Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Lene Nordahl

"Nå skal vi skjønne hvordan de har gjort det!"

En aksjonsforskningsstudie om hvordan elever bruker tallinjen i argumentasjonen i arbeidet med divisjonsoppgaver med brøk

Masteroppgave i Lærerspesialist i matematikk, 8.-10.trinn
Veileder: Yvonne Grimeland
September 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Lene Nordahl

"Nå skal vi skjønne hvordan de har gjort det!"

En aksjonsforskningsstudie om hvordan elever bruker tallinjen i argumentasjonen i arbeidet med divisjonsoppgaver med brøk

Masteroppgave i Lærerspesialist i matematikk, 8.-10.trinn
Veileder: Yvonne Grimeland
September 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne studien ser jeg på hvordan elever argumenterer når de arbeider med kontekstoppgaver med divisjon av brøk. Forskningsspørsmålene er:

Hvordan bruker elever tallinjen i argumentasjonen når de arbeider med divisjonsoppgaver med brøk?

Hvilke utfordringer møter elevene når de bruker tallinjen i argumentasjonen?

Studien er en aksjonsforskningsstudie. Utgangspunktet var en hypotese om at elevene ikke ville argumentere med lengdemodeller når de arbeidet med divisjon av brøk. Det ble satt et mål om å få elevene til å bruke lengdemodellen tallinje i argumentasjonen. Aksjonene vi iverksatte gikk på å utforme oppgavene slik at elevene fikk til å bruke tallinjen i argumentasjonen, og teoriutviklingen i aksjonsforskningen gikk på å se på hvordan elevene brukte tallinjen i argumentasjonen. Jeg har samlet inn datamateriale i en klasse med 27 elever på 8. trinn. Elevene har arbeidet med oppgaver i tre økter i en periode på fire uker. To av gruppene ble observert mens de arbeidet med oppgavene, og arbeidet til én av disse gruppene har blitt analysert. I aksjonsforskningsprosessen har jeg samarbeidet tett med klassens matematikklærer. Vi observerte ei gruppe hver i arbeidet, og samlet inn skriftlig arbeid fra hele klassen. Alle oppgavene som ble gitt var «Equal sharing problems», der elevene fikk en kontekstoppgave der de skulle dele et blanda tall med et helt tall. I den første timen kartla vi hvilke modeller for brøk elevene brukte. Vi la ingen føringer for representasjon utover at oppgaven ba dem lage en figur som viste hvordan de hadde tenkt dersom de regnet ut svaret. I den neste oppgaven ba vi elevene om å bruke en tallinje for å løse oppgaven. Den siste oppgaven var todelt: i del en fikk elevene presentert to måter å løse problemet på, en lengdemodell (tallinje) og en arealmodell. Elevene skulle fullføre forklaringene på de to løsningene, og si noe om hvilken metode de ville brukt. I den andre delen av oppgaven skulle elevene bruke metoden med tallinjen for å løse en lignende kontekstoppgave.

Jeg har analysert datamaterialet jeg samlet inn ved hjelp av Krummeheuers (1995) rammeverk for argumentasjon, samt Duvals (2006) representasjonsmodell. Studien viser at selv om oppgavene passet godt til å bruke lengdemodeller i argumentasjonen, valgte elevene å bruke andre representasjoner. Når oppgavene ble tilpasset slik at elevene måtte bruke tallinjen i argumentasjonen gjorde de det etter hvert, men det var utfordrende for elevene å ta den i bruk.

Abstract

In this study I look at how students argue when working on context tasks with division of fractions. My research questions are:

How do students use the number line in their argumentation when dealing with division of fractions?

What challenges do students face when they use the number line in their argumentation?

This is an action research study. It started out with a hypothesis that students would not argue with length models when working with dividing fractions. A goal was set to get the students to use the length model number line in their argumentation. The actions we initiated was to develop tasks that made the students use the number line in their argumentation, and the theory development in the action research focused on looking at how the pupils used the number line in their argumentation. The study was done in an 8th grade class with 27 students. The students worked on a tasks in three mathematics lessons, with one week between each lesson. Two of the groups were observed while working on the tasks, and the work of one of the groups has been analysed. In the action research process, I have worked closely with the class mathematics teacher. We observed one group each and collected written work from the whole class. The tasks were "Equal sharing problems", and the students were given a realistic mathematical task where they had to divide a mixed number by a whole number. In the first lesson, we mapped out which models of fractions the students used. We did not set any guidelines for representation, but if they did calculations to find the answer, we asked them to create a figure that illustrated their calculations. As we predicted in our hypothesis, none of the students chose length models. In the next task, we asked them to use a number line to solve the task. The final task was divided in two: in part one, the students were presented with two ways to solve the problem, a length model (number line) and an area model. The students were asked to complete the explanations of the two solutions. They were also asked which solution to the problem they preferred. In the second part of the task, the students were asked to use the number line to solve a similar problem.

I have analysed the collected data using Krummeheuer's (1995) framework for argumentation, as well as Duval's (2006) representation model. The study shows that even though the tasks could be solved by using length models in the argumentation, the students chose to use other representations. When the students are asked to use a number line, they found it challenging.

Forord

De siste tre årene har jeg videreutdannet meg innenfor det faget i skolen som jeg liker aller best, matematikk. Etter nesten tjue år som lærer er det et privilegium. Takk til matematikklæreren og elevene som stilte opp i studiet mitt og tok oppgavene de fikk på alvor. Takk til veilederen min Yvonne Grimeland for grundig, konstruktiv og engasjert veiledning gjennom hele masterskrivinga!

Dette prosjektet har tatt mer tid enn jeg egentlig har. Heldigvis har jeg venner og familie som har hjulpet til med husrom og barnepass, slik at jeg kunne prioritere masterskriving – tusen takk til dere! En stor takk går også til vennene og kollegaene mine som har tatt seg tid til å lese korrektur på oppgaven – det har vært til stor hjelp!

Til slutt, takk til Ronny, som alltid stiller opp og har tro på meg, og takk til Aurora, Lina og Oda, som er en fin heiagjeng å ha hjemme!

«Jeg tror egentlig ikke jeg forstod brøk fullt ut selv før jeg hadde undervist om det på alle trinn på barneskolen.»

Matematikklærer Roy

Innhold

Figurer

Tabeller

1. Innledning

I denne studien har jeg ved bruk av aksjonsforskning sett på hvordan elever bruker lengdemodellen tallinje i argumentasjonen sin når de arbeider med divisjonsoppgaver med brøk. Jeg har samarbeidet tett med matematikklæreren i en klasse på 8. trinn, og sammen har vi tilpasset oppgaver for å få elevene til å ta i bruk tallinjen i argumentasjonen. Studien har foregått i løpet av fire uker på 8. trinn. I dette kapittelet presenterer jeg bakgrunnen for mitt valg av oppgave, tema for oppgaven samt forskningsspørsmålene mine.

1.1 Bakgrunn for valg av oppgave

De første erfaringene vi har med tall, er med de naturlige tallene. Vi teller en mengde, for eksempel klosser på gulvet. Etter hvert får vi flere erfaringer med tall, og vi møter flere grupper med tall. De hele tallene inkluderer både de naturlige tallene og de negative tallene, og de hele tallene er igjen en delmengde av de rasjonale tallene. Brøk er rasjonale tall, og alle rasjonale tall kan skrives som brøk (Lamon, 2008, s. 15).

Elevene på 8. trinn skal ha mange erfaringer med brøk. I læreplanen for 7. trinn står det at elevene skal: «utvikle og bruke hensiktsmessige strategier i regning med brøk, desimaltall, prosent og forklare tenkemåtene sine» (Utdanningsdirektoratet, 2023b).

Likevel opplever vi at brøk er vanskelig for elevene når de kommer på ungdomsskolen. Ma (2010) sier at brøk blir regnet som de vanskeligste tallene elever i grunnskolen arbeider med, og divisjon er den vanskeligste regneoperasjonen. Dermed blir divisjon av brøk naturlig nok en utfordring for elevene (Ma, 2010). Min erfaring fra egen undervisning på ungdomstrinnet sier det samme: elevene strever med å forstå regnereglene for brøk, og divisjon med brøk peker seg ut som spesielt vanskelig. Det viser seg ved at de synes det er lett å arbeide med divisjon av brøk når vi har det som tema, men når temaet er avsluttet, glemmes reglene raskt. Hva kan skape bedre forståelse?

Jeg har funnet forskning som sier at elever må arbeide med ulike modeller for å øke forståelsen for brøk. Arealmodeller, lengdemodeller og mengdemodeller er de mest vanlige modellene for brøk i grunnskolen (Behr et al., 1983). Bjerke et al. (2013) fant ut at elevene var «representasjonsfattige» i sitt arbeid med brøk, og at de i hovedsak brukte en arealmodell, selv når det ikke var hensiktsmessig å bruke den. Bruner (1961, henvist til i Elia og Philippou, 2004, s. 327) støtter at læring skjer gjennom 3 nivå, hvor elevene først må praktisere (enaktivt nivå) og forestille seg (ikonisk), før de kan lære gjennom det symbolske. Grunnen til at elevene ikke forstår regnereglene for brøk, kan altså være at elevene ikke har fått nok erfaringer på det ikoniske nivået.

Målet for aksjonsforskningen ble derfor å få elevene til å bruke lengdemodellen tallinje i argumentasjonen sin når de arbeidet med kontekstoppgaver som måtte løses med divisjon av brøk. Jeg vil analysere hvordan elevene bruker tallinjen i argumentasjonen rundt oppgavene, og se på hvilke utfordringer de møtte når de brukte tallinjen.

1.2 Tema og problemstilling

I denne studien søker jeg svar på følgende forskningsspørsmål:

Hvordan bruker elever tallinjen i argumentasjonen når de arbeider med divisjonsoppgaver med brøk?

Hvilke utfordringer møter elevene når de bruker tallinjen i argumentasjonen?

Jeg har valgt aksjonsforskning som forskningsdesign. Det er et viktig prinsipp i aksjonsforskningen at forskeren skal forske sammen med læreren, samt at resultatet som kommer ut av forskningen skal være til nytte for læreren (Tiller, 2006). I samarbeid med matematikklæreren i klassen som ble forsket på, ble det utarbeidet en hypotese og et mål for aksjonsforskningen. Utgangspunktet var en hypotese om at elevene ikke ville argumentere med lengdemodeller når de arbeidet med divisjon av brøk. Det ble satt et mål om å få elevene til å bruke lengdemodellen tallinje i argumentasjonen. Aksjonene vi iverksatte gikk på å utforme oppgavene slik at elevene fikk til å bruke tallinjen i argumentasjonen.

Jeg har benyttet Krummheuers (1995) argumentasjonsmodell som rammeverk for teori. Det er et rammeverk for å analysere elevers argumentasjon i matematikk. Den deler opp en argumentasjon i delene konklusjon, data, garanti og backing. Data er informasjonen som det konkluderes ut fra. Konklusjonen er det svaret som elevene kommer med, og garanti er de utregningene, tegningene og forklaringene som viser sammenhengen mellom data og konklusjonen. Backing kaller Krummheuer (2007) «unquestionable basic convictions» (s. 65) som støtter opp om garantien. Ved å sette inn elevenes argumentasjon i denne modellen, kan jeg si noe om hvordan elevene bruker tallinjen i de ulike delene av argumentasjonen.

Jeg fant ut at elevene bevegde seg mellom ulike representasjoner i argumentasjonen. Dette skapte utfordringer for elevene, og svaret på det andre forskningsspørsmålet kan si oss noe om hvilke utfordringer elevene møtte. Duval (2006) sier at en vanlig måte å definere representasjon på er: «representation is something that stands for something else» (s. 103). I læreplanen defineres representasjoner slik:

> Representasjonar i matematikk er måtar å uttrykkje matematiske omgrep, samanhengar og problem på. Representasjonar kan vere konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske (Utdanningsdirektoratet, 2023a)

Kort oppsummert er representasjoner ulike måter å uttrykke matematiske sammenhenger. Behr et al. (1983) sier det er nødvendig å bevege seg mellom ulike representasjoner for å utvikle forståelsen av brøk. De nevner kontekstsituasjon, visuelle bilder og skriftlige symboler som noen av representasjonsformene elevene vil bevege seg mellom når de arbeider med å løse kontekstoppgaver med brøk (Behr et al., 1983). Lengdemodellen tallinje vil være et eksempel på visuelle bilder. For å svare på hvilke utfordringer elevene møter når de beveger seg mellom representasjonene, har jeg brukt Duvals (2006) modell for representasjoner.

Jeg benyttet observasjon som metode ved at jeg observerte to grupper på 8. trinn. Under observasjonen ble det gjort lydopptak. Jeg utførte det Cohen et al. (2018) kaller deltagende observasjon og hadde en klar rolle som observatør, samtidig som jeg f.eks. spurte oppklarende spørsmål underveis. Jeg observerte elevenes arbeid med tre ulike kontekstoppgaver med divisjon av brøk, gitt i tre undervisningsøkter med en uke mellom hver økt. I alle oppgavene skulle et blanda tall divideres med et helt tall, og to av oppgavene var utarbeidet for å få elevene til å bruke en lengdemodell i argumentasjonen.

Mellom hver økt samtalte jeg med matematikklæreren i klassen, evaluerte foregående økt og planla neste økt. Furu (2013, s. 47) sier at ordet aksjon gjør at man tenker på at det skjer en aktiv handling. I aksjonsforskning må man prøve å endre situasjonen man observerer. Tripp (2005) sier at aksjonene man gjennomfører må tilpasses målet, praksisen, deltagerne og situasjonen. Et tett samarbeid, evaluering og planlegging var derfor avgjørende.

1.3 Oppgavens oppbygging

Denne oppgaven inneholder syv kapittel. I kapittel 2 vil jeg presentere teorien som ligger til grunn for målet for aksjonsforskningen, aksjonene som ble gjennomført og analysen. Jeg presenterer teori om brøk, representasjoner og illustrasjon av matematikkoppgaver, før jeg presenterer rammeverket til Krummheuer, som jeg har benyttet i analysen. Til slutt presenterer jeg relevant forskning om elevers brøkforståelse. I kapittel 3 redegjør jeg for metodene jeg har benyttet meg av studien, derunder analysemetode og aksjonsforskningsprosessen. I kapittel 4 utdyper jeg aksjonsforskningsprosessen i denne studien, og i kapittel 5 analyserer jeg og presenterer resultatet av mine undersøkelser. I kapittel 6 tar jeg for meg resultatet og analysen og diskuterer disse i lys av hypotese og mål for aksjonsforskningen, samt forskningsspørsmålene. Jeg avslutter oppgaven i kapittel 7 med en oppsummerende kommentar.

2. Teori

I teorikapittelet vil jeg presentere hva brøk er, og hvorfor brøk generelt og divisjon av brøk spesielt viser seg å være vanskelig for elevene. Fokuset vil være viktigheten av å se brøk som en tallstørrelse, samt divisjon av brøk. Jeg vil se på hvilke modeller som kan brukes for brøk, og få fram hvorfor lengdemodeller er viktig med tanke på aspektet brøk som tallstørrelse. Da jeg har valgt å bruke tallinje i oppgavene, har jeg fokus på den. Jeg vil presentere hvordan de ulike modellene for brøk, og andre representasjoner, kan settes inn i Duvals (2006) modell. Jeg vil kort presentere teori om illustrasjon av matematikkoppgaver, før jeg presenterer Krummheuers (1995) rammeverk for argumentasjon. Til slutt ser jeg på tidligere forskning på brøk.

2.1 Brøkbegrepet

Empson og Levi (2011, s. 3) sier at brøk er når en skriver tall på formen $\frac{a}{b}$ når b ≠0, og at verdien av brøken er bestemt av forholdet mellom a og b. Ikke alle tall som kan skrives på brøkform er rasjonale tall, og $\frac{\pi}{2}$ er et eksempel på det (Lamon, 2008, s.22). I tillegg til de rasjonale tallene har vi de irrasjonale tallene. Disse tallene kan ikke skrives som brøk med et helt tall som teller og nevner, som for eksempel $\frac{\pi}{2}$, eller π og √2. Sammen danner de rasjonale tallene og de irrasjonale tallene alle reelle tall. Hvert rasjonale tall kan ha flere brøker som viser samme mengde, og det finnes også andre former enn brøk å skrive rasjonale tall på, som desimaltall (Lamon, 2008, s. 23).

Brøk oppfattes av mange som et vanskelig emne innenfor matematikk. Zakis og Mamolo (2016) viser til over hundre PME – rapporter fra 2005–2014 når de hevder at brøk er vanskelig for både elever og lærere. De sier at et av problemene ved brøk ser ut til å være at elever lærer om brøk etter at de har lært om naturlige tall. Dette kan påvirke hvordan elevenes forventninger er til arbeidet med brøk, og kalles «natural number bias» (Zakis & Mamolo, 2016). Dette kan for eksempel føre til at elevene tenker at $\frac{1}{3}$ er mindre enn $\frac{1}{4}$, fordi 3 < 4 (Zakis & Mamolo, 2016). Charalambous og Pitta – Pantazi (2007) slår også fast at både å undervise og lære brøk tradisjonelt sett har vært sett på som vanskelig. De påpeker at flere studier mener at hovedårsaken til dette er de ulike aspektene ved brøk.

Brøk er ikke bare brøk. Behr et al. (1983) har satt opp en figur som viser hvilke aspekt brøk har. Figuren viser at grunnmuren for å forstå de andre aspektene ved brøk er forståelsen av brøk som en del av en hel (Behr et al., 1983). I følge Behr et al. (1983), så avhenger dette av forståelsen av at en kontinuerlig enhet eller diskret mengde kan deles inn i like store deler – oppdeling, eller *partitioning*, som er det engelske ordet. For eksempel lærer barn tidlig hva halvparten er (Behr et al., 1983). I tillegg til dette aspektet, kan man se på brøk som forhold mellom to tall, som operator, som kvotient og som en tallstørrelse (figur 1). Jeg har tatt utgangspunkt i denne figuren, og satt opp en figur som viser hvordan du kan se de ulike aspektene ved brøken $\frac{1}{6}$ (figur 1).

<table>
<tr><td colspan="4">Oppdeling og del av en hel
Eksempel:
1 av 6 deler
</td></tr>
<tr>
<td>Forhold
Eksempel:
Sannsynligheten for å få en firer når du kaster en terning med seks sider, som er $\frac{1}{6}$.</td>
<td>Operator
Eksempel:
$\frac{1}{6}$ av en klasse på 24 elever er jenter.</td>
<td>Kvotient
Eksempel:
$\frac{1}{6}$ er det samme som en delt på seks.</td>
<td>Tallstørrelse
Eksempel:

</td>
</tr>
</table>

Figur 1: Ulike aspekt ved brøk (fra Behr et al., 1983, s. 100, oversatt og tilpasset)

I figur 1 kan du se at aspektet ved brøk som Behr et al. (1983) kaller forhold, viser til forholdet mellom to mengder. For eksempel kan $\frac{1}{6}$ vise til at sannsynligheten for å få 6 når du kaster en terning er 1 av 6. Det er nyttig å kunne se forholdet mellom to tall når du skal sammenligne størrelsen på to brøker (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Brøk som operator er en sammenligning av to størrelser, der den ene størrelsen er en brøkdel av den andre – altså en brøk av et helt tall (Van de Walle, 2020, s. 379). Et eksempel på det er at $\frac{1}{6}$ av en klasse på 24 elever er jenter. Dette aspektet er nyttig for å utvikle multiplikative operasjoner med brøk (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Når en ser på brøk som kvotient, så ser en på symbolet $\frac{a}{b}$ som en operasjon – a delt på b (Behr et al., 1983). Det kan være en delt på seks, som i eksempelet i tabellen.

Brøk kan også sees på som en tallstørrelse – det kan være tall på en tallinje (Behr et al., 1983) eller et mål på et intervall – du definerer en stambrøk $\frac{1}{n}$ som brukes repeterende for å si noe om lengden fra et startpunkt (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). For eksempel kan $\frac{5}{6}$ være fem ganger $\frac{1}{6}$ fra startpunktet null.

Ved å sammenligne oppgaver som elevene løste innenfor de ulike aspektene, så kom Charalambous og Pitta – Pantazi (2007) fram til at elevene fikk best til de oppgavene som gikk på aspektet en del av en hel, og dårligst på oppgaver som gikk på aspektet brøk som tallstørrelse. De sier også at det er vanskelig for elever å finne likeverdige brøker på tallinjen, og at elever må ha forståelse for likeverdige brøker før de kan ha nytte av tallinjen. Van de Walle et al. (2020, s. 386) sier at når elevene har konstruert ideen om at brøk er en del av en hel som er delt inn i like deler, så er den viktigste tanken elevene må utvikle tanken om at brøk er et tall som har verdi. Lamon (2008, s. 23 - 24) sier også at å se på brøk som en del av en hel har gitt elevene et smalere begrep om hva brøk er, og at vi må ta med også de andre aspektene av brøk. Lamon (2008, s. 22) mener altså at når man snakker om brøk som et tall, så snakker man om det rasjonale tallet som brøken representerer. Det er altså viktig med fokus på flere aspekt av brøk enn brøk som en del av en hel, og brøk som en tallstørrelse utpeker seg som et vanskelig aspekt for elevene, og dermed et viktig aspekt å utvide forståelsen for.

2.2 Divisjon og brøk

Ma (2010) sier at brøk ofte er betraktet som de vanskeligste tallene å lære for elever i grunnskolen. Divisjon av brøk er den vanskeligste av de fire regneoperasjonene (Ma, 2010). Dermed blir divisjon av brøk naturlig nok utfordrende.

Å forstå divisjon med brøk bygger på matematikkforståelse på mange andre områder (Ma, 2010). Man må forstå addisjon for å forstå multiplikasjon av hele tall, før man kan forstå divisjon av hele tall og sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon. Man må forstå hva brøk er og forstå hva en helhet er. Først da kan forstå multiplikasjon og divisjon av brøk (Ma, 2010). Før man kan forstå divisjon av brøk må man med andre ord ha god forståelse for brøk. Dermed kan det være nødvendig å arbeide med brøkforståelsen, derunder alle aspektene ved brøk, dersom man opplever at elevene strever med divisjon av brøk.

Van de Walle et al. (2020, s. 437, egen oversettelse), mener en bør følge denne progresjonen når en arbeider med divisjon av brøk:

1. Et helt tall dividert med et helt tall […]
2. En brøk dividert med et helt tall: ½ : 4 […]
3. Et helt tall fordelt på en brøk: 4 : ½ […]
4. En brøk delt på en brøk: 7/8 : 1/8 […]

I denne studien velger jeg å gi oppgaver på steg to. Det er det første steget for å lære divisjon av brøk som inneholder brøk – oppgaver hvor du har en brøk dividert med et helt tall. Empson og Levi (2011) kaller denne typer oppgaver for «Equal sharing problems». Strukturen på «Equal sharing problems» er at noe skal deles likt på et gitt antall.

Divisjonsoppgaver kan deles inn i to kategorier – delingsdivisjon og målingsdivisjon (Birkeland et al., 2011). I målingsdivisjon vet vi hvor mye det er i hver delmengde og skal finne ut hvor mange delmengder det er. I delingsdivisjon vet vi hvor mange delmengder det er, og skal finne ut hvor mye det blir i hver delmengde (Birkeland et al., 2011). Et typisk eksempel på målingsdivisjon er at en skal dele for eksempel 3 liter saft på flasker som rommer $\frac{1}{2}$ liter hver og skal finne ut hvor mange flasker en trenger. Et typisk eksempel må delingsdivisjon er at en har for eksempel $2\frac{1}{2}$ sjokolade som skal deles på 5 barn. Oppgaven blir da å finne ut hvor mye hvert barn får. En slik oppgave kaller Empson og Levi (2011) for «equal sharing problems». «Equal sharing problems» er delingsdivisjon fordi vi kjenner til antallet en mengde skal fordeles på, men vi kjenner ikke til hvor mye som blir gitt til hver (Empson og Levi, 2011, s. 9). Fordelen med denne type problem er at de kan tegnes. Dermed kan elevene få mentale modeller på brøk, og slike problem også fine oppgaver å diskutere i grupper (Empson og Levi, 2011, s. 10).

2.3 Modeller for brøk

En modell for brøk viser brøk som et bilde, i stedet for et symbol. Bruner (1961, henvist til i Elia og Philippou, 2004, s. 327) sier at læring skjer gjennom 3 nivå:

1.) *the enactive* – når man handler
2.) *the iconic* –når man kan forestille seg noe
3.) the symbolic - for eksempel matematiske symboler

Man må altså først prøve ut noe praktisk og videre forestille seg noe i f.eks. et bilde eller en modell, før man kan arbeide med de matematiske symbolene. Dermed er bilder er en forbindelse mellom praktisk og symbolsk læring. Arealmodeller, lengdemodeller og mengdemodeller er de mest vanlige modellene for brøk i grunnskolen (Behr et al., 1983).

Arealmodeller viser hvordan brøken blir bestemt etter hvor stor del av et område det er i forhold til hele området. Det er en god plass å begynne brøkutforskningen på fordi den oppfordrer til lik deling og oppdeling (Van de Walle et al., 2020, s. 381). Typiske eksempel på dette er oppgaver med kaker eller sjokolade som skal deles.

Mengdemodeller er når brøk er bestemt ut fra hvor mange gjenstander det er av et helt sett med gjenstander (Van de Walle et al., 2020, s. 384). Det kan være hvor mange av elevene i klassen som er jenter eller hvor mange klinkekuler som er røde.

Lengdemodeller sammenligner lengder eller mål, og en brøk kan være representert som en lengde fra 0 til et punkt på en linje, eller som et mål på et intervall på linja (Van de Walle et al., 2020, s. 383). Det kan for eksempel være kan være strips som brettes, tallinjer eller Cuisinairestaver. Behr et al. (1983) hevder at lengdemodeller og tallinjer er spesielt nyttige å bruke som modeller, spesielt når de er lengre enn en enhet. En lengde kan alltid deles inn i mindre enheter, og hvor små deler man har delt opp i kommer an på hvor mange ganger man gjentar delingen (Lamon, 2008). Jeg har i min studie valgt å fokusere på lengdemodellen tallinje.

2.4 Tallinjer

Brøk har altså mange ulike aspekt, og brøk som tallstørrelse er et vanskelig aspekt for elever å få grep om (Charalambous og Pitta – Pantazi, 2007). Van de Walle et al. (2020) Rapporter om studier på brøk fra Petit et al. (2010, henvist til i Van de Walle, 2020 s.383) og Siegler et al. (2010, henvist til i Van de Walle, 2020, s.383) sier at tallinjer kan hjelpe elevene til å forstå brøk som et tall, i tillegg til å utvikle de andre brøkaspektene. De ber lærere bruke tallinjer for å hjelpe elevene til å oppdage at brøk er et tall. I denne studien har jeg laget oppgaver som skal få elevene til å ta i bruk lengdemodellen tallinje som representasjon i argumentasjon når de løser kontekstoppgaver med divisjon av brøk.

Witherspoon (2019) definerer hva ei tallinje er:

> The number line is a mathematical tool that emphasizes the measure model. It is simply a line that must have at least two points identified to establish a unit of length. This linear model is a representation of numbers that ascend from left to right on a straight line where every unique point correlates with a rational number. (s.343)

Tallinjen er altså et matematisk verktøy som må ha minst to punkt som markerer en lengdeenhet. Det er en lengdemodell som kombinerer en rett linje med punkt som representerer rasjonale tall.

Bright el al. (1988) har gjort en studie som undersøker hvordan elever plasserer ulike brøker på tallinja, og hvilken effekt instruksjon har for hvordan de behersker dette. Ifølge Bright et al. (1988, s. 215), så skiller tallinjen seg fra andre modeller for brøk på følgende tre måter:

1. Tallinjen er en lengde som viser en enhet som kan deles inn i mindre enheter. Det kan jo også arealmodellen, mens mengdemodellen ikke kan deles inn i mindre enheter.
2. Det er en kontinuerlig og ikke diskret enhet. Mengdemodeller og arealmodeller er diskret enheter - de begrenser seg til at hver enhet blir presentert separat. I tallinja står enhetene på en sammenhengende linje. Da vil det være enklere å dele opp brøker som er større enn en hel.
3. Tallinjen kombinerer symbolsk og ikonisk representasjon. Du kan ikke bruke tallinjen uten å knytte til den minst to symbol som markerer en avstand. I andre modeller er det ikke nødvendig med symboler for å se størrelsen på brøken.

Bright et al. (1988) kom fram til at elever har utfordringer med å bruke tallinjer som representasjon for brøk. Tallinjer mellom 0 og 1 var lettere enn tallinjer mellom 0 og 2. Dersom de måtte dele tallinjen opp på nytt (utvide brøken), så var det vanskeligere enn om de kunne bruke den uten å dele inn. De tror at vanskene som elevene har med å plassere brøk på tallinjen kan ha sammenheng med at det er vanskelig å kombinere de to representasjonene som finnes på tallinjen – det symbolske og det ikoniske. De mener at kunnskap om likeverdig brøk er nødvendig for å kunne bruke tallinjer som representasjon (Bright et al., 1988).

Det er altså ikke uproblematisk for elever å arbeide med tallinjer, noe også Shaughnessy (2011, s. 431, egen oversettelse) påpeker. Hun oppgir fire vanlige feil som elever gjør i arbeid med tallinjer:

1. De bruker feil notasjon fordi de er ikke kjent med brøknotasjonen og markerer feil på grunn av dette
2. Dersom tallinjen strekker seg lengre enn en, behandler de for eksempel hele tallinjen som en enhet, i stedet for avstanden mellom 0 og 1
3. Elevene teller merker i stedet for å se på avstanden mellom merkene, fordi de er vant til diskrete mengder. Det er også vanlig å telle alle delene på tallinjen som deler i nevneren, ikke bare delene fram til 1.
4. Elevene teller de merkene som er der, og legger ikke merke til om det mangler noen. Det er spesielt relevant dersom det er ulik avstand mellom noen av merkene.

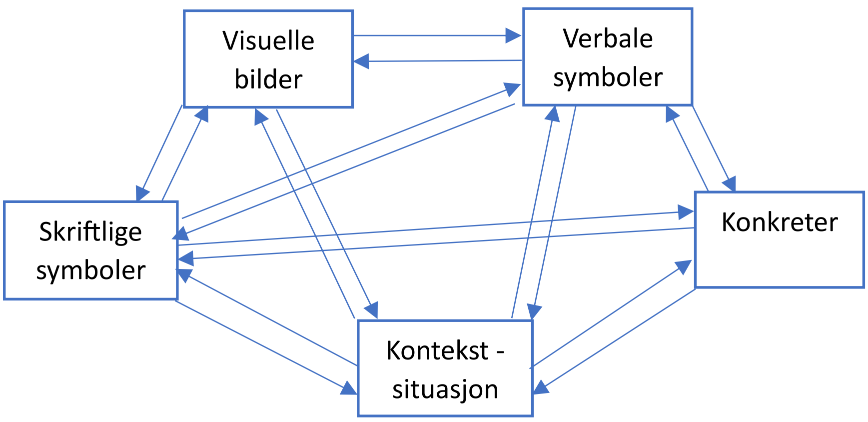
Kort oppsummert er tallinjen nyttig for å utvikle forståelsen av brøk som en tallstørrelse, som er et vanskelig aspekt ved brøk for elevene å få grep om. Men å ta i bruk tallinjen i arbeidet med brøk vil gi utfordringer for elevene.

I denne studien har jeg har valgt å se på hvordan elevene bruker tallinje i argumentasjonen sin rundt oppgaver med divisjon av brøk, og hvilke utfordringer elevene møter når de skal argumentere med tallinjen. Oppgavene jeg har gitt er med blanda tall som skal divideres med hele tall, slik at de vil måtte benytte seg av tallinjer som er lengre enn en enhet.

2.5 Representasjoner

De ulike modellene for brøk er måter å representere brøk på. Duval (2006) sier representasjoner kan defineres på følgende vis - «representation is something that stands for something else» (s. 103). Det er altså ulike uttrykksformer for matematikk, som kan være både verbale og skriftlige. Han sier videre at representasjoner kan gi oss innblikk i elevenes forståelse og misforståelse, da det alltid ligger en tanke bak representasjonene som elevene viser oss (Duval, 2006).

Behr et al. (1983) sier at en må bruke ulike representasjonsformer for å utvikle forståelse for aspektene ved brøk. Representasjonene de har med i sin modell er skriftlige symboler, visuelle bilder, verbale symboler, konkreter og kontekstsituasjoner (Behr et al., 1983). Kontekstsituasjoner velger jeg å se på som de tekstoppgavene som elevene får. Det kan være oppgaver som viser et matematisk problem som må løses, men som har satt dette matematiske problemet inn i en reell kontekst. For eksempel at $2\frac{1}{2}$ meter gavebånd skal deles likt på tre gaver. Konkreter vil være å bruke et konkret bånd for å løse en slik oppgave, noe som ikke har vært brukt i dette studiet. Skriftlig og verbale symboler vil være å bruke matematiske symboler og verbalt språk. Visuelle bilder vil for eksempel være arealmodeller, mengdemodeller og lengdemodeller presentert som tegninger/bilder.



Figur 2: Interaktiv modell for bruk av representasjoner (Behr et al., 1983, s. 102, oversatt og tilpasset)

Behr et al. (1983) mener at elever beveger seg mellom ulike representasjonsformer når de arbeider med å løse kontekstoppgaver med rasjonale tall. Behr et al. (1983) sin modell (figur 2) viser at en vanlig måte å arbeide med kontekstoppgaver på er at en oversetter fra kontekstsituasjonen til en av representasjonsformene, så gjøre en form for behandling innenfor denne representasjonsformen, og deretter oversette tilbake til kontekstsituasjonen (Behr et al., 1983). Det er også vanlig å bevege seg mellom de ulike representasjonene mens man arbeider med oppgaven, gjerne ved å bruke bilder eller konkreter for deretter å oversette det til skriftlige symbol. I den prosessen brukes gjerne muntlig språk (Behr et al., 1983).

Duval (2006) framstiller representasjoner i matematikk i fire grupper på bakgrunn av hvilke egenskaper de har. Duval (2006) kaller gruppene for ulike register, og sier at læring og utfordringer oppstår når elevene beveger seg mellom representasjoner i de ulike registrene. I figur 3 har jeg plassert representasjonene som Behr et al. har med i sin modell (figur 2) i en forenklet framstilling av Duvals (2006) modell.

Duval (2006) skiller mellom multifunksjonelle registre og monofunksjonelle registre. Multifunksjonelle registre inneholder representasjoner som ikke kan gjøres om til algoritmer (Duval, 2006). Eksempel på dette er naturlig språk, som han kaller for språklige operasjoner, og ikoniske representasjoner, som han kaller for visuelle operasjoner. Monofunksjonelle registre er representasjoner som er algoritmiske (Duval, 2006). Derunder finner vi symbolspråk, som er en språklig operasjon, og grafer og diagrammer, som er visuelle operasjoner.

	Språklige operasjoner	**Visuelle operasjoner**
Multifunksjonelle register: prosesser som ikke kan gjøres om til algoritmer	Naturlig språk: • muntlige forklaringer • skriftlige forklaringer Begrep fra Behr et al. (1983): kontekstsituasjoner med naturlig språk, verbale symboler	Ikonisk: tegning, skisse, mønster og geometriske figurer Begrep fra Behr et al. (1983): Visuelle bilder – for eksempel mengdemodeller, arealmodeller og lengdemodeller
Monofunksjonelle register: prosesser som for det meste er algoritmiske	Symbolspråk: Bare skriftlig: utregning, bevis Begrep fra Behr et al. (1983): Skriftlige symboler	Diagrammer og grafer: Ikke brukt i denne studien

Figur 3: Duvals representasjonsregistre (Duval, 2006, s. 110, oversatt og tilpasset)

Duval (2006) mener at for at en matematisk prosess skal kunne skje, så må en ta i bruk en representasjon. Det kan skje enten skje ved at en *behandler* innenfor samme register, eller at en *omdanner* til en representasjon i et annet register.

Behandling innenfor samme register kan for eksempel være å løse et brøkproblem gitt i symbolsk skriftlig form med symboler:

$2\,\frac{1}{2} : 3 = \frac{2\times 2+1}{2} : 3 = \frac{5}{2} : \frac{3}{1} = \frac{5\times 1}{2\times 3} = \frac{5}{6}$

Eksempelet er hentet fra en av oppgavene jeg har gitt i min studie og har der en kontekstsituasjon:

> Du har $2\,\frac{1}{2}$ meter med gavebånd som du skal bruke til å pakke inn tre like store gaver. Hvor mye gavebånd har du til hver gave?

Dersom denne kontekstoppgaven i naturlig språk er utgangspunktet, så har man gjort en omdannelse dersom man løser oppgaven med symboler. Omdannelsen skjer fra det naturlige skriftlige språket i kontekstoppgaven til symboler.

Dersom oppgaven i stedet blir løst med en tallinje, så har en beveget seg fra naturlig skriftlig språk til en ikonisk representasjon. Da bruker man både språklige og visuelle operasjoner, og man gjør en omdannelse mellom representasjoner i ulike register.

Både behandling og omdannelse er viktig for matematikken, men omdannelse til andre representasjoner er spesielt viktig for forståelsen av matematikk (Duval, 2006). Duval (2006) mener at elevene ikke kan klare å skille det matematiske objektet (det de skal lære) fra representasjonen (symbolene), dersom de ikke kan få tilgang til det matematiske objektet gjennom en annen representasjon (Duval, 2006). Dermed er det viktig for læring og problemløsning at elevene kan gå fra en representasjon til en annen.

Det er ifølge Duval (2006) og Behr et al. (1983) viktig for elevenes forståelse at de får bevege seg mellom ulike representasjoner når de arbeider med problem knyttet til divisjon av brøk.

2.6 Teori om illustrasjoner av oppgaver

Et grep for å få elevene til å ta i bruk tallinjen i argumentasjonen var å illustrere oppgavene med bilder. Schnotz og Banner (2003, henvist til i Dewolf et al, 2014) sier at man danner seg mentale modeller når en leser en tekst som er presentert sammen med bilder som passer til. Et bilde sammen med tekst vil altså gi mental modell av situasjonen, noe som kan være starten på å lage en egen modell.

Schnotz (2005, henvist til i Dewolf et al., 2014) sier at dersom bilder skal ha en positiv effekt for læring, bør tekst og bilde høre sammen, presenteres nært hverandre og ikke inneholde overflødig informasjon. De sier dermed at det er viktig å tenke over hvordan en bruker bildene i oppgaven.

Carney og Levin (2002, henvist til i Elia & Philippou, 2004) har fire funksjoner for bilder i problemløsningsoppgaver:

- De kan være *dekorative,* uten å gi informasjon til løsningen av problemet
- De kan være *representative* og representere hele eller deler av innholdet i problemet
- De kan være *organiserende* og gi retning for tegning eller skriftlig arbeid som kan støtte løsningen av problemet
- De kan være *informative* og være essensielle for løsningen av problemet - problemet er altså basert på bildet

Å bruke bilder som dekorasjon i problemløsningsoppgaver, viste seg ikke å være til hjelp i løsningen av problemet, mens de andre måtene å bruke bilder på var virkningsfulle (Elia & Philippou, 2004).

En studie fra Kalgirou, Gagatsis, Michael and Deliyanni (2010, henvist til i Zakis & Mololo, 2016) undersøkte hvordan bruk av ulike representasjoner for brøk kan hjelpe elever å lære divisjon med brøk. Studien indikerte at elevene gjorde det bedre på oppgaver som inneholdt bilder som viste representasjoner, enn på oppgaver uten representasjoner.

I oppgavene jeg har gitt i denne studien, har jeg tatt i bruk tallinjer og bilder av løsningsforslag med en tallinje og en arealmodell. Tanken bak var at bildene skulle være organiserende, og gi retning for det skriftlige arbeidet og løsningen på problemet. Dermed kunne elevene sette i gang ved hjelp av bildene (Elia & Philippou, 2004). Begrunnelsen for de valgene jeg har gjort, vil jeg gå nærmere inn på når jeg beskriver aksjonene i kapittelet om aksjonsforskningsprosessen.

2.7 Oppsummering av rammeverk for analyse

Argumentasjon i matematikk er et av kjerneelementene i kunnskapsløftet, og er dermed noe av det elevene skal lære i matematikkundervisninga i skolen (Utdanningsdirektoratet, 2023a). Kunnskapsløftet sier at argumentasjon i matematikk «handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2023a). Det er dermed bestemt i læreplanen hva argumentasjon i matematikk skal være: å begrunne de løsningene og løsningsmetodene en velger, og bevise at de er gyldige.

Argumentasjon i matematikk er altså forbundet med å bevise. Krummheuer (1995) hevder at det finnes ting som mennesker gjør som er argumenterende, men som ikke er formelt logisk. Krummheuer mener med andre ord at det kan være en matematisk argumentasjon, selv om det ikke framkommer et matematisk bevis. Krummheuer (1995) sier at argumentasjon er en sosial interaksjon:

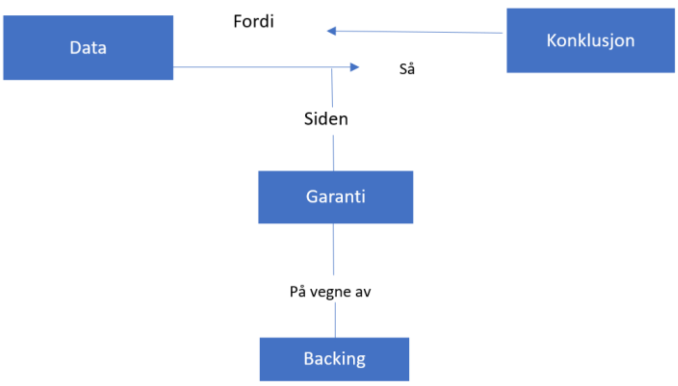
> With regard to clasroom interaction, such accomplishments of argumentations generally do not appear in the form of a monologue but rather as direct face – to – face interaction. Bacause of the emergent nature of social interaction, argumentations are usually accomplished by several participants. (s.232)

Han mener altså at argumentasjon sjelden skjer som en monolog, men heller mellom mennesker. Det er noen som skal overbevises. Videre sier Krummheuer (1995) at argumentasjon ofte blir sett på som noe som følger en handling eller ytring når noen stiller spørsmål om gyldigheten til det. Hos barn som løste matematiske problem, observerte Krummheuer (1995) at argumentasjon ofte er en del av resonneringen rundt problemet. Når de kommer til løsningen har de allerede vært gjennom en argumentasjon, og trenger ikke å argumentere ytterligere for løsningen. Krummheuer (2007) sier:

> With regard to learning mathematics one usually assumes that participation in argumentations, which appear to be rather explicit and sophisticated, is a *pre* - condition for the possibility to learn, not only the desired *out* – come. In this sense, learning mathematics is *argumentative* learning. (s. 62)

I følge Krummheuer er altså argumentasjon en del av læringsprosessen, og å delta i matematiske diskusjoner er en forutsetning for å lære.

Stephen Toulmin utviklet en modell for analyse av argumentasjon som viser hvordan et argument er bygd opp (Grepstad, 1997, s. 171). Ifølge han fantes det tre hovedkomponenter som måtte være til stede for at det skulle være en argumentasjon (Grepstad, 1997, s. 172). Disse hovedkomponentene kalte Toulmin *data*, *warrant* og *conclusion* (Krummheuer, 1995). Krummheuer (1995) har tatt utgangspunkt i Toulmins modell og tilpasset modellen til argumentasjon i matematikken (figur 4).



Figur 4: Krummheuers argumentasjonsmodell (1995, s. 248, oversatt)

Konklusjonen er et synspunkt som den som ytrer det ønsker å overbevise andre om. Den må ha informasjon som støtter det synspunktet – data (Krummheuer, 1995). Forholdet mellom data og konklusjon kaller Krummheuer for «the inference of the argument» (Krummheuer, 2007, s. 65). Det er data som gir premissene for konklusjonen, det er disse konklusjonen baserer seg på. Både konklusjonen og data må uttrykkes for at det skal være et argument (Grepstad, 1997, s. 171).

Det må også finnes noe som viser sammenhengen mellom synspunktet og informasjonen som støtter det – en warrant (Grepstad, 1997; Krummheuer, 1995). Jeg har oversatt warrant til garanti, og kommer heretter til å bruke det begrepet. Singletary og Conner

(2015) sier et matematisk bevis kan komme fra en argumentasjon hvor den matematiske konklusjonen baserer seg på matematiske data og garantier. I et klasserom kan en ha en argumentasjon rundt matematiske problem som støtter seg på data og garantier som elevene finner overbevisende, selv om det ikke er matematisk korrekt (Singletary og Conner, 2015). I følge Singletary og Conner (2015) så kan typiske garantier fra elever som arbeider med matematiske problem være regler, definisjoner, kalkulasjoner, observasjoner av mønster eller lignende. Det kan også være mindre matematisk garantier, som for eksempel at de viser til noe en lærer har sagt eller til boka (Singletary og Conner, 2015). Backing er et fjerde element som argumentasjonen kan inneholde – det Krummheuer (2007) kaller «unquestionable basic convictions» (s. 65). I Gjessing (2022) sin masteroppgave oversetter hun dette med generelt akseptert kunnskap, som er en oversettelse jeg velger å bruke videre. Denne generelt aksepterte kunnskapen støtter opp under garantien. Krummheuer (1995) sier at en slik generelt akseptert kunnskap for eksempel kan være forståelsen av at addisjon er en operasjon som kan gjøres ved å telle på fingrene. Det kan være ulike backinger for samme garanti, fordi backingen er avhengig av hva de som deltar i argumentasjonen har som en generelt akseptert kunnskap (Krummheuer, 1995).

2.8 Tidligere forskning om elevers forståelse av brøk

I en undersøkelse som ble gjort av Siegler et. al (2012), utvikler de en hypotese om at kunnskapene som elevene har om brøk tidlig i skoleløpet kan si noe om hvordan elevene senere presterer i algebra og matematikk generelt. For å teste ut denne hypotesen undersøkte de to langtidsstudier. Undersøkelsene av studiene viste at elevers kunnskaper om både brøk og divisjon av hele tall i tidlig alder, hadde større betydning for matematikkresultatene senere enn for eksempel addisjon, subtraksjon og multiplikasjon hadde (Siegler, et al., 2012).

Bjerke et al. (2013) laget en test om brøk som de med hjelp fra lærerstudenter gav til elever på 6. og 7. trinn. Testen inneholdt oppgaver innen ulike aspekt ved brøkbegrepet, og noen av oppgavene ble valgt ut for analyse av elevers forståelse av brøk. Et eksempel på en slik oppgave var at elevene skulle finne en brøk mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$. De fant ut at elevene ikke oppfattet brøk som tallstørrelse på tallinjen, som forhold eller som operator. De konkluderer med at brøkforståelsen for disse elevene er mangelfull, og at de er «representasjonsfattige» og ensidig bruker arealmodellen som representasjonsform. Elevene klarer heller ikke å vurdere om arealmodellen er godt egnet til å bruke i oppgavene, og bruker den i situasjoner hvor den ikke er hensiktsmessig (Bjerke et al., 2013).

Siegler et al. (2011) slår fast at det er vanskelig for barn å se på brøk som en tallstørrelse. De mener at kjernen i å utvikle tallforståelse er å forstå at ikke bare de hele tallene, men alle reelle tall har fellestrekk, som for eksempel at de har sin plass på tallinjen. De har gjort en undersøkelse på 6. og 8. trinn hvor elevene har fått ulike oppgaver knyttet til brøk som tallstørrelse. Oppgavene gikk ut på å plassere brøk mellom 0 og 1 på ei tallinje og brøk mellom 0 og 5 på ei tallinje. De skulle også sammenligne ulike brøker med ulike nevnere med brøken $\frac{3}{5}$ (om de var større eller mindre). I tillegg skulle de løse brøkoppgaver med addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, med lik og ulik nevner. De fant blant annet ut at de elevene som hadde stor suksess med å sammenligne brøkstørrelse, også lyktes godt med å løse brøkoppgavene med ulike regneoperasjoner. Videre hadde det også sammenheng med hvordan de gjorde det på andre områder innenfor matematikk. Deres funn indikerte at kunnskapen om brøkstørrelser var mye mindre presis enn kunnskapen om hele tall helt opp til 8. trinn, og at det ikke er en kunnskap elevene tilegner seg automatisk. De mener at det at elevene bruker de erfaringene de har med hele tall når de skal arbeide med brøk («whole number bias»), kan gjøre det vanskelig å lære brøk. Likevel mener de at det også kan være nyttig å se på likhetene mellom hele tall og brøk, et eksempel er at både hele tall og brøk er mengder som kan organiseres på ei tallinje (Siegler et al., 2011).

3. Metode

I denne studien har jeg gjennomført aksjonsforskning på 8. trinn. Studien gikk over fire uker høsten 2022, og det ble gjennomført til sammen tre økter. I de to første øktene fikk elevene en oppgave som de arbeidet med i grupper på ca. tre elever, før vi gikk gjennom oppgaven og de ulike løsningene i plenum. I den tredje økta var oppgaven todelt. I den første delen av oppgaven fikk elevene presentert to løsningsforslag de skulle diskutere - en arealmodell og en lengdemodell (tallinje). I den andre delen av oppgaven skulle de selv løse en oppgave ved å bruke tallinjen. Jeg samarbeidet tett med matematikklæreren i klassen under gjennomføringen av studien. Vi observerte hver vår gruppe, og tok notater og lydopptak under observasjonene. I tillegg samlet vi inn det skriftlige elevarbeidet. Dermed hadde vi begge et godt utgangspunkt for å samarbeide om arbeidet videre.

I dette kapittelet vil jeg presentere teori om aksjonsforskning, som er det vitenskapelige forskningsdesignet jeg har valgt til studien. Jeg vil beskrive utvalget for studien, valg av metode for datainnsamling, samt analysemetode. Avslutningsvis vil jeg si noe om forskningsetikk i studien, samt vurdere studiens troverdighet.

3.1 Aksjonsforskning

Forskningsdesignet i denne studien er aksjonsforskning. Aksjonsforskere forsker sammen med læreren, og resultatene skal være til nytte for læreren (Tiller, 2006). Tripp (2005) sier:

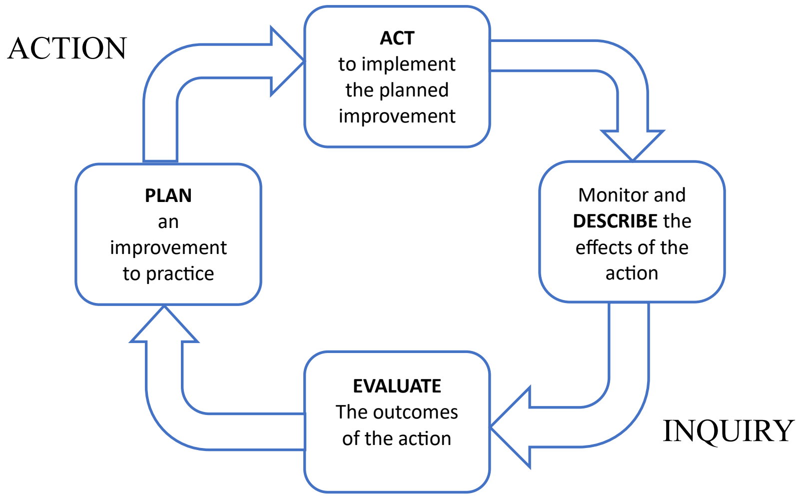
> (…) action research requires action in the fields of both practice and research, so to a greater or lesser extent, it will have characteristics of both routine practice and academic research. (s. 5)

Aksjonsforskning knytter altså praksis og forskning sammen, og forskningen har som mål å forbedre praksisen (Tripp, 2005). Kemmis (2009) hevder at når man gjennomfører aksjonsforskning er det med mål om å endre praksisen, forståelsen for praksisen og betingelsene for praksisen. Disse endringene henger tett sammen. Når du utfører en endring i praksis må du vite hva du vil oppnå, hvordan du gjør det og hvorfor du gjør det.

I aksjonsforskning skaper du en endring ved å gjennomføre aksjoner. Furu (2013) sier at ordet aksjon gjør at man tenker på at det skjer en aktiv handling. I aksjonsforskning skal forskeren ikke bare studere en situasjon, men i tillegg prøve å endre den (Furu, 2013). Tripp (2005) presenterer en modell for «action inquiry» (figur 5). Tripp (2005) mener at de fleste forbedringsprosesser følger samme syklus. Det skal planlegges en forbedring (*action*) i praksisen som man prøver ut (*act*). Hvilken effekt denne forbedringen har må kunne monitoreres og beskrives (*describe*), slik at en kan evaluere effekten (*evaluate*) og sette i gang med ny aksjon. Han sier samtidig at aksjonsforskning skiller seg fra andre typer intervensjonsforskning som følger samme syklusen, og definerer aksjonsforskning slik (Tripp, 2005):

> Action research is a form of action inquiry that employs recognised research techniques to inform the action taken to improve practice, and I would add that the research techniques should meet the criteria common to other kinds of academic research. (s. 4)

Tripp (2005) sier i sitatet at det i aksjonsforskning skal brukes vitenskapelige metoder for å forbedre praksis i klasserommet.



Figur 5: Modell for action inquiry (Tripp, 2005, s. 2, oversatt og tilpasset)

Aksjoner er med andre ord de endringene eller forbedringene i praksis som man gjør under aksjonsforskning. Tripp (2005) sier at aksjonene som igangsettes må passe til målet, praksisen, deltagerne og situasjonen. Når en aksjon er gjennomført, må man evaluere hvilken virkning aksjonen hadde, og hvilken ny endring en skal gjøre i praksis – altså hva den nye aksjonen skal være. For å kunne gjøre en god evaluering av effekten av aksjonen, er det viktig at man får en god beskrivelse av hva som skjer i praksis (Tripp, 2005).

I denne studien er aksjonene rettet mot oppgavene som elevene arbeidet med. Vi endret på oppgavene, og hadde som mål at oppgavene skulle få elevene til å bruke tallinjen i argumentasjonen. Vi gjennomførte først en kartlegging av nåsituasjonen, for å se hvordan elevene argumenterte rundt sine løsninger på divisjonsoppgaver med brøk. Kartleggingen ble evaluert, og den første aksjonen ble planlagt med utgangspunkt i funnene vi gjorde i kartleggingen.

Den første endringen, eller aksjonen, vi gjorde var å illustrere oppgavene med en tallinje som elevene skulle bruke for å løse oppgaven. Da vi prøvde det ut monitorerte vi det ved at både matematikklæreren i klassen og jeg observerte hver vår gruppe mens de arbeidet. Vi tok notater av observasjonene, i tillegg til at vi tok lydopptak og samlet inn skriftlig arbeid. Dette gav oss en beskrivelse av hvilken effekt aksjonene hadde, noe som igjen gjorde at vi kunne evaluere aksjonen og planlegge den neste aksjonen. En slik syklus med planlegging, aksjon med monitorering og evaluering har til hensikt å komme nærmere det målet man har satt seg for å forbedre praksis.

Hanson (2003, henvist til i Furu, 2013, s. 47) har beskrevet syv typiske kjennetegn ved aksjonsforskning: praktisk innretting, forandring, syklisk prosess, deltagelse, verdifellesskap mellom praktiker og forsker og helhetsforståelse av problem. I følgende punkter vil jeg sitere kjennetegnene, og etter hvert sitat beskriver jeg hvordan en kan se disse kjennetegnene i min studie:

- «*Praktisk innretting*. Aksjonsforskning engasjerer seg i «virkelige problem» i praksis»*:* I min studie tar jeg for meg en utfordring både matematikklæreren jeg samarbeider med, og jeg som ungdomsskolelærer opplever; brøk er vanskelig for elevene og divisjon av brøk er spesielt vanskelig.

- «*Forandring*. Forandring må ses på som en integrert del av forskningen, både som middel for å løse problemer, og til å få bedre kjennskap til problemet»: I min studie gjennomfører jeg aksjoner som skal få elevene til å bruke lengdemodellen i argumentasjonen sin for løsninger på divisjonsoppgaver med brøk. Det gjør vi fordi vi mener at det vil øke deres forståelse for brøk og divisjon av brøk. Samtidig gir en analyse av hvordan elevene bruker lengdemodellen argumentasjon sin, en bedre kjennskap til elevenes forståelse av brøk og divisjon av brøk.

- «*Syklisk prosess* […]»: Den sykliske prosessen i denne studien vil jeg komme nærmere inn på når jeg beskriver aksjonsforskningsprosessen. Et viktig prinsipp i denne sykliske prosessen er at det blir utført aksjoner som kan evalueres og være utgangspunkt for nye aksjoner. Målet er å få til en forbedring i praksisen.

- «*Deltagelse* […]»: Det er viktig at både læreren i klassen aksjonsforskningen foregår i og jeg som forsker er aktive deltagere i forskningen. Jeg planla og evaluerte øktene og oppgavene som ble gitt sammen med matematikklæreren i klassen. Han var også med på å observere elevenes arbeid. Jeg valgte å ta ut to grupper som ble observert mens de arbeidet med oppgavene. Matematikklæreren i klassen observerte den ene gruppa, og jeg observerte den andre gruppa. Dermed hadde vi begge forutsetning for å evaluere og planlegge aksjoner i fellesskap.

- «*Verdifellesskap mellom praktiker og forsker.* Tanken om verdimessige grunner er nært knyttet til det emansipatoriske kunnskapsideal»*:* Aksjonsforskningen skal være en prosess hvor praktikeren (i denne studien matematikklæreren) sammen med forskeren ser et endringspotensiale. Innsikten som forskningen gir, kommer gjennom en likeverdig samhandling og samarbeid, og skal kunne løfte praksisen.

- «*Helhetsforståelsen av problem.* Aksjonsforskning skal lede til både praktisk problemløsning og teoriutvikling»: I dette studiet var den praktiske problemløsningen å utvikle oppgaver som fikk elevene til å bruke tallinjen i argumentasjonen sin for løsninger på divisjonsoppgaver med brøk. Teoriutviklingen var å analysere hvordan elevene brukte tallinjen i argumentasjonen sin, og å se på hvilke utfordringer de da møtte.

Oppsummert foregår aksjonsforskning som et nært og likeverdig samarbeid mellom lærer og forsker. Målet er sammen å formulere et problem i praksisen, og oppnå ei endring i praksis gjennom aksjoner og evaluering av aksjonene.

3.2 Utvalg

Undersøkelsene ble gjennomført i en klasse med 28 elever på 8. trinn. I aksjonsforskningen har jeg samarbeidet nært med matematikklæreren i klassen, som jeg kaller Roy. Jeg har hatt god kjennskap til Roy og skolen over lengre tid, men elevene kjente jeg ikke.

Roy har vært lærerspesialist i matematikk på skolen hvor han underviser. Han er interessert i å utvikle matematikkfaget, og ønsket derfor å være med i studien. Dette var en forutsetning for at jeg skulle kunne drive med aksjonsforskning. Han har også undervist matematikk på alle trinn i grunnskolen, en erfaring som var nyttig når vi skulle evaluere og planlegge aksjoner.

Elevene var delt inn i grupper på hovedsakelig tre elever. Jeg gav oppgavene til alle elevene i klassen, men tok ut to grupper som ble observert av Roy og meg selv.

Alle elevene i klassen fikk tilbud om å delta i studien, og det var derfor viktig at alle elevene fikk arbeide med oppgavene. I hver økt løste alle gruppene en oppgave, og noterte på et felles A3 – ark. Praktisk lot det seg bare gjennomføre å observere to grupper.

Analysene jeg har gjort, og resultatet jeg presenterer, er basert på observasjoner fra den gruppa jeg observerte selv. Gruppa besto av de samme elevene i alle øktene. Jeg kaller disse elevene for Aksel, Bea og Chris.

3.3 Metode for datainnsamling

Metode for datainnsamling var observasjon og innsamling av skriftlig elevarbeid. To grupper med tre elever i hver gruppe ble observert. Vi observerte elevenes arbeid med brøkoppgaver, gitt i tre undervisningsøkter over fire uker. Jeg observerte den ene gruppa, og Roy observerte den andre. Jeg benyttet meg av lydopptak på begge gruppene for å dokumentere observasjonene, i tillegg til notater. Vi samlet også inn det skriftlige arbeidet til alle gruppene i klassen. Jeg hadde samtaler med Roy i forkant og etterkant av alle tre øktene som ble gjennomført. Disse samtalene har jeg lydopptak og notater fra.

Både Roy og jeg samtalte med elevene vi observerte underveis i arbeidet med oppgavene, for eksempel for å få de til å forklare hvordan de hadde tenkt, eller for minne de på oppgaveteksten. Dette er hva Cohen et al. (2018) kaller deltagende observasjon. Faren med deltagende observasjonen er at man kan stille spørsmål som leder elevene på rett vei i oppgaveløsningen. Jeg har vært nøye på å gjengi det jeg sier i analysen, slik at denne faktoren blir synlig og en del av analysen. Når det presenteres dialoger fra datamaterialet, så er replikkene fra «Observatør» mine egne, slik at rollen kommer tydelig fram.

Analysene og resultatet som presenteres i denne studien er utarbeidet fra datamaterialet til den gruppa jeg observerte selv. Dette datamaterialet består av til sammen ca. 70 minutt med lydopptak fra de tre øktene som ble gjennomført. Dette utgjorde 14 sider med transkripsjoner. Datamaterialet som ble analysert består også av til sammen fire A3 – ark med skriftlig arbeid fra denne gruppa, samt notater fra mine egne observasjoner av gruppa.

Jeg har også lyttet til lydopptakene av gruppa som ble observert av Roy, samt sett på de skriftlige arbeidene til hele klassen. Sammen med samtalene med Roy, ble dette brukt til å utvikle aksjonene som vi gjennomførte i studiet, og til å gjengi aksjonsforskningsprosessen korrekt. Det var viktig at også Roy kunne observere ei gruppe, slik at vi kunne evaluere og planlegge nye aksjoner sammen.

Datamaterialet til den gruppa som jeg selv observerte gav meg et rikt materiale til analysen. Det gav også et godt bilde på hvordan utviklingen var gjennom aksjonsforskningen, da det var de samme tre elevene jeg observerte i hver økt. Det var viktig at jeg kunne observere elevene, for å knytte det skriftlige arbeidet og elevene til lydopptakene. Det gjorde meg sikker på hvem som sa hva, og når de ulike delene av det skriftlige arbeidet ble produsert. Det gav meg også mulighet til å stille oppklarende spørsmål underveis.

3.4 Metode for analyse av datamaterialet

Braun og Clarke (2008) beskriver hvordan en ofte vil ha en kombinasjon av induktiv og deduktiv tilnærming i analyser:

> In reality, coding and analysis often uses a combination of both approaches. It is impossible to be purely inductive, as we always bring something to the data when we analyze it, and we rarely completely ignore the semantic content of the data when we code for a particular theoretical construct […]. (s. 58 – 59).

Jeg hadde bestemt kodene for de ulike delene av argumentasjonen ut fra Krummheuers (1995) argumentasjonsmodell, og dermed brukt en deduktiv form for analyse. Kodene jeg har benyttet meg av er konklusjon, data, garanti og backing. For å bruke disse kodene, måtte jeg bestemme meg for hva jeg skulle avgrense som en argumentasjon. Jeg brukte transkripsjonene fra den muntlige samtalen på gruppa og det skriftlige elevarbeidet sammen i analysen. Dermed kan de ulike delene av argumentasjonen være både muntlige og skriftlige, eller en kombinasjon.

Målet med aksjonsforskningen var å få elevene til å ta i bruk tallinjen, og teoriutviklingen var å se på hvordan de brukte tallinjen, og hvilke utfordringer de fikk da de tok den i bruk. Da de ikke tok i bruk tallinjen i utgangspunktet, begynte jeg å se etter hvilke andre representasjoner de brukte. Jeg vil derfor hevde at jeg også analyserte induktivt, ved at deler av kodene ikke var bestemt på forhånd. Jeg måtte finne ut hvordan jeg skulle definere disse underveis i arbeidet.

Braun og Clarke (2008) skriver om det som kalles tematisk analyse av datamateriale. De definerer det slik:

> TA is a method for systematically identifying, organizing, and offering insight into patterns of meaning (themes) across a data set. Through focusing on meaning across a data set, TA allows the researcher to see and make sense of collective or shared meanings and experiences. (s. 57)

En tematisk analyse er med andre ord en metode for å identifisere og organisere mønstre i datamateriale. Det hadde jeg behov for, selv om jeg i utgangspunktet hadde en deduktiv tilnærming til analysen av datamaterialet. Jeg ønsket å finne ut hvordan jeg skulle avgrense et argument, og hvordan jeg skulle vurdere hvilken representasjon som ble benyttet i argumentene. Jeg valgte dermed å bruke de seks fasene som Braun og Clarke beskriver en tematisk analyse består av (Braun & Clarke, 2008, s. 60 – 67). Jeg vil beskrive disse fasene i punktene under, og knytte de til det arbeidet som jeg gjorde med datamaterialet i denne studien:

1. I den første fasen skal man bli kjent med datamaterialet gjennom å lese, ta notater, lytte og tenke på hva datamaterialet betyr. Jeg startet rett etter datainnsamlingen på den første oppgaven med å lytte gjennom lydopptakene og ta notater. Jeg lyttet gjennom lydopptakene en gang, før jeg lyttet mens jeg noterte. Parallelt så jeg på elevenes svarark, samt notatene fra observasjonen. Dette gjorde jeg for at jeg skulle ha et bedre grunnlag for å evaluere og planlegge den første aksjonen. Dette mønsteret gjentok jeg gjennom hele datainnsamlingen. Etter hvert transkriberte jeg lydopptakene som jeg skulle bruke i analysen.
2. I den andre fasen skal man bestemme de første kodene. Dette er begynnelsen på analysen. Jeg så etter det jeg på forhånd hadde bestemt skulle være kodene – konklusjon, data, garanti og backing. Denne fasen måtte jeg komme tilbake til

flere ganger, for det er ikke var ikke enkelt å avgrense argumentene, og bestemme hva som skulle være hvilken del av argumentet.

3. I den tredje fasen skal man sortere datamaterialet etter tema. Tema skal knytte datamaterialet til forskningsspørsmålet. I denne fasen så jeg etter hvilke ulike representasjoner elevene brukte i argumentasjonen.
4. I den fjerde fasen skal man revurdere de mulige temaene. Fasen er en kvalitetssjekk, og jeg brukte mye tid i min studie på å bestemme hva som skulle avgrenses som en argumentasjon og finne ut hvilke representasjoner som ble brukt i hver argumentasjon.
5. I den femte fasen skal man definere og gi navn til tema. Jeg bestemte at en argumentasjon skulle sorteres under den skriftlige representasjonen som ble benyttet.
6. I den siste fasen skal rapporten skrives, og denne fasen ble startet underveis i analysen.

Jeg vil gå nærmere inn på hvordan jeg avklarte hva som var en argumentasjon, og hvordan jeg knytter representasjonene til argumentasjonen i delkapittelet hvor jeg omtaler analyseverktøyet.

3.5 Analyseverktøy

For å analysere hvordan elevene argumenterer har jeg brukt Krummheuers (1995) argumentasjonsmodell (figur 4). Modellen går ut på at en argumentasjon må inneholde data, konklusjon og garanti for at det skal være en fullstendig argumentasjon. I tillegg kan argumentasjonen inneholde en backing (Krummheuer, 1995). Jeg brukte transkripsjonene fra den muntlige samtalen på gruppa og det skriftlige elevarbeidet sammen i analysen. Dermed kan de ulike delene av argumentasjonen være både muntlige og skriftlige, eller en kombinasjon.

Da jeg analyserte datamaterialet, startet jeg med å lete etter konklusjoner. Konklusjonen er et synspunkt som den som ytrer det ønsker å overbevise andre om (Grepstad, 1997, s. 171). Datamaterialet mitt var elevenes arbeid med kontekstoppgaver med divisjon med brøk. Da elevene måtte gjøre noen beregninger, muntlige forklaringer eller lage modeller først, kom konklusjonen ofte et stykke ut i datamaterialet. I den første oppgaven skulle vi kartlegge hvilke representasjoner elevene brukte i argumentasjonen. I de to neste oppgavene var målet å få elevene til å ta i bruk tallinjen i argumentasjonen. Dersom elevene ønsket å bruke symbolspråk og gjøre beregninger før de konkluderte, ble de bedt om å tegne figurer (i kartleggingsoppgaven) eller ta i bruk tallinjen (i de to neste oppgavene). Som følge av dette kom elevene med flere konklusjoner til hver oppgave.

Da jeg hadde funnet konklusjonen, så jeg etter den informasjonen som støttet konklusjonen – data*.* Data er bakgrunnen for de vurderingene som blir gjort (Krummheuer, 1995). I denne studien hentet elevene stort sett ut data i oppgaven, som var en kontekstoppgave. Data fra oppgaven gav elevene informasjon som de kunne bruke for å konkludere. I noen tilfeller brukte elevene konklusjonen de hadde kommet med i en tidligere argumentasjon videre som data.

Videre så jeg etter noe som viste sammenhengen mellom data og konklusjonen – en garanti (Krummheuer, 1995). I denne studien har jeg sett etter garantien i det skriftlige arbeidet til elevene. Da de arbeidet i grupper, ble ofte den skriftlige garantien diskutert og uttrykt muntlig.

Til slutt så jeg etter noe som støttet opp om garantien, en backing (Krummheuer, 1995). I datamaterialet fant jeg ofte at backingen var underforstått, eller implisitt, som er begrepet jeg bruker.

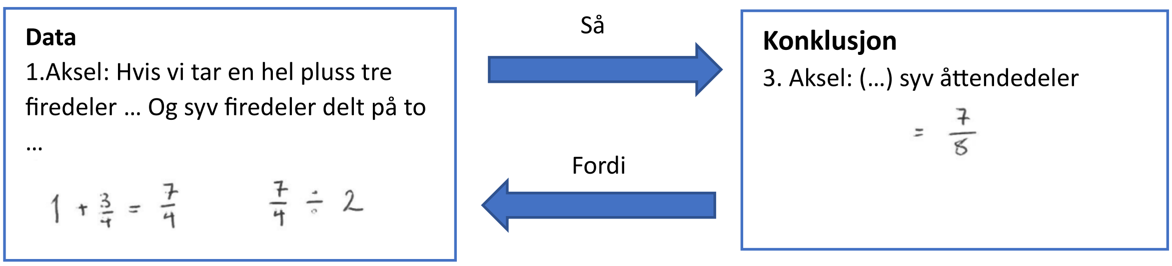
Jeg vil forklare hvordan jeg har brukt Krummheuers (1995) argumentasjonsmodell slik han gjør det, ved å sette en argumentasjon inn i den. Jeg har tatt et eksempel fra datamaterialet til denne studien. Elevene fikk følgende oppgave (oppgaveteksten er forenklet her):

> Ingrid og Edvart skal spise lunsj, og deler $1\frac{3}{4}$ sandwich mellom seg. Hvor mye får de hver?

Aksel kommer raskt med en respons på oppgaven:

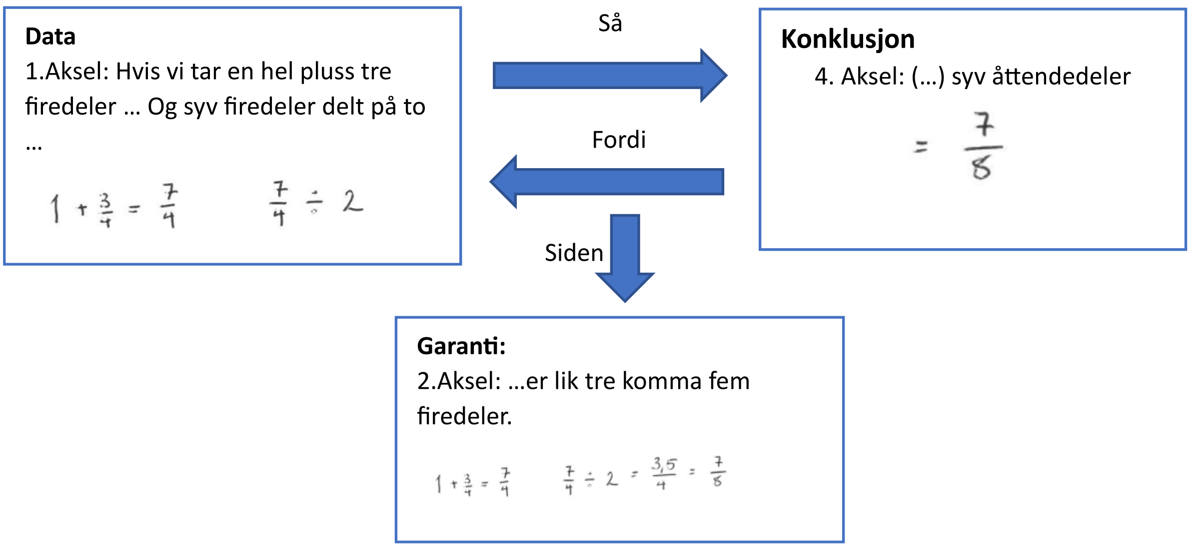
> Aksel: Hvis vi tar en hel pluss tre firedeler, da er det syv firedeler. Og syv firedeler delt på to er lik tre komma fem firedeler. Så kan vi, så vi må runde det opp til noe vi kan som vi kan ha, vi kan ha seks … nei … syv åttendedeler?

Krummheuer (1995) forklarer at data er det som en kan hente ut av oppgaven, bakgrunnen for de vurderingene som blir gjort, som en støtte for konklusjonen. Når elevene konkluderer, kan konklusjonen brukes som data for et nytt argument (Krummheuer, 1995). Jeg finner ut hva Aksel konkluderer med først, og trekker ut hvilken data som støtter den konklusjonen:



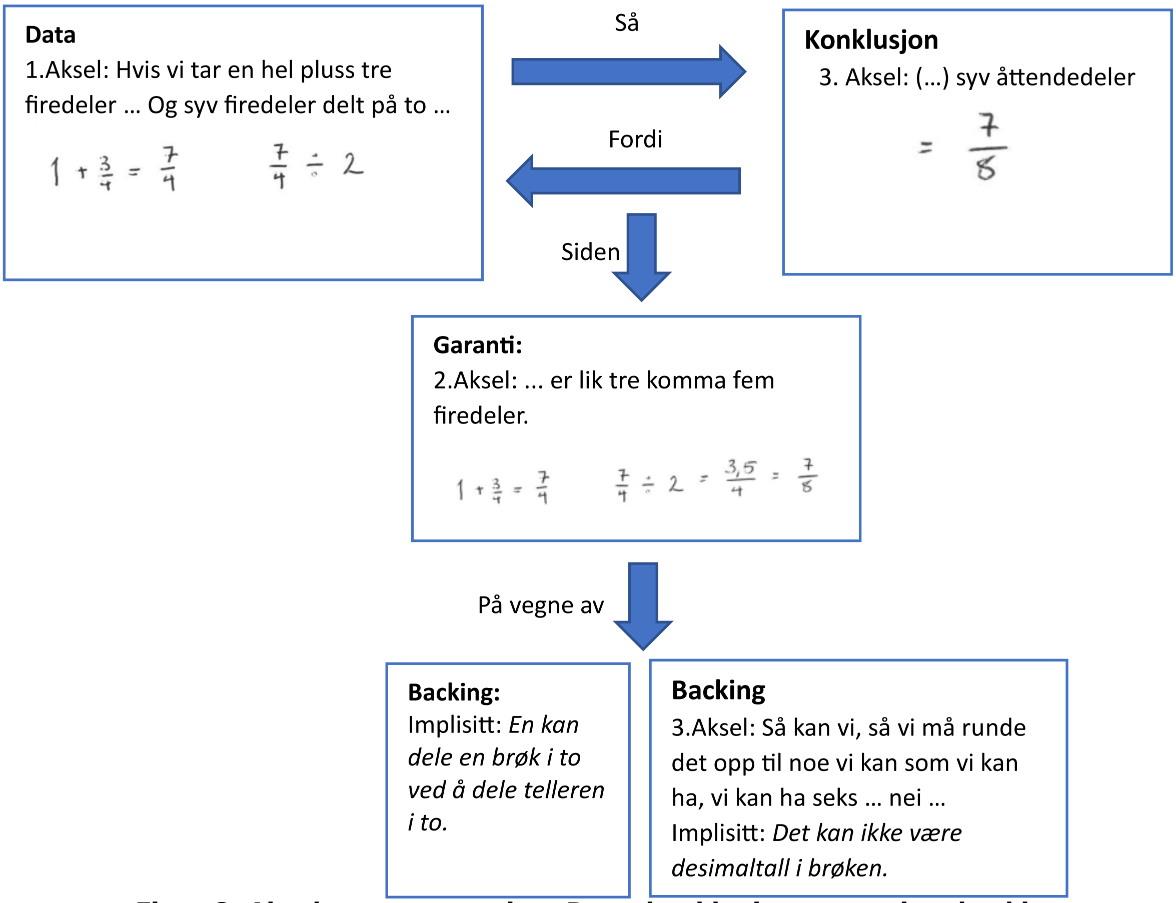
Figur 6: Aksels argumentasjon: Data og konklusjon

Her henter Aksel data ut av oppgaven, som han baserer sin konklusjon på. Samtidig som han snakker produserer han et skriftlig arbeid, og i dette tilfellet så har jeg valgt å definere deler av det skriftlige arbeidet han gjør som data, og deler som konklusjon. Garantien skal vise sammenhengen mellom konklusjonen som Aksel kommer med. Krummheuer (1995, s. 243) sier at det ikke generelt sett er mulig å skille mellom data og garantier, fordi de relaterer til hverandre. Krummheuer (1995) sier videre at data skal styrke denne argumentasjonen, mens en garanti kan styrke alle argument av samme type. Dermed velger jeg å presentere regnestykket som Aksel skriver ned både i data og garantien. Forskjellen i garantien er at han gjør noen beregninger. Å summere og dividere er regneoperasjonene som han benytter seg av, og regnestykket er en garanti for konklusjonen. I følge Singletary og Conner (2015) så er kalkulasjoner eller beregninger en typisk garanti fra elever som arbeider med matematiske problem. Jeg velger å sette en pil ned mot garantien, for å vise at det er noe som konklusjonen støtter seg til, en bro mellom data og konklusjon (Krummheuer, 1995).



Figur 7: Aksels argumentasjon: Data, konklusjon og garanti

Krummheuer (1995) kaller data, garanti og konklusjon kjernen i et argument. I tillegg til disse tre elementene, kan argumentasjonen inneholde et fjerde element, en backing (Krummheuer, 1995). Grepstad (1997) kaller backing for ryggdekking og sier at det er ytterligere dokumentasjon på gyldigheten i det generelle som presenteres i garantien. Toulmin (1969, sitert i Krummheuer, 1995, s. 243) sier backing er et uttrykk for «Why in genereal this warrant should be accepted as having authority». Svaret på hvorfor garantien generelt sett er gyldig er altså backingen. Jeg velger derfor å sette en pil fra garantien til backingen, og presenterer det slik i mitt eksempel:



Figur 8: Aksels argumentasjon: Data, konklusjon, garanti og backing

I dette eksempelet har jeg med to implisitte backinger. Det blir ikke uttalt, men jeg kan anta at det er backingen som ligger bak garantien. Aksel støtter sin konklusjon på kunnskap som er akseptert av han selv og de som lytter til argumentasjonen hans (Krummheuer 1995, s. 247). I dette tilfellet er det at en kan dividere en brøk i to ved å dele telleren i to, og at det ikke kan være desimaltall i brøken.

Aksels argumentasjon inneholder data, konklusjon og backing, og er en fullstendig argumentasjon ifølge Krummheuer (1995).

I tillegg til fullstendige argument som inneholder data og konklusjon, har jeg også analysert det jeg kaller ufullstendige argument. Disse mangler konklusjon, og i noen tilfeller data. Dette har jeg gjort fordi disse eksemplene viser utfordringer elevene møter når de skal gjøre omdannelser fra en representasjon til en annen. Jeg ser at når elevene møter disse utfordringene, så blir det ikke en fullstendig argumentasjon – elevene kommer ikke fram til en konklusjon.

Da jeg hadde analysert datamaterialet med Krummheuers (1995) argumentasjonsmodell, så jeg på hvilke representasjoner elevene hadde brukt i sin argumentasjon. De representasjonene jeg fant i datamaterialet, var muntlige og skriftlige forklaringer i symbolspråk og naturlig språk. I tillegg fant jeg de ikoniske representasjonene arealmodell og lengdemodell. I en argumentasjon ble det brukt noe som kan minne om en mengdemodell, men jeg har likevel sortert denne argumentasjonen under symbolsk representasjon. Jeg vil komme nærmere inn på hvorfor i analysen. Ut over det brukte ikke elevene mengdemodeller. I analysen vil jeg se på hvilke representasjoner elevene bevegde seg mellom i argumentasjonen, i forhold til Duvals representasjonsregistre (figur 4). Det gjør jeg for å finne ut hvilke utfordringer de møtte når de brukte tallinjen i argumentasjonen.

I resultatkapittelet velger jeg å starte presentasjonen av resultatet og analysen for hver oppgave med en tabell som oppsummerer argumentasjonene elevene kom med i den oppgaven, og plasserer hver argumentasjon innenfor en representasjon som de bruker. Jeg tar også med de ufullstendige argumentasjonene til elevene i denne oppsummeringa.

Representasjon	**Fullstendig argumentasjon**	**Ufullstendig argumentasjon**
Symbolsk		
Muntlig språk		
Ikonisk: arealmodell		
Ikonisk: lengdemodell		

Tabell 1: Tabell for oppsummering argumentasjoner til hver oppgave

Elevene benyttet seg av flere representasjoner i hver argumentasjon. De hentet data ut fra en skriftlig kontekstoppgave og de benyttet seg av muntlig språk, da dette var en gruppeoppgave. I analysen av elevenes argumentasjon, bestemte det skriftlige arbeidet de benyttet seg mest av hvilken representasjon jeg plasserte argumentasjonen under i tabellen. Unntaket var da det kun ble benyttet muntlig språk, da ble det plassert i den kategorien.

3.6 Forskningsetikk og behandling av personopplysninger

Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora sier noe om hvilke retningslinjer en forsker skal følge (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2023).

Et av punktene sier at forskere skal innhente tillatelse fra deltagerne. I forkant av datainnsamlingen fikk elevene i den aktuelle klassen et informasjonsskriv (vedlegg 1). Dette informerte om studiens formål og omfang, hvordan data skulle samles inn og behandles og hvordan samtykke skulle foregå. Det ble presisert at det var frivillig for elevene å delta i studien. Foresatte signerte skjemaet dersom de ønsket at deres barn skulle være med. Elevene fikk også muntlig informasjon om studien, og om muligheten til å trekke seg fra studien dersom de ikke selv ønsket å være med.

Som forsker har jeg taushetsplikt, og elevenes anonymitet skal ivaretas (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2023). Anonymiteten til elevene og matematikklæreren som deltok har jeg ivaretatt ved å oppgi fiktive navn. Jeg har også tegnet og skrevet alle de skriftlige besvarelsene på nytt, slik at de ikke kan gjenkjennes gjennom disse. Jeg har ikke oppgitt navn på skole, og datamaterialet er transkribert på bokmål.

Alt datamaterialet som er samlet inn, både lydopptak og skriftlig arbeide, skal lagres og deles forsvarlig (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2023). I og med at jeg har benyttet lydopptak, meldte jeg prosjektet inn til Sikt for godkjenning (vedlegg 2). Lydopptaket ble gjort med en diktafon som sendte lydopptaket direkte til nettskjema.no (Universitetet i Oslo, 2023), slik at det ble lagret forskriftsmessig.

3.7 Studiens troverdighet

Cohen et al. (2018) stiller spørsmålet «Kan vi tro på resultatet?» (s. 268, oversatt). De mener at svaret på det forteller oss om studiet er troverdig. Guba (1981, s. 79 - 81) presenterer fire hensyn som må tas i forhold til studiets troverdighet: kredibilitet, overførbarhet, consistancy og nøytralitet.

Kredibilitet er hvordan en kan se til at akkurat denne studien viser sannheten om det som ble undersøkt (Guba, 1981). Jeg har både tatt notater og lydopptak under observasjonene, samt samlet inn skriftlig materiale fra elevenes arbeid. Lydopptakene er transkribert. I analysen kunne jeg bruke notatene og det skriftlige arbeidet sammen med transkripsjonene for å sikre at resultatet ble riktig framstilt. Det har selvsagt vært nødvendig å gjøre et utvalg av datamaterialet i resultatkapittelet, men jeg har vært bevisst på at dette utvalget skal gjenspeile helheten.

Overførbarhet betyr at andre skal kunne utføre den samme studien i en lignende kontekst (Guba 1981). Jeg har beskrevet studiens utvalg og aksjonsforskningsprosessen grundig for å styrke overførbarheten.

Consistency forklarer Guba (1981) som hensynet til om studien ville vise det samme om en annen forsker gjorde studien i den samme gruppa. Jeg har beskrevet metoden i studien grundig. Jeg har lagt spesielt vekt på analyseverktøyet, slik at det kommer tydelig fram hvordan jeg har brukt argumentasjonsmodellen til Krummheuer i analysen, og hvordan jeg har vurdert hvilke representasjoner elevene har brukt.

Nøytralitet er hensynet til om de som utfører undersøkelsen er nøytrale (Guba, 1981). Jeg har vært deltagende observatør i studien. Dermed blir det viktig at lydopptakene ble transkribert korrekt, og at min rolle kommer tydelig fram i analysen. Jeg har latt Roy lese gjennom oppgaven, og på den måten sikret at aksjonsforskningsprosessen er riktig framstilt. Nøytraliteten kan også utfordres av at jeg kjenner godt til Roy og skolen. Samtidig er det en styrke i aksjonsforskningsprosessen. Her er det viktig å være bevisst at forskerrollen er litt annerledes i aksjonsforskning. Et av kjennetegnene på aksjonsforskning er at det skal være et nært og likeverdig samarbeid mellom forsker og praktiker. Fortsatt skal studien beskrives nøytralt og presist.

4. Aksjonsforskningsprosessen

I dette kapittelet vil jeg gå nærmere inn på aksjonsforskningsprosessen. Jeg vil starte med å beskrive hvordan planleggingen av aksjonsforskningsprosessen foregikk, før jeg forklarer hvordan oppgavene som ble gitt ble utformet, og hvordan aksjonene ble gjennomført.

4.1 Planlegging av aksjonsforskningsprosessen

I denne studien ser jeg på bruk av tallinjen i elevenes argumentasjon for løsninger av oppgaver med divisjon av brøk. Hypotese, mål og aksjoner ble planlagt i samarbeid med matematikklæreren i klassen som studien skulle foregikk i, Roy. Datainnsamlingen i klassen startet i november 2022. Da jeg startet med datainnsamlingen, hadde de akkurat hatt temaet brøk i matematikk. Elevene i klassen hadde gått på ulike barneskoler, så det er vanskelig å si noe om hvordan de har arbeidet med brøk før de begynte på ungdomsskolen.

Klassen brukte læreverket «Matemagisk 8» (Kongsnes & Wallace, 2020). Boka har følgende mål for temaet brøk:

- Regne med brøk i fire regnearter.
- Beskrive regneregler for brøk med variabler.
- Bruke primtallsfaktorisering for å finne fellesnevner.
- Utforske og forklare på ulike måter hvordan brøker multipliseres og divideres. (s. 46)

Boka har dermed som mål å utforske hvordan brøker divideres. De presenterer to måter å tenke divisjon på, målingsdivisjon og delingsdivisjon. Det er til sammen seks oppgaver om divisjon av brøk (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 55, 56 og 69). To av oppgavene og ett eksempel bruker lengdemodellen. De to oppgavene er kontekstoppgaver med lengder av stoff, hvor det er en tallinje som illustrasjon og målingsdivisjon (de skal f.eks. finne antall lengder stoff når det er 12 meter stoff og lengder på $\frac{1}{2}$ meter). Elevene hadde altså nylig arbeidet med divisjon av brøk og lengdemodellen, men med svært få oppgaver dette året, og oppgavene de hadde arbeidet med var oppgaver med målingsdivisjon. Dermed så vi at dette var et emne som vi med fordel kunne gå dypere inn i, da våre erfaringer er at brøk generelt, og divisjon av brøk spesielt, er vanskelig for mange elever å forstå.

Ma (2010) bekrefter at brøk er vanskelig for elever å forstå, og divisjon av brøk er den vanskeligste av regneartene (Ma, 2010). For å forstå divisjon med brøk må en ha matematikkforståelse på mange andre områder, for eksempel forståelse for hva en brøk er og hva en helhet er (Ma, 2010). God forståelse av brøk, forutsetter en god forståelse av alle aspektene ved brøk (Behr et al., 1983). Undersøkelser viser at elevene scorer dårligst på oppgaver med brøk som tallstørrelse (Charalambous og Pitta – Pantazi, 2007). Aspektet brøk som tallstørrelse er å kunne se brøk som et tall som kan settes på en tallinje.

Bruner (1961, henvist til i Elia og Philippou, 2004, s. 327) sier at læring skjer gjennom tre nivå, og elevene må kunne forestille seg noe i f.eks. en modell, før de kan arbeide med de matematiske symbolene. Bjerke et al. (2013) fant ut at elevene var «representasjonsfattige» i sitt arbeid med brøk, og at de i hovedsak brukte en arealmodell, selv om det ikke alltid var hensiktsmessig å bruke den. Behr et al. (1983) hevder at lengdemodeller og tallinjen er spesielt nyttige å bruke som modeller, spesielt når de er lengre enn en enhet. Oppsummert er det viktig at elevene bruker modeller for å utvikle forståelsen for aspektene ved brøk, og dermed også forståelse for divisjon av brøk. Aspektet brøk som tallstørrelse scorer elever dårlig på, og lengdemodeller trekkes fram som nyttige modeller for å utvikle dette aspektet, men de blir ikke så mye brukt. Selv om elevene i klassen hadde arbeidet med noen få oppgaver med lengdemodellen tallinje for kort tid siden, trodde vi ikke at de ville bruke tallinjen for å løse divisjonsoppgaver med brøk.

I følge Krummheuer (1995) er argumentasjon en del av læringsprosessen, og en nødvendighet for å lære matematikk. Han så at hos barn som løste matematiske problem, var argumentasjonen ofte en del av resonneringen rundt problemet. Ved å arbeide med kontekstoppgaver med divisjon av brøk i grupper, kan elevene argumentere for sine løsninger. Kontekstoppgaver inneholder et problem som er satt inn i en reell kontekst. Behr et al. (1983) sier at elever ofte beveger seg fra kontekstsituasjoner til andre representasjoner hvor de gjør en behandling av problemet i kontekstsituasjonen, før de beveger seg tilbake til kontekstsituasjonen igjen (figur 2). Målet med aksjonsforskningen ble derfor å få elevene til å ta i bruk tallinjen argumentasjonen i arbeidet med kontekstoppgaver med divisjon av brøk. Aksjonene ble rettet mot utformingen av oppgavene, for det hadde vært få oppgaver i emnet i læreboka. Teoriutviklingen i aksjonsforskningen ble å analysere hvordan elevene brukte tallinjen i argumentasjonen, og å se på hvilke utfordringer de møtte når de tok den i bruk.

4.2 Utforming av oppgaver

Utformingen av oppgavene startet før datainnsamlingen i klassen. Det ble gjennomført en kartlegging og to aksjoner. Resultatet på kartleggingsoppgaven påvirket utformingen av oppgaven som ble gitt i den første aksjonen. Etter dette tilpasset vi oppgavene til den andre aksjonen. Vi tok utgangspunkt i oppgaver som vi fant i Empson og Levi (2011) og Van de Walle (2020) og tilpasset dem for å oppnå målet med oppgavene – å få elevene til å bruke tallinjen i argumentasjonen.

4.2.1 Utforming av kartleggingsoppgaven

Målet med kartleggingen var å se hvordan elevene argumenterte rundt sine løsninger på oppgaver med divisjon av brøk, uten at det ble lagt noen føringer for hvordan de skulle løse oppgaven utover at de måtte lage en figur dersom de regnet ut svaret.

Oppgaven som ble gitt var det Empson og Levi (2011) kaller for «Equal sharing problems»:

> Ingrid og Edvart skal spise lunsj, og deler $1\,\frac{3}{4}$ sandwich mellom seg. Hvor mye får de hver?
>
> Vis hvordan dere tenker på arket dere får utdelt. Dersom dere regner det ut – lag figurer som viser hvordan dere har tenkt.

Oppgaven er fra Empson og Levi (2011, s. 31), og tilpasset ved å endre konteksten noe, samt presisere at elevene skal lage figurer som viser hvordan de har tenkt. Oppgaven inneholder det som kalles for et blanda tall, som er et helt tall sammen med en brøk. Det blanda tallet $1\,\frac{3}{4}$ er det samme som $\frac{7}{4}$, som blir kalt en uekte brøk.

Vi hadde en hypotese om at ingen av elevene ville bruke lengdemodeller i argumentasjonen. Vi tenkte også at det ville være mange elever som brukte standardalgoritmen i arbeidet med oppgaven, og derfor ba vi dem om å lage en figur som viste hvordan de har tenkt, slik at vi fikk se hvilken modell de da valgte.

«Equal sharing problems» er delingsdivisjon, og ikke målingsdivisjon, som var den type oppgaver elevene hadde brukt tallinjer til da de arbeidet med emnet brøk. Det er en mengde, eller en størrelse, som skal fordeles. Empson og Levi (2011, s.10) mener at fordelen med «Equal sharing problems» er at de kan tegnes og dermed gi elevene mentale modeller på brøk. De mener også det er gode oppgaver å diskutere i grupper. Dette var viktige kvaliteter ved kartleggingsoppgaven, da vi ønsket at elevene skulle tegne figurer og argumentere for løsningene ved hjelp av figurene.

Van de Walle et al. (2020, s. 437) mener at et blanda tall eller en brøk delt på et helt tall er steg to i progresjonen når en arbeider med divisjon av brøk, og det er det første steget som inneholder brøk i divisjonen. Jeg var usikker på om oppgaven ble for enkel for elevene da de nettopp hadde hatt om brøk og derunder divisjon av brøk, og gjorde en pilotundersøkelse i en av parallellklassene. Pilotundersøkelsen viste at flere av gruppene hadde utfordringer med å løse oppgaven. Et par av gruppene klarte å regne ut oppgaven ganske raskt, men fikk utfordringer da de blir bedt om å lage en figur som viste hvordan de hadde tenkt. Selv om elevene på 8. trinn nettopp hadde arbeidet med brøk og divisjon av brøk, var det altså mange av elevene som har utfordringer med denne kontekstoppgaven. Dermed landet vi på at oppgaven egnet seg godt for kartlegging av nåsituasjonen i klassen.

4.2.2 Utforming av oppgave til aksjon 1

Kartleggingen viste at ingen av gruppene brukte lengdemodeller i argumentasjonen sin. I planleggingen av den første aksjonen vurderte vi å introdusere konkreter som strips som lengdemodeller, men kom fram til at vi ønsket å bruke tallinje, da elevene gikk på 8. trinn og allerede hadde mange erfaringer med brøk som symbol. Tallinjen kombinerer det ikoniske og det symbolske og er ei rett linje med minst to punkt som representerer rasjonale tall (Bright et al., 1988; Witherspoon, 2019). Målet med aksjon 1 ble derfor å få elevene til å ta i bruk lengdemodellen tallinje i argumentasjonen.

Vi ønsket å bruke samme type oppgave som i kartleggingen, for å kunne se ei utvikling i hvordan elevene argumenterte. Ulempen med å bruke samme type oppgave er at elevene blir flinkere til å løse denne type oppgaver etter hvert, fordi de husker hva de har gjort tidligere. Det anså vi ikke som en utfordring da det enda ikke var noen elever som hadde brukt tallinjen, og målet var å få elevene til å ta den i bruk.

Vi illustrerte oppgaven med en tallinje som var delt inn i hele tall, og ba elevene vise svaret på den. Ved at elevene måtte vise svaret på tallinjen, kan vi si at bildet av den hadde en informativ funksjon – elevene måtte bruke bildet av tallinjen for å løse problemet (Elia og Phillipou, 2004). Tallinjen inneholdt de hele tallene, men var ikke delt inn utover det. Dermed hører teksten og tallinjen sammen og inneholder ikke overflødig informasjon, noe Dewolf et al. (2014) sier har betydning om den skal ha en positiv effekt.

Den nye oppgaven som ble utarbeidet ble gitt til elevene nøyaktig ei uke etter den første var gitt. Vi ønsket at elevene skulle se på oppgaven hver for seg først, med mål om at alle på gruppa skulle delta aktivt i diskusjonen. Her følger oppgaven som ble gitt til elevene i gjennomføring av aksjon 1:

Petter skal gå en tur på $3\frac{2}{3}$ km. Han vil ta seg en pause halvveis – hvor langt har han gått da?

Bruk tallinjen, og vis svaret på den. Dere må gjerne gjøre andre utregninger og tegninger også. Oppgi svaret i brøk.

Denne oppgaven ble laget med inspirasjon fra oppgaver i Van de Walle et al. (2020, s. 439). Tallinjen viser lengden Petter skal gå, og elevene kan bruke tallinja ved å først markere antall kilometer han skal gå, som er $3\frac{2}{3}$. Lengdemodellen har her en fordel ved at den presenterer enhetene på en sammenhengende linje, samt lar seg dele i mindre enheter. For å løse denne oppgaven på tallinjen kan elevene for eksempel bruke følgende strategi:

1. De kan markere tallet fire på linjen, og dele alle enhetene inn i tredeler, for så å markere hvor $3\frac{2}{3}$ befinner seg på linjen.
2. Da oppgaven spør hvor langt Petter har gått når han tar seg en pause halvveis, så må de dele lengden $3\frac{2}{3}$ i to. Elevene kan da telle hvor mange tredeler det er i $3\frac{2}{3}$ for å vurdere om de må dele inn tallinjen i mindre deler. Da vil de finne ut at $3\frac{2}{3}$ er $\frac{11}{3}$. Når vi bruker symboler kaller vi det å gjøre om fra blanda tall til uekte brøk (en brøk hvor telleren er større enn nevneren). Videre kan elevene dele hver tredel i to, og de vil da være sikker på at de har et antall deler som kan deles på to. Når vi bruker symboler, er det dette vi kaller å utvide brøken – å gjøre om fra tredeler til seksdeler.

Tidligere forskning viser at dette ikke er uproblematisk for elevene. Når elevene skal bruke tallinjer, kom Bright et al. (1988) fram til at elevene synes det er vanskelig å representere brøk på tallinjen. Tallinjer mellom 0 og 1 var lettere enn tallinjer mellom 0 og 2, og det var vanskeligere når de måtte dele tallinja opp på nytt (Bright et al., 1988). Når elevene i utgangspunktet ikke selv har valgt å bruke tallinja som modell, så er dette utfordringer som vi kan forvente at elevene møter.

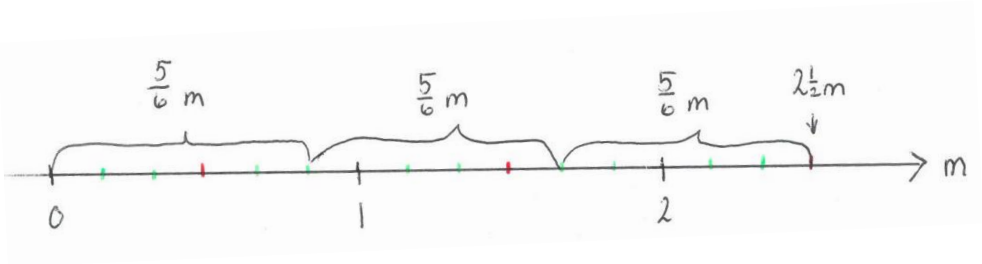
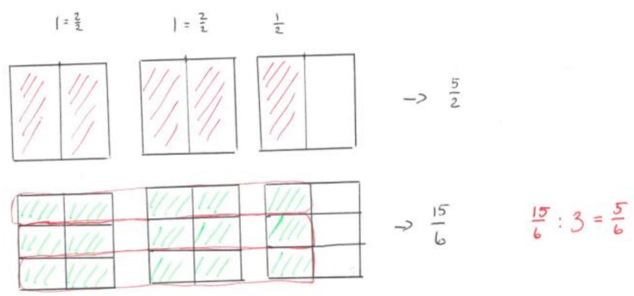
4.2.3 Utforming av oppgave til aksjon 2

Vi fikk elevene til å bruke tallinjen under aksjon 1, fordi oppgaven krevde det. Samtidig avdekket vi at det var utfordrende for elevene å gå fra naturlig språk og symbolspråk til å bruke tallinjen i argumentasjonen. Målet med utformingen av oppgavene i aksjon 2 var å hjelpe elevene med de utfordringene de hadde med å ta i bruk tallinjen, slik at de kunne bruke tallinjen i sin argumentasjon rundt løsninger på divisjonsoppgaver med brøk.

Elever kan bruke bilder i oppgaver som hjelp til å sette i gang med oppgaven, men de kan også bare observere at de er der, uten å benytte seg av de (Elia og Philippou, 2004). Elia og Philippou viser til Bishop (1989, henvist til i Elia & Philippou, s. 333) som sier at bruk av bilder eller diagrammer også kan ha negative effekter som leder til misforståelser. Vi ønsket at elevene skulle bruke bildene som hjelp til å løse oppgaven, og ville vise elevene hvordan de kunne bruke en tallinje i argumentasjon sin rundt oppgaven. Vi landet på å dele neste oppgave i to, slik at de først møtte en oppgave hvor det ble presentert to modeller som «elevsvar» - en arealmodell og en lengdemodell (tallinjen). Vi diskuterte om vi skulle presentere hele forklaringen på hvordan tallinjen ble brukt, men siden det ble mye tekst gav vi bare starten på forklaringen. Oppgaven til elevene ble da å fullføre forklaringene til løsningene og si noe om hvilken av de to løsningsmetodene de foretrakk.

I del to av oppgaven skulle elevene løse en oppgave med tallinjen, slik det ble illustrert i del en. Denne gangen brukte vi en tom tallinje, og vi ønsket med det å gjøre elevene mer bevisste på lengden de skulle fordele, ved å ikke gi noen føringer på hvor langt tallinjen strakk seg.

Følgende oppgave ble presentert for elevene en og en halv uke etter oppgave 2. Selve oppgaven om gavebåndet ble laget med inspirasjon fra oppgaver i Van de Walle et al. (2020, s. 439):

> Emma og Anna har løst følgende oppgave: Du har $2\frac{1}{2}$ meter med gavebånd som du skal bruke til å pakke inn tre like store gaver. Hvor mye gavebånd har du til hver gave?
>
> <u>Emmas metode:</u>
>
> 
>
>
> Emma begynner å forklare metoden sin slik: «Først laget jeg en tallinje som jeg tenkte kunne viser lengden på gavebåndet, og markerte 0, 1, 2 og $2\frac{1}{2}$. Det er ikke mulig å fordele på tre gaver når du deler opp i halvdeler, så jeg delte hver halvmeter i tre deler.»
>
> <u>Annas metode:</u>
>
> 
>
>
> Anna begynner å forklare metoden sin slik: «Først laget jeg tre hele kvadrat, og delte i halvdeler. Så fargela jeg to og en halv, men det kunne jeg ikke dele på tre, så jeg delte hver halvdel i tre deler.»
>
> **Fullfør Anna og Emma sine forklaringer. Hvorfor deler de hver halvdel i tre? Hvorfor blir det til slutt $\frac{5}{6}$ m? Diskuter med hverandre og skriv ned forklaringene deres ved siden av bildene på arket. Hvilken metode liker dere best? Hvorfor?**

Vi ønsket at elevene skulle knytte tallinjen til båndet som skulle deles, og se på den som et bilde på båndet. Ved at lengden på båndet og lengden på tallinja var nært knyttet sammen, så var målet at elevene skulle se at modellen var nyttig til denne oppgaven.

Videre forklaring på oppgaven kunne for eksempel være at om hun deler inn hver halvmeter i tre mindre like store deler, så ville hver pakke kunne få en tredelsbit av hver halvmeter. Siden hun har fem slike halvmetere så vil da hver pakke kunne få fem tredeler av en halvmeter. Siden en meter er dobbelt så lang som en halv meter, så må en meter da være delt inn i seks like store biter, så om båndet skal deles inn i tre like store deler må det være 5/6 meter langt.

I del 2 blir følgende oppgave gitt:

> Du har $5\frac{1}{3}$ meter med gavebånd som du skal bruke til å pakke inn fire like store gaver. Hvor mye gavebånd har du til hver gave?
>
> **Bruk metoden til Emma for å løse oppgaven.**

Oppgaven er hentet fra Van de Walle et al. (2020, s. 439), og oversatt og tilpasset med en tallinje og anmodning om å bruke Emmas metode. For å løse denne oppgaven på tallinjen kan elevene for eksempel bruke samme strategi som i oppgaven i den første aksjonen, eller som forklart i del en av denne oppgaven. Denne oppgaven skiller seg ut fra den første aksjonen ved at det ikke er markert noen tall på tallinjen, så elevene må gjøre all inndelingen selv.

4.3 Gjennomføring av aksjonene

Før oppstart av datainnsamlingen ble elevene delt i grupper på ca. tre elever. Disse gruppene beholdt de i arbeidet med alle oppgavene. To av gruppene ble observert under arbeidet, en av Roy og en av meg. De resterende gruppene arbeidet med samme oppgave sammen med en lærer. Elevene fikk utlevert alle oppgavene på et A3 – ark som de også skulle notere på.

Dato	**Oppgave**	**Aksjon**	**Organisering**
21.11.23	«Sandwichproblemet»	Kartlegging	Oppgaven ble gjennomgått før elevene arbeidet med oppgaven i gruppene i ca. 15 minutt. Etterpå ble oppgaven gjennomgått i plenum, ved at gruppene forklarte hvordan de hadde løst oppgaven.
28.11.23	«Turen»	Aksjon 1	Elevene fikk presentert oppgaven i plenum, og fikk ca. 5 minutt til å arbeide oppgaven hver for seg før de møttes i gruppene. Elevene arbeidet med oppgaven i gruppene i ca. 15 minutt, før den ble gjennomgått i plenum.
7.12.23	«Gavebåndet»	Aksjon 2	Denne oppgaven var todelt. Elevene fikk presentert oppgaven i plenum, og fikk ca. 5 minutt til å arbeide oppgaven hver for seg før de møttes i gruppene. De arbeidet med del en av oppgaven i ca. 20 minutt, og del to av oppgaven i ca. 20 minutt.

Tabell 2: Oversikt over oppgaver som ble gitt i aksjonsforskningsprosessen

I forkant av kartleggingen planla Roy og jeg de første oppgaven i fellesskap. Vi evaluerte kartleggingen i etterkant, og planla den første aksjonen. Etter den første aksjonen evaluerte vi og planla den andre aksjonen. Vi fulgte dermed syklusen som Tripp (2003) beskriver med planlegging av forbedring i praksisen, utprøving, evaluering og ny aksjon (figur 5).

5. Resultat og analyse

I dette kapittelet vil jeg legge fram resultatet og analysen av kartleggingen og de to aksjonene vi gjennomførte i aksjonsforskningsprosessen. Jeg starter hvert delkapittel med målet med oppgaven som ble gitt og en kort presentasjon av oppgaven. Videre har jeg en tabell med oversikt over hvilke representasjoner som ble brukt i argumentasjonene rundt oppgaven, før selve analysen blir presentert. Jeg har satt argumentasjonene inn i Krummheuer (1995) sin argumentasjonsmodell. Ifølge den modellen må konklusjon, data og garanti være til stede for at det skal være en argumentasjon (Krummheuer, 1995). Der hvor elevene har begynt ei tankerekke uten å hente ut data, eller kommer til en konklusjon, har jeg også valgt å sette det inn i Krummheuers (1995) modell, da det viser hvor elevene møtte utfordringer. Analysen av kartleggingen viser elevenes argumentasjon før vi gjennomførte aksjonene. Analysen av de to aksjonene viser elevenes argumentasjon når de skulle bruke tallinjen. Til slutt i kapittelet vil jeg oppsummere resultatet av aksjonene som ble gjennomført.

5.1 Resultat og analyse av kartleggingen

Målet med kartleggingsoppgaven var å finne ut hvordan elevene argumenterte i arbeidet med en kontekstoppgave der de skulle dividere en brøk med et helt tall. Vår hypotese var at de ikke ville bruke lengdemodeller i argumentasjonene.

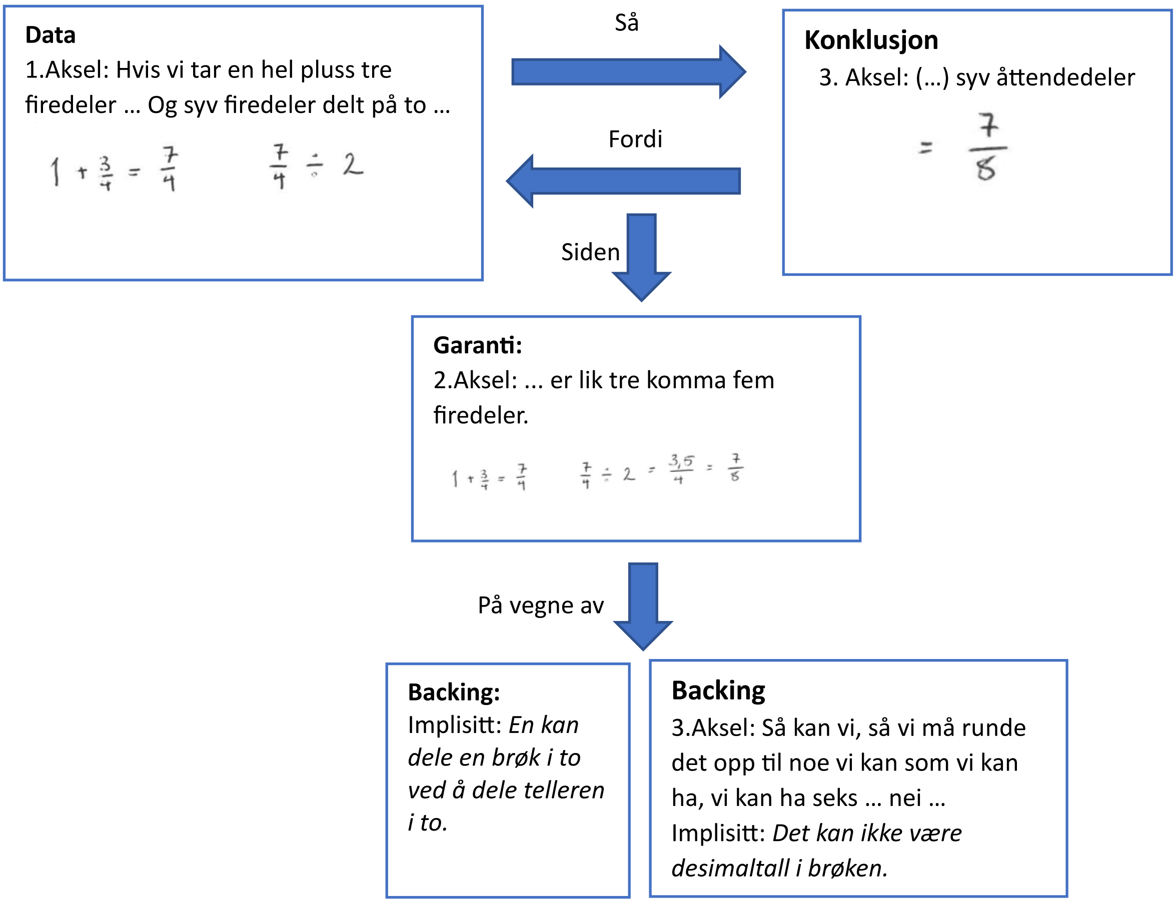
Elevene fikk utdelt kartleggingsoppgaven om «Sandwichen». I oppgaven skulle to personer fordele $1\frac{3}{4}$ sandwich mellom seg, og elevene skulle finne ut hvor mye de fikk hver. Den eneste føringen elevene fikk for hvordan de skulle løse oppgaven var at de skulle tegne en figur dersom de regnet den ut.

Tabell 2 viser en oversikt over hvilke representasjoner gruppa som ble analysert brukte i argumentasjonene rundt oppgaven. Elevene brukte ikke lengdemodeller i argumentasjonene. Elevene hadde fire fullstendige argumentasjoner og en ufullstendig argumentasjon da de arbeidet med oppgaven.

Representasjon	**Fullstendig argumentasjon**	**Ufullstendig argumentasjon**
Symbolsk	3	0
Muntlig språk	0	0
Ikonisk: arealmodell	1	1
Ikonisk: lengdemodell	0	0

Tabell 3: Oversikt over argumentasjoner i oppgave 1

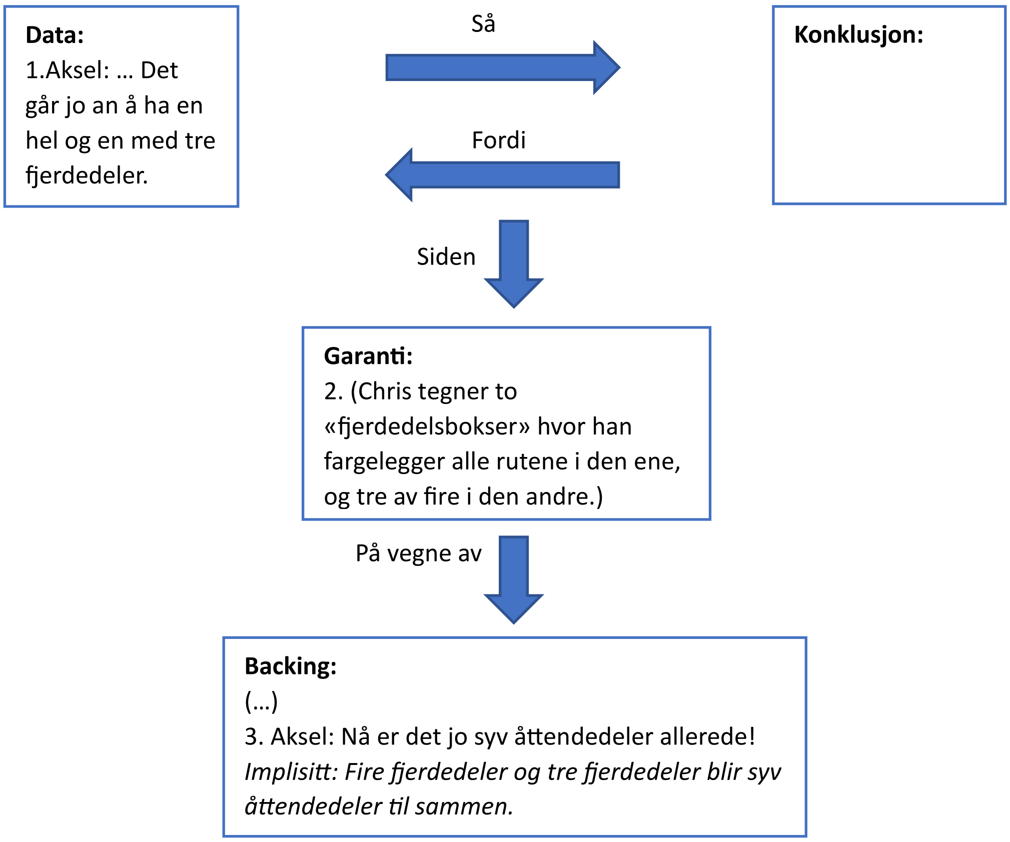
Figur 3 viser hvordan Aksel brukte symbolspråk i argumentasjonen. Aksel hentet ut data fra oppgaven og satte opp et regnestykke som han forventet ville gi det riktige svaret. Regnestykket har jeg satt opp som garanti for konklusjonen han kom med, og backingen for regnestykket han gjorde var at han kan dele brøken i to ved å dele telleren i to. Da Aksel hadde gjort det, sa han at han måtte runde opp $\frac{3{,}5}{4}$ til noe «vi kan ha». Dermed var det også en implisitt backing at han ikke kunne ha desimaltall i brøken. Med utgangspunkt i Krummheuers argumentasjonsmodell (1995), så kan Aksels argumentasjon framstilles slik (figur 9):



Figur 9: Sandwichproblemet – utregning med symboler 1

Aksel argumenterer ved å bruke symbolspråk ifølge Duvals representasjonsmodell (figur 4). Det er en fullstendig argumentasjon da eleven henter ut data fra oppgaven, gjør beregninger basert på en generelt akseptert kunnskap og konkluderer ut fra det. Det oppstår ingen problem for Aksel når han skal gå fra et naturlig skriftlig språk i oppgaveteksten, til symbolspråk når han gjør utregninger, selv om han gjør det Duval kaller en omdannnelse når han beveger seg mellom disse representasjonene (figur 4). Begge representasjonene viser språklige operasjoner (Duval,2006). Aksel bruker symbolspråk både når han henter ut data, ved at han gjør kontekstoppgaven om til et symbolspråk, i garantien, ved at han gjør beregninger med symboler, og i konklusjonen, ved at han konkluderer med symboler. Etter at han har oversatt fra naturlig skriftlig språk til symbolspråk, gjør han behandlinger i samme representasjon. Det han ikke gjør av seg selv, er å gjøre om symbolene i konklusjonen - svaret $\frac{7}{8}$ blir stående uten at han knytter det tilbake til konteksten med naturlig språk, ved å for eksempel si at «de får $\frac{7}{8}$ sandwich hver».

Figur 10 viser at Aksel og Chris startet opp på en arealmodell. Det er ikke en argumentasjon ifølge Krummheuer (1995), fordi de kom ikke fram til en konklusjon. I oppgaveteksten sto det at de skulle lage en figur som viste hvordan de hadde tenkt, og lærer ba elevene om å gjøre dette. På spørsmål fra Aksel om de skulle tegne «firkant eller runding», begynte de på en arealmodell. De tegnet to kvadrat inndelt i fire deler, og skraverte alle delene i det ene, og tre av delene i det andre. Agumentasjonen rundt denne modellen stopper opp og de visket den ut. Chris og Aksel var usikre på hvordan de skulle gå videre på tegningen. Aksel påpekte at det allerede er syv åttendedeler i de to boksene, og selv om Chris sier at det er syv firedeler, så visker de ut. Backingen, som Aksel støttet garantien på, er den gale oppfatningen av at $\frac{4}{4}$ og $\frac{3}{4}$ til sammen blir $\frac{7}{8}$ ved at tellerne adderes med hverandre og nevnerne adderes med hverandre. Jeg har satt det opp etter Krummheuers (1995) modell (figur 10).



Figur 10: Sandwichproblemet – arealmodell 1

Elevene bytter her representasjonsform fra naturlig språk og symbolspråk, til en ikonisk representasjon. Den ikoniske representasjonen er en arealmodell. Da elevene tegnet denne modellen og fikk et bilde på $1\frac{3}{4}$, eller $\frac{4}{4}$ og $\frac{3}{4}$ som tegningen viser, ble Aksel utfordret. For ham representerte bildet $\frac{7}{8}$. Da de allerede hadde regnet ut at det skulle være svaret, så ble det en konflikt mellom det de hadde regnet ut og det de så på bildet. Omdannelsen fra en språklig operasjon til en visuell operasjon blir problematisk. Arealmodellen er en diskret modell, og det at de måtte tegne to kvadrat for å få mer enn en enhet skapte forvirring. Dermed kan det tenkes at dersom de hadde vært mer øvd i å bruke lengdemodellen, som er en kontinuerlig modell, så ville det vært en bedre modell i dette tilfellet.

Figur 11 viser at elevene brukte noe som kan minne om en mengdemodell i argumentasjonen. I argumentasjonen var backingen at «rundinger» kan brukes i en figur for å vise hvordan de hadde tenkt. De startet med å si at $\frac{3}{4}$ og $\frac{4}{4}$ må bli $\frac{7}{8}$, men avklarte endelig at det er $\frac{7}{4}$, og tok med seg som backing videre. De hentet ikke ut ny data i denne argumentasjonen, men brukte konklusjonen som de kom fram til i figur 9 videre som data. Krummheuer (1995) sier at data må være uttrykt i en argumentasjon. Selv om elevene ikke trekker linjene til det de har skrevet ned tidligere, så er det tydelig at det bruker det videre - beregningene var de samme, med «rundinger» som symbol i stedet for tall.

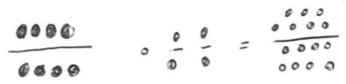
Data:

$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ $\quad \frac{7}{4} \div 2 = \frac{3,5}{4} = \frac{7}{8}$

Fordi

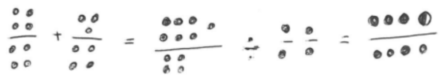
Så

Konklusjon:
2.Chris: Tre firedeler.
Aksel: Tre komma fem firedeler, ja.
Aksel: En to tre også en halv.
Chris: Halv runding.
(...)
Aksel: Det er sånn to hele, som blir to. Så det er 3,5 fjerdedeler ganger to som blir fire fem seks syv åtte, det skal være syv åttendedeler nå.



Siden

Garanti



På vegne av

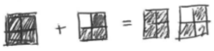
Backing
1.Chris: Hva om vi tegner med rundinger? Kan du ta liksom? Rundinger, så tar du en strek og syv rundinger over, strek og fire rundinger under ...
Chris: Hæ? En to tre fire fem seks syv ... (mumling) to tre, og da blir det syv åttendedeler, nei ...
Aksel: Tre ... syv firendedeler
Chris: Delt på ... skal vi se ... to ... en hel pluss tre fjerdedeler er lik syv fjerdedeler ...
(...)
Implisitt: Det kan brukes «rundinger» i stedet for tall, og det vil være en figur som viser hvordan vi har tenkt.

Figur 11: Sandwichproblemet – utregning med symboler 2

Jeg har tatt med denne argumentasjonen som argumentasjon hvor de bruker symbolspråk, selv om den kan minne om en mengdemodell. Den eneste forskjellen fra da de regnet ut er at de bruker «rundinger» i stedet for tall. De kommer fram til samme konklusjon som da de regnet ut, og bruker «tegningen» som garanti for konklusjonen, samt konklusjon. Det viser igjen at det var vanskelig for elevene å gjøre omdannelser som krever at de går fra en representasjon med språklig operasjon, til en representasjon som med operasjon. De henter ikke dataen ut fra oppgaven, og presenterer den ikonisk, men bruker symbolene som data, og lager en figur ut fra det.

Figur 12 viser at elevene etter hvert fikk til å bruke en arealmodell i argumentasjonen. De tegnet og observatøren satte i gang argumentasjonen ved å be de forklare tegningen. Når backingen var at $\frac{3}{4}$ og $\frac{4}{4}$ blir $\frac{7}{4}$, kom de videre i argumentasjonen. Igjen viste de til regnestykket som de opprinnelig regnet ut (punkt 3 i figur 12). Denne gangen brukte de det som garanti, da det var deres link mellom oppgaven som de hadde hentet data fra, og konklusjonen. Arealmodellen viser konklusjonen, og på spørsmål om hva den viser oppgir de svaret i desimaltall.

Data



2. Observatør: Ja, syv fjerdedeler har du der. Og så, hva er det dere skal gjøre – hva er det oppgaven ber om?
Aksel: Finne ut hvor mye de får hver av en hel og tre fjerdedeler.
Observatør: Av hva – hva er det du skal fordele?
Aksel: En sandwich på to.

Fordi

Så

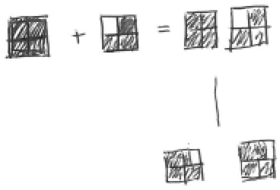
Konklusjon

(…)
4. Aksel: Vi har tre …
Chris: Null komma åtte syv fem.

Siden

Garanti
3. Aksel: Vi … først tok vi og plusset en hel og tre fjerdedeler, som er syv fjerdedeler. Og så delte vi *tre fjerdedeler (mener nok syv fjerdedeler)* på to, også fikk vi tre komma fem fjerdedeler. Også ganget vi tre komma fem fjerdedeler med to.
Observatør: Enn hvis dere tenker at det er to sandwicher dere har fordelt? Hvordan skulle dere gjort det dersom dere skulle delt det på to? (…)
Aksel: Dele den siste ruta? Sånn setter vi streken der, sånn skal jeg vise deg.
Observatør: Ja.
Aksel: Hvis den … Hvis jeg får en hel sånn halv rute …
Observatør: Okei …
Aksel: … også er det to av den ruta.

Garanti



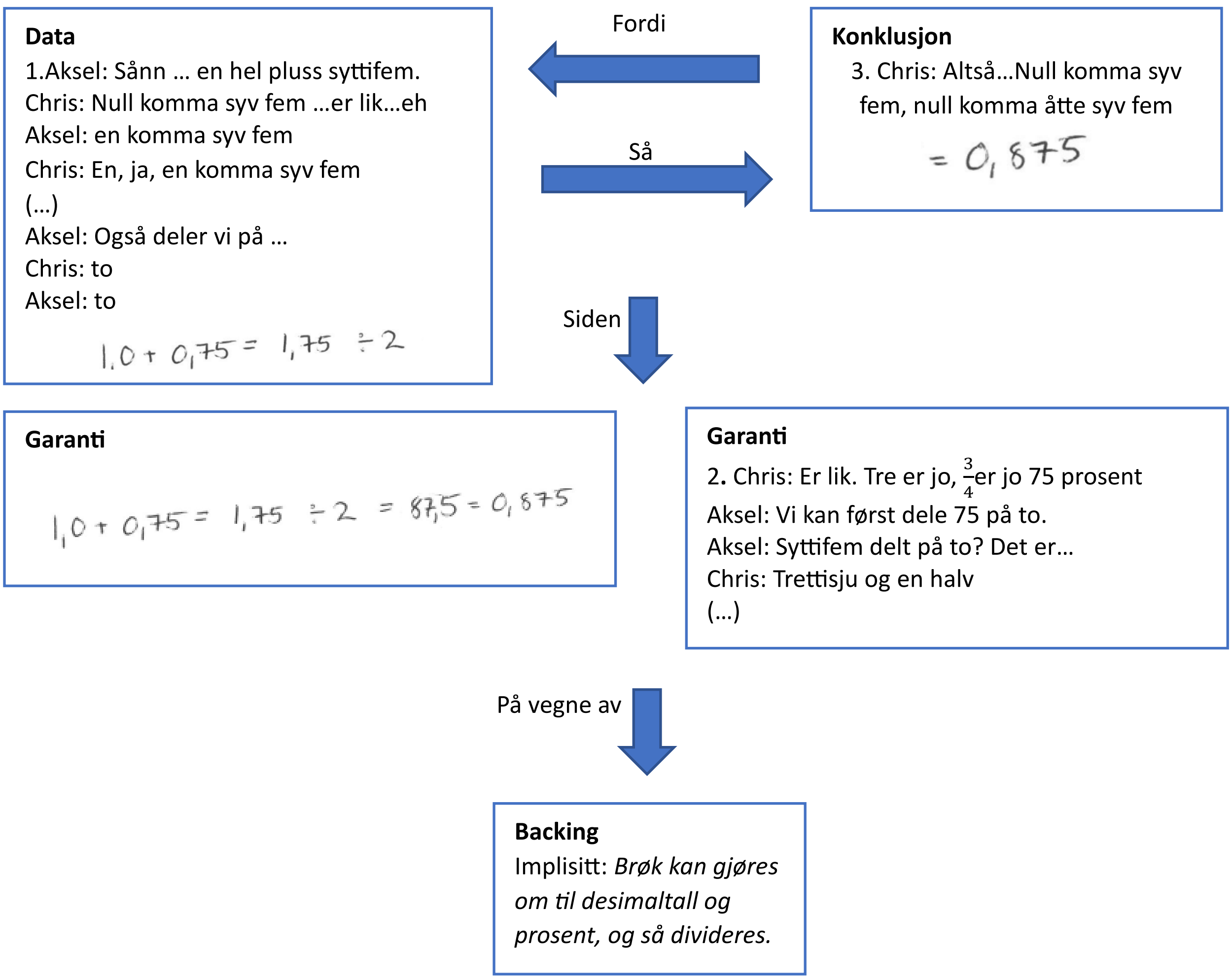
På vegne av

Backing
1.Observatør: (…) Hva har du tegnet der?
Aksel: Eh, en hel pluss tre fjerdedeler …
Observatør: Ja?
Aksel: … er lik … eh … ja – syv fjerdedeler.
Implisitt: En arealmodell kan brukes som figur for å vise hvordan vi har tenkt. En hel og tre fjerdedeler blir syv fjerdedeler.

Figur 12: Sandwichproblemet – arealmodell 2

Her henter Aksel data ut fra oppgaven, og bruker en arealmodell for å representere denne dataen. Dermed gjør han en omdannelse fra det naturlige skriftlige språket oppgaven er gitt i, til den ikoniske representasjonen arealmodell. De konkluderer med en arealmodell som garanti, med noen støttespørsmål fra observatøren for å få fram forklaringene rundt denne. Dermed bruker de en ikonisk representasjon argumentasjonen. Denne gangen kommer de fram til en arealmodell som viste $\frac{3,5}{4}$ to ganger, og Aksel sier «også ganget vi tre komma fem firedeler med to». Arealmodellen deres viser altså ikke $\frac{7}{8}$, men to ganger $\frac{3,5}{4}$. Chris avslutter med å gjøre det om til desimaltall - «null komma åtte syv fem». De bruker arealmodellen i alle delene av argumentasjonen, og i konklusjonen så bruker de symbolspråket desimaltall for å fortelle hva arealmodellen viser.

Figur 13 viser at Aksel og Chris bruker symboler i argumentasjonen. På spørsmål om de hadde flere måter å løse oppgaven på, hentet Aksel raskt ut data fra kontekstoppgaven, og gjorde brøken om til desimaltall. Dermed var backingen at brøk kan gjøres om til desimaltall. De skriftlige utregningene var garanti for konklusjonen, samt diskusjonene rundt hvordan de skulle dividere 1,75 med to.



Figur 13: Sandwichproblemet – utregning med symboler 3

Igjen er representasjonsformen symbolspråk, og symbolspråket brukes både som representasjon for dataen som blir hentet ut av oppgaven, og som garanti for konklusjonen. Chris viser at han behersker symbolspråk når han argumenterer i arbeidet med divisjonsoppgaver med brøk – han omdanner fra det naturlige skriftlige språket som oppgaven er gitt i til symbolspråket desimaltall.

Oppsummert viser analysen at elevene i arbeidet med denne oppgaven ikke argumenterte ved å bruke lengdemodeller. De starte opp og avslutter med å bruke symbolspråk. Når de blir bedt om å lage en figur, forsøker de seg først på en arealmodell, før de lager en modell som kan minne om en mengdemodell. Denne modellen er egentlig en utregning hvor de bruker rundinger i stedet for tall, noe som kan sammenlignes med å tegne for eksempel tre streker for tallet 3. Elevenes utfordringer oppstår når de skal omdanne skriftlig naturlig språk og symbolspråk til en ikonisk representasjon – når de skal bytte fra å bruke språklige operasjoner i sin representasjon til visuelle operasjoner i sin representasjon.

5.2 Resultat og analyse av aksjon 1

Da kartlegging av nåtid var gjennomført, var målet videre å utvikle en oppgave som gav ønsket effekt –at elevene skulle argumentere ved å bruke tallinjen.

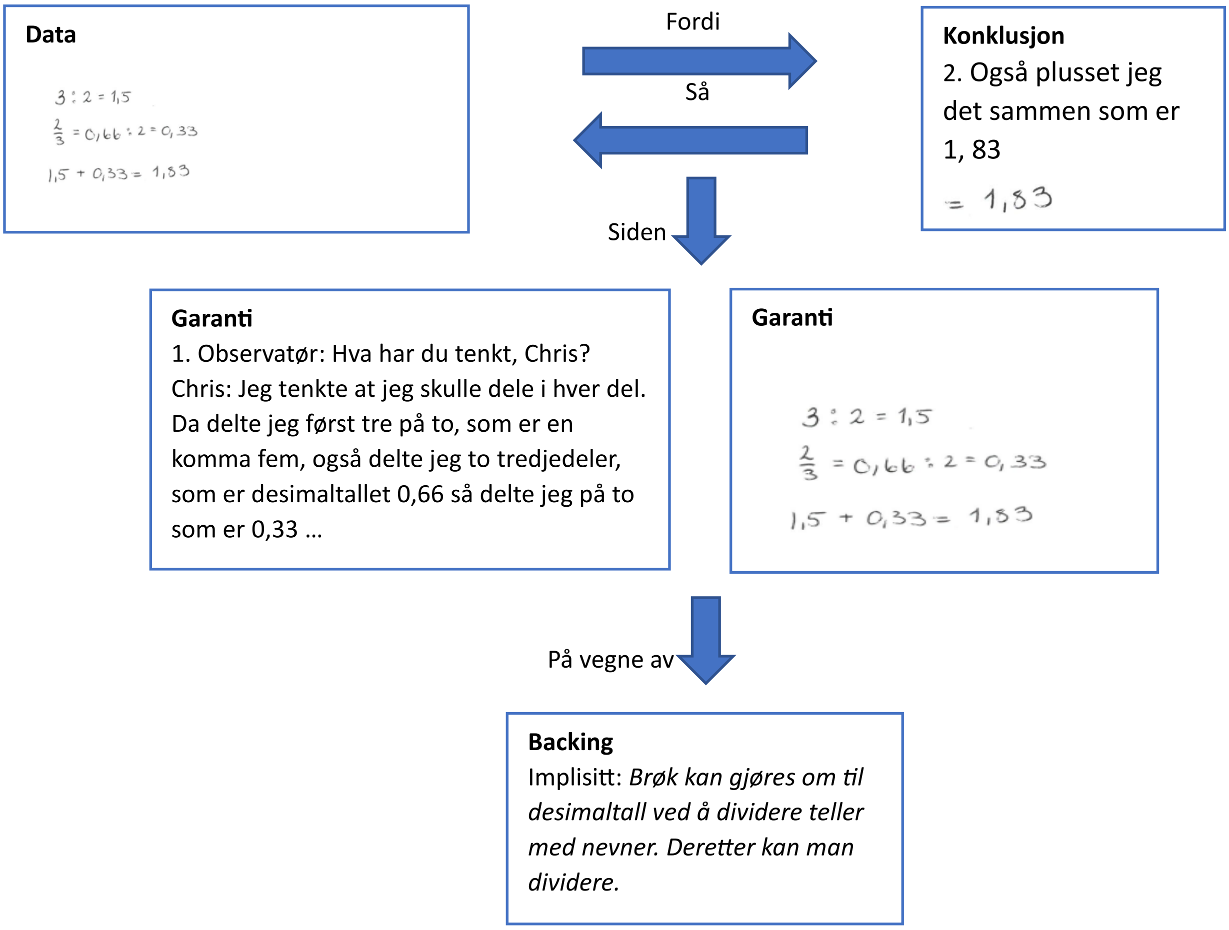
I aksjon 1 får elevene oppgaven «Turen». De skal finne ut hvor langt Peter har gått når han tar seg en pause halvveis i en tur på $3\frac{2}{43}$ km. Oppgaven inneholder en tallinje, og elevene blir bedt om å bruke den. Tallinja er markert med tallene 0, 1, 2 og 3.

Tabell 3 viser en oversikt over hvilke representasjoner gruppa som ble analysert brukte i argumentasjonene rundt oppgaven. Elevene har fått forberedelsestid, og da de skal presentere hva de har tenkt så langt for gruppa, har både Chris og Bea begynt med utregninger, og presenterer det de har tenkt. Aksel fikk de etter hvert til å bruke tallinjen, slik at de til slutt argumenterer ved hjelp av den.

Representasjonsform	**Fullstendig argumentasjon**	**Ufullstendig argumentasjon**
Symbolsk	1	0
Muntlig språk	0	1
Ikonisk: arealmodell	0	0
Ikonisk: lengdemodell	2	1

Tabell 4: Oversikt over argumentasjoner i oppgave 2

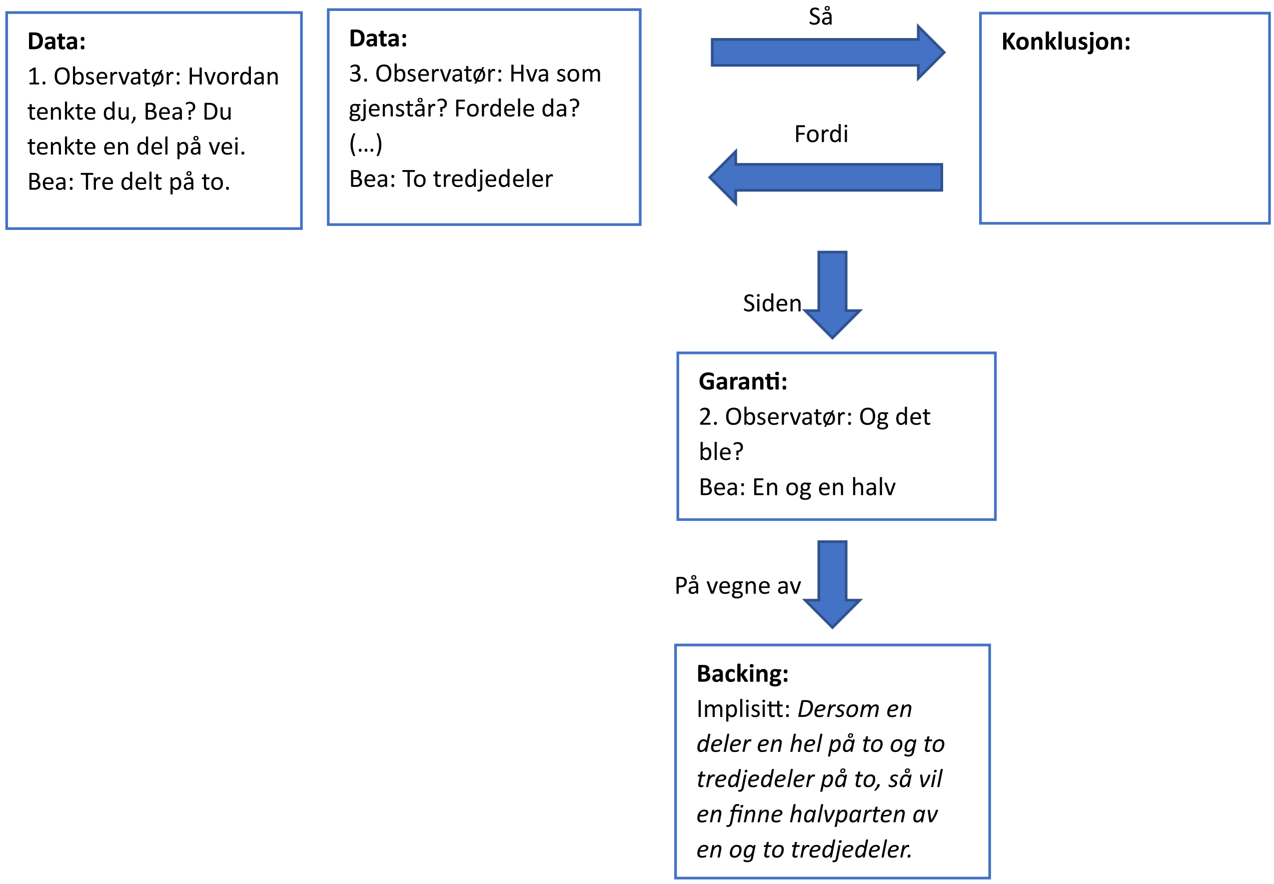
Figur 14 viser at Chris bruker symboler i argumentasjonen. De skriftlige utregningene hans fungerte både som data og som garanti, da han ikke muntlig sa noe om hvilke data han hadde hentet ut av oppgaven, men forklarte først hvilke beregninger som støttet opp om konklusjonen. Dette er garantien i argumentasjonen. På spørsmål fra observatøren skrev han ned beregningene, og derunder også data. Chris backing var at brøk kan gjøres om til desimaltall. Det var også backing at man kan dele $3\frac{2}{3}$ på to ved å dele 3 på to og $\frac{2}{3}$ på to, og legge sammen svarene.



Figur 14: Turen – utregning med symboler 1

Her viser Chris, også på denne oppgaven, at for han er det ikke et problem å omdanne det naturlige språket i oppgaven til symbolspråk. Han gjør også om fra symbolspråket brøk til desimaltall, og behandler innenfor symbolspråk videre. Han bruker symbolspråket som representasjon for dataen som han henter ut av kontekstoppgaven, og som garanti for konklusjonen. Dermed bruker han symbolspråk i alle delene av argumentasjonen.

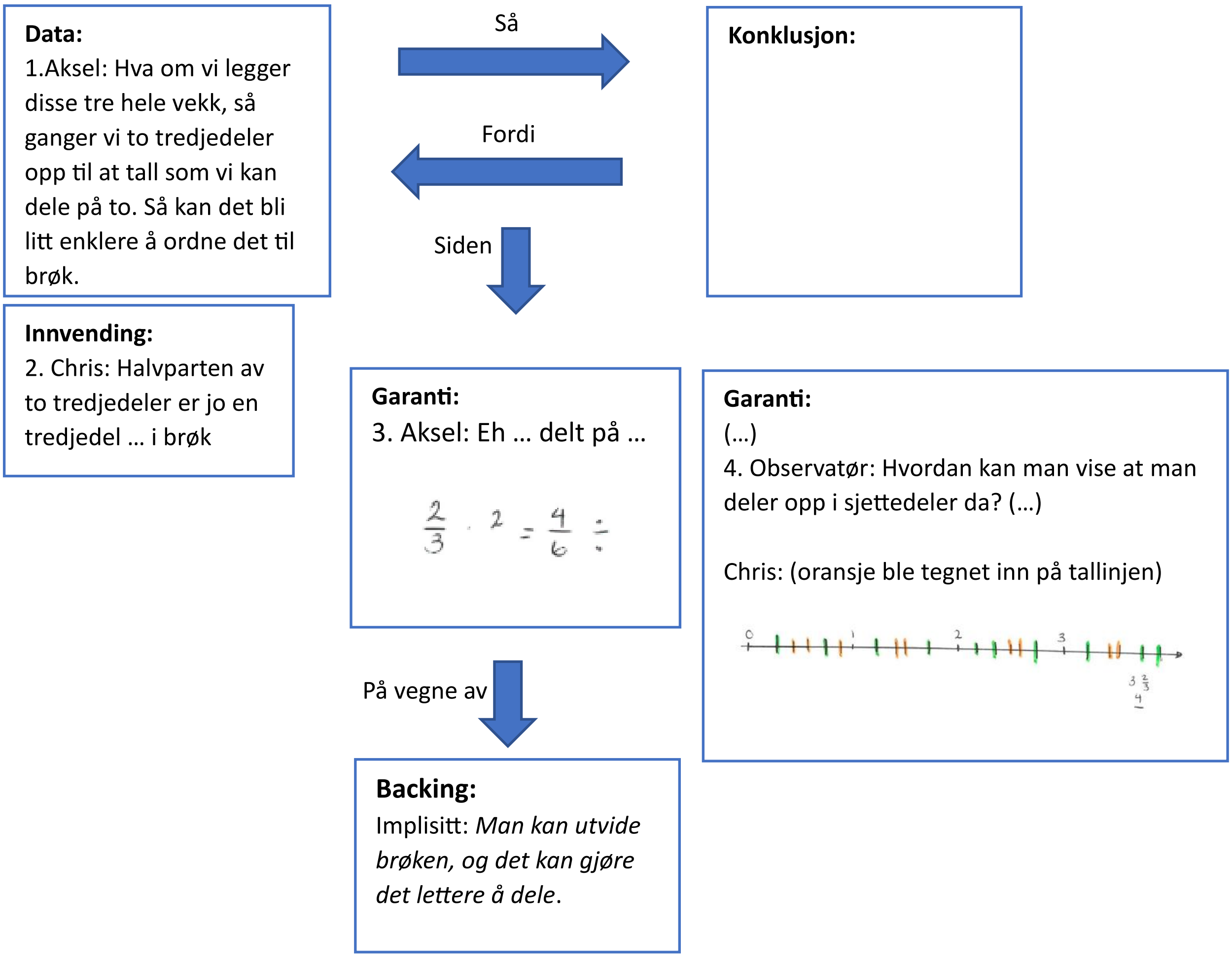
Figur 15 viser at Bea starter opp på en muntlig forklaring. Bea hadde også en backing om at hun kunne dele $3\frac{2}{3}$ på to ved å dele 3 på to og $\frac{2}{3}$ på to, men hun kom ikke fram til en konklusjon. Dermed var ikke dette en argumentasjon ifølge Krummheuer (1995). Jeg vil likevel sette det inn Krummheuers (1995) modell (figur 15).



Figur 15: Turen – muntlig språk

Bea presenterer det hun har tenkt med muntlig språk, og viser ikke at hun støtter seg på tallinjen når hun argumenterer. Hun gjør dermed en behandling – hun behandler oppgaven som gis i naturlig skriftlig språk med naturlig muntlig språk (Duval, 2006).

Figur 16 viser at Aksel og Chris tar i bruk tallinjen. Aksel hadde begynt med tallinjen før de to andre presenterte det de hadde gjort i forberedelsestida. Han viste på oppgaven om sandwichen at han behersker å løse denne type oppgaver med symbolspråk. Nå var han opptatt av å bruke tallinjen da oppgave ba om det, og har delt den inn i tredeler. Etter at Bea har presentert det hun har tenkt, sier Aksel at «de kan legge de tre hele vekk», og vil utvide brøken. Aksel foreslo å utvide brøken til et tall som kan deles på to, og utvider $\frac{2}{3}$ til $\frac{4}{6}$ med symbolspråk. Her har jeg tatt med en innvending fra Chris, som påpekte at to tredjedeler kan deles på to. Det viser at nå er det bare $\frac{2}{3}$ som er data, noe som gjør det vanskelig å konkludere. Da oppgaven ber elevene ta i bruk tallinja, minnet lærer elevene om at kan vise det på tallinja. Chris delte opp i seks deler, men ikke ved å dele hver del opp i to. Han hadde ingen backing for hvordan han skulle dele inn tallinjen på nytt, og dermed ble ikke hver del like stor.



Figur 16: Turen – tallinje 1

Her beveger elevene seg mellom flere representasjoner – de går fra naturlig skriftlig språk i oppgaven og omdanner det til naturlig muntlig språk, som de igjen omdanner til symbolspråk. Aksel begynner å tegne opp data som de har hentet ut av oppgaven på tallinjen, men de bruker ikke tallinjen videre som garanti før observatøren ber dem ta den i bruk. De forsøker heller å bruke symbolspråk til å utvide brøken (punkt 3 i figur 16). Så lenge representasjonene viser språklige operasjoner går det bra. Problemet oppstår når de skal omdanne til tallinjen, som er en visuell operasjon (Duval, 2006). Da får de ikke til å tegne inn riktig antall deler på den, selv om de har regnet det ut med symbolspråk.

Figur 17 viser at elevene brukte tallinje videre i arbeidet med oppgaven, men heller ikke denne gangen kom med en konklusjon. Elevene tegnet opp ei ny tallinje, og fokuserte nå på at $\frac{2}{3}$ var gjort om til sjettedeler. Deres garantier for det videre arbeidet tok ikke utgangspunkt i data som var hentet ut fra oppgaven. Dermed var ikke dette en argumentasjon ifølge Krummheuer (1995), de hadde ingen data å støtte seg til, og de kom heller ikke fram til en konklusjon. Jeg velger likevel å sette dette eksempelet opp ved hjelp av Krummheuers (1995) modell (figur 17).

Data:

Så

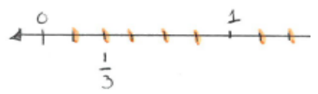
Fordi

Konklusjon:

Siden

Garanti:
(...)
1.Aksel: Hm ... her blir det null. Da må vi ha fem her sånn at det blir rett (tegner fem streker mellom hver hele.
(...)
Aksel: Nå blir det litt enklere å finne ut hva halvparten av, ja, to tredjedeler tenker jeg. Men, siden, halvparten er en tredjedel, så, hvor skal vi sette det da?
Chris: På den her.
Aksel markerer 1/3 først i tallinja.

Garanti: (utklipp fra tallinjen som ble tegnet)



På vegne av

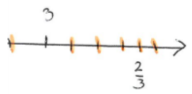
Backing:
Implisitt: *Dersom de setter fem streker mellom hver hele, så deler de inn sjettedeler. To sjettedeler er det samme som en tredjedel.*

Figur 17: Turen – tallinje 2

Her bruker elevene tallinjen for å utvide brøken, og er tydelig på at de skal finne halvparten. De finner ut at halvparten av $\frac{2}{3}$ er $\frac{1}{3}$, men stopper opp, for de har ikke hentet ut nok data fra oppgaven til å være bevisste hva det var de skulle finne halvparten av.

Figur 18 viser at elevene brukte tallinjen i argumentasjonen. Dette var førte gang tallinjen ble brukt i en fullstendig argumentasjon. Observatøren brøt inn for å få elevene til å hente ut data fra oppgaven på nytt (punkt 1, figur 18). Da elevene hadde gjort det, så måtte de knytte det til tallinjen som de hadde delt inn i sjettedeler. De brukte markeringene på tallinjen som garanti for konklusjonen. Argumentasjonen har jeg satt opp ved hjelp av Krummheuers modell (1995) (figur 18).

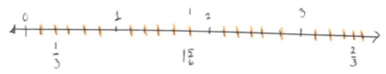
Data:
1.Observatør: Og hvor mye var det du skulle finne halvparten av?
Aksel: Tre og to tredeler.
Lærer: Ja, og hvor er du da her på tallinja?
Aksel: Ca. der (peker riktig på tallinja)



Så

Fordi

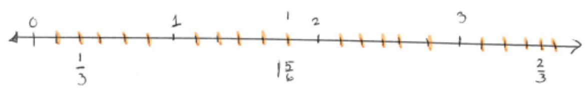
Konklusjon:
3.Chris: En komma, en og … fem sjettedeler.
Observatør: Skriv det opp, over eller hvor du vil.
Aksel: En hel og fem sjettedeler.



Siden

Garanti:
2.(…)
Observatør: Og hvor er halvveis dit?
Aksel: Vi kan først telle. En, to … ti, elleve, tolv, trette … vent der er tolv, tretten, fjorten, femten, seksten, sytten, atten, nitten, tjue, tjueen, tjueto, tjuetre. Og da blir det – elleve og en halv – halvparten.
Observatør: Jeg tror dere skal telle på nytt.
Chris: tjueto … elleve

Garanti:



På vegne av

Backing:
Implisitt: *Når du har delt inn i sjettedeler kan du finne halvparten av hele lengden ved å telle deg fram til antall sjettedeler hele lengden er og dele på to.*

Figur 18: Turen – tallinje 3

I denne argumentasjonen gjør elevene en omdannelse fra naturlig språk til en ikonisk representasjon, tallinjen. De går altså mellom representasjoner med språklige og visuelle operasjoner (Duval, 2006). I argumentasjonen bruker de tallinjen både som representasjon for dataen, i garantien og i konklusjonen. Dette er første gang elevene bruker tallinjen i en fullstendig argumentasjon, og de bruker den i alle delene av argumentasjonen. Det er observatøren som styrer de over på å bruke tallinjen, ved å spørre spørsmål som de må bruke tallinjen for å svare på.

Oppsummert viser analysen av argumentasjonene rundt oppgave 2 at to av elevene fortsatt velger å starte med symbolspråk, selv om oppgaven ber dem bruke tallinjen. En av disse elevene fullfører en argumentasjon med symbolspråk før de går i gang med den ikoniske representasjonen, tallinjen. Elevene viser også i denne oppgaven at omdannelsen fra representasjoner med språklige operasjoner til representasjoner med visuelle operasjoner er utfordrende for dem. Utfordringer som oppsto med tallinjen var å dele den inn i mindre deler, og fokuset ble flyttet til dette, slik at dataen som konklusjonen skulle basere seg på ble glemt.

5.3 Resultat og analyse av aksjon 2

Vi så at elevene hadde utfordringer med å benytte seg av tallinjen i argumentasjonen rundt oppgaven de fikk, og planla en aksjon som kunne hjelpe elevene å ta tallinjen i bruk. Dermed ble den neste oppgaven det i to, hvor den første delen viser hvordan en oppgave kan løses med lengdemodellen tallinje og med en arealmodell. Elevenes oppgave ble da å fullføre forklaringene til de to løsningene. Jeg vil presentere utdrag av elevenes samtale rundt disse løsningene under resultat av del en. Det gjør jeg for å få fram at elevene syn på de to modellene, og noe av de de fant vanskelig med å fullføre forklaringene. Under resultat og analyse av del to viser jeg hvordan elevene brukte lengdemodellen i argumentasjonen i arbeidet med en lignende oppgave.

5.3.1 Resultat av del en

Del 1 av oppgaven «Gavebåndet» fikk elevene presentert to ulike løsninger på hvordan $2\frac{1}{2}$ meter gavebånd fordeles likt på tre gaver. I den ene løsningen brukte «Emma» lengdemodellen og i den andre løsningen hadde «Anna» benyttet arealmodellen. Oppgaven var illustrert med bilder av hvordan modellene ble brukt, og inneholdt noe forklaring. Elevene skulle fullføre forklaringene til Emma og Anna.

På begge gruppene som ble observert var det vanskelig å komme i gang med forklaringene, noe følgende dialog viser:

> Observatør: Hva har Emma gjort her?
> Bea: (…) Hun har lagd en tallinje.
> Observatør: Hun har lagd en tallinje, ja. Og hva skal den tallinja illustrere?
> Bea: Hvor mye gavebånd hun bruker pr. gave?
> Observatør: Mm … hvor lang er tallinjen?
> Aksel: Eh … To meter tipper jeg.
> Observatør: To meter … hvor er to meter på tallinjen? Der, ja. Men hva har hun markert på tallinjen?
> Bea: To og en halv meter.
> Observatør: To og en halv meter, ja. Hun har i hvert kommet dit. Hvorfor har hun markert to og en halv?
> Aksel: Fordi det er det hun har med gavepapir (mener nok gavebånd).

Det er tydelig at det er uvant for elevene å forklare andres løsninger, og observatøren ble delaktig i samtalen rundt løsningene. På spørsmål om hvilken metode de foretrakk er de unisone i at de foretrekker Annas arealmodell:

> Observatør: Hvorfor?
> Chris: Fordi det er mye lettere å se – det er mye lettere forklart.
> Observatør: Enn du, Bea. Hvilken liker du best?
> Bea: Den nederste.
> Observatør: Hvorfor?
> Bea: Fordi det er lettere å se hva hun har gjort.
> Observatør: Men, hva mener du med hva hun har gjort?
> Bea: Regnestykket.

Dette støtter opp om at det er arealmodellen som ikonisk representasjon og symbolspråket som elevene har mest erfaringer med og er tryggest på. Aksel startet faktisk arbeidet med denne oppgaven med den sammen konklusjonen:

> Aksel: ... den best. Fordi, hvis du ikke har den teksten der, se for deg arket, så vet du ikke hva hun har gjort (snakker om Emmas metode). Den her – den ser du hva hun har gjort (snakker om Annas metode). Så, jeg likte den bedre … mye bedre. Men, nå skal vi skjønne hvordan de har gjort det!

Her viser Aksel at han intuitivt skjønner hva Anna har gjort, men ikke klarer å se for seg hva Emma har gjort uten å sette seg bedre inn i det. Observatør brukte noe tid sammen med elevene for å få forklart hvordan Emma løste oppgaven, før de skulle benytte seg av Emmas metode i del 2.

5.3.2 Resultat og analyse av aksjon 2 - del 2

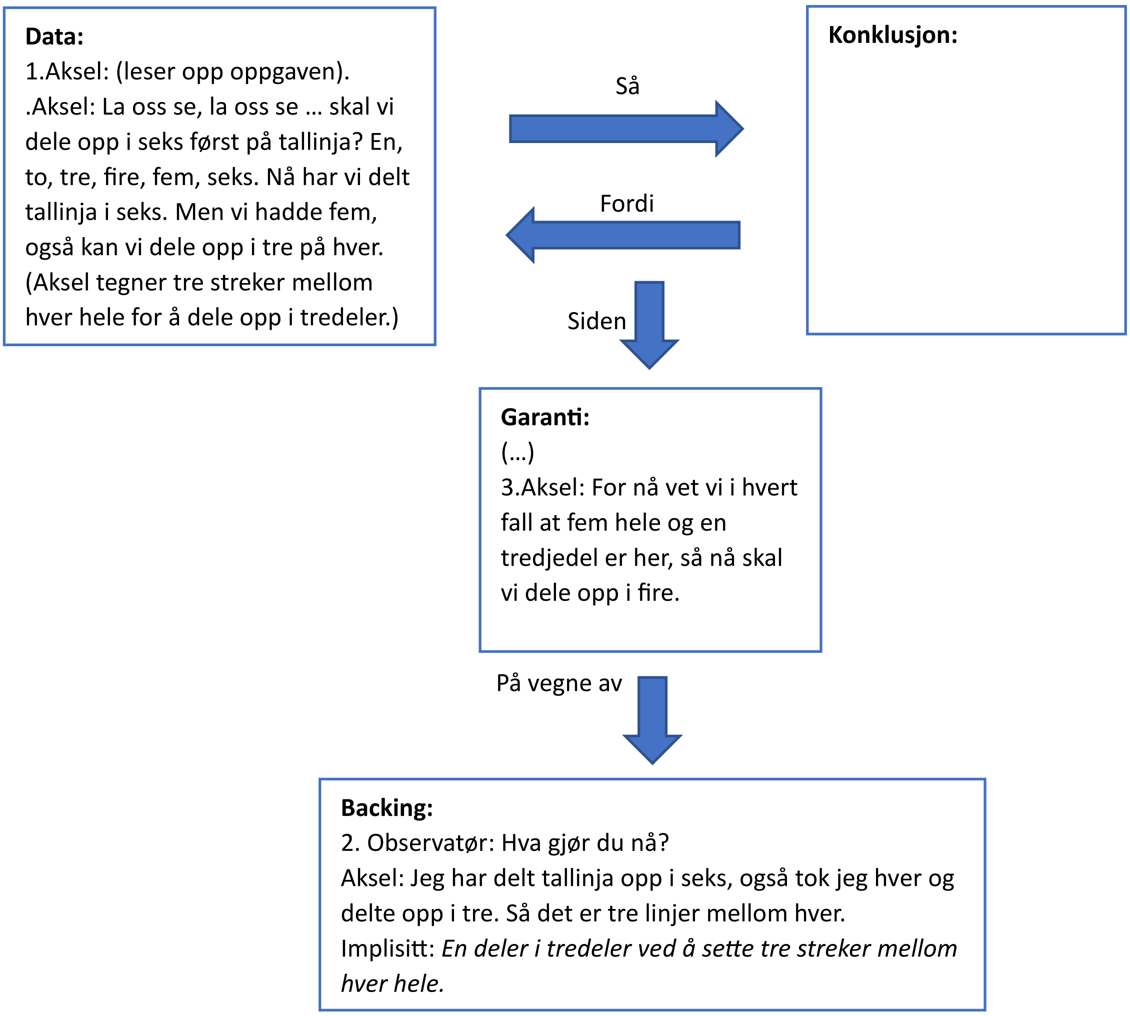
I del 2 av oppgave «Gavebåndet» fikk elevene i oppgave å fordele 5 $\frac{1}{3}$ meter med gavebånd på fire like store gaver. Oppgaven var illustrert med en tom tallinje, og elevene ble bedt om å bruke metoden til Emma for å løse oppgaven.

Tabell 4 gir en oversikt over hvilke representasjonsformer som blir brukt i elevenes argumentasjon rundt denne oppgaven. Det vi ser er at elevene nå bruker tallinjen i sin argumentasjon, men at de også her har ufullstendige argumentasjoner.

Representasjonsform	**Fullstendig argumentasjon**	**Ufullstendig argumentasjon**
Symbolsk	0	0
Muntlig språk	0	0
Ikonisk: arealmodell	0	0
Ikonisk: lengdemodell	2	2

Tabell 5: Oversikt over argumentasjoner i oppgave 3

Figur 19 viser at Aksel nå brukte tallinjen i arbeidet med oppgaven. Aksel startet med å lese oppgaven. Ifølge Krummheuers (1995) modell vil den informasjonen elevene kan hente ut fra oppgaven være data, da det er bakgrunnen for de vurderingene som blir gjort. Han delte inn tallinjen i seks deler, og begynte dermed å bruke tallinjen som representasjon for dataen, da de skulle fordele 5 $\frac{1}{3}$ meter med gavebånd. Videre sa han at han delte opp i tre, men gjorde det ved å sette tre streker mellom hver hele, og delte dermed inn i firedeler. Backingen er feil, og han kommer ikke fram til en konklusjon. Dermed var ikke dette en argumentasjon ifølge Krummheuer (1995), men jeg setter det likevel inn i modellen (figur 19).



Figur 19: Gavebåndet – tallinje 1

Jeg har valgt å ikke ta med tallinjen de tegner i figur 19, da de bruker den videre i de neste argumentasjonene. Dialogene viser tydelig at de arbeider med tallinjen. Aksel går rett fra det naturlige skriftlige språket i oppgaven til den ikoniske representasjonen tallinjen. Han bruker dermed tallinjen til data som han henter ut fra oppgaven. Videre bruker han tallinjen som garanti, ved at han sier at han skal dele den inn i fire (det er fire gaver gavebåndet skal deles på). I dialogen mellom Aksel og observatøren kommer det fram at Aksel gjør en feil i denne omdannelsen mellom representasjoner. Dette oppgir Shaughnessy (2011) som en vanlig feil elever gjør med tallinjen - Aksel teller merker i stedet for deler mellom enhetene.

Aksel kom ikke i mål med denne argumentasjonen fordi han delte inn i firedeler i stedet for tredeler. For å få fram dette gikk observatøren inn i følgende dialog:

> Observatør: Hvor er fem hele og tre tredjedeler da?
> Aksel: Det er …
> Chris: … på seks
> Observatør: Hvor er fem hele og to tredjedeler da?
> Aksel: Eh, nei, vent …

Elevene innså at det var blitt feil, og krysset ut den tredje streken, slik at hver hele var delt inn i tre (nesten like store) deler.

Figur 20 viser at elevene brukte tallinjen videre i arbeidet med oppgaven etter at de hadde rettet den opp. Da elevene hadde delt inn tallinjen riktig, oppsto det en ny diskusjon rundt hvor mange deler de hadde delt hele gavebåndet inn i. Heller ikke denne gangen kom de fram til en konklusjon, men jeg har satt eksempelet inn i Krummheuers (1995) modell. Både figur 19 og figur 20 viser at elevene ikke kommer fram til en konklusjon når garantien, den brua de skal bygge mellom data og konklusjon, baserer seg på en backing som er feil.

Data:
1. Observatør: Okei, så nå har du delt inn hver bit i?
Aksel: To, eller nei…
Chris: I delt i tre
Aksel: Ja, delt i tre.
Observatør: Mmm..
Aksel: Ja, vi deler i tre
Observatør: Ja, hvor mange gaver er det dere skulle pakke inn nå?

Fordi

Konklusjon:

Så

Siden

Garanti:
2. Aksel: Okei – seksten delt på fire
Chris: Fire.
Aksel: Nei, vent – vi er på, vi er på den fjortende. (…)
Observatør: Er dere på fjorten? Prøv å telle på nytt. (…)
Chris: Femten – er det ikke femten, eller er det seksten. Femten eller seksten. Hvis vi tar med nullen så blir det seksten.
(…)

På vegne av

Backing:
3.Observatør: Hvor blir null da?
Aksel: Det blir null her bak, men det er fortsatt null, så jeg tror ikke vi tar den med.
Implisitt: *Du skal starte å telle på den første markeringen etter null.*

Figur 20: Gavebåndet – tallinje 2

Elevene diskuterer hvor de skal starte å telle deler. Også her bruker elevene tallinjen som representasjon både for data fra oppgaven og garantien, men de kommer ikke fram til en konklusjon. Aksel og Chris viser at de er usikre på om de skal telle deler fra null eller fra en. Ifølge Shaughnessy (2011) er det vanlig å endre på enheten dersom tallinjen strekker seg til lengre enn 1. Her gjør elevene det ved at de ikke tar med lengden mellom 0 og 1 som en enhet. De blir ikke enige i diskusjonen, og observatøren spør følgende spørsmål for å avklare:

> Observatør: Hvor starter … hvis du tenker et gavebånd, hvor starter det? Starter det på en meter?
> Aksel: Nei. Men, okei. Hvor mange har vi da? Da er det jo seksten.

Figur 21 viser at elevene bruker tallinjen i argumentasjonen. Observatøren brukte støttespørsmål for å få elevene til å hente ut data fra oppgaven på nytt. Backingen var nå at de må starte på null på tallinjen. Elevene konkluderte med riktig antall deler, slik at de kunne dele gavebåndet i fire.

Data:
1.Observatør: Ja, kanskje dere skal telle hvor mange deler dere har nå.
Aksel: (Teller til atten, alle delene til seks hele)
Observatør: Men hvor langt er gavebåndet?
Aksel: Gavebåndet er fem meter og en tredjedel.

Så

Fordi

Konklusjon:
4. Chris: Seksten? Ja, seksten. Og seksten delt på fire er fire.

Siden

Garanti:
2.Observatør: Ja, så hvor mange deler har dere nå?
Aksel: Atten
Chris: Seksten
Aksel: Ja, seksten. Så, ja
(…)
Bea: Seks, ni, tolv, femten …
Observatør: Også?
Bea: Seksten.

På vegne av

Backing:
Implisitt: *Det er en akseptert kunnskap at man kan telle alle delene fra null til den fulle lengden*.

Figur 21: Gavebåndet – tallinje 3

Jeg har ikke tatt med det skriftlige arbeidet som elevene gjorde i figur 21, da de arbeider videre med det i neste argumentasjon. Men den muntlige dialogen viser at elevene bruker tallinjen som representasjon for dataen de henter ut fra kontekstoppgaven (figur 21, punkt 1), og som garanti (figur 21, punkt 2), før de bruker muntlig språk i konklusjonen. Når alle elevene starter å telle på null på tallinja, blir de sikre på at det er seksten deler som skal fordeles. Denne dataen tar de med seg i videre i neste argumentasjon.

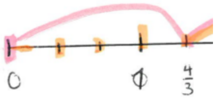
I figur 22 bruker elevene tallinjen videre i det jeg har sortert ut som en egen argumentasjon. Elevene brukte konklusjonen fra forrige argumentasjon (figur 21) som data (seksten deler delt på fire ble fire). I argumentasjonen brukte de tallinjen som garanti for konklusjonen. Backingen var nå at de kunne bruke tallinjen til å markere lengdene, og de konkluderte riktig med at svaret blir $\frac{4}{3}$ (figur 22).

Data:
1.Chris: Seksten? Ja, seksten. Og seksten delt på fire er fire.
Aksel: Det var sånn vi gjorde det sist gang også husker jeg. En, to, tre, fire – men er det rett?
(viser på tallinjen)

Så

Fordi

Konklusjon:
4.Chris: Seksten tredeler delt på fire … fire tredeler.

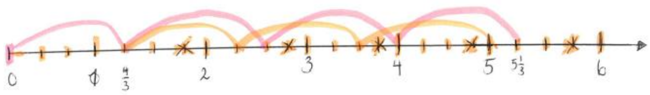


Siden

Garanti:
(…)
2.Aksel: Vi skal i hvert fall dele på fire, så, vi skriver bare fem… Vi må finne ut … seksten delt på to er åtte da, så det må (…)

$5\frac{1}{3} \div 4$

Garanti:
3.Observatør: Seksten delt på fire, det er jo ikke et vanskelig regnestykke?
Aksel: Nei, det er jo fire, men … hvor på tallinja skal vi sette det da, så … tre, fire … det kan da ikke være der?
Observatør: Hvorfor ikke?
Aksel: Fordi … det må være der.



På vegne av

Backing:
Implisitt: *Det er nå en akseptert kunnskap at en kan markere lengder på tallinja.*

Figur 22: Gavebåndet – tallinje 4

I denne argumentasjonen gjør elevene flere omdannelser. De beveger seg mellom tallinjen som ikonisk representasjon og muntlig språk og symbolspråk (figur 22, punkt 2 og 3). Siden de har arbeidet med del 1 av oppgaven og skal bruke Emmas metode, må de markere lengden på tallinjen. De bruker derfor også tallinjen som garanti og konklusjon. Aksel er fortsatt usikker, men markerer nå $\frac{4}{3}$ på riktig sted på tallinjen. Argumentasjonen avsluttes slik:

> Observatør: Gir det mening – hvor langt blir hvert gavebånd da?
> Aksel: En og en tredjedel.
> Lærer: Meter?
> Chris: En komma tretre meter

Elevene har i denne siste argumentasjonen brukt tallinjen i alle delene av argumentasjonene – om representasjon for data som de henter ut fra kontekstoppgaven, som garanti og for å konkludere. De konkluderer med å markere lengden på hvert gavebånd på tallinja, og Aksel leser av den når lærer spør hvor langt hvert gavebånd skal være. Chris avslutter med en omdannelse til et symbolspråk som han har brukt gjennom hele datainnsamlingen, desimaltall.

5.4 Oppsummering av resultatet av aksjonene

Når jeg samordner resultatet fra aller tre oppgavene i en tabell ser den slik ut:

Representasjon	**Oppgave 1**		**Oppgave 2**		**Oppgave 3**	
	Arg.	Ufullst. arg.	Arg.	Ufullst. arg.	Arg.	Ufullst. arg.
Symbolsk	3	0	1	0	0	0
Muntlig språk	0	0	0	1	0	0
Arealmodell	1	1	0	0	0	0
Mengdemodell	0	0	0	0	0	0
Lengdemodell	0	0	2	1	2	2

Tabell 6: Oversikt over argumentasjoner i alle oppgavene

Målet med aksjonene var å få elevene til å bruke tallinjen i argumentasjonen når de arbeidet med oppgaver med divisjon av brøk. Tabellen viser at aksjonene førte til at elevene tok i bruk tallinjen i argumentasjonen. Fra å ikke bruke lengdemodeller i argumentasjonene i arbeidet med den første oppgaven, så tok de i bruk tallinjen i noen av argumentasjonene i den andre oppgaven. I arbeidet med den tredje oppgaven brukte de tallinjen i alle argumentasjonene.

Det som ikke kommer fram i tabellen, er at under alle tre oppgavene veksler elevene mellom ulike representasjoner. Jeg sorterer hver argumentasjon under den skriftlige representasjonen som de i hovedsak bruker. Unntaket er den ene gangen det er en ufullstendig argumentasjon hvor det bare blir brukt muntlig språk som representasjon.

Aksjonene førte altså til at elevene brukte tallinjen i argumentasjonen. Jeg vil videre drøfte hvordan elevene brukte tallinjen argumentasjonen, og hvilke utfordringer som elevene møtte da de tok den i bruk.

6. Drøfting

I dette kapittelet vil jeg drøfte de funnene jeg har gjort i studien. Jeg vil drøfte funnene i forhold til hypotesen og målet for den praktiske problemløsningen som aksjonsforskningen skulle løse. I tillegg vil jeg drøfte funnene opp mot forskningsspørsmålene i studien. Svarene på disse spørsmålene er teoriutviklingen i aksjonsforskningen. Hvordan brukte elevene tallinjen i argumentasjonen? Hvilke utfordringer møtte de? Til slutt i kapittelet vil jeg se på studiens begrensninger.

6.1 Drøfting av hypotese og mål for aksjonene

Resultatet og analysen viste at ingen av gruppene valgte å bruke lengdemodeller i argumentasjonen under kartleggingen, men at aksjonene førte til at målet om å få elevene til å ta i bruk tallinjen ble nådd. Aksjonene som resulterte i at elevene tok i bruk tallinjen, gikk på å tilpasse oppgavene de fikk.

I den første aksjonen brukte vi et bilde som illustrasjon til teksten. Vi sa også at tallinjen på bildet skulle brukes i løsningen, noe som nok var årsaken til at de tok den i bruk i argumentasjonen rundt oppgaven. Da det viste seg at det var utfordrende for elevene å bruke tallinjen, utformet vi den neste oppgaven slik at den første delen av oppgaven presenterte løsninger med en arealmodell og en tallinje. Etter elevene hadde forklart disse to løsningene, skulle de selv løse en oppgave ved å bruke en tallinje. Tanken bak å bruke bilder av tallinje og løsningsforslag, var at de skulle gi en mental modell av konteksten (Dewolf et al., 2014). Bildene var ment å ha en *organiserende* effekt, og gi retning for å løse problemet med ei tallinje (Elia & Philippou, 2004).

Disse grepene førte til at elevene brukte tallinjen i argumentasjonen, men elevene opplevde helt til den siste oppgaven utfordringer med å ta i bruk tallinjen. Aksel uttrykte seg slik da de skulle forklare løsningen med arealmodell: «den her – den ser du hva hun har gjort, så jeg likte den bedre … mye bedre». Det var altså bildet av løsningen med arealmodell som gav den beste mentale modellen av konteksten. Da de skulle gå videre i arbeidet utbrøt han «men, nå skal vi skjønne hvordan de har gjort det!». Disse to utsagnene fra Aksel viser at det heller ikke på den siste oppgaven var naturlig for elevene å bruke tallinjen i argumentasjonen. Da elevene ble spurt om de foretrakk løsningen med arealmodell eller løsningen med tallinje, var de samstemte i at de foretrakk arealmodellen. Da elevene måtte bruke tallinjen som representasjon, var det ikke den representasjonen de selv foretrakk.

Jeg vil derfor si at selv om elevene tok i bruk tallinjen etter aksjonene vi gjennomførte, så fikk ikke aksjonene ønsket effekt. Vi ville lage oppgaver som fikk elevene til å se at tallinja var nyttig å bruke, og som gav de økt forståelse for brøk og divisjon av brøk. Selv om aksjonene ikke førte til at elevene selv syntes at tallinjen var nyttig å bruke, fikk både Roy og jeg økt innsikt gjennom teoriutviklingen i aksjonsforskningsprosessen. Videre vil jeg drøfte denne delen ved å ta opp forskningsspørsmålene i studien.

6.2 Hvordan bruker elever tallinjen i argumentasjonen?

Som svar på spørsmålet «hvordan bruker elever tallinjen i argumentasjonen?» kunne en etter kartleggingen som lå til grunn for aksjonene i denne studien svart «det gjør de ikke». Elevene valgte å argumentere med symboler, og konkluderte ut fra det. Da de ble bedt om å lage en figur som viste hvordan de hadde tenkt, valgte de arealmodell, og noe som kunne minne om en mengdemodell. Ingen av elevene, verken i pilotklassen eller den klassen studien ble gjennomført i, valgte å bruke lengdemodeller i argumentasjonen da de arbeidet med kartleggingsoppgaven.

Med utgangspunkt i dette funnet vil jeg derfor først løfte frem et eksempel på hvordan elevene brukte symboler i argumentasjonen, før jeg drøfter hvordan de brukte lengdemodellen tallinje i argumentasjonen.

Aksels argumentasjon rundt kartleggingsoppgaven «Sandwichproblemet» (figur 8), viser at han raskt omdannet dataen han hentet ut av oppgaven til symboler, før han behandlet symbolene som garanti for konklusjonen. I konklusjonen brukte han også symboler. Den eneste omdannelsen han gjør er når han hentet ut data i det naturlige språket oppgaven var gitt i, og omdannet det til symbolspråk. Behandlingen av symbolspråket er han trygg på, og han trengte derfor ikke å gjøre flere omdannelser før han konkluderte. Aksel brukte dermed symboler i alle delene av argumentasjonen.

I arbeidet med oppgaven som de fikk i den første aksjonen, «Turen», skulle elevene ta i bruk lengdemodellen tallinje i argumentasjonen. Figur 16 viser en ufullstendig argumentasjon, for da elevene skulle bruke tallinjen som garanti mellom data og konklusjon, fikk de ikke til å utvide brøken ved hjelp av tallinjen. De hadde ingen backing for hvordan de skulle dele inn tallinjen på nytt, og delte den ikke inn i like deler.

Elevene tegnet deretter opp en ny tallinje som de brukte i den neste argumentasjonen (figur 17). Denne gangen brukte de ikke tallinjen som data i argumentasjonen. Selv om de klarte å utvide brøken på denne tallinjen, samt gjøre noen beregninger, kom de ikke fram til en konklusjon, da de ikke hadde noen data å basere konklusjonen på. Med støttespørsmål fra observatør gikk elevene tilbake til kontekstoppgaven og hentet ut data på nytt, og brukte tallinjen som representasjon for dataen (figur 18). Det gjorde at elevene videre behandlet tallinjen og brukte den som garanti for konklusjonen, hvor de også brukte tallinjen som representasjon. Elevene brukte for første gang tallinjen som representasjon i alle delene av argumentasjonen.

I arbeidet med oppgaven i den andre aksjonen («Gavebåndet – del 2») brukte elevene tallinjen som data, og videre som garanti (figur 19). Her oppsto en vanlig feil i arbeidet med tallinjer – elevene telte merker i stedet for deler mellom enhetene (Shaughessy, 2011). Backingen som elevene hadde for garantien var «feil». Med det mener jeg at den kunnskapen som skulle støtte opp om garantien viste seg å ikke være riktig. Dermed delte de ikke inn i riktig antall deler, og kom ikke fram til en konklusjon, slik at argumentasjonen ble ufullstendig.

Med noen støttespørsmål fra observatør rettet elevene opp denne feilen, og brukte tallinjen videre (figur 20). Da de skulle bruke tallinjen, oppsto en diskusjon om de skulle telle fra null eller en på tallinjen. Dermed ble også denne argumentasjonen ufullstendig, også her fordi de baserte seg på feil backing.

Observatør spør noen støttespørsmål, slik at elevene skjønte at lengden gikk fra null. Til slutt argumenterte de ved å bruke tallinjen i alle delene av argumentasjonen (figur 21 og 22).

Funnene viser at når elevene brukte representasjoner som de var trygge på og valgte selv, brukte de den representasjonen i alle delene av argumentasjonen. De omdannet det naturlige språket i kontekstoppgaven til representasjonen, og brukte denne representasjonen i alle delene av argumentasjonen. De argumentasjonene hvor Aksel og Chris bruker symbolspråk er eksempel på dette (figur 9, 13 og 14). Det stemmer delvis med Behr et al. (1983) som sier at elever ofte løser kontekstoppgaver ved å oversette fra kontekstsituasjonen til en annen representasjon, gjør en behandling, og oversetter tilbake. Forskjellen er at elevene ikke oversetter tilbake, de lar symbolene stå som svar uten å knytte det til kontekstsituasjonen igjen.

Da elevene måtte bruke tallinjen i argumentasjonen, brukte de i utgangspunktet ikke tallinjen i alle delene av argumentasjonen. Elevene hadde ufullstendige argumentasjoner fordi de manglet backing eller hadde feil backing (figur 16, 19 og 20), som førte til at garantien ikke ble gyldig, og de kom ikke fram til en konklusjon. De fikk med andre ord ikke bygd en bro mellom data som de hentet ut fra oppgaven til en konklusjon.

Elevene hadde også en ufullstendig argumentasjon hvor de ikke hentet ut data fra kontekstoppgaven (figur 17). Selv om de brukte tallinjen til å utvide brøken, kom de ikke fram til noen konklusjon, da de ikke hadde data å basere konklusjonen på.

Da de under arbeidet med oppgaven i aksjon to, «Turen», skulle utvide brøken, gjorde de det først med symboler (punkt 3 i figur 16), før de forsøkte å plotte det inn på tallinjen. Dette gjorde de i stedet for å dele inn tallinjen på nytt, altså utvide brøken rett på tallinjen. Dermed omdannet de først det naturlige språket i kontekstoppgaven til symbolspråk, før de omdannet det til en ikonisk representasjon; tallinjen.

Ved hjelp av støttespørsmål fra observatør fikk elevene etter hvert til å bruke tallinjen i alle delene av argumentasjonen. For at elevene skulle kunne gjøre dette, så måtte data fra kontekstoppgaven representeres på tallinjen. I tillegg måtte det en del akseptert kunnskap på plass, slik at elevene kunne ha gyldige garantier i argumentasjonen. Det måtte for eksempel bli akseptert kunnskap at man må sette fem merker mellom hver hele for å dele inn i sjettedeler, og at man må telle alle delene fra null når man skal finne en lengde. Først da kunne elevene bruke tallinjen i garantien for å bygge en bro mellom data og konklusjon.

Selv om elevene etter hvert brukte tallinjen i alle delene av argumentasjonen sin, var det også på den siste oppgaven flere ufullstendige argumentasjoner. Da elevene brukte symbolspråk i sine argumentasjoner i arbeidet med kontekstoppgavene med divisjon av brøk, brukte de det i alle delene av argumentasjonen. Ut fra det viser studien at elevene ikke hadde utfordringer med å løse kontekstoppgavene med divisjon av brøk, men med å bruke tallinjen.

6.3 Hvilke utfordringer møter elever når de argumenterer med tallinjen?

Jeg har i analysen i denne studien både analysert hvordan elevene argumenterer ved å bruke Krummheuers (1995) modell for argumentasjon, og sett på hvilke representasjoner de bruker. For å si noe om hvilke utfordringer elevene møter når de bruker tallinjen som representasjon, har jeg brukt Duvals (2006) framstilling av representasjoner i fire grupper som han kaller registre (figur 3).

Analysen viser at elevene ikke hadde problemer med å gjøre det Duval (2006) kaller omdannelser mellom representasjoner når de skulle gjøre det fra det naturlige skriftlige språket som oppgavene var skrevet i til symbolspråk. Elevene beveger seg da fra et multifunksjonelt register til et monofunksjonelt register innenfor språklige operasjoner. Duval (2006) sier at læring og utfordringer oppstår når elevene beveger seg mellom representasjoner i de ulike registrene. Enkelt forklart må elevene «finne igjen» det Duval kaller det matematiske objektet når de gjør en omdannelse – de må f.eks. finne ut hvordan det matematiske problemet i det naturlige skriftlige språket kan representeres med symboler. For elevene i denne studien var ikke denne omdannelsen et problem når de fikk fra det naturlige språket i oppgaveteksten til symbolspråk. Forklaringen på dette kan være at det er en omdannelse elevene har mye erfaring med, ved at de har arbeidet med mange tekstoppgaver før hvor de skal gjøre om det naturlige skriftlige språket til symbolspråk.

Utfordringene for elevene oppsto da de skulle gjøre omdannelser fra registrene med språklige operasjoner til et register med visuelle operasjoner (Duval, 2006). Dette viste seg allerede i kartleggingsoppgaven da elevene ble bedt om å tegne en figur som skulle vise hvordan de hadde tenkt. Da elevene skulle gå over til arealmodellen, ble Aksel og Chris usikre. De hadde tegnet to kvadrat som var delt inn i fire deler, fargelagt alle fire i det ene kvadratet og tre av de fire i det andre. I omdannelsen fra den symbolske representasjonen de hadde brukt i sin første argumentasjon, til den ikoniske tegningen av en arealmodell, ble de utfordret av at modellen for dem viste $\frac{7}{8}$.

Da elevene videre måtte ta tallinjen i bruk opplevde de også utfordringer. Både arealmodeller og lengdemodeller er ikoniske representasjoner som viser en visuell operasjon. Da elevene skulle gå fra det naturlige skriftlige språket i kontekstoppgaven til den ikoniske tallinjen, gikk de også fra et register med språklige operasjoner til et register med visuelle operasjoner. Forklaringen på at elevene fikk større utfordringer med denne omdannelsen, kan være at det er en omdannelse elevene har lite erfaring med, og at de har arbeidet med få oppgaver hvor de skal gå fra det naturlige skriftlige språket til den ikoniske representasjonen tallinje.

Utfordringene som elevene fikk da de skulle bruke den ikoniske representasjonen tallinjen i argumentasjonen viste seg i backingen i argumentasjonen til elevene. Eleven baserte garantien sin på feil backing, altså kunnskap som ikke var riktig. De telte blant annet deler ved å telle markeringer i stedet for delene, og de var usikre på hvor de skulle sette null. Videre opplevde elevene utfordringer med å utvide brøken på tallinja. Elevene opplevde også utfordringer med å markere en lengde oppgitt i heltall og brøk på tallinja.

En kan spørre seg hvorfor elevene skal ta i bruk tallinjen i argumentasjonen når de arbeider med divisjon av brøk på 8. trinn, når de klarer å løse kontekstoppgavene som blir gitt med symbolspråk. I den første oppgaven gjorde Aksel om det blanda tallet til en uekte brøk, og delte telleren på to før han utvidet slik at han fikk hele tall i teller og nevner. Det er en metode som fungerer godt når du skal dividere brøken med et helt tall, selv om det ikke er standardalgoritmen. Chris var trygg på å løse oppgavene med desimaltall. Gruppa hadde ingen problem med å løse kontekstoppgaver med divisjon av brøk, og de hadde flere strategier for å løse oppgavene. De møtte ikke utfordringene før de skulle omdanne symbolspråket til en ikonisk representasjon ved å lage en figur. De valgte da en arealmodell, og den første ufullstendige argumentasjonen til elevene kom da de skulle vise hvordan de hadde tenkt med arealmodellen. Videre fikk de til en fullstendig argumentasjon med arealmodellen, og det var også arealmodellen elevene foretrakk da de skulle si hvilken løsning de foretrakk. Alle elevene foretrakk «Annas» løsning med arelmodell framfor «Emmas» løsning med tallinje.

Bright et al. (1988) sier at det er utfordrende for elever å bruke tallinjen som representasjon for brøk, og Shaughnessy (2011) påpeker at det ikke er uproblematisk for elever å arbeide med tallinjer. Dette stemmer med denne studien. Utfordringene elevene møtte var knyttet til å ta i bruk tallinjen, ikke til å løse divisjonsoppgavene.

Behr et al. (1983) presenterer fem ulike aspekt ved brøk: brøk som del av en hel, brøk som forhold, brøk som operator, brøk som kvotient og brøk som tallstørrelse (figur 1). Det er viktig å utvikle forståelse for alle aspektene, og brøk som tallstørrelse utpeker seg som særlig viktig (Lamon, 2008; Van de Walle, 2020), men et vanskelig aspekt for elevene å få grep om (Charalambous og Pitta – Pantazi, 2007). Å bruke tallinja er nært knyttet til å se brøk som en tallstørrelse. Rapporter om studier på brøk fra Petit et al. (2010, henvist til i Van de Walle, 2020 s.383) og Siegler et al. (2010, henvist til i Van de Walle, 2020, s.383) støtter opp om at tallinjer kan hjelpe elevene til å forstå brøk som et tall, i tillegg til å utvikle de andre brøkaspektene.

Behr et al. (1983) sier at elever vil bruke ulike representasjoner når de arbeider med et problem, og at det er viktig at de gjøre det for å utvikle forståelse for aspektene ved brøk. Duval (2006) sier at de omdannelsene elevene gjør når de beveger seg mellom representasjoner i ulike registre er viktige for å utvikle forståelsen for matematikk. Begge støtter dermed at det er nettopp det å bevege seg mellom de ulike representasjonene som utvikler forståelsen for brøk.

Funnene i denne studien viser at elevene ikke har utfordringer med å løse kontekstoppgaver med divisjon av brøk, men møter utfordringer når de skal bruke tallinjen i argumentasjonen sin i arbeidet med oppgavene. Det kan tyde på at elevene har lite erfaring med å bruke tallinjen som representasjon for brøk, og forskningen støtter opp om at tallinja er nært knyttet til å se brøk som tallstørrelse og det vil utvikle elevenes forståelse for brøk om de får mer erfaring med å bruke de.

6.4 Studiens begrensninger

Når jeg nå har avsluttet denne studien, så har jeg tatt mange valg i forhold til hva den skal inneholde. Det betyr selvsagt at jeg har valgt bort enda mer.

Jeg har gjennomført studien i en klasse, men analysene baserer seg på innsamlet datamateriale for ei gruppe på tre elever. Resultatene ville selvsagt blitt annerledes dersom jeg studerte en annen gruppe elever. Likevel har vi samlet inn skriftlig materiale fra hele klassen, Roy har observert ei gruppe, og jeg har hatt samtaler med han både i forkant og etterkant av aksjonene. Jeg gjennomførte også «Sandwichoppgaven» i en pilotklasse. De samlede erfaringene viser det samme som datamaterialet som ble observert – elevene bruker ikke lengdemodeller i argumentasjonen, og når de må ta i bruk tallinjen blir det utfordrende.

De elevene jeg observerte hadde for få måneder siden gått ut av 7. trinn. I samtaler med klassens matematikklærer fikk jeg vite hva de har arbeidet med de månedene de hadde gått på ungdomsskolen, men jeg vet lite om hvilke erfaringer elevene har med brøk fra barneskolen. I læreplanen står det at elevene da skulle kunne «representere og bruke brøk, desimaltal og prosent på ulike måtar og utforske dei matematiske samanhengane mellom desse representasjonsformene» (Utdanningsdirektoratet, 2023b). Dermed skal de ha erfaringer med å bruke flere representasjoner for brøk, men det kan selvsagt være forskjeller i hvordan det har blitt praktisert på de ulike skolene.

Elevene i denne studien løste bare en type oppgaver. Dette var kontekstoppgaver hvor de skulle dividere en brøk (oppgitt som blanda tall) med et helt tall. Slike oppgaver er delingsdivisjon, og det ville vært interessant å se hvordan elevene ville brukt tallinja i argumentasjonen dersom det ble gitt flere oppgaver der elevene skulle løse divisjonsoppgaver med brøk som målingsdivisjon. Det kunne også vært spennende å se hvordan elevene kunne knytte det arbeidet de gjør med tallinja opp mot algoritmen for divisjon av brøk.

Dersom jeg hadde observert elever på et lavere trinn kan det hende de i større grad ville foretrukket andre representasjoner enn symbolske. Elevene i denne studien har jo allerede «tilgang» til symbolspråket. Bruner (1961, henvist til i Elia & Phillippou,2004, s. 327) sier at man må forestille seg noe før man kan arbeide med de matematiske symbolene. Elevene i denne studien arbeider med de matematiske symbolene, men strever med å bruke en ikonisk representasjon. Det kunne vært interessant å se nærmere på dette perspektivet.

7. Avsluttende kommentar

Et funn i denne studien er at når elevene bruker en representasjon de er trygge på, omdanner de raskt det naturlige språket i kontekstoppgaven til denne representasjonen, for deretter å bruke den i alle delene av argumentasjonen. Elevene brukte i utgangspunktet ikke lengdemodeller i argumentasjonen, men symbolspråk. Elevene var også tydelige på at de foretrakk arealmodellen da de ble presentert for løsninger med lengdemodellen tallinje og arealmodellen. Utsagnet «Nå skal vi skjønne hvordan de har gjort det!», ble tittelen på denne oppgaven. Utsagnet kom da elevene skulle forklare løsningene med arealmodellen og lengdemodellen, og forteller oss at disse løsningene ikke var intuitive for elevene. De måtte sette seg inn i det for å forstå. Da oppgavene som ble gitt krevde at elevene brukte tallinjer, tok de dem i bruk. Til å begynne med ble de ikke brukt i alle delene av argumentasjonen, men etter hvert brukte de tallinja gjennom hele argumentasjonen, men ikke uten utfordringer. De utfordringene elevene møtte kan komme av at de ikke har nok erfaringer med å bruke tallinjen. Elevene i studien hadde nylig arbeidet med brøk og divisjon av brøk, derunder også bruk av tallinjer som modell. Funn i denne studien viser at de få oppgavene som elevene hadde erfaring fra dette skoleåret, ikke var nok til at elevene kunne bruke tallinjen i argumentasjonen rundt divisjonsoppgaver med brøk. Jeg startet oppgaven med et utsagn fra matematikklærer Roy, og vil avslutte med det samme utsagnet: «Jeg tror egentlig ikke jeg forstod brøk fullt ut selv før jeg hadde undervist om det på alle trinn på barneskolen». Å utvikle forståelse for alle aspekt ved brøk tar tid, og krever en bevisst bruk av ulike modeller for brøk.

7.1 Bidrag til forskningsfeltet

Jeg har utført en aksjonsforskningsstudie i tett samarbeid med en matematikklærer på 8. trinn. Sammen har vi forsøkt å få elevene til å bruke tallinjer i argumentasjonen sin i arbeidet med kontekstoppgaver med divisjon av brøk. Aksjonene for å få dette til har vært rettet mot oppgavene vi gav elevene. Bakgrunnen for aksjonsforskningen var at vi mente det ville øke elevenes forståelse for brøk og divisjon av brøk om de kunne bruke tallinjer i argumentasjonen. Aksjonene fikk elevene til å ta i bruk tallinjen i argumentasjonen, men vi fikk likevel ikke ønsket effekt. Elevene hadde utfordringer med å bruke tallinjen, og de foretrakk andre representasjoner som arealmodellen og utregning med symboler. Slik kan det være når man prøver ut ting. Aksjonsforskning skal være både praktiske problemløsningen og teoriutvikling. Aksjonene vi gjennomførte fikk ikke ønsket effekt, men teoriutviklingen har gitt økt innsikt. Studien har bidratt til kunnskap om hvordan elevene bruker tallinjer argumentasjonen sin i arbeidet med divisjonsoppgaver med brøk, og hvilke utfordringer de møter når de skal ta tallinjen i bruk. Aksjonsforskningen skal gjennom samarbeid mellom lærer og forsker løfte praksisen. Selv om ikke aksjonene fører fram, ser jeg gjennom denne studien at erfaringen likevel gir økt kunnskap som både lærer og forsker kan ta med seg videre.

Referanser

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational Number Concepts. I R. Lesh, & M. Landau, *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (ss. 91 - 125). New York: Academic Press.

Birkeland, P. A., Breiteig, T., & Venheim, R. (2011). *Matematikk for lærere, 5. utgave.* Oslo: Universitetsforlaget.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C., & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er tall - Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. *FoU i praksis 2012 conference proceedings* (ss. 1 - 9). Tapir akademiske forlag: Trondheim.

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying Fractions on Number Lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(3), ss. 215-132.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*(64), 293-316.

Clarke, V., & Braun, V. (2012). Thematic Analysis. I V. Clarke, & V. Braun, *Handbook of Research Methods in Psychology : Vol 2.* American Psychological Association. doi:https://doi.org/10.1037/13620-004

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education.* New York: Routledge.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2023, 09 03). *Forskningsetikk.no*. Hentet fra Retningslinjer: https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Dewolf, T., Van Dooren, W., Hermens, F., & Verchaffel, L. (2015). Do students attend to representational illustrations of non - standard mathematical word problems, and, if so, how helpful are they? *Instructional Science, 43*(1), ss. 147 - 171. doi:10.1007/s11251-014-9332-7

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*(61), 103 - 131.

Elia, E., & Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. *Proceedings of the 28th Conference og the International Group for the Psychology og Mathematic Education Vol 2* (ss. 327 - 334). Department of education, University of Cyprus.

Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals.* Portsmouth: Heinmann.

Furu, E. M. (2013). Lærerstudenten som aksjonslærer i klasserommet. I M. Brekke, & T. Tiller, *Læreren som forsker - innføring i forskningsarbeid i skolen* (ss. 45-61). Oslo: Universitetsforlaget.

Gjessing, A. L. (2022). *Barns bruk av tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk.* Masteroppgave, NTNU, Trondheim.

Grepstad, O. (1997). *Det litterære skattekammer.* Oslo: Det norske samlaget.

Guba, E. G. (1981). Criteria for Assessing the Trustworthiness og Naturalistic Inquiries. *Educational Communication and Technology Journal* (29), 75 - 91.

Kemmis, S. (2009). Action research as a practice - based practice. *Educational Action Research, 17*(3), ss. 463-474. doi:10.1080/09650790903093284

Kongsnes, A. L., & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 8.* Skien: Aschehoug undervisning.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. I P. Cobb, & H. Bauersfeld, *The Emergence of Mathematical meaning: Interaction in Classroom Cultures* (ss. 229 - 269). Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, ss. 60 - 82.

Lamon, S. J. (2008). *Teaching fraction an ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2. utg.). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Ma, L. (2010). Generating Representations: Division By Fractions. I L. Ma, *Knowing and teaching elementary mathematic* (ss. 55-83). New York: Routledge.

Shaughnessy, M. M. (2011). Identify fractions and decimals on a number line. *Teching Children Mathematics, 17*(7), 428 - 434.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis - Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., . . . Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23*(7), ss. 691-697. doi:10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*(62), ss. 273 - 296. doi:10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Singletary, L. M., & Conner, A. (2015). Focusing on Mathematical Arguments. *The Mathematics Teacher, 109*(2), ss. 143 - 147.

Tiller, T. (2006). Aksjonsforskning og aksjonslæring. I T. Tiller, *Aksjonslæring - forskende partnerskap i skolen, 2. utgave* (ss. 43 - 59). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Tripp, D. (u.d.). Action research: a methodological introduction. *Educação e Pesquisa, 31*(3), 444-447.

Universitetet i Oslo. (2023, 05 20). *nettskjema.no*. Hentet fra Nettskjema: https://nettskjema.no/

Utdanningsdirektoratet. (2023a, 06 29). *Udir.no*. Hentet fra Læreplanverket: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Utdanningsdirektoratet. (2023b, 07 26). *Udir.no*. Hentet fra Kompetansemål og vurdering: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv17

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2020). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally.* Harlow: Pearson Education Limited.

Witherspoon, T. F. (2019). Fifth graders' understanding of fractions on the number line. *School Science and Mathematics, 119*(6), ss. 340-352. doi:https://doi.org/10.1111/ssm.12358

Zakis, R., & Mamolo, A. (2016). On numbers: Concepts, operations and structure. I A. L. Gutierrez, *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (ss. 39-71). Sense Publishers.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vedlegg 2: Godkjenning fra Sikt

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet ”Bruk av ulike modeller i arbeid med brøk”?

Til foresatte for elever i … ved … ungdomsskole

Jeg er student ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal skrive en masteroppgave i forbindelse med studie som lærerspesialist i matematikk. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål
Formålet med prosjektet er å vurdere hvordan læreren kan legge til rette for at elevene skal ta i bruk ulike modeller når de arbeider med brøk. Det er et forskningsprosjekt som skal gjennomføres i forbindelse med en masteroppgave ved NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Jeg har valgt å bruke elevene i 8… ved … ungdomsskole som deltakere, og ønsker at alle i klassen er med i prosjektet. De elevene som ikke deltar i prosjektet, vil få vanlig matematikkundervisning av en annen matematikklærer under prosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?
Dersom du velger å delta i prosjektet vil det innebære at jeg tar lydopptak i klasserommet i til sammen 3 matematikktimer i løpet av uke 47 – 50. Jeg vil gjøre lydopptak på to av gruppene når elevene arbeider med oppgaver på grupper. Jeg vil også samle inn det skriftlige arbeidet som elevene gjør i disse timene.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan ditt barn når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser noen ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Lene Nordahl og veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter og matematikklærere i 8…. Lydopptak vil bli lagret på en forskningsserver.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 4. september 2023, og lydopptak vil bli slettet ved prosjektslutt.

Rettigheter
De som kan identifiseres i datamaterialet, har rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert
- å få rettet personopplysninger
- få slettet personopplysninger
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet)
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av egne personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger?
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra institutt for lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Lene Nordahl (student), Yvonne Grimeland (veileder)

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med: Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen Lene Nordahl

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Bruk av ulike modeller i arbeidet med brøk*. I forbindelse med prosjektet samtykker jeg til at mitt barn ____________________ (skriv inn navn og etternavn):

- ☐ deltar i observasjon med lydopptak
- ☐ besvarer skriftlige oppgaver som samles inn

Jeg samtykker til at opplysningene lagres frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av foresatte, dato)

Vedlegg 2: Godkjenning fra Sikt

Sikt

Meldeskjema / Bruk av ulike modeller i arbeid med brøk / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
660066	Standard	04.11.2022

Prosjekttittel
Bruk av ulike modeller i arbeid med brøk

Behandlingsansvarlig institusjon
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig
Yvonne Grimeland

Student
Lene Nordahl

Prosjektperiode
07.11.2022 - 01.07.2023

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 01.11.2023.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG
Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.11.2023.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke

viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss: Janniche Linde

Lykke til med prosjektet!

NTNU

Kunnskap for en bedre verden