}$, such that N is unbounded. $\square$

There are many other intuitive results relating this classification of the hyperreals in "small", "medium" and "large". For instance, for every $0 \neq x \in \mathbb{R}_\natural$, x is an infinitesimal if and only if $1/x$ is unlimited.

Digression 12.1.9. The ring $\mathbb{L}$ is a valuation ring, a ring where $x \in \mathbb{L}$ or $x^{-1} \in \mathbb{L}$ holds for each $0 \neq x \in \mathbb{R}_\natural$. From this it follows that $\mathbb{L}$ has a unique maximal ideal (which we in the next chapter will call being *local*), and $\mathbb{I}$ is exactly this maximal ideal. Hence $\mathbb{L}/\mathbb{I}$ is a field. We will see in a few pages which field this is.

Definition 12.1.10. Define the following equivalence relation on $\mathbb{R}_\natural$.

$$x \simeq y \iff x - y \in \mathbb{I} \quad \text{and} \quad x \sim y \iff x - y \in \mathbb{L}.$$

The equivalence class of x under $\simeq$ is called the *halo* of x, and is written $\mathrm{hal}(x)$. The equivalence class of x under $\sim$ is called the *galaxy* of x, and is written $\mathrm{gal}(x)$.

Remark 12.1.11. It is also common to call $\mathrm{hal}(x)$ the monad of x, and write $\mu(x)$ for it.

Needless to say, we will interpret the equivalence relation $\simeq$ as infinite closeness. With these new words, we can say that $\mathbb{I}$ is the halo of zero, and $\mathbb{L}$ as the galaxy of zero (and all of $\mathbb{R}$). In fact, all galaxies and halos are shifted versions of these;

$$\mathrm{hal}(x) = x + \mathbb{I}, \quad \text{and} \quad \mathrm{gal}(x) = x + \mathbb{L}.$$

Lemma 12.1.12. If $x, y \in \mathbb{R}$ with $x \simeq y$, then $x = y$.

Proof. In that case, $x - y$ is infinitesimal and real, but zero is the only real infinitesimal. $\square$

Lemma 12.1.13. If $a \simeq x \leq y \simeq b$ with $a, b \in \mathbb{R}$, then $a \leq b$.

Proof. We get $a \leq b + \varepsilon$ for ε an infinitesimal. If now $a > b$, aiming for a contradiction, then $b < a \leq b + \varepsilon$, such that $a \simeq b$, and Lemma 12.1.12 gives $a = b$, contradiction. $\square$

Remark 12.1.14. Since $\sim$ and $\simeq$ are equivalence relations, distinct halos and galaxies are disjoint. In particular, if $\mathrm{hal}(a)$ and $\mathrm{hal}(b)$ are unequal and disjoint for real $a \neq b$ by Lemma 12.1.12. One can show that if two halos or galaxies are different, then every element in one of them is greater than every element of the other This lets us order the halos and galaxies, and one can ask questions on how these orders behave. One can for example show that the galaxies are densely ordered: For any unlimited $\omega \in \mathbb{R}_\natural$, the function $[0,1] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}_\natural)$ given by $t \mapsto \mathrm{gal}(t\omega)$ is injective. By translation, there are at least $\mathfrak{c}$ galaxies between any two different galaxies.

Here are some other useful properties:

Lemma 12.1.15. Suppose $a, b, c, d \in \mathbb{L}$ with $a \simeq b$ and $c \simeq d$. Then $a \pm c \simeq b \pm d$, $ac \simeq bd$, and if $c \not\simeq 0$, then $a/c \simeq b/d$. Futhermore, if $x \simeq y$ in $\mathbb{R}_\natural$ and $a \in \mathbb{L}$, then $ax \simeq ay$.

Proof. Write $\varepsilon = a - b$ and $\delta = c - d$. The first follows from the fact that

$$(a + c) - (b + d) = \varepsilon + \delta,$$

an infinitesimal because it is a sum of two infinitesimals (Proposition 12.1.6), and similarly for subtraction. For the second, observe that

$$ac = (b + \varepsilon)(d + \delta) = bd + \varepsilon d + b\delta + \varepsilon\delta,$$

and since the last three terms to the right are infinitesimals (Proposition 12.1.6), we have $ac \simeq bd$. By the multiplication rule, it's enough to show that $1/c \simeq 1/d$ for the one on divison. We calculate:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{d + \delta} = \frac{d - \delta}{d^2 - \delta^2} \simeq \frac{d - \frac{\delta^2}{d}}{d\left(d - \frac{\delta^2}{d}\right)} = \frac{1}{d},$$

where we use the appreciability of d to get that all the denomenators are appreciable, which is used in the $\simeq$ above. For the last part, noe that $ax - ay = a(x-y)$, and $x-y$ is an infinitesimal, such that $a(x-y)$ is by Proposition 12.1.6. $\square$

Proposition 12.1.16. Each $x \in \mathbb{L}$ is infinitely close to a unique real number $\mathrm{sh}(x)$, which we will call the *shadow* of x.

Proof. Pick $x \in \mathbb{L}$. By boundedness, get $r \in \mathbb{R}$ such that $|x| < r$, that is $-r < x < r$. Let $A = \{s \in \mathbb{R} \mid s < x\}$. Then r is an upper bound of A, and A is nonempty, as $-rinA$. Hence $s = \sup(A)$ exists. We claim that $x \simeq s$. Pick a real $\varepsilon > 0$. We must have $s + \varepsilon \notin A$, for if not $s + \varepsilon \leq \sup(A)$, such that $x \leq s + \varepsilon$. If we didn't have $s - \varepsilon \leq x$, that is if $x > s - \varepsilon$, then $s - \varepsilon$ would be an upper bound of A, such that $\sup(A) \leq s - \varepsilon$, which is false. Hence $s - \varepsilon \leq x \leq s + \varepsilon$ for every real $\varepsilon > 0$. Thus $|x - s| \leq \varepsilon$ for each such ε, such that $x \simeq s$. Uniqueness follows from Lemma 12.1.12. $\square$

We get from Lemma 12.1.15 and Lemma 12.1.13 that the shadow function has nice behaviour:

Proposition 12.1.17. The function $\mathrm{sh}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ is a surjective increasing ring homomorphism. Furthermore, if b is a unit of $\mathbb{L}$, i.e. $b \not\simeq 0$, then $\mathrm{sh}(b) \neq 0$ and $\mathrm{sh}(a/b) = \mathrm{sh}(a)/\mathrm{sh}(b)$.

Remark 12.1.18. One can compute $\ker(\mathrm{sh}) = \mathbb{I}$, such that the first isomorphism theorem gives $\mathbb{L}/\mathbb{I} \simeq \mathbb{R}$. If we instead begins the construction with $\mathbb{Q}$ instead of $\mathbb{R}$, we get a surjective ring homomorphism $\mathrm{sh}\colon \mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L} \to \mathbb{R}$. The first isomorphism theorem on this gives $(\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L})/(\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{I}) \simeq \mathbb{R}$, such that we get an alternative construction of the reals [18, Chap. 18.1]. The sets $\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L}$ and $\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{I}$ can be defined intrinsically as the limited and infinitesimal sets of $\mathbb{Q}_\natural$ repsectively; see Digression 12.1.2.

Digression 12.1.19. It was mentioned in the proof of Lemma 11.9.11, that we did an argument inspired by nonstandard analysis to show $|\mathbb{N}_\natural| \geq |\mathbb{R}|$ in the case $W = \mathbb{N}$, but we lacked nonstandard machinery and had to do the argument "by hand". The argument we did was an unpacked version of the above lemma: Since we have bijections $|\mathbb{N}_\natural| = |\mathbb{Q}_\natural|$, it is enough to make a surjection $\mathbb{Q}_\natural \to \mathbb{R}$. Since $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, the image of the shadow function under $\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L}$ equals all of $\mathbb{R}$, giving a surjective function $\mathbb{Q}_\natural \cap \mathbb{L} \to \mathbb{R}$. We can then extend it to a surjective function $\mathbb{Q}_\natural \to \mathbb{R}$.

Instead of now characterizing concepts like continuity and convergence of real functions, we go directly to metric spaces for free generality.

12.2 Nonstandard analysis in metric spaces

We will now study metric spaces. Given a function $f\colon X \to Y$, we get an ultrapower $f_\natural\colon X_\natural \to Y_\natural$. It extends f with respect to the diagonal embeddings $X \to X_\natural$ and $Y \to Y_\natural$. In Proposition 11.2.9, we formulated this phenomena as a certain natural transformation. The methodology in nonstandard analysis is largely about studying objects by looking at their ultrapowers, so there is no point in differentiating between f and $f_\natural$. Thus:

Convention 12.2.1. In this chapter, we drop distinguishing between a function $f\colon X \to Y$ and its ultrapower $f_\natural\colon X_\natural \to Y_\natural$:

In analysis one often quantifiser over the set $\mathbb{R}^{>0}$ of strictly positive reals.

We can use Łoś with the set of strictly positive hyperreals, as

$(\mathbb{R}^{>0})_\natural = (\mathbb{R}_\natural)^{>0}$. This follows from $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in \mathbb{R}^{>0} \leftrightarrow x > 0)$, such that Łoś gives $(\forall x \in \mathbb{R}_\natural)(x \in (\mathbb{R}^{>0})_\natural \leftrightarrow x > 0)$, and $x > 0$ is equivalent to $x \in (\mathbb{R}_\natural)^{>0}$. We can therefore write $\mathbb{R}_\natural^{>0}$ without any conflict of notation. More generally, the same kind of argument gives that for any n-ary relation R on a set X, we have

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in X_\natural^n \mid R_\natural(x_1, \ldots, x_n)\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid R(x_1, \ldots, x_n)\}_\natural.$$

These sets are thus internal, so we can use Łoś on them.

Definition 12.2.2. Let (X, d) be a metric space. Define an equivalence relation $\simeq$ on $X_\natural$ by

$$x \simeq y \iff d(x, y) \text{ is an infinitesimal}$$

for each $x, y \in X_\natural$. The equivalence class of x under $\simeq$ is the halo of x, and is written $\mathrm{hal}(x)$. Further, define an equivalence relation $\sim$ by

$$x \sim y \iff d(x, y) \text{ is limited}$$

for each $x, y \in X_\natural$. The equivalence class of x under $\sim$ is the galaxy of x, and is written $\mathrm{gal}(x)$.

All of the standard elements of $X_\natural$, i.e. those that also lie in X, are of limited distance of each other, and lie thus in the same galaxy. Inspired by the ring of limited hyprreals, we call this galaxy $\mathbb{L}(X)$.

A sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in a metric space X is actually a function $a\colon\mathbb{N}\to X$, so it has an extension $a_\natural\colon\mathbb{N}_\natural\to X_\natural$, which we will call its extended hypersequence.

Intuitively, we want convergence of a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ to $L\in X$ to mean that if we go "very far out" in the sequence, then the elements will all be "very close to L". This won't work in standard analysis as the quantifier order is wrong, but the nonstandard characterization of convergence formulates precicely this intuition:

Proposition 12.2.3. Let X be a metric space. A sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to $L\in X$ if and only if $x_N\simeq L$ for each $N\in\mathbb{N}_\natural^\infty$.

Proof. ($\Leftarrow$): Since $x_N\simeq L$, we have in particular that $d(x_N,L)<r$ for each real $r>0$. Hence,

$$(\forall r\in\mathbb{R}^{>0})(\exists N\in\mathbb{N}_\natural)(\forall m\in\mathbb{N}_\natural)(m\geq N\to d(x_m,L)<r),$$

so Łoś on the inner part of the sentence where r is fixed gives us

$$(\forall r\in\mathbb{R}^{>0})(\exists N\in\mathbb{N})(\forall m\in\mathbb{N})(m\geq N\to d(x_m,L)<r),$$

which is what we wanted.

($\Rightarrow$): We have $(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{>0})(\exists N\in\mathbb{N})(\forall m\in\mathbb{N})(m\geq N\to d(x_m,L)<\varepsilon)$. Fix such an ε and get N. For each $M\in\mathbb{N}_\natural^\infty$, we then have $M\geq N$ (Proposition 12.1.8), so Łoś on the inner part on the sentence with ε and N fixed gives $d(x_M,L)<\varepsilon$. Since this holds for every real $\varepsilon>0$, the number $d(x_M,L)$ must be infinitesimal for each $M\in\mathbb{N}_\natural^\infty$, and we are done. $\square$

With this characterization we can easily prove that limits of sequences are unique with an intuitive ε-free argument: if $(x_n)\to L$ and $(x_n)\to L'$, we have $L\simeq x_N\simeq L'$ for each $N\in\mathbb{N}_\natural^\infty$. So $L\simeq L'$, such that $d(L,L')$ is an infinitesimal. But since L and l' lie in X, $d(L,L')$ is real. Zero is the only real infinitesimal, so the distance is zero and $L=L'$.

With the convergence characterization above and Lemma 12.1.15, we can show that the four field arithmetic operations in $\mathbb{R}$ preserve convergent sequences, such that $\mathbb{R}$ is a topological field. For example, if we have convergent sequences $(a_n)\to a$ and $(b_n)\to b$, then $ab\simeq a_Nb_N$ for each $N\in\mathbb{N}_\natural^\infty$, such that $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}\to ab$. Hence multiplication is continuous: Similarly can be done for the three other operations.

Proposition 12.2.4. Let X be a metric space. A sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is Cauchy if and only if $x_N \simeq x_M$ for each $N, M \in \mathbb{N}_\natural^\infty$.

Proof. ($\Rightarrow$): Pick $\varepsilon > 0$, and get $m \in \mathbb{N}$ such that

$$(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq N \to d(x_n, x_m) \leq \varepsilon).$$

Use Łoś. For $N, M \in \mathbb{N}_\natural^\infty$, we have $N, M \geq m$, such that $d(x_N, x_M) < \varepsilon$. This holds for all real $\varepsilon > 0$, so $d(x_N, x_M)$ is infinitesimal and $x_N \simeq x_M$.

($\Leftarrow$): Pick $\varepsilon > 0$. We have

$$(\exists N \in \mathbb{N}_\natural)(\forall n, m \in \mathbb{N}_\natural)(n, m \geq N \to d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

by letting N be unlimited. Now use Łoś. □

Let us now direct our attention to functions. Intuitively, a function is continuous if an infinitely small change in input gives an infinitely small change in output. This turns out to be the nonstandard characterization of continuity:

Proposition 12.2.5. A function $f\colon X \to Y$ between metric spaces is continuous in $x \in X$ if and only if $x \simeq y \implies f(x) \simeq f(y)$. for each $y \in X_\natural$. Alternatively stated, $f(\mathrm{hal}(x)) \subseteq \mathrm{hal}(f(x))$ for each $x \in X_\natural$.

Proof. ($\Rightarrow$): Pick $\varepsilon > 0$, and get $\delta > 0$ such that

$$(\forall y \in X)(d(x, y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Now use Łoś and especially get that for each $y \in X_\natural$, $x \simeq y$ implies $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. This holds for all real $\varepsilon > 0$, so we must have $f(x) \simeq f(y)$.

($\Leftarrow$): Given a real $\varepsilon > 0$, we have

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_\natural^{>0})(d(x, y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

by letting δ be an infinitesimal. Now use Łoś. □

With the proposition in mind, it's natural to ask which $f\colon X \to Y$ have the stronger condition of $x \simeq y$ implying $f(x) \simeq f(y)$ for each $x, y \in X_\natural$, without the extra requirement of $x \in X$.

Proposition 12.2.6. A function $f\colon X \to Y$ between metric spaces is uniformly continuous if and only if $x \simeq y \implies f(x) \simeq f(y)$ for each $x, y \in X_\natural$.

Proof. ($\Rightarrow$): Pick a real $\varepsilon > 0$, and get a real $\delta > 0$ such that

$$(\forall x, y \in X)(d(x,y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Now use Łoś and get in particular that $x \simeq y$ implies $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. This holds for each real $\varepsilon > 0$, so we must have $f(x) \simeq f(y)$ when $x \simeq y$.

($\Leftarrow$): Pick $\varepsilon > 0$. Then

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_\natural^{>0})(\forall x, y \in X_\natural)(d(x,y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

by letting δ be an infinitesimal. Now use Łoś. $\square$

Recall that $B(x, \varepsilon)$ is the open ball of X consisting of the elements with distance $< \varepsilon$ from x. Generalising this, we will write

$$B_\natural(x, \varepsilon) = \{y \in X_\natural \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

for $x \in X_\natural$ and $\varepsilon \in \mathbb{R}_\natural^{>0}$. These sets are internal; if we pick approximations $x = x_\natural$ and $\varepsilon = \varepsilon_\natural$, then $B_\natural(x_\natural, \varepsilon_\natural) = \operatorname{ulim}_{w \in W} B(x_w, \varepsilon_w)$. In particular, $B_\natural(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon)_\natural$ for each $x \in X$ and real $\varepsilon > 0$.

Proposition 12.2.7. Let X be a metric space. For each $x \in X$, we have

$$\operatorname{hal}(x) = \bigcap_{\substack{x \in U \subseteq X \\ \text{open}}} U_\natural.$$

Proof. ($\subseteq$): Pick $y \simeq x$ in $X_\natural$, and an open $x \in U \subseteq X$. By openness, get a real $\varepsilon > 0$ such that $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. By Convention 11.2.17, we have $y \in B(x, \varepsilon)_\natural \subseteq U_\natural$., such that y lies in the intersection.

($\supseteq$): Suppose now that y lies in the intersection, and pick $\varepsilon > 0$. We have that $B(x, \varepsilon)$ is an open set containing x, so $y \in B_\natural(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon)_\natural$. This holds for all real $\varepsilon > 0$, so $x \simeq y$. $\square$

Let us characterize properties of sets:

Proposition 12.2.8. Let X be a metric space, and pick $A \subseteq X$.

(i) $a \in A$ is an inner point if and only if $\operatorname{hal}(a) \subseteq A_\natural$, that is if for each $x \in X_\natural$, $x \simeq a$ implies $x \in A_\natural$.

(ii) A is open if and only if $\operatorname{hal}(a) \subseteq A$ for each $a \in A$.

(iii) $b \in X$ is a closure point of A (i.e. lies in the closure of A) if and only if there exists $a \in A_\natural$ such that $a \simeq b$, that is if $\mathrm{hal}(b) \cap A_\natural$ is nonempty.

(iv) A is closed if and only if for each $x \in A$ and $x \simeq y \in X_\natural$, we have $y \in A_\natural$.

(v) A is bounded if and only if $A_\natural \subseteq \mathbb{L}(X)$.

(vi) $b \in X$ is an accumulation point of A if and only if there is $b \neq a \in A_\natural$ such that $a \simeq b$, equivalently $\mathrm{hal}(b) \cap A_\natural$ has an element other than b.

Proof. (i) If a is inner, we have $a \in B(a, \varepsilon) \subseteq A$ for a real $\varepsilon > 0$. Hence, $\mathrm{hal}(a) \subseteq B(a, \varepsilon)_\natural \subseteq A_\natural$. Going the other way, if $\mathrm{hal}(a) \subseteq A$, we have $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_\natural^{>0})(B_\natural(x, \varepsilon) \subseteq A_\natural)$. Now use Łoś.

(ii) Being open is equivalent to all elemenst being inner, so this follows from the previous point.

(iii) Suppose b lies in the closre of A, that is $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0})(B(b, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset)$. Use Łoś, let ε be an infinitesimal and by commuting of the ultraproduct and finite intersections (an application of Corollary 11.2.14), alternatively by reformulating the sentence, get $B_\natural(b, \varepsilon) \cap A_\natural \neq \emptyset$. We are now finished, as $B_\natural(b, \varepsilon) \subseteq \mathrm{hal}(b)$. Going the other way, suppose $\mathrm{hal}(b) \cap A_\natural \neq \emptyset$, and pick $c \in \mathrm{hal}(b) \cap A_\natural$. From this we get $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_\natural^{>0})(B_\natural(b, \varepsilon) \cap A_\natural \neq \emptyset)$ by letting ε be an infinitesimal which is large enough, for example $2d(b, c)$. Now use Łoś.

(iv) Being closed means $A = \overline{A}$, so this follows from the previous point.

(v) If A is bounded, get $x \in X$ and real $r > 0$ such that $A \subseteq B(x, r)$. Hence we get (by Convention 11.2.17) $A_\natural \subseteq B(x, r)_\natural = \{y \in X_\natural \mid d(x, y) < r\} \subseteq \mathbb{L}(X)$. Going the other way, we have $(\exists r \in \mathbb{R}_\natural^{>0})(\exists x \in X_\natural)(A_\natural \subseteq B(x, r)_\natural)$ by letting r be unlimited. Now use Łoś.

(vi) For b an accumulation point, we have $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0})(\exists a \in A)(a \neq b \wedge d(a, b) < \varepsilon)$. Use Łoś, and let ε be an infinitesimal. Going the other way, if $\mathrm{hal}(b) \cap A_\natural$ has an element other than b, we have $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0})(\exists a \in A_\natural)(a \neq b \wedge d(a, b) < \varepsilon)$. Then use Łoś on the inner part of the sentence where ε is fixed. □

item (ii) gives in particular that the halos determine the topology on X.

Chapter 13

Commutative algebra

The goal of this chapter is to repeat algebra we will require later in the thesis. This is primarily, but not only, commutative algebra, and we will use the first seven sections on this. These sections are all independent of each other and can be read in any order one pleases. The chapter can also be skipped if one is willing to flip back when needed. In multiple cases we avoid *only* giving what is needed for later to give readers not familiar with the material better intuition and feeling for the concepts and constructions. After this we dedicate two sections to explore how ultraproducts behave regarding the concepts from this chapter. We will omit many standard proofs in order to more quickly reach ultraproducts.

From this point on we will assume more of the reader than we have done until now, for example in the reader's ability to fill in details of proofs on their own. We will need some homologisk algebra in the form of exact sequences and flatness later in the chapter, but we will not spend time on discussing it here. For nice books on homological algebra, see [45] and [38]. The books [30] and [10] are two classical references in commutative algebra.

13.1 Prime ideals

Recall that a proper ideal $\mathfrak{a} \subset A$ is prime if $xy \in \mathfrak{p}$ implies $x \in \mathfrak{p}$ or $y \in \mathfrak{p}$ for all $x, y \in A$. We write $\mathrm{Spec}(A)$ for the set of prime ideals of A.

Definition 13.1.1. The Krull dimension $\dim(A)$ of a ring A is equal to the supremum of the lengths of all the chains of prime ideals of A, counted by the number of proper inclusions.

By our definition, the zero ring has dimension $-\infty$. Some authors give it dimension -1 instead. By Krulls Theorem any ring except the zero ring has a maximal ideal, so the zero ring will in any case be the only one with strictly negative dimension.

There is a nice relation between Noetherian and Artinian rings.

Theorem 13.1.2 (Akizuki-Hopkins)**.** A ring A is Artinian if and only if it is Noetherian and has dimension ≤ 0.

Proof. See [30, Thm. 8.5]. □

13.2 Localisation

Localiaztion is a construction that lets us formally invert elements in a ring.

Definition 13.2.1. Let A be a ring. A set $S \subseteq a$ is *multiplicatively closed* if $1 \in S$ and $xy \in S$ for each $x, y \in S$.

Pick a ring A and a multiplicatively closed set $S \subseteq A$. Define a relation $\sim$ on $A \times S$ as follows:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff (\exists u \in S)(at - bs = 0)$$

This is an equivalence relation. Write $S^{-1}A$ for the quotient set $(A \times S)/\sim$, and suggestively a/s for the equivalence class of (a, s). Define two binary operations $+$ and $\cdot$ on $S^{-1}A$ as follows:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \text{and} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

One can show that this is well-defined, and that $S^{-1}A$ becomes a ring with them. The ring $S^{-1}A$ is called the localization of A with respect to S. It comes with a canonical ring homomorphism $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ given by $\varphi(a) = a/1$.

Localization has a universal property which is useful for creating outgoing ring homomorphisms.

Proposition 13.2.2. Suppose $f\colon A \to B$ is a ring homomorphism such that $f(a)$ is a unit for each $s \in S$. Then f can be uniquely factorized through φ; there is a unique ring homomorphism $h\colon S^{-1}A \to B$ such that $h = f \circ \varphi$.

Proof. See [30, Prop. 3.1]. □

The ring homomorphism φ sends elements of S to units, and if $\varphi(a) = 0$, then $as = 0$ for some $s \in S$. These observations let us compute the kernel as $\ker(\varphi) = \{a \in A \mid (\exists s \in S)(as = 0)\}$. The ring $S^{-1}A$ together with its canonical morphism φ also has a universal property. It shows that the two above properties, together with a third property about the elements of $S^{-1}A$ characterize the pair $(S^{-1}A, \varphi)$.

Corollary 13.2.3. Pick rings A and B, and a multiplicatively closed set $S \subseteq A$. Suppose $f\colon A \to B$ is a ring homomorphism such that

(i) $f(s)$ is a unit for each $s \in S$,

(ii) $f(a) = 0$ implies $as = 0$ for a $s \in S$, and

(iii) Every element of B is of the form $f(a)f(s)^{-1}$ for $a \in A$, $s \in S$.

Then there is a unique isomorphism $h\colon S^{-1}A \to B$ such that $f = h \circ \varphi$.

Proof. Use Proposition 13.2.2 for existence, and (i)-(iii) for isomorphism. See [30, Cor. 3.2] for the details. □

13.3 Length

This section contains content only used in Section 13.9. In our presentation we will follow a combination of [30, Chap. 6] and [2, Chap. 1.1]. There is much more to length than what we will look at here. Fix a ring A and module M.

Definition 13.3.1. A generalized composition series of M is a chain of submodules $M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n$ such that each M_i/M_{i-1} is simple or zero. A composition series is a generalized composition series where every M_i/M_{i-1} is simple. In both cases, their length is the number of proper inclusions.

A generalized composition series can be thought of as a composition series with extra terms, for example if one is more concerned with inclusions instead of proper inclusions. A chain $M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n$ of submodules of M is of maximal length if and only if it is a composition series.

Theorem 13.3.2 (Jordan-Hölder)**.** Let A be a ring, and M an A-module. Then all composition series of M are equally long.

Proof. See [30, Prop. 6.7] or [2, Thm. 1.2]. □

Definition 13.3.3. Let M be an A-module. The length $\ell(M)$ of M, also written $\ell_A(M)$, is the following equal numbers:

(i) The supremum of the lengths of all chains of submodules of M, counted by proper inclusions,

(ii) The infimum of the lengths of all (generalized) composition series of M, and

(iii) The length of all composition series of M.

Example 13.3.4. The zero module is the only module with length zero. The simple modules are the modules with length one.

If one builds the theory of length based on composition series like [2], then one typically begins with defining length as (ii) before one has proven the Jordan-Hölder theorem, where one moves on to (iii). The numbers above being equal also holds in the infinite case. Item (i) is useful when one is working with chains of submodules, while the two others That said, the difference between item (i) and items (ii) and (iii) is primarily in perspective.

Proposition 13.3.5. A module M has finite length if and only if it is both Noetherian and Artinian.

Proof. See [30, Prop 6.8] or [2, Prop. 1.5]. □

In particular, finite length modules are also finitely generated. Rings where the opposite implication occurs are of special interest.

Proposition 13.3.6. Let A be a ring. Then A is Artinian if and only if every finitely generated A-module has finite length.

Proof. See [2, Cor. 3.2]. □

In particular, Artinian rings will have finite length as modules over themselves, an interesting invariant for Artinian rings.

Proposition 13.3.7 (Additivity)**.** If $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ is short exact, then M has finite length if and only if L and N have it. In that case, $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$.

Proof. The first part is by Proposition 13.3.5 and [30, Prop. 6.3]. The last is by [30, Prop 6.9] or [2, Cor. 1.3]. □

Corollary 13.3.8. Suppose M has finite length. Every submodule $N \subseteq M$ has finite length, and $\ell(N) \leq \ell(M)$ with equality if and only if $N = (0)$.

Proof. Look at the short exact sequence $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$. □

13.4 Useful universal properties

One way to understand an object is by looking at how it relates to others. This philosophy pervades categorical thinking and has given us the wish to characterize certain algebraic constructions by universal properties. In practice, they let us avoid having to repeatedly verify that a desired homomorphism to or from a certain object is well-defined and has a certain property every time we need it, which gives universal properties great practical utility. Metamathematically, we may be satisfied by such homomorphisms also utilises the constructions "full logical strength" in that the universal properties characterize the object up to isomorphism.

In the proof of Proposition 11.5.2, we used the universal property of the polynomial ring. In one variable it is as follows:

Proposition 13.4.1. Pick rings A and B, a ring homomorphism $f\colon A \to B$, and $a \in A$. Then there is a unique ring homomorphism $g\colon A[x] \to B$ that extends f and sends $x \mapsto a$.

Proof. Such g satisfy $g\big(\sum_{i=1}^n b_i x^i\big) = \sum_{i=1}^n f(b_i)a^n$, and uniqueness follows. Checking that g is a ring homomorphism is left to the reader. □

From one variable we can go to multiple by induction.

Corollary 13.4.2. Pick a ring homomorphism $f\colon A \to B$, n a natural number and $a_i \in A$ for $1 \leq i \leq n$. Then there is a unique ring homomorphism $g\colon A[x_1, \ldots, x_n] \to B$ which extends f and sends $x_i \mapsto a_i$ for each i.

This property will uniquely characterize the pair $(A[x_1, \ldots, x_n], x_1, \ldots, x_n)$ up to isomorphism. The universal property also has an algebra version.

Corollary 13.4.3. Let B and C be A-algebras. For each $n \in \mathbb{N}$ and choice $c_1, \ldots, c_n \in C$, there is a unique A-algebra homomorphism $g\colon B[x_1, \ldots, x_n] \to C$ sending $x_i \mapsto c_i$ for each i.

Proof. Left to the reader. □

Quotient rings also have a useful universal property.

Proposition 13.4.4. Suppose $f\colon A \to B$ is a ring homomorphism, and pick an ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ such that the following equivalent conditions hold: (i) $\mathfrak{a} \subseteq \ker(f)$, and (ii) f is constant on the equivalence classes of $\mathfrak{a}$. Then there is a unique ring homomorphism $g\colon A/\mathfrak{a} \to B$ such that $f = g \circ \pi$, where $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ is projection, that is, which makes the following diagram commute:

$$\begin{tikzcd} & A/\mathfrak{a} \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Proof. (sketch) Should it exist, it must have the form $g(\overline{a}) = f(a)$. Now show that it is well-defined and a ring homomorphism. □

13.5 Extension and contraction

One is often in a situation where one has two rings and a certain relation between them, and one wants to relate both all and certain types of ideals between them. This happends for instance when one wants to characterize the ideals and prime ideals in $A/\mathfrak{a}$ by relating them to certain ideals of A. Here we may think of the "relation" as the projection $A \to A/\mathfrak{a}$. More examples can be found in localization, see for example [30, Prop. 3.11, 4.8]. This motivates a wish to formalize the idea of going back an forth between ideals of two rings, which we will do here.

Definition 13.5.1. Pick a ring homomorphism $f\colon A \to B$, and ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$ and $\mathfrak{b} \subseteq B$. Then define ideals $\mathfrak{a}^e = (f(\mathfrak{a}))$ and $\mathfrak{b}^c = f^{-1}(\mathfrak{b})$ with respect to f. The ideal $\mathfrak{a}^e$ is called the extension of $\mathfrak{a}$, and $\mathfrak{b}^c$ is called the contraction of $\mathfrak{b}$.

The ideal $\mathfrak{a}^e$ is the one generated by all $f(a)$ for $a \in \mathfrak{a}$, so it is an ideal by definition. The set $\mathfrak{b}^c$ is an ideal because it is the kernel of the composition of ring homomorphisms $A \longrightarrow B \longrightarrow B/\mathfrak{b}$. In applications it will always be clear which ring homomorphisms extensions and contractions are done with. One can show that the contraction of a prime ideal is a prime ideal. Hence,

$f\colon A \to B$ induces a function $\operatorname{Spec}(f)\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$, and with this, Spec becomes a contravariant functor $\mathrm{CRing} \to \mathrm{Set}$[1].

This construction has multiple nice properties. Extensions and contractions are in particular monotone; if $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$ in A, then $\mathfrak{a}^e \subseteq (\mathfrak{a}')^e$, and if $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}'$ in B, then $\mathfrak{b}^c \subseteq (\mathfrak{b}')^c$. This lets is push chains of ideals between A and B. More properties can be found in [30, s. 9ff].

Lemma 13.5.2. Let $f\colon A \to B$ be a ring homomorphism, and pick an ideal $\mathfrak{a} = (\{a_i\}_{i\in I})$. Then $\mathfrak{a}^e = (\{f(a_i)\}_{i\in I})$.

Proof. Left to the reader. □

Extensions give a natural way to quotient out two rings of an ideal after each other, namely by extending the second ideal for it to lie in the right ring. We have

Lemma 13.5.3. Let A be a ring, and $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq a$ ideals. Then we have canonical isomorphisms $(A/\mathfrak{a})/\mathfrak{b}^e \simeq A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \simeq (A/\mathfrak{b})/\mathfrak{a}^e$, where the extension $\mathfrak{a}^e$ is done with the projection $\pi_1\colon A \to A/\mathfrak{b}$, and $\mathfrak{b}^e$ with the projectino $\pi_2\colon A \to A/\mathfrak{a}$.

Proof. By symmetry, the second part follows frmo the first. Write $\pi_3\colon A/\mathfrak{a} \to (A/\mathfrak{a})/\mathfrak{b}^e$ for projection, and let $f\colon A \to (A/\mathfrak{a})/\mathfrak{b}^e$ be the composition $f = \pi_1 \circ \pi_2$. Then $\ker(f) = \pi_3^{-1}(\ker(\pi_2)) = \pi_3^{-1}(\mathfrak{b}^e) = \mathfrak{b}^{ec}$. Since, $\mathfrak{a} = \ker(\pi_3)$ we have $\mathfrak{a} \subseteq \ker(f)$, so $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}^{ec}$, such that $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^{ec}$. One can compute these to be equal, such that the isomorphism follows from the first (or third) isomorphism theorem. □

Lemma 13.5.4. Let $f\colon A \to B$ be a ring homomorphism, and pick ideals $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$. Then $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^e = \mathfrak{a}^e\mathfrak{b}^e$.

Proof. Left to the reader. Recall that the product of two generated ideals idealer $(a_i)_{i\in I}$ and $(b_j)_{j\in J}$ equals $(a_ib_j)_{i\in I, j\in J}$. Lemma 13.5.2 will also be useful. See [30, Ex. 1.18]. □

[1] The codomain is usually Top. The object $\operatorname{Spec}(A)$ has a canonical topology, but we have no use for this here.

13.6 Faithful flatness

In the next chapter, named "uniform bounds", we require knowledge of flatness, which we will look at here. This is not needed before the next chapter, so the reader who wants to may defer this section to later.

Recall that an A-module M is *flat* if the functor $-\otimes_A M\colon \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ is exact, instead of just right exact. This is equivalent to the same definiton, but where the functor instead has codomain Ab, as $\mathrm{Mod}(A)$ and Ab have the same kernels and cokernels, that is the inclusions $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Ab}$ are all faithfully exact[2]. Recall also that if $f\colon A \to B$ is a ring homomorphism, then B gets a canonical structure as an A-algebra structure by letting $a \cdot b = f(a) \cdot b$.

Definition 13.6.1. A ring homomorphism $f\colon a \to B$ is *flat* if B is flat as an A-module.

Definition 13.6.2. An A-module M is faithfully flat if it is flat and $N \otimes_A M = (0)$ implies $N = (0)$ for every A-module N. Furthermore, a ring homomorphism $f\colon A \to B$ is faithfully flat if B is faithfully flat as an A-module.

The condition above can also be formulated as saying that $N \otimes_A M \neq (0)$ for every A-module $N \neq (0)$. This condition can alternatively be replaced by saying that the tensoring functor is faithfully exact, not just exact [38, p. 152]. By using this and decomposing chain complexes to shorter sequences, we have a similar characterization for chain complexes.

If M is an A-mdoule and we have a ring homomorphism $f\colon A \to B$, then $M \otimes_A B$ is naturally a B-module by letting $b \cdot (m \otimes b') = m \otimes (bb')$ and extending linearly. This construction is called scalar extension.

Proposition 13.6.3. If M is a flat A-module and $f\colon A \to B$ a ring homomorphism, then $M \otimes_A B$ is flat as a B-module. The same holds if M is faithfully flat.

Proof. This is because we have, for each B-module N (also an A-module via f, hence an A-B-bimodule), an isomorphism

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \simeq M \otimes_A (B \otimes_B N) \simeq M \otimes_A N$$

[2]A functor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ between two abelian categories is faithfully exact if any given sequence in $\mathcal{A}$ is exact if and only if the induced sequence in $\mathcal{B}$ is – not that F is faithful and exact.

of abelian groups which is natural in N. It can be obtained by composing the natural isomorphisms above, which one can read more about ni [30, Prop. 2.14, Oppg. 2.15]. This gives a natural isomorphism $(M \otimes_A B) \otimes_B (-) \simeq M \otimes_A F(-)$ of functors $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Ab}$, where $F\colon \mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(A)$ is scalar restriction by f. Hence, if M in $\mathrm{Mod}(A)$ is flat (resp. faithfully flat) then so is $M \otimes_A B$ in $\mathrm{Mod}(B)$. $\square$

Recall that if $\mathfrak{a} \subseteq A$ is an ideal and M an A-modul, then $M/\mathfrak{A}M$ has a canonical structure as an $A/\mathfrak{a}$ module. This follows from the general principle that an A-module M also has a canonical strucutre as an $A/\mathfrak{b}$-module for every ideal $\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{Ann}_A(M)$.

Corollary 13.6.4. Le M be an A-module and pick an ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. If M is flat, then so is $M/\mathfrak{a}M$ as an $A/\mathfrak{a}$-module. Similarly for faithful flatness.

Proof. This is by Proposition 13.6.3 and the isomorphism $M \otimes_A A/\mathfrak{a} \simeq M/\mathfrak{a}M$ of $A/\mathfrak{a}$-modules. $\square$

Proposition 13.6.5. If $f\colon A \to B$ is faithfully flat, then $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ for each ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. In particular, f is injective.

Proof. We first look at the case $\mathfrak{a} = (0)$. It says $(0) = (0)^{ec} = (0)^c = \ker(f)$, namely that f is injective, which we show. Pick $a \in \ker(f)$, and consider $(a) \otimes_A B$, where $(a) \subseteq A$ is the ideal viewed as a module. In this tensor product, an arbitrary element satisfies

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes a \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes f(a) \cdot b_i = 0,$$

so $(a) \otimes_A B = (0)$. By faithful flatness, $(a) = (0)$, so $a = 0$ and f is injective.

Suppose now that $\mathfrak{a} \neq (0)$. If we think of B as an A-module, $\mathfrak{a}B$ is a B-submodule, which one can check equals $\mathfrak{a}^e$. By Corollary 13.6.4, $B/\mathfrak{a}^e$ is a faithfully flat $A/\mathfrak{a}$-module. Let $g\colon A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{a}^e$ be the canonical ring homomorphism $g(\overline{a}) = \overline{f(a)}$. Then the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"] & B \arrow[d, "\pi_2"] \\ A/\mathfrak{a} \arrow[r, "g"] & B/\mathfrak{a}^e \end{tikzcd}$$

THis g also induces the same $A/\mathfrak{a}$-module structure on $B/\mathfrak{a}^e$ as the one in Corollary 13.6.4, so it is faithfully flat. By the argument above, g is injective. We calculate:

$$\begin{aligned} \ker(\pi_2 \circ f) &= f^{-1}(\ker(\pi_2)) = f^{-1}(\mathfrak{a}^e) = \mathfrak{a}^{ec}, \text{ and} \\ \ker(g \circ \pi_1) &= \ker(\pi_1) = \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

By commutativity of the square, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$, and we are done. □

If $f\colon A \to B$ satisfies $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$, for every ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, then f is called cyclically pure [41]. Cyclically pure ring homomprhisms, including the faithfully flat ones, have nice properties. They are injective by the argument above, and certain chain conditions of B can for example be pushed to also hold for A. For instance, if B is Noetherian or Artinian, then so is B. Furthermore, contraction of prime ideqals $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ is surjective [30, Prop. 3.16], an interesting relation between the prime ideals of the rings.

Proposition 13.6.5 is why [41] says that faithfully flat homomorphisms "preserve the ideal structure" of A. In that sense, these inclusions may be thought of as especially nice. The condition $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ also characterizes the faithfully flat ring homomorphisms among the flat ones [30, Ex. 16, s. 45].

We have alredy seen a ring homomorphism of interest that is faithfully flat:

Example 13.6.6 ([41, Cor. 3.3.3])**.** Let A be Noetherian. Then the diagonal embedding $A \to A_\natural$ is faithfully flat.

13.7 Discrete valuation rings

Definition 13.7.1. A discrete valuation on a field k is a surjective function $v\colon k \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ such that (i) $v(xy) = v(x) + v(y)$ and (ii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ for every $0 \neq x, y \in k$.

When one has such a v, it is usually extended to $v\colon k \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ by requiring $v(0) = \infty$.

Definition 13.7.2. A discrete valuation ring (DVR) is an integral domain A where there exists a discrete valuation $v\colon \mathrm{Frac}(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ on the field of fractions $\mathrm{Frac}(A)$ such that $A = \{x \in \mathrm{Frac}(A) \mid v(x) \geq 0\}$.

Remark 13.7.3. Beind a DVR implies being a euclidean domain, so DVR-s can be placed in the long chain of implications of nice ring properties containing integral domains, integrally closed rings (see [30, Chap. 5]), UFD-s, PID-s and euclidean domains.

Recall that a ring A is local if it has a unique maximal ideal $\mathfrak{m}$. If so, we often write $(A, \mathfrak{m})$ or $(A, \mathfrak{m}, k)$ for the local ring, where $k = A/\mathfrak{m}$ is the residue field. Recall also that an integral domain B is a valuation ring if for every $0 \neq x \in \operatorname{Frac}(B)$, we have $x \in B$ or $x^{-1} \in B$ with respect to the inclusion $B \subseteq \operatorname{Frac}(B)$. Valuation rings are in particular local. Discrete valuation rings have a particularly simple structure. Here are some examples:

Proposition 13.7.4. Let A be a DVR with valuation $v \colon \operatorname{Frac}(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Then the following hold:

(i) A is a valuation ring.

(ii) The units are the elements with valuation zero.

(iii) A is local with $\mathfrak{m} = \{x \in A \mid v(x) \neq 0\}$, and $\mathfrak{m}$ is a principal ideal.

(iv) Every ideal is either zero or a power of $\mathfrak{m}$, and $\mathfrak{m}^n = \{x \in A \mid v(x) \geq n\}$.

(v) Every ideal is either zero or of the form (x^n) for $n \geq 0$, for some $x \in A$.

Proof. Omitted. See [30, Prop. 9.2] and [32, Thm. 11.1, 11.2] for inspiration. □

In particular, DVR-s are PID-s and Noetherian.

Lemma 13.7.5. Suppose $(A, \mathfrak{m})$ is a local integral domain that is not a field such that $\mathfrak{m} = (x)$ is a principal ideal, and $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = (0)$. Then A is a DVR.

Proof. (sketch) Define $v \colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ by $v(a) = \max\{n \geq 0 \mid a \in \mathfrak{m}^n\}$. It is surjective because $v(x) = 1$. Show that this satisfies the DVR axioms Vis at denne tilfredsstiller DVR-aksiomene. Extend it to a function $v \colon \operatorname{Frac}(A) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ by requiring $v(a/b) = v(a) - v(b)$, which is well-defined, and show that this satisfies the DVR axioms. It is surjective because $v(x) = 1$. □

13.8 Ultraproducts and locality

Now that we know what localization and local rings are, we will make use of the opportunity to see how their behaviour is with respect to ultraproducts. We begin with local rings.

Proposition 13.8.1. Pick rings A_w. Then $A_\natural$ is local if and only if almost all A_w are. Furthermore, if $(A_w, \mathfrak{m}_w, k_w)$ is local for almost all w, then $\mathfrak{m}_\natural$ is the maximal ideal of det maksimale idealet til $A_\natural$, and the residue field is canonically isomorphic to $k_\natural$.

Proof. Recall that a ring A is local if and only if

$$A \neq \{0\} \text{ and } (\forall x, y \in A)(x \text{ and } y \text{ are not units} \to x + y \text{ is not a unit}).$$

This is a first-order property, so Łoś gives the first part. The rest follows from Propositions 11.7.4 and 11.7.9. ☐

Localization is an important construction in commutative algebra, so it is natural to ask whether it behaves with regard to ultraproducts. Intuitively one may think that they should commute with ultraproducts, as the localization construction doesn't quantify over anything other than the ring and the multiplicatively closed subset. This turns out to be true, and we show this now.

Lemma 13.8.2. For multiplicatively closed subsets $S_w \subseteq A_w$, the ultraproduct $S_\natural \subseteq A_\natural$ is also multiplicatively closed.

Proof. Łoś. ☐

Proposition 13.8.3. Pick multiplicatively closed subsets $S_w \subseteq A_w$, and write $\varphi_w \colon A_w \to S_w^{-1} A_w$ for the canonical morphisms. Then

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} S_w^{-1} A_w \simeq S_\natural^{-1} A_\natural.$$

Furthermore, the pair $(\operatorname{ulim}_{w \in W} S_w^{-1} A_w, \varphi_\natural)$ satisfies the universal property of the localization of $A_\natural$ with respect to $S_\natural$.

Proof. Write B for the ultraproduct of the $S_w^{-1} A_w$'s, and $\psi \colon A_\natural \to S_\natural^{-1} A_\natural$ for the canonical morphism. The ring homomorphism $\varphi_\natural \colon A_\natural \to B$ sends elements of $S_\natural$ to units by Łoś on each φ_w doing the same. Furthermore, each elementof

B is of the form $\varphi_\natural(a_\natural)\varphi_\natural(s_\natural)^{-1}$ for all $a_\natural \in A_\natural$ and $s_\natural \in S_\natural$, by Łoś on the statement on each φ_w doing the same. The kernel is

$$\ker(\varphi_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} \ker(\varphi_w) = \{a_\natural \in A_\natural \mid (\exists s_\natural \in S_\natural)(s_\natural a_\natural = 0)\}$$

by Corollary 11.7.3 and Łoś. We are done by Corollary 13.2.3. ☐

Since the field of fractions of an integral domain A can be constructed as the localizatoin $S^{-1}A$ where $S = A \smallsetminus \{0\}$, the field of fractions construction commutes with ultraproducts. We can use this to show that the ultraproduct preserves valuation rings.

Corollary 13.8.4. Pick integral domains A_w. Then $A_\natural$ is a valuation ring if and only if almost every A_w is.

Proof. The ultraproduct $A_\natural$ is an integral domain. By Proposition 13.8.3, we have an isomorphism $\operatorname{Frac}(A_\natural) \simeq \operatorname{ulim}_{w\in W} \operatorname{Frac}(A_w)$, and it commutes with the inclusions $A_\natural \subseteq \operatorname{Frac}(A_\natural)$ and $A_\natural \subseteq \operatorname{ulim}_{w\in W} \operatorname{Frac}(A_w)$. Given this, we may translate the valuation ring sentence of $A_\natural$, which talks of $\operatorname{Frac}(A_\natural)$ and the inclusion $A_\natural \subseteq \operatorname{Frac}(A_\natural)$, to one that talks of $\operatorname{ulim}_{w\in W} \operatorname{Frac}(A_w)$ and the corresponding inclusion, which we then can use Łoś on. ☐

13.9 Modules

Pick rings A_w and modules $M_w \in \operatorname{Mod}(A_w)$ for each $w \in W$ respectively. Write $+_w\colon M_w \times M_w \to M_w$ and $\cdot_w\colon A_w \times M_w \to M_w$ for the module operations. THe ultraproducts of these have form $+_\natural\colon M_\natural \times M_\natural \to M_\natural$ and $\cdot_\natural\colon A_\natural \times M_\natural \to M_\natural$, so it looks like $M_\natural$ should be viewed as an $A_\natural$-module. By Łoś, we see that $M_\natural$ with these functions become an $A_\natural$-module. Similarly as for rings, one may check that the operations $+_\natural$ and $\cdot_\natural$ can also be obtained by considering the $A = \prod_{w\in W} A_w$-module $M = M_\natural = \left(\prod_{w\in W} M_w\right)/\sim$, and seeing that the ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ obtained by the equivalence relation $\sim$ lies in $\operatorname{Ann}_A(M)$, such that M also gets a structure as an $A/\mathfrak{a} = A_\natural$-module.

Much of what we have done for rings has similar versions for modules.

Proposition 13.9.1. (i) The ultraproduct of modules is a functor

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W}\colon \prod_{w\in W} \operatorname{Mod}(A_w) \to \operatorname{Mod}(A_\natural).$$

(ii) The ultrapower $\operatorname{ulim}_{w\in W}\colon \mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(B_\natural)$ is also a functor.

(iii) The ultraproduct of modules commutes with finite products.

Proof. Left to the reader. Much of the work was already done in Propositions 11.2.8, 11.2.9 and 11.2.11. □

The proposition above illustrates one of the benefits of first defining ultraproducts for sets before later specializing. We get the result above almost for free, as almost all of the work was done when proving the same version for sets.

Module categories are considerably prettier than CRing in the sense that they are abelian. This begs the question of whether the ultraproduct of modules has nice homological properties like additivity and exactness. However, we must not get ahead of ourselves; before it is possible to ask these questions, we must check that the domain is abelian.

Lemma 13.9.2. If $\mathcal{A}_i$ is an abelian category for each $i \in I$, then the product category $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ is also abelian.

Proof. Left to the reader. There is a lot to check, but this is a typical categorical argument where there at each step is only one thing that can be done, and which turns out to be the right thing. The idea is to do everything pointwise, such as addition in the Hom-sets, biproducts, kernels and cokernels. □

Proposition 13.9.3. The ultraproduct $\operatorname{ulim}\colon \prod_{w\in W} \mathrm{Mod}(A_w) \to \mathrm{Mod}(A_\natural)$ of modules is an exact functor.

Proof. We must first show that it is additive. Given $f, g\colon M \to N$ in the product category, get decompositions $f_w, g_w\colon M_w \to N_w$ in each $\mathrm{Mod}(A_w)$. Then $f + g = (f_w + g_w)_{w\in W}$ by the proof of Lemma 13.9.2. For each $w \in W$, we have

$$(\forall m \in M_w)[(f+g)(m) = f(m) + g(m)]$$

such that Łoś gives $(f+g)_\natural = f_\natural + g_\natural$. To show exactness, it is enough to show that it preserves kernels and epimorphisms. We will need to lemmas whose proofs are left to the reader.

Lemma 13.9.4. For each ring A, epimorphism is equivalent to surjectivity for the morphisms in $\mathrm{Mod}(A)$.

Lemma 13.9.5. For categories $\mathcal{C}_i$, $i \in I$, a morphism $f = (f_i)_{i\in I}$ in $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ is an epimorphism if and only if every f_i is.

Suppose now that $f\colon M \to N$ is an epimorphism in $\prod_{w\in W} \mathrm{Mod}(A_w)$, and get decompositions $f = (f_w\colon M_w \to N_w)_{w\in W}$. By Lemmas 13.9.4 and 13.9.5, each f_w in $\mathrm{Mod}(A_w)$ is an epimorphism and hence surjective. Ved Proposition 11.5.1, $f_\natural$ is surjective. such that Lemma 13.9.5 gives that $f_\natural$ is an epimorphism.

It remains to show that kernels are preserved. Pick $f\colon M \to N$ in $\prod_{w\in W} \mathrm{Mod}(A_w)$. We show that $\ker(f) \xrightarrow{\iota} M$ is sent to a kernel of $M_\natural$. Since all kernels are isomorphic, we may assume without loss of generality that $\ker(f)$ is our preferred incarnation $(\ker(f_w))_{w\in W}$ with structure morphism $\iota = (\iota_w\colon \ker(f_w) \to M_w)_{w\in W}$. By Corollary 11.7.3,

$$\ker(f)_\natural = \operatorname*{ulim}_{w\in W} \ker(f_w) = \ker(f_\natural)$$

and the action of $\iota_\natural$ is

$$\iota_\natural(a_\natural) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} \iota_w(a_w) = a_\natural.$$

This is the classical kernel of $f_\natural$, so ulim preserves kernels and the functor is exact. □

We will not make use of it in this thesis, but we now get that the ultraproduct does things exact functors do, like preserving biproducts and homology. In $\prod_{w\in W} \mathrm{Mod}(A_w)$, both of these can be done pointwise by Lemma 13.9.2.

We also get a result analogous to Proposition 11.7.4, but without having to use Łoś to prove it. We can instead refer to abstract nonsense.

Corollary 13.9.6. Pick rings A_w and $N_w \subseteq M_w$ in $\mathrm{Mod}(A_w)$ for each $w \in W$ respectivelyy. Then there is a canonical isomorphism of $A_\natural$-modules

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} M_w/N_w \simeq M_\natural/N_\natural.$$

Proof. Write $\iota_w\colon N_w \to M_w$ for the inclusions. The module to the left is the ulim functor applied to the cokernel of $(\iota_w)_{w\in W}$, and the one to the right is the cokernel of the ultraproduct $\iota_\natural\colon N_\natural \to M_\natural$. The ultraproduct functor is exact, so it preserves cokernels, so these must be isomorphic. □

Similarly as for ideals in Definition 11.7.5, we have:

Definition 13.9.7. Let M be an A-module. Then we let $\mu(M)$ be the infimum of all possible numbers of generators of M, with the convention of the zero module having zero generators.

Proposition 13.9.8. Pick modules $M_w \in \mathrm{Mod}(A_w)$. Then $\mu(M_\natural) \leq n$ if and only if $\mu(M_w) \leq n$ for almost all w. Furthermore, $M_w = (m_{1,w}, \ldots, m_{n,w})$ holds for almost all w if and only if $M_\natural = (m_{1,\natural}, \ldots, m_{n,\natural})$.

Proof. Do the same as for Proposition 11.7.6, *mutatis mutandis.* □

Proposition 13.9.9. Every finitely generated $A_\natural$-module is internal.

Proof. In the same style as the proof of Proposition 11.7.13. □

We will now show that finite length transfers to ultraproducts of modules, given a uniform condition on the lengths, and we will get a condition for when an ultraproduct of rings is Noetherian. This generalizes [41, Prop. 2.4.17], which becomes a corollary for us. We first need a technical lemma.

Lemma 13.9.10. Pick rings A_w and modules $M_w \in \mathrm{Mod}(A_w)$. If $\ell(M_w) \leq d$ for almost all w, then each submodule of $M_\natural$ is internal.

Proof. Suppose, aiming for a contradiction, that M is not finitely generated. This suffices, as being finitely generated implies being internal by Proposition 13.9.9. Pick $n_1 \in N \smallsetminus \{0\}$, and iteratively

$$n_2 \in N \smallsetminus (n_1), \quad n_3 \in N \smallsetminus (n_1, n_2), \quad \ldots, \quad n_d \in N \smallsetminus (n_1, \ldots, n_{d-1}),$$

which gives a chain in $M_\natural$ of the form

$$(0) \subset (n_1) \subset (n_1, n_2) \subset \cdots \subset (n_1, \ldots, n_{d-1}) \subset (n_1, \ldots, n_d) \subseteq M_\natural.$$

Pick representatives $n_i = n_{i,\natural}$ for $n_{i,w} \in M_w$. We have

$$(\forall 1 \leq i \leq d)(n_{i,\natural} \in (n_{1,\natural}, \ldots, n_{i,\natural}) \text{ and } n_{i,\natural} \notin (n_{1,\natural}, \ldots, n_{i-1,\natural})).$$

By Łoś and Proposition 13.9.8,

$$(\forall 1 \leq i \leq d)(n_{i,w} \in (n_{1,w}, \ldots, n_{i,w}) \text{ and } n_{i,w} \notin (n_{1,w}, \ldots, n_{i-1,w}))$$

for almost all w, say for every w in $Y \in \mathcal{F}$. For these w, this translates to

$$(0) \subset (n_{1,w}) \subset (n_{1,w}, n_{2,w}) \subset \cdots \subset (n_{1,w}, \ldots, n_{d,w}) \subseteq M_w.$$

Observe that there are d proper inclusions in this chain. Call X the set of all w where $\ell(M_w) \leq d$. It lies in $\mathcal{F}$ by definition. For $w \in X \cap Y \in \mathcal{F}$, the length condition on M_w gives that the last inclusion is an equality. By Proposition 13.9.8, we then have $M_\natural = (n_{1,\natural}, \ldots, n_{d,\natural})$, a contradiction. □

Proposition 13.9.11. For rings A_w and modules $M_w \in \mathrm{Mod}(A_w)$, $\ell(M_\natural) \leq d$ if and only if $\ell(M_w) \leq d$ for almost all w.

Proof. ($\Rightarrow$): Suppose $\ell(M_\natural) \leq d$. Pick a generalized composition series

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_d = M_\natural$$

for $M_\natural$. Each M_i then has finite length by Corollary 13.3.8, is finitely generated by Proposition 13.3.5, and internal by Proposition 13.9.9. Get decompositions $M_i = M_{i,\natural}$ for $M_{i,w}$ for each $1 \leq i \leq d$ and $w \in W$. By Łoś we have chains

$$M_{0,w} \subseteq M_{1,w} \subseteq \cdots \subseteq M_{d,w} = M_w \tag{1}$$

for almost all of the w-s, say for every $w \in X \in \mathcal{F}$:

Claim. These are generalized composition series for almost every w.

The quotient modules $M_i/M_{i-1} = M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural}$ are all simple or zero for every $1 \leq i \leq d$, that is,

$$(\forall 1 \leq i \leq d)(M_i/M_{i-1} = 0 \text{ or } (\forall N \subseteq M_i/M_{i-1} \text{ internal submodule}) \\ (N = 0 \text{ or } N = M_i/M_{i-1}))$$

where we quantify over internal submodules, instead of all, to be able to use Łoś. By Łoś we get the corresponding for almost each w, say for all $w \in Y \in \mathcal{F}$, but where we quantify over all submodules of $M_{i,w}/M_{i-1,w}$. Hence (1) is a generalized composition series for every $w \in X \cap Y \in \mathcal{F}$, such that almost each M_w has length $\leq d$.

($\Leftarrow$): For almost every w, say for every $x \in X \in \mathcal{F}$, get generalized composition series

$$M_{0,w} \subseteq M_{1,w} \subseteq \cdots \subseteq M_{d,w} = M_w.$$

If we push these to $M_\natural$, we get uniquely defined $M_{0,\natural}, \ldots, M_{d,\natural}$, and by Łoś a chain

$$M_{0,\natural} \subseteq M_{1,\natural} \subseteq \cdots \subseteq M_{d,\natural} = M_\natural. \tag{2}$$

We claim that this is a generalized composition series such that $\ell(M_\natural) \leq d$. By Corollary 13.9.6,

$$M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural} \simeq \operatorname*{ulim}_{w \in W} M_{i,w}/M_{i-1,w}.$$

Almost all submodules in the ultraproduct to the right are simple or zero.

In the case of almost all being zero (by Lemma 10.1.6 or Łoś), the ultraproduct is then zero, so we consider the i where almost all are simple. By Łoś' theorem we have that all internal submodules of $M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural}$ are either zero or $M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural}$. The modules $M_{i,w}/M_{i-1,w}$ have all length $\leq d$ ved Proposition 13.3.7, so Lemma 13.9.10 gives that all submodules of $M_{i,\natural}/M_{i-1,\natural}$ are internal, such that the statement of the internal submodules of $\operatorname{ulim}_{w\in W} M_{i,w}/M_{i-1,w}$ makes it simple. Hence (2) is a generalized composition series of length $\leq d$ for $M_\natural$, so that it has length $\leq d$. □

One other way of proving this is to show that having length $\leq d$ is a first-order property, and then applying Łoś. This is done in [22, Prop. 9.1].

By taking the infimum of all d such that the lengths are $\leq d$, we get a similar version of the proposition where one instead checks for equality. For a ring A, we have an equivalence of $\ell_A(A) < \infty$ and A being Artinian by Propositions 13.3.5 and 13.3.6. The special case $M_w = A_w$ then gives the following ring-theoretic corollary:

Corollary 13.9.12. Pick rings A_w. Then $A_\natural$ is Artinian with length $\leq d$ if and only if almost every A_w is Artinian with length $\leq d$. The same holds when testing for $= d$.

In this case A is also Noetherian by Theorem 13.1.2. The uniform bound and "almost all"-criteria go away in the ultrapower case, such that a ring A is Artinian if and only if its ultrapower $A_\natural$ is.

Chapter 14

Uniform bounds

In this chapter we will use ultraproducts to show three exstience results on bounds of problems about ideals in the theory of polynomial rings over fields. We will construct the so-called ultra-hull of finitely generated $k_\natural$-algebras, and use this construction to show the aforementioned existence results. This chapter will closely follow [41].

14.1 Ultra-algebras

If B_w is an A_w-algebra for each w respectively, then $B_\natural$ is an $A_\natural$-algebra by letting the structure homomorphism $A_\natural \to B_\natural$ be the ultraproduct of the structure homomorphisms $A_w \to B_w$.

Definisjon 14.1.1. An ultra-$A_\natural$-algebra is an $A_\natural$-algebra which is an internal $A_\natural$-algebra. That is, an ultraproduct of almost all A_w-algebras B_w, and the $A_\natural$-algebra structure homomorphism is the ultraproduct of the A_w-algebra structure homomorphisms for each B_w respectively.

Together, these form a category.

Definisjon 14.1.2. The category of ultra-$A_\natural$-algebreas Ult-$A_\natural$-alg is the subcategory of $A_\natural$-alg which has ultra-$A_\natural$-algebras as objects, and the morphisms between two ultra-$A_\natural$-algebras $B_\natural$ and $C_\natural$ are the $A_\natural$-algebra homomorphisms which are an ultraproduct of functions f_w, almost all of which being A_w-algebra homomorphisms.

The morphisms in Ult-$A_\natural$-alg are called ultra-$A_\natural$-algebra homomorphisms. We choose explicitly to only require that almost all of the functions $f_w\colon B_w \to C_w$ be algebra homomorphisms, to better be able to use Łoś.

14.2 Ultra-hulls

For the rest of the chapter, fix fields k_w for each $w \in W$. In this section, we will construct the ultra-hull $U(B)$ of a finitely generated (as algebra) $k_\natural$-algebra B. We will do this construction step by step, defining it first for the polynomial algebras $k_\natural[x_1, \dots, x_n]$, and afterwards for all finitely generated $k_\natural$-algebras. It might seem unncessary to use fields, but if we were to generalize this, then we'd need $k_\natural$ to be Noetherian, for example if the k_w-s were Artinian of bounded length by Corollary 13.9.12.

Definisjon 14.2.1. Let A be the $k_\natural$-algebra $k_\natural$-algebraen $k_\natural[x_1, \dots, x_n]$. The ultra-hull $U(A)$ of A is the ultra-$k_\natural$-algebra given by

$$U(A) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} k_w[x_1, \dots, x_n].$$

Elements of $U(A)$ may be thought of as "ultra-polynomials" with coefficients in $k_\natural$ which, unlike normal polyynomials, can also have hypernatural degree.

The structure homomorphism of $U(A)$, $f\colon k_\natural \to U(A)$ can be thought of as a $k_\natural$-algebra homomorphism. By the universal property of $A = k_\natural[x_1, \dots, x_n]$, Corollary 13.4.3, let $g\colon A \to U(A)$ be the unique $k_\natural$-algebra homomorphism which extends f and sends x_i in A to $(x_i)_\natural$ in $U(A)$ for each i. By abuse of notation, we will also call $(x_i)_\natural$ for x_i. This abuse of notation may be motivated by g being an inclusion:

Proposition 14.2.2. The morphism $A \to U(A)$ is injective.

Proof. Write $f\colon k_\natural[x_1, \dots, x_n] \to \operatorname{ulim}_{w \in W} k_w[x_1, \dots, x_n]$. Suppose

$$f\left(\sum_i a_{i,\natural} X^i\right) = f\left(\sum_i b_{i,\natural} X^i\right),$$

and without loss of generality, both of these sums are over the same set. Then $\sum_i a_{i,\natural} X^i = \sum_i b_{i,\natural} X^i$ in $U(A)$, where the difference between the elements of A and $U(A)$ are hidden by the multi-index notation. Hence $\sum_i a_{i,w} X^i = \sum_i b_{i,w} X^i$ in $k_w[x_1, \dots, x_n]$ for almost all$w$. For these w, we must have $a_{i,w} = b_{i,w}$ for all i, such that $a_{i,\natural} = b_{i,\natural}$ and f is injective. $\square$

We will think of $A \to U(A)$ as an inclusion. The ultra-hull construction has a universal property:

Proposition 14.2.3. La $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]$. Pick an ultra-$k_\natural$-algebra $C_\natural$ and $k_\natural$-algebra homomorphism $f\colon A \to C_\natural$. Then f can be uniquely extended to an ultra-$k_\natural$-algebra homomorphism $g\colon U(A) \to C_\natural$.

Proof. Write $A_w = k_w[x_1, \ldots, x_n]$.

(i) Existence: Pick representatives $c_{i,w} \in C_w$ for $f(x_i) = c_{i,\natural}$ in $C_\natural$. By the universal property of each A_w as a ring, Corollary 13.4.2, get ring homomorphisms $g_w\colon A_w \to C_w$ sending $x_i \mapsto c_{i,w}$ and extending the structure homomorphisms $k_w \to C_w$. Since these extend the structure homomorphisms, each g_w is a k_w-algebra homomorphism respectively. Since $A_\natural = U(A)$, we have $g_\natural\colon U(A) \to C_\natural$ and $g_\natural(x_i) = c_{i,\natural} = f(x_i)$, such that g extends f.

(ii) Uniqueness: Suppose both $g = g_\natural$ and $h = h_\natural$ extend f. Then Łoś gives that for almost every w, we have $g_w(x_i) = h_w(x_i)$ for every i, and in addition that both extend the structure homomorphisms $k_w \to C_w$. By the uniqueness in the universal property of A_w (Corollary 13.4.2), we have $g_w = h_w$ for these almost every w, such that $g_\natural = h_\natural$. ◻

This universal property describes $U(A)$ up to a nice isomorphism in Ult-$k_\natural$-alg.

We gave a description of $U(A)$ as intuitively also being able to have polynomials of hyperfinite degree. This turns out to characterize A as a subset of $U(A)$. Write $\deg\colon k_w[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{N}$ for the degree function giving the degree of the polynomial. The ultraproduct of these gives a degree function for $U(A)$, namely $\deg_\natural\colon U(A) \to \mathbb{N}_\natural$.

Lemma 14.2.4. An element $f_\natural \in U(A)$ lies in A (with respect to the morphism $A \to U(A)$) if and only if $\deg_\natural(f_\natural) \in \mathbb{N}$.

Proof. Write $\iota\colon A \to U(A)$ for the inclusion. ($\Rightarrow$): Since $f \in A$ (wrt. the inclusion), $f = \sum_i a_{i,\natural} X^i$. THen

$$\iota(f) = \operatorname*{ulim}_{w \in W} \sum_i a_{i,w} X^i.$$

Each approximation of $\iota(f)$ has the same degree as f, so $\deg(\iota(f)) = \deg(f) \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$): Suppose $\deg(f_\natural) = n \in \mathbb{N}$, and write $f = \operatorname{ulim}_{w \in W} \sum_i a_{i,w} X^i$. Almost all of the approximations $f_w = \sum_i a_{i,w} X^i$ have bounded degree by Łoś on the sentence $\deg_\natural(f_\natural) \leq n$, and without loss of generality, all. Then $\iota(\operatorname{ulim}_{w\in W} f_w)$ is $f_\natural$, and we are done. $\square$

We will now extend the definition to finitely generated algebras, but for this we will make use of a general decomposition of finitely generated algebras.

Lemma 14.2.5. Every finitely generated (as algebra) A-algebra is of the form $A[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$ for an ideal $\mathfrak{a} \subseteq A[x_1, \dots, x_n]$.

Proof. Suppose B is generated (as A-algebra) by $b_1, \dots, b_n$. By the universal property of the polynomial algebra, Corollary 13.4.3, get an A-algebra homomorphism $f\colon A[x_1, \dots, x_n] \to A$ which sends $x_i \mapsto b_i$ for every i. Then $\operatorname{Im}(f) \subseteq A$ is a subalgebra containing $b_1, \dots, b_n$, so it equals A and f is surjective. By the first isomorphism theorem, we have $A \simeq A[x_1, \dots, x_n]/\ker(f)$ as rings, and by checking that a certain diagram commutes, this is also an isomorphism of A-algebras. $\square$

Definisjon 14.2.6. let B be a finitely generated $k_\natural$-algebra, such that $B = A/\mathfrak{a}$ for some $A = k_\natural[x_1, \dots, x_n]$. The ring A is Noetherian by Hilbert's basis theorem, so $\mathfrak{a}$ is finitely generated, and hence also $\mathfrak{a}^e \subseteq U(A)$ (Lemma 13.5.2). Then $\mathfrak{a}^e$ is internal Proposition 11.7.13, so $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{b}_\natural$ for $\mathfrak{b}_w \subseteq k_w[x_1, \dots, x_n]$. We let the ultra-hull of B be

$$U(B) = \operatorname*{ulim}_{w\in W} k_w[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{b}_w.$$

By Proposition 11.7.4 we have a canonical morphism of $k_\natural$-algebras

$$\varphi\colon U(B) \to U(A)/\mathfrak{a}^e.$$

This lets us think of $U(B)$ "as" $U(A)/\mathfrak{a}^e$ when working in $k_\natural$-alg, and we then get access to the universal property of $U(A)/\mathfrak{a}^e$ in this category.

The ideal $\mathfrak{a}$ lies in the kernel of the composition $A \to U(A) \to U(A)/\mathfrak{a}^e$, so by Proposition 13.4.4 it can be uniquely factorized through the projection $A \to A/\mathfrak{a}$. By the isomorphism φ (and its commutativity relation), and recalling $B = A/\mathfrak{a}$, we get a unique morphism $B \to U(B)$ making the following diagram commute:

$$\begin{tikzcd} U(A) \arrow[r] & U(B) \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

and we let this be our canonical morphism $B \to U(B)$.

Our definition of $U(B)$ is not well-defined, as we chose a decomposition $B \simeq k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$. To show uniqueness of the construction up to a nice isomorphism, we show that we keep the universal property we saw in Proposition 14.2.3:

Proposition 14.2.7. Le B be a finitely generated $k_\natural$-algebra. Any morphism $B \to C_\natural$ of $k_\natural$-algebras can be uniquely extended to an ultra-$k_\natural$-algebra homomorphism $U(B) \to C_\natural$.

Proof. We have a decomposition $B = A/\mathfrak{a}$ for $A = k_\natural[x_1, \dots, x_n]$ and an ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Pick a $k_\natural$-algebra homomorphism $A/\mathfrak{a} \to C_\natural$. By composing with the projection, we get a morphism $A \to C_\natural$, so by the universal property of $U(A)$, we get a unique ultra-$k_\natural$-algebra homomorphism $U(A) \to C_\natural$. Since $\mathfrak{a}$ lies in the kernel of $A \to U(A) \to C_\natural$, as this composition equals $A \to A/\mathfrak{a} \to C_\natural$, $\mathfrak{a}^e$ lies in the kernel of $U(A) \to C_\natural$. By the universal property of the quotient ring Proposition 13.4.4, we get a unique induced $U(A)/\mathfrak{a}^e \to C_\natural$. By some commutativity chasing, the uniqueness of this morphism follows as the only one extending $A \to C_\natural$ wrt. $A \to U(A)/\mathfrak{a}^e$ of the uniqueness of $U(A) \to C_\natural$ from the univesal property of $U(A)$, Proposition 14.2.3. We can then use the canonical isomorphism $U(B) \simeq U(A)/\mathfrak{a}^e$ to transfer this to a unique morphism $U(B) \to C_\natural$.

For the argument above, a commutative diagram is worth a thousand words:

$$\begin{tikzcd}
& U(A) \arrow[rr] \arrow[rrrd, dashed] & & U(A)/\mathfrak{a}^e \arrow[rd, dashed] & \\
A \arrow[ru] \arrow[rr] & & A/\mathfrak{a} \arrow[ru] \arrow[rr] & & C_\natural
\end{tikzcd}$$

It remains to show that the morphism $g\colon U(A)/\mathfrak{a}^e \to C_\natural$ "is" a morphism in Ult-$k_\natural$-alg instead of just $k_\natural$-alg. As mentioned above, we have a canonical morphism

$$\varphi\colon U(A)/\mathfrak{a}^e \xrightarrow{\simeq} \operatorname*{ulim}_{w \in W} A_w/\mathfrak{b}_e$$

where $A_w = k_w[x_1, \dots, x_n]$, for finitely generated ideals $\mathfrak{b} \subseteq k_w[x_1, \dots, x_n]$ for each $w \in W$. The isomorphism satisfies $\varphi \circ \pi = \pi_\natural$ wher $\pi\colon U(A) \to U(A)/\mathfrak{a}^e$ and $\pi_w\colon A_w \to A_w/\mathfrak{b}_w$ are all projections. Our morphism $U(B) \to C_\natural$ is $\varphi^{-1} \circ g$. We will show that this is an ultra-morphism. Write $j_\natural\colon U(A) \to C_\natural$ for the canonical morphism. Since $\mathfrak{a}^e \subseteq \ker(j_\natural)$, Corollary 11.7.3 gives $\mathfrak{b}_w \subseteq \ker(j_w)$ for almost all$w$. By the universal propery of the quotient ring, get $h_w\colon A_w/\mathfrak{b}_w \to C_w$ such that for these w, $j_w = h_w \circ \pi_w$ where $\pi_w\colon A_w \to A_w/\mathfrak{b}_w$. Then Łoś gives $j_\natural = h_\natural \circ \pi_\natural$. At the same time, we have $j_\natural = g \circ \pi$, where $\pi\colon U(A) \to U(A)/\mathfrak{a}^e$ is projection. Together we then have

$$j_\natural = g \circ \pi = h_\natural \circ \pi_\natural = (h_\natural \circ \varphi) \circ \pi.$$

By the uniqueness in the universal property that made g, we must have $h_\natural \circ \varphi = g$, such that $h_\natural = \varphi^{-1} \circ g$, and our morphism $U(B) \to C_\natural$ is an ultra-morphism. $\square$

Given a morphism $f\colon A \to B$ between to finitely generated $k_\natural$-algebras, the universal property gives a unique morphism making the following diagram commute:

$$\begin{tikzcd} U(A) \arrow[r, dashed] & U(B) \\ A \arrow[u] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

If we now pick a representative from each isomorphism calass of $U(A)$ for every A, as one has to do for other functorial constructions defined by unversial properties like $\varprojlim$ and product discussed in Digression 11.2.3, we get

Proposition 14.2.8. The ultra-hull is a functor $U\colon \text{FinGen-}k_\natural\text{-alg} \to \text{Ult-}k_\natural\text{-alg}$.

With the view of U as a functor we may interpret the canonical vertical morphisms above as a natural transformation $\mathrm{id}_{k_\natural\text{-alg}} \to I \circ U$, where I is the inclusion from Ult-$k_\natural$-alg to $k_\natural$-alg.

Digression 14.2.9. If we want a diagram for the universal property that differentiates between normal and ultra-morphisms, it is useful to think of Ult-$k_\natural$-alg as a subcategory $k_\natural$-alg in the sense that we have an inclusion $I\colon \text{Ult-}k_\natural\text{-alg} \to k_\natural\text{-alg}$. Write $f\colon A \to I(U(A))$ for the canonical morphism. Then the universal property says the following: For any morphism $g\colon A \to I(C_\natural)$ in $k_\natural$-alg, there is a unique morphism $h\colon U(A) \to C_\natural$ in Ult-$k_\natural$-alg making the following diagram commute:

$$\begin{tikzcd} I(U(A)) \arrow[rr, "\exists! I(h)"] & & I(C_\natural) \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Inspired by the diagram we can make canonical functions

$$\mathrm{Hom}_{\text{Ult-}k_\natural\text{-alg}}(U(A), C_\natural) \to \mathrm{Hom}_{k_\natural\text{-alg}}(A, I(C_\natural))$$

which send $h \mapsto I(h) \circ f$. By the universal property, these are all immediately bijective. Furthermore, they are natural in both A and $C_\natural$. It might seem that we have found a left adjoint to the inclusion $I\colon \text{Ult-}k_\natural\text{-alg} \to k_\natural\text{-alg}$, but we haven't. We have only shown the existence of $U(A)$ for finitely generated $k_\natural$-algebras A, not any. For us this is insted an "almost adjoint" to the inclusion. It would be nice if we knew if an object with the same universal property of $U(A)$ existed for every A, but it is not appropriate for this thesis to investigate the issue.

Here is our reason for being interested in ultra-hulls:

Proposition 14.2.10. Let A be a finitely generated $k_\natural$-algebra. Then the canonical morphism $A \to U(A)$ is faithfully flat. It is in particular injective and satisfies $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ for every ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$.

Proof. Omitted. See [41, Thm. 4.2.2]. The argument done there uses machinery we don't have here. The last part is by Proposition 13.6.5. □

We will need the next two results for Theorem 14.3.4.

Lemma 14.2.11. Let A be a finitely generated $k_\natural$-algebra, and $\mathfrak{a} \subseteq A$ an ideal. Then we have an isomorphism $U(A)/\mathfrak{a}^e \simeq U(A/\mathfrak{a})$ of $k_\natural$-algebras.

Proof. We have $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{b}$ for an n and ideal $\mathfrak{b} \subseteq k[x_1, \ldots x_n]$. Since A is Noetherian, $\mathfrak{b}$ is finitely generated and hence internal. Pick representatives $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_\natural$. Then $\mathfrak{a}$ corresponds to an ideal $\mathfrak{c} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ which contains $\mathfrak{b}$ and such that $\mathfrak{c}^e = \mathfrak{a}$. As above, pick representatives $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_\natural$ and $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\natural$. By finitely generated-ness, Lemma 13.5.2 and Proposition 11.7.6, one can check that $\mathfrak{c}_w^e = \mathfrak{a}_w$ for almost every w. By Lemma 13.5.3, we have

$A/\mathfrak{a} = (k_\natural[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{b})/\mathfrak{c}^e \simeq k_\natural[x_1,\dots,x_n]/(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})$. Furthermore, by a similar technique, $\operatorname{ulim}_{w\in W} \mathfrak{c}_w^e = \mathfrak{a}^e$ where $\mathfrak{c}_w^e$ is with respect to $k_w[x_1,\dots,x_n] \to k_w[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{b}_w$ and $\mathfrak{a}^e$ with respect to $A \to U(A)$.

By the definition of $U(A/\mathfrak{a})$, we have a representative

$$\begin{aligned} U(A/\mathfrak{a}) &= \operatorname*{ulim}_{w\in W} k_w[x_1,\dots,x_n]/(\mathfrak{c}_w+\mathfrak{b}_w) \simeq \operatorname*{ulim}_{w\in W} (k_w[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{b}_w)/\mathfrak{c}_w^e \\ &\simeq \left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} k_w[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{b}_w\right)\Big/\left(\operatorname*{ulim}_{w\in W} \mathfrak{c}_w^e\right) = U(A)/\mathfrak{a}^e \end{aligned}$$

by Lemma 13.5.3 and Proposition 11.7.4, and we are done. □

Proposition 14.2.12. Let A be a finitely generated $k_\natural$-algebra. Then A is an integral domain if and only if $U(A)$ is. More generally, an ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ is prime if and only if the extension $\mathfrak{a}^e \subseteq U(A)$ is.

Proof. For one of the implications, if $\mathfrak{a}^e \subseteq U(A)$ is prime, then so is the contraction $\mathfrak{a}^{ec}$, but $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ by faithful flatness (Proposition 14.2.10), giving the first implication. The other implication is omitted; see [41, Thm. 4.3.4], or the original source [13, Thm. 2.5] for another argument. Given the first claim, we may get the other by looking at $A/\mathfrak{a}$ and using Lemma 14.2.11. □

14.3 Uniform bounds

We will now apply the ultraproduct to show the promised results about polynomial rings over fields. They were all initially shown with standard techniques; nonstandard arguments came later. For more on the history of these results, see [14, Sec. 7]. Our proofs for the first two theorems follow [41, Chap. 4.4], which itself is after [13].

Theorem 14.3.1. Pick $d, n \in \mathbb{N}$. Then there is$b \in \mathbb{N}$ such that for every field k, number $s \in \mathbb{N}$ and elements $f_0,\dots,f_s \in k[x_1,\dots,x_n]$ of degree $\leq d$ such that $f_0 \in (f_1,\dots,f_s)$, there is $g_1,\dots,g_s \in k[x_1,\dots,x_n]$ of degree$\leq b$ such that $f_0 = g_1 f_1 + \cdots + g_s f_s$.

We need a lemma.

Lemma 14.3.2. Pick a field k. Every ideal in $k[x_1,\dots,x_n]$ that can be generated by polynomials of degree $\leq d$ can be generated by $\binom{d+n}{n}$ polynomials of degree $\leq d$.

Proof. By combinatorics, one may count their way to there being $\binom{d+n}{n} = \binom{d+n}{d}$ monomials in In $k[x_1, \ldots, x_n]$ of degree $\leq d$. Let $\mathfrak{a}$ be an ideal that can be generated by polynomials $\{f_i\}_{i \in I}$ of degree $\leq d$. Without loss of generality, I is finite: Since $k[x_1, \ldots, x_n]$ is Noetherian, one may pick a minimal element of the set of all ideals generated by all finite subsets of $\{f_i\}_{i \in I}$, and this ideal must be $\mathfrak{a}$. So $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_s)$, where every f_i has degree $\leq d$.

Fix a total order $<$ on the set of these $\binom{d+n}{n}$ monomials. For every $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ with degree $\leq d$, let $\ell(f)$ be the largest monomial (without taking the coefficients into account) of f with respect to $<$, and $\ell(0) = -1$.

We will now iteratively reduce the ℓ-values of the generators $f_1, \ldots, f_s$. Suppose $\ell(f_i) = \ell(f_j)$ for $f_i, f_j \neq 0$. Write a_i and a_j for the coefficients of the monomial $\ell(f_i) = \ell(f_j)$ in f_i and f_j respectively, both of which nonzero because f_i and f_j are. Then $f_j - \frac{a_j}{a_i} f_i$ does not contain the monomial $\ell(f_j)$, and since $\ell(f_i) = \ell(f_j)$ is the largest monomial of both f_i and f_j, we must have $\ell(f_j - \frac{a_j}{a_i}{}_i) < \ell(f_j)$. Replace f_j now by $f_j - \frac{a_j}{a_i} f_i$.

This process will remove a monomial from the set of monomials of the original generators $f_1, \ldots, f_s$, counted by multiplicity. It is finite, so this process must stop at some point. Then we end up in a situation where $\ell(f_i) \neq \ell(f_j)$ for all nonzero f_i, f_j with $i \neq j$. There are at most $\binom{d+n}{n}$ such polynomials, so by removing the zeros in $f_1, \ldots, f_s$, we get that $\mathfrak{a}$ can be generated by $\leq \binom{d+n}{n}$ polynomials of degree $\leq d$, and by adding zeros if needed, we are done. $\square$

Proof of Theorem 14.3.1. The quantifier order of what we are to show is the following:

$$(\forall d, n \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})(\forall k \text{ field})(\exists s \in \mathbb{N})(\forall f_0, \ldots, f_s)(\exists g_1, \ldots, g_s)(\cdots)$$

Suppose, aiming for a contradiction, that the statement is wrong. Then the quantifiers become

$$(\exists d, n \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N})(\exists k \text{ field})(\forall s \in \mathbb{N})(\exists f_0, \ldots, f_s)(\forall g_1, \ldots, g_s)(\cdots)$$

so get d and n. Before we pick polynomials, we may without loss of generality take the same s for each b. This is because if we have $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ of degree $\leq d$, then Lemma 14.3.2 holds for the ideal $(f_0, \ldots, f_s)$, such that we may replace these generators with $s' = \binom{d+n}{n}$ other generators, still with degree $\leq d$.

Hence we get for each $w \in \mathbb{N}$ a field k_w and elements $f_{0,w}, \ldots, f_{s,w}$ such that

(i) Each $f_{i,w}$ has degree $\leq d$, and

(ii) $f_{0,w} \in (f_{1,w}, \ldots, f_{s,w})$, that is $f_{0,w}$ is a linear combination of the $f_{i,w}$, and

(iii) If $f_{0,w} = g_1 f_{1,w} + \ldots + g_s f_{s,w}$ for $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, then at least one g_i has degree $> w$.

We now go to the ultraproduct, with index set $W = \mathbb{N}$. Write $A_w = k_w[x_1, \ldots, x_n]$ and $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]$. Then $U(A) = A_\natural$. By (i) and Lemma 14.2.4, the $f_{i,\natural}$ lie in A, not just $U(A)$. Let $\mathfrak{a} \subseteq A$ be the ideal generated by $f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}$. Then $\mathfrak{a}^e \subseteq U(A)$ is the ideal in $U(A)$ generated by $f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}$, by Definition 13.5.1. By Proposition 11.7.6 on (ii) we have

$$f_{0,\natural} \in (f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}) = \mathfrak{a}^e,$$

where the ideal to the left is generated in $U(A)$. Since $f_{0,\natural}$ lies in A, faithful flatness of the inclusion $A \to U(A)$ (Proposition 14.2.10) gives $f_{0,\natural} \in \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$. By the definition of $\mathfrak{a}$, we get a linear combination

$$f_{0,\natural} = g_1 f_{1,\natural} + \cdots + g_s f_{s,\natural} \tag{1}$$

for $g_i \in A$. The contradiction now comes from comparing (1) with (iii), which we can see in two ways. By Łoś on (iii), at least one of the g_i must have degree larger than the unlimited hypernatural number $\omega = \operatorname{ulim}_{n \in \mathbb{N}} n$. This is impossible, as the elements of A have finite degree by Lemma 14.2.4. Alternatively we may use Łoś on (1) and getting linear combinations $f_{0,w} = g_{1,w} f_{1,w} + \cdots + g_{s,w} f_{s,w}$ for almost every $w \in \mathbb{N}$. We further have a uniform bound $\deg(g_{i,w}) \leq m$ for every i for almost every w. We can then let w be large enough, contradiction (iii). $\square$

Remark 14.3.3. For an alternate proof, see [14, Thm. 7.5].

The following result lets us show that certain ideals are prime by testing for primaliy on elements of bounded degree. The proof is in the same style as the above.

Theorem 14.3.4. Pick $d, n \in \mathbb{N}$. Then there is $b \in \mathbb{N}$ such that for every field k and ideal $\mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ generated by polynomials of degree $\leq d$, then $\mathfrak{a}$ is prime if and only if for all polynomials $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ of degree $\leq b$, $fg \in \mathfrak{a}$ implies $f \in \mathfrak{a}$ or $g \in \mathfrak{a}$.

Proof. One of the implications in the (second) equivalence is by definition, so we don't have to prove it. We will do a proof by contradiction. This time, the quantifier order is

$$(\forall d, n \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})(\forall k \text{ field})(\forall \mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n] \text{ s.t. } \cdots)(\mathfrak{a} \text{ prime } \longleftarrow (\cdots))$$

so for $d, n \in \mathbb{N}$, get $b \in \mathbb{N}$ such that

$$(\forall b \in \mathbb{N})(\exists k \text{ field})(\exists \mathfrak{a} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n] \text{ s.t. } (\cdots))(\mathfrak{a} \text{ not prime and } (\cdots)).$$

That is, for every $w \in \mathbb{N}$, we get an ideal $\mathfrak{a}_w \subseteq k_w[x_1, \ldots, x_n]$ such that

(i) $\mathfrak{a}_w$ is generated by polynomials of degree $\leq d$,

(ii) $\mathfrak{a}_w$ is not a prime ideal, and

(iii) For $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ of degree $\leq w$, $fg \in \mathfrak{a}_w$ implies $f \in \mathfrak{a}_w$ or $g \in \mathfrak{a}_w$.

Write $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]$. By Lemma 14.3.2 we may take each $\mathfrak{a}_w$ to have the same number of generators, say $\mathfrak{a}_w = (f_{1,w}, \ldots, f_{s,w})$. We will now go to A and $U(A)$. Since each $f_{i,w}$ has degree $\leq d$, $f_{i,\natural}$ lies in A by Lemma 14.2.4. Now let $\mathfrak{a} = (f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}) \subseteq A$. be the ideal generated hese ultraproducts in A.

Claim. $\mathfrak{a}^e = (f_{1,\natural}, \ldots, f_{s,\natural}) = \mathfrak{a}_\natural$, where the middle ideal is generated in $U(A)$.

The first equality is by Lemma 13.5.2, and the second by Proposition 11.7.6.

Claim. $\mathfrak{a}$ is a prime ideal.

By Łoś on (iii) we get that for each $f, g \in U(A)$ of degree av grad $\leq \omega = \operatorname{ulim}_{n\in\mathbb{N}} n$, we have that $fg \in \mathfrak{a}_\natural$ implies $f \in \mathfrak{a}_\natural$ or $g \in \mathfrak{a}_\natural$. Each $f, g \in A$ has degree $\leq \omega$, as this is an unlimited hypernatuural number and all elements of A have finite degree by Lemma 14.2.4. Hence, if $fg \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}_\natural$, $f \in \mathfrak{a}_\natural$ or $g \in \mathfrak{a}_\natural$. Without loss of generality, we pick the first. By faithful flatness (Proposition 14.2.10), we have $f \in \mathfrak{a}_\natural^c = \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$, so $\mathfrak{a}$ is prime.

We are now in a situation where $\mathfrak{a}$ is prime, but not $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}_\natural$ by Proposition 11.7.9. This contradicts Proposition 14.2.12, and we are done. ☐

The third and last uniform bounds result we will look at, the formulation of which was taken from [14, Thm. 7.4], gives a bound for Hilbert's basis theorem.

Theorem 14.3.5. Pick $d, n \in \mathbb{N}$. Then there is $m \in \mathbb{N}$ such that for each field k, every ascending chain of ideals in $k[x_1, \ldots, x_n]$ that can be generated by polynomials of degree $\leq d$ has length $\leq m$, that is $\leq m$ proper inclusions.

Proof. We do the same type of argument as in the previous theorems. Suppose, aiming for a contradiction, that the statement is false. Let $W = \mathbb{N}$. By doing a similar quantifier analysis as above, get $d, n \in \mathbb{N}$ and for every $w \in W$, fields k_w and ideals $\mathfrak{a}_{i,w} = (f_{1,i,w}, \ldots, f_{s,i,w}) \subseteq k_w[x_1, \ldots, x_n]$ such that

(i) Every $f_{j,i,w}$ has degree $\leq d$,

(ii) The ideals form a chain $\mathfrak{a}_{1,w} \subseteq \mathfrak{a}_{2,w} \subseteq \mathfrak{a}_{3,w} \subseteq \cdots$ for every $w \in W$, and

(iii) For every w, the abovementioned chain in $k_w[x_1, \ldots, x_n]$ has $> w$ proper inclusions.

Here we use Lemma 14.3.2 to get a uniform bound on the number of generators of the ideals. By removing unnecessary ideals we may assume without loss of generality that the first w inclusions in (ii) are all proper for every $w \in W$. Write $A = k_\natural[x_1, \ldots, x_n]$, such that $U(A) = \operatorname{ulim}_{w \in W} k_w[x_1, \ldots, x_n]$. By Łoś on items (i) and (ii) we get a chain

$$\mathfrak{a}_{1,\natural} \subset \mathfrak{a}_{2,\natural} \subset \mathfrak{a}_{3,\natural} \subset \cdots \tag{2}$$

in $U(A)$, where all the inclusions are strict. By Łoś on item (i) with Lemma 14.2.4 it turns out that each $f_{j,i,\natural}$ lies in A, not just $U(A)$. Now let $\mathfrak{b}_i = (f_{1,i,\natural}, \ldots, f_{s,i,\natural})$ be the ideal generated in A. By Lemma 13.5.2, $\mathfrak{b}^e = \mathfrak{a}_{i,\natural}$, so faithful flatness (Proposition 14.2.10) gives

$$\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_i^{ec} = \mathfrak{a}_{i,\natural}^c \tag{3}$$

for each i. By monotonicity of contraction and (3), we get a chain $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{b}_3 \subseteq \cdots$ in A. Since A is Noetherian, $\mathfrak{b}_N = \mathfrak{b}_{N+1}$ for some N, such that (3) gives that $\mathfrak{a}_{N,\natural} = \mathfrak{a}_{N+1,\natural}$, which contradicts (2). $\square$

Chapter 15

Cataproducts

One of the problems of ultraproducts is that we cannot expect them to be notherian. In this chapter, we will look at one possible way of handling this problem, the cataproduct, which we will define for Noetherian local rings. It will be a certian quotient of the normal ultraproduct. By looking at the ultraproduct, we loose Łoś' theorem, but in return we get a construction that often preserves properties the ultraproduct cannot, like Noetherianity. As a quotient, the cataproduct will nevertheless be closely related to the ultraproduct, so our earlier work was not in vain. In this chapter we closely follow [41].

15.1 The problem

Before we define cataproducts, let us illustrate "the problem". In Corollary 13.9.12 we saw that a relatively restrictive case where the ultraproduct became Noetherian. Let us now look at the opposite.

Proposition 15.1.1. Let $W = \mathbb{N}$. Suppose $(A_w, \mathfrak{m}_w)$ are local rings with every $\mathfrak{m}_w$ not nilpotent, and with a uniform bound $\mu(\mathfrak{m}_w) \leq n$ for an n and every w. Then $(A_\natural, \mathfrak{m}_\natural)$ is local and $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n \neq (0)$, such that $A_\natural$ is not Noetherian.

Proof. Locality is by Proposition 13.8.1. Pick $0 \neq a_w \in \mathfrak{m}_w^w$ for every w. For each $n \geq w$, we have $a_w \in \mathfrak{m}_w^n$, so $a_w \in \mathfrak{m}_w^n$ holds for almost every w. By Łoś and Corollary 11.7.8, we have $a_\natural \in \operatorname{ulim}_{w\in W} \mathfrak{m}_w^n = \mathfrak{m}_\natural^n$ for every n, so $\mathfrak{a}_\natural$ is a nonzero element of $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n$. If $A_\natural$ were Noetherian, then Krull's intersection theorem [30, Kor. 10.18] would have given that this ideal was zero, so $A_\natural$ cannot be Noetherian. □

The proposition above is a big issue for the ultraproducts plan of taking over the world; non-Noetherian rings are, after all, scarier to algebraists than apples are to doctors.

15.2 The solution

Definisjon 15.2.1. Suppose $(A_w, \mathfrak{m}_w)$ are Noetherian local rings for almost every w. The cataproduct $A_\sharp$ is defined to be the quotient ring

$$A_\sharp = A_\natural \Big/ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n.$$

Warning. Be mindful of the difference between the symbols $\natural$, which is used for ultraproducts, and $\sharp$, which is used for cataproducts.

As usual, a catapower is one where all of the A_w-s are equal. As a quotient of the ultraproduct we get a projection $A_\natural \to A_\sharp$. In the catapower case, we then have homomorphisms $A \to A_\natural \to A_\sharp$. Before we can give the main results of cataproducts, we need a new adjective for ultrafilters.

Definition 15.2.2. An ultrafilter $\mathcal{F}$ on an infinite set W is *countably incomplete* if there is a function $f \colon W \to \mathbb{N}$ such that for every $n \in \mathbb{N}$, the set $\{w \in W \mid f(w) \geq n\}$ is caught by $\mathcal{F}$.

Note that being countably incomplete is a stronger property than being free. Every free ultrafilter on a countable set is countably incomplete, as any bijection $W \to \mathbb{N}$ will work.

Lemma 15.2.3. Let W be an infinite set. Then there is a countably incomplete free ultrafilter $\mathcal{F}$ on W.

Proof. Pick pairwise disjoint, nonempty $U_n \subseteq W$ such that W is the union of the U_n-s. Let

$$A = \{U_n \subseteq W \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{B \subseteq W \mid B \text{ is cofinite}\}, \text{ and}$$
$$F = \{B^c \subseteq W \mid B \in A\}.$$

We will verify that F has the finite intersection property. We show first that no finite union of elements of A is all of W. Since a finite union of finite sets is finite, and by possibly making the union larger, we may without loss of generality that we have a finite union $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \cup B$ for a finite set B. For every $m > n$, pick $x_m \in U_m$. Then $x_m \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Since there are infinitely many x_m, not all of them can lie in the finite set B, so at least one of them lies outside of B.

By translating this to be about F we get that it has the finite intersection property, so we can extend F to an ultrafilter $\mathcal{F}$ on W (Lemma 11.10.1 and theorem 10.1.11). This ultrafilter must be free as it contains all cofinite sets. We can now define $f\colon W \to \mathbb{N}$ as follows: For $w \in W$, let $f(w)$ be the unique $n \in \mathbb{N}$ such that $w \in U_n$. Then $\{w \in W \mid f(w) \leq n\} = U_1 \cup \cdots \cup U_n$, which is small as each U_i is small in $\mathcal{F}$ and Lemma 10.1.6, and we are done. $\square$

The main property of cataproducts is as follows:

Theorem 15.2.4. Suppose $(A_w, \mathfrak{m}_w)$ are Noetherian local with a uniform bound $\mu(\mathfrak{m}_w) \leq n$ for an n and each w. Suppose furthermore that the ultrafilter $\mathcal{F}$ on W is countably incomplete. Then $A_\sharp$ is a complete Noetherian local ring.

Proof. Omitted. See [41, Thm. 8.1.4, Rmk. 8.1.5]. $\square$

Remark 15.2.5. Being complete means that the canonical ring homomorphism $A_\sharp \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_\sharp/\mathfrak{m}_\sharp^n$ is an isomorphism, where $\mathfrak{m}_\sharp$ is the maximal ideal of $A_\sharp$ and the morphisms are the canonical ones. This limit is called the completion of $A_\sharp$ in the ideal $\mathfrak{m}_\sharp$. The kernel of the ring homomorphism is $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\sharp^n$, so injectivity is equivalent to it being zero. After having defined Cauchy sequences and convergent sequences in $A_\sharp$ with respect to $\mathfrak{m}_\sharp$, surjectivity can be shown to be equivalent to the statement of every Cauchy sequence (wrt. $\mathfrak{m}_\sharp$) converging (wrt. $\mathfrak{m}_\sharp$). For more on completion, see [32, Sec. 8] and [10, Chap. 7].

An example of a type of ring that we cannot expect to be preserved by ultraproducts is being a discrete valuation ring (DVR), a special class of Noetherian rings, as being a DVR is seemingly not a first-order property. We will show that cataproducts preserve this property. The proof below is inspired by [41], but is done in a different way. With this argument we also prove that the ideal one quotients for constructing the cataproduct is external.

Proposition 15.2.6. Pick DVR-s A_w for each w, and suppose the pair $(W, \mathcal{F})$ satisfies $\mathbb{N} \neq \mathbb{N}_\natural$. Then the cataproduct $A_\sharp$ is also a DVR. Furthermote, the ideal $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n$ in the ultraproduct $A_\natural$ is external and infinitely generated.

Proof. Recall from Digression 12.1.3 that the condition on $\mathcal{F}$ is satisfied if the ultrafilter is countably incomplete. Pick discrete valuations $v_w\colon A_w \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, and maximal ideals with generators $\mathfrak{m}_w = (\pi_w) \subseteq A_w$. Then $A_\natural$ is local with $\mathfrak{m}_\natural = (\pi_\natural)$ as the maximal ideal (Propositions 11.7.6 and 13.8.1). The domain of the ultraproduct $A_\natural$ is $\operatorname{ulim}_{w\in W}(\operatorname{Frac}(A_w) \setminus \{0\}) = (\operatorname{ulim}_{w\in W} \operatorname{Frac}(A_w)) \setminus \{0\}$, by Corollary 11.2.14. Hence $v_\natural$ is defined for each $x_\natural \neq 0$ in $A_\natural$. (This set is also in canonical bijection with $\operatorname{Frac}(A_\natural) \setminus \{0\}$ by ved Proposition 13.8.3.)

Claim. $\mathfrak{a} = \{0\} \cup \{x_\natural \in A_\natural \setminus \{0\} \mid v_\natural(x_\natural) \in \mathbb{N}_\natural^\infty\}$.

($\subseteq$): Pick $0 \neq a_\natural \in \mathfrak{a} = (\pi_\natural)$, and suppose, aiming for a contradiction, that $v_\natural(a_\natural) \in \mathbb{N}$. Then we have a uniform bound $v_w(a_w) = n = v_\natural(a_\natural)$ for almost all w, such that $(a_w) = (\pi_w^n) = \mathfrak{m}_w^n$ by Proposition 13.7.4, for these almost all w. By Proposition 11.7.6 we then have $\mathfrak{a} = (a_\natural) = (\pi_\natural^n) = \mathfrak{m}_\natural^n$. Thus, $\mathfrak{m}_\natural^{n+1} = \mathfrak{m}_\natural^n$.

Since the ideals are finitely generated, Corollary 11.7.8 gives that $\mathfrak{m}_w^{n+1} = \mathfrak{m}_w^n$ in A_w for almost all w, and in particular at least one w. This contradicts the fact that the A_w-s are DVR-s; the elements that generate each $\mathfrak{m}_w^t$ have valuation 1, such that these ideals cannot be equal.

(Using more machinery, this can be simpler seen using Nakayama's lemma in $A_\natural$ or one A_w, and the fact that DVR-s are not fields, hence also $A_\natural$ by Łoś, making $\mathfrak{m}_w = (0)$ and $\mathfrak{m}_\natural = (0)$ impossible.)

($\supseteq$): Suppose $v_\natural(a_\natural) \in \mathbb{N}_\natural^\infty$. For each $n \in \mathbb{N}$, we have $v_w(a_w) \geq n$ for almost all w, such that $a_w \in \mathfrak{m}_w^n$ by Proposition 13.7.4, and Corollary 11.7.8 with Łoś gives $a_\natural \in \mathfrak{m}_\natural^n$. Since this was for each n, we have $a_\natural \in \mathfrak{a}$.

Claim. $\mathfrak{a}$ is a prime ideal and $A_\sharp$ is a DVR.

Suppose $x_\natural y_\natural \in \mathfrak{a}$. Then $v_\natural(x_\natural) + v_\natural(y_\natural) = v_\natural(x_\natural y_\natural) \in \mathbb{N}_\natural^\infty$ by the above formula, so at least one of $v_\natural(x_\natural)$ and $v_\natural(y_\natural)$ must lie in $\mathbb{N}_\natural^\infty$, such that at least one of them lie in $\mathfrak{a}$ by the formula, and $\mathfrak{a}$ is prime.

To show that $A_\sharp$ is a DVR, write $\mathfrak{m}_\sharp = \mathfrak{m}_\natural^e$ for the (unique) maximal ideal of $A_\sharp$, where the extension is with respect to the canonical $A_\natural \to A_\sharp$. By Lemma 13.5.4 we have $\mathfrak{m}_\sharp^n = (\mathfrak{m}_\natural^n)^e$, and one can compute $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\sharp^n = (0)$. We can now use Lemma 13.7.5 to conclude that $A_\sharp$ is DVR.

Claim. $\mathfrak{a}$ is external and not finitely generated.

We will do a "nonstandard" Łoś argument that may remind one of how we used the theorem in Chapter 12 – with more advanced sentences and without looking at approximations. For another argument showing only the infinitely generatedness, [41, p. 2.4.19].

Recall that every finitely generated ideal is internal (Proposition 11.7.13), so it's enough to show that $\mathfrak{a}$ is external. Intuitively, this is suggested by the formula for $\mathfrak{a}$ above, as $\mathbb{N}_\natural^\infty$ is an external subset of $\mathbb{N}_\natural$ (Proposition 11.8.3). Proposition 13.7.4 says that each nontrivial ideal in a DVR is with valuation v is of the form $\{x \in A \mid v(x) \geq n\}$ for some $n \in \mathbb{N}$. By Łoś on this sentence applied to the A_w-s (and some work to check the details), we get that each nontrivial internal ideal of $A_\natural$ is of the form $\{x_\natural \in A_\natural \mid v_\natural(x_\natural) \geq N\}$ for $N \in \mathbb{N}_\natural$. However, $\mathfrak{a}$ is not of this form! For any $N \in \mathbb{N}_\natural^\infty$, surjectivity of $v_\natural$ gives an $x_\natural$ with valuation N, which must lie in $\mathfrak{a}$. Hence $\mathfrak{a}$ cannot be of the abovementioned form, so it must be external and infinitely generated. □

Remark 15.2.7. The condition $\mathbb{N}_\natural \neq \mathbb{N}$ is needed to ensure that $\mathfrak{a}$ is not the zero ideal, where the second part of the conclusion cannot hold. We get in any case that $A_\natural$ is a DVR, see for example the proof the one above was inspired by.

The ideal $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n$ not being finitely generated shows that the ultraproduct cannot be Noetherian, such that even in this very nice case it isn't possible for the ultraproduct to preserve Noetherianity. This also shows that the ultraproduct $A_\natural$ cannot be a DVR.

The cataproduct has a faithful flatness result which corresponds to the one in Example 13.6.6:

Theorem 15.2.8. Suppose A is a Noetherian local ring. Then the canonical homomorphism to the cataproduct $A \to A_\sharp$ is faithfully flat

Proof. Omitted. See [41, Thm. 8.1.15]. □

15.3 Functorial view

As for the ultraproduct, the cataproduct can be seen as a functorial construction. Recall that a ringhomomorphism $f\colon (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ between local rings is local if $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$. With these as morphisms, the local rings form a category we will call LCRing. We will also write NLCring for the full subcategory of LCring consisting of the Noetherian local rings.

Suppose we are given Noetherian local rings $(A_w, \mathfrak{m}_w)$ and $(B_w, \mathfrak{n}_w)$, with local ring homomorphisms $f_w\colon A_w \to B_w$. By Łoś on each f_w being local, $f_\natural$ is itself local. By among other things using Lemma 13.5.4, locality of $f_\natural$ implies that the homomorphism

$$A_\natural \longrightarrow B_\natural \longrightarrow B_\natural \Big/ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{n}_\natural^n$$

has $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\natural^n$ in its kernel, so by the universal property of the quotient ring (Proposition 13.4.4) we get a unique $f_\sharp\colon A_\sharp \to B_\sharp$ making the following square commute:

$$\begin{tikzcd}
A_\natural \arrow[r, "f_\natural"] \arrow[d] & B_\natural \arrow[d] \\
A_\sharp \arrow[r, "f_\sharp"] & B_\sharp
\end{tikzcd}$$

We get:

Proposition 15.3.1. The cataproduct is a functor $\mathrm{NLCRing}^W \to \mathrm{LCRing}$. Furthermore, if the filter $\mathcal{F}$ is countably incomplete, then the catapower is an endofunctor $\mathrm{NLCRing} \to \mathrm{NLCRing}$.

Proof. The second part follows from the first by precomposing with the diagonal functor $\Delta\colon \mathrm{NLCRing} \to \mathrm{NLCRing}^W$, and using Theorem 15.2.4.

Functoriality in the first part follows from uniqueness of the induced $f_\sharp$ in the construction above, and locality of it follows from the ultraproduct homomorphism $f_\natural\colon A_\natural \to B_\natural$ is local and also makes the square above commute. $\square$

Chapter 16

The road ahead

Even if this this thesis' end is getting nearer, it doesn't mean that the story has to end. The ultraproducts – the main characters – quest for world domination will continue; we will just stop being the one to tell it. In this last chapter we will sketch some topics we haven't looked at in this thesis, and refer to further reading for those interested.

16.1 Ultraproducts of other structures

By Łoś, ultraproducts of objects in a given first-order structure will naturally be the same type of first-order structure. One can nevertheless get interesting theory if one tries to take ultraproducts of other types of structures, possibly having to adjust the definitions a bit. For example topological spaces (see [4]) and Banach spaces

One can also define an ultraproduct of categories. Given categories $\mathcal{C}_w$ for $w \in W$ one can for instance define an ultraproduct $\mathcal{C}_\natural = \operatorname{ulim}_{w\in W} \mathcal{C}_w$ as having objects

$$\operatorname{Ob}(\mathcal{C}_\natural) = \coprod_{U\in\mathcal{F}} \prod_{w\in U} \operatorname{Ob}(\mathcal{C}_w),$$

and morphisms

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_\natural}((A_w)_{w\in U}, (B_w)_{w\in V}) = \left(\coprod_{\mathcal{F}\ni Z\subseteq U\cap V} \prod_{w\in Z} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_w}(A_w, B_w) \right) / \sim,$$

where the equivalence relation is

$$(f_w)_{w \in Z} \sim (g_w)_{w \in V} \iff (\exists \mathcal{F} \ni U \subseteq Z \cap V)(f_w = g_w \text{ for every } w \in U).$$

In this definition we choose to avoid quotienting out anything on the objects because one might equally well have many objects that are all isomorphic and have morphisms that are easier to work with. A consequence of this is that we get many objects $(A_w)_{w \in U}$ for all $U \in \mathcal{F}$ in $\mathcal{C}_\natural$ all representing the same object "$A_\natural$", which are all canonically isomorphic. The morphisms have also been defined such that a morphism en morfi $f_\natural\colon (A_w)_{w \in U} \to (B_w)_{w \in V}$ between two objects is uniquely determined by its approximations/"values" almost everywhere, and that it is possible to have morphisms in $\mathcal{C}_\natural$ between $(A_w)_{w \in U}$ and $(B_w)_{w \in V}$ even if there should exist a w such that there were no morphisms between A_w and B_w, two properties we wanted in the category Ult-$A_\natural$-alg of ultra-$A_\natural$-algebras from Section 14.1.

The author does not know of any literature where basic theory of ultraproducts of categories is built. There are nevertheless many interesting things to do; the article [31] implies for instance that an ultraproduct of triangulated categories itself is triangulated. Here are some questions that come to mind of such a construction: Is the categorical ultraproduct a functor $\mathrm{Cat}^W \to \mathrm{Cat}$? If so, what does it preserve? Monomorphisms or epimorphisms? Limits or colimits? Does it have an adjoint? What properties does the diagonal embedding have in the ultrapower case? Does the ultraproduct preserve additive or abelian categories? If so, does it preserve additivity and exactness of functors (morphisms)? How does it it behave regarding localiztion of categories, and in particular derived categories? If it is possible to restrict it to a functor $\mathcal{A}^W \to \mathcal{A}$ for $\mathcal{A}$ a (pre)additive or (pre)abelian category with all ultraproducts indexed over W, is this functor additive or exact?

16.2 Ultraproducts in categories

In Chapter 11 there was a point where we wanted the ultraproduct to be a functor

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W}\colon \mathrm{Set}^W \to \mathrm{Set},$$

but we had problems coming from the empty set: A product $\prod_{w \in W} X_w$ becomes empty if as few as one of the X_w-s are empty. If we let our original definition Definition 11.1.1 apply in this case, that one X_w would make the entire ultraproduct empty, an unacceptably large impact on the desired ultraproduct $X_\natural$.

The categorical explanation of the problem is that $\emptyset$ is the strictly initial object[1] in Set; in an arbitrary category, any product containing a strictly initial object must be this strictly initial object up to isomorphism.

The fact that we had to come up with an emergency solution to handle these issues suggests that our definition of the ultraproduct $X_\natural$ as a quotient of $\prod_{w \in W} X_w$ is not the categorically "correct" view of the ultraproduct.

In a category $\mathcal{C}$ with enough products and colimits we can define the ultraproduct of a family of objects $(A_w)_{w \in W}$ as the filtered colimit

$$\operatorname*{ulim}_{w \in W} A_w = \varinjlim_{U \in \mathcal{F}} \prod_{w \in U} A_w \tag{1}$$

where the morphisms are the projections $\prod_{w \in U} A_w \to \prod_{w \in V} A_w$ for $V \subseteq U$, both in $\mathcal{F}$. As usual, we allow ourselves to call this $A_\natural$. This definition is originally from [34]. With this definition, the solutions of our problems are baked into the universal property, and we get much of what we're used to, for example:

(i) Functoriality: Given morphisms $f_w \colon X_w \to Y_w$ and $U \in \mathcal{F}$ we get canonical morphisms $f_U \colon \prod_{w \in U} X_w \to \prod_{w \in U} Y_w$ by the functoriality of the product (see Digression 11.2.3). Together with the restrictions, these form a natural transformation between the right functors in the colimits for $X_\natural$ and $Y_\natural$, so by functoriality of $\varinjlim$ we get a canonical morphism $f_\natural \colon X_\natural \to Y_\natural$. This $f_\natural$ is unique in making the following diagram commute for each $U \in \mathcal{F}$:

$$\begin{tikzcd} \prod_{i \in U} A_i \arrow[r, "\prod_{i \in U} f_i"] \arrow[d] & \prod_{i \in U} B_i \arrow[d] \\ A_\natural \arrow[r, "f_\natural"] & B_\natural \end{tikzcd}$$

Hence, if one picks representatives, one gets a functor $\mathcal{C}^W \to \mathcal{C}$.

(ii) Diagonal embedding: Given $A \in \mathcal{C}$, we have morphisms

$$A \to \prod_{w \in W} A \to A_\natural$$

[1]An object A in a category is stricly initial if it is initial and every morphism with A as codomain is an isomorphism.

where the first morphism is obtained by the universal property of the product. We could have instead made such a morphism by replacing the W in the product with an arbitrary $U \in \mathcal{F}$, but this makes the same morphism.

Digression 16.2.1. The above colimit can be interpreted with sheaves. Given $\mathcal{C}$, W, $\mathcal{F}$ and $(A_w)_{w\in W}$ as above, we can give W the topology where the open sets are those caught by $\mathcal{F}$, together with $\emptyset$, and define a "$\mathcal{C}$-valued sheaf" $\mathcal{G}$ by

$$\mathcal{G}(U) = \prod_{w\in U} A_w$$

where we by this mean that we pick a representative from each isomorphism class for each open U, and the restriction maps are the canonical $\prod_{w\in U} A_w \to \prod_{w\in V} A_w$ for open $V \subseteq U \subseteq W$. Note that the empty product $\mathcal{G}(\emptyset)$ becomes the terminal object in $\mathcal{C}$. Then (1) can be translated to

$$\operatorname*{ulim}_{w\in W} A_w = \varinjlim_{\substack{\emptyset\neq U\subseteq W\\ \text{open}}} \mathcal{G}(U)$$

with the restrictions of $\mathcal{G}$ as morphisms. By comparing with stalks, this colimit may be interpreted as zooming in everywhere, but nowhere in particular. It may help for the visualization that the topology on W is irreducible, making the open sets in W "large".

Even if (1) has nice properties and eems like a reasonable general definition of ultraproducts, it isn't necessarily better than our set-theoretic definition in all cases: The category $\mathcal{C}$ must have enough products and colimits for the categorical ultraproduct to exist, which for example excludes the category of fields, which does not have all product[2]. For an example of a category where both set-thereotic and categorical ultraproducts exist, but are not isomorphic, see [39].

The transition to the categorical version of the ultraproduct requires a new verison of Łoś' theorem. A version of Łoś for this context was shown in [1]. For an exposition, see the master's thesis [8]. It also shows that if $\mathcal{C} = \text{Set}$ and each X_w is nonempty, then the categorical ultraproduct coincides with Definition 11.1.1, se corollary 4.3.0.4.

[2]Morphisms between fields are injective and can be thought of as inclusions, so if we have a morphism $k \to k'$, then k and k' must have the same characteritic. Thus, we cannot have products of fields with different characteristic.

16.3 Other algebra

We have avoided looking at many operations and propeties one can investigate if are preserved by ultraproducts. For example, ultraproducts commute with sums of ideals. One can then observe that Bézout domains[3] is a first-order property, such that ultraproducts preserve Bézout domains.

There are more examples of properties whose usual definitions aren't first-order, but who turn out to be first-order properties; as we saw after Proposition 13.9.11, having length $\leq m$ is a first-order property. We now give another one. Recall that an ideal is radical if $a^n \in \mathfrak{a}$ implies $a \in \mathfrak{a}$ for each $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$. The corresponding ring property is called being reduced: A ring A is reduced if the zero ideal is radical, such that an ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ is radical if and only if $B/\mathfrak{b}$ is reduced. Intuitively, we cannot expect these properties to be preserved by ultraproducts as they quantify over the naturals, but they turn out to be first-order in hiding:

Lemma 16.3.1. An ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ is radical of and only if $a^2 \in \mathfrak{a}$ implies $a \in \mathfrak{a}$ for every $a \in A$.

Proof. ($\Rightarrow$): By definition. ($\Leftarrow$): Suppose $a^n \in \mathfrak{a}$, want to show$a \in \mathfrak{a}$. Get an $m \in \mathbb{N}$ such that ${}^m2 \geq n$, where ${}^m2$ is the power tower of m twos. Since $\mathfrak{a}$ is an ideal, $a^{({}^m2)} \in \mathfrak{a}$. By repeatedly using the hypothesis, we have $a^{({}^{m-1}2)} \in \mathfrak{a}$, $a^{({}^{m-2}2)} \in \mathfrak{a}$, and so on until $a^4 = \left(a^2\right)^2 \in \mathfrak{a}$, such that $a^2 \in \mathfrak{a}$ and $a \in \mathfrak{a}$. □

One can also show the nontrivial implication by an algorithm, instead of the highly "uneffective" power tower argument: If $a^n \in \mathfrak{a}$, and n is even, then $a^{n/2} \in \mathfrak{a}$ by the assumption, and consider this. If n instead is odd, consider $a^{n+1} \in \mathfrak{a}$. By iterating this process, the exponent will eventually go down to 2, where we can once more use the assumption to get $a \in \mathfrak{a}$.

Proposition 16.3.2. Pick ideals and rings $\mathfrak{a}_w \subseteq A_w$. Then $\mathfrak{a}_\natural$ is radical if and only if almost all $\mathfrak{a}_w$ are. Furthermore, $A_\natural$ is reduced if and only if almost all A_w are.

Proof. By Lemma 16.3.1, being radical is a first-order property, and the first part follows. The second part follows by looking at $\mathfrak{a}_w = (0) \subseteq A_w$ and using Proposition 11.7.4. □

[3]A Bézout domain is an integral domain where every sum of two principal ideals, is principal.

In this thesis we have only looked at cataproducts, but we have done very little with them. The book [41] does much more with them than we do.

16.4 Further nonstandard analysis

In this thesis we have had a relatively restrictive view of nonstandard analysis. We defined some concepts for $\mathbb{R}_\natural$, and immediately afterwards we began characterizing continuity and other known properties in metric spaces. To get a better understanding of nonstandard techniques and what they can give, it might be a good idea to look at other literature.

In the first part of [18], real analysis is developed (from the perspective of someone who already knows it), and later it looks at more advanced topics such as measure theory. It also shows, for example, that one can construct the completion of a metric space (X,d) by taking the standard galaxy $\mathbb{L}(X)$ and quotienting out infinite closeness, see chapter 18. The book [23], an introductory book on calculus suitable for first years in colleges and universities, gives a more elementary presentation of some of the abovementioned real analysis, and much more. The book [29] does, among other things, much probability theory and statistics, and applications to economics.

The nonstandard analysis we did in metric spaces can be generalized to topological spaces. Fix a topological space X. Inspired by Proposition 12.2.7, define the halo of $x \in X$ as

$$\operatorname{hal}(x) = \bigcap_{\substack{x \in U \subseteq X \\ \text{open}}} U_\natural.$$

We define now the "infinite closeness"-relation $\simeq$ by $x \simeq y$ meaning $y \in \operatorname{hal}(x)$. This relation is no longer symmetric, but it is at least so in the Hausdorff case for elements of X: If X is Hausdorff, then $\operatorname{hal}(x)$ and $\operatorname{hal}(y)$ are disjoint for $x \neq y$ in X, such that $\simeq$ is then symmetric on the elements of X. If one picks the right index set and ultrafilter one obtains access to machinery that lets one show that the disjointedness criterion on the standard halos characterize the Hausdorff spaces. One can also show, analagous to what we saw in Chapter 12, that the halos determine the topology on X. For more on nonstandard topology, see the books [11] and [12]. these also do nonstandard functional analysis.

Bibliography

[1] H. Andreka and I. Németi. «łoś holds in every category». In: *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 13 (1978), pp. 361–376.

[2] Maurice Auslander, Idun Reiten, and Sverre O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995. ISBN: 978-0-521-59923-8. DOI: 10.1017/CBO9780511623608.

[3] James Ax and Simon Kochen. «Diophantine Problems Over Local Fields I». In: *American Journal of Mathematics* 87.3 (1965), pp. 605–630. ISSN: 00029327, 10806377. DOI: 10.2307/2373065. (Visited on 04/22/2024).

[4] Paul Bankston. «Ultraproducts in topology». In: *General Topology and its Applications* 7.3 (1977), pp. 283–308. ISSN: 0016-660X. DOI: 10.1016/S0016-660X(77)80006-8.

[5] Saugata Basu, Richard Pollack, and Marie-Françoise Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. 2nd ed. Vol. 10. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, 2006. ISBN: 978-3-540-33098-1. DOI: 10.1007/3-540-33099-2.

[6] J. L. Bell and A. B. Slomson. *Models and Ultraproducts: An Introduction*. 3rd ed. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1969. ISBN: 9780720420548.

[7] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model Theory*. 3rd ed. Vol. 73. Studies in Logic. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990. ISBN: 0444880542.

[8] Mark Jonathan Chimes. «Ultraproducts and Łoś's Theorem: A Category-Theoretic Analysis». MA thesis. Stellenbosch: University of Stellenbosch, Mar. 2017. DOI: 10019.1/101202.

[9] Paul J. Cohen. «Decision procedures for real and p-adic fields». In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 22.2 (1969), pp. 131–151. DOI: 10.1002/cpa.3160220202.

[10] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer, 1995. ISBN: 978-0-387-94268-1. DOI: 10.1007/978-1-4612-5350-1.

[11] Martin Davis. *Applied Nonstandard Analysis*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2005. ISBN: 9780486442297.

[12] Francine Diener and Marc Diener. *Nonstandard Analysis in Practice*. Universitext. Springer, 1995. ISBN: 978-3-540-60297-2. DOI: 10.1007/978-3-642-57758-1.

[13] L. van den Dries and K. Schmidt. «Bounds in the theory of polynomial rings over fields. A nonstandard approach». In: *Inventiones mathematicae* 76 (1984), pp. 77–91. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01388493.

[14] Paul C. Eklof. «Ultraproducts for Algebraists». In: *Handbook of Mathematical Logic*. Ed. by Jon Barwise. Vol. 90. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 1977, pp. 105–137. DOI: 10.1016/S0049-237X(08)71099-1.

[15] Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk. *Bærekraftstrategi 2022–2025 Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk*. Trondheim, 2022. URL: https://i.ntnu.no/documents/portlet_file_entry/1305837853/B%C3%A6rekraftstrategi+for+IE-fakultetet+%281%29.pdf/5c567179-a7cd-7867-1768-7fa474daa7c2 (visited on 01/29/2024).

[16] Institutt for matematiske fag. *Emneplan MA2002 - Bachelorprosjekt i matematiske fag*. Trondheim, 2024. URL: https://www.ntnu.no/studier/emner/MA2002/2023 (visited on 01/29/2024).

[17] Ilijas Farah and Saharon Shelah. «A dichotomy for the number of ultrapowers». In: *Journal of Mathematical Logic* 10.1 & 2 (2010), pp. 45–81. DOI: 10.1142/S0219061310000936.

[18] Robert Goldblatt. *Lectures on the Hyperreals, An Introduction to Nonstandard Analysis*. Vol. 188. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998. ISBN: 978-0-387-98464-3.

[19] Stefan Heinrich. «Ultraproducts in Banach space theory.» In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1980.313 (1980), pp. 72–104. DOI: 10.1515/crll.1980.313.72.

[20] Wilfrid Hodges. «Krull Implies Zorn». In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-19.2 (1979), pp. 285–287. DOI: `10.1112/jlms/s2-19.2.285`.

[21] Thomas Jech. *Set Theory*. 3rd ed. Berlin: Springer, 2002. ISBN: 978-3-540-44085-7.

[22] Christian U. Jensen and Helmut Lenzing. *Model Theoretic Algebra. With particular emphasis on fields, rings and modules*. Algebra, Logic and Applications. CRC press, 1989. ISBN: 97828812471700. DOI: `10.1201/9780203746943`.

[23] Howard Jerome Keisler. *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. 3. utg. New York: Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0-486-48452-5.

[24] Simon Kochen. «Ultraproducts in the Theory of Models». In: *Annals of Mathematics* 74.2 (1961), pp. 221–261. ISSN: 0003486X. DOI: `10.2307/1970235`.

[25] Alex Kruckman. *The Ax-Kochen Theorem: an application of model theory to algebra*. 2013. arXiv: `1308.3897 [math.LO]`.

[26] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. 2nd ed. Vol. 5. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1987. ISBN: 978-0-387-98403-2. DOI: `10.1007/978-1-4757-4721-8`.

[27] Serge Lang. *Algebra*. 3rd ed. Vol. 211. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2006. ISBN: 978-0-387-95385-4. DOI: `10.1007/978-1-4613-0041-0`.

[28] Christopher C. Leary and Lars Kristiansen. *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. 2nd ed. Geneso, NY: Milne Library Publishing, 2015. ISBN: 978-1-942341-07-9. URL: `https://milneopentextbooks.org/a-friendly-introduction-to-mathematical-logic`.

[29] Peter A. Loeb and Manfred P. H. Wolff. *Nonstandard Analysis for the Working Mathematician*. 2nd ed. Springer Dordrecht, 2015. ISBN: 978-94-017-7326-3. DOI: `10.1007/978-94-017-7327-0`.

[30] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. CRC Press, 1969. ISBN: 9780201407518.

[31] Angus MacIntyre. «Nonstandard analysis and cohomology». In: *Nonstandard Methods and Applications in Mathematics*. Ed. by Nigel J. Cutland, Mauro Di Nasso, and David A Ross. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2006, pp. 174–192. DOI: `10.1017/9781316755761.008`.

[32] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Trans. by Miles Reid. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1987. ISBN: 9781139171762. DOI: 10.1017/CBO9781139171762.

[33] Mauro Di Nasso, Isaac Goldbring, and Martino Lupini. *Nonstandard Methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory*. Vol. 2239. Lecture Notes in Mathematics. Cham: Springer, 2019. ISBN: 978-3-030-17955-7. DOI: 10.1007/978-3-030-17956-4.

[34] Tadashi Ohkuma. «Ultrapowers in Categories». In: *Yokohama Mathematics Journal* 14 (1966), pp. 17–37.

[35] David Pincus. «Adding Dependent Choice to the Prime Ideal Theorem». In: *Logic Colloquium 76*. Vol. 87. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 1977, pp. 547–565. DOI: 10.1016/S0049-237X(09)70445-8.

[36] David Pincus and Robert M. Solovay. «Definability of Measures and Ultrafilters». In: *The Journal of Symbolic Logic* 42.2 (1977), pp. 179–190. ISSN: 00224812. DOI: 10.2307/2272118.

[37] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. New York: Dover Publications, 2016. ISBN: 9780486809038.

[38] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. 2nd ed. Universitext. Springer, 2009. ISBN: 978-0-387-24527-0. DOI: 10.1007/b98977.

[39] Ildikó Sain and Bui Huy Hien. «Category Theoretic Notions of Ultraproducts». In: *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 18.1 (1983), pp. 309–317.

[40] Eric Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. San Diego: Academic Press, 1997. ISBN: 978-0-12-622760-4. DOI: 10.1016/B978-0-12-622760-4.X5000-6.

[41] Hans Schoutens. *The Use of Ultraproducts in Commutative Algebra*. Vol. 1999. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN: 978-3-642-13368-8. DOI: 10.1007/978-3-642-13368-8_3.

[42] Sharon Shelah. «Vive la différence II. The Ax-Kochen isomorphism theorem». In: *Israel Journal of Mathematics* 85 (1994), pp. 351–390. DOI: 10.1007/BF02758648.

[43] Terence Tao. *An Introduction to Measure Theory*. Vol. 126. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2011. ISBN: 978-1-4704-6640-4.

[44] Jan van Mill. «An introduction to $\beta\omega$». In: *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Ed. by Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan. Amsterdam: North-Holland, 1984, pp. 503–567. ISBN: 978-0-444-86580-9. DOI: 10.1016/B978-0-444-86580-9.50014-8.

[45] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994. ISBN: 9781139644136. DOI: 10.1017/CBO9781139644136.

[46] Paul B. Yale. «Automorphisms of the complex numbers». In: *Mathematics Magazine* 39.3 (1966), pp. 135–141. ISSN: 0025-570X. DOI: 10.1080/0025570X.1966.11975699.

Index

NTNU

Kunnskap for en bedre verden