Martin Slettum

Didaktisk transposisjon av analysens fundamentalteorem

Fra akademisk kunnskap til kunnskap som skal undervises i den videregående skolen

Masteroppgave i matematikk
Veileder: Heidi Strømskag
Juni 2023

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Martin Slettum

Didaktisk transposisjon av analysens fundamentalteorem

Fra akademisk kunnskap til kunnskap som skal undervises i den videregående skolen

Masteroppgave i matematikk
Veileder: Heidi Strømskag
Juni 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne studien undersøker jeg hvilke didaktiske transposisjoner som analysens fundamentalteorem, bestemt integral og ubestemt integral har gjennomgått fra akademisk kunnskap til kunnskap som skal undervises i den videregående skolen. Studien er en dokumentanalyse, hovedsakelig av tre lærebøker som representerer kunnskapen som skal undervises i faget Matematikk R2 i den videregående skolen. Lærebøkene er *Mønster: Matematikk R2* (Kalvø et al., 2022), *Sinus R2: Matematikk* (Oldervoll et al., 2022) og *Matematikk R2* (Borge et al., 2022). Den akademiske kunnskapen baserer seg hovedsakelig på universitetsboken *Calculus: A Complete Course* (Adam & Essex, 2013). Formålet med denne studien er å undersøke hvordan kunnskapen er tilpasset for å undervises i den videregående skolen etter implementeringen av ny læreplan i Norge fra 2020.

Forskningsdesignet til denne studien er bygd på at den antropologiske teorien for det didaktiske (ATD) er valgt som teoretisk og analytisk rammeverk. Analysen baserer seg på begrepene *prakseologi*, *prakseologisk analyse* og *didaktisk transposisjonsanalyse*. Basert på disse konseptene, analyserer jeg kunnskapen slik det kommer frem i lærebøkene i den videregående skolen og undersøker hvordan kunnskapen skiller seg fra den akademiske kunnskapen.

Min studie viser at lærebøkene i den videregående skolen har fjernet den matematiske kompleksiteten fra den akademiske kunnskapen på flere områder. Teoremer fra universitetsversjonen blir brukt i utledninger for den matematiske kunnskapen, men uten å bemerke det for elevene. Det fører til en reduksjon av matematikkens fagterminologi og formelle oppbygning. Analysens fundamentalteorem presenteres med en forenklet symbolbruk, men forenklingen kan gjøre det vanskelig å forstå alle egenskaper som teoremet skal fastslå. Når det gjelder beviset av analysens fundamentalteorem bruker lærebokforfatterne en geometrisk tilnærmelse som bygger på elevene sin intuisjon, fremfor et stringent algebraisk bevis fra den akademiske kunnskapen. Et resultat av det visuelle beviset i lærebøkene for videregående skole, er at den matematiske kunnskapen er mer tilgjengelig og meningsfull for elevene med den bakgrunnskunnskapen de er forventet å ha. Denne kunnskapen er imidlertid ikke tilstrekkelig for å gjenskape beviset som presenteres i universitetsversjonen.

Abstract

In this study, I examine the didactic transposition undergone by the fundamental theorem of calculus, definite integral and indefinite integral from scholarly knowledge to knowledge to be taught intended for Norwegian upper secondary school. The study is a document analysis, primarily of three textbooks that represent the knowledge to be taught in the subject “Matematikk R2” at upper secondary school. These textbooks include *Mønster: Matematikk R2* (Kalvø et al., 2022), *Sinus R2: Matematikk* (Oldervoll et al., 2022) and *Matematikk R2* (Borge et al., 2022). The academic knowledge is mainly based on the university textbook *Calculus: A Complete Course* (Adam & Essex, 2013). The purpose of this study is to examine how the knowledge has been adapted for teaching at the upper secondary school following the implementation of a new national curriculum in Norway from 2020.

The research design of this study is built on the selection of the anthropological theory of the didactic (ATD) as the theoretical and analytical framework. The analysis relies on the concepts of *praxeology*, *praxeological analysis* and *didactic transposition analysis*. Based on these concepts, I analyze the knowledge as presented in the mathematics textbooks for upper secondary school and examine how the knowledge differs from the academic knowledge.

My study reveals that the textbooks for upper secondary school have removed the mathematical complexity from the academic knowledge in several areas. Theorems from the university version are used in derivations for the mathematical knowledge, but without pointing it out to the students. This results in a reduction of mathematical terminology and formal structure. The fundamental theorem of calculus is presented with simplified symbolic notation, but this simplification makes it difficult to grasp all the properties that the theorem aims to establish. Regarding the proof of the fundamental theorem of calculus, the textbooks authors use a geometric approximation that builds upon the student’s intuition, rather than a rigorous algebraic proof found in the academic knowledge. One consequence of this visual proof in the textbooks for upper secondary school, is that the mathematical knowledge becomes more accessible and meaningful to the students with the background knowledge they are expected to have. However, this knowledge is not sufficient to reproduce the proof presented in the university version.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten av min lektorutdanning i realfag på NTNU i Trondheim. Det har vært et krevende studieløp, men likevel er det med blandede følelser at jeg ser enden på studietiden. Jeg har trivdes svært godt i studenttilværelsen, men samtidig gleder jeg meg til å ta i bruk det jeg har lært og videreutvikle meg som lektor i arbeidslivet. Masteroppgaven har vært utfordrende og tidvis frustrerende, men likefullt interessant og et veldig lærerikt prosjekt som jeg nå er veldig stolt av.

Jeg vil takke min veileder for masteroppgaven, Heidi Strømskag, for mange nyttige diskusjoner, verdifulle tilbakemeldinger og ikke minst motiverende ord. Jeg setter stor pris på at du alltid har tatt deg tid til å hjelpe meg. Du er stor inspirasjon som er sterk faglig, flink pedagogisk og veldig engasjert. Jeg er veldig takknemlig for at du har vært min veileder og støttespiller.

Videre vil jeg takke min bror og søster, Ole André og Eva Cecilie, for deres innsats som korrekturlesere av oppgaven. Jeg vil takke mine venner og medstudenter for å ha vært helt avgjørende for min trivsel i studietiden. Avslutningsvis vil jeg uttrykke takknemlighet overfor familie og kjæreste som har støttet meg gjennom hele studieløpet.

Trondheim, 31.mai 2023

Martin Slettum

Innhold

Kapittel 1

Introduksjon

1.1 Bakgrunn for studien

Analysens fundamentalteorem (AFT) er et av de viktigste teoremene innen matematisk analyse som fastslår at derivasjon og integrasjon er omvendte regningsarter (Lindstrøm, 2016). Teoremet har fått et eget kompetansemål i faget Matematikk R2 i den videregående skolen etter Kunnskapsløftet i 2020: «Gjøre rede for analysens fundamentalteorem og gjøre rede for konsekvenser av teoremet» (Utdanningsdirektoratet, 2021). Ved hjelp av den antropologiske teorien for det didaktiske, skal jeg undersøke hvilke *didaktiske transposisjoner* som denne kunnskapen har gjennomgått fra den akademiske kunnskapen på universitetet til kunnskap som skal undervises i den videregående skolen. Didaktiske transposisjoner er forenklinger og tilpasninger for at kunnskapen skal være tilgjengelig og meningsfull for det tiltenkte nivået (Bosch & Gascón, 2014). Likevel er det viktig å være bevisst på at enkelte transposisjoner kan skape misforståelser og har stor betydning for hvilken kunnskap elevene sitter igjen med (Chevallard & Bosch, 2020b).

Motivasjonen for denne studien er todelt. For det første opplevde jeg en betydelig overgang fra skolematematikk til universitetsmatematikk. Den store overraskelsen kom allerede i det første emnet på universitet, MA1101 på NTNU, som var et grunnkurs i matematisk analyse med fokus på matematisk stringens. Innenfor matematisk analyse står grensebegrepet i fokus, hvor derivasjon og integrasjon er to av hovedtemaene (MA1101, u.å). Analysens fundamentalteorem (AFT) ble presentert i emnet, og det ble fastslått at derivasjon og integrasjon er inverse prosesser. Jeg forstod aldri meningen med det: Integrasjon var jo uansett definert som antiderivasjon, tenkte jeg. I masteroppgaven har jeg fått muligheten til å studere AFT og dets mening, og samtidig undersøke forskjellene mellom institusjonenes behandling av denne kunnskapen. I mitt fremtidig arbeid som lærer vil det være svært nyttig for elevene sin del, fordi jeg lettere kan tilpasse kunnskapen for elevenes nivå basert på deres forutsetninger. Jeg har også flere innspill angående undervisning av analysens fundamentalteorem og den nødvendige forkunnskapen som følger med dette, som er nyttig for mine fremtidige kollegaer.

Den andre motivasjonen for studien er mitt forhold til lærebøker. Jeg har selv benyttet lærebøker svært aktivt som elev og student, men samtidig som et verktøy til forberedelse av undervisning i praksisperiodene. Lærebøker er et hjelpemiddel som skal dekke kompetansemålene i læreplanen (Kravet om språkleg parallellutgåve, 2006, §17–2). Imidlertid finnes det flere framgangsmåter enn de som blir presentert i lærebøkene for å løse et matematisk problem. Som fremtidig lærer er det derfor svært viktig at jeg kan vurdere den kunnskapen som blir behandlet i matematikkundervisningen for elevene, slik at jeg kan gjøre individuelle tilpasninger ved behov, enten det er forenklinger eller økning av kunnskapens presisjonsnivå.

1.2 Forskningsspørsmål

I denne studien vil jeg se nærmere på hvordan analysens fundamentalteorem (AFT) er tilpasset undervisning i faget Matematikk R2. AFT forutsetter at man har definert det bestemte integralet som en grense av sum. I tillegg er kjennskap til det ubestemte integralet en viktig forkunnskap i møte med teoremet. Av den grunn er bestemt og ubestemt integral en del av kunnskapen om AFT som jeg skal undersøke i lærebøkene. Forskningsspørsmålet er følgende:

Hvilke didaktiske transposisjoner har analysens fundamentalteorem gjennomgått fra en universitetsversjon til en versjon som skal undervises i videregående skole?

Jeg har gjennomført en kvalitativ studie med dokumentanalyse som forskningsmetode. Universitetsversjonen i min studie er representert ved en lærebok for matematisk analyse, og versjonen som skal undervises i videregående skole er representert ved tre lærebøker tiltenkt faget Matematikk R2. Materialet vil spesifiseres i Kapittel 3.3. Hensikten med oppgaven er ikke å besvare hvordan AFT bør undervises i den videregående skolen, men intensjonen er at studien skal bidra til denne diskusjonen og føre til noen anbefalinger.

Thompson og Harel (2021) gjennomførte nylig en omfattende metastudie med tittelen «Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties». Studien ble publisert i et av de mest prestisjefylte tidsskriftene i matematikkdidaktikk, *ZDM Mathematics Education*. Forfatterne analyserer flere faktorer knyttet til studenters vanskeligheter med å lære matematisk analyse med utgangspunkt i derivasjon og integrasjon, men de tar ikke i betraktning undervisningsressurser som blir brukt når det gjelder å forklare studenters vanskeligheter med matematikken. Det synes å være en mangel i forskningslitteraturen, ettersom en viktig metastudie ikke berører aspektet lærebøker. Min studie bidrar til å belyse hvordan behandlingen av AFT i lærebøker for den videregående skolen kan skape vanskeligheter for studenter sin forståelse av temaet.

I emnet RFEL3100 på NTNU undersøkte jeg hvordan tre matematikklærere vil beskrive og forklare analysens fundamentalteorem i sin klasse med *Mønster R2* som ressurs (Slettum, 2022). Spørreskjemaet til lærerne var utformet basert på en analyse av den relevante kunnskapen i *Mønster: Matematikk R2* (Kalvø et al., 2022). Denne boken benyttet jeg videre i masteroppgaven. Enkelte deler av datamaterialet som jeg siterer i Kapittel 5.3.1, finner man igjen i Slettum (2022). Siden datamaterialet er direkte siteringer fra læreboken, vil jeg naturligvis henvise direkte til originalkilden, Kalvø et al. (2022). Videre ble det samme teoretiske rammeverket benyttet i Slettum (2022), slik at den prakseologiske analysen i Kapittel 5.3.1 er en videreføring av analysen som ble gjennomført i RFEL3100. Arbeidet med masteroppgaven har gitt dypere innsikt i det teoretiske rammeverket, slik at fremstillingen i denne studien vil hovedsakelig være nytt innhold for dette kapittelet. For ordens skyld benyttet jeg tilsvarende universitetsbok, *Calculus: A Complete Course* (Adam & Essex, 2013) i Slettum (2022) for å presentere en norsk versjon av AFT slik jeg har gjort i Kapittel 4.3 for denne studien. Teoremet som presenteres her tilsvarer den versjonen som ble gitt i Slettum (2022), men siden det kun er en oversettelse av originalkilden vil jeg i Kapittel 4.3 referere direkte til Adam og Essex (2013).

1.3 Oppgavens oppbygning

I Kapittel 2 vil jeg redegjøre for det teoretiske rammeverket i denne studien: Den antropologiske teorien for det didaktiske. Videre i Kapittel 3 vil jeg beskrive metodologien som ligger til grunn for å svare på forskningsspørsmålet som denne studien adresserer. I Kapittel 4 presenterer jeg en referansemodell for analysens fundamentalteorem. Analyse av det matematiske innholdet i lærebøkene i den videregående skolen og deres tilhørende didaktiske transposisjoner vil bli redegjort for i Kapittel 5. I Kapittel 6 vil jeg diskutere analyseresultatene i lys av teori og tidligere forskning. Avslutningsvis i Kapittel 7 gir jeg et svar på forskningsspørsmålet og utdyper didaktiske implikasjoner og profesjonsrelevans med denne studien.

Kapittel 2

Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet følger en presentasjon av teorien som er brukt til utforming av metode, som analyseverktøy og som ressurs til diskusjonskapittelet. I Kapittel 2.1 vil jeg presentere generelt om den antropologiske teorien for det didaktiske. Det analytiske verktøyet bak teorien om prakseologi vil bli redegjort for i Kapittel 2.2. Teori om didaktiske transposisjonsprosesser i Kapittel 2.3 danner utgangspunkt for deler av metodologien. Avslutningsvis vil jeg presentere to didaktiske paradigmer i Kapittel 2.4 som vil være til nytte under diskusjonen i Kapittel 6.1.

2.1 Den antropologiske teorien for det didaktiske

Det teoretiske rammeverket til denne studien er *den antropologiske teorien for det didaktiske* (the Anthropological Theory of the Didactic – heretter ATD) utviklet hovedsakelig av franskmannen Yves Chevallard (Bosch & Gascón, 2014). ATD ble utviklet for å studere *didaktiske transposisjonsprosesser* i matematikk på 1980-tallet, men rammeverket har nå flere bruksområder. Teorien blir brukt til å studere menneskelig aktivitet i form av undervisning, læring, spredning og utvikling av kunnskap. Dette gjelder både innenfor matematikk og ved andre fagdisipliner (Chevallard & Bosch, 2020a).

Et av målene med ATD er å belyse og forstå alle faktorer for læring og undervisning som skjer i et *didaktisk system*. Et didaktisk system S beskriver en læringssituasjon hvor X er en eller flere personer som skal lære en kunnskap $\mathscr{k}$. Videre er Y en eller flere personer som underviser eller veileder X. I skolesammenheng er X elevene og Y er lærere. Notasjonen $S(X, Y, \mathscr{k})$ brukes for å beskrive det didaktiske systemet. Ved selvstudium kalles det didaktiske systemet *autodidaktisk* hvor den tomme mengden $\emptyset$ benyttes i notasjonen, $S(X, \emptyset, \mathscr{k})$ (Chevallard, 2019).

Et didaktisk system $S(X, Y, \mathscr{k})$ påvirkes av betingelser som er utenfor medlemmenes kontroll. Betingelser referer til enhver faktor som har innflytelse over noe annet (Chevallard, 2019). Eksempelvis vil kunnskapen $\mathscr{k}$ være betinget av kompetansemålene i læreplanen og presentasjonen i læreverk som brukes i undervisningen. Læreplanen og læreverkene er formet av didaktiske transposisjonsprosesser, noe jeg vil forklare i Kapittel 2.3. Betingelser man ikke kan gjøre noe med, regnes som en begrensning (Chevallard & Bosch, 2020a). Kompetansemålene regnes her som en begrensning, fordi man er lovpliktig til å gi opplæring i samsvar med disse (Opplæringsloven, 1998). I ATD forekommer betingelser og begrensninger på seks ulike nivåer i en skala for didaktisk medbestemmelse, der nivåene er innbyrdes avhengig av hverandre:

Menneskeheten ⇄ *Sivilisasjon* ⇄ *Samfunn* ⇄ *Skole* ⇄ *Pedagogikk* ⇄ *Didaktisk system*

Det didaktiske systemet representerer det nederste nivået i skalaen, og som en konsekvens vil alle betingelser som gjelder et av de høyere nivåene, potensielt være gjeldende her (Chevallard, 2019). *Skole* er en institusjon hvor elevene får en mulighet til å studere. Skolenivået står for den generelle organiseringen som for eksempel gruppering av lærere og elever, romfordeling eller tidsplan for elevene (Bosch, 2018; Chevallard & Bosch, 2020a). Eksempelvis vil det være viktig at elever som studerer kjemi får laboratoriet i sin undervisningstime dersom elevene skal lære en spesifikk kunnskap $\mathscr{k}$ gjennom forsøk. Mangel på egnede rom kan være en begrensning i dette tilfellet. Videre er *pedagogikk* en forbindelse mellom det didaktiske systemet og den enkelte skole. Pedagogikken består av alle betingelser og begrensninger som avgjør hvordan elevene på skolen møter kunnskapen $\mathscr{k}$. En typisk del av skolens pedagogikk er klasseinndeling etter alder, kjønn eller andre karakteristikker som skal gi en kollektiv tilnærming til kunnskapen. Et annet kjennetegn er læreren som skal fungere som en pedagog og veileder for elevene (Chevallard & Bosch, 2020a). Kategorien pedagogikk innebærer også valg av undervisningsform; eksempelvis utforskende undervisning, samarbeidslæring eller omvendt undervisning (Bosch, 2018).

De neste nivåene i skalaen er *samfunn*, *sivilisasjon* og *menneskeheten*. Samfunn forstås på vanlig måte i ATD (Chevallard og Bosch, 2020a). I Store norske leksikon står det at et samfunn kan beskrives som en sammenslutning av individer som deler en geografisk region, kultur, en felles organisasjon eller sosial struktur. Individene er knyttet sammen gjennom ulike former for relasjoner og kan ha felles normer, verdier, tradisjoner og språk (Haugseth, 2021). Ulike samfunn lever likevel ikke isolert, og av den grunn vil flere samfunn være en del av sivilisasjonen. Et eksempel på hvordan sivilisasjonen legger betingelser på samfunnet, så vi i Norge da svake resultater på den internasjonale PISA-undersøkelsen i 2001 ga utgangspunkt for innføring av nasjonale prøver i 2004 og ny læreplan i 2006 (Hovdensak & Strey, 2015). Det øverste nivået i skalaen for didaktisk medbestemmelse er menneskeheten som tilsvarer menneskearten Homo sapiens. Hvis man ser bort fra sivilisasjon er det et flertall av hvert enkelt nivå i skalaen for didaktisk medbestemmelse. Flere sivilisasjoner, flere samfunn, flere skoler, flere pedagogikker og flere didaktiske systemer. Jo lavere nivå i skalaen desto mer spesifikke betingelser eksisterer (Chevallard, 2019; Chevallard & Bosch, 2020a).

2.2 Prakseologi

I ATD påstår man at enhver aktivitet knyttet til produksjon, spredning eller tilegnelse av kunnskap skal tolkes som en vanlig menneskelig aktivitet (Bosch & Gascón, 2014). Den menneskelige aktiviteten kan deles inn i *prakseologier* som videre består av og kobler sammen to blokker: *praksis* og *logos*. Praksisblokken handler om å vite hvordan man gjør noe, og denne blokken deles inn i typer *oppgaver* T og *teknikker* τ. Logosblokken handler om å vite hvorfor man gjør som man gjør, og denne blokken deles inn i *teknologi* θ og *teori* Θ. De fire komponentene $[T, \tau, \theta, \Theta]$ utgjør prakseologien og er en modell av kunnskapen (Chevallard, 2019), som jeg forklarer i de følgende avsnittene.

Type oppgaver T er et vidt begrep i ATD hvor alle menneskelige aktiviteter defineres som en form for oppgave, enten oppgaven er «å lage frokost» eller «å løse et integral». Man skiller mellom type oppgaver T og en spesifikk oppgave t av typen T (Chevallard, 2019). Å løse et ubestemt integral hvor integranden er en potensfunksjon vil være en type oppgave T. En spesifikk potensfunksjon, eksempelvis $f(x) = x$, vil være en oppgave $t_1 \in T$. Enhver oppgave t bruker en teknikk τ for å bli løst (Chevallard, 2019). Eksempelvis kan potensfunksjonen $f(x) = x$ integreres ved hjelp av integrasjonsregelen, $\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ hvor $n \neq -1$ (Adam & Essex, 2013). Integrasjonsregelen er en av flere mulige teknikker for oppgave t_1.

Teknologien θ beskriver og rettferdiggjør teknikken som brukes for å løse en oppgave $t \in T$. I matematikk vil et matematisk bevis eller en definisjon ofte være en del av teknologien for å forklare at teknikken fungerer (Chevallard, 2019). I mitt eksempel med potensfunksjon vil begrunnelse av likningen $\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ utgjøre teknologien. En mulig teknologi i dette tilfelle er at derivasjon av høyre side blir lik uttrykket som skal integreres. Altså at $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\right) = (n+1)\frac{1}{n+1} x^{n+1-1} + 0 = x^n$. Likevel vil en teknologisk diskurs inneholde mangler eller antagelser som blir tatt for gitt. Det kan samtidig skyldes at teknologien er ufullstendig. Av den grunn vil en teori Θ støtte og danne grunnlaget for den teknologiske diskursen. I mitt eksempel må det antas i teknologien at derivasjon og integrasjon er omvendte regnearter som følge av analysens fundamentalteorem. Samtidig antar man at derivasjonsregelen er korrekt. En utdypende teori Θ vil være å begrunne hvorfor antagelsene er korrekt. Teknologi og teori har likevel ikke en tydelig definert grense og kan være vanskelig å skille, men teorien er ofte av abstrakt karakter (Chevallard & Bosch, 2020a).

En analyse ved hjelp av de fire komponentene kalles en prakseologisk analyse. Et av hovedområdene med forskning innenfor ATD har vært å utvikle prakseologiske analyser av pensuminnholdet til elevene på skolen sammen med *objektene* og *relasjonene* som blir skapt under spesifikke institusjonelle forhold (Chevallard & Bosch, 2020a). Et objekt er alt som er relevant for det som står i læreplanen og som har betydning, men det trenger ikke selv å stå i læreplanen. I matematikk betyr dette teoremer, teknikker, begreper, oppgaver og lignende som er viktig for å lære den matematikken som skal undervises. Relasjoner i ATD betyr den kunnskapen som individer, enten det er elever eller lærere, har utviklet om objektene. I ATD er individets læring av noe definert som individets utvikling av en relasjon til det som skal læres (Chevallard & Bosch, 2020a). En relasjon til et objekt, eksempelvis integrasjon, kan være å mestre en integrasjonsteknikk, forstå AFT eller begrunne hvorfor en teknikk fungerer.

Prakseologi vil være viktig for å kartlegge kunnskapen i lærebøkene for min studie. Siden prakseologi er en modell av kunnskapen vil den være avhengig av institusjon (Bosch & Gascón, 2014). I det neste delkapittelet vil jeg se på hvordan kunnskap omformes mellom institusjoner gjennom en didaktisk transposisjonsprosess, som gir utgangspunkt for ulike prakseologier.

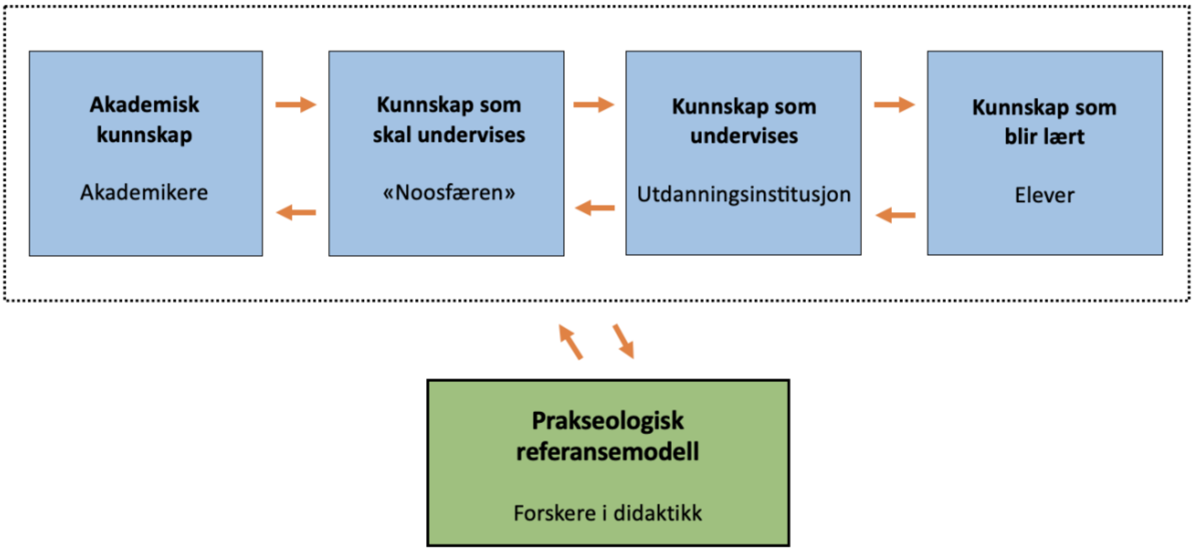
2.3 Didaktiske transposisjonsprosesser

Prosessen med didaktiske transposisjonsprosesser innebærer omforming av kunnskap mellom institusjoner (Chevallard & Bosch, 2020b). Figur 2.1 illustrerer de tre didaktiske transposisjonsprosessene i ATD. *Akademisk kunnskap* produseres ofte av akademikere og finnes typisk i universitetsbøker. Det bør poengteres at akademisk kunnskap er selv et resultat av en didaktisk transposisjon fra kunnskapen ble presentert i sin originalform. Eksempelvis er den matematiske analysen på universitetet et resultat av en didaktisk transposisjon av den matematiske analysen fra 1700–tallet (Winsløw, 2022). *Kunnskapen som skal undervises* stammer fra den akademiske kunnskapen, men må forenkles slik at den er tilgjengelig og meningsfull for elevene i den institusjonen kunnskapen skal undervises. Dette konstrueres av personer som befinner seg i «noosfæren». Det vil det si sfæren av de som «tenker om» undervisning (Chevallard & Bosch, 2020b). Mer konkret betyr det de som har laget læreplanen, lærebokforfattere, forskere, lærere og andre. I neste transformasjon ser vi på *kunnskap som undervises* på den enkelte utdanningsinstitusjon. Utdanningsdirektoratet (2022) skriver på sine sider: «Læreplanene beskriver kompetansen elevene skal oppnå, men veien fram dit finner dere ut av sammen». Så den kunnskapen som faktisk blir undervist er ikke nødvendigvis den kunnskapen som skal undervises. Avslutningsvis har vi *kunnskap som blir lært* av elevene. Her stiller man seg spørsmålet om hva elevene har lært etter endt undervisning. Den akademiske kunnskapen om en gitt kunnskap på universitet skiller seg nødvendigvis fra det elevene i videregående skole har lært, men hovedtrekkene for kunnskapen bør være det samme (Chevallard & Bosch, 2020b).

Transformasjonene jeg har beskrevet flyter fra venstre til høyre i Figur 2.1. Imidlertid kan det være nyttig å studere transformasjonene fra høyre til venstre, som en form for etterkontroll. For eksempel vil en vurderingssituasjon i en gitt klasse undersøke om kunnskapen lært av elevene stemmer overens med den kunnskapen som undervises. En nasjonal eksamen vil undersøke om kunnskap som blir lært av elevene stemmer overens med kunnskap som skal undervises. Hvis en større andel av klassen gjennomfører eksamen, kan det i noen grad indikere om kunnskap som undervises av læreren stemmer overens med kunnskap som skal undervises fra læreplanen.

Figur 2.1

Didaktiske transposisjonsprosesser



Merknad. Eksterne forskere vurderer kunnskapen på utsiden av prosessen med en egen referansemodell. Figuren er tilpasset etter Chevallard og Bosch (2020b, s. 217).

Ved studiet av transposisjonsfenomener flytter man seg fra klasserommet og fokuserer på kunnskapen. Siden kunnskap er avhengig av institusjon er det viktig å frigjøre seg fra forståelsen og synspunktene til institusjonen som undersøkes. Som forsker utarbeider man en modell for kunnskapen som kalles en *prakseologisk referansemodell*[1] (Bosch, 2018). Man bør riktignok unngå å tenke at den akademiske kunnskapen er den unike referansen, men basere modellen på empirisk data fra det matematiske samfunnet, utdanningsinstitusjonene og klasserommet. På grunn av begrensning med hensyn til oppgavens omfang vil jeg fokusere på de to førstnevnte. En prakseologisk referansemodell for kunnskapen i denne studien, analysens fundamentalteorem med bestemt og ubestemt integral, vil bli presentert i Kapittel 4.

Resultatet av didaktiske transposisjonsprosesser bør være at kunnskapen er mer tilgjengelig og meningsfull for det tiltenkte nivået. Enkelte transposisjoner kan likevel skape misforståelser og har stor betydning for hvilken kunnskap elevene sitter igjen med (Chevallard & Bosch, 2020b). Et eksempel på en didaktisk transposisjon kan være at matematiske begrep skiftes ut med hverdagsbegrep. Strømskag og Chevallard (2023) studerte den didaktiske transposisjonen for konkavitet av funksjoner mellom den akademiske kunnskapen i en universitetsbok og kunnskap som skal undervises i videregående skole i læreboken *Mønster: Matematikk R1* (Kalvø et al., 2021). Et funn var at ordene konveks og konkav ble byttet ut med det hverdagslig ordet «hul side», henholdsvis opp og ned, i læreboken for videregående skole. Videre fant forfatterne at læreboken i den videregående skolen hovedsakelig fokuserte på teknikken som ble benyttet for å finne hvilke verdier på intervallet hvor funksjonen var enten konveks eller konkav, slik at logosblokken var fraværende.

En annen typisk didaktisk transposisjonsprosess er at eksempler blir brukt generisk for å bevise en sammenheng. Å hevde at en sammenheng er sann etter å ha verifisert med noen få tilfeller kaller Balacheff (1988) for naiv empirisme, og regnes som utilstrekkelig form for bevis i matematikken. Kristianslund (2022) undersøkte i sin studie didaktiske transposisjoner innenfor differensialregning mellom lærerbøker på universitetet og den videregående skolen. Et funn var at derivasjonsregelen $\left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x)+v'(x)$ ble forklart ved hjelp av ett enkelt teksteksempel i læreboken for videregående skole, noe som minner om naiv empirisme. Tilsvarende funn fant González-Martin et al. (2013) i studiet av introduksjon av reelle tall i lærebøker for den videregående skolen i Brasil, hvor egenskaper for tallene ble forklart ved hjelp av eksempler. Elevene ble heller ikke informert om at eksempler ikke kan regnes som gyldige bevis, eller at tilhørende bevis vil bli introdusert på et høyere skolenivå.

[1]I enkelte forskningsartikler kalles det en *epistemologisk referansemodell* (f.eks. i Chevallard & Bosch, 2020b)

2.4 Paradigmet som innebærer å stille spørsmål til verden

Chevallard (2015) definerer didaktisk paradigme som et sett med regler som implisitt beskriver hva som skal studeres, hva kunnskapen k skal være og hvordan det skal studeres. Det tradisjonelle paradigmet vi typisk finner i skolen kaller han *paradigmet som innebærer å besøke arbeider*. Metaforisk heter det «besøke kunnskapsmonumenter», fordi kunnskapen er delt inn i biter som man forventer at studentene skal beundre og nyte, tilsvarende et museum. Som regel uten at elevene vet hvorfor man lærer kunnskapen og hvordan den kan være nyttig

Chevallard (2015) stiller seg kritisk til det tradisjonelle paradigmet. Han mener det gjør studentene til tilskuere hvor funksjonaliteten og nytteverdien av kunnskapen blir borte når kunnskapen betraktes som monumenter. Det kan bli problematisk når elever skal løse oppgaver på egenhånd, fordi det typisk fører til at elevene unngår spørsmål hvor svaret ikke er åpenbart for dem. Samtidig vil elevene tro at det alltid er en person som kan undervise det man trenger å vite. Det åpner heller ikke opp for gode oppfølgingsspørsmål, fordi kunnskapen er bestemt på forhånd. Ifølge Chevallard (2015) er effekten at elever lettere ignorerer eller glemmer kunnskapen når prøven er gjennomført. Det kaller han for papirkurv-prinsippet (*Recycle bin-principle*) (s. 176).

I ATD innføres av den grunn et nytt paradigme som *innebærer å stille spørsmål til verden omkring oss* (Chevallard, 2015). En grunntanke i dette paradigmet er at elevene selv må studere det som skal læres, men med veiledning fra en lærer. Et spørsmål vil bli gitt til elevene, og kunnskapen k som elevene lærer, vil være avhengig av hvordan elevene tilnærmer seg spørsmålet. Paradigmet inviterer elevene til å undersøke og stille nye spørsmål, slik at man ikke flykter fra problemer man ikke har sett før. Av den grunn er ikke kunnskapen k forhåndsbestemt, fordi det vil være ulike måter å besvare spørsmålet på (Chevallard, 2015). Det er interessant å undersøke om vi finner det nye paradigmet for kunnskapen jeg skal undersøke i lærebøkene, men det vil først bli kommentert som en del av diskusjonen i Kapittel 6.1.3.

Kapittel 3

Metodologi

I dette kapittelet presenterer jeg metodologien som ligger til grunn for å svare på forskningsspørsmålet: «Hvilke didaktiske transposisjoner har analysens fundamentalteorem gjennomgått fra en universitetsversjon til en versjon som skal undervises i videregående skole?». I Kapittel 3.1 vil jeg gi en beskrivelse av forskningsdesignet. Videre tar jeg for meg didaktisk transposisjonsanalyse, som er basert på deler av det teoretiske rammeverket, i Kapittel 3.2. I Kapittel 3.3 vil jeg presentere datamaterialet som benyttes for å svare på forskningsspørsmålet og kildene til den prakseologiske referansemodellen som jeg presenterer i Kapittel 4. Jeg vil se nærmere på hvorfor lærebøker er et interessant forskningsobjekt i Kapittel 3.4, og avslutningsvis beskrive mine forskningsetiske betraktninger i Kapittel 3.5.

3.1 Forskningsdesign

Denne studien er gjennomført i et kvalitativt forskningsparadigme med dokumentanalyse som utgangspunkt. Dokumentanalyse er en systematisk prosedyre for gjennomgang og evaluering av dokumenter som foreligger enten fysisk eller digitalt. Den analytiske prosedyren innebærer å finne og velge ut data som videre må analyseres og tolkes (Bowen, 2009). Det analytiske verktøyet er basert på begrepet prakseologi, presentert i Kapittel 2.2, som har vært et viktig hjelpemiddel for å beskrive og analysere kunnskapen ved hjelp av de fire komponentene $[T, \tau, \theta, \Theta]$. En prakseologisk analyse av et kunnskapsobjekt innebærer å strukturere og analysere kunnskapsobjektet ved å skille mellom oppgavetyper, teknikker, teknologi og teori. En slik analyse gir innsikt i både hvordan man utfører oppgaver og hvorfor visse teknikker og prinsipper brukes. I den prakseologiske analysen tar jeg utgangspunkt i noen generiske oppgavetyper som jeg har laget basert på oppgaver i de ulike lærebøkene og tilhørende kompetansemål for faget Matematikk R2. Videre vil jeg fokusere på teknikk τ, teknologi θ og teori Θ for hvordan oppgavetypene behandles i de ulike lærebøkene. Kunnskapen i min studie er basert på definisjoner og teoremer som bidrar til å løse svært mange ulike oppgavetyper, slik at en studie av alle oppgavene i lærebøkene vil bli for omfattende i denne sammenheng. Den prakseologiske analysen av kunnskapen vil dermed være inspirert av den prakseologiske analysen av integrasjonskapittelet i læreboken *Matematikk R2* (Heir et al., 2016), som Topphol og Strømskag (2022) har gjennomført. I det neste delkapittelet vil jeg beskrive hvordan den prakseologiske analysen utgjør en viktig del av min didaktiske transposisjonsanalyse.

3.2 Didaktisk transposisjonsanalyse

En didaktisk transposisjonsanalyse av en kunnskap $\mathscr{k}$ består av en analyse av hvordan en «kopi» av $\mathscr{k}$ har gjennomgått en transformasjon fra en organisasjon i en institusjon til en annen organisasjon i en annen institusjon hvor $\mathscr{k}$ skal bli undervist (Strømskag & Chevallard, 2023). Det innebærer derfor en sammenligning av to prakseologiske analyser av to ulike «kopier» av kunnskapen $\mathscr{k}$. I min studie betyr det at prakseologiske analyser av lærebøkene sammenlignes med den prakseologiske referansemodellen, som blir presentert i Kapittel 4. Kunnskapen $\mathscr{k}$ i min studie er som tidligere nevnt analysens fundamentalteorem, ubestemt og bestemt integral. Analysen tar utgangspunkt i begrepet *didaktisk transposisjon*, som jeg presenterte i Kapittel 2.3. I denne studien vil jeg fokusere på transformasjonen fra *akademisk kunnskap* til *kunnskap som skal undervises* i den videregående skolen fra de didaktiske transposisjonsprosessene, se Figur 2.1. Transformasjonene forekommer når akademisk kunnskap eller innhold «oversettes» og tilpasses til undervisningsmateriell, spesielt læreplaner og lærebøker. Studiet av transposisjonsprosessene innebærer å undersøke hvordan den opprinnelige fagkunnskapen rekontekstualiseres, forenkles og organiseres for å gjøre den egnet for undervisnings- og læringsformål (Chevallard & Bosch, 2020b). Når læreplandesignere og lærebokforfattere henholdsvis designer læreplaner og skriver lærebøker, går de derfor inn i en transposisjonsprosess der de omformer fagkunnskapen til en mer tilgjengelig og didaktisk egnet form med hensyn til den tiltenkte målgruppen, didaktiske mål og læreplanens krav. Dette innebærer å forenkle og klargjøre materialet, enten ved bruk av eksempler, illustrasjoner og språklige tilpasninger, samt tilpasninger som kan gjøre at kunnskapens natur endres (Strømskag & Chevallard, 2023). Eksempelvis at matematiske teoremer blir til definisjoner eller at teknikken for å løse en oppgave endrer seg. En annen vanlig tilpasning er å introdusere en «naturalistisk» tilnærming til den aktuelle kunnskapen, som innebærer å presentere eksempler som betraktes som generiske og videre presentere nødvendige teknikker, teknologi og teori. Ifølge Strømskag & Chevallard (2023) er de to sistnevnte elementene for en prakseologi i lærebøkene for videregående skole ofte ikke så framtredende, om de i det hele tatt er inkludert.

Ved å studere den didaktiske transposisjonen kan forskere få innsikt i valgene som er gjort av lærebokforfatterne og deres konsekvenser for undervisning og læring. Dette bidrar til å identifisere potensielle styrker og svakheter ved lærebøker, samt deres tilpasninger til utdanningsmålene. I tillegg kan en slik analyse bidra til utvikling av retningslinjer og anbefalinger for å forbedre kvaliteten av og effektiviteten til undervisningsmateriell i en institusjon (Chevallard & Bosch, 2020b; Strømskag & Chevallard, 2023). I neste delkapittel vil jeg presentere hva som utgjør datamaterialet i den didaktiske transposisjonsanalysen.

3.3 Datamateriale

I arbeidet med å svare på forskningsspørsmålet var lærebøker et naturlig sted å starte. Jeg har studert lærebøkene som er produsert til faget Matematikk R2 etter den nye læreplanen i 2020: *Mønster: Matematikk R2* (heretter *Mønster R2*: Kalvø et al., 2022), *Sinus R2: Matematikk* (heretter *Sinus R2*: Oldervoll et al., 2022) og *Matematikk R2* (Borge et al., 2022)[2]. På den måten unngår jeg partiskhet med hensyn på utvalg av dokumenter (Bowen, 2009). Av oppgavens natur vil det være nødvendig med en viss mengde datamateriale fra lærebøkene, slik at leseren ikke trenger å ha bøkene tilgjengelig selv. Dette vil bli presentert i sammenheng med analysen i Kapittel 5. Synligheten til datamaterialet skal bidra til at analysen blir transparent.

Som hovedkilde for den akademiske kunnskapen har jeg benyttet universitetsboken *Calculus: A Complete Course* av Adam og Essex (2013), som er en innføringsbok i matematisk analyse. Jeg brukte boken selv i mitt første grunnkurs i matematisk analyse på universitetet. Tilsvarende bok, bare en nyere utgave, benyttes i det tilsvarende emnet på NTNU i dag (MA1101, u.å.). I den *prakseologiske referansemodellen* har jeg referert til flere universitetsbøker for å styrke den faglige tyngden bak modellen. Briggs og Cochran (2011), Edwards og Penney (2002), Lindstrøm (2016), Lorentzen et al. (2003) og Neuhauser (2011) er alle moderne universitetsbøker tiltenkt matematisk analyse som jeg har benyttet. Som et supplement har jeg studert den klassiske matematikkboken fra Griffiths og Hilton (1970).

Læreplanen i det enkelte fag beskriver fagets innhold og mål (Kunnskapsdepartementet, 2017). Herunder er kompetansemålene i faget Matematikk R2 relevant for å forstå hvilken kunnskap som lærebøkene skal dekke. Andre momenter som beskrivelse av kjerneelementer og fagets relevans er blitt studert i læreplanen for faget Matematikk R2 (Utdanningsdirektoratet, 2021). Videre har jeg benyttet overordnet del av læreplanen for å undersøke det grunnsynet som skal prege pedagogisk praksis i hele grunnopplæringen. Den overordnede delen skal utdype

[2] Når jeg benytter kursiv skrift og referer til «*Matematikk R2*», betyr det læreboken fra Borge et al. (2022). Ved undervisningsfaget, vil jeg bruke begrepet «faget Matematikk R2».

verdigrunnlaget i opplæringslovens formålsparagraf og de overordnede prinsippene for grunnopplæringen (Kunnskapsdepartementet, 2017). Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 (LK20) kan sees på som en del av datamaterialet til den prakseologiske referansemodellen i Kapittel 4, men utgjør ikke en del av selve datamaterialet til analysen i Kapittel 5.

Kristianslund (2022) undersøkte i sin masteroppgave det matematiske innholdet i tema differensialregning i Matematikk R1 og tilhørende didaktiske transposisjonsprosesser for enkelte delkapitler i *Mønster: Matematikk R1* (Kalvø et al., 2021). En tilsvarende undersøkelse innenfor tema integrasjon syntes å være et interessant og viktig forskningsprosjekt. Winsløw (2022) poengterer at matematisk analyse er et av feltene med størst avstand mellom skolematematikk og universitetsmatematikk. Til forskjell fra Kristianslund (2022), som benyttet ett læreverk, tar jeg for meg tre lærebøker fra den videregående skolen. Av den grunn vil en undersøkelse av alle kompetansemålene innenfor integrasjon bli for bredt. Integrasjon er et stort tema for elevene som inngår i fem av tolv kompetansemål (Utdanningsdirektoratet, 2021). Avgrensningen av datamateriale er viktig for at man skal ha mulighet til å ha dyptgående analyser, slik det er tiltenkt i et kvalitativt forskningsparadigme (Robson & McCartan, 2016). Jeg har derfor gått i dybden på kompetansemålet som omhandler analysens fundamentalteorem, først og fremst for at det er blitt et nytt kompetansemål i læreplanen fra 2020, men samtidig for at det har vært et utfordrende teorem for meg å forstå tidligere. Som jeg skal forklare ytterligere i den prakseologiske referansemodellen i Kapittel 4, var det nødvendig å inkludere bestemt og ubestemt integral for en helhetsforståelse av AFT i lærebøkene.

Datamateriale utgjør kjernen for å gi et svar på forskningsspørsmålet i min studie. I neste delkapittel vil jeg utdype i hvilken grad lærebøker benyttes i matematikkundervisning og begrunne hvorfor lærebøker er interessant som forskningsobjekt.

3.4 Lærebøker som forskningsdokument

Bowen (2009), Cohen et al. (2007) og Thagaard (2009) spesifiserer at konteksten til dokumentet og målgruppen må bli tatt til betraktning i forskningen. Eksempel på dette i min studie er at lærebøkene i faget Matematikk R2 er en innføring i et bredt spekter av matematiske temaer for elever i den videregående skolen. Universitetsversjonen derimot, er en introduksjon til matematisk analyse for førsteårsstudenter på universitetet. Transposisjon av kunnskapen mellom institusjonene er med andre ord helt nødvendig. Siden lærebøkene tiltenkt den videregående skolen er i hovedfokus for denne studien, vil konteksten til disse lærebøkene bli presentert i de følgende avsnittene.

Lærebøker er en type læremiddel, hvor sistnevnte er definert ved: «Med læremiddel meiner ein alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa. Dei kan vere enkeltståande eller gå inn i ein heilskap, og dekkjer aleine eller til saman kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet» (Kravet om språkleg parallellutgåve, 2006, § 17–2). At lærebøkene jeg studerer følger kompetansemålene spesifiseres for ordens skyld av den enkelte bok innledningsvis i bøkene (Borge et al., 2022; Kalvø et al., 2022; Oldervoll et al., 2022).

I 1889 ble det etablert en godkjenningsordning for lærebøker i Norge. Hovedsakelig for å sørge for at innholdet i bøkene om kristendom var i samsvar med kristne lærekrav, men senere som et bidrag til å sikre at lærebøkene var i tråd med læreplanen (NOU, 1995, s. 218). I den siste forskriften hvor dette var gjeldende sto det at «Lærebøker i grunnskolen og videregående opplæring godkjennes av Nasjonalt læremiddelsenter» (Forskrift om godkjenning av lærebøker, 1984, § 1). Denne ordningen ble opphevet ved årtusenskiftet. I forskrift til opplæringsloven fra 2006 står det fortsatt at læremidlene skal dekke kompetansemålene, men det er ikke lenger noen form for godkjenningsordning. Det betyr at kvalitetssikringen i større grad er overlatt til skoler og den enkelte lærer. Øystein Gilje gjennomførte i perioden 2013–2015 en omfattende undersøkelse om læremidler sammen med en rekke forskere. Undersøkelsen viser at læremidlene hovedsakelig velges av lærerfellesskapene på bakgrunn av deres faglige autonomi (Gilje et al., 2016). Dette stiller krav til kompetanse og vil ansvarliggjøre læreren som fagperson. Utdanningsdirektoratet (u.å.) har imidlertid utgitt veiledninger, slik at den enkelte kan vurdere kvaliteten av læremidler. Oppheving av godkjenningsordningen bidrar på den måten til at studiet av kunnskapen i lærebøkene er særlig interessant som forskningsobjekt. Ikke minst innenfor utdanningsvitenskap, men samtidig som lærer.

Lærebøker som dokumenter i forskning er interessant som forskningsobjekt av flere grunner. Skal man forstå hvordan undervisning og læring av matematikk foregår er det ikke nok å studere hva elever eller lærere tenker og gjør (Strømskag & Chevallard, 2023). Kunnskapen som skal undervises er i tillegg et viktig forskningsobjekt, særlig med tanke på lærebøkene sin posisjon i matematikkfaget. Undersøkelsen til Gilje et al. (2016) viser at 80% av lærere som underviser matematikk hovedsakelig bruker papirbaserte læremidler i den norske skolen. Utvalget i undersøkelsen deres var både lærere fra grunnskolen og den videregående skolen, men andelen som hovedsakelig brukte papirbaserte lærebøker var like store i begge institusjoner for matematikkfaget (s. 70–71). Lærebøkene kan av den grunn anses som en god kilde til kunnskap som skal undervises i klassen, og i neste omgang den kunnskapen som blir lært av elevene. Lærebøkene kan derfor gi et større bilde av den læringen som foregår i klasserommet.

Til tross for at tidligere forskning viser at lærebøkene står sterkt i matematikkfaget, befinner vi oss i en endring mot digitalisering i skolen. Alle lærebøkene som jeg studerer fra den videregående skolen, har tilhørende digitale nettressurser. En oppfølgingsstudie fra Gilje (2021) viser at det har vært en stor økning i digitale læremidler siden 2016. Studiet av kunnskapen i lærebøkene har likevel en stor overføringsverdi til de nye digitale ressursene, fordi uavhengig av hvilken form kunnskapen presenteres på er det innholdet som er sentralt i denne undersøkelsen. I det neste delkapittel vil jeg se på hvilke forskningsetiske hensyn man må ta i forbindelse med lærebøker som forskningsdokument.

3.5 Forskningsetikk for studien

Forskningsetikk er et sett med grunnleggende normer som er forankret i det internasjonale fellesskapet innenfor forskning. Formålet med forskningsetikk er å fremme fri, god og forsvarlig forskning som skal bidra til ny og bedre innsikt (NESH, 2021). Innenfor dokumentanalyse vil jeg særlig trekke fram den *metodologiske normen* som skal sørge for saklighet, klarhet, etterrettelighet og etterprøvbarhet (NESH, 2021). Analyseverktøyet fra ATD bidrar til at analysen blir systematisk og transparent slik den metodologisk norm krever.

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora har videre utarbeidet nasjonale forskningsetiske retningslinjer som gjelder for fagområdet utdanningsvitenskap. «Retningslinjene er rådgivende og skal bidra til å utvikle forskningsetisk skjønn og refleksjon, avklare etiske dilemmaer, fremme ansvarlig forskning og forebygge uredelighet» (NESH, 2021). De fem forskningsetiske forpliktelsene omfatter ansvar for forskerfellesskapet, hensyn til personer, grupper og institusjoner, samarbeidspartnere[3] og forskerformidling. Hver av de fem forpliktelsene inneholder en rekke punkter, men jeg vil trekke fram enkelte deler i det følgende avsnittet som er særlig relevant for min studie.

Når det gjelder dokumentanalyse som metode er det færre etiske aspekter å ta hensyn til med tanke på at ingen personer er direkte involvert. Det bør riktig nok nevnes at jeg skal belyse valg som lærebokforfatterne har tatt og diskutere konsekvensen av disse. Under kategorien «hensyn til personer» er punktet «verdier og handlingsmotiver» særlig relevant. Her blir det spesifisert at det er viktig å skille mellom beskrivelse og analyse ved utforskning av andres motiver. «Faglig fortolkning skal bygge på forskningsbaserte teorier, begreper og perspektiver» (NESH, 2021). Jeg vil derfor tydelig skille mellom datamateriale fra lærebøkene og min egen

[3] Oppdragsgivere og finansiører inngår i denne kategorien (NESH, 2021)

analyse av kunnskapen. Under forpliktelsen overfor forskerfellesskapet finner vi punktet «fordreining og fortielse» som videre er et viktig aspekt i utforskning av lærebokforfatterne sine valg: «Det er uforenelig med god vitenskapelig praksis å fordreie eller fortie relevante tolkninger eller analyser» (NESH, 2021). Utfordringen med fordreining i min studie er trolig en forvridd tolkning av kunnskapen i lærebøkene. Det vil derfor være relevant å inkludere utdrag fra bøkene som illustrerer eksempler på min analyse. Jeg har for ordens skyld ikke til hensikt å vurdere om de ulike lærebøkene i videregående skole er gode eller dårlige i denne studien. Imidlertid vil jeg undersøke tilpasninger som lærebokforfatterne har gjort, og videre se på konsekvensen av de ulike transposisjonene.

Jeg har fått tillatelse til å bruke enkeltfigurer direkte fra de tre læremidlene tiltenkt den videregående skolen. Det gjelder Figurene 5.1, 5.2 og 5.5 fra *Mønster R2* (Kalvø et al, 2022). Figur 5.7 fra *Sinus R2* (Oldervoll et al., 2022) og Figurene 5.4 og 5.8 fra *Matematikk R2* (Borge et al., 2022). Figurene er en del av analysematerialet som presenteres i Kapittel 5.

Kapittel 4

Prakseologisk referansemodell for analysens fundamentalteorem

I denne delen vil jeg presentere en prakseologisk referansemodell for kunnskapen jeg skal undersøke i lærebøkene. En prakseologisk referansemodell, som beskrevet i Kapittel 2.3, gir både et grunnlag for sammenlikning i studien og er et verktøy for å frigjøre seg fra synspunktene til den institusjonen som undersøkes. I Kapitlene 4.1–4.4 presenteres definisjonen av det bestemte integralet, det ubestemte integralet og framstilling med påfølgende bevis av AFT. I disse kapitlene vil jeg hovedsakelig bygge på framstillingen i Adam og Essex (2013), men også støtte meg på andre universitetsbøker. I Kapittel 4.5 vil jeg utdype hvorfor vi trenger AFT mer generelt. Avslutningsvis i Kapittel 4.6 vil jeg se på hva læreplanen i faget Matematikk R2 innebærer av kunnskapen jeg skal undersøke og hvorfor elevene trenger å lære dette.

Først vil jeg kort forklare matematikkens fagterminologi. Matematikk er bygd opp av definisjoner, teoremer og beviser. Definisjonene dreier seg om matematikkens språk, og i denne sammenheng innføres det nye begreper. Man kan ikke bevise en definisjon, fordi kategorien kun angir språklige og notasjonsmessige valg for begrepet (Lorenztten et al., 2003). Teorem er en påstand som krever bevis for å oppnå gyldighet. Det representerer en konklusjon eller en læresetning som er utledet fra et sett med forutsetninger. Benevnelsene setning, lemma og korollar brukes også for læresetningene, avhengig av deres verdi (Lindstrøm, 2016). Adam og Essex (2013) bruker konsekvent betegnelsen teorem, men i min oversettelse av enkelte teorem er det naturlig å kalle det «setning» på norsk. Eksempelvis blir «mean value theorem» typisk oversatt til middelverdisetningen. Lindstrøm (2016) påpeker at det gjerne er en smakssak om vi kaller en læresetning et teorem eller en setning. Lemma derimot er en hjelpesetning på veg mot noe større, og korollar er en umiddelbar konsekvens av et teorem eller en setning

Kjernen i matematikk er derimot bevis, som gir en forklaring på at læresetningen er generelt gyldig og ikke minst hvorfor den er sann. Et fullstendig bevis er en kjede av logiske slutninger fra noe man allerede vet er sant. Beviset er nødvendig for at påstanden skal bli godtatt i det matematiske miljøet (Lindstrøm, 2016). En uformell forklaring på hvorfor et resultat er sant benevner Lorentzen et al. (2003, s. 14) en «bevisidé», som betyr at forklaringen ikke gir en fullverdig logisk forklaring. Matematikkens fagterminologi vil være viktig i den prakseologiske referansemodellen, og dermed relevant for å svare på forskningsspørsmålet. I det neste delkapittelet vil jeg definere det bestemte integralet som er viktig for å forstå poenget med AFT.

4.1 Definisjon av det bestemte integralet

Anta at en funksjon f er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$. En partisjon av intervallet er en mengde punkter $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ hvor $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Partisjonen vil dele intervallet $[a, b]$ inn i n delintervaller slik at $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Maskevidden til delintervall i er gitt ved $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ for $1 \leq i \leq n$. Siden funksjonen er kontinuerlig vil den ha maksimums- og minimumsverdi på hvert delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ som følge av ekstremalverdisetningen (Adam & Essex, 2013, s. 300). Det betyr at det finnes to verdier l_i og u_i i hvert delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ slik at

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i)$$

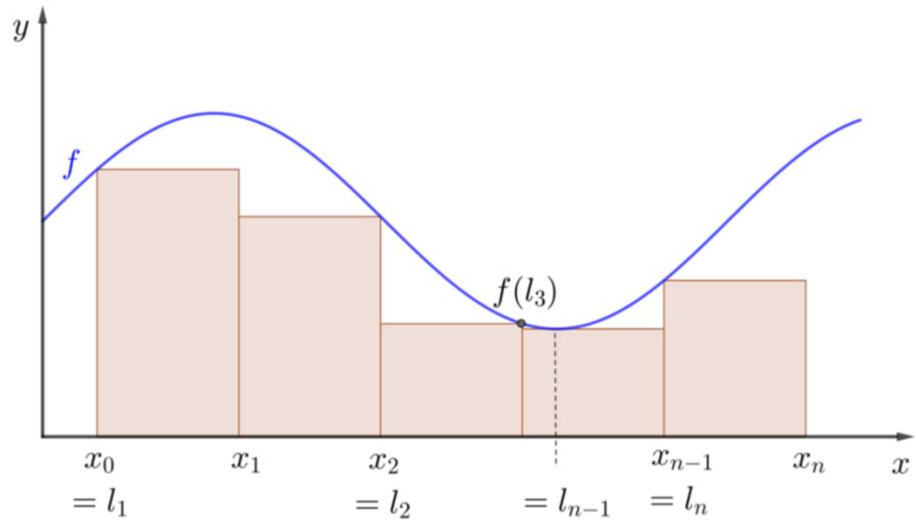
når $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Hvis $f \geq 0$ på $[a, b]$ representerer $f(l_i)\Delta x_i$ og $f(u_i)\Delta x_i$ arealet av rektanglene med $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ som base og sidelengder med henholdsvis minst og størst funksjonsverdi for funksjonen f på det respektive intervallet. Hvis $f < 0$ vil det være motsatt. Uansett vil $f(l_i)\Delta x_i \leq f(u_i)\Delta x_i$ (Adam & Essex, 2013, s. 300). Definisjon av nedre og øvre riemannsum er gitt i det følgende:

> Den nedre riemannsum, $N(f, P)$, og øvre riemannsum, $Ø(f, P)$, for funksjonen f med partisjon P er definert som:
>
> $$N(f, P) = f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \cdots + f(l_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i,$$
>
> $$Ø(f, P) = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \cdots + f(u_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i.$$
>
> (Adam & Essex, 2013, s. 302, min oversettelse[4])

[4] Alle sitater fra Adam og Essex (2013) er oversatt fra engelsk til norsk av meg.

Figur 4.1

Nedre riemannsum for funksjonen f

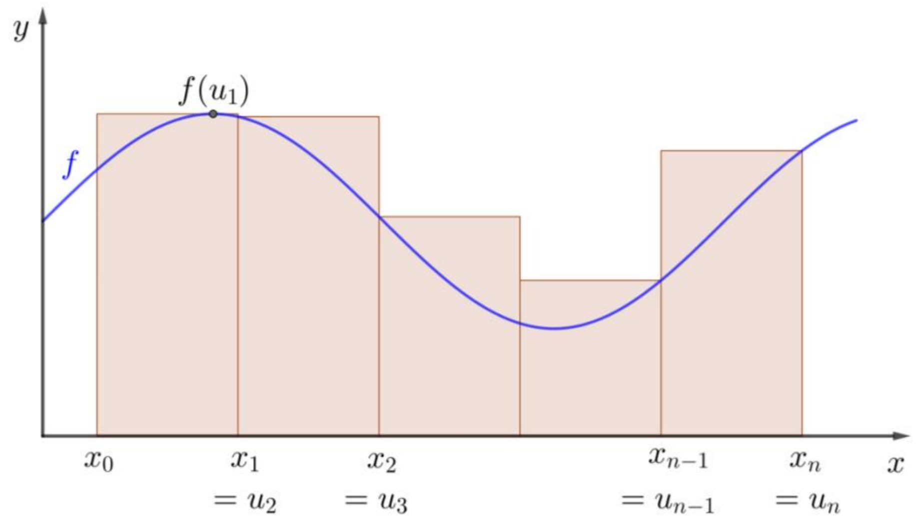


Merknad. Egen illustrasjon basert på beskrivelse i Adam og Essex (2013, s. 300–301).

Figurene 4.1 og 4.2 gir en illustrasjon av rektanglene ved nedre og øvre riemannsum for funksjonen f på intervallet $[a, b]$ hvor $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. I Figur 4.1 er punktet $f(l_3)$ høyden i det tredje rektangelet for nedre riemannsum. Punktet $f(u_1)$ i Figur 4.2 er høyden i det første rektanglet for øvre riemannsum. Det illustrerer at høyden til nedre og øvre riemannsum er avhengig av henholdsvis minste og største funksjonsverdi på det respektive intervallet.

Figur 4.2

Øvre riemannsum for funksjonen f



Merknad. Egen illustrasjon basert på beskrivelse i Adam og Essex (2013, s. 300–301).

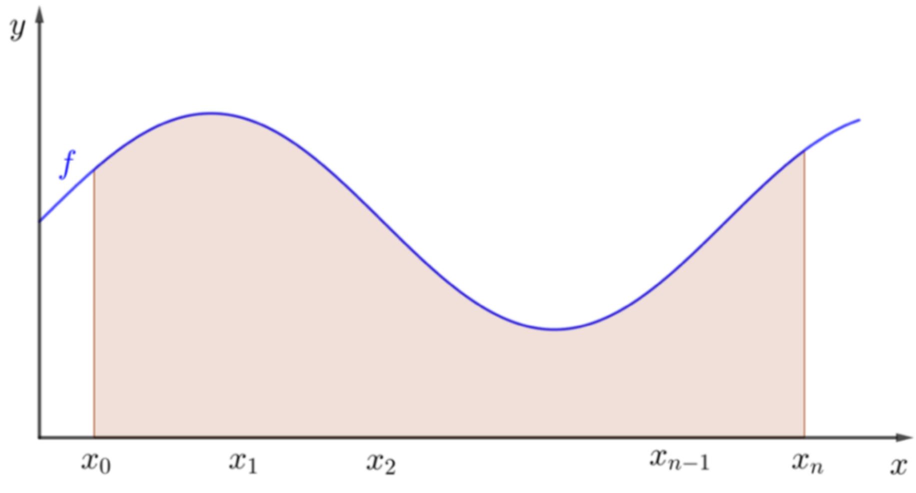
Videre defineres det bestemte integralet ved hjelp av trappesum:

> La oss anta det er nøyaktig ett tall I slik at for enhver partisjon P av $[a, b]$ har vi $N(f, P) \leq I \leq Ø(f, P)$. Da sier vi at funksjonen f er integrerbar på $[a, b]$ og vi kaller I det bestemte integralet av f på $[a, b]$. Det bestemte integralet er gitt ved symbolene $I = \int_a^b f(x)\, dx$. (Adam & Essex, 2013, s. 302)

Det bestemte integralet i Adam og Essex (2013) er definert som grenseverdien av nedre og øvre riemannsum. Maskevidden Δx i partisjonen må gå mot null for at nedre og øvre riemannsum skal være like[5]. I vårt tilfelle med funksjonen f på intervallet $[a, b]$ svarer det til arealet mellom $a = x_0$ og $b = x_n$ avgrenset av kurven til f som vi ser på Figur 4.3. Det bestemte integralet gir én spesifikk tallverdi. I uttrykket for det bestemte integralet er integrasjonstegnet gitt ved $\int$ og $f(x)$ er integranden. Nedre og øvre integrasjonsgrense er gitt ved henholdsvis a og b. Maskevidden Δx fra riemannsummene erstattes med den infinitesimale størrelsen dx, som indikerer at integrasjonsvariabelen er x. Integrasjonsvariabelen er en fri variabel, fordi den har ingen betydning for verdien av integralet. Man kan velge en annen variabel, eksempelvis t slik at integranden er $f(t)$ og den infinitesimale størrelsen er dt, så lenge variabelen ikke benyttes andre steder i integralet (Adam & Essex, 2013; Briggs & Cochran, 2011).

Figur 4.3

Illustrasjon av det bestemte integralet for funksjonen f



Merknad. Det bestemte integralet $I = \int_a^b f(x)dx$ hvor $a = x_0\ og\ b = x_n$.

[5] Unntaket er ved konstantfunksjon, $f(x) = a$, hvor grafen er parallell med x-aksen. Da vil det kun være nødvendig med ett rektangel for både nedre og øvre riemannsum.

Det finnes ulike varianter av definisjon av det bestemte integralet, men felles for universitetsbøkene jeg har studert er at det bestemte integralet defineres som en grense av en sum. Det er den sentrale ideen som Augustin Louis Cauchy (1789–1857) brukte da han definerte det bestemte integralet for første gang i 1821 (Jablonka & Klisinska, 2011). Bernhard Riemann (1826–1866) generaliserte Cauchy sine arbeider i 1854, men den moderne notasjonen med nedre og øvre riemannsum var det Gaston Darboux (1842–1917) som presenterte senere (Kline, 1972; Lindstrøm, 2016). Lindstrøm (2016) definerer det bestemte integralet på tilsvarende måte som Adam og Essex (2013), men bruker ikke benevnelsen «riemannsum» i denne sammenheng. Briggs og Cochran (2011), Edwards og Penney (2002) og Neuhauser (2011) definerer det bestemte integralet som grenseverdien til én trappesum når maskevidden går mot null. Videre benytter forfatterne at høyden i rektanglene til trappesummen er et vilkårlig punkt på grafen i det enkelte delintervallet. Prinsippet er likevel det samme som Adam og Essex (2013), ved at det bestemte integralet defineres som en grense av en sum når maskevidden går mot null. Ulikhetene i universitetsbøkene viser at akademisk kunnskap er en didaktisk transposisjon av en tilsvarende kunnskap i en annen institusjon som har blitt utviklet tidligere. Dette illustrerer at den didaktiske transposisjonsanalysen i denne studien vil være avhengig av at Adam og Essex (2013) er hovedkilden for den akademiske kunnskapen.

I utledningen av det bestemte integralet ved nedre og øvre riemannsum benyttet Adam og Essex (2013) ekstremalverdisetningen. Dette er et *eksistensteorem*: Teoremet forteller at en kontinuerlig funksjon har ekstremalverdier på et lukket intervall, men det sier ikke noe om *hvordan* man finner punktene (Adam & Essex, 2013). Ifølge Adam og Essex (2013) klager studenter på at matematikere er så opptatt av å bevise at et problem har en løsning. Studentene argumenterer for at dersom man har en løsning til et problem, trenger man ikke være bekymret for at løsningen eksisterer. Grunnen til at det er viktig å bevise eksistensteorem er for å unngå logiske fallgruver. Eksempelvis ved tankeeksperimentet om å finne det største positive heltallet kan vi gi følgende tilsynelatende logiske argument:

> La N være det største positive heltallet.
> Siden 1 er et positivt heltall, må vi ha at $N \geq 1$.
> N^2 er et positivt heltall, men det kan ikke overstige det største positive heltallet.
> Av den grunn er $N^2 \leq N$, og dermed er $N^2 – N \leq 0$.
> Dermed, fordi $N(N-1) \leq 0$ må vi ha at $(N-1) \leq 0$.
> Derfor er $N \leq 1$, men vi har også at $N \geq 1$. Altså vil vi ha at $N = 1$.
> Av den grunn er 1 det største positive heltallet.
> (Adam & Essex, 2013, s. 87)

Den eneste feilen som er gjort er å anta at problemet har en løsning i den første linjen, fordi vi naturlig nok ikke kan finne det største positive heltallet. Eksistensteorem utgjør en viktig del av den formelle oppbygningen i matematikk (Adam og Essex, 2013).

4.2 Det ubestemte integralet

Funksjonen F er en *antiderivert* til funksjonen f på intervallet I hvis $F'(x) = f(x)$ for x på intervallet I. En antiderivert er ikke unik som følge av at den deriverte til en konstant er null (Adam & Essex, 2013). *Mengden* av alle slike antideriverte funksjoner F kalles det ubestemte integralet. Av historiske grunner blir det benevnt $\int f(t)\,dt$ (Griffiths & Hilton, 1970). Adam og Essex (2013) gir følgende definisjon:

> Det ubestemte integralet av $f(x)$ på intervallet I er
> $$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{på } I,$$
> Gitt $F'(x) = f(x)$ for alle x i I. (s. 149)

I det ubestemte integralet er C en vilkårlig konstant som skyldes følgende teorem:

> Hvis f er kontinuerlig på et intervall I, og $f'(x) = 0$ på hvert indre punkt av I (det vil si ethvert punkt på I som ikke er et endepunkt av I), da er $f(x) = C$ en konstant på I. (Adam & Essex, 2013, s. 141)

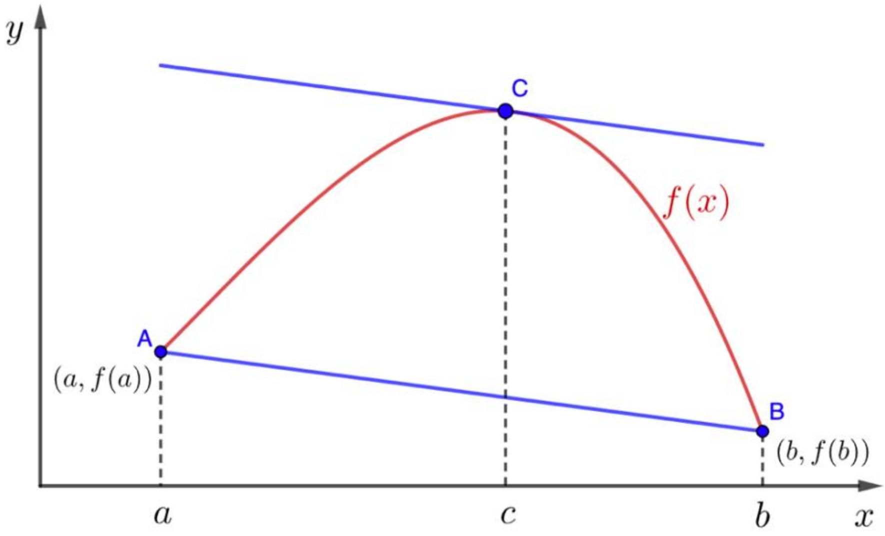
Det er til min beste kjennskap ikke et eget navn på teoremet, slik at jeg vil henvise til «konstantteoremet» i resten av oppgaven. At den deriverte av alle konstantfunksjoner er null følger fra definisjonen av den deriverte, men konstantteoremet uttrykker at konstantfunksjoner er de *eneste* funksjonene som har derivert lik null overalt (Lindstrøm, 2016). Det betyr at alle antideriverte av f kan oppnås ved å addere en konstant til en spesiell antiderivert (Adam & Essex, 2013, s. 149). Jeg vil utlede beviset for konstantteoremet, men da må middelverdisetningen først introduseres:

> Anta at funksjonen f er kontinuerlig på et lukket, endelig intervall $[a, b]$ og at funksjonen er deriverbar på det åpne intervallet (a, b). Da eksisterer det et punkt c i det åpne intervallet (a, b) slik at $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. (Adam & Essex, 2013, s. 137)

Det betyr at hvis en funksjon f er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$ og deriverbar på det åpne intervallet (a, b), så eksisterer det minst ett punkt c på det åpne intervallet (a, b) hvor gjennomsnittlig endring av f over intervallet $[a, b]$ er lik endringsraten til tangenten til grafen f i punktet c. Figur 4.4 er en geometrisk tolkning av middelverdisetningen som illustrerer det.

Figur 4.4

Geometrisk tolkning av middelverdisetningen



Merknad. Figuren er tilpasset etter Adam og Essex (2013, s. 137).

Beviset av middelverdisetningen har ikke direkte relevans for kunnskapen i denne studien, men for den interesserte leser kan det studeres i Adam og Essex (2013, s. 142). Imidlertid vil jeg vise hvordan Adam og Essex (2013) beviser konstantteoremet ved hjelp av middelverdisetningen, som videre er relevant for beviset av AFT i Kapittel 4.4:

> Velg et punkt x_0 på I og la $C = f(x_0)$. Hvis x er et annet punkt på I, da sier middelverdisetningen at det eksisterer et punkt c mellom x_0 og x slik at
>
> $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c).$$
>
> Punktet c må tilhøre I, fordi et intervall inneholder alle punktene mellom to punkter, og c kan ikke være et endepunkt av I siden $c \neq x_0$ og $c \neq x$. Siden $f'(c) = 0$ [Gitt fra *konstantteoremet*] for alle slike punkter c, har vi $f(x) – f(x_0) = 0$ for alle x i I, og $f(x) = f(x_0) = C$. (s. 141)

Det vil si at dersom F og G er to antideriverte av f på intervallet I er $\frac{d}{dx}\big(G(x) - F(x)\big) = f(x) - f(x) = 0$ på I, slik at $G(x) - F(x) = C$ følger fra konstantteoremet. Altså, $G(x) = F(x) + C$ på I (Adam & Essex, 2013). Konstantteoremet fastslår dermed at alle antideriverte til en funksjon $f(x)$ kan skilles med en konstant C.

4.3 Framstilling av analysens fundamentalteorem

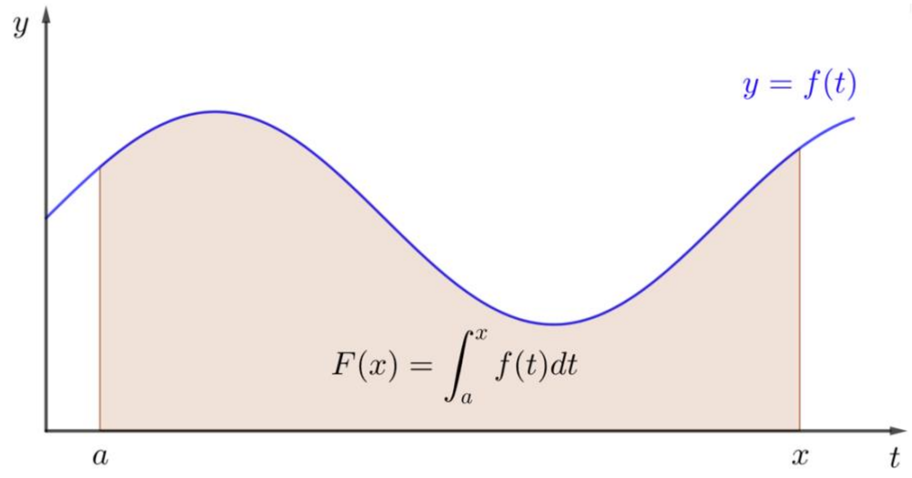
AFT er et svært viktig teorem i matematikk som etablerer en sammenheng mellom integrasjon og derivasjon. Lindstrøm (2016, s. 416) skriver at teoremet er det «viktigste resultatet i dette [integrasjons]kapitlet – og kanskje i hele boken». Hvis man skal forstå den store oppdagelsen bak AFT er det viktig å ha definisjonen av det bestemte integralet klart for seg. Denne definisjonen gjør at AFT blir interessant (Jablonka & Klisinska, 2011). Det er ganske bemerkelsesverdig at når det bestemte integralet til f med grenser a og b er definert som grenseverdien av en riemannsum, så kan vi finne det bestemte integralet ved å finne en *antiderivert* F til funksjonen f og regne ut differansen av funksjonsverdiene til den antideriverte, $F(b) - F(a)$. Den store overraskelsen skyldes den revolusjonerende setningen om AFT (Lorentzen et al., 2003). Adam og Essex (2013, s. 311–312) fremstiller teoremet:

> Anta at funksjonen f er kontinuerlig på et intervall I som inkluderer punktet a.
>
> DEL 1. La funksjonen F være definert på intervallet I med
>
> $$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$
>
> Da er F deriverbar på I, og $F'(x) = f(x)$ på I. Dermed er F en antiderivert av f på I:
>
> $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$
>
> DEL 2. Hvis $G(x)$ er en vilkårlig antiderivert av $f(x)$ på I slik at $G'(x) = f(x)$ på I, da for enhver b i I har vi
>
> $$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Flere universitetsbøker benytter tilsvarende fremstilling, men naturligvis litt ulik notasjon (Briggs & Cochran, 2011; Edwards & Penney, 2002; Neuhauser, 2011). I funksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ er nedre grense for integralet en konstant og øvre grense er ukjent. Det betyr at $F(x)$ er en funksjon av x, som er en uavhengig variabel (Briggs & Cochran, 2011). Det er ikke enighet om terminologien for $F(x)$ i litteraturen. Bressoud (2011, s. 99), Adam og Essex (2013, s. 312) og Griffiths og Hilton (1970, s. 495) benevnte funksjonen et bestemt integral. Thomson og Harel (2021, s. 509), som gjennomførte en metastudie om studenters vanskeligheter med å lære matematisk analyse, poengterte at $F(x)$ ikke kan kalles et bestemt integral siden det ikke er en tallverdi. Briggs og Cochran (2011) og Edwards og Penney (2013) referer til arealfunksjonen (*area function*). Det er et beskrivende navn som jeg vil benytte videre i min studie. Arealfunksjonen er likevel en spesiell type bestemt integral, fordi enhver verdi av x vil gi en tallverdi, og for $x = a$ vil $F(a) = 0$ (Griffiths & Hilton, 1970). En geometrisk beskrivelse av $F(x)$ som integralet av $f(t)$ mellom a og x er gitt i Figur 4.5, hvor arealet under grafen til $f(t)$ avhenger av verdien på x. Integrasjonsvariabelen må ha en annen benevning enn x som allerede er benyttet. I dette tilfellet er det valgt t, slik at integranden er $f(t)$ og den infinitesimale størrelsen er dt. I Figur 4.5 ser vi at abscisseaksen, som vanligvis kalles x-aksen, har benevning t som følge av at t er integrasjonsvariabelen (Briggs & Cochran, 2011, s. 279). Tilsvarende benevning av abscisseaksen har lærebøkene fra Lorentzen et al. (2003, s. 242) og Neuhauser (2011, s. 294).

Figur 4.5

Geometrisk beskrivelse av arealfunksjonen $F(x)$



Merknad: Figuren er tilpasset etter Briggs og Cochran (2011, s. 279).

Del 1 av AFT er kjent som antiderivert-delen, som viser hvordan man bruker det spesielle bestemte integralet (arealfunksjonen) $F(x)$ for å konstruere en antiderivert (Bressoud, 2011). Det gjøres ved å derivere funksjonen $F(x)$ med hensyn på øvre grense i integralet, for da er $F(x)$ en antiderivert av $f(x)$. Et resultat av teoremet er at enhver integrerbar funksjon har en antiderivert (Adam og Essex, 2013). Del 2 av AFT er kjent som evalueringsdelen, som skal gi en metode for å regne ut et bestemt integral ved å antiderivere funksjonen f og regne ut differansen av funksjonsverdiene, $F(b) - F(a)$ (Bressoud, 2011).

Topphol og Strømskag (2022) fant en manglende kobling i *Matematikk R2* (Heir et al., 2016) mellom det ubestemte integralet og den antideriverte, nemlig mangelen på arealfunksjonen $\int_a^x f(t)dt$ i boken. Denne læreboken er skrevet for faget Matematikk R2 etter læreplanen fra 2006, og er en tidligere utgave av boken *Matematikk R2* av Borge et al. (2022). Videre fant forfatterne at Del 1 av AFT ble presentert som en definisjon. Som en videreføring av undersøkelsen til Topphol og Strømskag (2022) ble det pekt videre på utforskning av læremidler med fokus på forbindelsen mellom derivasjon og integrasjon (antiderivasjon, bestemt og ubestemt integral) som relevant. Her vil analysens fundamentalteorem være sentralt som forskningsobjekt, spesielt etter at kunnskapen ble tildelt et eget kompetansemål, som de nye lærebøkene skal dekke.

4.4 Bevis av analysens fundamentalteorem

Adam og Essex (2013) presenterer et relativt kort og direkte bevis for AFT, men det skyldes at forfatterne tar i bruk fire teoremer som allerede er bevist i boken. Jeg vil først i dette kapittelet gjengi teoremene og samtidig forklare hovedtrekkene i beviset av AFT. Når alle teoremene er på plass, vil jeg presentere det formelle beviset. Siden bevis regnes som kjernen i matematikk, vil bevisføring være viktig for å svare på forskningsspørsmålet om didaktiske transposisjoner av AFT. Av den grunn utgjør det formelle beviset av AFT en viktig del av referansemodellen. Bevis for hvert enkelt teorem som blir benyttet er ikke inkludert her, men kan studeres i Adam og Essex (2013) for den interesserte leser. Jeg vil henvise til resultatene slik det er nummerert i dette delkapittelet når jeg presenterer beviset av AFT.

Overordnet mål i første del av AFT er å vise at $F'(x) = f(x)$ hvor $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Av den grunn bruker man definisjonen av den deriverte $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ for å vise at høyre side er lik $f(x)$. Telleren i brøken kan gjøres om til en subtraksjon av integraler som videre kan forenkles til et integral av kun ett funksjonsuttrykk ved å benytte teoremet som angir at et integral avhenger additivt av integrasjonsintervallene (Adam & Essex, 2013, s. 306):

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt. \tag{4.1}$$

Likning 4.1 må for ordens skyld omgjøres til en subtraksjon av integraler slik at det tilsvarer telleren i definisjonen av den deriverte, før likningen kan benyttes. Den eneste antagelsen forfatterne benytter i sitt bevis er at funksjonen f er kontinuerlig, og dermed integrerbar. Kontinuitet betyr samtidig at man kan ta i bruk *middelverdisetningen for integraler*. Det er et svært nyttig teorem i beviset av AFT. Middelverdisetningen for integraler sier at dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$ eksisterer det et punkt c i $[a, b]$ slik at (Adam & Essex, 2013, s. 308)

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c). \tag{4.2}$$

Middelverdisetningen for integraler gjør at man får en grense av et funksjonsutrykk tilsvarende høyre side i Likning 4.2, i stedet for en grense av et integral på venstre side. Beviset av Del 1 fullføres ved bruk av teori om grenseverdier når f er kontinuerlig.

I Del 2 av teoremet er målet å vise at $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$. Man vet allerede fra Del 1 at $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, altså at $F(x)$ er en spesiell antiderivert. Del 2 sier at dette gjelder for en generell antiderivert hvor øvre grense er et vilkårlig punkt b på intervallet. I beviset av evalueringsdelen trenger man konstantteoremet som jeg presenterte i Kapittel 4.2 og en egenskap ved det bestemte integralet som indikerer at et integral over et intervall av null lengde er null (Adam & Essex, 2013, s. 306):

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{4.3}$$

Alle resultater som Adam og Essex (2013) benytter er beskrevet ovenfor, og det formelle beviset for AFT presenterer de som gitt i det følgende:

Ved bruk av definisjonen til den deriverte kan vi beregne

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$ Fra Likning 4.1

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} hf(c)$$ For $c = c(h)$ (avhengig av h) mellom x og $x + h$ (*middelverdisetningen for integraler*)

$$= \lim_{c\to x} f(\mathrm{c})$$ siden $c \to x$ når $h \to 0$

$$= f(x)$$ siden f er kontinuerlig

Også, hvis $\mathrm{G}'(x) = f(x)$, da er $F(x) = G(x) + C$ på I for en konstant C (*konstantteoremet*). Av den gunn er $\int_a^x f(t)dt = F(x) = G(x) + C$.

La $x = a$ for at $0 = G(a) + C$ fra Likning 4.3, slik at $C = G(a)$. La nå $x = b$ for å få

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

(Adam & Essex, 2013, s. 312)

Ved hjelp av Adam og Essex (2013) har jeg nå vist at AFT stemmer og hvorfor det stemmer. I det neste delkapittelet vil jeg utdype hvorfor teoremet er nyttig og hvorfor man ikke kan definere det bestemte integralet som forskjellen i verdiene til den antideriverte i møte med AFT.

4.5 Hvorfor trenger vi analysens fundamentalteorem?

Allerede tidlig i menneskets historie var det behov for å finne størrelser på geometriske objekter. Først ute med en systematisk teori var de greske matematikerne i oldtiden med Eudoxos (ca 400−350 fvt.) og Arkimedes (287−212 fvt.) i front (Lindstrøm, 2016, s. 395). Grunnideen var å beregne størrelsen til kompliserte objekter ved hjelp av enklere og kjente figurer. Det er en form for tilnærming som blir kalt «method of exhaustion» (Edwards, 1979; Kline, 1972). Metoden er logisk, men fører til svært arbeidskrevende summasjoner. Tilsvarende som utregning av det bestemte integralet ved hjelp av en grenseverdi av en sum. Da Isaac Newton (1642−1727) og Gottfried Leibniz (1646−1716) oppdaget sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon på 1600-tallet var det et stort fremskritt at man kunne antiderivere for å utføre kompliserte areal- og volumberegninger (Lindstrøm, 2016, s. 395). Det er likevel upresist å si at Newton og Leibniz oppdaget AFT slik teoremet er fremstilt i Kapittel 4.3. Den gang fantes det ingen definisjon av det bestemte integralet. Mer presist oppdaget Newton og Leibniz, uavhengig av hverandre, at «dersom de hadde to funksjoner $F(x)$ og $f(x)$, og $f(x)$ var den deriverte til $F(x)$, så var arealet under grafen til $f(x)$ gitt av $F(x)$» (Lindstrøm, 2016, s. 472). Bressoud (2011) skriver at teoremet vi ser fremstilt i det matematiske samfunnet i dag, er utviklet over flere århundrer, slik at det nå gjelder funksjoner med full generalitet. Det er flere matematikere som fortjener æren for dette: En grundig oversikt av utviklingen til AFT blir gitt av Jablonka og Klisinka (2011). Den historiske utviklingen viser at vi hadde mistet en enorm regnekraft og et kraftig verktøy uten AFT. Bressoud (2011) påpeker at den lange utviklingen av teoremet kan være en forklaring på at mange elever sliter med å forstå meningen med det. Videre poengterer han at for studenter som lærer om AFT for første gang kan en mindre presis og intuitiv versjon være mer nyttig.

Analysens fundamentalteorem er et viktig verktøy innenfor flere matematiske områder: Spesielt der differensialligninger er i bruk. Ved differensialligninger er den ukjente en funksjon, og likningen binder sammen den ukjente og noen av dens deriverte (Adam & Essex, 2013). Differensiallikninger brukes til å beskrive og modellere ulike systemer i mange ulike fagfelt: blant annet fysikk, kjemi, biologi og økonomi. Eksempel på dette er ved spredning av en sykdom i en befolkning innenfor biologi eller prisutvikling over tid av en vare i økonomien. Løsninger av differensiallikninger gir oss en matematisk beskrivelse av på hvordan systemene utvikler seg over tid. Ved første ordens differensiallikninger, eksempelvis separable differensiallikninger, kan vi anvende AFT direkte for å finne den generelle løsningen til systemet. Separable differensiallikninger er gitt på formen $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, og beskriver sammenhengen mellom en funksjon og dens deriverte (Adam & Essex, 2013). Løsningen innebærer å separere likningen slik at $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$,[6] som i neste omgang kan integreres siden derivasjon og integrasjon er omvendte regnearter. Det er dermed ikke tilfeldig at differensialregning vokste frem i takt med integral- og differensialregning (Lindstrøm, 2016, s. 646). Innenfor differensiallikninger ser man samtidig viktigheten av integrasjonskonstanten C for det ubestemte integralet, fordi man mister interessante løsninger for systemene man modellerer hvis man glemmer denne konstanten (Lindstrøm, 2016).

Ettersom det ikke fantes en definisjon av det bestemte integralet før 1800-tallet var det lenge naturlig å tenke på integrasjon først og fremst som antiderivasjon (Lindstrøm, 2016). Ifølge Bressoud (2011) bruker flesteparten av studenter fortsatt tankegangen om at definisjonen av det bestemte integralet er forskjellen i verdiene til den antideriverte. Denne definisjonen i kombinasjon med AFT gjør at teoremet mister all mening (Bressoud, 2011; Jablonka og Klisinka, 2011). Definisjonen er forankret i erfaringen til elever fra videregående skole om integrasjon. Det er likevel flere matematiske grunner til at man ikke kan definere det bestemte integralet til å være den antideriverte, som jeg forklarer i de følgende avsnittene

Kanskje den viktigste grunnen er at «integralet som grenseverdien av en sum [...] er viktig når man skal løse praktiske problemer ved hjelp av integrasjon – det er denne ideen som gjør at man kan omforme et fysisk eller teknologisk problem til en integrasjonsoppgave» (Lindstrøm, 2016, s. 421). Eksempel på dette er studiet av sammenhengen mellom hastighet og tilbakelagt strekning for et legeme. Gitt et legeme som beveger seg langs abscisseaksen ved tiden t i tidsrommet $[t_1, t_2]$ er hastigheten gitt ved funksjonen $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Det vil si at en infinitesimal endring i posisjon er gitt ved en hastighet $v(t)$ multiplisert med en infinitesimal endring i tid, $dx = v(t)dt$. Ved å summere alle infinitesimale posisjonsforandringer under grafen $v(t)$ mellom t_1 og t_2 ender vi opp med den totale strekningen legemet har tilbakelagt. Dette tilsvarer en grenseverdi av en sum hvor partisjonen n av tidsintervallet $[t_1, t_2]$ går mot uendelig, slik at maskevidden $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ hvor $1 \leq i \leq n$ går mot null. Posisjonen $x(t)$ er en antiderivert til $v(t)$, fordi $x'(t) = \frac{dx}{dt} = v(t)$. Av den grunn følger det fra AFT at tilbakelagt strekning er gitt ved $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = x(t_2) - x(t_1)$. Når det bestemte integralet har blitt definert som grenseverdi av en sum, kan det fysiske problemet med tilbakelagt strekning derfor løses ved

[6] Å separere dx og dy gir riktig svar, men rent matematisk er det i utgangspunktet meningsløst å dele opp de infinitesimale størrelsene dy/dx på denne måten.

hjelp av evalueringsdelen til AFT. Hvis man definerer det bestemte integralet som antiderivasjon har man ikke grunnlag til å omforme et tilsvarende fysisk problem.

Videre er det et problem at vi ikke hadde visst hvilke funksjoner som var integrerbare. Det finnes funksjoner som er integrerbare, men hvor det ikke finnes en formel for den antideriverte. Eksempelvis funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$(Lindstrøm, 2016, s. 473). Siden det bestemte integralet er definert som grenseverdi av sum kan vi integrere $f(x) = e^{-x^2}$ ved hjelp av trappesum med numeriske beregninger. Til slutt er det ideen om tilnærming ved hjelp av trappefunksjoner som ligger bak alle generaliseringer av integralbegrepet til funksjoner av flere variabler eller enda mer kompliserte funksjoner. Av den grunn blir det problematisk å forstå generaliseringene hvis man ikke har forstår ideen om grenseverdi av en sum i enkle tilfeller (Lindstrøm, 2016, s. 421).

Lindstrøm (2016) gir en oppsummering på hvordan man kan forholde seg til integralet: «Når det gjelder den teoretiske definisjonen og de praktiske anvendelsene bør man tenke på integralet som en grenseverdi av trappesummer, men når det gjelder utregningen av integraler er det mye mer effektivt å tenke på antiderivasjon» (s. 421). AFT uttrykker at de to tenkemåtene er like.

4.6 Kompetansemål og læreplan i faget Matematikk R2

Læreplanen er et styringsdokument som enhver lærer er lovpliktig til å følge (Opplæringsloven, 1998). Kompetansemålet om AFT er som tidligere nevnt «Gjøre rede for analysens fundamentalteorem og gjøre rede for konsekvenser av teoremet» (Utdanningsdirektoratet, 2021). I forklaring av uttrykket «Å gjøre rede» står det: «Å gjøre rede for noe er å gi en faglig begrunnet forklaring av et saksforhold, en problemstilling eller noe vi skal undersøke eller gjennomføre» (Utdanningsdirektoratet, 2021).

Videre er et av kompetansemålene «gjøre rede for integral som en grenseverdi av en følge av summer, og tolke betydningen av denne grenseverdien i ulike situasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2021). Kompetansemålet handler med andre ord om definisjonen av det bestemte integralet, men spesifiserer ikke hvilke trappesummer. Det er ingen spesifikke kompetansemål som handler direkte om det ubestemte integralet, men det faller under kompetansemålet om AFT. Et kompetansemål i faget Matematikk R2 som omhandler bevisføring er verdt å nevne: «Analysere og forstå matematiske bevis, forklare de bærende ideene i et matematisk bevis og utvikle egne bevis» (Utdanningsdirektoratet, 2021).

Det vil være relevant å diskutere i denne oppgaven hvorfor elever som har faget Matematikk R2 trenger å lære disse kompetansemålene. Et mulig svar på dette får man ved å se på fagets relevans og sentrale verdier. Faget Matematikk R2 skal gi kompetanse som forbereder eleven til videre arbeid og utdanning som stiller krav om matematisk forståelse i realfag (Utdanningsdirektoratet, 2021). Differensiallikninger, som beskrevet i Kapittel 4.5, er et eksempel på et matematisk tema for videre arbeid og utdanning som krever nødvendig kunnskap om matematisk analyse. Det vil si derivasjon, integrasjon og teoremet som forener regneartene sammen: AFT.

I kjerneelementet «resonnering og argumentasjon» står det at elevene skal få en forståelse for at matematiske resultater ikke er tilfeldig. Kjerneelementer er det viktigste elevene skal lære i et fag (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Dette stiller krav til at elevene forstår poenget med AFT. Videre står det under det samme kjerneelementet at eleven blant annet skal bevise gyldigheten til framgangsmåter, resonnementer og løsninger (Utdanningsdirektoratet, 2021). Dette underbygger kompetansemålet om bevisføring for elevene og underbygger at logosblokken skal være til stede for kunnskapen for elevene i faget Matematikk R2. I boken *Proof and Proving in Mathematics Education*, som ble produsert på oppdrag fra den internasjonale organisasjonen med fokus på matematikkundervisning (*The International Commission on Mathematical Instruction* – heretter ICMI), poengteres det at bevis har fått en større rolle i skolematematikken. Bevis er et komplekst fenomen, men det er samtidig et argument for at det bør innføres gradvis fra tidlig skolealder (Hanna & de Villiers, 2012, s. 444).

I LK20 ble den overordnede delen av læreplanen med seks mål for opplæringens verdigrunnlag introdusert. Et av målene er gitt ved: «Skolen skal la elevene utfolde skaperglede, engasjement og utforskertrang, og la dem få erfaring med å se muligheter og omsette ideer til handling.» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 7). Elevenes evne til å stille spørsmål, utforske og eksperimentere er viktig for dybdelæring (Kunnskapsdepartementet, 2017). Dybdelæring defineres som det å utvikle kunnskap og forståelse for begreper, metoder og sammenhenger i et fag. Samtidig som eleven må kunne bruke det man har lært i nye og ukjente situasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Målene i den overordnende delen av læreplanen er interessante moment som bør være implementert i de nye lærebøkene jeg studerer i Kapittel 5.

Kapittel 5

Analyse av analysens fundamentalteorem i lærebøker for faget Matematikk R2

I dette kapittelet vil jeg presentere min analyse av kunnskapen i lærebøkene for videregående skole og deres tilhørende didaktiske transposisjoner. Målet er å svare på forskningsspørsmålet «Hvilke didaktiske transposisjoner har analysens fundamentalteorem gjennomgått fra en universitetsversjon til en versjon som skal undervises i videregående skole?». Kapitlene 5.1, 5.2 og 5.3 vil inneholde lærebøkenes fremstilling av kunnskapen sammen med den tilhørende prakseologiske analysen. Det er for ordens skyld egne matematikkoppgaver i alle kapitler som jeg henviser til fra lærebøkene, men som nevnt i Kapittel 3.2 har jeg laget noen generiske oppgavetyper basert på oppgaver i lærebøkene og relevante kompetansemål fra Kapittel 4.6. I Kapitlene 5.1 og 5.3 vil jeg gjøre en kort sammenlikning av prakseologiene for de tre lærebøkene i videregående skole. Kapittel 5.4 inneholder min didaktiske transposisjonsanalyse som kunnskapen i den videregående skolen har gjennomgått fra universitetsversjonen med fokus på teknikk, teknologi og teori for prakseologien.

5.1 Det bestemte integralet i lærebøkene for faget Matematikk R2

I Kapittel 4 poengterte jeg hvorfor man må definere det bestemte integralet korrekt for å forstå poenget med AFT. Jeg vil derfor starte analysen med å undersøke hvordan det bestemte integralet behandles i de tre lærebøkene for faget Matematikk R2. Jeg har konstruert en generisk oppgave T_1 som handler om hvordan man uttrykker det bestemte integralet som en grenseverdi, tilsvarende første del av kompetansemålet «gjøre rede for integral som en grenseverdi av en følge av summer» (Utdanningsdirektoratet, 2021).

Oppgave T_1: Funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$

Uttrykk integralet $\int_a^b f(x)$ som en grenseverdi

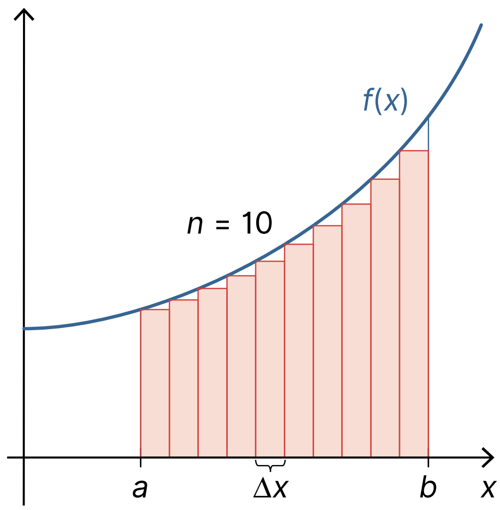
Oppgaven er representativ for den typen oppgaver som jeg har analysert teknikk, teknologi og teori for i Kapitlene 5.1.1, 5.1.2 og 5.1.3.

5.1.1 *Mønster R2*

Det første tema i integrasjonskapittelet i *Mønster R2* handler om trappesum og areal under grafer. Kalvø et al. (2022, s. 207–210) tilnærmer arealet mellom a og b på x-aksen til funksjonen $f(x)$ på Figurene 5.1 og 5.2 med rektangler gjennom nedre og øvre trappesum.

Figur 5.1

Presentasjon av nedre trappesum i Mønster R2



Merknad. Figuren er fra *Mønster R2* (Kalvø et al., 2022, s. 207). Gjengitt med tillatelse.[7]

Forfatterne bruker Figur 5.1 til å forklare at høyden i de ulike rektanglene varierer, og er gitt ved $f(x)$. Maskevidden på rektanglene er gitt ved $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ hvor n er antall rektangler. Videre står det følgende om nedre trappesum: «Arealet til det første rektangelet fra venstre side, som begynner ved $x = a$, er $f(a) \cdot \Delta x$. Arealet til det neste rektangelet er $f(a + \Delta x) \cdot \Delta x$, arealet til det tredje er $f(a + 2 \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$, og så videre» (Kalvø et al., 2022, s. 207). Videre forklarer forfatterne at dersom x-verdiene kalles $x_1, x_2, x_3, \ldots$, blir summen av arealene til rektanglene under grafen kalt for den nedre trappesummen gitt ved $\sum_a^b f(x) \cdot \Delta x$ (Kalvø et al., 2022, s. 207).

[7] Figurer hentet fra *Mønster R2* er laget av K. Skrindo i samarbeid med V. Brekke og A. Moholt fra Gamma Grafisk AS.

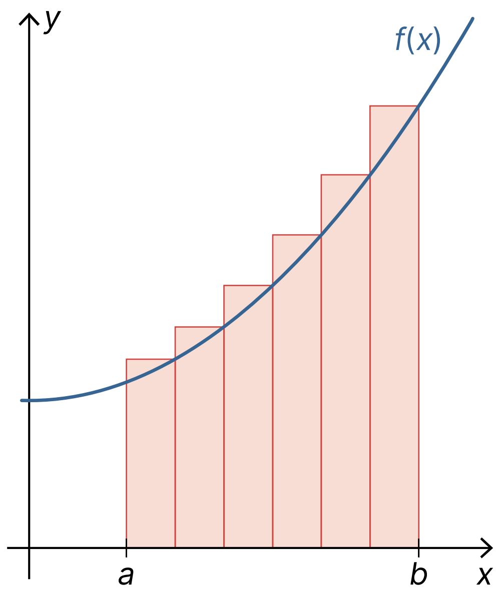
Tilsvarende står det at man kan finne den øvre trappesummen, men da har første rektangel i Figur 5.2 høyde $f(x + \Delta x)$, det neste $f(x + 2 \cdot \Delta x)$ og så videre (Kalvø et al., 2022, s.210).[8]

Videre forklarer Kalvø et al. (2022, s. 210) at når antall rektangler går mot uendelig vil differansen mellom øvre og nedre trappesum gå mot null, og man kan finne det eksakte arealet under grafen. Avslutningsvis presenteres definisjonen av det bestemte integralet av $f(x)$ fra a til b i en egen blå tekstboks. De blå tekstboksene inneholder «viktig setninger, begreper og definisjoner» (Kalvø et al, 2022, s. 6). Det står følgende i Kalvø et al. (2022, s. 210):

> Vi definerer det bestemte integralet av $f(x)$ fra a til b som
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x) \cdot \Delta x \qquad (5.1)$$

Figur 5.2

Presentasjon av øvre trappesum i Mønster R2



Merknad. Figuren er fra *Mønster R2* (Kalvø et al., 2022, s. 210). Gjengitt med tillatelse.

Prakseologisk analyse av bestemt integral i Mønster R2

Likning 5.1 er definisjonen som danner grunnlaget for teknikken τ som brukes for å løse en oppgave av type T_1. Teknikken er basert på grenseverdien av én generell trappesum hvor maskevidden Δx går mot null. Den generelle trappesummen er en summasjon av arealet til alle rektangler mellom a og b som har høyde $f(x)$ og maskevidde Δx. Grenseverdien når Δx går mot null, det bestemte integralet, gir en spesifikk tallverdi. Det er uvisst spesifikt hvilken

[8] Høyden i rektanglene ved nedre trappesum beskrives ved hjelp av x-verdien «a». Antar det er en skrivefeil ved øvre trappesum slik at første rektangel skulle hatt høyde $f(a + \Delta x)$, det neste $f(a + 2 \cdot \Delta x)$ og så videre.

trappesum som forfatterne henviser til, fordi høyden til rektanglene er kun gitt ved $f(x)$ i Likning 5.1. Teknologien θ i *Mønster R2* er derimot basert på grenseverdien av nedre og øvre trappesum når antall rektangler går mot uendelig, fordi da vil differansen mellom trappesummene gå mot null. Teknikken bruker grenseverdien til én enkelt trappesum, men teknologien benytter grenseverdien av to ulike trappesummer. Det er naturlig å basere teknologi på teknikken, men i denne boken er det en manglende kobling mellom dem. Det kan være at det er tenkt at enten nedre eller øvre trappesum skal brukes i Likning 5.1, men det kan man ikke vite på grunn av den upresise notasjonen i teknikken.

Forklaringen av rektanglene, teknologien, stemmer riktignok overens med rektangler hvor venstre eller høyre hjørne treffer funksjonsgrafen. Det vil si trappesum med venstre- og høyretilnærming, i motsetning til nedre og øvre trappesum slik Kalvø et al. (2022) benevner det. Som beskrevet i den prakseologiske referansemodellen i Kapittel 4.1 er høyden til rektanglene ved nedre og øvre trappesum henholdsvis minst og størst funksjonsverdi på det respektive delintervallet. Forfatterne i *Mønster R2* skriver at høyden til de tre første rektanglene ved nedre trappesum er $f(a)$, $f(a + \Delta x)$ og $f(a + 2 \cdot \Delta x)$, men denne forklaringen tilsvarer venstretilnærming som følge av at venstre hjørne av rektangelet treffer funksjonsgrafen. Tilsvarende skriver forfatterne at høyden til de to første rektanglene ved øvre trappesum er $f(a + \Delta x)$ og $f(a + 2 \cdot \Delta x)$, men dette tilsvarer høyretilnærming hvor høyre hjørne i rektangelet treffer funksjonsgrafen. Høyden til rektanglene ved nedre og øvre trappesum er ikke nødvendigvis på det samme punktet på hvert delintervall. Siden funksjonen som forfatterne benytter i Figurene 5.1 og 5.2 er positiv og voksende vil rektanglene for nedre og øvre trappesum i dette spesifikke tilfellet være de samme som ved venstre- og høyretilnærming. Hvis funksjonen som forfatterne hadde benyttet var negativ, avtagende eller både voksende og avtagende vil ikke forklaringen stemme overens med rektanglene i Figurene 5.1 og 5.2. Forfatterne har blandet ulike matematiske begrep, noe som kan gi opphav til misforståelser.

5.1.2 *Sinus R2*

Oldervoll et al. (2022, s. 75–76) introduserer bestemt integral som en grense for sum av rektangler med venstretilnærming hvor antall rektangler går mot uendelig. Det vil si tilnærming av arealet under grafen med rektangler hvor venstre hjørne treffer funksjonsgrafen, slik rektanglene i Figur 5.3 er utformet. Maskevidden i hvert rektangel er gitt ved $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ med n antall rektangler. Videre er x-verdien til de ulike rektanglene gitt ved uttrykket $x_i = a + (i-1) \cdot \Delta x$ med $1 \leq \text{i} \leq n$. Høyden til de ulike rektanglene er da gitt ved $f(x_i)$. Samlet areal av rektanglene blir $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$ (Oldervoll et al., 2022, s. 75). Forklaringen bruker forfatterne til å definere det bestemte integralet for alle kontinuerlig funksjoner f og alle tall a og b i en egen tekstboks (Oldervoll et al., 2022, s. 76):

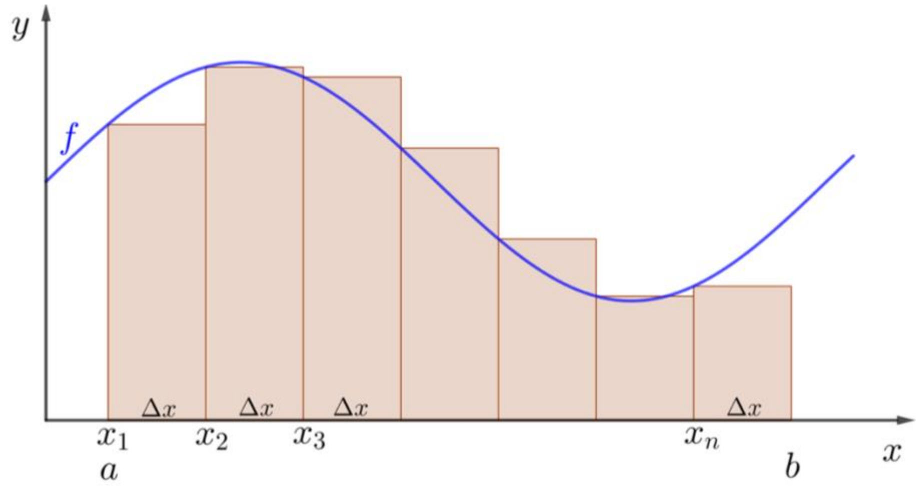
La $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ og $x_i = a + (i-1) \cdot \Delta x$ for $i = 1, 2, \ldots, n$.

La videre $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$. Da er det bestemte integralet

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad (5.2)$$

Figur 5.3

Venstretilnærming hvor venstre hjørne i rektanglene treffer funksjonsgrafen



Merknad. Figuren er tilpasset etter *Sinus R2* (Oldervoll et al., 2022, s. 75).

Prakseologisk analyse av bestemt integral i Sinus R2

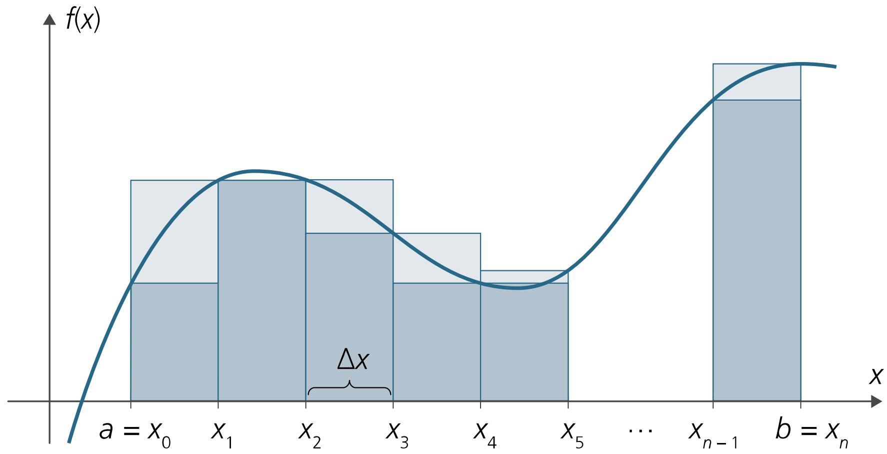
Definisjonen av det bestemte integralet ved Likning 5.2 danner grunnlaget for en teknikk τ som benyttes for å løse en oppgave av type T_1. I denne læreboken er teknikken basert på grenseverdien av en summasjon av arealet til alle rektangler som benytter venstretilnærming mellom a og b. Grenseverdien når antall rektangler går mot uendelig, det bestemte integralet, gir også her en spesifikk tallverdi. Venstretilnærming er som tidligere nevnt at venstre hjørne i hvert rektangel treffer funksjonsgrafen. Teknologien θ gir en utdypende forklaring av teknikken og er dermed i samsvar med teknikken som presenteres. Videre er Figur 5.3 i samsvar med både teknikk og teknologi. Kun deler av fremstillingen i *Sinus R2* som er relevant for den didaktiske transposisjonen i Kapittel 5.4 er gjengitt.

5.1.3 *Matematikk R2*

I læreboken *Matematikk R2* benyttes grenseverdien av nedre og øvre trappesum for å definere det bestemte integralet. En funksjon f som er definert i intervallet $[a, b]$ med $f(x) \geq 0$ blir delt inn i n like store deler slik at maskevidden blir $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (Borge et al., 2022, s. 95).

Figur 5.4

Nedre og øvre trappesum fra boken Matematikk R2



Merknad. Figuren er fra *Matematikk R2* (Borge et al., 2022, s. 95). Gjengitt med tillatelse.[9]

Borge et al. (2022, s. 95) kategoriserer videre nedre trappesum N_n og øvre trappesum $Ø_n$ hvor rektanglene har Δx som base og henholdsvis den minste og største funksjonsverdien på det respektive intervallet som høyde. Videre står det:

> Vi lar $n \to \infty$ slik at $\Delta x \to 0$. Vi sier at følgende av trappesummer, $\{N_n\}$ og $\{Ø_n\}$, konvergerer mot en grenseverdi hvis N_n og $Ø_n$ kommer nærmere og nærmere denne verdien når $n \to \infty$. Når de to følgene konvergerer mot den samme grenseverdien, kaller vi denne grenseverdien det bestemte integralet til f i intervallet fra a til b. (Borge et al., 2022, s. 95)

Det oppsummeres med matematiske symboler i en egen tekstboks (Borge et al., 2022, s. 96):

Det bestemte integralet som en grenseverdi til en følge av summer

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} Ø_n = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (5.3)$$

[9] Figurer hentet fra *Matematikk R2* er laget av E. Engmark i Framnes Tekst & Bilde AS.

Prakseologisk analyse av bestemt integral av Matematikk R2

Definisjonen med Likning 5.3 danner grunnlaget for teknikken τ som benyttes for å løse en oppgave av type T_1. Teknikken benytter prinsippet om grenseverdi av nedre og øvre trappesum når antall rektangler går mot uendelig. Teknologien θ er videre i samsvar med teknikken. Forklaringen av rektanglene som benyttes, teknologien, henviser til minst og størst funksjonsverdi på hele intervallet *mellom* x_i og x_{i+1}. En liten detalj til senere utgaver av boken er at Figur 5.4, som illustrerer nedre og øvre trappesum, bruker minst og størst funksjonsverdi av punktene x_i og x_{i+1}. Eksempelvis er høyden til det øvre rektangelet mellom x_1 og x_2 mindre enn den største funksjonsverdien mellom x_1 og x_2. Det er forklaringen, teknologien, som stemmer overens med den prakseologiske referansemodellen fra Kapittel 4.1. Det er figuren som er upresis i dette tilfellet.

5.1.4 En sammenlikning av det bestemte integralet i lærebøkene

I *Matematikk R2* er det en annen teknikk enn resterende lærebøker for å løse en oppgave av type T_1. Læreboken bruker grenseverdien av to trappesummer, i motsetning til *Sinus R2* og *Mønster R2* som benytter grenseverdien av én enkelt trappesum. I *Matematikk R2* introduseres det derimot ikke en formel som elevene kan benytte for å tilnærme det bestemte integralet ved nedre og øvre trappesum for enhver funksjon. Det skyldes trolig at det er vanskelig å finne et uttrykk for trappesummene når funksjonen ikke er strengt voksende eller avtagende, fordi den minste og største funksjonsverdien ikke er plassert på samme plass i hvert delintervall. Eksempelvis ved venstretilnærming kan man addere Δx for høyden i påfølgende rektangler: $f(a)$, $f(a + \Delta x)$ og $f(a + 2 \cdot \Delta x)$. Imidlertid introduseres høyre- og venstretilnærming i *Matematikk R2* med tilhørende formler som en tilnærmingsverdi for det bestemte integralet (Borge et al., 2022, s. 105–106). Så elevene får først en definisjon av det bestemte integralet, men i neste omgang en enklere teknikk for å tilnærme det bestemte integralet uten hjelpemidler. Det gir elevene mer pensum å forholde seg til, men samtidig et godt utgangspunkt for å diskutere ulike metoder for å tilnærme det bestemte integralet når det gjelder tidseffektivitet eller nøyaktighet.

5.2 Det ubestemte integralet i lærebøkene for faget Matematikk R2

Mitt fokus som angår ubestemt integral, er kunnskapens rolle når det gjelder AFT. Her vil det være relevant å vite hva en antiderivert er, og hvor konstanten C kommer fra ved ubestemt integrasjon. Kanskje det mest interessante er tidspunktet for når denne kunnskapen presenteres, med tanke på hvilken definisjon av det bestemte integralet elevene potensielt benytter ved AFT. Av den grunn kommer jeg ikke til å gå nærmere inn på spesifikke integrasjonsregler som lærebøkene typisk presenterer ved dette kapittelet. Samtidig observerte jeg at det kun er en liten forskjell i presentasjonen av ubestemt integral mellom lærebøkene. Som et resultat av denne observasjonen har jeg valgt å ikke behandle lærebøkene i egne delkapitler. Det betyr at det er en felles prakseologisk analyse for lærebøkene, men ulikheter mellom bøkene vil likevel poengteres. Først vil jeg konstruere en generisk oppgave av type T_2, som er representativ for oppgaver som er gitt i de tre lærebøkene:

> **Oppgave $\boldsymbol{T_2}$**: En funksjon f er gitt ved $f(x) = ax + b$
> Finn det ubestemte integralet $\int f(x)dx$

I lærebøkene er det tallverdier for konstantene a og b (Borge et al., 2022, s. 130; Kalvø et al., 2022, s. 226; Oldervoll et al., 2022, s. 62). Det ubestemte integralet i *Matematikk R2* er gitt ved:

> Det ubestemte integralet
> $\int f(x)dx = K(x) + C$, der $K'(x) = f(x)$ og $C \in \mathbb{R}$
> (Borge et al., 2022, s. 129)

Tilsvarende er gitt i *Mønster R2* (Kalvø et al., 2022) og *Sinus R2* (Oldervoll et al., 2022). Lærebøkene presenterer dermed det ubestemte integralet som alle antideriverte til funksjonen $f(x)$. Eksistensen av en konstant C er forklart i *Matematikk R2* ved hjelp av eksempler:

> x^2 er en antiderivert av $2x$
> Men x^2 er ikke den eneste antideriverte av $2x$.
> Hvis vi deriverer $x^2 + 5$, $x^2 - 8$ eller $x^2 + \sqrt{3}$, får vi også $2x$.
> Det er fordi den deriverte av et konstantledd er 0.
> Generelt kan vi skrive at $(x^2 + C)' = 2x$, når $C \in \mathbb{R}$.
> Vi sier at $x^2 + C$ er alle antideriverte funksjoner av $2x$.
> (Borge et al., 2022, s. 129)

Kalvø et al. (2022, s. 225) i *Mønster R2* gir tilsvarende forklaring som læreboken *Matematikk R2* ved hjelp av eksempler. I *Sinus R2* skal elevene selv vise at $F(x) = x^3 + 2x^2 +$

$5x + C$ er den antideriverte til $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ og at alle antideriverte kan skrives på den måten (Oldervoll et al., 2022, s. 60–61).

Løsningen av en oppgave av type T_2 vil av den grunn være å finne alle antideriverte til funksjonen $f(x)$. Siden lærebøkene ikke har introdusert integrasjonsreglene på dette stadiet, vil løsningen være å finne en spesiell antiderivert ved å tenke «Hva må vi derivere for å få $f(x)$?» (Kalvø et al, 2022, s. 226) og addere en konstant C:

> Funksjonen $F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx$ er en antiderivert til $f(x)$ siden
>
> $$F'(x) = \left(\frac{1}{2}ax^2 + bx\right)' = ax + b = f(x)$$
>
> Dermed er $\int f(x)dx = F(x) + C = \frac{1}{2}ax^2 + bx + C$

Tilsvarende framgangsmåte benytter Borge et al. (2022, s. 130) og Oldervoll et al. (2022, s. 62).

Prakseologisk analyse av det ubestemte integralet i lærebøkene

Teknikken for å løse en oppgave av type T_2, uten integrasjonsregler, er å derivere den spesielle antideriverte $F(x)$. Den spesielle antideriverte må man selv finne, ved at uttrykket må oppfylle $F'(x) = f(x)$. Av den grunn blir det kun gitt enkle polynomer til elevene. Som en del av teknikken må man addere en konstant C for å oppnå den generelle antideriverte. Teknologien bak derivasjon, altså at derivasjonsregelen er korrekt, skal være kjent for elevene fra Matematikk R1 (Utdanningsdirektoratet, 2021) og kommenteres ikke i lærebøkene. Teknologien for at man skal addere en konstant C er gitt i form av eksempler i *Mønster R2* og *Matematikk R2*. I *Sinus R2* skal elevene selv forklare det gjennom en utforsk-oppgave.

Når det gjelder tidspunkt for når det ubestemte integralet presenteres har *Mønster R2* presentert tema *etter* kapittelet om bestemt integral og AFT (Kalvø et al., 2022, s. 4). Det betyr at man ikke har kunnskap om antiderivasjon i møte med AFT. *Sinus R2* har repetisjon av derivasjon og deretter det ubestemte integralet som de to første kapitlene i tema integrasjon. Videre har boken et kapittel om integrasjon av funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ og deretter integrasjon av eksponentialfunksjoner. Det bestemte integralet kommer først i det femte delkapittelet før AFT presenteres i det påfølgende kapittelet (Oldervoll et al., 2022, s. 4). Med andre ord benytter elevene antiderivasjon i flere kapitler før man lærer definisjonen av det bestemte integralet. *Matematikk R2* presenterer det ubestemte integralet etter definisjonen av det bestemte integralet, men like før AFT blir fremstilt. Jeg vil diskutere valg av rekkefølge i Kapittel 6.2, fordi det kan ha betydning for elevene sin forståelse for den store oppdagelsen med AFT.

5.3 Analysens fundamentalteorem i lærebøkene for faget Matematikk R2

I dette kapittelet vil jeg analysere hvordan AFT behandles i de ulike lærebøkene. Fra den prakseologiske referansemodellen vil jeg minne leseren på at AFT typisk deles inn i to deler. Del 1, antiderivert-delen, viser hvordan man bruker arealfunksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, for å konstruere en antiderivert. En generisk oppgavetype for oppgaver i lærebøkene, som benytter denne delen av teoremet, kan formuleres ved:

> **Oppgave $\boldsymbol{T_3}$:** En funksjon $f(x) = 2x - 1$
> Vis at $F(x) = \int_0^x f(t)dt = x^2 - x$ er en antiderivert til $f(x)$

Del 2 av AFT, evalueringsdelen, viser hvordan man evaluerer et bestemt integral mellom to grenser. En generisk oppgavetype som benytter denne delen av teoremet, er:

> **Oppgave $\boldsymbol{T_4}$:** Finn arealet under grafen til $f(x) = 2x - 1$ fra $x = 1$ til $x = 3$

Oppgavene T_3 og T_4 er representativ for den type oppgaver jeg har analysert teknikk, teknologi og teori for i Kapitlene 5.3.1, 5.3.2 og 5.3.3. Jeg vil først i kapitlene presentere hvordan de ulike lærebøkene behandler AFT, og i den prakseologiske analysen poengterer jeg hvordan den enkelte lærebok benytter teknikk, teknologi og teori fra teoremet for å løse T_3 og T_4.

5.3.1 *Mønster R2*

Kalvø et al. (2022) presenterer Del 1 av AFT:

> La f være en kontinuerlig funksjon. La $A(x)$ være arealet under grafen fra $x = 0$ til x.
> Da har vi $A'(x) = f(x)$. (s. 220)

Denne delen bevises på følgende måte med Figur 5.5 som geometrisk illustrasjon:

> La $f(x)$ være en positiv, voksende og kontinuerlig funksjon. La $A(x)$ være arealet under grafen til f fra $x = 0$ til x. Vi øker x med Δx til $(x + \Delta x)$. Da øker arealet under grafen med ΔA. Vi har $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$, se figuren [...] [Figur 5.5].
> På figuren [5.5] har vi tegnet to rektangler med bredde Δx. Det lille rektangelet har høyde $f(x)$. Det store rektangelet har høyde $f(x + \Delta x)$. Av figuren ser vi at vi har
>
> $$\text{Lite rektangel} \leq \Delta A \leq \text{stort rektangel}$$
> $$\Delta x \cdot f(x) \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq \Delta x \cdot f(x + \Delta x) \;|: \Delta x$$
> $$f(x) \leq \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x)$$

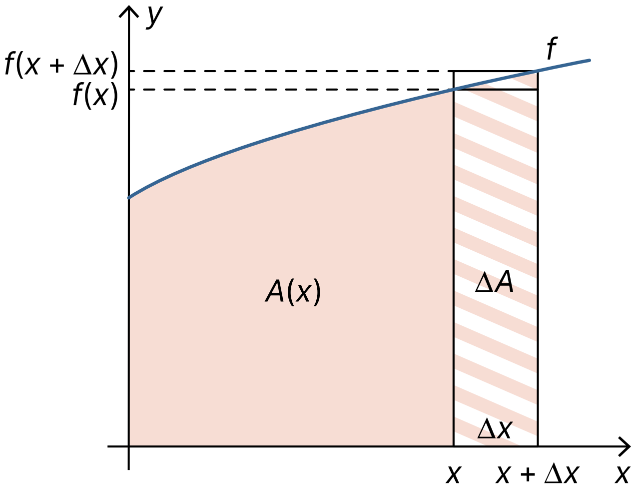
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)$$

$$f(x) \leq A'(x) \leq f(x)$$

Når $f(x) \leq A'(x) \leq f(x)$ er eneste mulighet at $A'(x) = f(x)$, som var det vi skulle bevise. Tilsvarende gjelder også når grafen er avtakende og når hele eller deler av grafen ligger under x-aksen. (Kalvø et al., 2022, s. 220–221)

Figur 5.5

Figur fra beviset av analysens fundamentalsetning i Mønster R2



Merknad. Figuren er fra *Mønster R2* (Kalvø et al., 2022, s. 220). Gjengitt med tillatelse.

I *Mønster R2* er det kun Del 1 som blir navngitt som AFT. Del 2 blir sett på som en konsekvens av Del 1, men presenteres på følgende måte (Kalvø et al., 2022, s. 221):

> La f og F være slik at $F'(x) = f$. Da er
> $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) – F(a)$$

Del 2 bevises på følgende måte:

> Ettersom $A(x)$ er en antiderivert av $f(x)$, finnes det en konstant C slik at $A(x) = F(x) + C$ for en hvilken som helst antiderivert $F(x)$ til $f(x)$. [...]
>
> $A(x)$ er arealet fra $x = 0$, så vi har $\int_a^b f(x)dx = A(b) - A(a)$.
>
> Vi bytter ut $A(x)$ med $F(x) + C$ og får
>
> $$\int_a^b f(x)dx = A(b) - A(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) – F(a)$$
>
> Det betyr at vi kan regne ut det bestemte integralet av f med hvilken som helst antiderivert til f. (Kalvø et al., 2022, s. 221)

I slutten av hvert kapittel i *Mønster R2* er det en oversikt med «det viktigste innholdet fra hvert kapittel oppsummert» (Kalvø et al., 2022, s. 6). Evalueringsdelen $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ er presentert sammen med setningen «analysens fundamentalsetning beskriver sammenhengen mellom det bestemte integralet og en antiderivert» (Kalvø et al., 2022, s. 258).

Prakseologisk analyse av AFT i Mønster R2

Del 1 av AFT i *Mønster R2* utgjør grunnlaget for en teknikk τ som brukes for å løse en oppgave av type T_3. Teknikken τ for å løse en oppgave av type T_3 i *Mønster R2*, er derivasjon av arealfunksjonen $A(x)$ med hensyn på øvre grense, men det er ikke poengtert i fremstillingen at det betyr at $A(x)$ er en antiderivert for funksjonen $f(x)$. En løsning av en oppgave av type T_3 i *Mønster R2* vil være $F'(x) = (\int_0^x f(t)dt)' = (x^2 - x)' = 2x - 1 = f(x)$ slik at $F(x)$ er en antiderivert. Funksjonen $F(x)$ tilsvarer her $A(x)$ i *Mønster R2*.

Del 1 er hovedsakelig gitt som ren tekst hvor matematiske symboler er redusert til et minimum. Eksempelvis er arealfunksjonen med ukjent øvre grense uttrykt gjennom teksten «La $A(x)$ være arealet under grafen fra $x = 0$ til x». Setningen tilsvarer $A(x) = \int_0^x f(x)dx$, men det er uheldig bruk av notasjon når x er benyttet både som øvre grense i integralet og som integrasjonsvariabel. Hvis man skal forenkle symbolbruken til én variabel, må man i så fall fjerne «$x =$» slik at «La $A(x)$ være arealet under grafen fra 0 til x». Ved denne forenklingen får riktignok ikke elevene mulighet til å se at det tilsvarer $A(x) = \int_0^x f(t)dt$, hvor t er valgt som en vilkårlig integrasjonsvariabel. Hvis man skal inkludere integrasjonsvariabelen kan man skrive «La $A(x)$ være arealet under grafen fra $t = 0$ til $t = x$», men da må forfatterne forklare hvorfor det benyttes to ulike variabler. Siden x er benyttet som øvre grense betyr det at abscisseaksen i Figur 5.5 burde ha et annet variabelnavn, det vil si t hvis det er valgt som integrasjonsvariabel.

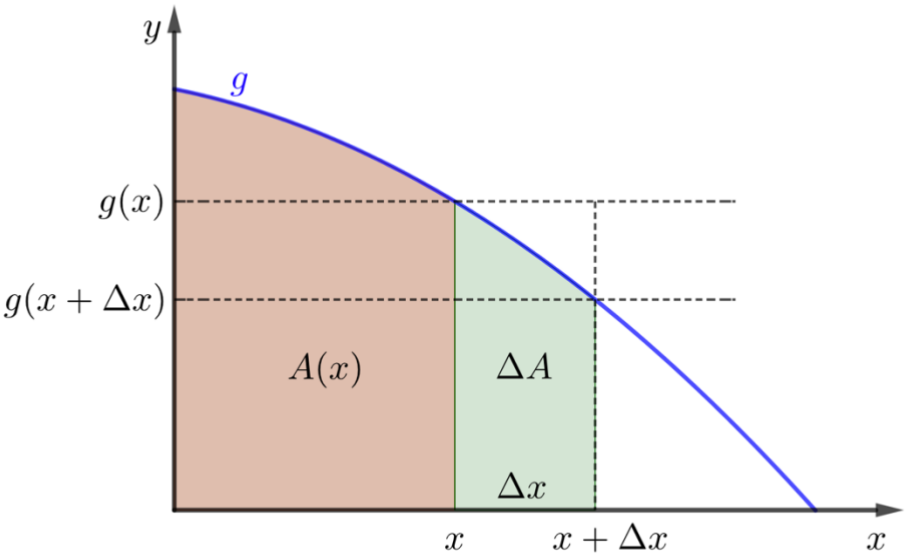
Teknologien θ bak derivasjon av arealfunksjonen, $A'(x) = f(x)$, er gitt som et geometrisk bevis som forklarer godt intuitivt at likheten stemmer. Beviset for Del 1 av AFT utgjør med andre ord teknologien for en oppgave av type T_3. Det er et forenklet bevis, fordi forfatterne antar at funksjonen er kontinuerlig, voksende og positiv. Alle funksjoner som elevene møter innenfor integralregning i faget Matematikk R2 er integrerbare, fordi funksjonene som blir benyttet er kontinuerlige. Likevel hadde det vært nyttig for elevene å vite hva antagelsen om kontinuitet fører til og hvorfor det er nødvendig.

Etter Del 1 er bevist står det at «tilsvarende gjelder når grafen er avtakende, når hele eller deler av grafen ligger under x-aksen» (Kalvø et al., 2022, s. 221). Her er det viktig poengtere at teoremet gjelder, men beviset som er presentert i læreboken er ikke gyldig under nevnte betingelser. I så fall må man gjøre endringer på beviset. Funksjonen på Figur 5.6 viser en funksjon som er kontinuerlig og positiv, men avtakende. Det største rektangelet har nå høyde $g(x)$ og det minste rektangelet har høyde $g(x + \Delta x)$. Det skyldes at vi får lavere en funksjonsverdi når *x*-verdien øker, fordi funksjonen er avtakende. Ved bruk av tilsvarende framgangsmåte som *Mønster R2* kan man uttrykke beviset:

$$\text{Lite rektangel} \leq \Delta A \leq \text{stort rektangel}$$
$$\Delta x \cdot g(x + \Delta x) \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq \Delta x \cdot g(x) \;|: \Delta x$$
$$g(x + \Delta x) \leq \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq g(x)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \to 0} g(x)$$
$$g(x) \leq A'(x) \leq g(x)$$

Figur 5.6

Illustrasjon av tilfellet der funksjonen er kontinuerlig og avtakende



Endringene fra *Mønster R2* sin versjon er at uttrykkene $g(x)$ og $g(x + \Delta x)$ bytter plass for hva som utgjør høyden i stort og lite rektangel. Beviset for Del 1 av AFT i *Mønster R2* er av den grunn problematisk for en funksjon som både er voksende og avtagende. Eksempelvis en andregradsfunksjon som vi finner i faget Matematikk R2, fordi beviset vil kun gjelde for enkelte verdier av x. At det mangler forklaring på antagelsene kategoriseres som mangelfull teori Θ.

I teknologien benytter forfatterne at $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = A'(x)$, men det er ikke inkludert teori som forklarer hvorfor denne likheten stemmer. Venstre side av likningen kan man kjenne igjen som definisjonen av den deriverte, som riktignok er pensum i Matematikk 1T og R1 (Utdanningsdirektoratet, 2021, 2020).

Del 2 i *Mønster R2* utgjør grunnlaget for en teknikk for å løse en oppgave av type T_4. Teknikken er å antiderivere $f(x)$ og i neste omgang regne ut differansen av funksjonsverdiene til den antideriverte, $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Fra Del 1 av AFT vet man at arealfunksjonen $A(x)$ er en spesiell antiderivert, som tilsvarer $F(x)$ fra Oppgave T_3. Av den grunn kan en oppgave av type T_4 løses på følgende måte i *Mønster R2*: $\int_1^3 2x - 1 = [x^2 - x]_1^3 = F(3) - F(1) = (3^2 - 3) - (1^2 - 1) = 6$.

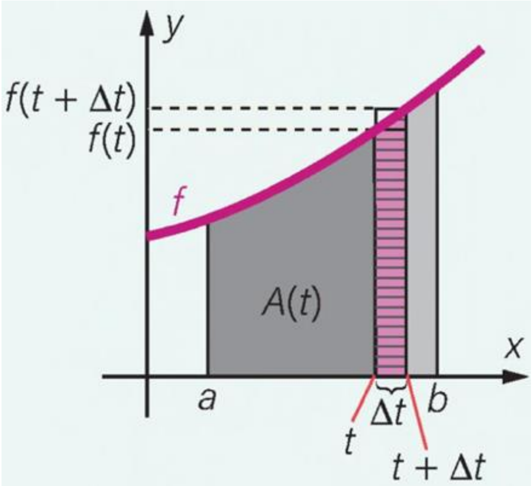
Beviset av Del 2 utgjør grunnlaget for teknologien til en oppgave av type T_4. Kalvø et al. (2022) hevder i første omgang at det eksisterer en konstant C slik at $A(x) = F(x) + C$, hvor $A(x)$ er en spesiell antiderivert fra Del 1. Forklaringen på hvorfor det eksisterer en konstant C blir gitt under ubestemt integral, men som nevnt tidligere kommer dette kapittelet *etter* at AFT er presentert. Av den grunn kan det være utfordrende å forstå hvor konstanten C kommer fra. Videre bruker forfatterne at $A(x)$ er arealet fra $x = 0$, og derfor er $\int_a^b f(x)dx = A(b) - A(a)$. Likningen postuleres uten teori som rettferdiggjør teknologien. Ved å kombinere likningene, $\int_a^b f(x)dx = A(b) - A(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$ påstår forfatterne at man kan regne det bestemte integralet av f med hvilken som helst antiderivert til f. Elevene får en teknikk for utregning av bestemt integral, men logosblokken er redusert.

5.3.2 *Sinus R2*

I *Sinus R2* er det lagt opp til at elevene selv skal bevise AFT gjennom oppgaven «*Utforsk fundamentalsetningen*». Oppgavene som blir gitt sørger for at elevene gjør beviset steg for steg. Aktiviteten er utformet slik at elevene skal forklare at en gitt formel eller en påstand stemmer. Eksempelvis: «Forklar at det rosa flatestykket [på Figur 5.7] er større enn et rektangel med bredde Δt og høyde $f(t)$. Bruk det til å forklare at $f(t)\Delta t < A(t + \Delta t) - A(t) < f(t + \Delta t)\Delta t$» (Oldervoll et al., 2022, s. 83). For Del 1 av AFT har læreboken lagt opp til at elevene skal benytte samme framgangsmåte som *Mønster R2* med tilsvarende antagelser. Av den grunn gjengir jeg ikke tilsvarende bevis her.

Figur 5.7

Illustrasjon fra presentasjon av analysens fundamentalsetning i Sinus R2



Merknad. Figuren er hentet fra *Sinus R2* (Oldervoll et al., 2022, s. 82). Gjengitt med tillatelse fra Cappelen Damm.

Resultatet man kommer fram til på *Utforsk fundamentalsetningen* oppsummeres med følgende fremstilling av Del 1 i *Sinus R2* (Oldervoll et al., 2022, s. 84):

> La f være kontinuerlig i intervallet $[a, b]$.
>
> $$F(t) = \int_a^t f(x)dx \Longrightarrow F'(t) = f(t)$$

Det understrekes videre at denne regelen kalles *fundamentalsetningen* eller *analysens fundamentalteorem* (Oldervoll et al., 2022, s. 84). Del 2 er fremstilt på tilsvarende måte som *Mønster R2*, men heller ikke i *Sinus R2* er denne delen navngitt som en del av AFT. Til tross for det er det likevel kun evalueringsdelen som blir nevnt under oppsummeringsdelen av kapittelet (Oldervoll et al., 2022, s. 96–97). Innledningsvis i boken står det at «Til slutt i hvert kapittel finner elevene et sammendrag av viktig regler og metoder i kapittelet» (Oldervoll et al., 2022, s. 3). Beviset for Del 2 er også gitt i form av en utforsk-oppgave til elevene:

> I steg 1 viste dere at $A(t)$ er en antiderivert til $f(t)$.
>
> La $F(t)$ være en fritt valgt antiderivert til $f(t)$.
>
> a) Forklar at det fins en konstant C slik at $A(t) = F(t) + C$
>
> b) Forklar at $A(a) = 0$ og at $C = -F(a)$
>
> c) Forklar at $A(t) = F(t) - F(a)$ og spesielt at $A(t) = F(b) - F(a)$
>
> d) Forklar at $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
>
> (Oldervoll et al., 2022, s. 83)

Prakseologisk analyse av AFT i Sinus R2

Del 1 av AFT blir fremstilt ved at $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ impliserer at $f(t)$ er den deriverte av $F(t)$. Teknikken τ som er benyttet i denne sammenheng er derivasjon av arealfunksjonen, $\int_a^t f(x)dx$, med hensyn på øvre grense. Det vil si at teknikken τ for å løse en oppgave av type T_3 i *Sinus R2* er den samme som ble benyttet i *Mønster R2*. Heller ikke i *Sinus R2* sin versjon av AFT er det nevnt at $F(t)$ er en antiderivert når $F'(t) = f(t)$. Forfatterne har benyttet x som integrasjonsvariabel for arealfunksjonen, slik at t er benyttet som øvre grense. Av den grunn har abscisseaksen i Figur 5.7 variabelnavn x.

I denne læreboken skal elevene selv ferdigstille beviset av Del 1 for AFT, det vil si å vise at $F'(t) = f(t)$ hvor $F(t) = \int_a^t f(x)dx$. Beviset utgjør teknologien som forklarer teknikken som blir brukt til å løse en oppgave av type T_3. Den tilsiktede teknologien er det samme som læreboken fra *Mønster R2*. Av den grunn har teknologien tilsvarende utfordringer som ble nevnt i den prakseologiske analysen under Kapittel 5.3.1. Etter at elevene har fått mulighet til å bevise Del 1 av AFT står det: «I dette beviset måtte vi forutsette at f var positiv og voksende. Vi kan gjennomføre et tilsvarende bevis for alle andre kontinuerlig funksjoner» (Oldervoll et al., 2022, s. 83). Heller ikke i denne boken blir antagelsene gjort rede for og tilsvarende som *Mønster R2*, indikerer det mangelfull teori Θ.

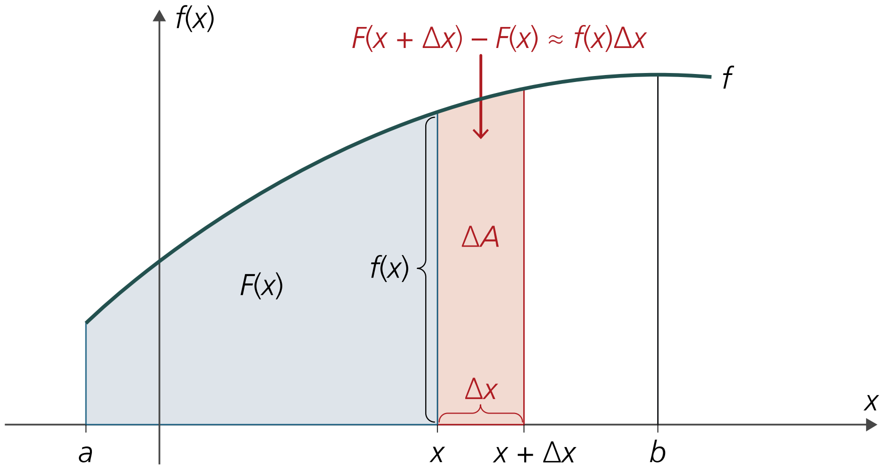
Teknikken for å løse en oppgave av type T_4, er det samme som *Mønster R2* sin versjon. Teknologien for likningen $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, er derimot også en oppgave til utforskning for elevene. Teknologien utgjør *Sinus R2* sin versjon av beviset for Del 2 av AFT. Jeg har gjengitt oppgaveformuleringene som et eksempel på *Sinus R2* sin fremstilling. Det blir relevant for den didaktiske transposisjonen i Kapittel 5.4. Til tross for at det er elevene som skal ferdigstille teknologien, kan man tenke seg til hvordan det er tiltenkt at elevene skal løse oppgaven ved å studere oppgaveformuleringen. På den måten kan man si mer om teknologi, men med forbehold om at elevene løser det på tilsvarende måte. Ved forklaring av Oppgave (d) er følgende fremgangsmåte tenkt: $\int_a^b f(x)dx = A(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$. I Oppgave (a) forklarte man at det eksisterer en konstant C slik at $A(t) = F(t) + C$ og i Oppgave (b) at $\int_a^a f(x)dx = F(a) + C = 0$ slik at $C = -F(a)$. En kombinasjon av likningene gir framgangsmåten for Oppgave (d) i utforsk-oppgaven.

5.3.3 *Matematikk R2*

Forfatterne starter med en oppgave til utforskning for elevene som antyder at det er en sammenheng mellom det bestemte integralet og den antideriverte. Videre skriver forfatterne at det gjelder generelt og kalles analysens fundamentalteorem (Borge et al., 2022, s. 135). Figur 5.8 blir så brukt til å forklare den bærende ideen i beviset.

Figur 5.8

Illustrasjonen av bevis for AFT i Matematikk R2



Merknad. Illustrasjonen fra *Matematikk R2* (Borge et al., 2022, s. 136). Gjengitt med tillatelse.

Følgende bevis er gitt for Del 1 av AFT i læreboken *Matematikk R2*:

> Vi kaller arealet av det blå området for $F(x)$. Dette arealet svarer til det bestemte integralet som vi definerte ved hjelp av riemannsummer.
>
> $$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
>
> Arealet av det rosa området, ΔA, er et lite tilleggsareal.
>
> Summen av de to arealene svarer til det bestemte integralet
>
> $$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$
>
> Arealet av bare det rosa området, vil da være differansen mellom de to arealene ovenfor.
>
> $$\Delta A = F(x + \Delta x) - F(x)$$
>
> En tilnærming for ΔA er et rektangel med bredde Δx og høyde $f(x)$.
>
> $$\Delta A \approx \Delta x \cdot f(x)$$
>
> Som med riemannsummene er denne tilnærmingen mer nøyaktig jo smalere rektangelet er, altså jo mindre Δx er.Vi setter de to uttrykkene for ΔA lik hverandre og omformer.

1)	$F(x+\Delta x) - F(x) \approx \Delta x \cdot f(x)$	
2)	$\dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx f(x)$	Vi deler med Δx
3)	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx f(x)$	Tilnærmingen blir bedre jo mindre Δx er. Vi lar derfor Δx gå mot 0.
4)	$F'(x) = f(x)$	Vi gjenkjenner definisjonen av den deriverte på venstre side.

F er altså en antiderivert av f. (Borge et al., 2022, s.136)

I neste omgang sammenfattes det som har blitt bevist til Del 1 av AFT:

> La f være en kontinuerlig funksjon i intervallet $[a, b]$. Da er funksjonen F gitt ved
>
> $$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$
>
> en antiderivert av f for $x \in [a, b]$ med $F'(x) = f(x)$ for $x \in \langle a, b\rangle$. (Borge et al., 2022, s. 137)

Del 2 er fremstilt på tilsvarende måte som i *Mønster R2* og *Sinus R2*, og heller ikke her er denne delen navngitt som en del av selve teoremet. Følgende bevis er gitt for denne delen:

> $\int_a^a f(x)dx = F(a) = 0$, fordi vi ikke har noe område med areal når øvre og nedre grense for integralet er like. La nå K være en vilkårlig antiderivert av f. Da er $F(x) = K(x) + C$. Dermed er
>
> $$\begin{aligned}\int_a^b f(x) &= F(b) = F(b) - F(a) \\ &= (K(b) + C) - K(a) - C) \\ &= K(b) - K(a) \\ &= [K(x)]_a^b\end{aligned}$$
>
> Her er $F(b) = F(b) - F(a)$siden $F(a) = 0$. (Borge et al., 2022, s. 138)

Tilsvarende de to andre lærebøkene er kun evalueringsdelen nevnt i sammendrag til kapittelet.

Prakseologisk analyse av AFT i Matematikk R2

Del 1 i *Matematikk R2* utgjør på lik linje som i *Mønster R2* og *Sinus R2* grunnlaget for teknikken som benyttes for å løse en oppgave av type T_3. Teknikken er derivasjon av arealfunksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ med hensyn på øvre grense, og her er det poengtert eksplisitt at det fører til at funksjonen $F(x)$ er en antiderivert til f. Ved en oppgave av type T_3 er $F(x)$ en antiderivert som følge av at $F'(x) = (\int_0^x f(t)dt)' = (x^2 - x)' = 2x - 1 = f(x)$.

Integrasjonsvariabel og øvre grense er ulike i uttrykket $\int_a^x f(t)\,dt$, men det er forvirrende at x er valgt som variabelnavn på abscisseaksen i Figur 5.8 når t er integrasjonsvariabel.

I teknologien for at $F'(x) = f(x)$, som utgjør beviset av Del 1 av AFT i *Matematikk R2*, benytter læreboken en tilsvarende idé som *Mønster R2* og *Sinus R2*. Imidlertid benytter forfatterne prinsippet bak «tilnærmet lik». Dette gjør at man kun trenger anta at funksjonen er kontinuerlig. Antagelsen blir ikke nevnt i beviset, men innledningsvis i integrasjonskapitlet nevner forfatterne at en funksjon som er kontinuerlig i intervallet $[a, b]$, er integrerbar i det tilsvarende intervallet. Videre at «alle funksjonene du møter i R2, er integrerbare» (Borge et al., 2022, s. 96). Det kan være grunnen til kontinuitet ikke blir nevnt som en antagelse i beviset. Av den grunn har boken gjort rede for antagelsene og teorien Θ for teknologien er styrket.

Forklaringen som blir gitt til likningene i linjene 3 og 4 i beviset for Del 1 i Kapittel 5.3.3, utgjør deler av teorien bak teknologien: Eksempelvis at man gjenkjenner uttrykket i linje 3 som definisjonen av den deriverte. Definisjonen er som nevnt pensum i både Matematikk 1T og R1, som elevene har gjennomført før faget Matematikk R2 (Utdanningsdirektoratet, 2021, 2020). På lik linje som lærebøkene *Mønster R2* og *Sinus R2* forklarer beviset godt visuelt hvorfor $F'(x) = f(x)$ er korrekt, men rent matematisk er det likevel uformelt. Bruken av tilnærmet lik er upresist som følge av at $F(x + \Delta x) - F(x) \approx \Delta x\, f(x)$ i beviset kun er tilnærmet lik når Δx er tilstrekkelig liten. Forfatterne har også poengtert at deres bevis er en forenkelt versjon: «tilnærmingsverdien fra linje 2 til grenseverdien i linje 3 [...] krever et formelt bevis som vi ikke går inn på i R2, men overgangen er bærende ideen i beviset» (Borge et al., 2022, s. 137).

For å løse oppgaver av type T_4 er det presentert tilsvarende teknikk som *Mønster R2* og *Sinus R2*. Dette utgjør Del 2 av AFT i *Matematikk R2*. I teknologien for Del 2 er det inkludert forklaring på hvorfor $F(a) = 0$ og at $F(b) = F(b) - F(a)$. Videre bruker forfatterne eksistens av en konstant C slik at $F(x) = K(x) + C$. Som nevnt i Kapittel 5.2 om det ubestemte integralet ble det brukt eksempler som forklaring av konstantteoremet.

5.3.4 En sammenlikning av analysens fundamentalteorem i lærebøkene

Del 1 av AFT skal vise hvordan man bruker arealfunksjonen for å konstruere en antiderivert, tilsvarende en oppgave av type T_3. Fremstillingen av Del 1 er svært ulik i lærebøkene for videregående skole, men teknikken for å løse en oppgave av type T_3 ved å derivere arealfunksjonen er felles for lærebøkene. I teknologien forklarer alle lærebøkene godt intuitivt med et geometrisk bevis at dersom arealfunksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, så er $F'(x) = f(x)$. I teorien er det kun læreboken *Matematikk R2* som uttrykte at venstre side av likningen

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$ tilsvarer definisjonen av den deriverte. Imidlertid skal man som elev forklare denne sammenhengen som en del av utforsk-oppgavene i *Sinus R2*.

Ved en oppgave av type T_4, benytter lærebøkene den samme teknikken for å evaluere det bestemte integralet, men det er brukt varierende teknologi som jeg skal fokusere videre på i Kapittel 5.4. Et interessant funn er at det kun er Del 2 som blir nevnt i oppsummeringen av integrasjonskapittelet, til alle lærebøkene. Det kan tyde på at lærebokforfatterne anser teknikken fra denne delen som viktig, fordi i alle lærebøkene er det poengtert at eleven finner viktig regler og metoder i slutten av hvert kapittel.

5.4 Didaktisk transposisjonsanalyse

I denne delen vil jeg beskrive didaktiske transposisjoner som kunnskapen i lærebøkene for videregående skole har gjennomgått fra den akademiske kunnskapen på universitetet. De prakseologiske analysene av kunnskapen fra Kapitlene 5.1–5.3 vil bli sammenlignet med den prakseologiske referansemodellen i Kapittel 4, noe som vil gi et svar på forskningsspørsmålet: «Hvilke didaktiske transposisjoner har analysens fundamentalteorem gjennomgått fra en universitetsversjon til en versjon som skal undervises i videregående skole?». Samtidig vil jeg påpeke at jeg her vil *beskrive* de didaktiske transposisjonene, og i Kapittel 6 vil jeg *diskutere* de ulike transposisjonene. Jeg vil kommentere funn når det gjelder transposisjoner ved teknikk τ, teknologi θ og teori Θ mellom kunnskapen i lærebøkene for videregående og universitetet, men hver kategori vil ikke forekomme i alle kapitler.

5.4.1 Definisjon av det bestemte integralet

Sammenligner vi universitetsversjonen og lærebøkene i den videregående skolen er det kun *Matematikk R2* som definerer det bestemte integralet på tilsvarende måte som universitetsversjonen med grenseverdien av to trappesummer. Universitetsboken fra Adam og Essex (2013) har riktignok en utdypende teknologi for nedre og øvre riemannsum, fordi forfatterne benytter ekstremalverdisetningen for å utlede at det eksisterer en maksimums- og minimumsverdi på hvert delintervall i partisjonen. Det har Borge et al. (2022) i læreboken *Matematikk R2* antatt i sin teknologi. Ekstremalverdisetningen er en form for eksistensteorem, og som jeg påpekte i Kapittel 4.1 er eksistensteorem viktig for den formelle oppbygningen i matematikk. Antagelsen er derfor en forenkling som utgjør en didaktisk transposisjon.

I *Sinus R2* og *Mønster R2* benyttet forfatterne grenseverdien til én sum i teknikken for å løse en oppgave av type T_1. Når partisjonen av intervallet går mot uendelig, vil en grenseverdi av en trappesum eller mellom to summer (nedre og øvre trappesum) konvergere mot én bestemt tallverdi. Å beregne det bestemte integralet når partisjonen går mot uendelig, vil derimot være en svært arbeidskrevende prosess: Av den grunn er det vanlig å beregne tilnærmingsverdier for det bestemte integralet med et endelig antall partisjoner på intervallet. Hvis man skal tilnærme det bestemte integralet er det enklere å gjøre det ved hjelp av en sum kontra to tilnærmende summer. Først og fremst for at det bare blir en summasjon, men som nevnt i Kapittel 5.1.4 er det vanskelig å finne et uttrykk for nedre og øvre trappesum analytisk når funksjonen både er voksende og avtakende. Imidlertid er det mer nøyaktig å plassere det bestemte integralet mellom to summer når man har et endelig antall partisjoner, fordi den eksakte tallverdien for det bestemte integralet vil være mellom summene. Overgangen fra to trappesummer i universitetsboken fra Adam og Essex (2013) til én trappesum i definisjonen av det bestemte integralet er en didaktisk transposisjon som gjelder to av lærebøkene i videregående skole.

I *Mønster R2* var det en manglende kobling mellom teknikk og teknologi som ga utgangspunkt for to ulike varianter av trappesum for å løse en oppgave av type T_1. Hvis vi kun ser på teknikken bruker *Mønster R2* grenseverdien av en vilkårlig sum når maskevidden Δx går mot null. Som nevnt i Kapittel 5.1.1 er høyden i rektanglene kun gitt ved $f(x)$, men denne funksjonsverdien indikerer ikke om x-verdien er venstre, høyre, minimumsverdi, maksimumsverdi eller midtpunkt på det respektive intervallet. I motsetning har *Sinus R2* brukt indeksen i slik at høyden $f(x_i)$ indikerer at det er venstre hjørne i hvert rektangel. I *Mønster R2* brukes dermed en forenkling i symbolbruken som gjør det vanskelig å forstå hvilken trappesum som forfatterne henviser til i teknikken.

5.4.2 Det ubestemte integralet

Ved det ubestemte integralet benytter lærebokforfatterne eksistensen av en konstant C for å løse en oppgave av type T_2. Eksistens av en konstant C utgjør konstantteoremet fra den prakseologiske referansemodellen i Kapittel 4.2. I lærebøkene for den videregående skolen blir dette prinsippet riktignok ikke henvist til som et teorem, og det blir brukt eksempler for å vise at det gjelder generelt. I universitetsboken fra Adam og Essex (2013) ble middelverdisetningen benyttet i beviset av konstantteoremet, slik jeg utledet i Kapittel 4.2. Av den grunn har det skjedd en didaktisk transposisjon hvor logosblokken med henholdsvis teknologi og teori for det ubestemte integralet er redusert i lærebøkene for den videregående skolen.

5.4.3 Analysens fundamentalteorem

Først og fremst gir jeg en repetisjon av AFT slik det ble fremstilt i universitetsversjonen fra Adam og Essex (2013, s. 311–312):

> Anta at funksjonen f er kontinuerlig på et intervall I som inkluderer punktet a.
>
> DEL 1. La funksjonen F være definert på intervallet I med
>
> $$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$
>
> Da er F deriverbar på I, og $F'(x) = f(x)$ på I. Dermed er F en antiderivert av f på I:
>
> $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$
>
> DEL 2. Hvis $G(x)$ er en vilkårlig antiderivert av $f(x)$ på I slik at $G'(x) = f(x)$ på I, da for enhver b i I har vi
>
> $$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Didaktiske transposisjoner for Del 1 av AFT

Ved en oppgave av type T_3 benytter lærebøkene Del 1 av AFT. Som poengtert i Kapittel 5.3.4 er antiderivert-delen fremstilt svært ulikt i lærebøkene for videregående skole. I *Mønster R2* har matematiske symboler fra universitetsversjonen blitt redusert til ren tekst. Arealfunksjonen fra universitetsversjonen, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, blir fremstilt ved teksten «La $A(x)$ være arealet under grafen fra $x = 0$ til x» i *Mønster R2*. Som forklart i Kapittel 5.3.1 tilsvarer det $A(x) = \int_0^x f(x)dx$. En didaktisk transposisjon i *Mønster R2* er dermed at forfatterne benytter den samme variabelen for øvre grense og for integrasjonsvariabel. Videre skal abscisseaksen ha samme variabelnavn som integrasjonsvariabelen i en geometrisk tolkning av arealfunksjonen, slik jeg beskrev i den prakseologiske referansemodellen i Kapittel 4.3. Siden *Mønster R2* kun benytter én variabel blir det derfor forvirrende benevning av abscisseaksen i Figur 5.5. *Matematikk R2* har korrekt notasjon i integralet $\int_a^x f(t)dt$, men variabelnavnet på abscisseaksen i Figur 5.8 er ikke det samme som integrasjonsvariabelen. *Sinus R2* er derfor eneste lærebok som behandler arealfunksjonen på tilsvarende måte som universitetsversjonen.

Nedre grense for arealfunksjonen i *Mønster R2* er gitt ved $x = 0$, i motsetning til de to andre lærebøkene og universitetsversjonen hvor nedre grense er gitt ved en vilkårlig konstant a. *Mønster R2* bruker en forenkling som skyldes at grafen som benyttes i beviset, Figur 5.5, har nedre grense gitt ved $x = 0$. Forenklingen gjør at teoremet mister generalitet.

Del 1 av AFT i *Sinus R2* og *Matematikk R2* er to komprimerte versjoner av den abstrakte framstillingen i universitetsversjonen, i motsetning benytter *Mønster R2* en konkret arealtilnærming. Ingen av de tre lærebøkene i den videregående skolen har inkludert likningen som eksplisitt indikerer at derivasjon og integrasjon er hverandres inverser: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. Det er en forenkling i symbolbruken for alle lærebøkene, men som jeg vil diskutere nærmere i Kapittel 6.1.1 er ikke forenklingen ekvivalent med at teoremet blir enklere å forstå.

Verken *Sinus R2* eller *Mønster R2* inkluderer betingelser for når AFT er gyldig, slik læreboken *Matematikk R2* og universitetsversjonen har gjort. Altså at arealfunksjonen $F(x)$ er deriverbar på intervallet I hvor funksjonen f er definert, og at $F'(x) = f(x)$ på det tilhørende intervallet. Samtidig er det kun *Matematikk R2*, tilsvarende universitetsversjonen, som har uttrykt eksplisitt at $F(x)$ er en *antiderivert* når $F'(x) = f(x)$. Poenget med første del av AFT er å konstruere en antiderivert, slik at denne detaljen utgjør et viktig moment.

Didaktiske transposisjoner av beviset for Del 1 av AFT

Lærebøkene tiltenkt videregående skole benytter et visuelt bevis for Del 1 av AFT, som bruker den samme bærende ideen gjennom en geometrisk tilnærming. Beviset er utgangspunktet for teknologien for en oppgave av type T_3. I *Mønster R2* og *Sinus R2* er det redusert logosblokk, fordi det blir brukt antagelser om at funksjonen er voksende, positiv og kontinuerlig. Samtidig mangler det teori for antagelsene som er benyttet. I universitetsversjonen derimot, er kontinuitet den eneste antagelsen som er brukt. I *Matematikk R2* er det en overgang i beviset som ikke er forklart og forfatterne er upresise i bruken av «tilnærmet lik». Lærebokforfatterne i den videregående skolen har dermed tatt et valg om å bruke en geometrisk tilnærmelse som bygger på elevene sin intuisjon, fremfor et stringent algebraisk bevis ved hjelp av definisjonen til deriverte og middelverdisetningen for integraler slik Adam og Essex (2013) har gjort.

Mønster R2 og *Sinus R2* benytter ulikheter i deres bevis, og prinsippet som forfatterne bruker er kjent som skviseteoremet. Adam og Essex (2013) presenterer teoremet på følgende måte:

> Anta at $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ holder for enhver x i et åpent intervall som inneholder a, unntatt muligens ved $x = a$. Anta også at
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$
> Da er $\lim_{x\to a} g(x) = L$. Liknende gjelder for venstre- og høyregrenser. (s. 71)

Bevis av skviseteoremet krever i utgangpunktet en formell definisjon av grenseverdibegrepet ved hjelp av epsilon og delta (Adam & Essex, 2013), men denne definisjonen blir ikke benyttet i videregående skole. Det kan være grunnen til at forfatterne ikke poengterer for elevene at det er skviseteoremet som er benyttet.

En didaktisk transposisjon som gjelder læreboken *Sinus R2* er at hele beviset for både Del 1 og Del 2 av AFT har blitt en utforsk-oppgave for elevene. I motsetning til universitetsversjonen må elevene selv fullføre beviset. Denne transposisjonen setter større krav til brukeren av læreboken og forutsetter at elevene klarer å løse oppgavene for å få et bevis. Videre diskusjon rundt denne varianten blir gitt under Kapittel 6.1.4.

Didaktiske transposisjoner av Del 2 av AFT

Del 2 av AFT blir brukt til å løse en oppgave av type T_4 i lærebøkene. En felles didaktisk transposisjon er at denne delen ikke er en navngitt som en del av AFT i lærebøkene for den videregående skolen. Evalueringsdelen er fremstilt som et resultat av Del 1. Teknikken ved å antiderivere f og i neste omgang regne ut differansen av funksjonsverdiene til den antideriverte er lik som universitetsversjonen.

I beviset for Del 2, som utgjør teknologien for en oppgave av type T_4, benytter lærebøkene to teoremer fra universitetsversjonen, men uten å bemerke det for elevene. Det første prinsippet er konstantteoremet, men denne transposisjonen kommenterte jeg i Kapittel 5.4.2. Det andre teoremet er egenskapen ved bestemt integral som indikerer at et integral over lengde av null er null, $\int_a^a f(x) = 0$. Adam og Essex (2013, s. 305) beviser det med en kort argumentasjon som går ut på at dersom $a = b$ i integralet $\int_a^b f(x)$ har man $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 0$ for hver i. Som beskrevet i Kapittel 4.1 er Δx_i base for rektanglene ved nedre og øvre riemannsum. Siden $\Delta x_i = 0$ for hver i er både nedre og øvre riemannsum null for alle partisjoner av intervallet. Det betyr at et integral over lengde av null er null. Å forklare denne sammenhengen er en del av utforsk-oppgavene i *Sinus R2*. I *Matematikk R2* gir forfatterne en begrunnelse om at man ikke har noe område med areal når nedre og øvre grense for integralet er like.

I *Mønster R2* bruker man derimot ikke resultatet som indikerer at et integral over lengde av null er null, men forfatterne postulerer at $\int_a^b f(x) = A(b) - A(a)$ siden $A(x)$ er arealet under grafen til $f(x)$ fra 0. Likningen som Kalvø et al. (2022) postulerer er resultatet man ønsker å bevise. Så det at forfatterne i det neste steget bytter ut $A(x)$ med $F(x) + C$, slik at man står igjen med $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ er rent symbolsk da $F(x)$ er en vilkårlig antiderivert til $f(x)$. Som følge av at forfatterne postulerer likningen man ønsker å bevise er logosblokken i *Mønster R2* for Del 2 redusert.

Kapittel 6

Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg diskutere analyseresultatene fra Kapittel 5 i lys av teorien jeg presenterte i Kapittel 2 og den prakseologiske referansemodellen i Kapittel 4. Det er en lang vei fra teori til diskusjon, og forskningsspørsmålet presiseres: «Hvilke didaktiske transposisjoner har analysens fundamentalteorem gjennomgått fra en universitetsversjon til en versjon som skal undervises i videregående skole?». I Kapittel 6.1 vil jeg diskutere den didaktiske transposisjonen som kunnskapen som skal undervises i videregående skole har gjennomgått fra den akademiske kunnskapen på universitetet, på bakgrunn av funn i Kapittel 5. Jeg vil minne leseren på at didaktiske transposisjoner fra universitet er nødvendig for at kunnskapen skal være tilgjengelig og meningsfull for elevene i den videregående skolen. Likevel er det viktig å være bevisst på at endringene kan ha stor betydning for kunnskapen som elevene sitter igjen med (Chevallard & Bosch, 2020b). I Kapittel 6.2 vil jeg diskutere hvilken mulighet elevene har for å forstå den store oppdagelsen med AFT, med utgangspunkt i lærebøkene. I Kapittel 6.3 vil jeg reflektere over hensiktsmessigheten over ATD som er benyttet som teoretisk og analytisk rammeverk for denne studien. Avslutningsvis i Kapittel 6.4 vil jeg peke på videre forskning basert på begrensninger fra denne studien.

6.1 Diskusjon av didaktiske transposisjoner for analysens fundamentalteorem

Thompson og Harel (2021) gjennomførte nylig en omfattende metastudie knyttet til studenters vanskeligheter med å lære matematisk analyse. Forfatterne fokuserte hovedsakelig på derivasjon og integrasjon. Metastudien tok ikke undervisningsressurser i betraktning når det gjelder å forklare studenters vanskeligheter med å lære seg matematikken. I de følgende delkapitlene skal jeg diskutere hvordan behandlingen av AFT sammen med bestemt og ubestemt integral i lærebøker for videregående skole kan ha betydning for elevene sin forståelse. Det vil utgjøre et bidrag til den manglende forskningslitteraturen på feltet.

Først og fremst vil jeg minne leseren på at undersøkelsen min er inspirert av Topphol og Strømskag (2022), som pekte på videre utforskning av læremidlene med fokus på derivasjon og integrasjon. Forskerne fant i deres prakseologiske analyse at det var en manglende kobling mellom det ubestemte integralet og den antideriverte, nemlig mangelen på arealfunksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ i *Matematikk R2* (Heir et al., 2016). Som en oppfølging av deres studie ser vi imidlertid at likningen er inkludert i den nye versjonen av læreboken fra Borge et al. (2022), som en del av AFT. I tillegg fant Topphol og Strømskag (2022) at Del 1 av AFT var transformert til en definisjon, men i Borge et al. (2022) er denne delen presentert som et teorem med et tilhørende bevis. Endringene i den reviderte læreboken er en viktig forskjell, og trolig et resultat av at AFT har blitt et eget kompetansemål i LK20 for faget Matematikk R2.

6.1.1 Redusert matematisk kompleksitet

I undersøkelsen min ser vi flere eksempler på at lærebøkene i den videregående skolen benytter prinsippene bak et matematisk teorem, men uten å bemerke for elevene at det er et teorem. Eksempelvis ekstremalverdisetningen, skviseteoremet og konstantteoremet. Det er heller ikke presentert et tilhørende bevis. Som nevnt tidligere er matematikk bygd opp av definisjoner, teoremer og beviser. Teoremene danner et solid fundament for videre anvendelser, fordi bevisene sørger for at påstanden er en etablert sannhet (Lindstrøm, 2016; Lorentzen et al., 2003). Eksempelvis er skviseteoremet brukt til å beskrive egenskaper for funksjoner og utlede deres grenseverdier (Adam og Essex, 2013). Et tilsvarende funn i reduksjon av matematikkens språk fant Strømskag og Chevallard (2023) i deres undersøkelse, hvor konkavitet ikke ble presentert med en presis definisjon i *Mønster: Matematikk R1* (Kalvø et al., 2021), men som en anvendelse av den andrederiverte. Når lærebokforfatterne i den videregående skolen ikke poengterer at matematiske prinsipp regnes som et teorem med et tilhørende bevis, forsvinner både den formelle oppbygningen og matematikkens fagterminologi. Det fører videre til at den matematiske kompleksiteten reduseres i lærebøkene.

Naiv empirisme ved det ubestemte integralet

Ved det ubestemte integralet benytter lærebøkene eksempler for å vise at eksistensen av en konstant C gjelder generelt for en oppgave av type T_2. Det utgjør prinsippet for konstantteoremet i universitetsversjonen. Teknologien ved bruk av eksempler er intuitiv, men å hevde at en sammenheng er sann etter å ha verifisert med noen eksempler er naiv empirisme og regnes som utilstrekkelig form for bevis i matematikken (Balacheff, 1988). Tilsvarende funn fant González-Martin et al. (2013) i sin studie av reelle tall i videregående skole. Forskerne argumenterte for at elevene kan utvikle naiv empirisme til bevisføring når det ikke er poengtert i bøkene at det er en matematisk ugyldig bevisform. Adam og Essex (2013) beviste konstantteoremet ved hjelp av middelverdisetningen, slik jeg presenterte i Kapittel 4.2. Konsekvensen av lærebokforfatterne sitt valg er at den matematiske kompleksiteten blir redusert. Tatt det i betraktning skal lærebøkene i den videregående skolen gi en innføring i et bredt spekter av matematiske temaer, slik at man ikke har mulighet til å gå i dybden på alle teoremene tilsvarende Adam og Essex (2013). Middelverdisetningen er heller ikke inkludert i noen av lærebøkene (Borgan et al., 2022; Kalvø et al., 2022; Oldervoll et al., 2022). For at kompetansemålet «Analysere og forstå matematiske bevis, forklare de bærende ideene i et matematisk bevis og utvikle egne bevis» (Utdanningsdirektoratet, 2021) likevel skal være oppfylt, vil det av den grunn være viktig at elevene er klar over at sammenhenger i matematikk ikke kan bevises ved hjelp av eksempler. Det er viktig å presisere som matematikklærer, men det bør kommenteres overordnet i lærebøkene for videregående skole.

Forenkling i symbolbruk

Et viktig poeng fra den prakseologiske referansemodellen i Kapittel 4 er at øvre integrasjonsgrense og integrasjonsvariabel i arealfunksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ må ha forskjellig variabelnavn. Som en konsekvens av en didaktisk transposisjonsprosess har Kalvø et al. (2022) i *Mønster R2* benyttet én variabel. En didaktisk transposisjon i den hensikt å spare elevene for to variabler, men det blir forvirrende at en størrelse har ulike betydninger i det samme matematiske uttrykket. Videre, i en geometrisk tolkning av arealfunksjonen skal abscisseaksen ha samme variabelnavn som integrasjonsvariabelen. Figur 4.5 fra den prakseologiske referansemodellen illustrerer dette. Av den grunn er det forvirrende at *Mønster R2* og *Matematikk R2* benytter x som variabelnavn på abscisseaksen når det også er valgt som øvre integrasjonsgrense. Imidlertid er det ikke er helt opplagt når det gjelder variabelnavn på abscisseaksen. Lindstrøm (2016) gir både et uformelt og formelt bevis av AFT. Det uformelle beviset til Lindstrøm (2016, s. 412–413) tilsvarer *Matematikk R2* sitt bevis med tilsvarende figur (Figur 5.8) som jeg presenterte i Kapittel 5.3.3. Altså, universitetsboken fra Lindstrøm (2016) har benyttet x som variabelnavn på abscisseaksen, til tross for at han beskriver funksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ med t som integrasjonsvariabel. Av den grunn har lærebokforfattere for ulike universitetsbøkene tatt ulike valg. I min referansemodell for den geometriske tolkningen av $F(x)$ tok jeg utgangspunkt i Briggs og Cochran (2011), Neuhauser (2011) og Lorentzen et al. (2011), slik at den didaktiske transposisjonsanalysen når det gjelder den geometriske tolkningen av $F(x)$ vil være avhengig av det.

Videre har ingen av lærebøkene i den videregående skolen inkludert likningen $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ som benyttes til å beskrive Del 1 av AFT. Forenklingen gjør at jeg vil diskutere om det blir vanskeligere for elevene å forstå at integrasjon og derivasjon er inverse prosesser. På en side er likningen unødvendig hvis lærebøkene presenterer $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ og $F'(x) = f(x)$. Setter man inn uttrykket for $F(x)$ inn i likningen $F'(x) = f(x)$ står man igjen med samme uttrykket som er presentert i Adam og Essex (2013), men da ved notasjonen $F'(x)$ i stede for $\frac{d}{dx}F(x)$. Det vil si $F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$, som tilsvarer $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. På den andre siden gir likningen $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ en tydelig og direkte beskrivelse, uten behov for manipulering, at dersom du integrerer $f(x)$ og deriverer resultatet står du igjen med den opprinnelige funksjonen $f(x)$. Ifølge Bressoud (2011) definerer ofte studenter det bestemte integralet som differansen mellom integrasjonsgrensene evaluert for den antideriverte. Av den grunn er det ekstra viktig at elevene forstår at integrasjon og derivasjon er inverse operasjoner på grunn av AFT. I *Mønster R2* presenterte heller ikke forfatterne likningen $A(x) = \int_0^x f(t)dt$, slik at elevene ikke har forutsetning for å sette uttrykket inn i likningen $A'(x) = f(x)$. Forenkling i symbolbruk fører derfor til at det blir vanskeligere for elevene å forstå alle egenskaper som teoremet skal fastslå. Jeg vil diskutere AFT med tilhørende bevis ytterligere i Kapittel 6.1.3, men først skal jeg diskutere ulike prakseologier av det bestemte integralet.

6.1.2 Ulike prakseologier av det bestemte integralet

De ulike prakseologiene for det bestemte integralet for å løse en oppgave av type T_1 i faget Matematikk R2 er videre et eksempel på den didaktiske transposisjonen fra universitetetsversjonen, fordi kunnskapen presenteres på tre ulike måter. Samtidig gjenspeiler det hvordan skala for didaktisk selvbestemmelse kommer til uttrykk. I kompetansemålet «Gjøre rede for integral som en grenseverdi av en følge av summer, og tolke betydningen av denne grenseverdien i ulike situasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2021) er det ikke spesifisert en spesifikk trappesum. Lærebokforfatterne har autonomi til å velge den prakseologien som anses å være mest hensiktsmessig. Lærebokforfatterne befinner seg i samfunnet ved skala for didaktisk medbestemmelse. Valg som blir tatt av lærebokforfatterne påvirker lærerne i skolen, som videre påvirker pedagogikken og det didaktiske systemet i ett klasserom. Undersøkelsen til Gilje et al. (2016) viste at 80% av matematikklærere hovedsakelig baserte seg på papirbaserte læremidler. Ekstra stor påvirkningskraft har lærebokforfatterne når læreboken er tiltenkt et spesielt fag. Det er i utgangspunktet ikke noe problem at det er ulike prakseologier av det bestemte integralet. Prinsippet bak de ulike prakseologiene er det samme som ble presentert i universitetsversjonen, altså at det bestemte integralet er definert som en grenseverdi av en sum. Fordelen ved at man ikke har definert en spesifikk trappesum i kompetansemålet er at man kan diskutere med elevene fordeler og ulemper med ulike varianter for det bestemte integralet. Eksempelvis hvis man skal bruke de ulike prakseologiene til å tilnærme det bestemte integralet kan man diskutere tidseffektivitet og nøyaktighet for den enkelte teknikk.

Det er derimot problematisk når en lærebok blander ulike prakseologier for definisjonen av det bestemte integralet. Som beskrevet i Kapittel 2.2 utgjør de fire komponentene $[T, \tau, \theta, \Theta]$ en prakseologi og er en modell av kunnskapen (Chevallard, 2019). *Mønster R2* benyttet en vilkårlig trappesum i teknikken, men nedre og øvre trappesum i teknologien: det gir utgangspunkt for to ulike prakseologier. Av den grunn blir prakseologien for grenseverdi av en sum ufullstendig, fordi teknikk og teknologi ikke supplerer hverandre. Når læreboken samtidig bruker benevnelsene øvre og nedre trappesum for det som i utgangspunktet er venstre og høyretilnærming, blir fremstillingen desto mer forvirrende. Forvirringen kan være et argument for at læreplanen bør spesifisere trappesum i kompetansemålet, men det vil være en betingelse som begrenser både lærebokforfatterne og lærerne sin autonomi unødig. Som lærebokforfatter og lærer er det derfor viktig å være bevisst på at det skal være korrespondanse mellom teknikk og teknologi for en kunnskap. Det gjelder all matematikk, men her ved det bestemte integralet.

6.1.3 Analysens fundamentalteorem

Mønster R2 benytter arealbegrepet i sin fremstilling av AFT, noe som bidrar til å gjøre teoremet mer konkret. Et argument for den konkrete fremstillingen er at elevene lettere kan se sammenhengen til tilnærming av det bestemte integralet ved hjelp av trappesum. De to andre lærebøkene for videregående skole og universitetsversjonen benytter imidlertid en abstrakt fremstilling. Bressoud (2011) poengterte at en mindre presis, men mer intuitiv versjon av AFT kan være mer hensiktsmessig for elever som lærer AFT for første gang. Som nevnt i Kapittel 6.1.1 er det likevel problematisk i *Mønster R2* når arealfunksjonen er uttrykt gjennom ren tekst og én felles variabel for øvre integrasjonsgrense og integrasjonsvariabel. Et forslag kan være å beholde den konkrete fremstillingen, men inkludere integrasjonstegnet: «La $A(x)$ være arealet under grafen fra 0 til x, gitt ved arealfunksjonen $A(x) = \int_0^x f(t)dt$». Forfatterne må i så fall forklare hvorfor det er benyttet to ulike variabler, men som nevnt i den prakseologiske referansemodellen i Kapittel 4.3 er det en viktig egenskap for arealfunksjonen.

Del 1 av AFT: Fra et stringent algebraisk bevis til en geometrisk tilnærming

I beviset for Del 1 av AFT, som benyttes i teknologien av en oppgave av type T_3, er det i lærebøkene for videregående skole brukt to geometriske bevis, men den tilsvarende ideen. Den geometriske tilnærmingen illustrerer godt visuelt hvorfor teoremet stemmer, og er mer intuitiv enn beviset i universitetsversjonen. Tilsvarende funn fant Kristianslund (2022) i sin analyse av differensialregning i *Mønster: Matematikk R1* (Kalvø et al., 2021), hvor noe av den matematiske presiseringen og kompleksiteten var tatt bort til fordel for enkelhet og det visuelle. Den geometriske tilnærmingen bidrar til at kunnskapen er mer tilgjengelig og meningsfull for flere elever. Til tross for det er likevel ikke bevisene generelt gyldig, og av den grunn er det to former for bevisideer, slik Lorentzen et al. (2003) benevner et uformelt bevis.

Mønster R2 og *Sinus R2* bruker antagelser i beviset for Del 1 av AFT, men uten å nevne hvorfor eller hvilke konsekvenser det har for utforming av beviset. Når elevene selv skal utforme bevis, slik det er beskrevet i et av kompetansemålene (Utdanningsdirektoratet, 2021), trenger eleven å vite hvilke antagelser som er nødvendig. Det vil derfor være betydningsfullt hvis lærebokforfatterne kan forklare hvorfor man bruker antagelser. At logosblokka skal være til stede i faget Matematikk R2 kommer som tidligere nevnt fram i kjerneelementet resonnering og argumentasjon, hvor eleven skal begrunne og bevise gyldigheten til framgangsmåter, resonnementer og løsninger (Utdanningsdirektoratet, 2021). Når eleven skal bevise gyldigheten til løsninger er det viktig at eleven vet under hvilke antagelser resultatene er gyldig.

I motsetning til lærebøkene i videregående skole benytter Adam og Essex (2013) definisjonen av den deriverte og middelverdisetningen for integraler i sitt bevis for Del 1 av AFT. Det vil være fornuftig å diskutere om faget Matematikk R2 også burde inkludere sistnevnte setning i pensum, slik at man kan bevise AFT på tilsvarende måte som Adam og Essex (2013). Middelverdisetningen for integraler uttrykker at dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$ eksisterer det et punkt c i $[a, b]$ slik at $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$ (Adam & Essex, 2013). Hvis man skal inkludere setningen blir likevel spørsmålet om teoremet må bevises, slik at elevene får en større forståelse for hva setningen betyr. For eksempel er et resultat fra middelverdisetningen for integraler at $f(c)$ er gjennomsnittsverdien av $f(x)$ på $[a, b]$. Adam og Essex (2013) beviser teoremet ved hjelp av ekstremalverdisetningen og skjæringssetningen. Overgangen til universitetet blir mindre da både middelverdisetningen, ekstremalverdisetningen og skjæringssetningen er kjernestoff i klassiske innføringskurs i matematisk analyse (Lindstrøm, 2016). Likevel er det viktig å skille faget Matematikk R2 fra et innføringskurs i matematisk analyse, fordi det skal gi innføring i et bredt spekter av matematiske temaer

(Utdanningsdirektoratet, 2021). Den geometriske ideen for bevis av AFT i lærebøkene for videregående skole kan imidlertid bli sett på som en gradvis innføring av bevis, slik at det blir enklere å forstå det formelle beviset på universitetet. Hanna og de Villiers (2012) fra ICMI poengterte at bevis burde forekomme gradvis, men fra tidlig skolealder. Bevis skal bidra til en dypere matematisk forståelse for elevene. Det er viktig at man poengterer for elevene at bevis forklarer at en påstand er sann, men ikke minst *hvorfor* den er sann (Hanna & de Villiers, 2012). Imidlertid er en mulighet at lærebokforfatterne poengterer at det er et forenklet bevis, men en mer presis versjon vil bli presentert på et høyere matematisk nivå.

Fokus på teknikken for Del 2 av AFT

I oppsummeringsdelen av integrasjonskapitlene i lærebøkene for videregående skole er det kun Del 2 fra AFT som blir nevnt. Altså, $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Lærebokforfatterne har poengtert at oppsummeringen inneholder viktige regler og metoder fra kapitlene, som indikerer at de anser teknikken fra evalueringsdelen som viktig. Et tilsvarende funn fant Strømskag og Chevallard (2023) som undersøkte konkavitet av funksjoner, hvor *Mønster: Matematikk R1* (Kalvø et al., 2022) fokuserte på teknikken som ble benyttet for å finne hvilke verdier på intervallet hvor funksjonen var enten konveks eller konkav. I motsetning til universitetsboken var logosblokken for dette tema svært redusert. Tilsvarende i min studie er det benyttet varierende teknologi for å utlede evalueringsdelen i lærebøkene for den videregående skolen.

Som nevnt tidligere er ikke Del 2 navngitt som en del av AFT i de norske lærebøkene for videregående skole, men som et resultat av Del 1. I det tyske læreverket *Lambacher Schweizer* (Brandt et al., 2015) er det motsatt, at evalueringsdelen utgjør deres versjon av AFT.[10] Ifølge Stark (2011) er *Lambacher Schweizer* det ledende læreverket i matematikk for den videregående skolen (Gymnasium) i Tyskland, som er kjent for sin omfattende og klare tilnærming til det tyske matematikkpensumet (se også «Lambacher Schweizer», 2011). Ulikhetene er et resultat av ulike transposisjonsprosesser som kan være påvirket av læreplanen i det landet man produserer lærebok for, lærebokforfattere sitt ønske om behandling av kunnskapen eller andre betingelser og begrensninger som påvirker fremstillingen i lærebøkene.

[10] Oversettelser fra den tyske læreboken er gjort ved hjelp av DeepL Translator.

Et glimt av det nye paradigmet som innebærer å stille spørsmål

I *Sinus R2* er det interessant at elevene skal ferdigstille teknologien for AFT i form av utforsk-oppgaver. Aktiviteten åpner opp for at elevene får stille spørsmål i forkant av at AFT blir presentert som en læresetning. Det er et steg i retning av det nye paradigmet til Chevallard (2015), som innebærer å stille spørsmål til verden omkring oss. Samtidig ser man et eksempel på hvordan LK20 kommer til uttrykk, hvor det er presisert i opplæringens verdigrunnlag at elevene skal utfolde skaperglede, engasjement og utforskertrang. Elevenes evne til å stille spørsmål, utforske og eksperimentere er viktig for dybdelæring (Kunnskapsdepartementet, 2017). LK20 gjenspeiler her enkelte prinsipp som Chevallard (2015) ønsker at det nye paradigmet i skolen skal være, ved å utforske og stille spørsmål. *Sinus R2* skiller seg likevel fra det nye paradigmet ved at kunnskapen er forhåndsbestemt, og som påpekt i analysen følger oppgavene en spesifikk oppskrift, slik at det i utgangspunkt er én måte å svare på oppgavene. Kompetansemålene utgjør betingelser som spesifiserer den målkunnskapen som lærebøkene skal dekke, og dette gjør det utfordrende å gjennomføre den utforskningen som Chevallard (2015) argumenterer for. Det nye paradigmet er likevel en grunntanke som kan bli synlig gjennom læreren sin pedagogiske praksis ved å introdusere undersøkelsesbaserte oppgaver som oppmuntrer til å stille spørsmål.

6.2 Den store oppdagelsen med analysens fundamentalteorem

Forfatterne i de ulike lærebøkene i den videregående skolen har valgt å presentere kunnskapen om bestemt integral, ubestemt integral og analysens fundamentalteorem i ulik rekkefølge. Lærebøkene *Sinus R2* og *Matematikk R2* har kapittelet om ubestemt integral før AFT: Fordelen med denne rekkefølgen er at elevene har kunnskap om antiderivasjon i sitt møte med Del 1 av AFT. Av den grunn har man forutsetning for å forstå at $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ er en antiderivert når $F'(x) = f(x)$. At elevene vet denne sammenhengen, er nødvendig for å forstå poenget med Del 1. Det fører også til at elevene lettere kan løse integrasjonsoppgaver ved Del 2, fordi man allerede kan utføre antiderivasjon. Av den grunn er det overraskende at forfatterne i *Mønster R2* har valgt å presentere sitt kapittel om ubestemt integral *etter* at AFT er blitt presentert; da har ikke elevene den nødvendige forkunnskapen.

Det kan være at Kalvø et al. (2022) i *Mønster R2* har valgt rekkefølgen på kapitlene for å være sikker på at elevene bruker korrekt definisjon av det bestemte integralet i møte med AFT. Hvis man introduserer det ubestemte integralet *før* definisjonen av det bestemte integralet lærer elevene at ubestemt integrasjon er det samme som antiderivasjon. Utfordringen oppstår dersom elevene videre bruker at definisjonen til det bestemte integralet er differansen mellom integrasjonsgrensene evaluert for den antideriverte. Som nevnt i Kapittel 4.5 er det problematisk å definere integralet på denne måten i møte med AFT, fordi teoremet mister all mening (Bressoud, 2011; Jablonka & Klisinska, 2011). Konsekvensen kan være at elevene mister den store oppdagelsen med AFT, fordi teoremet virker trivielt. Det er ganske bemerkelsesverdig når det bestemte integralet av f er definert som grenseverdien for en sum, så kan vi finne det bestemte integralet ved å finne en antiderivert (*den store overraskelsen*) F til funksjonen f og regne ut differansen av funksjonsverdiene til den antideriverte, $F(b)-F(a)$ (Adam & Essex, 2013). Den store oppdagelsen er viktig for at elevene forstår at matematiske resultater ikke er tilfeldig, i henhold til kjerneelementet om resonnering og argumentasjon (Utdanningsdirektoratet, 2021). Læreboken *Sinus R2* introduserer det ubestemte integralet før det bestemte integralet, og bruker antiderivasjon i flere kapitler før boken definerer det bestemte integralet. Det kan føre til at elevene blir vant med at det finnes en lettere versjon å integrere enn tilnærming ved bruk av trappesummer. Bressoud (2011) påpekte at det er viktig at elevene får arbeidet med tilnærming av det bestemte integralet med trappesum for at eleven skal sette pris på og forstå meningen med AFT. Basert på dette kapittelet vil en naturlig rekkefølge på kapitlene være det bestemte integralet, det ubestemte integralet og avslutningsvis AFT slik læreboken *Matematikk R2* har det.

6.3 Hensikt bak det teoretiske og analytiske rammeverket

Forskningsdesignet til denne studien er bygd på at den antropologiske teorien for det didaktiske (ATD) er valgt som teoretisk og analytisk rammeverk. I dette kapittelet vil jeg reflektere kort over rammeverket slik jeg har opplevd det. ATD er et omfattende rammeverk som jeg måtte studere grundig, men som har fungert som en forskningsveiledning bak denne studien. Rammeverket har sin egen terminologi hvor det innføres svært mange begreper som kan virke overveldende. Det analytiske verktøyet med prakseologi gjennom den prakseologiske analysen har bidratt til at jeg har fått kartlagt hvordan lærebokforfatterne ønsker at man utfører oppgaver ved hjelp av visse teknikker og deres tilhørende forklaring for teknikken. Det har vært hensiktsmessig for å få en strukturert tilnærming til datamaterialet som jeg har benyttet i den didaktiske transposisjonsanalysen. Videre har teorien om betingelser, begrensninger og didaktisk paradigme vært nyttig for å tolke og forklare enkelte av resultatene.

Den prakseologiske referansemodellen har vært viktig som sammenlikningsgrunnlag for den didaktiske transposisjonsanalysen, men for min egen del har det vært viktig for å få en dypere forståelse for kunnskapen jeg undersøker. Jeg har blitt tryggere på matematisk analyse, og spesielt innenfor bevisføring. Samtidig gir lærebokforfattere for universitetsbøkene naturlig nok ikke eksakt samme fremstilling, og forfatterne er heller ikke nødvendigvis enig om alt. Universitetsboken fra Adam og Essex (2013) har vært hovedkilden for den akademiske kunnskapen, men jeg var nødt til å studere og støtte meg på flere universitetsbøker for å være sikker på at den prakseologiske referansemodellen gir en matematisk korrekt fremstilling.

Til tross for at det teoretiske og analytiske rammeverket har fungert som en forskningsveiledning for denne studien vil jeg samtidig påpeke at et annet rammeverk naturligvis kan gi andre perspektiver på et tilsvarende forskningsspørsmål. I det neste delkapittelet vil jeg påpeke begrensninger for studien, som kan føre til videre forskning.

6.4 Begrensninger og videre forskning

En begrensning i min studie er at jeg kun har analysert et utvalg av kompetansemålene som omhandler integrasjon i faget Matematikk R2. Integrasjon faller innenfor fem av tolv kompetansemål hvor to av dem er representert i denne masteroppgaven. Resterende kompetansemål er «å utvikle algoritmer for å beregne integraler numerisk, og bruke programmering til å utføre algoritmene», «å anvende derivasjon og integrasjon til å analysere og tolke egne matematiske modeller av reelle datasett» og «å analysere og tolke ulike funksjoner ved å bruke derivasjon og integrasjon, og anvende integrasjon til å beregne ulike mål av omdreiningslegemer» (Utdanningsdirektoratet, 2021). Et videre forskningsprosjekt kan være å studere hvordan et eller flere av disse kompetansemålene er behandlet i lærebøkene.

Videre er det en begrensning at jeg kun har studert den første transposisjonsprosessen mellom akademisk kunnskap til kunnskap som skal undervises i videregående skole, i Figur 2.1. Mulig oppfølgingsstudie av oppgaven kan være å studere resterende didaktiske transposisjonsprosesser for den kunnskapen jeg har undersøkt. Det vil si overgangen fra kunnskap som skal undervises til kunnskap som undervises på skolen, og videre til kunnskap som blir lært av eleven. Det ville vært interessant å se hvilken kunnskap elevene i videregående skole sitter igjen med om analysens fundamentalteorem etter den relative korte introduksjonen.

Kapittel 7

Konklusjon

I dette kapittelet vil jeg presentere en konkluderende kommentar som inneholder et kortfattet svar på forskningsspørsmålet i Kapittel 7.1, og didaktiske implikasjoner for meg som matematikklærer og for matematikkundervisning generelt i Kapittel 7.2.

7.1 Svar på forskningsspørsmålet

Som følge av det nye Læreplanverket for Kunnskapsløftet i 2020 fikk faget Matematikk R2 nye kompetansemål. Analysens fundamentalteorem, som uttrykker at derivasjon og integrasjon er inverse regningsarter, fikk tildelt et eget kompetansemål. Basert på den antropologiske teorien for det didaktiske (ATD) har jeg undersøkt hvordan denne kunnskapen er tilpasset videregående skole. Forskningsspørsmålet jeg har forsøkt å svare på i den sammenheng er:

Hvilke didaktiske transposisjoner har analysens fundamentalteorem gjennomgått fra en universitetsversjon til en versjon som skal undervises i videregående skole?

Studien er en kvalitativ dokumentanalyse, hvor jeg har gjennomført en didaktisk transposisjonsanalyse ved hjelp av prakseologiske analyser av kunnskapen. Utgangspunkt for mitt svar er tre lærebøker i den videregående skolen i faget Matematikk R2 og hovedsakelig en lærebok for universitetet tiltenkt matematisk analyse.

Til tross for at LK20 har definert én læreplan med mål og innhold for faget Matematikk R2, viser det seg i ulike former i de tre lærebøkene jeg har studert. Det skyldes den didaktiske transposisjonsprosessen som kunnskapen har gjennomgått. I forhold til universitetsversjonen har lærebøkene i den videregående skolen fjernet den matematiske kompleksiteten på flere områder. Lærebøkene benytter kjente teorem i utledningen av kunnskapen, men uten å gjøre elevene bevisst på det. Det reduserer matematikkens fagterminologi og formelle oppbygning. Videre benyttes det komprimerte versjoner av AFT, men forenklingen av symbolbruken kan gjøre det vanskelig for eleven å forstå alle egenskaper som teoremet skal fastslå. Når det gjelder beviset av AFT bruker lærebokforfatterne i den videregående skolen en geometrisk tilnærmelse som bygger på elevene sin intuisjon, fremfor et stringent algebraisk bevis fra universitetetsversjonen. Et resultat av det visuelle beviset er at den matematiske kunnskapen er mer tilgjengelig og meningsfull, fordi elevene har ikke den nødvendig matematiske forkunnskapen for å forstå det algebraiske beviset som presenteres i universitetsversjonen. Overordnet sett gir denne masteroppgaven et tydelig eksempel på at den akademiske kunnskapen på universitet følger en formell og abstrakt oppbygning. Dette i motsetning til kunnskap som skal undervises i den videregående skolen hvor forfatterne i lærebøkene spiller på elevene sin intuisjon. Det er trolig grunnen til at mange studenter, inkludert meg selv, synes overgangen fra skolematematikk til universitetsmatematikk er vanskelig.

7.2 Didaktiske implikasjoner og profesjonsrelevans

Først og fremst har studien gitt meg noen tanker for hvordan jeg selv burde legge opp undervisningen for den kunnskapen jeg har undersøkt. Spesielt med tanke på hvordan jeg burde presentere analysens fundamentalteorem, bestemt og ubestemt integral, men også at rekkefølgen på temaene har stor betydning. Jeg kommer til å ta med meg analytiske verktøy fra ATD inn i mitt arbeid som lærer, slik at jeg har mulighet til å undersøke all kunnskap som elevene skal lære. Da blir det enklere å gjennomføre individuelle tilpasninger for elevene.

Til tross for at lærebøkene er hyppig brukt verktøy for lærere, viser min studie at man ikke kan betrakte læremidlene som en fasit for kompetansemålene. Dette har overføringsverdi til matematikkundervisning generelt, fordi det finnes ingen kvalitetskontroll som sikrer at læremidlene følger læreplanen i Norge. Av den grunn vil det være viktig som lærer å studere kunnskapen, slik at undervisningen som blir gjennomført er i henhold til læreplanen. Samtidig er det flere måter å undervise kunnskapen, og det er ikke nødvendigvis én metode som er best.

Videre er denne studien av relevans for forfattere av lærebøker og for dem som skal revidere eksisterende læreverk. Spesielt med tanke på hvordan kunnskapen kan behandles, men i tillegg har jeg poengtert enkelte steder hvor fremstillingen ikke er korrekt matematisk basert på den akademiske kunnskapen på universitetet.

Samlet sett bidrar denne studien til en dypere forståelse av den didaktiske transposisjonen innenfor matematisk analyse mellom akademisk kunnskap og kunnskap som skal undervises i den videregående skolen. Studien legger et grunnlag for diskusjon av hvordan analysens fundamentalteorem, bestemt integral og ubestemt integral bør implementeres i den videregående skolen.

Referanser

Adams, R. A. & Essex, C. (2013). *Calculus: A complete course* (8. utg.). Pearson.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216–230). Hodder and Stoughton.

Borge, I. C., Engeseth, J., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T. & Vie, S. M. (2022). *Matematikk R2* (4. utg.). Aschehoug.

Bosch, M. (2018). Study and research paths: A model for inquiry. *I Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Rio de Janeiro 2018* (s. 4033–4054). https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210

Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the anthropological theory of the didactic (ATD). I A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Red.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (s. 67–83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_5

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal*, *9*(2), 27–40. https://doi.org/10.3316/QRJ0902027

Brandt, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R. & Spielmans, H. (2015). *Lambacher Schweizer Mathematik Qualifikationsphase. Leistungskurs/Grundkurs Nordrhein-Westfalen*. Klett.

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus. *American Mathematical Monthly*, *118*(2), 99–115. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

Briggs, W. L. & Cochran, L. (2011). *Calculus*. Pearson.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. I S.J. Cho (Red.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 173–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12(1), 71–114. https://www.jasme.jp/hjme/download/05_Yves%20Chevallard.pdf

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2020a). Anthropological theory of the didactic (ATD). I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 53–61). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100034

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2020b). Didactic transposition in mathematics education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 214–218). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_48

Edwards. C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. Springer.

Edwards, C. H. & Penney, D. E. (2002). *Calculus* (6. utg.). Prentice Hall.

Forskrift for godkjenning av lærebøker. (1984). *Forskrift for godkjenning av lærebøker for grunnskole og videregående skole.* (FOR-1984-01-13-3520). Lovdata. https://lovdata.no/forskrift/1984-01-13-3520

Forskrift til opplæringslova. (2006). *Forskrift til opplæringslova*. (FOR-2006-06-23-724). Lovdata. https://lovdata.no/LTI/forskrift/2006-06-23-724/§17-2

Gilje, Ø. (2021). På nye veier: Læremidler og digitale verktøy fra kunnskapsløftet til fagfornyelsen. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift*, *105*, 227–241.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., Knain E., Mørch, A., Naalsund, M. & Skarpaas, K. G. (2016). *Med ARK&APP: Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer.* UiO.

González-Martín, A.S., Giraldo, V. & Souto, A.M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: An institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 230–248. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.803778

Griffiths, H. B. & Hilton, P. J. (1970). *A comprehensive textbook of classical mathematics*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6321-0

Hanna, G. & de Villiers, M. (Red). (2012). *Proof and proving in mathematics: The 19th ICMI study*. Springer.

Haugseth, J. F. (2021). Samfunn. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/.versionview/1874684

Heir, O., Borge I. C., Engeseth, J., Haug, H. & Moe, H. (2016). *Matematikk R2* (2. utg.) Aschehoug.

Hovdensak, S. S. & Stray, J. (2015). *Hva skjer med skolen? En kunnskapssosiologisk analyse av norsk utdanningspolitikk fra 1990-tallet og frem til i dag.* Fagbokforlaget.

Jablonka, E. & Klisinska, A. (2011). A note on the institutionalization of mathematical knowledge or, "What was and is the Fundamental Theorem of Calculus, really?". I E. B. Sriraman (*Red*), *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education.*

The Montana Mathematics Enthusiast: Monograph Series in Mathematics Education (s. 3–40). Information Age Publishing.

Kalvø, T., Opdahl, J.C.L., Skrindo, K. & Weider, Ø.J. (2021). *Mønster: Matematikk R1*. Gyldendal.

Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Skrindo, K. & Weider, Ø. J. (2022). *Mønster: Matematikk R2*. Gyldendal.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Kristianslund, A. K. (2022). *En prakseologisk analyse av resultatet av didaktiske transposisjonsprosesser innenfor differensialregning i matematikk R1*. [Masteroppgave, Norges teknisk-naturvitenskapelig universitet]. NTNU Open. https://hdl.handle.net/11250/3042505

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. *Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.* https://www.regjeringen.no/contentassets/53d21ea2bc3a4202b86b83cfe82da93e/overordnet-del---verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen.pdf

Lambacher Schweizer. (2021, 7. november). I *Wikipedia*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Lambacher_Schweizer&oldid=217074422

Lindstrøm, T. (2016). *Kalkulus* (4. utg). Universitetsforlaget.

Lorentzen, L. Hole, A. & Lindstrøm, T. (2003). *Kalkulus: Med én og flere variable*. Universitetsforlaget

MA1101. (u.å.). MA1101 – Grunnkurs i analyse 1. https://www.ntnu.no/studier/emner/MA1101/2022/1#tab=omEmnet

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* (5. utg.). De nasjonale forskningsetiske komiteene. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Neuhauser, C. (2011). *Calculus for biology and medicine* (3. utg.). Pearson.

NOU 1995: 18. *(1995). Ny lovgivning om opplæring – «... og for øvrig kan man gjøre som man vil»*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-1995-18/id140365/

Oldervoll, T., Svorstøl, O. & Jacobsen, R. B. (2022). *Sinus R2: Matematikk* (4. utg.). Cappelen Damm.

Opplæringsloven. (1998). *Lov om grunnskolen og den videregående opplæringen* (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61

Robson, C. & McCartan, K. (2016). *Real world research: A resource for users of social research methods in applied settings* (4. utg.). Wiley.

Stark, J. (2011). *65 Jahre Lambacher Schweizer: Ein Klassiker – immer auf der Höhe der Zeit*. https://www.klett.de/sixcms/media.php/185/Festschrift_LS65_Internet.pdf

Slettum, M. (2022). *Undervisning av analysens fundamentalteorem i matematikkfaget R2* [Upublisert rapport fra en studie i emnet RFEL3100], Norges teknisk-naturvitenskapelig universitet, Trondheim.

Strømskag, H. & Chevallard, Y. (2023). Didactic transposition of concavity of functions: From scholarly knowledge to mathematical knowledge to be taught in school. I M. Trigueros, B. Barquero, R. Hochmuth, & J. Peters (Red.), *Proceedings of the Fourth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (s. 120–129). University of Hannover and INDRUM. https://hal.science/INDRUM2022/hal-04026484v1

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode* (3. utg.). Fagbokforlaget.

Thompson, P.W. & Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM Mathematics Education 53*, 507–519. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01270-1

Topphol, V. & Strømskag, H. (2022). *An analysis of a first-year university student's construction of a praxeology of integration tasks* [Manuskript innsendt for publisering]. Institutt for matematiske fag, NTNU.

Utdanningsdirektoratet. (2019a). Dybdelæring. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2019b). *Hva er kjernelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01)*. Fastsatt ved forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/MAT09-01

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R). (MAT03-02)*. Fastsatt ved forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat03-02

Utdanningsdirektoratet. (2022). *Hvordan ta i bruk læreplanene?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hvordan-ta-i-bruk-lareplanen/

Utdanningsdirektoratet. (u.å.). *Hva er gode læremidler?* https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/laremidler/kvalitetskriterier-for-laremidler/

Winsløw, C. (2022). Mathematical analysis at university. I Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás, & N. Ruiz-Munzón (red.), *Advances in the anthropological theory of the didactic* (s. 295–305). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_23

NTNU

Kunnskap for en bedre verden