Siv Heidi Sigerseth Eidsheim

Matematisk fleksibilitet i videregående opplæring

En lærebokanalyse

Masteroppgave i lærerspesialist matematikkdidaktikk 11. - 13. trinn
Veileder: Eivind Kaspersen
August 2023

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Siv Heidi Sigerseth Eidsheim

Matematisk fleksibilitet i videregående opplæring

En lærebokanalyse

Masteroppgave i lærerspesialist matematikkdidaktikk 11. - 13. trinn
Veileder: Eivind Kaspersen
August 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Temaet i denne studien er matematisk fleksibilitet – evnen til å bruke ulike og hensiktsmessige strategier på effektive måter. Dette er et aktuelt tema fordi fagfornyelsen LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020, 2021) vektlegger at elevene skal forstå, utforske, forklare og veksle mellom ulike strategier. Undersøkelser viser at fysiske lærebøker er styrende for undervisningen (Meld. St. 28, (2015-2016)). Det er derfor viktig å undersøke matematisk fleksibilitet i lærebøker. Problemstillingen for denne studien er: *I hvilken grad og hvordan legger lærebøker til rette for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet?*

For å finne svar på problemstillingen, har jeg gjort en innholdsanalyse (Cohen et al., 2018) av datamateriale hentet fra seks lærebøker. Jeg har undersøkt hvordan tre bøker i matematikk 1T presenterer andregradslikninger og hvordan tre bøker i matematikk R1 presenterer eksponential- og logaritmelikninger. Forskningsspørsmålene jeg har søkt å finne svar på er: (1) *I hvilken grad legger lærebøkene opp til sammenligning av ulike strategier?*; og (2) *Hvordan legger lærebøkene opp til sammenligning av ulike strategier?* For å analysere materialet, har jeg laget et system for koding og kategorisering. Systemet brukte jeg til å sammenligne materialet og konkludere utfra de to forskningsspørsmålene og den overordnede problemstillingen.

Studien viser at alle lærebøkene presenterer ulike strategier for å løse både andregradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger, men de legger i mindre grad opp til sammenligning av de ulike strategiene. Det er lagt opp til noe sammenligning av de ulike strategiene, men hvor mye og hvordan dette gjøres varierer mellom de ulike bøkene og mellom 1T og R1. Det vanligste er sammenligning av ulike metoder til samme problem. En del oppgaver i bøkene legger opp til at problemer skal løses på flere måter, men det stilles sjelden spørsmål som utfordrer elever til å tenke gjennom likheter og ulikheter mellom ulike strategier. Tidligere forskning viser at hvilke spørsmål som stilles, og visuell presentasjon av strategier har betydning for utviklingen av elevers matematisk fleksibilitet (Durkin et al., 2017). Denne studien viser at lærebøker presenterer strategier sekvensielt, som vil si at de ulike strategiene presenteres etter hverandre. Noen av lærebøkene har eksempler på side-ved-side-sammenligning, merking av ulike løsningssteg, og matematisk samtale rundt sammenligning av ulike strategier.

Studien drøfter hvilke implikasjoner resultatene av lærebokanalysen har for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet. Studien drøfter også konsekvenser for klasserommet og videre forskning.

Nøkkelord: matematisk fleksibilitet, lærebøker, sammenligning av strategier, likninger

Abstract

The subject of this study is mathematical flexibility – the ability to use different and appropriate strategies effectively. This topic is relevant because the curriculum reform LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020, 2021) emphasizes that students must understand, explore, explain, and alternate between different strategies. Studies show that textbooks govern teaching (Meld. St. 28, (2015-2016)). It is, therefore, essential to examine mathematical flexibility in textbooks. The main research question for this study is: *To what extent and how do textbooks facilitate the development of students' mathematical flexibility?*

To answer to the problem, I have conducted a content analysis (Cohen et al., 2018) of data material from six textbooks. I have examined how three books in Mathematics 1T present quadratic equations and how three books in Mathematics R1 present exponential and logarithmic equations. The subordinate research questions I have sought to answer are: (1) *To what extent do the textbooks encourage comparison of different strategies?*; and (2) *How do the textbooks facilitate comparison of different strategies?* To analyze the material, I have made a system for coding and categorization. I used the system to compare the material and draw conclusions based on the two subordinate and the main research questions.

The study shows that all the textbooks present different strategies for solving both quadratic equations and exponential and logarithmic equations, but to a lesser extent, provide a comparison of multiple strategies. There is some comparison of the different strategies, but how much and how this is done varies between the books and 1T and R1. Comparison of different methods to solve the same problem is most common. Some tasks in the books suggest that problems should be solved in several ways, but questions that challenge students to think through the similarities and differences between different strategies are rarely asked. Previous research shows that the questions asked, and the visual presentation of strategies are important for developing students' mathematical flexibility (Durkin et al., 2017). This study indicates that textbooks present strategies sequentially, which means that the various strategies are presented one after the other. Some of the textbooks have examples of side-by-side comparison, labelling of solution steps, and mathematical discussions around the comparison of multiple strategies.

The study discusses the implications of the analysis for the development of students' mathematical flexibility. The study also discusses consequences for the classroom and further research.

Keywords: mathematical flexibility, textbooks, comparison of strategies, equations

Forord

Med denne masteroppgaven setter jeg punktum for tre års videreutdanning i lærerspesialist i matematikk. Det har vært interessant å fordype seg i ulike teorier og forskning innen matematikkdidaktikk. Etter mange år som matematikklærer har det vært nyttig å bli utfordret på egen praksis. Nå ser jeg frem til å bruke det jeg har lært både i egen matematikkundervisning og i fellesskap med mine kollegaer.

Arbeidet med masteroppgaven har vært både lærerikt og utfordrende. Takk til veileder Eivind Kaspersen for tydelige og konstruktive tilbakemeldinger. Takk til arbeidsgiver for god tilrettelegging og støtte. Takk også til kollegaer og familie for heiarop og bidrag på ulikt vis.

Ølensvåg, august 2023

Siv Heidi Sigerseth Eidsheim

Innhold

Figurer

Tabeller

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema og problemstilling

Fleksibilitet er et viktig begrep innen matematikkdidaktikk. Matematisk fleksibilitet handler om å kunne bruke ulike strategier, metoder og representasjoner på hensiktsmessige måter. For å være fleksibel må en ha kunnskap om varierte strategier og evne å bruke disse effektivt (Heinze et al., 2009; Lemaire & Siegler, 1995; Torbeyns et al., 2009). Kjerneelementene i fagfornyelsen LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020, 2021) vektlegger at elevene skal forstå, utforske, forklare og veksle mellom ulike strategier og representasjoner. Det viser at matematisk fleksibilitet henger sammen med elevers forståelse og behov for å se sammenhenger og nytten av det de lærer. Elever som er matematisk fleksible er gode til å bruke de ulike verktøyene i sin matematiske verktøykasse der de passer best og på en effektiv måte. Utvikling av elevers matematiske fleksibilitet er derfor viktig i matematikkundervisningen.

De siste årene har det vært en del forskning på matematisk fleksibilitet. Haugom (2022) har i en litteraturstudie gått nærmere inn på seksten forskningsartikler innenfor temaet matematisk fleksibilitet. Hun konkluderer blant annet med at «grunnskoleelever ikke er fleksible, men at de kan utvikle fleksibilitet hvis det er et eksplisitt mål man arbeider systematisk med» (Haugom, 2022, s. 70). Skal elever utvikle fleksibilitet må matematikkundervisningen derfor legge til rette for fleksibilitet, og det må jobbes med jevnlig og relativt ofte (Durkin et al., 2017; Heinze et al., 2009; Verschaffel et al., 2011). Forskningen viser at det å lære flere strategier og sammenligne disse, er sentralt med tanke på å utvikle fleksibilitet. Samtidig er det mange lærere som har problemer med å bruke sammenligning av strategier på en hensiktsmessig måte i klasserommet (Durkin et al., 2017). Hva som blir sammenlignet, hvilke spørsmål som stilles i oppgaver og hvordan oppgaver og eksempler presenteres, har også betydning for utvikling av fleksibilitet (Durkin et al., 2017; Rittle-Johnson & Star, 2011; Star & Rittle-Johnson, 2008).

Det har vært lite forskning på matematisk fleksibilitet i læringsmateriell (Acevedo Nistal et al., 2014; Durkin et al., 2017). Vi mangler derfor kunnskap om hvordan læremidler i videregående skole legger til rette for utvikling av fleksibilitet. De siste årene har det blitt mer bruk av heldigitale læremidler også i matematikkundervisningen. Både foreldre og lærere har tatt til orde for mindre skjermbruk i skolen (Rosenlund-Hauglid, 2023) og mer tilgang til fysiske lærebøker (Jelstad, 2023). Forskning viser at fysiske lærebøker styrer mye av undervisningen (Meld. St. 28, (2015-2016)), og kvaliteten og designet på lærebøker er av den grunn viktig (Pepin et al., 2013). Skal noe skje jevnlig og ofte, er min erfaring at det må gjennomsyre både lærerens undervisning, oppgaver elevene jobber med, og læremidlene som brukes. Det viser at er det nødvendig å forske på hvordan bøkene er bygd opp slik at de kan brukes på en hensiktsmessig måte. I min studie vil jeg undersøke om lærebøker tilrettelegger for matematisk fleksibilitet. Min problemstilling er: **I hvilken grad og hvordan legger lærebøker til rette for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet?**

1.2 Innsnevring og forskningsspørsmål

1.2.1 Valg av matematisk tema

Sammenlignet med andre land, gjør norske elever det dårligere i algebra enn i andre emner (Bergem et al., 2016). Årsakene til dette er sammensatte. Noe av problemet kan skyldes vektleggingen av regler og prosedyrer i stedet for forståelse av hvorfor ting er som de er. Dette støttes av forskning som viser at elever i ungdomsskolen bruker formelle prosedyrer algoritmisk uten en dypere forståelse (Naalsund, 2012). Det kan tyde på at det i norsk skole er for mye vekt på prosedyrekunnskap (Drijvers, 2010). Skemp (1976, s. 20) bruker ordet instrumentell forståelse på det samme, og beskriver det som «rules without understanding», mens når en forstår sammenhenger kalles det relasjonell forståelse (Skemp, 1976) eller konseptuell kunnskap (Drijvers, 2010). Mange elever mangler relasjonell forståelse i algebra, og opplever det som krevende. Det er et problem siden algebra er viktig for å forstå sammenhenger senere i skoleløpet. Tall og Thomas (1991, s.128) sier at «… the introduction of algebra may make simple things hard, but not teaching algebra will soon render it impossible to make hard things simple». Dette stemmer med min egen erfaring. En tidligere elev i faget R2 uttalte en gang at «nå skjønner jeg hvorfor vi har lært alt vi har lært i matematikk». Mangler elevene relasjonell forståelse av det de har lært tidligere i matematikkfaget, er det blant annet algebra de får utfordringer med på høyere nivå. Siden matematisk fleksibilitet henger sammen med elevers relasjonelle forståelse, er algebra derfor et egnet tema til å undersøke fleksibilitet i læreverk. Haugom (2022) har også synliggjort at det er behov for å forske på fleksibilitet i andre temaer enn aritmetikk.

Mens aritmetikk handler om tallregning, brukes begrepet algebra om regning med bokstaver. Det handler blant annet om generalisering, problemløsning, funksjonsdrøfting, modellering, løsning av likninger og utforsking av formler (Blanton, 2008; Drijvers, 2010; Kieran, 2004; Mason, 1996). Algebra er sentralt i matematikkfagene 1T og R1. Det kommer blant annet frem i beskrivelsen av kjerneelementene til fagene, der det står at elever skal «… kunne uttrykke resultater og sammenhenger ved bruk av algebra …» (Utdanningsdirektoratet, 2020 og 2021, s. 3). To sentrale algebraiske sammenhenger i 1T er at elevene skal «utforske strategier for å løse ligninger, ligningssystemer og ulikheter…» og «utforske sammenhenger mellom andregradsligninger og andregradsulikheter, andregrads-funksjoner og kvadratsetningene og bruke sammenhengene i problemløsing» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 5). I R1 skal de «utforske og forstå regneregler for potenser og logaritmer, og bruke ulike strategier for å løse eksponentialligninger og logaritmeligninger» (Utdanningsdirektoratet, 2021, s. 5). I min studie vil jeg gå nærmere inn på hvordan lærebøker legger til rette for fleksibilitet spesielt i det som omhandler andregradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger. Skal elever utvikle høy grad av fleksibilitet innen løsning av likninger, må de både få kunnskap om ulike metoder og strategier, og de må lære seg å bruke hensiktsmessige strategier i ulike situasjoner. Andregradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger henger nært sammen med andre temaer innen algebra som for eksempel faktorisering og funksjoner. Elever som er matematisk fleksible og har en god instrumentell og relasjonell forståelse av slike likninger (Skemp, 1976), vil evne både å se og bruke disse sammenhengene.

1.2.2 Valg av lærebøker

I forbindelse med fagfornyelsen LK20 er det flere forlag som har gitt ut nye lærebøker på videregående nivå i matematikk. Samtidig er det et høyt antall digitale ressurser tilgjengelig. Noen skoler og enkeltlærere har valgt å bruke digitale nettressurser som NDLA (NDLA, u.å.) og Campus Inkrement (Inkrement, u.å.) som alternativ til tradisjonelle lærebøker. Til tross for dette er det mange skoler som har investert i nye lærebøker i forbindelse med LK20. Det er tre forlag som er dominerer på lærebokmarkedet innen matematikk i videregående opplæring. Jeg har derfor valgt å hente datamaterialet mitt fra læreverk i 1T og R1 fra alle disse tre forlagene. Dette er Aschehoug (Borgan et al., 2021; Borge et al., 2020), Gyldendal (Kalvø et al., 2020, 2021) og Cappelen Damm (Oldervoll et al., 2020, 2021). Alle disse har en kombinasjon av fysiske lærebøker og digitale ressurser, men jeg har kun brukt datamateriale fra de fysiske bøkene. En nærmere beskrivelse av utvalg jeg har gjort fra disse bøkene kommer jeg inn på i metodekapittelet.

1.2.3 Valg av analytisk rammeverk

De siste årene har det vært en del forskning på hvordan fleksibilitet kan utvikles (Haugom, 2022). Noe av forskningen viser betydningen av å eksponere elever for mange ulike strategier (Acevedo Nistal et al., 2014; Durkin et al., 2017; Gabler & Ufer, 2021; Lemonidis & Likidis, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). Forskning viser også at sammenligning av ulike strategier er sentralt for utvikling av elevers matematisk fleksibilitet (Acevedo Nistal et al., 2014; Durkin et al., 2017; Gabler & Ufer, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). For at sammenligningen skal ha effekt på elevers matematiske fleksibilitet, må det gjøres jevnlig og ofte, og med et fornuftig utvalg av strategier. I tillegg må gode spørsmål stilles, det visuelle designet må være hensiktsmessig, og det må legges til rette for matematiske samtaler (Durkin et al., 2017). Disse momentene er mulig å undersøke i lærebøker, og jeg vil derfor ha disse som utgangspunkt for min lærebokanalyse. En nærmere beskrivelse av hva som er fornuftig, godt og hensiktsmessig i forhold til sammenligning, kommer jeg tilbake til i teorikapittelet.

1.2.4 Valg av forskningsspørsmål

Jeg søker å finne svar på følgende forskningsspørsmål:

- I hvilken grad legger lærebøkene opp til sammenligning av ulike strategier?
- Hvordan legger lærebøkene opp til sammenligning av ulike strategier?

For å svare på disse spørsmålene vil jeg gjennomføre en innholdsanalyse (Cohen et al., 2018). Sentralt i en slik analyse er koding, valg av tema og kategorisering. Jeg kommer nærmere tilbake til metoden jeg har brukt i kapittel 3.

1.3 Studien og min rolle som lærerspesialist

Jeg har så langt argumentert for at hvis elever skal utvikle matematisk fleksibilitet, må det være et uttalt mål i undervisningen, og dermed også i lærebøkene som brukes. Jeg har også argumentert for at fleksibilitet i algebra er sentralt for elevens helhetlige forståelse i matematikk. Jeg vil nå si litt om nytten denne studien kan ha i min rolle som lærerspesialist.

Matematikk er et av flere viktige redskapsfag i norsk skole. Utvikling av elevers matematiske fleksibilitet bidrar til effektiv bruk av verktøyene i deres matematiske verktøykasse. Som lærerspesialist skal jeg være med på å profesjonalisere og videreutvikle egen skoles praksis innenfor matematikkfaget slik at vi «best mulig kan lede og støtte elevenes læring, utvikling og danning» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 18). I denne masteroppgaven vil jeg bidra til dette gjennom å undersøke hvordan lærebøker tilrettelegger for utvikling av fleksibilitet.

Siden lærebøker er styrende i mange klasserom (Meld. St. 28, (2015-2016)), er det viktig at lærere blir klar over hvordan ulike lærebøker er lagt opp slik at de kan bli nyttige instrumenter i undervisningen. Denne lærebokanalysen kan derfor bidra til både instrumentering, som handler om hvordan en kan lære av instrumentet, og til instrumentalisering, som handler om at en lærers kompetanse er viktig for hvordan et instrument blir brukt (Gueudet & Trouche, 2011; Pepin et al., 2013; Trouche, 2005). På den måten kan lærere få et bedre utgangspunkt til å bruke lærebøkene på hensiktsmessige måter for å bidra til utvikling av elevers fleksibilitet innen algebra.

1.4 Oppgavens struktur

I det neste kapittelet gjør jeg først rede for det teoretiske bakteppet og viktige sider ved fleksibilitet. Så går jeg nærmere inn på hva forskning sier må til for å utvikle fleksibilitet. I metodekapittelet starter jeg med å si noe om mitt utvalg av datamateriale. Deretter beskriver jeg hvordan jeg har brukt resultat fra forskning rundt sammenligning og fleksibilitet til å analysere datamaterialet. Her sier jeg også en del om hva jeg har gjort for å sikre at forskningen er troverdig. I resultatkapittelet presenterer jeg resultatene jeg har funnet på de to forskningsspørsmålene, mens i drøftingskapittelet drøfter jeg disse resultatene i forhold til den overordnede problemformuleringen, det teoretiske bakteppet og metodene jeg har brukt.

2 Teori

Jeg har i denne studien ønsket å finne ut hvordan lærebøker legger til rette for utvikling av fleksibilitet spesielt innenfor algebra. I dette kapittelet presenterer jeg teorien og forskningen jeg har hatt som utgangspunkt for min analyse. Jeg starter med å gi et overblikk over det teoretiske bakteppet for matematisk fleksibilitet. Deretter sier jeg litt om hva som menes med matematisk fleksibilitet og ulike sider ved begrepet, før jeg går nærmere inn på hva forskningslitteraturen sier må til for å utvikle matematisk fleksibilitet. Helt til slutt sier jeg litt om hva som kan være viktig å ha i tankene når en skal analysere lærebøker.

2.1 Teoretisk bakteppe: fra Piaget til Siegler

Å forstå hvordan barn og ungdom endrer sin måte å tenke på, er viktig for å kunne utvikle undervisningen både i skolen generelt og matematikk spesielt. Jean Piaget er sentral innen kognitiv teori og barns utvikling (Siegler, 1996). Han mente at barns logiske tenkning utvikler seg i stadier utfra alder, og at utviklingen skjer stegvis som i en trapp. Det første trinnet er det sensomotoriske stadiet (0 – 2 år), og så fortsetter det med preoperasjonell (2 – 7 år), konkret operasjonell (7 – 12 år) og formal operasjonell (12 år og oppover) (Siegler, 1996, s. 85). De ulike stadiene eller trappetrinnene illustrerer at når et barn har kommet opp til neste trappetrinn, vil det tenke mer abstrakt og logisk. Hvis vi trekker trappetrinnmodellen inn i elevers matematiske utvikling og valg av strategier, betyr Piaget sine tanker at når elever lærer mer abstrakte og mer avanserte metoder i skolen, slutter de å bruke strategier som er enklere og som de brukte da de var yngre.

En kritikk av trappetrinnsmodellen er at det sies lite om hvordan en kommer seg fra et trinn til det neste. Den tar heller ikke høyde for at barn kan fortsette å bruke ting de har lært tidligere, selv om de lærer noe nytt. Siegler (1996) sin overlappende bølgeteori trekker inn dette. Han beskriver barns kognitive utvikling ved hjelp av bølger, der hver bølge illustrerer en strategi, regel eller måte å tenke på. Hvor ofte et barn bruker en gitt strategi vil endre seg med alderen. Det å lære flere og kanskje mer effektive strategier, betyr ikke nødvendigvis at en slutter å bruke strategier en har brukt tidligere. En kan fortsette å bruke tidligere lærte strategier, slik at de overlapper hverandre, men det skjer gjerne sjeldnere enn før. Jeg gir videre et eksempel på hvordan jeg har erfart dette i egne klasserom.

I første klasse på videregående skole lærer elevene kvadratsetningene. Elevene har ikke problemer med å forstå hvorfor kvadratsetningene stemmer, og de får til å bruke dem hvis oppgavene sier at de skal bruke kvadratsetningene i konkrete oppgaver. Men det kommer alltid spørsmål om de må bruke setningene når det ikke blir presisert i oppgaven. Mange opplever at å multiplisere ut to parenteser slik de har gjort før er lettere, og da slipper de å pugge kvadratsetningene. Det er først når de har erfart at kvadratsetningene kan brukes baklengs, for å faktorisere uttrykk, at de ser nytten av dem. I starten bruker enkelte elever kvadratsetningene kun når de må, enten fordi oppgaven ber om det eller til faktorisering. Når det går noen måneder, og de har brukt setningene så mye at de kan dem utenat, bruker de dem oftere og oftere også når de ikke må. Det viser at når nye strategier blir automatisert og elevene ser nytten av dem, øker bruken.

Det kan være flere årsaker til at eldre barn og ungdommer tenker annerledes enn yngre, eller at noen holder seg til kjente strategier selv om de lærer nye og mer avanserte strategier. Siegler (1996) har funnet ut at dette henger sammen med både innlæring av nye strategier, endringer i frekvens, hurtighet, nøyaktighet og automatisering av nye strategier, og problemer en strategi kan bli brukt på. Dette er sentrale kjennetegn ved det vi i dag kaller matematiske fleksibilitet. Jeg vil i neste kapittel gå nærmere inn på hva som ligger i dette begrepet.

2.2 Hva er matematisk fleksibilitet?

Fleksibilitet defineres på ulike måter både i litteraturen og i tidligere forskning (Torbeyns et al., 2009). Det handler om å ha kunnskap om flere prosedyrer sammen med evnen og tendensen til å bruke dem der det passer (Newton et al., 2020). En kan også si at det handler om å kunne gjøre de rette tingene raskt og nøyaktig. Adaptivitet er et ord som ofte brukes i sammenheng med fleksibilitet. Noen bruker adaptivitet som et synonym på fleksibilitet, mens andre bruker adaptivitet som en av flere viktige sider ved begrepet matematisk fleksibilitet (Heinze et al., 2009; Lemonidis & Likidis, 2021; Verschaffel et al., 2009). Jeg vil i min studie gjøre det siste, og jeg definerer matematisk fleksibilitet som evnen til å bruke ulike og hensiktsmessige strategier på effektive måter. Med strategier mener jeg steg for steg prosedyrer for å løse et problem (Siegler, 1996). Matematisk fleksibilitet er et sammensatt begrep som består av de fire aspektene repertoar, frekvens, effektivitet og adaptivitet (Heinze et al., 2009; Lemaire & Siegler, 1995; Torbeyns et al., 2009). Jeg vil nå forklare disse fire ulike aspektene som er aktuelle både i forhold til ulike strategier, metoder og representasjoner. Jeg kommer for det meste til å bruke ordet strategier i mine beskrivelser.

2.2.1 Fire aspekter ved matematisk fleksibilitet

Repertoar

Repertoar handler om hvilke ulike strategier en har kunnskap om (Lemaire & Siegler, 1995; Siegler, 1996). En viktig forutsetning for elevers matematiske fleksibilitet, er at de opparbeider seg en god bredde i strategier for å løse ulike matematiske problemer. Det er ikke mulig å velge den mest hensiktsmessige strategien hvis de bare lærer en strategi. Hvis det i undervisningen bare legges vekt på prosedyrekunnskap (Drijvers, 2010) og få prosedyrer, hindrer det utvikling av elevers matematiske fleksibilitet.

Når det gjelder andregradslikninger, vil disse alltid kunne løses ved hjelp av andregradsformelen, som også kalles abc-formelen. Men det kan ofte være mer hensiktsmessig å bruke andre metoder, enten ved regning eller digitalt. Jeg kommer inn på flere av disse i metodekapittelet. Også logaritme- og eksponentiallikninger kan løses ved hjelp av ulike strategier. For å kunne velge den mest hensiktsmessige strategien i gitte problemer, må elevene kjenne til forskjeller og sammenhenger mellom de ulike strategiene. Undervisningen må derfor legge til rette for at elevene blir eksponert for mange ulike strategier. Det må også legges til rette for sammenligning av de ulike strategiene. Dette kommer jeg tilbake til i kapittel 2.3.

Frekvens

Frekvens sier noe om hvor ofte og til hvilke problemer en bruker de ulike strategiene (Lemaire & Siegler, 1995; Siegler, 1996). For å utvikle matematisk fleksibilitet er det viktig at elevene bruker de ulike strategiene mange ganger. På den måten blir de trygge på strategien, og lærer seg å bruke den både raskt og nøyaktig. Det er også viktig at de får utvidet hvilke problemer de kan bruke de ulike strategiene på. For eksempel kan strategien med faktorisering og produktregel for å løse andregradslikninger, også brukes for å løse noen logaritme- og eksponentiallikninger av høyere grad (se Figur 2.1). Når elever ser og forstår dette, utvikler de både instrumentell- og relasjonell forståelse. De blir i tillegg mer matematisk fleksible, og kan lettere gjøre hensiktsmessige valg av strategier.

Problem 1:

$$x^2 + 3x = 0$$
$$x(x+3) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = -3$$

Problem 2:

$$(\lg x)^3 - 4(\lg x)^2 = 0$$
$$(\lg x)^2\,(\lg x - 4) = 0$$
$$(\lg x)^2 = 0 \quad \vee \quad \lg x - 4 = 0$$
$$(\lg x)^2 = 0 \quad \vee \quad \lg x = 4$$
$$x = 10^0 \quad \vee \quad x = 10^4$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = 10000$$

Figur 2.1: Faktorisering og produktregel på to problem

Effektivitet

Effektivitet sier noe om hvordan en evner å bruke de ulike strategiene (Lemaire & Siegler, 1995). Effektiv bruk av strategier handler både om nøyaktighet og hurtighet. For å forbedre effektiviteten og flyten i utførelsen av de ulike strategiene, er det viktig å automatisere de ulike strategiene (Heinze et al., 2009; Siegler, 1996). Da må ting jobbes med flere ganger og over lengre tid. For å løse ting raskest mulig, kan det være nyttig å redusere antall steg i en utregning eller problemløsning.

Newton et al. (2020) argumenterer for at det som er mest effektivt for en elev ikke nødvendigvis er det for en annen. Dette stemmer med min egen erfaring. Enkelte elever klarer å gjennomføre strategier som medfører algebraisk utregning både raskere og mer nøyaktig enn hvis de løser ting grafisk, mens for andre er det motsatt. Noen andregradslikninger kan enkelte elever løse effektivt ved hjelp av for eksempel ved hjelp av sum og produkt av nullpunktene, bare ved å se nullpunktene utfra likningen. Andre elever må notere ned alle mulige kombinasjoner og multiplisere og addere disse før de ser løsningen. På samme måte kan det være stor forskjell på hvor lang tid elevene bruker på finne riktige og eksakte svar ved hjelp av andregradsformelen. Elever som klarer å utføre en bredde av strategier på effektive måter, har et godt utgangspunkt når det gjelder å bli matematiske fleksible.

Adaptivitet

Adaptivitet sier noe om evnen til å velge den beste egnede strategien utfra en gitt situasjon (Lemaire & Siegler, 1995; Verschaffel et al., 2009). Det som er best egnet i en situasjon er ikke alltid best egnet i en annen situasjon. For eksempel kan overslagsregning være best egnet når du står i butikken og lurer på om du har nok penger til det du har lagt i handlekorga. Da er nøyaktigheten av svaret ikke det viktigste. I andre situasjoner, som ved utregning av medisindoser, vil en prosedyre som gir eksakt svar være best egnet. I matematikkundervisningen skal vi hjelpe elevene til å ta slike hensiktsmessige valg.

Når en skal løse andregradslikninger, er det ulike strategier som fungerer best på ulike typer andregradslikninger. For eksempel vil en andregradslikning uten konstantledd lettest kunne løses med produktregelen slik jeg viste i Figur 2.1. En likning uten førstegradsledd løses mest effektivt ved å ta kvadratroten på begge sider av likningen slik jeg viser i Figur 2.2. Begge type likninger kan løses med andregradsformelen, men det fører til flere steg, og er derfor ikke mest hensiktsmessig for denne typen andregradslikninger. Adaptivitet handler om at elevene skal evne å se hva som er best egnet i ulike situasjoner og problemer.

Strategi 1:

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = 3 \quad \vee \quad x = -3$

Strategi 2:

$x^2 - 9 = 0$

$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{\pm 6}{2}$

$x = \frac{6}{2} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{-6}{2} = -3$

Figur 2.2: Andregradslikning uten konstantledd løst på to måter

2.2.2 Kunnskap og bruk av ulike strategier

Det å ha kunnskap om ulike strategier, er ikke nødvendigvis det samme som at en bruker ulike strategier. Så selv om en elev blir eksponert for mange ulike strategier gjennom undervisningen, er det ikke sikkert at vedkommende bruker en bredde av strategier. Det er heller ikke gitt at elever bruker den mest effektive (Finesilver, 2017; Hickendorff, 2018). Dette kommer tydelig frem i Siegler (1996) sin overlappende bølgeteori, der hver bølge illustrerer en strategi. Det kan være at eleven velger å bruke en metode som alltid fungerer, selv om det i en del tilfeller kunne vært mer effektivt å bruke en annen strategi. En elev som konsekvent bruker andregradsformelen på alle andregradslikninger kan bli veldig god på å bruke formelen riktig, og utvikler det som kan kalles en rutine ekspertise (Verschaffel et al., 2009) innenfor temaet andregradslikninger.

Newton (2020, s. 504) bruker uttrykket «the gap between knowledge and use» for å illustrere avstanden mellom kunnskap og faktisk bruk av ulike strategier. Noen forskere velger å differensiere dette enda mer, og skiller mellom kunnskap om flere strategier, kunnskap om effektive strategier, bruk av flere strategier og bruk av effektive strategier (Newton et al., 2020; Star & Rittle-Johnson, 2008). Det å ha kunnskap om mange ulike strategier, og å kunne gjennomføre disse både raskt og eksakt, henger sammen med instrumentell forståelse. Men for å øke bruken av flere strategier, gjennomføre disse effektivt og velge den beste i de ulike situasjonene, må elevene også inneha relasjonell forståelse. Det stemmer med forskning som viser at både konseptuell kunnskap og prosedyrekunnskap er en nødvendig forutsetning for å utvikle matematisk fleksibilitet (Newton et al., 2020). For å redusere gapet mellom kunnskap og bruk, må elevene med andre ord inneha forståelse i vid betydning, både instrumentelt og relasjonelt (Skemp, 2006). Jeg vil nå gå nærmere inn på hva som må til for å utvikle matematisk fleksibilitet.

2.3 Hvordan kan fleksibilitet utvikles?

Matematisk fleksibilitet kan utvikles på flere måter (Haugom, 2020). Forskning viser blant annet at faktorer som elevers prestasjonsnivå (Finesilver, 2017; Hickendorff, 2018; Hopkins et al., 2022; Star et al., 2009), dagsform (Finesilver, 2017), alder (Torbeyns et al., 2017) og kjønn (Hickendorff, 2018) har betydning for deres matematiske fleksibilitet. Fleksibilitet bør være et tydelig mål for alle elever (Star et al., 2009; Zhang et al., 2014), men noen elever trenger språklig støtte (Gabler & Ufer, 2021) og tilpasset opplæring (Finesilver, 2017; Hopkins et al., 2022; Zhang et al., 2014). Alle disse funnene er interessante og viktige sider av det å utvikle fleksibilitet. I min analyse har jeg likevel ikke gått inn på disse, da det vil være vanskelig å lage gode målinger på dette utfra lærebøker. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i andre funn fra forskningen som er viktige for å fremme fleksibilitet, og som jeg opplever som mer relevante i en lærebokanalyse.

Et gjentagende funn i forskningen er at elever kan utvikle fleksibilitet hvis det «er et eksplisitt mål man arbeider systematisk mot» (Haugom, 2022, s. 54). I utgangspunktet er elever lite fleksible (Hickendorff, 2018, 2020; Hopkins et al., 2022; Torbeyns et al., 2017). Forskning viser at deltakere utvikler fleksibilitet når det er et mål i matematikkundervisningen (Durkin et al., 2017; Finesilver, 2017; Gabler & Ufer, 2021; Lemonidis & Likidis, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). Siden lærebøker er styrende for undervisningen (Meld. St. 28, (2015-2016)), betyr det at også lærebøkene må ha det som et eksplisitt mål. Men hva betyr dette i praksis for lærebøker? Hvordan kan en se i lærebøker at fleksibilitet er et eksplisitt mål? Jeg vil i denne studien ha som utgangspunkt at hvis fleksibilitet skal være et eksplisitt mål i lærebøker, må momenter som anbefales i forskning for å utvikle fleksibilitet komme tydelig til syne i lærebøkene. Jeg vil spesielt se på om lærebøker legger opp til å presentere og sammenligne ulike strategier. Av den grunn vil jeg videre vise hva forskningen sier om hvordan dette kan gjøres på gode måter.

2.3.1 Ulike strategier må presenteres

Mye av forskningen trekker frem betydningen av å eksponere elever for mange ulike strategier (Acevedo Nistal et al., 2014; Durkin et al., 2017; Gabler & Ufer, 2021; Lemonidis & Likidis, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). Dette henger sammen med at repertoar er et viktig aspekt ved matematisk fleksibilitet slik jeg skrev om i kapittel 2.2.1 (Lemaire & Siegler, 1995; Siegler, 1996). Det betyr at hvis undervisningen skal fremme fleksibilitet hos elevene, må lærerne vise ulike strategier og metoder i sin undervisning. Dette vil være lettere å få gjennomført i praksis hvis ulike strategier vises i lærebøkene.

2.3.2 Ulike strategier må sammenlignes jevnlig og ofte

I tillegg til effekten av å eksponere elever for ulike strategier, viser forskningen viktigheten av å sammenligne de ulike strategiene (Acevedo Nistal et al., 2014; Durkin et al., 2017; Gabler & Ufer, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). Sammenligning handler om å bli bevisst på forskjeller og likheter mellom ulike metoder, hvorfor metodene fungerer, og hva som skiller dem (Durkin et al., 2017). Hvis elevene ikke blir utfordret til å sammenligne, vil de ikke tenke gjennom sammenhenger og forskjeller mellom de ulike strategiene. Durkin, Star og Rittle-Johnson (2017) viser gjennom seks egne studier, at sammenligning har best effekt når det blir gjort jevnlig og ofte, og etter at elevene har lært en grunnleggende strategi godt først. For at lærebøker skal bidra til dette, må sammenligning trekkes inn både i teori, eksempler og ulike typer oppgaver. I eksempler må det komme tydelig frem at her sammenlignes flere strategier, og i oppgaver må elevene bli bedt om å sammenligne. Det må gjøres et fornuftig utvalg av strategier, gode spørsmål må stilles, det visuelle designet må være hensiktsmessig, og det må legges til rette for samtale rundt sammenligning (Durkin et al., 2017). Jeg vil bruke disse momentene som utgangspunkt i min studie, og presenterer derfor disse nærmere.

2.3.3 Det må gjøres et fornuftig utvalg av strategier

For å få til god sammenligning, er det viktig å være bevisst på hva elevene blir bedt om å sammenligne. Elevene kan bli bedt om å sammenligne ulike strategier for å løse samme problem, lignende problem som kan løses med en lignende strategi, eller ulike problemer som kan løses med samme strategi (Durkin et al., 2017; Rittle-Johnson & Star, 2011). Forskning viser at dyktige matematikklærere bruker sammenligning av ulike strategier for å løse samme problem i sin undervisning (Durkin et al., 2017). Samtidig er det andre lærere som har problemer med å bruke sammenligning av strategier i klasserommet på en god måte. Lærere trenger veiledning i hvilke temaer og hvordan en kan sammenligne for å nå ulike læringsmål. Av den grunn trenger de støtte og tips til hvordan de kan bruke sammenligning i undervisningen (Durkin et al., 2017). Det er et viktig argument for at lærebøkene bør legge opp til dette.

2.3.4 Gode spørsmål må stilles

For å få elever til å sammenligne på hensiktsmessige måter, er det viktig å stille gode spørsmål. Durkin, Star og Rittle-Johnson (2017, s. 592) anbefaler fire spørsmål som kan stilles: «Which is better?, Why does it work?, Which is correct?, and How do they differ?». Dette kan også være gode spørsmål å stille i lærebøker hvis de skal fungere som støtte for lærere når de skal legge til rette for sammenligning. Spørsmål som «When can you use it?» og «What consept do they share» kan også være aktuelle (Rittle-Johnson & Star, 2011, s. 202). Jeg vil nå gi en nærmere beskrivelse av hva som kan være hensikten med slike spørsmål.

Hvis en vil sammenligne flere strategier som gir samme svar, kan det være naturlig å stille spørsmål om hvilken strategi som fungerer best. Da må elevene gjøre seg noen tanker rundt hva som er mest effektivt, enten i forhold til nøyaktighet eller tidsbruk. Det kan også stilles spørsmål om hva som er likt og hva som skiller de ulike metodene. Da må elevene gå nærmere inn på hva som faktisk er forskjellen på de ulike strategiene. For å få elevene til å gå enda grundigere inn i forskjeller og likheter, kan det være nyttig å spørre om hvorfor det fungerer. På den måten blir elevene oppfordret til å lete etter grunnleggende strukturer i de ulike strategiene.

Hvis en ønsker at elever skal sammenligne en eller flere korrekte løsninger med en eller flere ukorrekte løsninger, er det mer naturlig å spørre om hvilken eller hvilke strategier som er riktige. Dette kan være hensiktsmessig hvis en vil gjøre elevene oppmerksomme på en strategi som fungerer av og til, men ikke alltid. Det kan også være nyttig hvis en vil gjøre elevene bevisste på vanlige feil eller misforståelser. Min erfaring er at når de blir gjort oppmerksom på typiske feil, er det litt mindre sannsynlig at de gjør samme feil. Det stemmer med forskning som viser at å sammenligne en riktig og en feil metode fører til færre misforståelser og hyppigere bruk av korrekte metoder (Rittle-Johnson & Star, 2011). Hvis vi ikke stiller gode spørsmål, er det en fare for at elevene henger seg opp i mindre viktige forskjeller i ulike strategier. Da kan de gå glipp av de viktigste forskjellene mellom de ulike strategiene, og dermed vil sammenligningen ha svakere effekt på utviklingen av elevenes matematiske fleksibilitet.

2.3.5 Det visuelle designet må være hensiktsmessig

Forskning viser at godt visuelt design er en viktig forutsetning for å få til god sammenligning. Elever med noe grunnleggende kunnskap i det aktuelle emnet, lærer best ved å sammenligne strategier som står oppstilt ved siden av hverandre, enten på ark eller på tavla. Elever uten grunnleggende kunnskap lærer like godt enten det legges opp til sammenligning av strategier side-ved-side, eller om strategier blir vist etter hverandre (Durkin et al., 2017). Elever med svakt grunnlag opplever det å sammenligne som krevende, men hvis de får bedre tid eller jobber med færre eksempler lærer også disse best ved side-ved-side-sammenligning. I Figur 2.3 viser jeg et eksempel på side-ved-side-sammenligning av to strategier for å løse en logaritmelikning. Her har jeg merket de ulike løsningsstegene med oransje tekst. Ved å merke de ulike løsningsstegene, blir det lettere å sammenligne de ulike strategiene (Durkin et al., 2017). Merking kan brukes i eksempler, både når det legges opp til side-ved-side-sammenligning, og når ulike strategier vises sekvensielt. I oppgaver kan elever bli bedt om å merke stegene selv. Det kan knyttes til spørsmålet «Why does it work?».

Strategi 1:		**Strategi 2:**	
$\lg x^3 = 9$		$\lg x^3 = 9$	
$3 \lg x = 9$	*Bruker* $\lg a^b = b \lg a$	$x^3 = 10^9$	*Bruker* $\lg x = a \Leftrightarrow x = 10^a$
$\lg x = 3$	*Dividerer med 3*	$x = \sqrt[3]{10^9}$	*Tredjerot på begge sider*
$x = 10^3$	*Bruker* $\lg x = a \Leftrightarrow x = 10^a$	$x = 10^3$	
$x = 1000$		$x = 1000$	

Figur 2.3: Side-ved-side-sammenligning

Som en del av Durkin, Star og Rittle-Johnson sine studier om sammenligning, utviklet de eget undervisningsmateriell som de kalte «Worked example pairs (WEPs)» med utgangspunkt i de fire spørsmålene «Which is better?, Why does it work?, Which is correct?, and How do they differ?» (Durkin et al., 2017, s. 590). Her ble ulike strategier vist side-ved-side, og ulike steg var godt merket. Lærere ble oppfordret til å bruke materialet jevnlig i sin undervisning, men det varierte hvor mye det ble brukt. Studiene viste at desto oftere materialet ble brukt, desto bedre ble elevenes prosedyrekunnskap. Det var utfordrende å få lærere til å bruke tilleggsmaterialet ofte nok når det ikke var inkludert i det ordinære undervisningsmaterialet. Det viser at om sammenligning skal bli brukt jevnlig og på en hensiktsmessig måte i undervisningen, må det legges opp til dette i lærebøker. Siden forskning viser at side-ved-side-sammenligning og merking er effektivt, må dette også vises igjen i lærebøkenes design. Dette har jeg sett etter i min analyse.

2.3.6 Det må legges til rette for samtale rundt sammenligning

Durkin, Star og Rittle-Johnsen (2017) anbefaler at lærere legger opp til matematiske samtaler for å sammenligne ulike strategier. Dette kan være samtaler både i små grupper og i klassen som helhet. En metodikk som kan brukes for å legge til rette for slike samtaler, kalles individuell-gruppe-plenum-metodikk (Kverndokken, 2015). Da starter elevene med å jobbe individuelt hver for seg, før de samtaler i grupper. Det hele oppsummeres i plenum i hele klassen. For å få til gode samtaler, er det nyttig å bruke samtaletrekk som å gjenta, tilføye og vente (Wæge, 2015). Det anbefales også at lærere på forhånd ser for seg hva som kan skje i en slik samtale, og at de har en plan for hva de vil med samtalen. For å få til dette er de fem praksisene for matematiske samtaler hensiktsmessige (Stein et al., 2008). Disse handler om at lærere må forutse hva som kan dukke opp i samtalen, observere de ulike gruppene, velge ut hva som skal snakkes om i hele klassen, og i hvilken rekkefølge de bør presenteres for å få frem sammenhenger mellom de ulike forslagene. Målet med samtalene må være at elevene skal oppdage sammenhenger og forskjeller mellom ulike strategier. Selv om både samtaletrekk og fem praksiser er nyttig for å få til gode samtaler, vil jeg ikke bruke disse konkret i min analyse av lærebøker. Jeg vil i stedet se på om og hvordan lærebøkene legger opp til sammenligning i det som kalles samtaleoppgaver. Det jeg i de foregående kapitlene har skrevet om valg av strategier, type spørsmål og visuelt design, er sentralt også når det skal legges opp til matematiske samtaler for å sammenligne ulike strategier.

3 Metode

Jeg har gjennomført en lærebokanalyse om fleksibilitet, som vil si at jeg har hentet inn kvalitative data fra trykte tekster. I dette kapittelet går jeg nærmere inn på hvordan jeg valgte ut, organiserte og analyserte datamaterialet. Jeg starter med å si noe generelt om utvalg av datamateriale, før jeg går konkret inn på mitt utvalg av datamateriale. I beskrivelsen av analysen av datamaterialet, sier jeg noe generelt om koding og kategorisering, før jeg går nærmere inn på hvordan jeg har kodet og kategorisert materialet fra lærebøkene. Til slutt beskriver jeg hva som er viktig, og hva jeg har gjort, for å sikre at forskningen følger etiske retningslinjer og er troverdig.

3.1 Utvalg av datamateriale

3.1.1 Generelt om utvalg av datamateriale

Datamateriale til forskning kan hentes fra alt fra spørreskjema, intervju, observasjon og aksjonsforskning til ulike tekster (Cohen et al., 2018). Spørreskjema i en stor populasjon er et eksempel på innhenting av kvantitative data, mens lærebokanalyse av noen få bøker er et eksempel på innhenting av kvalitative data fra tekster.

Når en skal hente datamateriale til forskning, må en velge data som er representativt for det en vil forske på. Med kvalitative data undersøkes ikke store mengder data slik en ville gjort med kvantitative data. Desto viktigere er det at utvalget gir et bilde av virkeligheten og har overførbarhet til resten av fagfeltet. Dette bidrar til at forskningen blir ekstern valid (Cohen et al., 2018; Guba, 1981). Jeg kommer nærmere inn på dette begrepet i Kapittel 3.4. Utvalget av data bør ikke være for smalt og for lite, men heller ikke for stort. Er utvalget for smalt vil det ikke være representativt, og er det for stort kan arbeidet med å analysere materialet bli så omfattende at en ikke får gjort det grundig nok. Jeg vil nå gå nærmere inn på hvordan jeg valgte ut datamaterialet mitt.

3.1.2 Konkret om utvalg av datamateriale

For at materialet skulle være mest mulig representativt, valgte jeg å hente datamaterialet fra lærebøker som er mye brukt i videregående skole i dag. For å finne aktuelle lærebøker, startet jeg med å søke på bilder i Google. Jeg brukte først søkeordene «lærebok matematikk 1T» og «lærebok matematikk R1». Da kom det opp bilder av lærebøker fra tre forlag fra både LK06 og LK20. De tre forlagene var Aschehoug, Cappelen Damm og Gyldendal. Jeg la etterpå til «LK20» i søkene, men det dukket ikke opp lærebøker fra flere forlag. At disse tre forlagene dukket opp som de eneste utgiverne av lærebøker i matematikk på videregående nivå, stemmer med inntrykket jeg hadde fra før. Inntrykket er basert på informasjon skolen vår har fått tilsendt fra forlag, samtale med kollegaer på egen og andre skoler, og innspill i ulike diskusjonsfora for matematikklærere. Av den grunn valgte jeg ut materiale fra totalt seks lærebøker fra de tre forlagene: Matematikk 1T og R1 fra Aschehoug (Borgan et al., 2021; Borge et al., 2020), Sinus 1T og R1 fra Cappelen Damm (Oldervoll et al., 2020, 2021) og Mønster 1T og R1 fra Gyldendal (Kalvø et al., 2020, 2021). Dette er de fysiske lærebøkene som brukes mest på videregående skoler i dag i fagene Matematikk 1T og Matematikk R1. En del skoler bruker bare digitale læremidler. Digitale læremidler finnes både hos disse tre forlagene, og hos andre aktører som NDLA (NDLA, u.å.) og Campus Inkrement (Inkrement, u.å.). Jeg har ikke tatt med digitale læremidler som en del av datamaterialet mitt.

For å finne svar på forskningsspørsmålene, om og hvordan lærebøkene legger opp til sammenligning, har jeg spesielt sett på teori, eksempler og oppgaver knyttet opp til andregradslikninger i 1T og logaritme- og eksponentiallikninger i R1. Jeg startet med å se på andregradslikninger i 1T, og gjorde en testkoding av dette materialet. Jeg fant lite sammenligning av strategier her. I en av lærebøkene i R1 hadde jeg tidligere observert noen gode eksempler på sammenligning. Av den grunn valgte jeg å ta med logaritme- og eksponentiallikninger i R1 i datamaterialet mitt.

Før jeg valgte ut hvilke kapitler og sidetall jeg skulle kode, så jeg på helheten i bøkene. Bøkene er ulikt lagt opp, både i forhold til rekkefølgen på ulike temaer og på hvor oppgaver er plassert. Derfor måtte jeg gjøre noen avveininger ved valg av sider som skulle kodes. Jeg valgte ut delkapitler som er aktuelle for andregradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger, og jeg tok med alle oppgaver som er direkte knyttet til delkapitlene jeg valgte å kode. Blandede oppgaver og kapitteltester tok jeg ikke med, fordi der er det oppgaver fra flere delkapitler. Før jeg avgjorde dette, så jeg over de blandede oppgavene for å se om det kunne være mer sammenligning i dem. Oppgavene der så ganske like ut som tidligere i bøkene. Mitt hovedmateriale er derfor bøkene og sidene i disse, som beskrevet i Tabell 3.1. De aktuelle sidene kopierte jeg opp, slik at jeg kunne notere og kode direkte på hver side. I Kapittel 3.2.2 går jeg inn på hvordan jeg kodet og kategoriserte materialet.

TEMA	**ANDREGRADSLIKNINGER**		
Forlag	Aschehoug	Cappelen Damm	Gyldendal
Lærebok	Matematikk 1T (Borge et al., 2020)	Sinus 1T Matematikk (Oldervoll et al., 2020)	Mønster Matematikk 1T (Kalvø et al., 2020)
Sidetall	115 – 128	95 – 100, 106 – 115, 340 – 343	82 – 97, 112 – 116
TEMA	**LOGARITME- OG EKSPONENTIALLIKNINGER**		
Forlag	Aschehoug	Cappelen Damm	Gyldendal
Lærebok	Matematikk R1 (Borgan et al., 2021)	Sinus R1 Matematikk (Oldervoll et al., 2021)	Mønster Matematikk R1 (Kalvø et al., 2021)
Sidetall	15 – 53	17 – 44, 307 – 317	24 – 53, 57 – 61

Tabell 3.1: Utvalg av data til koding

3.2 Analyse av datamateriale

Data kan analyseres med ulike metoder, og Cohen (2018) og Braun og Clarke (2012) presenterer flere måter å organisere, analysere og presentere ulike typer data på. Å organisere utfra tema eller forskningsspørsmål er to metoder som begge er aktuelle i en lærebokanalyse. Temaet i denne lærebokanalysen er matematisk fleksibilitet. Som jeg viste i teorikapittelet, er det et ganske vidt tema som omfatter mange aspekter og ulike elementer. For å analysere datamaterialet tok jeg derfor utgangspunkt i teori og forskning knyttet til de to forskningsspørsmålene og sammenligning av strategier. Andre aspekter og sider ved begrepet matematisk fleksibilitet trakk jeg inn i drøftingen.

Jeg analyserte datamaterialet kvalitativt ved å gjennomføre det Cohen kaller "content analysis". En slik innholdsanalyse defineres som "the process of summarizing and reporting written data – the main contents of data and their messages" (Cohen et al., 2018, s. 674). Sentralt i denne analysen er koding, kategorisering, sammenligning og konkludering. Det handler om å kode datamaterialet og dele det opp i grupper og kategorier utfra tydelige kriterier, for deretter sammenligne og konkludere i forhold til problemstilling og forskningsspørsmål.

Innholdsanalyse ligner på det Braun og Clarke (2012) kaller tematisk analyse. Tematisk analyse beskrives som "a method for systematically identifying, organizing, and offering insight into patterns of meaning across a data set" (Braun og Clarke, 2012, s. 57). Selve analysen struktureres i seks faser (min oversettelse): (1) Gjøre seg kjent med datamaterialet, (2) kode data, (3) lete etter tema, (4) revurdere mulige tema, (5) definere og gi navn til temaer og (6) skrive rapport. Også her er koding sentralt. Det Braun og Clarke kaller temaer tilsvarer Cohen sine kategorier. Selv om jeg har valgt å bruke innholdsanalyse som hovedramme, har jeg elementer fra temaanalysen i min analyse. For eksempel har jeg brukt tid på å gjøre meg kjent med datamaterialet før jeg startet kodingen. I tillegg har jeg tatt utgangspunkt i en sjekkliste for god tematisk analyse for å sikre troverdighet i forskningen min (Braun & Clarke, 2006, s. 96). Dette kommer jeg nærmere inn på i Kapittel 3.4.2. Nå vil jeg gå nærmere inn på hva som menes med å kode og kategorisere et datamateriale.

3.2.1 Generelt om koding og kategorisering

En kode er et kort navn som gis til en del av datamaterialet hvis dette sier noe av det samme eller handler om det samme som en annen del av materialet (Cohen et al., 2018). Noe av materialet kan passe til flere koder, og det finnes flere varianter av koding. De ulike kodene kan regnes som viktige byggesteiner i analysen (Braun & Clarke, 2012). Sammenligning av koder og kategorier skal ende i en konklusjon som gir svar på de ulike forskningsspørsmålene.

Endel teoretikere og forskere skiller mellom deduktiv og induktiv koding (Braun & Clarke, 2012; Cohen et al., 2018). I induktiv koding vil kodene bestemmes utfra det som kommer frem i datamaterialet. Det handler om å få et overblikk over data for å frembringe aktuelle koder, kategorier og relasjoner mellom disse, for deretter å bruke dette til å se hva som er typisk i materialet. I deduktiv koding kan de ulike kodene ha sitt utspring fra et teoretisk rammeverk, og det kalles ofte teoretisk koding.

Koding kan gjøre det lettere å finne mønster i materialet og hvilke kategorier de ulike kodene hører til. Kategorier er nøkkeltrekk som viser ulike sammenhenger i materialet (Cohen et al., 2018). Å måle hyppighet av koder kan si noe om viktigheten og forekomsten av ulike kategorier, og kan være et nyttig metodisk verktøy i innholdsanalysen. St. Pierre og Jackson (Cohen et al., 2018) advarer mot å lete etter mønster når det egentlig ikke finnes noe mønster. De mener også at måling av hyppighet er et svik mot den kvalitative naturen til kvalitative data, mens Denscombe bruker dette som en hjelp i analysen: "Analysing the text from the basis of the unit frequencies and how they relate to other units in the text" (Cohen et al., 2018, s. 675). Jeg vil i det neste kapittelet vise hvordan jeg konkret kodet og kategoriserte materialet mitt for å kunne sammenligne og konkludere i forhold til mine to forskningsspørsmål (Braun & Clarke, 2012).

3.2.2 Konkret om koding og kategorisering

Det første forskningsspørsmålet handler om å finne ut i hvilken grad lærebøkene legger opp til sammenligning av ulike strategier. For å kunne sammenligne strategier, må elevene både eksponeres for ulike strategier, og de må sammenligne strategier jevnlig og ofte (Acevedo Nistal et al., 2014; Durkin et al., 2017; Gabler & Ufer, 2021; Lemonidis & Likidis, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). Jeg har derfor laget en metode for å undersøke både hvor mange ulike strategier lærebøkene presenterer for å løse både andregradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger, og hvor ofte det legges til rette for sammenligning.

Før jeg startet med å undersøke hvor mange strategier lærebøkene presenterer, tenkte jeg gjennom ulike strategier som kan brukes. Noen aktuelle strategier for å løse andregradslikninger er beskrevet i Tabell 3.2 nedenfor. Fire av disse er måter å faktorisere likninger på slik at produktregelen kan brukes.

	Aktuelle strategier	Kjennetegn/kommentar
1	abc-formelen: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Alle likninger på formen $ax^2 + bx + c = 0$
2	Kvadratrot på begge sider	Hvis vi mangler førstegradsledd, $b = 0$
3	Produktregelen på et faktorisert uttrykk:	$m \cdot n = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee n = 0$
	a) Sette felles faktor utenfor parentes	Hvis vi mangler konstantledd, $c = 0$
	b) Produkt og sum av kvotientene	$b = -(x_1 + x_2) \ \wedge \ c = x_1 \cdot x_2$
	c) Kvadratsetninger	Hvis den er på formen $m^2 \pm 2mn + n^2$ eller $m^2 - n^2$
	d) Fullstendige kvadraters metode	Legge til og trekke fra $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ når $a = 1$
4	Geometriske løsninger	Ved hjelp av kvadrater og rektangler
5	Grafisk	Enten på papir eller digitalt
6	CAS	
7	Programmering	

Tabell 3.2: Strategier for å løse andregradslikninger

Det er ikke like lett å gi en eksakt oversikt over strategier for å løse eksponential- og logaritmelikninger. For det første er det ikke en formel som fungerer på alle slike likninger. For det andre kan flere ulike definisjoner og regler brukes for å løse eksponential- og logaritmelikninger, og en kan bruke disse i ulik rekkefølge og fremdeles komme frem til samme svar. I Tabell 3.3 har jeg skissert noen ulike strategier som kan brukes for å løse slike likninger.

	Aktuelle strategier	Kjennetegn/kommentar
1	Definisjonen til briggske logaritmer $10^x = a \Leftrightarrow x = \lg a$	«Sette inn» 10 eller *lg* på begge sider
2	Definisjonen til naturlige logaritmer $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$	«Sette inn» *e* eller *ln* på begge sider
3	Logaritmesetninger	
4	Potensregler	
5	Ulike strategier for andregradslikning	
6	Grafisk	
7	CAS	
8	Programmering	

Tabell 3.3: Strategier for å løse eksponential- og logaritmelikninger

Strategiene i Tabell 3.2 og Tabell 3.3 brukte jeg til å nummerere hvert eksempel og hver oppgave i lærebøkene, utfra hvilke strategier som ble vist eller spurt etter. For å finne ut hvor ofte bøkene legger opp til sammenligning, telte jeg antall eksempler og antall innlærings-, utforsk- og snakkoppgaver som viste eller la opp til sammenligning. Dette kodet jeg med SA slik jeg viser øverst i Tabell 3.4 på neste side.

Tema og kategorier	Aktuell forskning	Kjennetegn og spørsmål	Kode
1) Regularitet av sammenligning			
Skjer sammenligningen jevnlig og ofte?	(Durkin et al., 2017; Star & Rittle-Johnson, 2008; Stein et al., 2008; Wæge, 2015)	Viser **eksemplene** sammenligning av ulike strategier?	SA
		Spør **innlæringsoppgavene** etter flere strategier eller sammenligning?	SA
		Legger **utforskoppgavene** opp til sammenligning?	SA
		Spør **samtaleoppgavene** etter flere strategier eller sammenligning?	SA
2) Utvalg av strategier og problemer			
*Hva blir sammenlignet i **eksempler og oppgaver**?*	(Durkin et al., 2017; Rittle-Johnson & Star, 2011)	Ulike metoder til samme problem?	US
		Lignende metode til lignende problem?	LL
		Samme metode til ulike problem?	SU
		Ulike eksempler for å se sammenheng og regler? *(Induktiv kode)*	SH
3) Type spørsmål			
*Hvilke type spørsmål stilles i **oppgavene**?*	(Durkin et al., 2017; Rittle-Johnson & Star, 2011)	Hvilken fungerer best?	BEST
		Hvilken er rett?	RETT
		Hva er ulikt?	ULIK
		Hvorfor fungerer det?	WHY
		Løs med flere metoder *(Induktiv kode)*	MET
4) Visuelt design ved sammenligning av ulike strategier			
Hvordan er det visuelle designet?	(Durkin et al., 2017)	Side ved side?	SVS
		Sekvensielt?	SEK
		Merkes (label) de ulike løsningsstegene i **eksemplene**?	LAB

Tabell 3.4: Kategorier, kjennetegn og koder

Det andre forskningsspørsmålet mitt handler om hvordan lærebøkene legger opp til sammenligning av ulike strategier. For å undersøke dette, har jeg kodet datamaterialet utfra anbefalingene som Durkin, Star og Rittle-Johnson (2017) gir for at sammenligning skal ha god effekt. Disse egenskapene beskrev jeg i Kapittel 2.3. Selv om disse egenskapene ikke danner et tydelig teoretisk rammeverk, har jeg laget koder med utspring i noe som er skissert opp av forskning fra før (Braun & Clarke, 2012; Cohen et al., 2018). Det vil si at jeg har brukt deduktiv koding. I praksis har jeg brukt en kombinasjon av induktiv og deduktiv koding. Dette fordi noen koder dukket opp underveis i arbeidet med datamaterialet. Dette er kodene SH og MET. Alle kodene er beskrevet i Tabell 3.4 på forrige side. Denne tabellen er revidert flere ganger etter noen runder med testkoding. Selve hovedkodingen ble gjennomført i to runder. Først gikk jeg gjennom hele datamaterialet og noterte SA på alle eksempler og oppgaver som på en eller annen måte viser sammenligning (i eksempler) eller ber elevene sammenligne (i oppgaver). Deretter gikk jeg grundigere inn i alle de eksempler og oppgaver jeg hadde kodet med SA. Disse kodet jeg en gang til utfra utvalg, spørsmål og visuelt design. Jeg vil videre gi noen konkrete eksempler på hvordan jeg kodet og kategoriserte materialet.

Figur 3.1 viser en innlæringsoppgave fra Aschehoug (Borgan et al., 2021) som jeg har kodet med SA – US – RETT – SVS. Oppgaven viser to strategier for å forenkle et logaritmeuttrykk, der den ene strategien er feil. To strategier gir koden SA. Sammenligning av ulike strategier til samme problem gir koden US. Jeg bruker koden RETT selv om oppgaven ikke stiller spørsmålet «Hvilken er rett?» eksplisitt. Dette har jeg gjort fordi den ene strategien gir feil svar. Setningen «Kommenter løsningene.» gjør at elevene må reflektere over om noen av løsningene er riktige og hvorfor de er det. Av den grunn kunne også koden WHY blitt brukt, men jeg har valgt å gi hver oppgave og hvert eksempel bare en kode av hver farge. Til slutt har jeg kodet med SVS fordi de to strategiene er tydelig vist ved siden av hverandre.

1.54

Johannes og Vetle skal forenkle uttrykket $\ln(a^2 - b^2) - \ln(a + b)$. Kommenter løsningene.

Johannes gjør slik:

$$\ln(a^2 - b^2) - \ln(a + b) = \ln a^2 - \ln b^2 - \ln a - \ln b$$
$$= 2\ln a - 2\ln b - \ln a - \ln b$$
$$= \ln a - 3\ln b$$

Vetle gjør slik:

$$\ln(a^2 - b^2) - \ln(a + b) = \ln\left(\frac{a^2 - b^2}{a + b}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(a + b)\cdot(a - b)}{(a + b)}\right)$$
$$= \ln(a - b)$$

Figur 3.1: Innlæringsoppgave (Borgan et al., 2021, s. 30)

Figur 3.2 på neste side viser en samtaleoppgave fra samme bok. Denne er kodet med SA – US – BEST – SVS. Oppgaven viser tre strategier for å forenkle logaritmeuttrykk som alle gir riktige svar. Spørsmålet «Hvilken foretrekker du?» gav koden BEST siden elevene må gjøre en vurdering av hvilken strategi de mener egner seg best. Jeg har kodet med SVS selv om de ulike strategiene står rett under hverandre. Dette fordi oppstillingen her gjør at det er enkelt å sammenligne de tre ulike strategiene. Alternativet er sekvensiell oppstilling. Med det legger jeg at ulike strategier presenteres helt adskilt, med både teori, eksempler og oppgaver, før neste strategi blir presentert. I en lærebok ville det føre til flere sider mellom ulike strategier, og det ville vært vanskeligere å sammenligne likheter og forskjeller mellom dem.

SNAKK

Ummair, Marie og Ane skal skrive uttrykket $\lg x^2 - \lg x$ enklere.

Ummair prøver slik: $\lg x^2 - \lg x = 2\lg x - \lg x = \lg x$.

Marie prøver slik: $\lg x^2 - \lg x = \lg\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lg x$.

Ane prøver slik: $\lg x^2 - \lg x = \lg(x \cdot x) - \lg x = \lg x + \lg x - \lg x = \lg x$.

Kommenter framgangsmåtene. Hvilken foretrekker du?

Figur 3.2: Samtaleoppgave (Borgan et al., 2021, s. 26)

Figur 3.3 viser en utforskoppgave fra Gyldendal (Kalvø et al., 2021) som jeg har kodet med SA – SH – WHY – SVS. Her er det ikke sammenligning av ulike strategier, men sammenligning av flere talleksempler for å finne matematiske sammenhenger. Dette er også nyttige sammenligninger med tanke på å utvikle matematisk fleksibilitet, og jeg valgte derfor å bruke den induktive koden SH på denne og andre lignende oppgaver. Ordet «forklar» har gitt koden WHY.

UTFORSK

1 Regn ut:

$\lg 2 \quad \lg 2^2 \quad \lg 2^3 \quad \lg 2^4$

Finner du noen sammenheng? Forklar.

2 Regn ut:

$\lg\frac{1}{2} \quad \lg\frac{1}{4} \quad \lg\frac{1}{8}$

Hvordan stemmer utregningene med det du kom fram til i oppgave 1?

3 Undersøk tilsvarende sammenhenger for naturlige logaritmer.

Figur 3.3: Utforskoppgave (Kalvø et al., 2021, s. 30)

3.163

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^2 - 7x + 3$$

Bestem nullpunktene til f både ved regning og digitalt.

Figur 3.4: Innlæringsoppgave (Oldervoll et al., 2020, s. 342)

Figur 3.4 viser en innlæringsoppgave i Cappelen Damm som jeg kodet med SA – US – MET. Dette er et eksempel på en oppgave som ber elevene løse oppgaven både ved regning og digitalt. Oppgaven spør etter flere metoder, men det stilles ikke noen spørsmål som jeg finner igjen hos Durkin, Star og Rittle-Johnsen (2017). Siden jeg fant flere slike oppgaver i bøkene valgte jeg likevel å ta dem med som sammenlignende oppgave, men med den induktive koden MET.

3.3 Etikk

3.3.1 Generelt om etikk

I all forskning er det viktig å følge de grunnleggende forskningsetiske retningslinjene som utarbeides av den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH, 2021). Som forskere må vi ta hensyn til og respektere enkeltpersoner, grupper, institusjoner, samarbeidspartnere og eventuelle oppdragsgivere som forskningen angår. Alle må behandles på en rettferdig måte. Forskere må jobbe for at ingen av de involverte personene og partene får en psykisk eller fysisk belastning ved å delta i forskningen. Dette er spesielt viktig når det forskes på spesielt sårbare grupper. Alle involverte parter må gi et frivillig og skriftlig samtykke til å delta. De må være godt informert om hva det innebærer å være med i forskningen.

Forskere må være redelige og strebe etter å finne sannhet. Både metodologiske og institusjonelle normer må følges. Det handler blant annet om at forskningen må være objektiv, saklig, etterprøvbar, åpen og uavhengig, som også vil si at forskningen må være troverdig. Dette kommer jeg mer inn på i Kapittel 3.4. All forskning må unngå partiskhet eller det som i forskermiljøer kalles bias (Guba, 1981). Det må også tas hensyn til forskerfellesskapet ved å følge god henvisningsskikk og unngå plagiering, fabrikkering, fordreining og fortielse.

3.3.2 Konkret om etikk

Siden jeg har lærebøker som datamateriale, unngår jeg noen av de mulige kritiske etiske punktene i forskningen min. Dette ble bekreftet da jeg sjekket om jeg måtte fylle inn meldeskjema for personopplysninger (Sikt, u.å.). Jeg kunne svare nei på alle spørsmål om personopplysninger. Hensyn til personvern er med andre ord ivaretatt. Likevel må jeg gjøre andre etiske betraktninger i min forskning. Disse vil jeg nå gå nærmere inn på.

Som forsker må jeg være objektiv. I lærebokanalysen innebærer det blant annet at jeg ikke må la mine egne preferanser i forhold til valg av lærebøker styre forskningen. Hvis jeg hadde laget koder som ikke var basert på teori og forskning, kunne mine preferanser og synspunkter blitt styrende for resultatet av forskningen. Dette unngår jeg ved å bruke resultater fra andre forskere og teoretikere til å organisere og analysere datamaterialet, slik jeg beskrev i Kapittel 3.2.

Jeg hadde heller ikke vært objektiv og upartisk hvis jeg hadde vært med på å skrive en lærebok i matematikk på videregående skole. Da kunne jeg vridd på sannheten til min læreboks eller forlags fordel. I forskning skal vi aldri vri på sannheten. Men det hadde vært en fare hvis jeg var inhabil, siden jeg hadde havnet i en interessekonflikt. Jeg har aldri vært med på å skrive lærebøker, og har heller ingen nære slektninger, venner eller kollegaer som har skrevet lærebøker i matematikk. Jeg som forsker kan derfor regnes som uavhengig og upartisk i denne lærebokanalysen.

Et kritisk etisk punkt i en lærebokanalyse vil være ettermælet til de som har skrevet lærebøkene. I den sammenheng tenker jeg både på hver enkelt lærebokforfatter og forlagene som har gitt ut bøkene. Av den grunn må jeg strebe etter å få frem sannhet ved å ha kvalitet og systematikk i forskningen min. Jeg må gjøre et utvalg av bøker og sidetall i disse som gir et representativt bilde, og ikke velge bort deler av materialet som kunne gitt en fordreining av resultatet i forhold til det som var sant.

3.4 Troverdighet i forskningen

3.4.1 Generelt om troverdighet

For å sikre troverdighet i forskning, må forskere ha søkelys på validitet og reliabilitet (Cohen et al., 2018; Guba, 1981). Validitet handler om å sikre at metoden vi bruker faktisk undersøker det vi har tenkt å undersøke. Cohen og Guba skiller mellom intern og ekstern validitet. Begge knytter begrepet «truth value» til intern validitet. Det viser at intern validitet sier noe om resultatet forskere finner er sant og riktig. Dette understreker viktigheten av sannhetsnormen i forskning (NESH, 2021). Intern validitet i min analyse handler om at jeg må sikre at jeg undersøker det jeg ønsker å undersøke i lærebøkene. En annen viktig side ved troverdighet, er om forskningen er anvendelig og generaliserbar. Når forskning kan overføres til annet sammenlignbart materiale er den ekstern valid. I hvilken grad mine resultater kan generaliseres til alle lærebøker, henger sammen med ekstern validitet.

Reliabilitet sier noe om vi kan tro på resultatet av forskningen (Cohen et al., 2018; Guba, 1981). Er resultatet presist, nøyaktig og konsistent? Ville vi fått samme resultat hvis vi gjorde samme undersøkelse til en annen tid? Hadde en annen forsker med utgangspunkt i samme analytiske rammeverk fått samme resultat? Dette er spørsmål enhver forsker må stille seg både før, under og etter at forskningen er gjennomført. Tidsperspektivet har mindre betydning i min undersøkelse. Lærebøker er stabile helt til det kommer en ny utgave, slik det har gjort i forbindelse med fagfornyelsen LK20. Det er mer interessant om en annen forsker ville fått samme resultat utfra samme rammeverk. I neste kapittel vil jeg gå nærmere inn på hva jeg konkret har lagt vekt på for å sikre at min forskning blir troverdig.

3.4.2 Konkret om troverdighet

For å øke graden av validitet og reliabilitet har jeg gått gjennom en 15-punkts sjekkliste med kriterier for god tematisk analyse (Braun & Clarke, 2006, s. 96). Denne har vært nyttig også i min innholdsanalyse (Cohen et al., 2018) av lærebøker. Jeg vil nå beskrive hva jeg konkret gjorde for å sikre troverdighet med utgangspunkt i denne sjekklisten.

Både Braun & Clarke og Cohen understreker viktigheten av å være grundig i kodingen. For å sikre dette gjorde jeg testkoding på deler av materialet. Resultatet av testkodingen førte til at jeg utvidet datamaterialet mitt ved å ta med eksponential- og logaritmelikninger i tillegg til andregradslikninger. Testkodingen gjorde også at jeg så behovet for å gå enda grundigere inn i tidligere forskning. Deretter reviderte jeg kategoriene, kjennetegnene og kodene i Tabell 3.4. Disse kjennetegnene og spørsmålene gjorde det lettere å gjennomføre koding på hele materialet. Jeg forsøkte å undersøke alle delene av datamaterialet like grundig og med like mye tid i alle fasene av forskningen. I analysen av datamaterialet prøvde jeg å tolke og gi mening, og ikke bare beskrive. Sjekklista (Braun og Clarke, 2006, s. 96) understreker at det er viktig at det jeg sier at jeg gjør stemmer med det jeg viser at jeg gjør. Alle disse punktene har jeg hatt søkelys på for å sikre troverdighet i forskningen min.

Jeg hadde et mål om å være så systematisk og tydelig at en annen forsker kan replikere studien og få samme resultat. For å teste ut om jeg lykkes med dette, fikk jeg en kollega til å kode en del av datamaterialet. Før hun gjennomførte kodingen hadde jeg en samtale med henne. Da gikk jeg gjennom litt om bakgrunnen for forskningen. Jeg viste også noen eksempler på oppgaver jeg hadde kodet, og begrunnelser for hvorfor jeg hadde valgt disse kodene. Hun fikk utdelt Tabell 3.4 med kategorier, kjennetegn og koder. Hun fikk også papirkopier av materialet jeg brukte fra Aschehoug sin bok i R1 (Borgan et al., 2021). De to siste sidene hadde falt av før hun kodet, og det justerte jeg for da jeg sammenlignet med mine tall. Da hun var ferdig med kodingen, fikk jeg papirkopiene tilbake med kodingen på. Vi hadde en ny prat, og gikk gjennom og sammenlignet noe av det vi begge hadde kodet, slik at jeg forstod hvordan hun hadde tenkt. I etterkant gikk jeg gjennom det hun hadde kodet og sammenlignet det med mine resultater. Jeg vil i de neste avsnittene kommentere hvordan hennes koding sammenfalt med min.

Jeg fant at interrater-reliabiliteten ble 66,7 % på det jeg i Tabell 3.4 kalte regularitet av sammenligning. Dette fordi jeg kodet 30 av totalt 110 oppgaver og eksempler med SA, mens min kollega kodet 20 av de samme med SA. Den tydeligste forskjellen var at hun mente at ingen av de oppgavene som jeg hadde kodet med SA – SH la opp til sammenligning av ulike strategier. En annen ting som kom frem, var at hun mente at å sammenligne en riktig og en feil strategi, ikke kan kalles å sammenligne strategier. Hun hadde derfor bare kodet en oppgave med RETT. Denne forskjellen kan komme av at hun ikke fikk en grundig nok innføring i forskningen bak dette spørsmålet, slik jeg beskrev i Kapittel 2.3.4. Det kan også komme av at det gikk noen uker fra vi hadde den første samtalen, til hun gjennomførte selve kodingen.

De fleste oppgaver, som legger opp til noe sammenligning, kodet vi begge med US – MET. Det vil si at det er mest sammenligning av ulike strategier til samme problem, og i oppgaver spørres det mest etter metoder. Dette er sentrale funn i min analyse som jeg kommer nærmere inn på i resultatkapittelet.

4 Resultat

I dette kapittelet presenterer jeg resultatet av innholdsanalysen jeg har gjort på det utvalgte datamaterialet fra lærebøkene. I Kapittel 4.1 svarer jeg på det første forskningsspørsmålet, og i Kapittel 4.2 svarer jeg på det andre. Overskriftene i underkapitlene viser hovedfunnene i analysen.

4.1 I hvilken grad legger lærebøkene opp til sammenligning?

Et resultat i min analyse er at alle lærebøkene presenterer flere ulike strategier for å løse andregradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger, men de legger i mindre og ulik grad opp til at elevene skal sammenligne strategiene. Det legges derfor ikke opp til at elevene skal sammenligne ofte og jevnlig. Jeg vil nå gå inn på hvert delresultat og vise hvorfor jeg konkluderer slik.

4.1.1 Ulike strategier blir presentert

Alle lærebøkene presenterer flere strategier for å løse andregradslikninger og logaritme- og eksponentiallikninger. På den måten legger bøkene til rette for å utvikle elevers repertoar. Dette er et viktig aspekt ved matematisk fleksibilitet (Lemaire & Siegler, 1995) som tidligere forskning viser har betydning for utvikling av matematisk fleksibilitet (Acevedo Nistal et al., 2014; Durkin et al., 2017; Gabler & Ufer, 2021; Lemonidis & Likidis, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). Tabell 4.1 og 4.2 gir oversikt over de ulike strategiene som kommer frem i de ulike bøkene. I tillegg til disse strategiene kommer generelle strategier ved å løse likninger, som å legge til og trekke fra, multiplisere og dividere og så videre. Jeg vil videre i dette delkapittelet gå nærmere inn på forskjellen mellom de ulike bøkene, og jeg vil vise noen eksempler på strategier i lærebøkene.

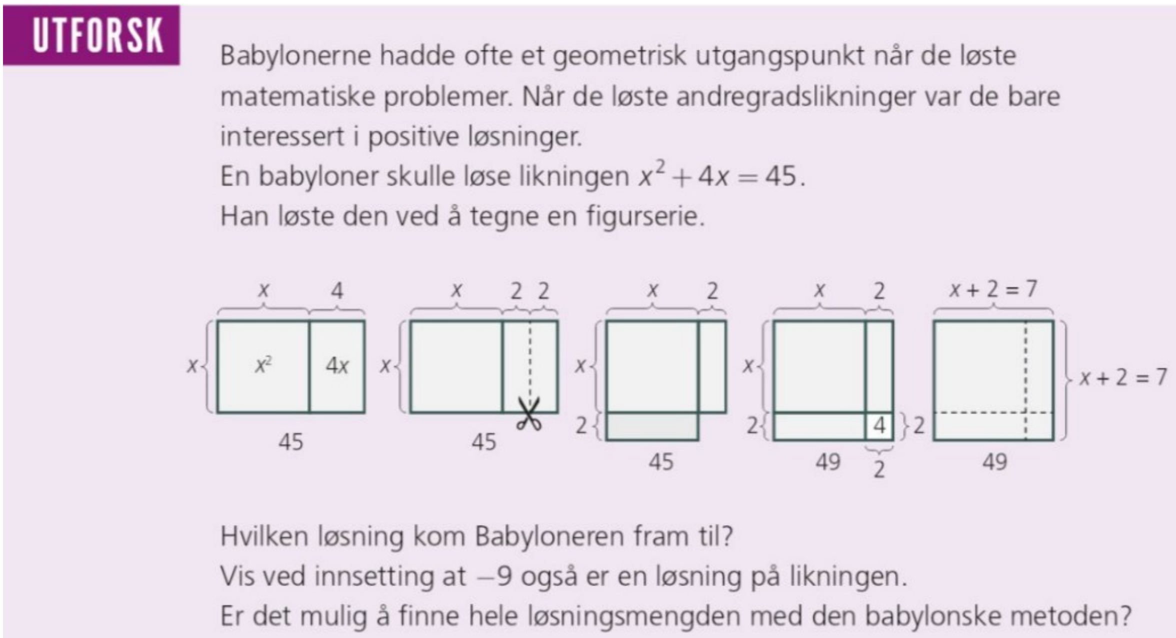
	Aktuelle strategier	Aschehoug	Cappelen Damm	Gyldendal
1	abc-formelen	x	x	x
2	Kvadratrot på begge sider	x		x
3	Produktregelen:			
	a) Sette felles faktor utenfor parentes	x	x	x
	b) Produkt og sum av kvotientene		x	x
	c) Kvadratsetninger			x
	d) Fullstendige kvadraters metode	x	x	x
4	Geometrisk	x	x	x
5	Grafisk		x	x
6	CAS	x	x	x
7	Programmering	x	x	x

Tabell 4.1: Strategier for andregradslikninger i matematikk 1T

	Aktuelle strategier	Aschehoug	Cappelen Damm	Gyldendal
1	Definisjonen til briggske logaritmer	x	x	x
2	Definisjonen til naturlige logaritmer	x	x	x
3	Forenkle ved å bruke logaritmesetninger	x	x	x
4	Forenkle likningene med potensregler	x		x
5	Strategier for andregradslikning	x	x	x
6	Grafisk	x		
7	CAS	x	x	x
8	Programmering	x		

Tabell 4.2: Strategier for eksponential- og logaritmelikninger i matematikk R1

Aschehoug (Borge et al., 2020) har presentert sju ulike strategier for å løse andregradslikninger (se Tabell 4.1). De starter med en geometrisk utforskoppgave (se Figur 4.1). Denne oppgaven fungerer som utforsking for å bli kjent med eldre måter å tenke på, men den knyttes ikke opp til dagens måter å løse andregradslikninger på. Aschehoug har ikke med grafisk løsning i kapittelet om andregradslikninger. Det viser de først i kapittelet som omhandler funksjoner, og det kommer lengre bak i boka. De har med produktregelen, men viser ikke eksempler på å faktorisere verken ved hjelp av kvadratsetninger eller sum og produkt i kapitlet om andregradslikninger. De har gjennomgått dette tidligere i læreboka, men knytter det ikke spesielt opp mot det å løse andregradslikninger. De har et eget delkapittel lengre bak i boka som handler om nullpunktfaktorisering. Men de knytter dette bare til å faktorisere uttrykk, og ikke til å løse andregradslikninger.


UTFORSK

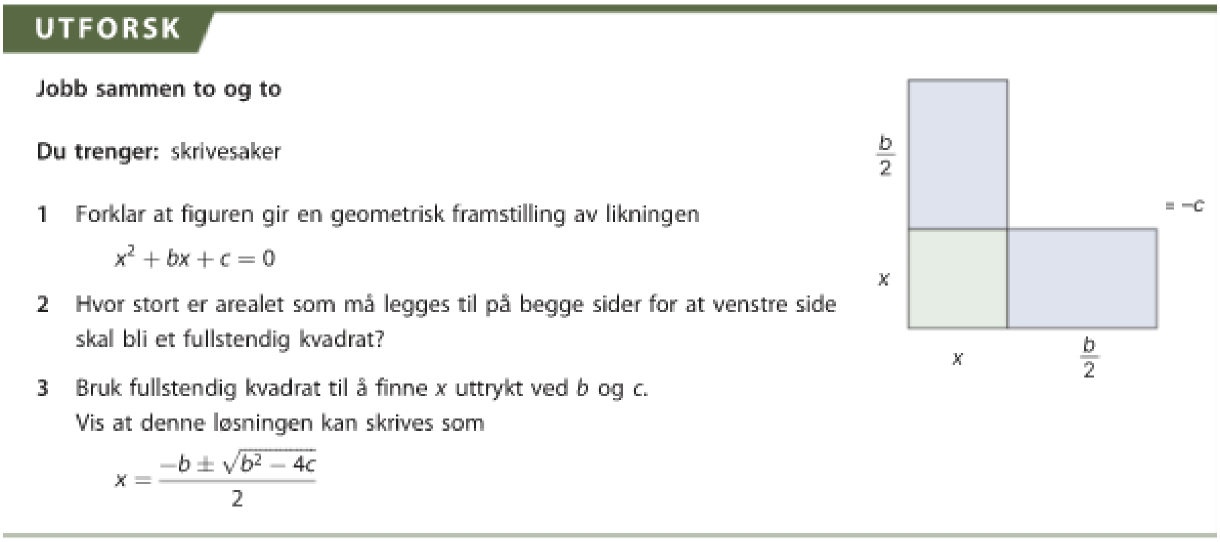
Babylonerne hadde ofte et geometrisk utgangspunkt når de løste matematiske problemer. Når de løste andregradslikninger var de bare interessert i positive løsninger.
En babyloner skulle løse likningen $x^2 + 4x = 45$.
Han løste den ved å tegne en figurserie.

Hvilken løsning kom Babyloneren fram til?
Vis ved innsetting at -9 også er en løsning på likningen.
Er det mulig å finne hele løsningsmengden med den babylonske metoden?

Figur 4.1: Geometrisk løsning av andregradslikning (Borge et al., 2020, s. 115)

Cappelen Damm (Oldervoll et al., 2020) har med åtte ulike strategier for å løse andregradslikninger (se Tabell 4.1). De starter med et eget delkapittel om grafiske løsninger, og dermed legger de opp til at elevene skal se sammenhengen mellom antall nullpunkter og antall løsninger av en andregradslikning. De viser ikke at andregradslikninger uten førstegradsledd kan løses ved å ta kvadratroten på begge sider, og de viser ikke at en i noen tilfeller kan faktorisere ved hjelp av kvadratsetninger før en bruker produktregelen. Også denne boka presenterer kvadratsetninger tidligere i boka. Før de introduserer abc-formelen, har de en geometrisk utforskoppgave fra araberne som ligner på den til babylonerne i Figur 4.1.

Gyldendal (Kalvø et al., 2020) har med alle strategiene for å løse andregradslikninger jeg beskrev i Kapittel 3.2.2 (se Tabell 4.1). Denne boka bruker geometrisk tilnærming på en annen måte enn de to andre bøkene. Aschehoug og Cappelen Damm knytter det ikke opp mot dagens måter å løse andregradslikninger på, mens Gyldendal bruker geometrisk tilnærming for at elevene selv skal komme frem til andregradsformelen (se Figur 4.2). Dette ligner på tankegangen om å gjenoppdage matematikken som var sentralt for Freudenthal i realistisk matematikkundervisning (Skott, 2008).



UTFORSK

Jobb sammen to og to

Du trenger: skrivesaker

1 Forklar at figuren gir en geometrisk framstilling av likningen

$$x^2 + bx + c = 0$$

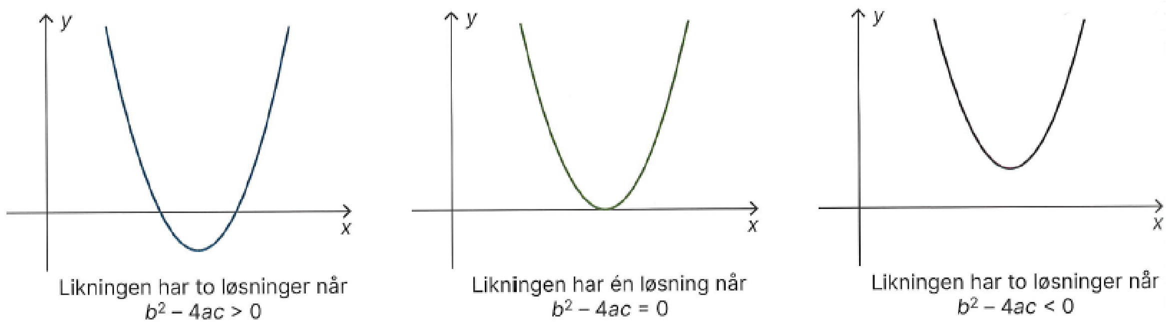
2 Hvor stort er arealet som må legges til på begge sider for at venstre side skal bli et fullstendig kvadrat?

3 Bruk fullstendig kvadrat til å finne x uttrykt ved b og c.
Vis at denne løsningen kan skrives som

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Figur 4.2: Geometrisk utforsking av abc-formelen (Kalvø et al., 2020, s. 89)

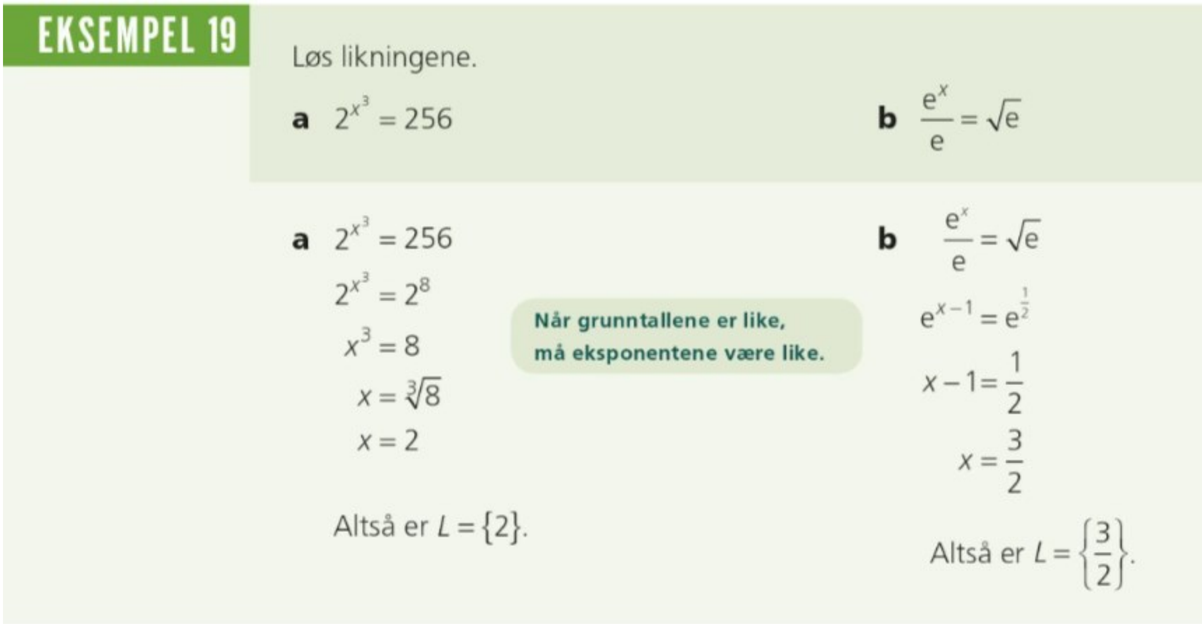
Grafisk løsning er i boka fra Gyldendal vektlagt mindre enn hos Cappelen Damm, men elevene blir bedt om å utforske sammenhengen mellom diskrimanden og antall nullpunkter ved å tegne grafer til ulike uttrykk. De viser i etterkant av dette hvordan grafen ser ut når vi har én, to eller ingen løsninger (se Figur 4.3).



Figur 4.3: Grafisk illustrasjon av antall nullpunkter (Kalvø et al., 2020, s. 92)

I kapitlene om logaritme- og eksponentiallikninger er det Aschehoug (Borgan et al., 2021) som har vist flest strategier (se Tabell 4.2). Denne boka er alene om å vise både grafisk løsning og hvordan krevende logaritmelikninger kan løses ved hjelp av halveringsmetoden og programmering. Lengre bak i lærebøkene til Cappelen Damm (Oldervoll et al., 2021) og Gyldendal (Kalvø et al., 2021) har de egne kapitler om eksponential- og logaritmefunksjoner. Her vises hvordan en kan finne nullpunkter grafisk. Halveringsmetoden blir ikke presentert i noen av de to bøkene, men Gyldendal (Kalvø et al., 2020) har det med som et eget delkapittel om numerisk løsning av likninger i 1T, men ikke i R1.

Cappelen Damm (Oldervoll et al., 2021) viser ikke hvordan potensregler kan brukes til å løse noen varianter av eksponentiallikninger uten å bruke logaritmer. Det har begge de andre med. I Figur 4.4 viser jeg et eksempel fra Aschehoug, der eksponentiallikninger løses ved hjelp av potensregler uten å blande inn logaritmer.


EKSEMPEL 19

Løs likningene.

a $2^{x^3} = 256$ **b** $\dfrac{e^x}{e} = \sqrt{e}$

a $2^{x^3} = 256$

$2^{x^3} = 2^8$

$x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8}$

$x = 2$

Når grunntallene er like, må eksponentene være like.

Altså er $L = \{2\}$.

b $\dfrac{e^x}{e} = \sqrt{e}$

$e^{x-1} = e^{\frac{1}{2}}$

$x - 1 = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{3}{2}$

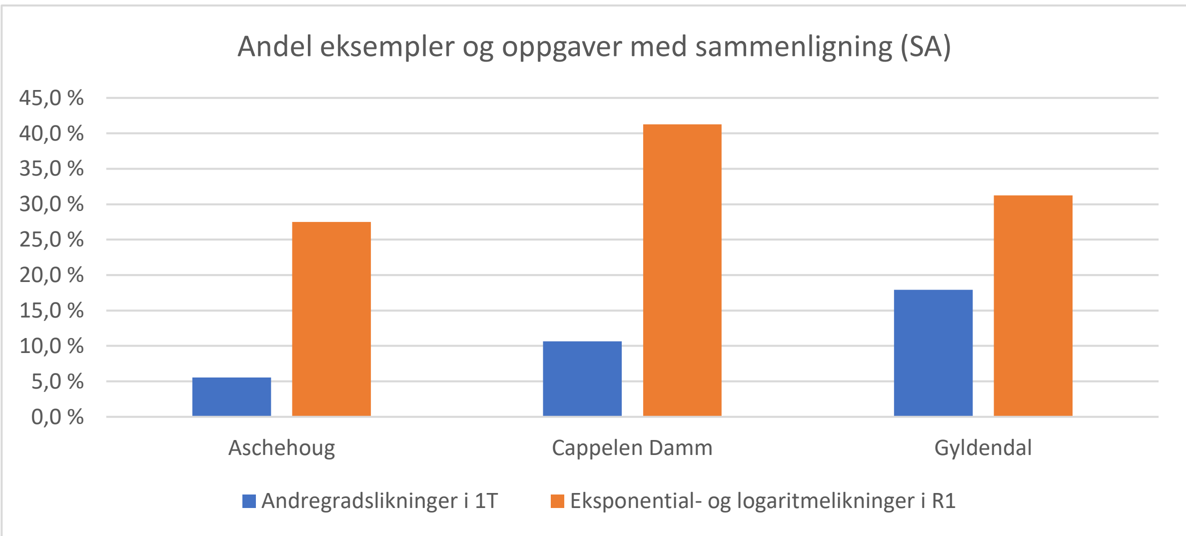
Altså er $L = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Figur 4.4: Eksponentiallikning løst med potensregler (Borgan et al., 2021, s. 38)

Jeg har i dette delkapittelet vist at selv om det er forskjeller i bøkene på hvor mange strategier de har presentert, legger alle lærebøkene opp til at elevene skal lære mange ulike strategier for å løse både andregradslikninger og logaritme- og eksponentiallikninger.

4.1.2 Hyppigheten av sammenligning varierer

Et annet resultat i min analyse er det er stor variasjon, både mellom de ulike lærebøkene og de ulike temaene, mellom hvor ofte og jevnlig det legges opp til sammenligning av ulike strategier. Det som kommer tydeligst frem, er at lærebøkene legger opp til mer sammenligning av logaritme- og eksponentiallikninger i R1 enn av andregradslikninger i 1T. I Figur 4.5 viser jeg hvordan dette fordeler seg prosentvis i både eksempler og oppgaver som jeg har kodet i bøkene. I Tabell 4.3 og 4.4 vises fordelingen på det jeg har kodet til SA (sammenligning) i eksempler og ulike typer oppgaver i de lærebøkene.



Figur 4.5: Andel sammenligning i lærebøkene

	Andregradslikninger i 1T								
	Aschehoug			Cappelen Damm			Gyldendal		
	Frekvens	Totalt	Prosent	Frekvens	Totalt	Prosent	Frekvens	Totalt	Prosent
Eksempler	0	10	0 %	0	7	0 %	5	11	45 %
Innlæringsoppgaver	3	38	8 %	4	36	11 %	4	43	9 %
Utforskoppgaver	0	3	0 %	0	2	0 %	2	10	20 %
Samtaleoppgaver	0	3	0 %	1	2	50 %	1	3	33 %
Totalt	3	54	6 %	5	47	11 %	12	67	18 %

Tabell 4.3: Sammenligning i lærebøker i 1T

	Logaritme- og eksponentiallikninger i R1								
	Aschehoug s. 15 - 53			Cappelen Damm			Gyldendal		
	Frekvens	Totalt	Prosent	Frekvens	Totalt	Prosent	Frekvens	Totalt	Prosent
Eksempler	6	24	25 %	10	19	53 %	6	20	30 %
Innlæringsoppgaver	14	76	18 %	31	85	36 %	7	51	14 %
Utforskoppgaver	9	11	82 %	3	3	100 %	12	17	71 %
Samtaleoppgaver	4	9	44 %	1	2	50 %	5	8	63 %
Totalt	33	120	28 %	45	109	41 %	30	96	31 %

Tabell 4.4: Sammenligning i lærebøker i R1

Totalt legges det lite opp til sammenligning i eksempler og oppgaver knyttet til andregradslikninger, med 6 % hos Aschehoug (Borge et al., 2020), 11 % hos Cappelen Damm (Oldervoll et al., 2020) og 18 % hos Gyldendal (Kalvø et al., 2020). Når vi ser på eksempler og ulike typer oppgaver hver for seg, er det litt større variasjoner. 50 % av samtaleoppgavene hos Cappelen Damm ber om sammenligning, men det er bare to samtaleoppgaver totalt. Aschehoug og Cappelen Damm sammenligner ikke i noen av eksemplene i datamaterialet fra 1T, mens Gyldendal sammenligner i 45 % av eksemplene (se Tabell 4.3). Ett av disse viser hvilke metoder som anbefales til å løse andregradslikninger med ulike egenskaper (se Figur 4.6). Her merkes egenskapene ved de ulike variantene av andregradslikninger tydelig slik det anbefales i tidligere forskning (Durkin et al., 2017), og anbefalte løsningsmetoder forklares godt.

Valg av løsningsmetode

Alle andregradslikninger kan løses med løsningsformelen. Men det er ikke alltid det letteste, lureste eller raskeste.

Eksempel	Egenskap	Anbefalt metode
$x^2 - 18 = 0$	ikke førstegradsledd ($b = 0$)	Isoler x^2 og trekk kvadratrota.
$2x^2 + 6x = 0$	ikke konstantledd ($c = 0$)	Faktoriser og bruk produktregelen.
$x^2 + 6x + 9 = 0$	kvadratsetningene	Faktoriser med kvadratsetningene baklengs og bruk produktregelen.
$-x^2 - x + 12 = 0$	ingen av tilfellene ovenfor	Bruk løsningsformelen, fullstendig kvadrat eller annet.

Figur 4.6: Sammenligning av andregradslikninger (Kalvø et al., 2020, s. 92)

Totalt i datamaterialet fra R1-bøkene (se Tabell 4.4) sammenlignes det i flere eksempler og oppgaver enn i 1T-bøkene, med 28 % hos Aschehoug (Borgan et al., 2021), 41 % hos Cappelen Damm (Oldervoll et al., 2021) og 31 % hos Gyldendal (Kalvø et al., 2021). Cappelen Damm har høyest andel av det jeg har kodet som sammenlignende eksempler og oppgaver. Likevel er det ikke der jeg finner de beste eksemplene og oppgavene med sammenligning slik forskningen anbefaler. Dette kommer jeg tilbake til i neste delkapittel. 100 % av utforskoppgavene og 50 % av samtaleoppgavene hos Cappelen Damm har sammenligning. Men de har totalt bare tre utforskoppgaver og to samtaleoppgaver. Aschehoug og Gyldendal har mange flere samtale- og utforskoppgaver enn Cappelen Damm, og flere i R1 enn i 1T. Mange av disse ber elevene sammenligne ulike strategier (se Tabell 4.4). Et eksempel på en sammenlignende utforskoppgave viser jeg i Figur 4.7. Denne har jeg kodet til SA – US – RETT, fordi her sammenlignes ulike metoder til samme problem, og elevene skal utforske hvilke av metodene som er feil og riktig.

UTFORSK

Ole Henrik skal løse likningen i eksemplet ovenfor. Han starter slik:

$$\lg x + \lg(x-3) = 1$$
$$10^{\lg x + \lg(x-3)} = 10^1$$
$$10^{\lg x} \cdot 10^{\lg(x-3)} = 10$$

a Forklar hvert trinn i utregningen ovenfor.
b Hjelp Ole Henrik med å avslutte løsningen.
c Tale skal løse den samme likningen. Hun prøver slik:

$$\lg x + \lg(x-3) = 1$$
$$10^{\lg x} + 10^{\lg(x-3)} = 10^1$$

Hva gjør Tale galt?
d Jørgen prøver slik:

$$\lg x + \lg(x-3) = 1$$
$$\lg(x + x - 3) = 1$$

Hva tror du Jørgen har tenkt? Kommenter.

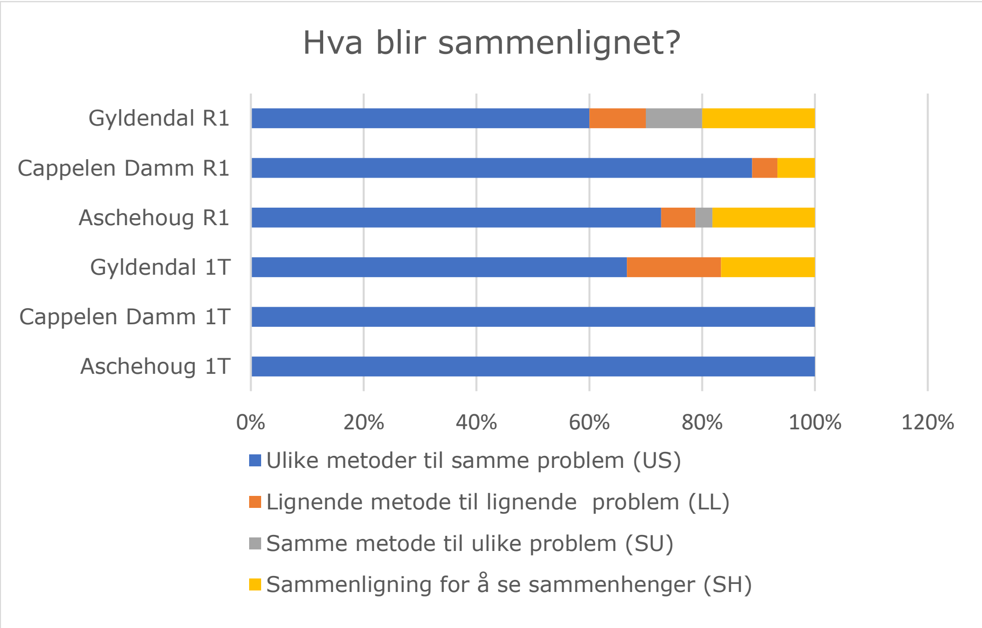
Figur 4.7: Sammenligning i en utforskoppgave (Borgan et al., 2021, s. 34)

4.2 Hvordan legger lærebøkene opp til sammenligning?

Så langt har resultatene vist at lærebøkene presenterer mange ulike strategier for å løse likninger, men at det varierer hvor mye det legges opp til sammenligning av disse. Resultatene viser at det i en del eksempler og oppgaver i lærebøkene legges opp til å sammenligne ulike strategier. Det jeg ikke har sagt så mye om er hva som sammenlignes, hvilke spørsmål som stilles i oppgavene, og hvordan sammenligningene presenteres. Som jeg viste i Kapittel 2.3.2 har disse spørsmålene betydning for om sammenligningene er effektive. I de neste delkapitlene vil jeg svare på disse spørsmålene.

4.2.1 Ulike metoder til samme problem er mest vanlig

Hvis sammenligning skal være effektivt i forhold til å utvikle matematisk fleksibilitet, er det viktig å gjøre et fornuftig utvalg av strategier og problemer å sammenligne (Durkin et al., 2017). Hva som blir sammenlignet varierer noe i de ulike lærebøkene, men det typiske i hele datamaterialet er å sammenligne ulike strategier og metoder for å løse samme problem (US). Dette kommer tydelig frem i blått i Figur 4.8. Tabell 4.5 viser at alle eksempler og oppgaver i Aschehoug 1T og Cappelen Damm 1T som inneholder sammenligning har fått koden US. Nederste linja i samme tabell viser at det er mye mer sammenligning i lærebøkene i R1 i forhold til i 1T. Dette tilsvarer de totale frekvensene i Tabell 4.3 og 4.4.



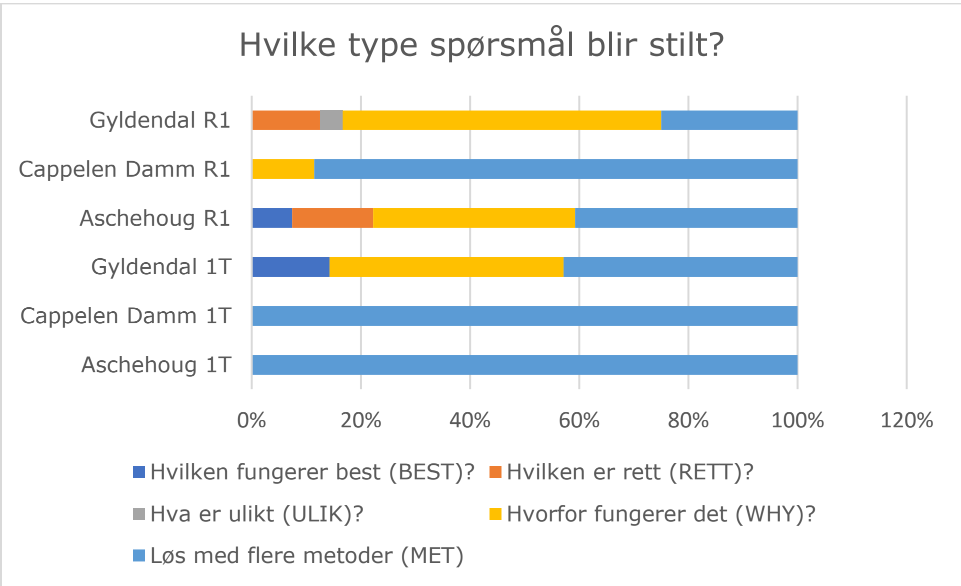
Figur 4.8: Prosentvis fordeling over hva som blir sammenlignet i lærebøkene

	Andregradslikninger i 1T			Eksponential- og logaritmelikninger i R1		
	Aschehoug	Cappelen Damm	Gyldendal	Aschehoug	Cappelen Damm	Gyldendal
Ulike metoder til samme problem (US)	3	5	8	24	40	18
Lignende metode til lignedene problem (LL)	0	0	2	2	2	3
Samme metode til ulike problem (SU)	0	0	0	1	0	3
Ulike eksempler for å se sammenhenger og regler (SH)	0	0	2	6	3	6
Totalt antall eksempler og oppgaver med sammenligning	3	5	12	33	45	30

Tabell 4.5: Frekvens over hva som blir sammenlignet i lærebøker

4.2.2 Det spørres oftest etter flere metoder

Hvilke spørsmål som stilles rundt sammenligning, har betydning for hvor godt en oppgave fungerer for å øke elevers fleksibilitet i matematikk (Durkin et al., 2017). Min analyse (Figur 4.9 og Tabell 4.6) viser at de fleste oppgavene i 1T hos Aschehoug og Cappelen Damm spør etter flere metoder (MET) til å løse ulike problem. I 1T hos Gyldendal er det litt mer variasjon i hvilke spørsmål som stilles, og de har like mange oppgaver som spør etter hvorfor (WHY) som etter flere metoder (MET). To av lærebøkene i R1 viser en utvikling fra 1T, ved å ha en større bredde i type spørsmål som stilles. Cappelen Damm skiller seg ut ved å ha nesten bare oppgaver som spør etter flere metoder (MET). Alle innlæringsoppgavene i Cappelen Damm R1 som jeg har definert som sammenlignende, spør etter flere metoder. Det er spesielt interessant utfra resultatet i Tabell 4.4, der Cappelen Damm hadde høyest prosentandel med eksempler og oppgaver med sammenligning. Figur 4.10 viser en typisk oppgave fra Cappelen Damm R1 der de spør etter løsning med og uten CAS. I Figur 4.11 viser jeg en lignende oppgave fra Aschehoug R1 der de spør etter tre ulike metoder.



Figur 4.9: Prosentvis fordeling over hvilke spørsmål som blir stilt

	Andregradslikninger i 1T			Eksponential- og logaritmelikninger i R1		
	Aschehoug	Cappelen Damm	Gyldendal	Aschehoug	Cappelen Damm	Gyldendal
Hvilken fungerer best (BEST)?	0	0	1	2	0	0
Hvilken er rett (RETT)?	0	0	0	4	0	3
Hva er ulikt (ULIK)?	0	0	0	0	0	1
Hvorfor fungerer det (WHY)?	0	0	3	10	4	14
Løs med flere metoder (MET)	3	5	3	11	31	6
Totalt antall oppgaver med sammenligning	3	5	7	27	35	24

Tabell 4.6: Frekvens over hvilke spørsmål som blir stilt

Oppgave 1.142

Løs likningene både uten og med CAS.

a) $2 \cdot 5^{2x} = 10$ **b)** $6 \cdot 3^{3x} = 24$

c) $3 \cdot 3^{4x} = 15$ **d)** $4 \cdot 3^{3x+1} = 36$

e) $8 \cdot 5^{2x+2} = 32$

Figur 4.10: Innlæringsoppgave med to metoder (Oldervoll et al., 2021, s. 308)

1.79

I en kommune er folketallet i begynnelsen av et år 13 500. Ifølge en prognose vil det vokse med 2,5 % i året en del år framover. La x være tiden (målt i år) det tar før folketallet er 15 000.

a Sett opp en likning som du kan bruke til å bestemme x.

b Løs likningen med CAS.

c Løs likningen med graftegner.

d Lag et program som løser likningen med halveringsmetoden.

Figur 4.11: Innlæringsoppgave med tre metoder (Borgan et al., 2021, s. 47)

MET var en kode jeg la til underveis i kodingen. Dette gjorde jeg fordi mange av oppgavene bare spør etter flere metoder uten at det spørres om å sammenligne de ulike metodene. Å spørre etter flere metoder er ikke et spørsmål jeg har funnet anbefalt fra tidligere forskning (Durkin et al., 2017; Rittle-Johnson & Star, 2011). Der anbefales spørsmål om hvorfor noe fungerer, hva som er ulikt eller rett, og hva som fungerer best til ulike problemer. Slike spørsmål legger opp til at elevene må tenke og reflektere rundt forskjeller og likheter mellom ulike strategier. Et eksempel på en oppgave som ber elevene både begrunne og vise ulike metoder, vises i Figur 4.12, der jeg utfra ordene «vis hvordan» har kodet med WHY.

1.111

Vi skal løse likningen $9 \cdot 3^x = 16 \cdot 4^x$ på tre ulike måter. Nedenfor ser du ett av trinnene i hver av metodene. Vis hvordan vi har kommet fram til hvert trinn og fullfør hver av løsningene.

a $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

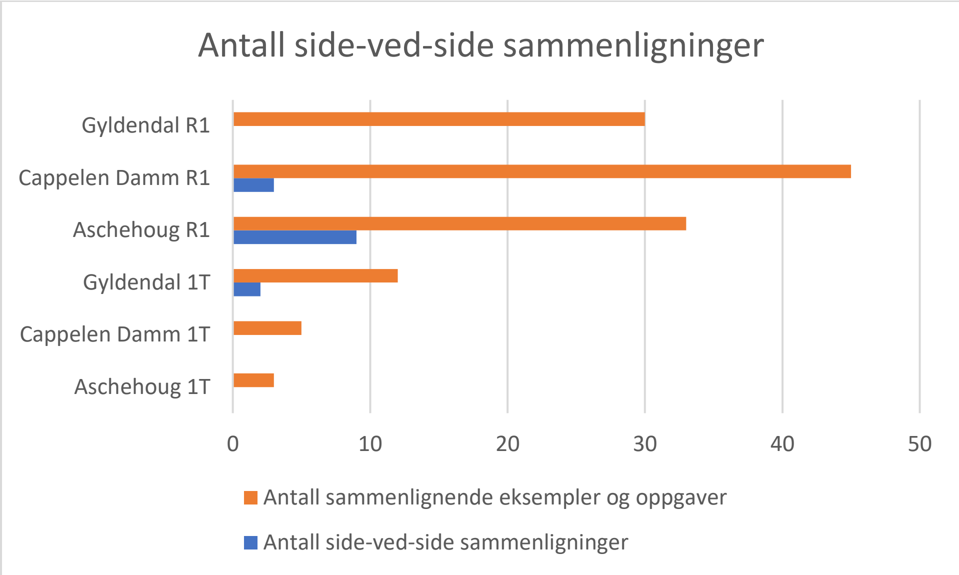
b $3^{x+2} = 4^{x+2}$

c $2\lg 3 + x\lg 3 = 2\lg 4 + x\lg 4$

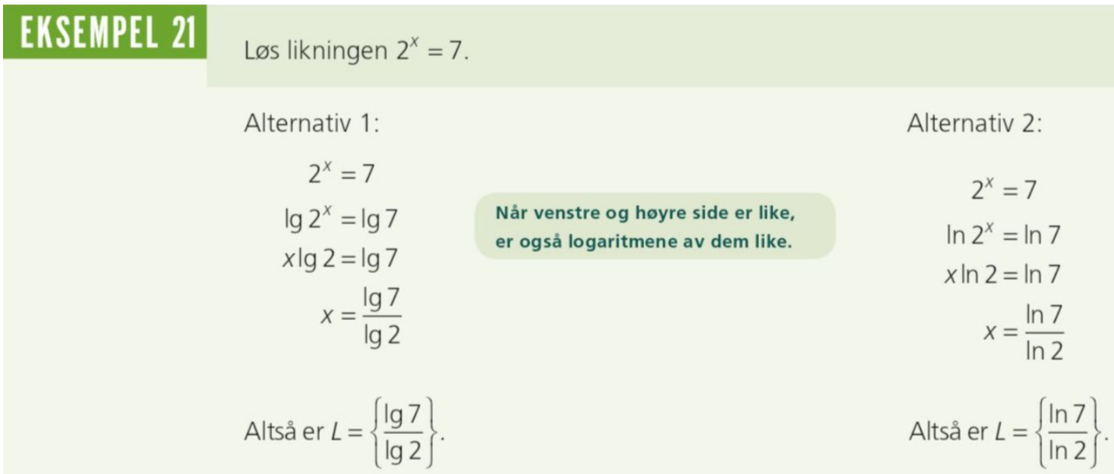
Figur 4.12: Sammenligning i utforskoppgave (Kalvø et al., 2021, s. 61)

4.2.3 Strategier blir vist sekvensielt

Tidligere forskning (Durkin et al., 2017) anbefaler at ulike strategier presenteres side-ved-side og med tydelig merking fordi det gjør det enklere å se forskjeller og ulikheter mellom de ulike strategiene. Det anbefales også å vise en grunnleggende strategi før ulike strategier blir sammenlignet. Alle bøkene jeg har undersøkt, presenterer de ulike metodene sekvensielt (SEK) som hovedregel. I Aschehoug og Cappelen Damm sine lærebøker vises teori, eksempler og oppgaver om en og en metode etter hverandre. Gyldendal viser flere metoder før de kommer til oppgaver. Det varierer hvor mange eksempler og oppgaver i lærebøkene som viser og legger opp til sammenligning (se Kapittel 4.1.2). I Figur 4.13 viser jeg hvor mange av disse som presenterer ulike strategier side-ved-side (SVS). Aschehoug sin bok i R1 har flest side-ved-side-sammenligninger. I denne læreboken er ni av de 35 sammenlignende oppgavene og eksemplene stilt opp side-ved-side. Ett av disse eksemplene vises i Figur 4.14. Jeg fant henholdsvis tre og to side-ved-side-sammenligninger hos Cappelen Damm R1 og Gyldendal 1T, og ingen i de tre siste lærebøkene.

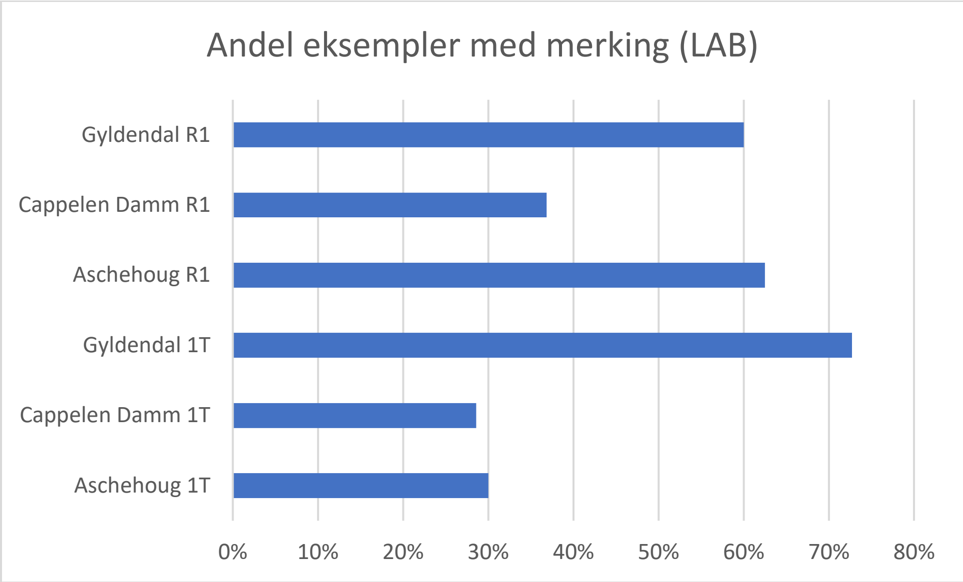


Figur 4.13: Antall side-ved-side-sammenligninger

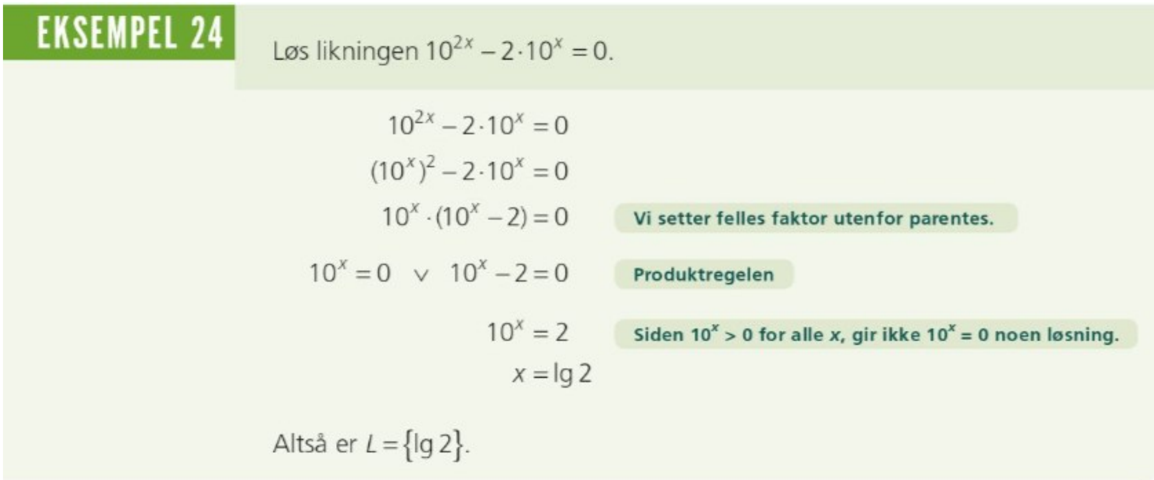


Figur 4.14: Eksempel med side-ved-side-sammenligning (Kalvø et al., 2021, s. 39)

I Figur 4.15 viser jeg hvor stor andel av alle eksemplene i hele datamaterialet som er godt merket slik forskningen anbefaler (Durkin et al., 2017). Både 1T- og R1-bøkene til Gyldendal og R1-boka til Aschehoug skiller seg ut med at mellom 60 % og 73 % av alle eksemplene er tydelig merket. Det betyr at designet på eksemplene i disse bøkene gjør det lettere for elevene å se forskjeller og likheter på strategier, selv om ulike strategier ikke blir sammenlignet side-ved-side. De andre bøkene har med forklaringer enten før, i eller etter eksemplene. Forskjellen er at disse står som vanlig tekst, som gjør at elever må lese all tekst for å få det med seg. Fordelen med merking, er at det kommer tydelig frem hvilken regel eller strategi som er brukt. Figur 4.16 viser et eksempel på løsning av en eksponentiallikning. Den er løst i fem steg, der tre av stegene er begrunnet med merking. Det første og siste steget er ikke merket. Det kan diskuteres hvor mye merking som er hensiktsmessig. En ulempe med for mye merking, er at det blir lite oversiktlig. Det kan også argumenteres for at det er nyttig at elevene selv finner ut hvorfor ulike strategier fungerer.



Figur 4.15: Andel eksempler med tydelig merking



EKSEMPEL 24

Løs likningen $10^{2x} - 2 \cdot 10^{x} = 0$.

$$10^{2x} - 2 \cdot 10^{x} = 0$$
$$(10^{x})^{2} - 2 \cdot 10^{x} = 0$$
$$10^{x} \cdot (10^{x} - 2) = 0 \qquad \text{Vi setter felles faktor utenfor parentes.}$$
$$10^{x} = 0 \quad \vee \quad 10^{x} - 2 = 0 \qquad \text{Produktregelen}$$
$$10^{x} = 2 \qquad \text{Siden } 10^{x} > 0 \text{ for alle } x\text{, gir ikke } 10^{x} = 0 \text{ noen løsning.}$$
$$x = \lg 2$$

Altså er $L = \{\lg 2\}$.

Figur 4.16: Eksempel med merking (Borgan et al., 2021, s. 42)

4.2.4 Bøkene har enkelte samtaleoppgaver med sammenligning

Alle lærebøkene har noen oppgaver som legger opp til samtale. Disse kalles for «snakk» hos Aschehoug, «diskuter» hos Cappelen Damm, og «reflekter og diskuter» hos Gyldendal. Noen av disse legger opp til at elevene skal samtale rundt sammenligning av ulike strategier. I datamaterialet mitt fant jeg at to av totalt åtte samtaleoppgaver i lærebøkene til 1T legger opp til sammenligning av strategier (se Tabell 4.3). I lærebøkene til R1 fant jeg at ti av totalt 19 samtaleoppgaver ber elevene sammenligne ulike strategier (se Tabell 4.4). Det viser både at andelen samtaleoppgaver har økt fra 1T til R1, og at det legges opp til mer sammenligning av strategier i samtaleoppgavene i R1. Denne økningen er ikke merkbart annerledes enn jeg viste for datamaterialet som helhet i Kapittel 4.1.2.

Et eksempel på en samtaleoppgave med sammenligning viser jeg i Figur 4.17. Denne har jeg kodet med SA – US – WHY – SVS fordi her skal ulike metoder som gir samme svar sammenlignes, og elevene skal forklare hvorfor det stemmer. Dette er også et eksempel på side-ved-side-sammenligning.

SNAKK

Arif, Julie og Ludvig skal løse likningen $2^x = 16$.
De har hver sin strategi.

Arif:	Julie:	Ludvig:
$2^x = 16$	$2^x = 16$	$2^x = 16$
$2^x = 2^4$	$\lg 2^x = \lg 16$	$x = \log_2 16$
$x = 4$	$x \lg 2 = \lg 16$	$x = 4$
	$x = \dfrac{\lg 2^4}{\lg 2}$	
	$x = \dfrac{4 \lg 2}{\lg 2}$	
	$x = 4$	

Forklar hver av framgangsmåtene trinn for trinn.

Figur 4.17: Sammenligning i en samtaleoppgave (Borgan et al., 2021, s. 52)

4.3 Oppsummering av resultatkapittelet

Jeg har i dette kapittelet presentert resultatet av min analyse av datamaterialet fra de seks utvalgte lærebøkene. Jeg har funnet at lærebøkene presenterer mange ulike strategier for å løse både andregradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger. Hyppigheten av sammenligning varierer både mellom de ulike lærebøkene og temaene. Bøkene har noen eksempler og oppgaver som viser og legger opp til sammenligning slik forskningen anbefaler, og noen av disse har jeg vist tidligere i kapittelet. Det er mest vanlig at de ulike strategiene blir presentert sekvensielt, men jeg har også funnet noen eksempler som har side-ved-side-sammenligning. I den grad det legges opp til sammenligning, spørres det oftest etter at elevene skal løse et problem med flere metoder, uten at de blir bedt om reflektere noe rundt forskjeller og likheter mellom de ulike strategiene. Jeg vil i neste kapittel drøfte hva disse resultatene kan ha å si for utvikling av elevers fleksibilitet, og hvordan lærere kan bruke bøkene på en hensiktsmessig måte i det henseende.

5 Drøfting

Jeg har undersøkt i hvilken grad og hvordan lærebøker legger til rette for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet. Jeg har spesielt sett på hvordan lærebøkene legger til rette for sammenligning av ulike strategier for å løse andregradslikninger i 1T og eksponential- og logaritmelikninger i R1.

I forrige kapittel presenterte jeg resultatet av lærebokanalysen. Analysen viser at lærebøkene i stor grad legger til rette for at elevene skal lære flere strategier. De ulike strategiene blir oftest vist sekvensielt. Det er lagt opp til noe sammenligning av de ulike strategiene, men hvor mye og hvordan dette gjøres varierer mellom de ulike bøkene og mellom 1T og R1. Det er betydelig mer sammenligning i R1 enn 1T. Det som finnes av sammenligning, handler mest om å løse samme problem med flere strategier uten at det blir stilt spørsmål som gjør at elevene må reflektere over forskjeller og likheter mellom de ulike strategiene.

I dette kapitlet vil jeg drøfte hva disse resultatene har å si for lærebøkenes tilrettelegging av utvikling av elevers matematiske fleksibilitet. Jeg vil drøfte hvilke implikasjoner resultatene kan ha for læreres bruk av lærebøker i klasserommet og for videre forskning. Jeg vil også drøfte studiens kvalitet og troverdighet.

5.1 Implikasjoner for utvikling av matematisk fleksibilitet

Matematisk fleksibilitet definerte jeg i Kapittel 2.2 som evnen til å bruke ulike og hensiktsmessige strategier på effektive måter. Verken i lærebøkenes forord eller i de sidene jeg har kodet, kategorisert og analysert finner jeg at fleksibilitet er et eksplisitt mål slik forskningen anbefaler (Durkin et al., 2017; Finesilver, 2017; Gabler & Ufer, 2021; Lemonidis & Likidis, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). Likevel kommer fleksibilitet frem som et implisitt mål, men i varierende grad i de ulike lærebøkene. Dette vil jeg nå drøfte nærmere.

De fire aspektene repertoar, frekvens, effektivitet og adaptivitet (Heinze et al., 2009; Lemaire & Siegler, 1995; Siegler, 1996; Torbeyns et al., 2009) kan regnes som pilarer for utvikling av matematisk fleksibilitet. Et byggverk trenger flere pilarer for å stå støtt, og elever trenger å utvikle seg innenfor alle de fire aspektene for å bli matematisk fleksible. Jeg har funnet ut at lærebøkene presenterer mange strategier for å løse ulike typer likninger (se Tabell 4.1 og 4.2), og de legger med det til rette for at elevene kan utvide repertoaret sitt. Gjennom å etterspørre flere metoder i mange oppgaver (se Tabell 4.6), legger bøkene til rette for å øke frekvensen på bruken av strategiene som etterspørres. Mange innlæringsoppgaver hjelper elevene til å løse ting raskt og nøyaktig (se Tabell 4.3 og 4.4). Dermed bedres effektiviteten på de strategiene som bøkene etterspør eller på de strategiene som elevene velger å bruke. Siden lærebøkene legger til rette for å øke elevers repertoar, frekvens og effektivitet, styrkes tre viktige aspekter og pilarer for å utvikle elevers matematiske fleksibilitet. På den måten legger lærebøkene til rette for å styrke elevers prosedyrekunnskap (Drijvers, 2010) og instrumentelle forståelse (Skemp, 2006).

Analysen av hvilke type problemer som blir sammenlignet og hvilke spørsmål som stilles, viser at lærebøkene i varierende grad legger til rette for refleksjon rundt sammenligning av ulike strategier. Cappelen Damm 1T spør bare etter ulike metoder til samme problem, og i R1 spør de etter ulike metoder i nærmere 90 % av oppgavene (se Figur 4.9 og

Tabell 4.6). Deres lærebøker har dermed lite variasjon i problemer og spørsmål som stilles i oppgaver som legger opp til sammenligning. Selv om Cappelen Damm R1 har flest andel eksempler og oppgaver med sammenligning (se Tabell 4.4), stiller de få spørsmål som legger til rette for refleksjon rundt hvilken strategi som egner seg best i ulike situasjoner (se Tabell 4.6). Å legge til rette for den typen refleksjon er viktig både for å øke elevenes adaptivitet, relasjonelle forståelse (Skemp, 2006) og konseptuelle kunnskap (Drijvers, 2010). I Aschehoug sin bok i 1T spørres det også kun etter ulike metoder til samme problem (se Tabell 4.6). Disse tre lærebøkene legger med det lite til rette for utvikling av adaptivitet (Lemaire & Siegler, 1995; Verschaffel et al., 2009) som er en av fire viktige pilarer for å utvikle elevers matematiske fleksibilitet.

Resultatet fra lærebokanalysen viser at Aschehoug har lagt opp til mer sammenligning i presentasjonen av eksponential- og logaritmelikninger i R1 enn av andregradslikninger i 1T (se Figur 4.5). I R1 er det 59 % (se Figur 4.9) av spørsmålene i oppgaver med sammenligning som blir stilt slik det anbefales i tidligere forskning (Durkin et al., 2017; Rittle-Johnson & Star, 2011). Her blir elever bedt om å reflektere rundt hva som fungerer best, hva som er rett og ulikt, og hvorfor strategier fungerer. Hos Aschehoug R1 jeg fant flest side-ved-side-sammenligninger (se Figur 4.13) og høy andel av merking i eksempler (se Figur 4.15) slik tidligere forskning anbefaler (Durkin et al., 2017). Gyldendal sine bøker i 1T og R1 har god bredde i både type problemer som blir sammenlignet og hvilke spørsmål som blir stilt (se Figur 4.8 og 4.9). De skilte seg ut av de tre bøkene i 1T, og forbedret seg til R1, spesielt i antall sammenligningsoppgaver (se Figur 4.5). Siden jeg har funnet noen elementer som jeg kjenner igjen i forskningen hos Aschehoug R1 og Gyldendal R1 og 1T, vil jeg si at de til viss grad legger til rette for aspektet adaptivitet. Også disse bøkene har et forbedringspotensial, men de har noen elementer fra alle de fire aspektene og pilarene som er viktige for å utvikle elevers matematiske fleksibilitet. På den måten bidrar de også til relasjonell forståelse (Skemp, 2006) og konseptuell kunnskap (Drijvers, 2010).

Det kommer tydelig frem i min analyse at det er mer sammenligning av eksponential- og logaritmelikninger i R1 enn av andregradslikninger i 1T (se Figur 4.5). Analysen gir ikke svar på om det generelt er mer sammenligning i R1 enn i 1T, eller om dette bare gjelder temaene eksponential- og logaritmelikninger sammenlignet med andregradslikninger. I det aktuelle kompetansemålet til R1 står det at «elevene skal utforske og forstå regneregler for potenser og logaritmer, og bruke ulike strategier for å løse eksponentialligninger og logaritmeligninger» (Utdanningsdirektoratet, 2021, s. 5). I kompetansemålene til 1T står det at «elevene skal utforske strategier for å løse ligninger, ligningssystemer og ulikheter og argumentere for tenkemåtene sine» og «utforske sammenhenger mellom andregradsligninger og andregradsulikheter, andregradsfunksjoner og kvadratsetningene og bruke sammenhengene i problemløsing» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 5). Disse formuleringene høres ikke så ulike ut at de kan brukes som argument for at det er mer sammenligning rundt eksponential- og logaritmelikninger enn rundt andregradslikninger. Det at elevene skal bruke ulike strategier i R1 og strategier i flertall i 1T, mener jeg støtter lærebøkenes vektlegging av sekvensiell presentasjon av flere strategier både i 1T og R1. Samtidig brukes ordet utforsking i kompetansemålene til begge fag. Utforsking er et av kjerneelementene, og det handler om «å lete etter mønstre, finne sammenhenger og diskutere seg fram til en felles forståelse.» (Utdanningsdirektoratet, 2021, s. 3). Skal elevene evne å se sammenhenger og diskutere slike, er sammenligning av ulike strategier relevant. Siden både ordene utforsking og strategier brukes i de aktuelle kompetansemålene i begge fagene, kan kompetansemålene ikke brukes som et argument for at det er mer sammenligning i eksponential- og logaritmelikninger i R1 enn i andregradslikninger i 1T. Siden jeg ikke kan se at kompetansemålenes formuleringer er årsaken til forskjellen i antall sammenligninger i bøkene på de ulike trinnene, må årsaken finnes en annen plass. Kan en årsak være at logaritme- og eksponentiallikninger er mer krevende å løse enn andregradslikninger? Min erfaring er at mange av potens- og logaritmereglene brukes feil av elever. Vanlige feiltolkninger av for eksempel logaritmesetningene, gjør at det kan være både hensiktsmessig og lettere å be elevene sammenligne feil og riktige løsninger her enn ved andregradslikninger. Jeg påstår likevel ikke at dette er hele årsaken til den markante forskjellen i antall sammenligninger.

Alle lærebøkene jeg har forsket på legger godt til rette for utvikling av elevers repertoar ved løsning av likninger. Oppgaver i bøkene legger i varierende grad opp til utvikling av frekvens og effektivitet. Noen av bøkene bidrar til utvikling av adaptivitet gjennom at de legger til rette for sammenligning av strategier. På den måten er lærebøkene i ulik grad tilrettelagt for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet. Jeg vil i neste kapittel drøfte hvilke konsekvenser dette kan ha for matematikklærere og deres undervisning, hvis de ønsker å bruke sammenligning for å utvikle elevers fleksibilitet.

5.2 Implikasjoner for klasserommet

Jeg viste i forrige kapittel av fleksibilitet ikke kommer ikke frem som et eksplisitt mål i lærebøkene, men implisitt legges det noe til rette for utvikling av elevers fleksibilitet. For at bøkene skal fungere som gode instrumenter (Gueudet & Trouche, 2011; Pepin et al., 2013; Trouche, 2005), må lærere være bevisste på det i planleggingen av egen undervisning (Durkin et al., 2017; Finesilver, 2017; Gabler & Ufer, 2021; Lemonidis & Likidis, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). Jeg vil i dette kapittelet gi både noen generelle og noen konkrete forslag til hvordan lærere kan legge til rette for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet gjennom å sammenligne ulike strategier.

Tidligere forskning rundt fleksibilitet viser at både eksponering for og sammenligning av flere strategier er viktig for å fremme matematisk fleksibilitet (Acevedo Nistal et al., 2014; Durkin et al., 2017; Gabler & Ufer, 2021; Lemonidis & Likidis, 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008). Min studie viser at lærebøkene presenterer mange strategier, men de legger i varierende grad til rette for sammenligning av de ulike strategiene. Dette er nyttig kunnskap for lærere som bruker lærebøkene. Siden lærebøkene i varierende grad legger til rette for sammenligning av ulike strategier, er det viktig at lærere som bruker de ulike lærebøkene vet om deres styrker og svakheter og tar hensyn til dette i sin planlegging. Lærere kan enten lage egne opplegg, omarbeide oppgaver i den læreboka de bruker til vanlig, eller lete etter gode oppgaver og ressurser fra andre lærebøker og kilder. I presentasjon og sammenligning av ulike strategier må lærere stille gode spørsmål for å utvikle elevers fleksibilitet (Durkin et al., 2017). De må være bevisste på hva de ber elevene sammenligne (Rittle-Johnson & Star, 2011). Før elever blir bedt om å sammenligne flere strategier, er det viktig å lære en grunnleggende strategi godt (Durkin et al., 2017). Lærere som vil legge opp til sammenligning av flere strategier, kan for eksempel vise de ulike strategiene side-ved-side på tavla eller på et ark. Så kan elevene oppfordres til å reflektere individuelt rundt gode spørsmål, for deretter å samtale i grupper om disse ulike. Til slutt kan ulike innspill fra gruppene oppsummeres i plenum i klassen (Kverndokken, 2015). For å tilrettelegge for en god matematisk samtale både i gruppene og i plenum kan det, i tillegg til å stille gode spørsmål for sammenligning (Durkin et al., 2017), være nyttig å bruke samtaletrekk som å gjenta, repetere og resonnere (Wæge, 2015). De fem praksisene for matematiske samtaler kan også trekkes inn (Stein et al., 2008). Lærere må være aktive i hele prosessen. De må være forberedt på hva som kan komme til å skje, observere gruppene, velge ut hva som skal tas med i plenumsamtalen og i hvilken rekkefølge. Jeg vil i neste avsnitt gi et konkret eksempel på hvordan logaritmelikninger kan utforskes slik at likheter og ulikheter ved de ulike strategiene kommer frem.

Ved løsning av logaritmelikninger brukes ofte logaritmesetningen $\ln a^x = x \cdot \ln a$. Denne setningen er kun gyldig hvis betingelsen $a > 0$ er oppfylt. Min erfaring er at dette er en betingelse som elevene ikke reflekterer over uten av de blir utfordret på det. Setningen kan i mange tilfeller brukes uten å ta hensyn til betingelsen og uten at det får betydning for løsningsmengden. Men i noen tilfeller har betingelsen $a > 0$ betydning for løsningsmengden. For å få elevene til å reflektere over dette, kan de presenteres for de to likningene og de to strategiene i Figur 5.1. Dette kan gjøres på flere måter. Enten kan lærer skrive alt på tavla eller elevene kan få det utdelt på et ark. Så kan det stilles spørsmål om hvilken metode som er riktig, hva som er forskjellen på dem, og hvorfor en mister en løsning ved å bruke logaritmesetningen i Strategi 1 på den ene likningen, men ikke på den andre. Dette tilsvarer spørsmål som jeg i min analyse har kodet til RETT, WHY og ULIK (se Tabell 3.4). Alternativt kan elevene først bli bedt om å løse de to likningene individuelt, også kan ulike løsningsstrategier de har kommet frem til deles i grupper og deretter i plenum. På den måten kan det være at spørsmålene dukker opp hos elevene av seg selv. Hvis ikke dette skjer, må lærer bidra med å bruke nødvendige samtaletrekk. Dette kan være en måte å legge til rette for sammenligning i undervisningen som bidrar til utvikling av matematisk fleksibilitet.

Strategi 1:	*Strategi 2:*
$\ln x^2 = 4$	$\ln x^2 = 4$
$2 \ln x = 4$	$x^2 = e^4$
$\ln x = 2$	$x = \pm\sqrt{e^4}$
$x = e^2$	$x = \pm e^2$

Strategi 1:	*Strategi 2:*
$\ln x^3 = 9$	$\ln x^3 = 9$
$3 \ln x = 9$	$x^3 = e^9$
$\ln x = 3$	$x = \sqrt[3]{e^9}$
$x = e^3$	$x = e^3$

Figur 5.1: Side-ved-side-sammenligning av to strategier og to likninger

Jeg har i denne studien sett på hvordan lærebøker legger til rette for sammenligning av ulike strategier. I dette kapittelet har jeg vist hvordan lærere kan legge til rette for sammenligning i sin undervisning. Som jeg viste i starten av Kapittel 2.3, er det også andre momenter enn sammenligning av strategier som kan ha betydning for utvikling av eleveres matematiske fleksibilitet. For eksempel kan noen elever ha behov for språklig støtte (Gabler & Ufer, 2021) og tilpasset opplæring (Finesilver, 2017; Hopkins et al., 2022; Zhang et al., 2014). Lærere må ta hensyn til elevers forutsetninger når det gjelder utvikling av fleksibilitet på samme måte som de må gjøre det i all undervisning. I neste kapittel vil jeg si noe om hvilke implikasjoner min studie kan ha for videre forskning.

5.3 Implikasjoner for forskningen

I denne lærebokanalysen har jeg blant annet funnet ut at der det legges opp til sammenligning i lærebøkene, handler det mest om at elevene blir bedt om å løse ting på flere måter uten av de blir bedt om å reflektere rundt forskjellene mellom de ulike strategiene. Jeg har funnet ut at det er mer sammenligning i presentasjonen av eksponential- og logaritmelikninger i R1 enn i andregradslikninger i 1T, og at det er stor forskjell på de ulike lærebøkene. Underveis i arbeidet med datamaterialet har det dukket opp flere sider ved lærebøker og fleksibilitet som kunne vært nyttig å ha kunnskap om, og dermed forsket på. Jeg vil nå si litt om disse.

For det første hadde det vært lærerikt å intervjue lærebokforfatterne. Har de hatt matematisk fleksibilitet i tankene når de skrev lærebøkene? Har sammenligning av ulike strategier vært sentralt i arbeidet med lærebøkene? Er det annen nyere forskning innenfor matematikkdidaktikk som er vektlagt? Det er flere av de samme lærebokforfatterne til bøkene i 1T og R1 hos alle de tre forlagene. Hva er årsaken til at det ser ut til at det er mer sammenligning i R1 enn i 1T? Har de sett på andre lærebøker? Hva legger de i begrepene utforsking og strategier som brukes i kompetansemålene? Dette er bare noen av mange spørsmål som kunne vært aktuelle å stille til lærebokforfatterne i videre forskning.

For det andre kunne det vært interessant å intervjue lærere som bruker de ulike lærebøkene. Hva er viktig ved valg av nye lærebøker? Hvordan brukes lærebøkene? Har de hørt om matematisk fleksibilitet, og hvordan legger de til rette for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet? Legges det opp til sammenligning av ulike strategier i klasserommet, og hvordan gjøres eventuelt det? Også her er det mange andre spørsmål som kunne vært aktuelle å stille.

For det tredje hadde det vært nyttig å observere klasser der det undervises om andregradslikninger og logaritme- og eksponentiallikninger, og som bruker noen av lærebøkene jeg har analysert. Brukes de sammenlignende eksemplene og oppgavene som bøkene har med vekt på å utvikle matematisk fleksibilitet? Det kunne også vært relevant å observere klasser som bruker heldigitale verktøy. Er det mer eller mindre fokus på sammenligning her enn i klasser som bruker lærebøker?

I dette kapittelet har jeg gitt tre konkrete innspill til videre forskning. Jeg vil i neste kapittel drøfte min egen studies metode og troverdighet.

5.4 Studiens metode og troverdighet

I denne masterstudien har jeg forsket på fleksibilitet i lærebøker. Studien har vært begrenset i både tid og omfang. Av den grunn gjorde jeg noen avgrensninger, spesielt i selve datainnsamlingen. Jeg har hentet materiale fra seks lærebøker som er mye brukt i videregående opplæring, men jeg har kun sett på hvordan lærebøkene i Matematikk 1T har presentert andregradslikninger, og hvordan lærebøkene i Matematikk R1 har presentert logaritme- og eksponentiallikninger. Jeg vil være forsiktig med å si at mine resultater er overførbare til alle de andre temaene som presenteres i de seks lærebøkene jeg har hentet datamaterialet mitt fra. For eksempel kan det se ut til at Aschehoug sin lærebok i R1 har mye mindre side-ved-side-sammenligning i de andre kapitlene enn i det kapittelet jeg undersøkte. Jeg vil også være forsiktig med å si at mine resultater er overførbare til alle lærebøker i matematikk i videregående skole. Likevel kan resultatene vise en tendens i hvordan det legges til rette for sammenligning av ulike strategier, og dermed fleksibilitet i lærebøker i Norge i dag. Forskningen kan derfor sies å være ekstern valid (Cohen et al., 2018; Guba, 1981) til en viss grad.

Jeg har gjennomført en innholdsanalyse av datamaterialet (Cohen et al., 2018). I selve analysen av materialet har jeg prøvd å arbeide grundig og analytisk for å sikre troverdighet gjennom å følge en sjekkliste for god analyse (Braun & Clarke, 2006, s. 96). Jeg har laget et system for koding og kategorisering av eksempler og oppgaver som andre forskere kan replikere. Systemet ble til etter grundig lesing av teori og flere runder med koding av hele materialet. Jeg har prøvd å sikre at en annen forsker ville funnet samme resultat utfra samme datamateriale og metode for analyse som jeg har brukt. På denne måten har jeg jobbet for å sikre reliabilitet i studien min (Cohen et al., 2018; Guba, 1981). For å sjekke i hvilken grad jeg lykkes med dette, fikk jeg en kollega til å kode en del av materialet. Sammenligningen av våre kodinger gav en interrater-reliabilitet på 66,7 %. I Kapittel 3.4.2 har jeg kommentert mulige årsaker til ulikhetene mellom våre kodinger. Min kollegas koding ble gjennomført sent i analyseprosessen. Det førte til at jeg ikke gjorde noen endringer i min egen koding og heller ikke i beskrivelsene i Tabell 3.4.

Selv om jeg har jobbet systematisk for at andre forskere skal kunne replikere min studie, kan andre forskere mene at det er andre måter å kode og kategorisere på er bedre egnet til å måle det jeg ønsket å måle. Det kan derfor diskuteres om systemet fungerer med tanke på å sikre intern validitet (Cohen et al., 2018; Guba, 1981), og om jeg faktisk har fått målt hvordan lærebøkene legger til rette for sammenligning og dermed utvikling av elevers matematiske fleksibilitet. Jeg la til de induktive kodene MET og SH utfra funn i datamaterialet. Kanskje skulle jeg holdt meg strengt til koder hentet fra teori? En annen forsker ville kanskje ikke definert de oppgavene som bare spør etter flere metoder (MET) som sammenligningsoppgave (SA). Det samme gjelder de jeg kodet som sammenligning (SA) for å finne sammenheng (SH). Jeg argumenterte i Kapittel 3.2.2 for hvorfor jeg mente det var hensiktsmessig å dem med.

Jeg har nå drøftet denne studiens metode og troverdighet. Tidligere i kapittelet drøftet jeg studiens implikasjoner for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet, konsekvenser for klasserommet og videre forskning. I neste kapittel vil jeg oppsummere og konkludere.

6 Konklusjon

I denne studien har jeg ønsket å finne ut i hvilken grad og hvordan lærebøker legger til rette for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet. For å svare på dette har jeg analysert hvordan seks lærebøker har presentert strategier for å løse andregradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger. I analysen har jeg spesielt undersøkt i hvilken grad og hvordan lærebøkene legger opp til sammenligning av ulike strategier.

Studien viser at fleksibilitet ikke kommer frem som et eksplisitt mål i lærebøkene. Implisitt legges det noe til rette for utvikling av elevers fleksibilitet gjennom at lærebøkene presenterer flere strategier for å løse andregradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger. Strategiene blir som regel vist sekvensielt. Lærebøkene legger i mindre og ulik grad opp til at elevene skal sammenligne strategiene regelmessig slik tidligere forskning anbefaler (Durkin et al., 2017). Det spørres oftest etter at det samme problemet skal løses på flere måter, uten at det stilles spørsmål som utfordrer elevene til å tenke gjennom likheter og ulikheter mellom de ulike strategiene. Bøkene legger med det godt til rette for instrumentell forståelse (Skemp, 1976) og prosedyrekunnskap (Drijvers, 2010), mens de i varierende grad legger til rette for å styrke den relasjonelle forståelsen (Skemp, 1976) og konseptuelle kunnskapen (Drijvers, 2010) hos elevene. Begge sidene av forståelse og kunnskap er viktige i utviklingen av elevers matematiske fleksibilitet. Viktige pilarer for å få til dette, er å legge til rette for elevers repertoar, frekvens, effektivitet og adaptivitet (Heinze et al., 2009; Lemaire & Siegler, 1995; Siegler, 1996; Torbeyns et al., 2009).

Denne studien gir et bidrag til hvordan lærebøker kan fungere som nyttige instrumenter i undervisningen av algebra (Gueudet & Trouche, 2011; Pepin et al., 2013; Trouche, 2005). Gjennom å reflektere rundt bruken av lærebøker i egen undervisning, kan vi som er lærerspesialister og lærere legge bedre til rette for utvikling av elevers matematiske fleksibilitet. På den måten kan vi hjelpe elever til en hensiktsmessig og effektiv bruk av verktøyene i deres matematiske verktøykasse.

Referanser

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2014). Improving students' representational flexibility in linear-function problems: An intervention. *Educational Psychology*, *34*(6), 763–786. https://doi.org/10.1080/01443410.2013.785064

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (Red.). (2016). *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Universitetsforlaget. https://doi.org/10.18261/97882150279999-2016

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Borgan, Ø., Borge, I. C., Engeseth, J., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T., & Vie, S. M. (2021). *Matematikk R1*. Aschehoug undervisning.

Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T., & Vie, S. M. (2020). *Matematikk 1T*. Aschehoug undervisning.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. I H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf, & K. J. Sher (Red.), *APA handbook of research methods in psychology, Vol 2: Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological.* (s. 57–71). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13620-004

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. Routledge.

Drijvers, P. (2010). *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (1st ed. 2010., Bd. 5). SensePublishers.

Durkin, K., Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: Lessons learned and next steps. *ZDM*, *49*(4), 585–597. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0853-9

Finesilver, C. (2017). Low-attaining students' representational strategies: Tasks, time, efficiency, and economy. *Oxford Review of Education*, *43*(4), 482–501. https://doi.org/10.1080/03054985.2017.1329720

Gabler, L., & Ufer, S. (2021). Gaining flexibility in dealing with arithmetic situations: A qualitative analysis of second graders' development during an intervention. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(2), 375–392. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01257-y

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *ECTJ*, *29*(2), 75–91. https://doi.org/10.1007/BF02766777

Gueudet, G., & Trouche, L. (2011). Teachers' work with resources: Documentational geneses and professional geneses. *From Text to «Lived» Resources* (s. 23–41). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_2

Haugom, H. M. (2022). *Matematisk fleksibilitet i grunnskolen: En systematisk litteraturstudie*. NTNU. https://hdl.handle.net/11250/3004942

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM*, *41*(5), 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Hickendorff, M. (2018). Dutch sixth graders' use of shortcut strategies in solving multidigit arithmetic problems. *European Journal of Psychology of Education*, *33*(4), 577–594. https://doi.org/10.1007/s10212-017-0357-6

Hickendorff, M. (2020). Fourth graders' adaptive strategy use in solving multidigit subtraction problems. *Learning and Instruction*, *67*, 101311. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101311

Hopkins, S., Russo, J., & Siegler, R. (2022). Is counting hindering learning? An investigation into children's proficiency with simple addition and their flexibility with mental computation strategies. *Mathematical Thinking and Learning*, *24*(1), 52–69. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1842968

Inkrement. (u.å.). *Campus Inkrement*. Hentet 8. mars 2023, fra https://campus.inkrement.no/

Jelstad, J. (2023, 27. mai). For mange lærere føles det feil at de ikke har en reell mulighet til å velge fysiske bøker. *Utdanningsnytt.* https://www.utdanningsnytt.no/digital-kompetanse-digital-undervisning-digitalisering/bruk-av-skjerm-i-skolen-for-mange-laerere-foles-det-feil-at-de-ikke-har-en-reell-mulighet-til-a-velge-fysiske-boker/361239

Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Skrindo, K., & Weider, Ø. J. (2020). *Mønster: Matematikk 1T*. Gyldendal.

Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Skrindo, K., & Weider, Ø. J. (2021). *Mønster: Matematikk R1*. Gyldendal.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (s. 21–33). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_2

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Verdier og prinsipper for grunnopplæringen—Overordnet del av læreplanverket.* https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Kverndokken, K. (Red.). (2015). Vurdering av muntlighet i klasserommet. *101 måter å fremme muntlige ferdigheter på—Om muntlig kompetanse og muntlighetsdidaktikk.* (s.119–136). Fagbokforlaget.

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, *124*(1), 83–97. https://doi.org/10.1037/0096-3445.124.1.83

Lemonidis, C., & Likidis, N. (2021). An integrated hierarchical model of 5th grade students' computational estimation strategies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(1), 84–106. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1663951

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. *Approaches to Algebra* (s. 65–86). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Meld. St. 28. (2015-2016). *Fag – Fordypning – Forståelse: En fornyelse av Kunnskapsløftet.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

NDLA. (u.å.). *Nasjonal digital læringsarena—NDLA*. Hentet 8. mars 2023, fra https://ndla.no/

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Forskningsetikk. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Newton, K. J., Lange, K., & Booth, J. L. (2020). Mathematical flexibility: Aspects of a continuum and the role of prior knowledge. *The Journal of Experimental Education*, *88*(4), 503–515. https://doi.org/10.1080/00220973.2019.1586629

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult?: A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency: Bd. no. 154*. Faculty of Educational Sciences, University of Oslo.

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Gustafsson, E., & Jacobsen, R. B. (2021). *Sinus R1*. Cappelen Damm.

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Pedersen, T. A., & Jacobsen, R. B. (2020). *Sinus 1T*. Cappelen Damm.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: A collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM*, *45*(7), 929–943. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0534-2

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). The power of comparison in learning and instruction: Learning outcomes supported by different types of comparisons. *Psychology of Learning and Motivation*, 200-225. https://www.academia.edu/14471514/The_Power_of_Comparison_in_Learning_and_Instruction_Learning_Outcomes_Supported_by_Different_Types_of_Comparisons

Rosenlund-Hauglid, S. (2023, 25. mai). Profilerte nordmenn tar til orde for mindre skjermbruk i skolen. *VG*. https://www.vg.no/nyheter/innenriks/i/76Qzv4/profilerte-nordmenn-tar-til-orde-for-mindre-skjermbruk-i-skolen

Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds: The process of change in children's thinking*. Oxford University Press.

Sikt. (u.å.). *Meldeskjema for personopplysninger i forskning*. Hentet 21. februar 2023, fra https://sikt.no/fylle-ut-meldeskjema-personopplysninger

Skemp, R. R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(2), 88–95.

Skott, J. (2008). *Delta: Fagdidaktik*. Forlaget Samfundslitteratur.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, *18*(6), 565–579. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.018

Star, J. R., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., & Perova, N. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *ZDM*, *41*(5), 569–579. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0181-9

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(2), 125–147. https://doi.org/10.1007/BF00555720

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM*, *41*(5), 581–590. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0187-3

Torbeyns, J., Hickendorff, M., & Verschaffel, L. (2017). The use of number-based versus digit-based strategies on multi-digit subtraction: 9–12-year-olds' strategy use profiles and task performance. *Learning and Individual Differences*, *58*, 64–74. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.07.004

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators* (Bd. 36, s. 137–162). Springer US. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_7

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01)*. https://www.udir.no/lk20/mat09-01

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R) (MAT03-02)*. https://www.udir.no/lk20/mat03-02

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335–359. https://doi.org/10.1007/BF03174765

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2011). Analyzing and developing strategy flexibility in mathematics education. *Links Between Beliefs and Cognitive Flexibility* (s. 175–197). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1793-0_10

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning*, *26*(2), 22–27.

Zhang, D., Ding, Y., Barrett, D. E., Xin, Y. P., & Liu, R. (2014). A comparison of strategic development for multiplication problem solving in low-, average-, and high-achieving students. *European Journal of Psychology of Education*, *29*(2), 195–214. https://doi.org/10.1007/s10212-013-0194-1

NTNU

Kunnskap for en bedre verden