Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Frida Sogge Steimoeggen

Utforsking i algebra i 1T

En kvalitativ casestudie av lærerverks og læreres tolkninger av utforske-begrepet

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Frode Rønning
Juni 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Frida Sogge Steimoeggen

Utforsking i algebra i 1T

En kvalitativ casestudie av lærerverks og læreres tolkninger av utforske-begrepet

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Frode Rønning
Juni 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne masteroppgaven vil jeg se på tolkninger av begrepet 'utforske' slik det er brukt i Kunnskapsløftet 2020. Hovedfokuset for studien er utforsking i algebra i matematikk 1T. Dette blir undersøkt gjennom en analyse av utvalgte oppgaver fra et læreverk i 1T, intervjuer gjort av fire matematikklærere som jobber i videregående skole, og utvalgte oppgaver og undervisningsaktiviteter gitt av lærerne i sin matematikkundervisning. Dette danner grunnlaget for studien. Forskningsspørsmålet som skal besvares er: *Hvordan tolker læreverk og lærere begrepet 'utforske' i læreplanen, og hvordan implementerer lærere dette i sin undervisning i algebra i 1T?* Gjennom datainnsamling og analyse vil disse tolkningene av utforsking avklares, og de vil bli sett i lys av utvalgte kjerneelement fra læreplanen. Datamaterialet er analysert ved bruk av forhåndsbestemte koder. Kjerneelementene, som formulert i læreplanen, har vært sentralt i analyse- og diskusjonskapittelet. Resultatene fra analysen blir evaluert i lys av teori om utforsking og resonnering, forståelse og representasjoner i matematikk, og bevisnivåer. Funnene fra studien innebærer at jeg finner flere elementer fra kjerneelementet utforsking og problemløsning i tolkningene av utforsking i læreverket og hos lærerne, men i ulik grad. Disse funnene viser at utforsking i matematikk krever at elever har en relasjonell forståelse av matematiske begrep. Dette fordrer at elever kan oversette mellom semiotiske representasjoner, og utforsking og problemløsning må ses i lys av resonnering og argumentasjon.

Nøkkelord: Utforsking, problemløsning, algebra i 1T, semiotiske representasjoner, relasjonell forståelse, kjerneelement, naiv empirisme, resonnering, argumentasjon, Kunnskapsløftet 2020.

Abstract

In this master's thesis the curriculum known as Kunnskapsløftet 2020 will be used to examine interpretations of the concept of exploration in textbooks, from teachers and through tasks and educational activities given by teachers to their students. The main focus of this study is the concept of exploration in 1T mathematics. This is examined through an analysis of selected tasks from a textbook in 1T, interviews conducted with four different teachers in mathematics, working with 11th grade students, and selected tasks and educational activities given by the teachers in their mathematics classes. This will form the foundation for this study. The research question that is to be answered is: *How do textbooks and teachers interpret the concept of exploration from the curriculum, and how is this implemented by the teachers in their teaching of algebra in 1T mathematics?* Through data collection and analysis these interpretations will be revealed and viewed considering selected central elements from the curriculum. The data is analysed using pre-determined codes. The core elements, as formulated in the curriculum, have been important in the analysis- and discussion chapters. The results from the analysis are evaluated using theory on exploration and reasoning, understanding and representations in mathematics, and levels of proof. The results from this study show that there are several factors from the central element exploration and problem-solving in the textbook and in the teachers' interpretations, but to varying degrees. These findings show that exploration in mathematics requires that students have a relational understanding of mathematical concepts. This requires that students can carry out conversions between semiotic representations, and that exploration and problem-solving must be viewed in light of reasoning and argumentation.

Keywords: exploration, problem solving, algebra in 1T, semiotic representations, relational understanding, core elements, naive empiricism, reasoning, argumentation, Kunnskapsløftet 2020.

Forord

Jeg ble født inn i en slekt med mange lærere som har viet livet sitt til klasserommet. Kanskje er det nettopp derfor jeg hele livet har sagt at jeg aldri skulle bli lærer, men så feil kan man ta. Denne masteroppgaven markerer slutten på den lange reisen min som startet august 2016 på lektorstudiet.

Jeg vil rette en stor takk til veilederen min, Frode Rønning, for mange gode samtaler, tilbakemeldinger og faglige diskusjoner. Du har vært ufattelig tålmodig og forståelsesfull. En stor takk rettes også til deltakerne i denne studien, de fire lærerne som stilte opp og delte sjenerøst av sin tid og sine undervisningsopplegg for at denne masteren skulle bli til. Jeg vil også takke min beste studievenninne, Marte, for å alltid være den personen som stiller opp når jeg trenger noen å jobbe, klage, gråte og le sammen med. Ingen er så god som deg til å bygge opp andre. Til min kjære Simon, du har vært en viktig støttespiller gjennom hele studiet. Du er den perfekte avbalanserte motpol til mitt nevrotiske selv. Vi har valgt lignende veier i livet, begge mattelektorer med en forkjærlighet for teoretisk matematikk. Du vil alltid være et forbilde for meg. Jeg vil også takke familien min – søstrene mine, Siren og Vår Hanna, min far Ola og ikke minst min mor Kirsti. Til søstrene mine, til tross for at dere sjelden skjønner bæret av hva jeg holder på med på studiet så har dere alltid støttende og oppmuntrende ord. Til pappa, uten deg tror jeg aldri at denne masteroppgaven hadde blitt til. Du er den sterkeste personen jeg kjenner, takk for all din kjærlighet og støtte.

Jeg ønsker å dedikere denne masteroppgaven til minnet om min mor. Denne oppgaven har vært vårt samarbeidsprosjekt. Før din bortgang snakket vi hver eneste dag på telefonen, du har lest gjennom hver eneste oppgave og eksamensbesvarelse jeg har skrevet, alltid med gode tilbakemeldinger, ris og ros. Jeg mimrer tilbake til all den tiden jeg tilbragte på rommet ditt på sykehuset, der jeg satt og skrev på oppgaven mens du kom med konstruktiv kritikk fra sykesengen, gjerne med et lurt smil. Masteroppgaven tok litt lenger tid enn forventet å fullføre, men det er ikke rart da jeg mistet den viktigste personen i livet mitt den 17. november 2022. Denne er til deg, mamma.

Trondheim, 5. juni 2023

Frida Sogge Steimoeggen

Innhold

1 Innledning

1.1 Formålet med studien

Den nye læreplanen, *Kunnskapsløftet 2020*, er nå ferdig innført i det norske skoleverket. Læreplanen ble utviklet gjennom det som er allment kjent som *fagfornyelsen*. Hensikten med å introdusere en ny læreplan var å oppdatere skolefagene for å imøtekomme endringene i samfunnet og forberede elevene på deres fremtid i det nye samfunnet. Et nytt og omdiskutert begrep som ble introdusert i Kunnskapsløftet 2020 er *utforske*-begrepet. Første gang begrepet ble nevnt var i kjerneelementene som skulle være et grunnlag for utviklingen av de nye læreplanene (Utdanningsdirektoratet, 2021). Det dukket opp i flere av kompetansemålene i matematikk 1T, som førte til både nysgjerrighet og usikkerhet hos undertegnede. Jeg ønsker med denne studien å undersøke utforske-begrepet slik det står i læreplanen, og følge tråden fra læreplan til læreverk til lærere, og se hvordan utforskingen fortolkes og forplantes gjennom disse trinnene.

1.2 Forskningsspørsmål

Jeg ønsker som nevnt å undersøke utforske-begrepets tolkninger i læreverk og blant lærere, og har utviklet følgende forskningsspørsmål: *Hvordan tolker læreverk og lærere begrepet 'utforske' i læreplanen, og hvordan implementerer lærere dette i sin undervisning i algebra i 1T?* Gjennom denne studien skal det altså komme frem hvilke tendenser og elementer læreres og læreverks tolkninger av utforske-begrepet består av, og hvordan lærerne planlegger å implementere disse tolkningene i praksis. Disse tolkningene skal danne grunnlaget for en videre diskusjon, sett opp mot læreplanen og spesielt kjerneelementene i matematikk 1T. Gjennom arbeidet med datamaterialet og læreplanen fant jeg at jeg hadde et behov for å diskutere sammenhengen mellom de to kjerneelementene utforsking og problemløsning, og resonnering og argumentasjon. I diskusjonskapittelet vil jeg dermed ta for meg et underspørsmål av forskningsspørsmålet, som er følgende: *Hvordan henger utforsking og problemløsning sammen med resonnering og argumentasjon i denne prosessen?*

1.3 Rammefaktorer for studien

I denne studien har jeg intervjuet fire lærere fordelt på tre videregående skoler. Lærerne er alle matematikklærere med ulik faglig bakgrunn og ulike erfaringer fra hvilke læreplaner de har jobbet under og hvor lenge de har jobbet som lærere. Jeg har, med læreplanen som grunnlag, undersøkt oppgaver fra et læreverk som brukes i matematikk 1T, i tillegg til oppgaver som lærerne som har deltatt i studien har brukt i sin algebraundervisning. Datamaterialet består altså av oppgaver fra læreverk, en oppgavebank fra lærerne, i tillegg til lydopptak og notater fra intervjuer jeg har foretatt med lærerne. Det har vært viktig å ha lærerne som en stor del av datamaterialet, da målet med studien er å følge tråden fra læreplan, gjennom læreverk og via lærere ut i klasserommet, og se på hvordan utforske-begrepet manifesterer seg i de ulike stegene.

1.4 Oppbygging av oppgaven

Først vil jeg si noe om konteksten oppgaven settes i, og belyse de relevante delene ved læreplanen i kapittel 2, sett i samsvar med teori om kompetanser i matematikk (Niss & Jensen, 2002). Det er spesielt viktig å si noe om kjerneelementene og implikasjonene de har for læreplanen og dens kompetansemål i 1T. Videre kommer et teorikapittel, som skal danne grunnlaget for analysen. I teorikapittelet tar jeg for meg kjerneelementene i lys av problembasert læring (Graaff & Kolmos, 2003; Hiebert et al., 1996), problemløsning i matematikk (Pólya, 1945) og *inquiry-based learning* (Artigue & Blomhøj, 2013; Maaß & Doorman, 2013), i tillegg til teori om forståelse (Skemp, 1978) og representasjoner (Duval, 2006; Janvier, 1987) i matematikk, samt litt om bevisnivåer (Balacheff, 1988). I metodekapittelet vil jeg presentere datamaterialet mitt, og hvordan innsamlingen har foregått. Det vil også bli redegjort for analysemetoden brukt for å analysere datamaterialet. Deretter kommer analysekapittelet, der vil alle resultatene presenteres og analyseres i lys av teorien fra teorikapittelet, for å belyse de ulike tolkningene av utforske-begrepet i læreplanen. Disse tolkningene vil diskuteres videre i diskusjonskapittelet. Til slutt vil jeg konkludere, og vurdere hvorvidt resultatene fra denne studien har videre implikasjoner for forskning, eventuelt hvilke implikasjoner. Jeg vil også si noe om hva disse resultatene kan ha å si for mitt fremtidige yrke som matematikklærer.

2 Bakgrunn og kontekst

I dette kapittelet vil jeg presentere bakgrunnen og konteksten som denne studien settes i. Først kommer en presentasjon av læreplanen og dens kjerneelementer, som skal legge grunnlaget for forskningen, samt teori om kompetanser i matematikk (Niss & Jensen, 2002). Deretter skal designet av studien presenteres.

2.1 Læreplanen og kjerneelementer

Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 ble gradvis innført i grunnskolen og i videregående opplæring over en treårsperiode fra skoleåret 2020-21 til skoleåret 2022-23. Læreplanen for 1T var blant de første læreplanene som ble innført i høsten 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2023). I læreplanen for 1T finnes blant annet kjerneelementene og kompetansemålene som elevene skal vurderes etter. Kjerneelementene i matematikk er overordnete prinsipper som gjelder for alle matematikkfagene gjennom hele skoleløpet. Kjerneelementene er *utforskning og problemløsning*¸ *modellering og anvendelser*, *resonnering og argumentasjon*, *representasjon og kommunikasjon*, *abstraksjon og generalisering* og *matematiske kunnskapsområder* (Kunnskapsdepartementet, 2019). I denne masteroppgaven vil jeg fokusere på kjerneelementene *utforskning og problemløsning* og *resonnering og argumentasjon*. Disse vil jeg diskutere nærmere i analysen av datamaterialet.

Kjerneelementene ble utviklet mellom høsten 2017 og våren 2018, og fastsatt av Kunnskapsdepartementet i juni 2018 (Utdanningsdirektoratet, 2021). Disse skulle fungere som grunnlag for den videre utviklingen av de nye læreplanene i LK20[1]. De seks kjerneelementene har flere paralleller til de matematiske kompetansene som Niss og Jensen (2002) beskriver i sitt temahefte *Kompetencer og matematiklæring*, åtte matematiske kompetanser som de mener bør være til inspirasjon for utviklingen av matematikkundervisningen (Niss & Jensen, 2002). Kompetansene til Niss og Jensen ble først beskrevet i 2002, og Kunnskapsdepartementet begynte sitt arbeid med kjerneelementene i 2017. Dette betyr at de åtte kompetansene beskrevet av Niss og Jensen var tilgjengelig lenge før arbeidet med kjerneelementene i LK20 ble satt i gang. Det er verdt å nevne at man kan observere flere likhetstrekk mellom slik de to ovennevnte kjerneelementene

[1] Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

blir beskrevet av Kunnskapsdepartementet og slik Niss og Jensen (2002) beskriver de to ovennevnte kompetansene. Jeg vil komme tilbake til dette i teorikapittelet.

Under viser jeg et direkte sitat fra kjerneelementet resonnering og argumentasjon, og utforsking og problemløsning i matematikk 1T.

> *Resonnering i matematikk T handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer. Det inneber at elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar. Elevane skal utforme eigne resonnement både for å forstå og for å løyse problem. Argumentasjon i matematikk T handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige.* (Kunnskapsdepartementet, 2019).
>
> *Utforsking i matematikk T handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing. Elevane skal leggje meir vekt på strategiane og framgangsmåtane enn på løysningane. Problemløysing i matematikk T handlar om at elevane utviklar ein metode for å løyse eit problem dei ikkje kjenner frå før. Algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategiar og framgangsmåtar for å løyse problem og inneber å bryte ned eit problem i delproblem som kan løysast systematisk. Vidare inneber det å vurdere om delproblema best kan løysast med eller utan digitale verktøy. Problemløysing handlar òg om å analysere og forme om kjende og ukjende problem, løyse dei og vurdere om løysingane er gyldige.* (Kunnskapsdepartementet, 2019).

De åtte kompetansene beskrevet av Niss og Jensen er delt inn i to grupper, «at spørge og svare i, med, om matematik» og «at omgås sprog og redskaber i matematik» (Niss & Jensen, 2002, s. 44).

Under den førstnevnte gruppen finnes det forfatterne kaller resonnementskompetanse, som beskrives som en todelt kompetanse. Den ene delen innebærer å kunne forstå og evaluere resonnement i et bevis, forstå hvorfor og hvordan det er ulikt fra andre typer matematiske argumentasjoner, samt å kunne identifisere kjennetegnene ved matematiske bevis. Den første delen er en viktig del av resonnementskompetansen, da man skal kunne identifisere matematiske begreper og forstå hva det er som utgjør essensen i et bevis. Den andre delen handler om hvordan man skal kunne resonnere og gi intuisjonsbaserte argumentasjoner. Disse argumentasjonene skal være med på å validere tankegangen sin, slik at det er å anse som et gyldig bevis (Niss & Jensen, 2002, s. 54). Problembehandlingskompetansen er en annen kompetanse under den samme gruppen. Denne kompetansen kan man dele i to hovedpunkter: å kunne gjenkjenne og formulere problemstillinger og å kunne løse problemer. Det påpekes at man kan være veldig flink til å gjenkjenne og formulere problemstillinger, uten å nødvendigvis kunne løse dem. Det er derfor en nødvendighet å oppfylle begge punktene. For å løse et matematisk problem, krever det naturlig nok en matematisk undersøkelse av problemet for å kunne finne en tilfredsstillende løsning. Dette står i kontrast til et matematisk spørsmål, som ikke nødvendigvis krever en undersøkelse for å finne løsningen. Formuleringen av et slikt matematisk problem er dermed et viktig poeng for å kunne anvende denne kompetansen. Et eksempel Niss og Jensen benytter seg av for å skille på spørsmål og problem, er å stille spørsmålet «hva betyr det når det står 0 i 406?». Dette er et matematisk spørsmål, men ikke et problem, da essensen i spørsmålet handler om begrepsforståelsen. Et matematisk problem vil altså være mer omfattende enn et matematisk spørsmål (Niss & Jensen, 2002, s. 49-50).

Det er en viss overlapp mellom disse to kompetansene. Elevene skal kunne forstå og sette seg inn i begreper de blir presentert for, men de skal også kunne utføre bevis eller forklare begrepene. Resonnementskompetansen innebærer det å kunne forstå og forklare problemet, mens problembehandlingskompetansen innebærer å gjenkjenne og å løse problemet. Dette er to sider av samme sak, der begge kompetansene krever at elevene skal både kunne forholde seg til noe noen andre har gjort, samt gjøre noe selv.

2.2 Design av studie og datakilder

Denne studien kan klassifiseres som en casestudie. En casestudie er et empirisk spørsmål med noen viktige karakteristikker: (1) Studien er avgrenset i tid og sted. (2) Det er et relevant og interessant tema som forskes på. (3) Forskeren har ingen innvirkning på hendelsen det forskes på. (4) Studien har flere datakilder (Bassey, 1999, s. 58).

Den første karakteristikken innebærer at studien er avgrenset i tid og sted. Innsamlingen av datamaterialet fra intervjuene foregikk over to uker. Her ønsket jeg å få et innblikk i læreres tolkning av utforsking i algebra i 1T, slik det står i læreplanen. Det var viktig at det ikke gikk for lang tid mellom intervjuene, slik at alle lærerne hadde et relativt likt utgangspunkt i henhold til hvor langt de var kommet i semesteret. Det var også viktig at alle lærerne hadde begynt med algebraundervisningen, slik at de hadde ferske referanser og tanker fra egne klasserom og planlegging. Den andre innebærer at temaet det forskes på er samtidig og interessant. Forskningsspørsmålet handler om læreverk og læreres tolkning av utforske-begrepet i læreplanen, som ble ferdigstilt i 2020. Det tredje aspektet ved en casestudie er at hendelsene det forskes på er uten innvirkning fra forskeren, altså i sin autentiske kontekst, med respekt for deltakerne. I denne casestudien har jeg kun vært opptatt av hvordan utforske-begrepet tolkes av andre, og tolket lærernes utsagn i intervjuene, uten egen intervensjon i deres tolkninger eller valg av oppgaver. Til slutt er en casestudie også avhengig av at man har flere datakilder. I denne studien er det i hovedsak tre datakilder: læreverk, lærerne (informantene), og oppgavene gitt av lærerne. Disse datakildene ses i kontekst av læreplanen, som kan anses som en fjerde datakilde. Det er ment å følge en rød tråd fra læreplan, gjennom læreverk, lærere og til slutt ut i klasserommet via oppgaver som lærere har gitt til sine elever. Alle datakildene vil presenteres i kapittel 4.1.

3 Teori

I dette kapittelet skal jeg presentere teori om utforsking og resonnering, forståelse, representasjoner og bevisnivåer i matematikk. Dette vil være utgangspunktet for analysen av resultatene, og vil ses i lys av bakgrunnen og konteksten for oppgaven, læreplanen og kjerneelementene.

3.1 Utforsking og resonnering i PBL og IBL

Tidligere har jeg beskrevet kjerneelementet *utforsking og problemløsning*. Det består av to deler, som kan beskrives som beslektede, men ikke nødvendigvis like. Den ene delen handler om utforsking, og den andre delen handler om problemløsning. I dette delkapittelet ønsker jeg dermed å belyse de to ulike sidene ved dette kjerneelementet, ved å ha en seksjon der jeg gjør rede for problembasert læring (PBL), og en seksjon om utforskende undervisning (IBL). Disse to er som de to delene i kjerneelementet, beslektede, men ikke like. Jeg kommer til å legge mest vekt på seksjonen som handler om utforskende undervisning, da det er den delen av kjerneelementet jeg ønsker å fokusere på videre i oppgaven.

Problembasert læring, eller PBL, blir beskrevet som en undervisningsmetode der elever blir presentert for et problem som de skal løse ved å bruke kunnskap de har lært og erfart innenfor et gitt tema. Problemet kan gjerne løses på ulike måter, og det er elevene som skal utforske disse måtene for å finne en god løsning. Når man problematiserer et tema, så åpner man opp for at elevene kan undres, stille spørsmål, lete etter løsninger og løse problemer. Hiebert et al. (1996) sier at dette betyr at matematikkundervisningen og dens innhold bør innledes med spørsmål og problem (Hiebert et al., 1996, s. 12). Her er det for øvrig viktig å skille på formuleringen *problem*, kontra et *spørsmål*. Med et problem menes det at det ikke foreligger en gitt metode for hvordan det skal løses, i motsetning til et spørsmål, der mottakeren av spørsmålet vil ha en tanke om hvilken metode som skal brukes for å besvare spørsmålet (Niss & Jensen, 2002, s. 49-50).

Pólya (1945) diskuterer i sin bok *How to solve it* en måte å tilnærme seg matematikkundervisningen på, med hovedfokus på problemløsning. I det første kapittelet diskuterer han viktigheten og fordelene med problemløsning og å ha en systematisk fremgangsmåte når det gjelder dette. Han beskriver en problemløsningsprosess som er delt inn i fire trinn: (1) å forstå problemet, (2) å utforme en plan, (3) å utføre planen og (4) å reflektere over løsningen (Pólya, 1945). I problemløsningsprosessen trekker han frem utholdenhet, kreativitet og fleksibilitet som viktige elementer som bør være til stede for å få et godt utbytte av prosessen. Dette innebærer at elevene bør være åpne for å utforske ulike metoder og strategier for å løse problemet. Ikke alle problemer kan løses på kun én måte, og det fordrer en viss kreativitet og fleksibilitet fra elevenes side. Pólya mener også utholdenhet er nødvendig, da et problem ofte krever flere forsøk og justeringer før en tilfredsstillende løsning er oppnådd. I tillegg til punkt fire i problemløsningsprosessen, som beskrevet ovenfor, der elevene bør reflektere over løsningen, mener også Pólya at elevene bør reflektere over *effektiviteten* i problemløsningsstrategien de har benyttet seg av. På denne måten kan elevene finne de mest optimale og tilfredsstillende løsningene på et problem.

Howard Barrows var en av de som var med i utviklingen av begrepet problembasert læring, og han beskrev det som elevsentrert gruppearbeid, der læreren fungerer som en tilrettelegger. Gruppearbeidet beskrives som at det skal være strukturert rundt et problem, som ofte tar for seg en praktisk situasjon (Graaff & Kolmos, 2003, s. 657-658). Lærerens rolle i problembasert undervisning oppsummeres av Hiebert et. al. i to punkter: (1) å gi elevene informasjonen de trenger og (2) å lage oppgaver. Læreren må gi oppgaver som leder elevene i retning av den kunnskapen de bør inneha, samt lar elevene se relevansen med erfaringer og kunnskap de allerede har (Hiebert et al., 1996, s. 16).

Det argumenteres for at det har blitt viktigere å kunne anvende matematikk for å løse praktiske problemer. I matematikkundervisningen har det dermed blitt mer populært å bruke eksempler tatt fra situasjoner fra virkeligheten (Hiebert et al., 1996, s. 14). Hiebert et al. hevder at problemløsning er det som gjør matematikken nyttig. De sier at dersom elever jobber med å anvende matematikken på situasjoner fra virkeligheten, vil de kunne se nytten i hvordan matematikken kan brukes, samtidig som de lærer viktig kunnskap innenfor et tema i matematikk. Problemer, eller oppgaver, vil på denne måten bli mer verdifull på den måten at elever kan inkorporere matematikk i situasjoner som ikke foregår i skolen. Problemløsning kan virke motiverende for elever, ved at oppgavene fremtrer spennende nok og relevante for elevene. Slik kan de selv bli nysgjerrige nok til å engasjere seg (frivillig) i matematikken (Hiebert et al., 1996, s. 18).

Graaff og Kolmos (2003) trekker i sin artikkel frem noen viktige punkter som er karakteristiske for problembasert læring. De sier at problemet skal være utgangspunktet for læringen. Det kan være et hypotetisk problem, men er som oftest basert på en praktisk situasjon. De påpeker viktigheten av at problemet skal være grunnpilaren for læringen. Dette dikterer hvordan læringsprosessen vil utfolde seg, da de vektlegger hvordan spørsmål blir formulert mer enn selve svaret. På denne måten er læringsutbyttet direkte relatert til en praktisk situasjon, som de mener bidrar til motivasjon og forståelse (Graaff & Kolmos, 2003).

I artikkelen til Graaff og Kolmos (2003) blir det også dratt frem hvordan PBL blir beskrevet av ulike forfattere, og at disse prinsippene beskriver forskjellige PBL-modeller som også brukes ved flere universiteter. Alle prinsippene nevnt i denne artikkelen omfatter hvordan problembasert læring foregår i praksis ved ulike utdanningsinstitusjoner og hvordan det kan manifestere seg i klasserommet. Det kommer frem av prinsippene at utforsking går igjen i samtlige punkter. Utforskingen legitimeres gjennom metodene elevene bruker i problemløsningen og hvordan de innhenter og fremkaller kunnskap. I denne artikkelen påpekes det også at formuleringen av problemstillingen har høyere prioritet enn svaret man kommer frem til. Som tidligere nevnt, beskriver Kunnskapsdepartementet *resonnering* i Matematikk T som å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker (Kunnskapsdepartementet, 2019). Elevene skal kunne forstå hvorfor ting er som de er, samt formulere egne resonnement for å forstå, men også løse problemer. Fra prinsippene som beskrives i læreplanen kan det virke som at det som blir mest vektlagt er hvordan elevene vurderer tankerekker, og problemstillingene, men å følge og å forstå er ikke nevnt i like stor grad. Hiebert et al. (1996) beskriver det Dewey kaller *reflective inquiry*, som er et begrep med flere paralleller til problembasert læring. De oppsummerer *reflective inquiry* i tre punkter: å identifisere et problem; å undersøke et problem aktivt; å konkludere ved å løse problemet. Dette har mange likheter med Pólyas (1945) fire trinn i en problemløsningsprosess som beskrevet tidligere. Fordelene med *reflective inquiry* i matematikkundervisningen har mindre å gjøre med løsningen til problemet, og mer å gjøre med hvordan løsningen åpner for dypere forståelse og gir innsyn i nye forhold i matematikken (Hiebert et al., 1996, s. 14-15). Viktigheten av selve problemløsningsprosessen vektlegges ikke bare løsningen i seg selv, som kan tyde på et slektskap mellom problembasert læring og *inquiry-based learning* (IBL). Slektskapet er også konsistent med at de nevnes sammen i kjerneelementet utforsking og problemløsning.

National Research Council (2000) beskriver *inquiry* og *inquiry-based learning* som en mangefasettert undervisnings- og læringsmetode i sin bok om inquiry og NSES[2]. Den innebærer i første del å observere, stille spørsmål, undersøke tilgjengelige kilder og planlegge og utføre undersøkelser. Videre skal elevene kunne samle, analysere og fortolke data, foreslå hypoteser, svar og forklaringer, og ikke minst kunne kommunisere resultatene fra denne prosessen (National Research Council, 2000, s. 13-14). Her poengteres videre viktigheten av erfaring og gjentatt øvelse for å kunne utvikle evnen til å forstå og å delta i inquiry-prosessen. Det er ikke tilstrekkelig å memorere trinnene i prosessen, eller å forstå hva ordene betyr, men de må oppleve inquiry gjennom direkte deltakelse i prosessen. Denne erfaringen må også kombineres med å forstå prosessen, da den ene uten den andre ikke vil være tilstrekkelig (National Research Council, 2000, s. 14).

Inquiry er et begrep som er grunnleggende innenfor IBL, som står for inquiry-based learning. Oversatt til norsk vil inquiry bety å stille spørsmål. Dette begrepet er svært nært beslektet med utforske-begrepet. Artigue og Blomhøj (2013) sier at det å stille spørsmål kan deles i flere steg. Inquiry-prosessen starter med selve spørsmålet, og følger hele veien mot løsningen gjennom observering, undersøking, planlegging og analysering. Det er også en del av inquiry-prosessen å foreslå svar, forklaringer og fremstille hypoteser (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 800). En viktig forskjell mellom PBL og IBL er at i problembasert læring vil man ofte ta utgangspunkt i en praktisk situasjon (Graaff & Kolmos, 2003, s. 658), mens det ikke er et krav i inquiry-based learning. Det kan gjerne være et rent teoretisk matematisk problem som undersøkes, og trenger ikke å ha rot i virkeligheten.

Artigue og Blomhøj (2013) trekker frem hvordan Dewey påpeker at inquiry-prosessen ikke stopper med at man konkluderer med at noe fungerer, men man må også vite *hvorfor* noe fungerer. Dette vil i sin natur føre til nye spørsmål og hypoteser. Maaß og Doorman (2013) beskriver IBL som en måte å undervise på der elevene oppfordres til å stille spørsmål. De sier at IBL tilrettelegger for en kultur der utforsking og analysering finner sted. Elevene lærer gjennom åpne spørsmål og ved å utforske flere veier mot en løsning. De hevder at IBL kan bidra til at elevene utvikler ferdigheter der de blir flinke på å innhente ny kunnskap, bedrive kreativ problemløsning, i tillegg til å utvikle evnen til kritisk tenkning (Maaß & Doorman, 2013, s. 887). Ifølge standardene til National Research Council (2000) krever inquiry-prosessen at man kan fremstille hypoteser og bruke kritisk

[2] National Science Education Standards

og logisk sans for å finne svar. Dette er i tråd med det Maaß og Doorman sier. Det kreves også at man tar i betraktning ulike forklaringer på *hvorfor* noe fungerer (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 800). Disse betraktningene er i tråd med det Kunnskapsdepartementet beskriver som resonnering, der det står følgende:

> *[…] elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar.* (Kunnskapsdepartementet, 2019)

Innenfor IBL kan det dermed virke som at resonnering er en viktig brikke, fordi det eksplisitt kreves at elevene skal vurdere egne og andres tankerekker og metoder. Dette er det som skaper behovet for å diskutere utforsking og problemløsning i lys av resonnering og argumentasjon.

Skovsmose (2003) beskriver en type utforskende undervisning som han kaller for et *undersøkelseslandskap*. For at en matematisk situasjon skal kunne kalles et undersøkelseslandskap, så er det to krav som må oppfylles. Det første er at det må eksistere en invitasjon fra læreren til elevene om å stille spørsmål som «hva om …?» og «hvorfor det?» til situasjonen eller oppgaven. Situasjonen må invitere til, men også friste elevene til å utforske den. Det andre kravet er at elevene takker ja til invitasjonen. Altså, at undring og utforsking faktisk finner sted, og de ovennevnte spørsmålene stilles av elevene. Dette fordrer en viss interesse hos elevene, samt at situasjonen må virke spennende eller tiltalende til elevenes nysgjerrighet. Det er nysgjerrigheten til elevene som styrer situasjonen, ikke læreren. Undersøkelseslandskapet skal invitere elevene til å gjennomføre en utforskning (Skovsmose, 2003, s. 147).

Det Skovsmose ikke sier like mye om i kapittelet om undersøkelseslandskap, er derimot hvorvidt de karakteristiske spørsmålene som «hva om …?» og «hvorfor det?» faktisk besvares, eller om de besvares på en tilfredsstillende måte. Han drar frem et eksempel som går ut på at elevene får gitt en talltavle med tall fra 1-10 på den første raden, 11-20 på den andre raden, osv. De tegner et 2x3-rektangel rundt seks og seks av tallene, og gir tallene i hjørnene benevningen a, b, c og d. Elevene skal bruke dette til å regne ut $F = ac - bd$. Deretter blir elevene bedt om å forskyve rektangelet rundt på forskjellige plasser på talltavlen, og observere hva som skjer. Skovsmose kaller dette rektangelet for en 'forskyvelig' figur, dersom verdien til F ikke endres avhengig av hvor på talltavlen den står, og spørsmålet om hva som konstituerer en forskyvelig figur oppstår. Han stiller også spørsmålet om hva som skjer dersom rad 1 er tall fra f. eks. 1-7, rad 2 er 8-14, osv. (Skovsmose, 2003, s. 145-146). Eksempelet Skovsmose benytter seg av kan virke som et lekent eksempel, der elevene får prøve seg frem med ulike måter å undersøke rektangelet på. Likevel har det ikke blitt kommunisert noen løsning eller fasit på oppgaven. Dette er et viktig poeng, da det ifølge Artigue og Blomhøj er essensielt å kunne forklare *hvorfor* ting skjer (Artigue & Blomhøj, 2013).

3.2 Forståelse og representasjoner i matematikk

I diskusjonen om utforsking innenfor PBL og IBL er det behov for å si litt om forståelse, da dette er et begrep med flere betydninger. I dette delkapittelet ønsker jeg i den første delen å tydeliggjøre begrepet forståelse i matematikk, deretter vil jeg introdusere semiotiske representasjoner, i lys av forståelsesbegrepet.

Forståelse innenfor matematikk kan deles inn i to grupper: relasjonell og instrumentell forståelse (Skemp, 1978). Skemp beskriver relasjonell forståelse som en måte å forstå matematiske begrep og tema på, på en meningsfylt måte. Hvis elevene har en relasjonell forståelse vil de vite *hva* de skal gjøre, og *hvorfor* (Skemp, 1978, s. 9). Dette er noe som går igjen i kjerneelementet resonnering og argumentasjon, som innebærer at elevene skal kunne forstå hvordan matematiske resultater har klare begrunnelser, og også hva disse begrunnelsene går ut på (Kunnskapsdepartementet, 2019). Gjennom en relasjonell forståelse vil elevene kunne forstå forholdene og sammenhengene mellom matematiske idéer, få en dypere forståelse av prinsippene som ligger til grunn for et matematisk begrep eller tema, og en evne til å anvende forståelsen i ulike situasjoner. Skemp hevder at relasjonell forståelse er viktig for å kunne utvikle evnen til matematisk tenking og problemløsning (Skemp, 1978, s. 12-13). Instrumentell forståelse beskrives som en mer overfladisk og prosedyreorientert forståelse. Denne måten å forstå matematikk på kan karakteriseres gjennom anvendelser av innlærte algoritmer og pugging. Instrumentell forståelse kan på denne måten være et hinder for elevers evne til å kunne anvende matematisk kunnskap på nye situasjoner eller å løse større problemløsningsoppgaver (Skemp, 1978, s. 11). En relasjonell tilnærming til undervisning og læring i matematikk er en måte som er mer tilpasningsdyktig, vanskeligere å lære, men lettere å huske, fordi det ligger en forståelse for hvorfor man gjør noe til grunn for problemløsningen. Denne måten å angripe matematikkundervisning på kan dermed bidra til å gi elevene muligheten og evnen til å se sammenhenger mellom ulike matematiske idéer (Skemp, 1978, s. 12).

Et mål med matematikkundervisningen er å utvikle elevers evne til resonnering, analysering og visualisering (Duval, 2006, s. 105). Duval diskuterer hvordan semiotiske representasjoner har en viktig rolle innen elevers forståelse av matematikk, og hva det er som karakteriserer elevers vansker med å forstå matematikk. Semiotiske representasjoner vil innenfor matematikk innebære representasjoner ved hjelp av tegn og symboler. Flere eksempler på semiotiske representasjoner vil komme litt lenger ned i delkapittelet. Enkelt forklart, så sier Duval at «en representasjon er noe som står for noe annet» (Duval, 2006, s. 103). Han fokuserer på semiotiske representasjoner, og argumenterer for at grunnen til at elever ofte har vansker med å forstå matematikk er fordi de ikke greier å se sammenhengen mellom de ulike semiotiske representasjonene. Matematikk skiller seg fra andre realfag, og andre fag generelt, da matematikk omhandler begreper som er abstrakte, og dette gjør dem også vanskeligere å forstå. Den eneste måten å få tilgang til disse begrepene på er gjennom semiotiske representasjoner. Semiotiske representasjoner er dermed helt essensielle for å kunne lære matematikk, og noe av det Duval trekker frem som det elever opplever som vanskelig er (1) å forstå de semiotiske representasjonene, og (2) å oversette mellom dem. Artikkelen vektlegger det siste punktet som omhandler overganger mellom semiotiske representasjoner. Oversettelsesprosesser, eller overganger mellom semiotiske representasjoner innebærer å gå fra en representasjon til en annen, uten å gjøre endringer på objektet som representeres. Et eksempel kan være å gå fra et algebraisk funksjonsuttrykk til en grafisk representasjon av kurven. Duval beskriver hvordan forståelse i matematikk krever at elever skal kunne koble sammen minst to forskjellige typer semiotiske representasjoner, og at det er kritisk at elever lærer seg å kunne bytte mellom representasjonssystemer for å kunne bedrive problemløsning innenfor matematikk (Duval, 2006, s. 107).

Claude Janvier (1987) forteller at mange læreverk benytter seg i stor grad av ulike representasjoner som figurer og diagrammer, for å bidra til elevers forståelse. Han problematiserer dog at oversettelsesprosessene blir utelatt. Det trekkes frem hvordan oversettelsesprosesser er viktige innenfor problemløsning i matematikken, og å kunne oversette mellom representasjoner er en del av problemløsningsevnen (Janvier, 1987, s. 27). Det kan oppstå problemer i oversettelsesprosessen, da ulike representasjoner gjerne fremhever ulike aspekter ved et matematisk begrep. Av denne årsaken kreves det dermed at elevene skal kunne klare å se sammenhengen mellom dem. Janvier foreslår å dele ulike representasjonsmåtene innenfor matematikk inn i fire kategorier, som vist i tabell 1.

Tabell 1: Tabellen viser de fire kategoriene av representasjoner i matematikk, og hvordan oversettingen mellom de ser ut. Hentet og oversatt fra *Translation Processes in Mathematics Education* (Janvier, 1987, s. 28).

Fra \ Til	**Situasjoner, verbale forklaringer**	**Tabeller**	**Grafisk fremstilling**	**Formler, algebraiske fremstillinger**
Situasjoner, verbale forklaringer		Måling	Tegning	Modellering
Tabeller	Lesing		Plotting	Tilpasning
Grafisk fremstilling	Tolkning	Avlesning		Tilpasning av kurver
Formler, algebraiske fremstillinger	Gjenkjenning av parametere	Beregning	Tegning	

Duval beskriver omdannelser som transformasjoner av representasjoner som befinner seg i ulike representasjonssystemer, som er viktig å skille fra behandlinger av transformasjoner, som er adskillig enklere, da de innebærer en overgang mellom representasjoner innenfor samme representasjonssystem. Et eksempel på en omdannelse er å gå fra et algebraisk uttrykk til en graf, mens et eksempel på en behandling er å forenkle et algebraisk uttrykk. Omdannelser er, ifølge Duval «basically the deciding factor for learning» (Duval, 2006, s. 103).

3.3 Bevisnivåer

Dette delkapittelet vil kort oppsummere det Balacheff (1988) sier om bevisnivåer. Delkapittelet vil være et viktig grunnlag for diskusjonen av kjerneelementet resonnering og argumentasjon, og dets rolle i utforsking i matematikk. Dette teorigrunnlaget brukes for å diskutere underspørsmålet som omhandler hvordan resonnering og argumentasjon ser ut i lys av utforsking og problemløsning.

Balacheff undersøker rollen til bevis i matematikkundervisningen, og hvordan elever oppfatter dette (Balacheff, 1988). Han beskriver et hierarki bestående av fire ulike bevisnivåer: naiv empirisme, det avgjørende eksperimentet, det generiske eksempelet og tankeeksperimentet. Det første bevisnivået, naiv empirisme, er en måte å ‘bevise’ noe på gjennom å verifisere flere tilfeller, og dermed hevde at noe stemmer. Balacheff argumenterer med at det er en stor andel av elever i skolen som tar i bruk denne måten å bevisføre på til å begynne med (Balacheff, 1988, s. 218). Elevene har en tendens til å stole på empirisk bekreftelse eller eksempler for å underbygge egne påstander om at et bevis holder. Det fører til at elever ofte mener at noen få tilfeller eller eksempler er tilstrekkelig for å bevise en matematisk påstand. Det avgjørende eksperimentet er det andre bevisnivået, og beskrives som et eksperiment der validiteten i en påstand verifiseres gjennom å teste et tilfelle med en viss kompleksitet. Dersom det stemmer for dette tilfellet, så kan man si at løsningen stemmer generelt. Tanken er at tilfellet skal være spesielt nok til at man kan si at dersom det fungerer på det tilfellet, så vil det alltid fungere (Balacheff, 1988, s. 218-219). Det tredje bevisnivået kalles det generiske eksempelet. Det går ut på at man grunngir hvorfor en påstand skal være sann, gjennom ulike operasjoner utført på et matematisk objekt. Det matematiske objektet skal være spesielt for problemet eller situasjonen, og validiteten i hypotesen argumenteres for gjennom at objektets egenskaper er karakteristiske for objektet og også eksempelet det gjelder. Selv om objektet representerer noe spesielt, så er resonnementet uavhengig av akkurat det spesielle tilfellet objektet viser. Eksempelvis vil man ikke teste $n = 1, 2$ og 3, men heller et høyt eller spesielt tall for situasjonen, for eksempel $n = 100$. Dette er regnet som et tilfredsstillende bevis, da man kan se at et tilfelle skal representere noe allment (Balacheff, 1988, s. 219). Det fjerde og siste bevisnivået som Balacheff beskriver er tankeeksperimentet. Det innebærer at man evner å koble seg selv fra selve handlingen med å løse problemet, og operasjoner som utføres på det matematiske objektet representeres gjennom formell symbolbruk innenfor matematikk. Et eksempel på et tankeeksperiment er induksjonsbevis (Balacheff, 1988, s. 219-220; Strømskag & Valenta, 2017).

Dersom elevene blir kun bruker naiv empirisme som metode for å bevise matematiske påstander, kan dette være en trussel for elevenes videre utvikling av bevisforståelse, da den hierarkiske inndelingen krever mer generalisering og tolkning av kunnskap jo lenger opp hierarkiet du kommer. Balacheff mener at elever må bevege seg fra det første nivået til det andre nivået, og så videre (Balacheff, 1988, s. 218). De må bevege seg forbi et rent empirisk ståsted og utvikle systematiske og rigorøse forklaringsprosesser. Dette innebærer også å anerkjenne at et bevis krever logiske argumenter, generaliseringer og deduktivt resonnement for å kunne etablere at en matematisk påstand er sann.

4 Metode

I dette kapittelet skal jeg gå gjennom hvilke metoder jeg har brukt for innsamling og analyse av datamaterialet mitt. Jeg presenterer også hvilke datakilder som har vært aktuelle i denne oppgaven.

4.1 Metoder for innsamling av data

Målet med innsamlingen av datamaterialet var å få et bredt overblikk over læreplanen og spesielt kompetansemålene og kjerneelementene i matematikk 1T, for å finne ut av rollen til læreplanen. Jeg ønsket også å få innblikk i læreres tolkning av beskrivelsene fra de ulike komponentene i læreplanen, og spesielt se på hvilke tanker de hadde rundt utforskingsbegrepet slik det står i kompetansemålene i matematikk 1T. Det var også viktig å undersøke hvorvidt det lot seg gjenspeile i oppgavene de gav til sine elevgrupper, altså hvordan lærernes tolkninger blir implementert i undervisningen. Alle disse punktene er viktig å undersøke for å finne ut forskningsspørsmålet, hvordan tolker lærebøker og lærere begrepet ‘utforske’ i læreplanen, og hvordan implementerer lærere dette i sin undervisning i algebra i 1T. For å finne ut av dette har jeg gått gjennom læreplanen, intervjuet lærere og satt sammen en oppgavedatabase som består av oppgaver fra læreboka i tillegg til oppgaver fra lærerne. I dette delkapittelet skal jeg redegjøre for metodevalget mitt og gjennomføringen av innsamlingen av data.

4.1.1 Informanter

For å finne lærere som var aktuelle for denne masteroppgaven, kontaktet jeg skoler som jeg var kjent med fra før. Jeg endte opp med en sammensetning av fire matematikklærere fordelt på tre ulike skoler. Under kommer en presentasjon av informantene til denne masteroppgaven.

Den første læreren, som jeg velger å gi det fiktive navnet Anne, jobber ved en videregående skole som matematikklærer. Hun er nylig ferdigutdannet, med en sivilingeniørbakgrunn innenfor matematikk og fysikk. Hun har i forkant av disse intervjuene undervist matematikk i ett år, høsten 2021 og våren 2022, og har dermed kun undervist under læreplanen LK20. Under utdanningen har hun også kun arbeidet med denne læreplanen, og er den eneste av de fire informantene som ikke har brukt andre læreplaner enn LK20. I det året hun har jobbet på videregående skole har hun undervist i naturfag, matematikk 1T, matematikk 1P-Y på studieprogrammet helse og oppvekst og 2P. Siden Anne kun har erfaring som lærer fra LK20, kan dette være en mulighet for henne å gå inn i læreplanen helt upåvirket av andre, tidligere læreplaner.

Den andre læreren har jeg gitt det fiktive navnet Silje. Hun har jobbet på videregående skole i 37 år, og skal pensjoneres innen våren 2023. Hun har litt erfaring fra å undervise på grunnskolenivå også, og har undervist under Mønsterplanene fra 1974 og 1987 (M74 og M87), Reform 94 (R94), LK06 og LK20. Hun har undervist flere matematikkfag på videregående nivå, i tillegg til å ha bakgrunn innenfor kjemi og biologi. Silje har en lang og bred erfaring fra ulike læreplaner og kan derfor medbringe et interessant perspektiv til oppgave, spesielt da hennes erfaring står i sterk kontrast til Anne sine erfaringer som matematikklærer.

De to siste lærerne som jeg intervjuet jobber på samme skole, og ble intervjuet sammen. Disse to har jeg valgt å gi de fiktive navnene Stine og Maria. Stine har jobbet på videregående skole siden høsten 2017. Hun har undervist flere matematikkfag, deriblant matematikk 1P, 2P, 2P-Y og 1T, med bakgrunn innenfor geografi. Maria begynte som matematikklærer på videregående skole i 2015, og har undervist matematikk 1P-Y på ulike studieprogram, matematikk 1P, 2P og 1T, med bakgrunn innenfor biologi. Både Stine og Maria har kun erfaring fra LK20 innenfor matematikk 1T. De har derimot erfaring fra LK06 gjennom utdanningen sin, samt fra at de har undervist andre matematikkfag enn matematikk 1T under denne læreplanen. Dette kan gi dem et sammenligningsgrunnlag som er ulikt både Anne og Siljes grunnlag når de skal gå inn i læreplanen LK20 innenfor matematikk 1T.

4.1.2 Intervju

For å undersøke Anne, Silje, Stine og Marias forhold til læreplanen og hvordan de bruker den i undervisningen, ønsket jeg å intervjue dem om hvordan de tolket kompetansemålene og spesielt utforske-begrepet, samt hvordan dette gjenspeilet seg i undervisningen deres. Som en forberedelse til intervjuene sendte jeg en e-post til hver av informantene i forkant av intervjuet, med litt informasjon om hva vi kom til å prate om. Dette for å gi dem en mulighet til å tenke over hvilke typer spørsmål jeg kom til å stille, og slik at de hadde mulighet til å se over læreplanen og spesielt kompetansemålene i forkant.

Jeg benyttet meg av en lydopptaker for å ta opp intervjuene, og tok også noen notater underveis i intervjuene. Intervjuene var fra 40 til 55 minutter lange, som er i tråd med anbefalingene fra Robson og McCartan om at alt under en halvtime sannsynligvis ikke vil være verdifullt, og alt over én time kan være å kreve for mye av informantene, som igjen kan gi uønskede resultater (Robson & McCartan, 2011, s. 286).

Intervjuene jeg gjennomførte var av typen semistrukturerte fokusintervjuer (Robson & McCartan, 2011, s. 285). Dette er en intervjutype som gir meg som intervjuer rom for å tilpasse spørsmål og rekkefølgen på intervjuet på en måte som skal kunne bidra til en bedre flyt i samtalen. En fordel med intervju som datainnsamlingsmetode er at det er en fleksibel måte å undersøke noe på, som lett kan la seg tilpasses situasjonen. Jeg benyttet meg av en intervjuguide (vedlegg 1) som jeg utviklet i forkant av intervjuene, slik at jeg hadde en sjekkliste og en tentativ rekkefølge på punktene jeg ønsket å dekke. Jeg stilte til dels åpne spørsmål som omhandlet det temaet jeg ønsket å undersøke, og spisset meg inn på det gjennom oppfølgingsspørsmål. Dette er karakteristikker for et fokusintervju (Robson & McCartan, 2011, s. 286).

Alle intervjuene foregikk på de respektive skolene til hver av lærerne. En fordel med å ha intervjuene ved personlig oppmøte er at man lettere kan plukke opp på ikke-verbale hint, samt lese kroppsspråket til informantene. Fokuset for intervjuene var å få frem hva lærerne tenkte om utforske-begrepet og hva det innebærer. Jeg ønsket å undersøke hvordan disse tolkningene forplantet seg gjennom lærernes utvikling av undervisningsopplegg og hvilke kilder til inspirasjon de benyttet seg av i deres planlegging av undervisning, samt hvordan de valgte ut oppgaver å gi til elevene. Etter alle intervjuene var gjennomført skrev jeg et sammendrag av hvert intervju for å få et overblikk over de viktigste momentene. Deretter ble intervjuene transkribert og anonymisert. Først gjennomførte jeg en grov-transkribering, der jeg skrev nøyaktig hva lærerne sa. Deretter gikk jeg gjennom transkripsjonene som jeg ønsket å bruke i analysen, og fjernet fyllord som oppsto hyppig i hvert intervju, men samtidig forsikre meg om at betydningen bak utsagnet ble bevart. Noen av utsagnene kan derfor være litt vanskelige å lese. Muntlig språk skiller seg gjerne fra skriftlig språk, og dialekter er også noe som kan påvirke dette. Relevante deler av transkripsjonen av intervjuene vil bli presentert i analysen av resultatene. Transkripsjonskodene med tilhørende forklaringer er vist i tabell 2.

Tabell 2: Transkripsjonskoder med forklaring.

Transkripsjonskode	**Forklaring**
…	Pause
[Tekst]	Forklaring eller tilføyelse av meg
(…)	Utsagn utelatt

4.1.3 Annet datamateriale

En annen del av datamaterialet mitt er oppgavedatabasen. Dette er en samling oppgaver fra læreboka Matematikk 1T fra Aschehoug Undervisning (Borge et al., 2020), som lærebokforfatterne klassifiserer som 'utforskende' oppgaver av lærebokforfatterne. Videre i oppgaven vil jeg referere til dette læreverket som Matematikk 1T. I tillegg til læreverket er også oppgaver jeg har fått tilsendt av lærerne en del av datamaterialet. Disse oppgavene er gitt i forbindelse med algebraundervisningen, og ble sendt til meg i etterkant av intervjuene. Da hadde lærerne fått mulighet til å velge ut kun de oppgavene som falt innenfor det aktuelle temaet i matematikk 1T, som også gikk innunder de kompetansemålene og andre faktorene vi diskuterte under intervjuene. En slik oppgavedatabase vil gi anledning til å se hvilke typer oppgaver lærerne og lærebokforfatterne velger ut, og vil kanskje kunne gi et inntrykk av hva de oppfatter som utforskende oppgaver.

Læreplanen i matematikk 1T er også en viktig del av datamaterialet mitt. Kompetansemålene er sentrale, da det er her utforske-begrepet blir introdusert, og er gjennomgående i flere av kompetansemålene. Kompetansemålene fungerer som et startpunkt for undersøkelsen av utforske-begrepet i algebra i 1T, og er en viktig del av grunnlaget for analysen av datamaterialet.

4.2 Metode for analyse av data

Det datamaterialet jeg hentet inn fra intervjuene ble transkribert og anonymisert, etter at jeg hadde skrevet et sammendrag av hvert av intervjuene. Dette gjorde jeg blant annet for å bli bedre kjent med datamaterialet mitt, i tillegg til at det var både nyttig og nødvendig i min videre analyse av datamaterialet. Dette er i tråd med det Robson og McCartan anbefaler angående transkribering av fleksible data, som intervjuopptak er (Robson & McCartan, 2011, s. 469). Analysemetoden jeg har benyttet meg av er koding og kategorisering. Det finnes to måter å kode og kategorisere på, der den ene kalles åpen, eller induktiv koding, og den andre går ut på å lage forhåndsbestemte koder, også beskrevet som deduktiv koding. Induktiv koding er når kodene oppstår fra datamaterialet mens man går gjennom det. Datamaterialet er det som utvikler begrepene og temaene gjennom undersøking og sammenligning av data. Induktiv koding står i kontrast til deduktiv koding, som er å finne ut hvorvidt datamaterialet stemmer overens med hypoteser man har laget seg før man går inn i datamaterialet. Kodene som blir brukt i deduktiv tilnærming vil ha et teoretisk grunnlag basert på eksisterende teorier (Chandra & Shang, 2019, s. 91-92). I denne masteroppgaven har jeg benyttet meg av sistnevnte metode. Kodene jeg utviklet for å analysere datamaterialet har sitt teoretiske grunnlag i kjerneelementet utforsking og problemløsning fra læreplanen.

Det første steget i denne analysemetoden var å bruke funksjonen “støtte til læreplanen” på Utdanningsdirektoratet sine nettsider for å sortere alle kompetansemålene i læreplanen i matematikk 1T etter kjerneelementet *utforsking og problemløsning*. På denne måten har jeg valgt ut alle kompetansemål som omfatter utforsking i matematikk. Her endte jeg opp med seks ulike kompetansemål, som jeg igjen sorterte etter hvilke kompetansemål jeg mente omfattet temaet algebra. I denne sorteringsprosessen endte jeg opp med fire kompetansemål. Deretter snevret jeg inn disse kompetansemålene ved å lete gjennom dataene fra intervjuene og se etter hvilke kompetansemål lærerne oppfattet som relevante innenfor algebraundervisningen. Snittet av de fire lærerne sine meninger om hvilke mål som var relevante ble til tre kompetansemål:

- *Identifisere variable storleikar i ulike situasjonar, setje opp formlar og utforske desse ved hjelp av digitale verktøy*
- *Utforske strategiar for å løyse likningar, likningssystem og ulikskapar og argumentere for tenkjemåtane sine.*
- *Utforske samanhengar mellom andregradslikningar og andregradsulikskapar, andregradsfunksjonar og kvadratsetningane og bruke samanhengane i problemløysing.* (Kunnskapsdepartementet, 2019)

Ved å ta utgangspunkt i Utdanningsdirektoratet sin definisjon av kjerneelementet *utforsking og problemløsning*, utviklet jeg følgende koder:

(1) Lete etter mønster og finne sammenhenger
(2) Diskutere for å finne en felles forståelse
(3) Fokusere på strategier og fremgangsmåter

Hensikten med dette er å bruke læreplanforfatternes definisjon av hva utforsking og problemløsning i matematikk innebærer, som igjen gjør det mulig å se hvorvidt disse definisjonene stemmer overens med det jeg har funnet i datamaterialet mitt. Disse tre kodene ble grunnlaget for analysen av datamaterialet. Ved å gå systematisk gjennom intervjuene, oppgavedatabasen og læreboka, gjorde jeg et utvalg av hvilke oppgaver og utsagn som falt innunder de ulike kodene.

4.3 Etiske retningslinjer

I dette delkapittelet vil jeg diskutere hvordan datainnsamlingen har foregått i henhold til gjeldende lover, på en etisk og forsvarlig måte. Jeg ønsker også å beskrive hvordan alle deltakerne har gitt sitt informerte samtykke til datainnsamlingen og hvordan det har foregått.

4.3.1 Etisk datainnsamling

Når man skal ta opp og lagre lyd fra intervjuer, er det visse ting man må ta hensyn til. Alle intervjuene ble tatt opp med godkjent lydopptaker. Datamaterialet ble ikke lagret på andre steder enn lydopptakeren, og er heller ikke hørt enn andre enn meg selv. Lagring av denne typen datamateriale skal skje forsvarlig, sikkert og separat fra annet materiale brukt i prosjektet, og utilgjengelig for uvedkommende. Det skal ikke lagres lenger enn nødvendig for prosjektet. Det er også viktig at dette kommuniseres klart og tydelig til prosjektdeltakerne før datainnsamlingen starter (NESH, 2016, s. 18).

Det er også viktig å ivareta konfidensialiteten til deltakerne. Personlige opplysninger, som i dette tilfellet kunne være navn, skolen lærerne jobber på, stemmer og eventuelle andre personlige opplysninger som fremkom av intervjuet, skal anonymiseres eller avidentifiseres. Jeg har gitt alle prosjektdeltakerne i denne masteroppgaven fiktive navn, og alle andre identifiserbare personopplysninger har blitt avidentifisert, slik at ingen av lærerne skal kunne gjenkjennes via datamaterialet. Det er viktig at alle opplysninger som kan identifisere prosjektdeltakerne ikke skal kunne videreformidles på noen måte (NESH, 2016, s. 16)

4.3.2 Informert samtykke

I dette forskningsprosjektet har jeg samlet inn data som kan inneholde personopplysninger, og dermed er det viktig å få samtykke fra prosjektdeltakerne. I følge de nasjonale forskningsetiske komiteene (NESH), skal samtykket være fritt, informert og uttrykkelig (NESH, 2016, s. 14). Samtykkeskrivet (vedlegg 2) som deltakerne fikk utdelt var godkjent av Norsk senter for forskningsdata, og inneholdt informasjon om forskningen og resultatene og hvordan de skulle brukes, formålet med prosjektet samt deres rettigheter som deltakere i forskningsprosjektet. Det er viktig at denne informasjonen blir gitt på en måte som ikke oppfattes forpliktende. Dette betyr at samtykket er fritt (NESH, 2016, s. 14). Samtykket skal være basert på informasjon om formålet med prosjektet, måten prosjektet gjennomføres på, eventuell risiko og andre konsekvenser.

Informasjonen i samtykkeskrivet skal være uttømmende om hva en deltakelse i prosjektet innebærer, dette betyr at samtykket er informert. Til slutt er det også viktig at deltakerne må gi tydelig uttrykk for at de har forstått hva en deltakelse i prosjektet innebærer, og at de er informert om at de når som helst kan trekke tilbake samtykket, og at de når som helst kan be om innsyn eller sletting av datamaterialet. Denne uttrykte forståelsen fra deltakerne betyr at samtykket er uttrykkelig (NESH, 2016, s. 15). Det er forskerens ansvar å informere om og minne deltakerne på at de alltid kan trekke tilbake samtykket, uten at det påvirker prosjektet negativt (NESH, 2016, s. 15).

5 Analyse

I dette kapittelet skal jeg undersøke hvordan utforske-begrepet blir tolket av lærerne som har deltatt i denne studien og hvordan det brukes i læreverket Matematikk 1T. Jeg ønsker å undersøke hvordan disse tolkningene utføres i praksis, gjennom å se på hvilke oppgaver som blir gitt til elevene, og se hva som kjennetegner utforskende oppgaver fra læreverket som blir brukt. Ut fra disse punktene skal jeg prøve å besvare hva utforsking er, som uttrykt av lærerne og læreverket. Dette vil til slutt kunne gi et svar på hvordan lærebøker og lærere tolker begrepet 'utforske' i læreplanen, og hvordan dette implementeres i algebraundervisningen i 1T, som er forskningsspørsmålet som skal besvares. For å finne ut av dette skal jeg gå gjennom oppgaver fra læreverket, utsagn fra lærerne og oppgaver gitt av lærerne til elevene sine, og plassere dem i en eller flere av mine tre forhåndsbestemte koder.

5.1 Forhåndsbestemte koder

Før jeg introduserer resultatene ønsker jeg å utdype mine tre forhåndsbestemte koder, og gi en beskrivelse av hver av dem. Dette gjør jeg for at leseren skal få en bedre forståelse av hva kodene innebærer. Det er viktig å påpeke at beskrivelsene som fremkommer av kodene er helt og holdent mine egne tolkninger og meninger.

Kode 1 – *Finne sammenhenger og lete etter mønster*. Denne koden har flere forskjellige aspekter. Det kan være å finne ut av og se hvordan ulike representasjoner henger sammen, for eksempel sammenhengen mellom en geometrisk og en algebraisk fremstilling. Det kan også innebære å kunne oppdage eller identifisere algoritmer, samt å lage egne algoritmer eller regler, eller å gjøre utregninger flere ganger for å se mønster eller finne sammenhenger, samt å observere endringer i resultatet ved å manipulere forskjellige faktorer.

Kode 2 – *Diskutere for å finne en felles forståelse*. Denne koden har to viktige aspekter. Det å diskutere, altså å kunne snakke om matematikk, og å bruke diskusjonen for å finne en felles forståelse om et tema eller et begrep. Dette kan innebære at man snakker sammen to og to, diskuterer i grupper, eller deltar i en helklassediskusjon. Ordlyden i koden fordrer at diskusjonen skal føre frem til en felles forståelse, og dette kan innebære å bruke ulike elevers oppfatninger og forståelser av noe til å sette sammen et helhetlig bilde og komme til enighet om hva som vil være den mest riktige oppfatningen.

Kode 3 – *Fokusere på strategier og fremgangsmåter.* Denne koden handler om hva som bør vektlegges i en problemløsningssituasjon i matematikk. I dette tilfellet er det strategier og fremgangsmåter som vektlegges, fremfor løsningen på problemet. Jeg tolker dette som at strategier og fremgangsmåter har høyere prioritet enn løsningen. Denne koden innebærer altså at elevene skal prioritere å forstå måten problemet løses på og vurdere om det er en god metode, heller enn å vurdere og finne frem til selve løsningen. Vurderingen av strategier og fremgangsmåter har høyere prioritet enn vurderingen av løsningen.

5.2 Oppgaver fra læreverket Matematikk 1T

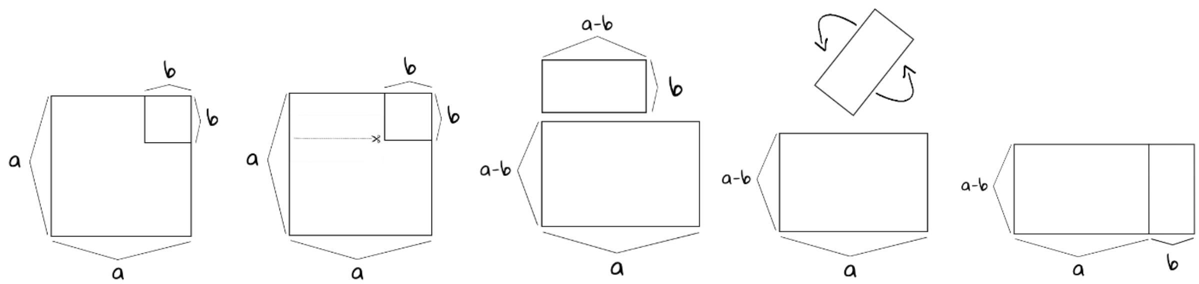
I dette delkapittelet tar jeg for meg oppgaver fra læreverket Matematikk 1T. For å følge tråden fra læreplanen og kompetansemålene inn i læreverket har jeg valgt ut seks oppgaver som jeg anser som representative. Disse oppgavene er i læreverket klassifisert i to grupper, *utforsk*- og *snakk*-oppgaver. Det vil spesifiseres i overskriften til hver av oppgavene hvilken gruppe de er i. I innledningen til læreverket beskrives utforsk-oppgavene som oppgaver som skal få elevene til å gå i dybden og se sammenhenger i matematikken, og snakk-oppgavene skal åpne for å la elevene kommunisere matematikk (Borge et al., 2020, uten sidetall). Hvordan oppgavene brukes i klasserommet er opp til hver enkelt lærer, de kan brukes både som oppgaver som elevene kan lese og løse selv eller gis som undervisningsaktiviteter.

Før oppgavene som skal presenteres i dette delkapittelet ble valgt ut, gikk jeg gjennom alle utforsk- og snakk-oppgavene i læreverket. I dette arbeidet fant jeg ut at det var mange av oppgavene som kunne kodes under flere av kodene, men i dette kapittelet vil oppgavene kodes under en hovedkode, eventuelt med elementer av en annen kode. Ut fra analysen av disse oppgavene skal leseren få innsyn i hvilke elementer som går igjen i lærebokforfatternes tolkning av begrepet utforske. Disse elementene skal etter hvert, sammen med lærernes tolkninger, danne et helhetlig bilde av hvordan utforske-begrepets reise fra læreplanen til klasserommet ser ut. Det første steget på reisen vil være fra læreplanen til læreverket.

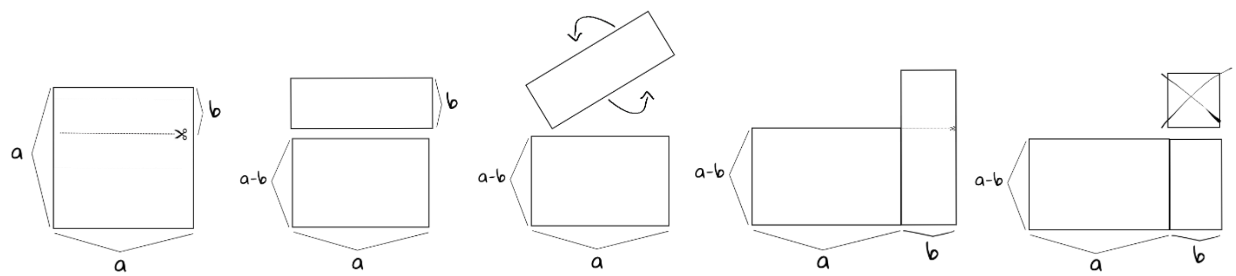
Oppgave 1 – utforsk

Per og Tor lager hver sin figurserie for å gi et geometrisk bevis for konjugatsetningen. Hva tror du de har tenkt?

Figurserien til Per:



Figurserien til Tor:



(Borge et al., 2020, s. 60)

Denne oppgaven er kodet under kode 3, som handler om å fokusere på strategier og fremgangsmåter. Her bes elevene om å forklare tankegangen ved to ulike fremgangsmåter, for å bevise konjugatsetningen geometrisk. Den ber ikke elevene om å vurdere løsningen på oppgaven, da begge tankegangene er å anse som løsninger. Elevene skal altså ikke vurdere hvorvidt noe er riktig eller galt, men forklare to ulike strategier for et geometrisk bevis.

For at elevene skal kunne vurdere de to løsningsstrategiene som er gitt i oppgaven, kreves det at elevene har en forståelse for hva et geometrisk bevis for konjugatsetningen innebærer. For det første må de vite hva konjugatsetningen er, og for det andre må de forstå hva som utgjør et tilfredsstillende geometrisk bevis. De skal vurdere de to ulike løsningsstrategiene og forklare hvordan Per og Tor har tenkt, altså må de forstå de ulike overgangene mellom hver av figurene i hvert av de to løsningsmetodene. Det å fokusere på strategier og fremgangsmåter er en del av kjerneelementet utforsking og problemløsning (Kunnskapsdepartementet, 2019), og ved å kunne vurdere de løsningsmetodene som er gitt i oppgaven og eventuelt bestemme hvilken som er mest hensiktsmessig, vil elevene kunne utvikle problemløsningsevnen sin. Det som dekkes av kode 3 er også en del av utforsking innenfor, så det faller også innenfor de delene av læreplanen som omhandler utforsking i 1T.

Oppgave 2 – utforsk

Første kvadratsetning sier at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Vi ønsker å undersøke om det også fins noen regler vi kan bruke når uttrykket er opphøyd i 0 eller andre naturlige tall enn 2.

a Bruk CAS og regn ut uttrykkene $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ og $(a+b)^5$.

b Ser du noen sammenheng med Pascals trekant?

c Ser du noe system i eksponentene?

d Kan du bruke mønsteret du har oppdaget til å bestemme $(a+b)^6$ og $(a+b)^7$? Kontroller med CAS.

e Bruk det du har oppdaget til å regne ut

1 $(x+2)^4$ **2** $(y+3)^5$ **3** $(2+a)^6$

f Kan du regne ut $(x-2)^4$ på tilsvarende måte?

(Borge et al., 2020, s. 61)

Denne oppgaven er kodet under kode 1, som handler om å finne sammenhenger og å lete etter mønster. I denne oppgaven skal elevene utforske prinsippene i første kvadratsetning, og se sammenhengen mellom disse og Pascals trekant. De skal bruke det de finner ut i oppgave 1a–c for å løse oppgave 1d. Her blir de bedt om å benytte seg av digitale hjelpemidler for å oppdage en algoritme, og deretter anvende algoritmen for å regne på uttrykk av høyere grad. Videre skal de bruke den samme algoritmen på uttrykk der flere ledd er endret, men eksponenten er den samme. Til slutt skal de vurdere om de kan løse et uttrykk som ligner de forrige uttrykkene, men med ulikt fortegn, på samme måte som tidligere.

Pascals trekant er en visuell fremstilling som kan finnes ved bruk av formelen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Elevene skal i denne oppgaven gå fra algebraisk fremstilling til den visuelle fremstillingen av Pascals trekant. Når de får gitt seks uttrykk med ulike eksponenter, kan de ved utregning finne et mønster som ligner Pascals trekant i koeffisientene til det ufaktoriserte uttrykket til hvert av uttrykkene gitt i oppgaven. Elevene gjør altså utregninger flere ganger for å se mønster, som igjen kan hjelpe dem å se sammenhengen mellom den algebraiske og visuelle fremstillingen av uttrykkene. Ved å se at tallene i Pascals trekant sammenfaller med koeffisientene i løsningen på uttrykkene, kan elevene lage en algoritme for å løse liknende uttrykk av høyere grad eller ulike ledd inni uttrykket. Ved å løse et uttrykk med ulikt fortegn vil de observere endringer i resultatet, gjennom endring i fortegnene. Dette er en måte å finne sammenhenger og å lete etter mønster på, som er en sentral del i kjerneelementet utforsking og problemløsning.

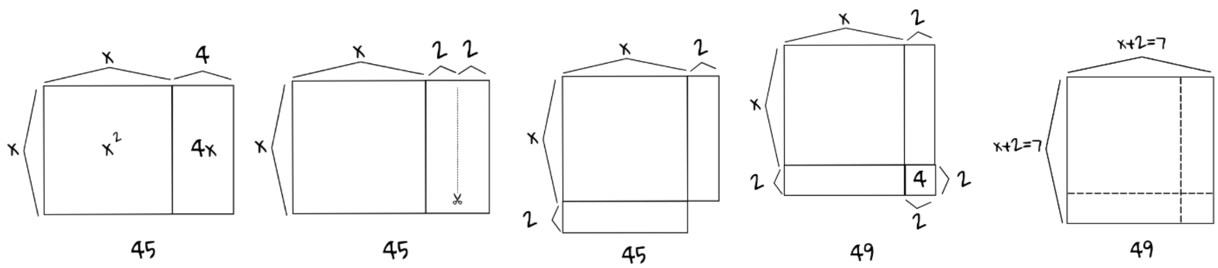
I denne oppgaven bes ikke elevene om å forklare hvorfor mønsteret de har funnet fungerer eller ikke fungerer. Elevene blir kun bedt om å svare ja eller nei, eller regne ut enten ved hjelp av CAS eller for hånd, samt kontrollere med CAS.

Oppgave 3: «babyloneroppgaven» – utforsk

Babylonerne hadde ofte et geometrisk utgangspunkt når de løste matematiske problemer. Når de løste andregradslikninger var de bare interessert i positive løsninger.

En babyloner skulle løse likningen $x^2 + 4x = 45$.

Han løste den ved å tegne en figurserie.



Hvilken løsning kom babyloneren frem til?

Vis ved innsetting at -9 også er en løsning på likningen.

Er det mulig å finne hele løsningsmengden med den babylonske metoden?

Løs likningene geometrisk.

a $x^2 + 6x = 55$

b $x^2 + 8x - 48 = 0$

Vi har gitt likningen $x^2 - 2x = 8$.

Forklar hvorfor vi ikke kan løse denne likningen med metoden ovenfor.

Kan du finne en måte å løse denne likningen geometrisk?

(Borge et al., 2020, s. 115)

Denne oppgaven er kodet under kode 3, å fokusere på strategier og fremgangsmåter, med elementer av kode 1, å finne sammenhenger og å lete etter mønster. I denne oppgaven skal elevene studere og bruke på et geometrisk bevis, og vise ved innsetting en alternativ løsning på likningen. De skal vurdere om det er mulig å bruke fremgangsmåten som er gitt i oppgaven for å finne hele løsningsmengden, og deretter løse to forskjellige likninger geometrisk. De bes også forklare hvorfor man ikke kan løse en tredje likning med fremgangsmåten gitt i oppgaven, og skal finne en annen strategi å løse likningen på geometrisk.

Elevene skal finne ut hva løsningen er gjennom en gitt løsningsstrategi, og ved hjelp av nevnte strategi løse andre likninger. Det krever at elevene har forstått hvordan løsningsstrategien fungerer, og kan anvende den på andre situasjoner. Når elevene i siste del av oppgaven blir bedt om å forklare hvorfor en tredje likning ikke kan løses med den samme løsningsstrategien, må de også kunne forstå måten problemet løses på. De får forklart at dette ikke er en hensiktsmessig måte å prøve å løse den tredje likningen på, men skal selv forklare hvorfor.

Elementene av kode 1 i denne oppgaven innebærer at elevene skal kunne se sammenhengen mellom den geometriske løsningen av likningene og det algebraiske likningsuttrykket. Oppgaven ber elevene om å bruke innsetting for å vise at minus ni kan være en løsning på likningen, og dette er en algebraisk løsningsmetode som gir hele løsningsmengden. De skal også begrunne hvorvidt den geometriske løsningsmetoden gir hele løsningsmengden.

Oppgave 4 – utforsk

Tre elever jobber med likningen $(x-2)(x+5)=3(x-2)$.
Elevene har hver sin løsningsstrategi:

Samuel ganger ut parentesene, ordner likningen og bruker *abc*-formelen.

Julia dividerer med $x-2$ på begge sider i likningen, og løser så likningen $x+5=3$.

Ingvild ordner likningen slik at hun får null på høyre side.
Det gir likningen $(x-2)(x+5)-3(x-2)=0$. Hun faktoriserer så ut $(x-2)$, og løser med produktregelen.

Hvem finner riktig svar på likningen?
Begrunn hvorfor løsningsstrategiene fungerer eller ikke fungerer.

(Borge et al., 2020, s. 129)

Denne oppgaven er kodet hovedsakelig under kode 3, som handler om å fokusere på strategier og fremgangsmåter, med elementer av kode 2, som handler om å diskutere for å finne felles forståelse. Elevene skal vurdere tre ulike løsningsstrategier og bestemme hvilke(n) av løsningsstrategiene som vil gi riktig svar på likningen. De skal også begrunne hvorfor strategiene fungerer eller ikke fungerer. I dette tilfellet kan elevene vurdere når det er hensiktsmessig å bruke hvilke strategier, og hvilke som ikke fungerer. Elevene skal vurdere både løsningen og løsningsstrategien.

Oppgaven kan også kodes under kode 2, som handler om å diskutere for å finne en felles forståelse. Dette krever at læreren bruker oppgaven på en måte som oppfordrer til diskusjon, som for eksempel å gi den som en gruppeoppgave. Da kan det komme frem ulike løsningsstrategier, og de må sammen diskutere seg frem til hvilken strategi som er mest hensiktsmessig å bruke, for å kunne løse oppgaven.

Oppgave 5 – utforsk

Vi skal løse likningssystemet

(1) $x - 5y = 3$

(2) $-x + 5y = 7$

Vi legger sammen likningene og får:

(1) + (2) $0x + 0y = 10$

Venstresiden blir null for alle verdier av *x* og *y*. Likningssystemet har altså ingen løsning. Vi skriver $L = \emptyset$.

a Hvordan vil det grafiske bildet se ut hvis du prøver å løse likningssystemet ovenfor grafisk?

b Hva kan du si om antall løsninger for dette likningssystemet?

(1) $y = 2 + x$

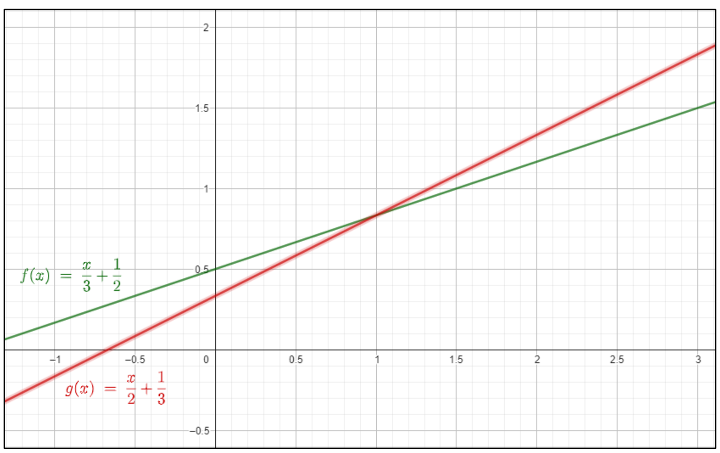
(2) $4y - 4x = 8$

c Vi har et likningssystem med to ukjente. Hvordan kan vi, uten å løse likningssystemet, undersøke om likningssystemet har én løsning, ingen løsning eller uendelig mange løsninger?
Hvordan ser det grafiske bildet ut i hvert av de tre tilfellene?

(Borge et al., 2020, s. 236)

Denne oppgaven har jeg kodet under kode 1, å finne sammenhenger og lete etter mønster. Elevene blir bedt om å finne ut hvordan det grafiske bildet ser ut dersom de prøver å løse et likningssystem grafisk, som allerede har blitt løst algebraisk. Videre skal elevene si noe om antall løsninger for et annet likningssystem, og forklare hvordan man kan undersøke hvor mange løsninger et likningssystem har. Til slutt skal de beskrive det grafiske bildet til likningssystem med ulikt antall løsninger. Hovedformålet med denne oppgaven later til å være å få elevene til å se sammenhenger mellom grafiske og algebraiske fremstillinger av likningssystem, og antall løsninger. Gjennom å vurdere antall løsninger til ulike likningssystem kan man bruke digitale verktøy som for eksempel GeoGebra til å se hvordan et likningssystem med én, ingen eller uendelig mange løsninger vil se ut. Dette kan hjelpe elevene med å se disse sammenhengene, og går dermed direkte under kode 1, som blant annet innebærer det å kunne se sammenhenger mellom ulike representasjoner.

Oppgave 6 – snakk



Hvordan kan du bruke figuren ovenfor til å løse ulikheten $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$?

(Borge et al., 2020, s. 248)

Denne oppgaven har elementer av kode 1 og kode 3, men jeg har valgt å kategorisere den hovedsakelig under kode 1, å finne sammenhenger og lete etter mønster. Her blir elevene bedt om å forklare hvordan de kan bruke en grafisk fremstilling av to funksjoner til å løse en ulikhet. For å kunne forklare løsningsstrategien sin, kreves det at elevene først identifiserer at hver side av ulikheten korresponderer med de to funksjonene som gitt i oppgavefiguren, og deretter at de ser sammenhengen mellom den grafiske og den algebraiske fremstillingen. Dette gjør at oppgaven hovedsakelig faller under kode 1. Elevene skal, som nevnt, forklare løsningsstrategien sin, som faller under kode 3. Dersom oppgaven brukes som en gruppeoppgave vil elevene være nødt til å vurdere hverandres løsningsmetoder, eventuelt egen løsningsmetode dersom de er enige. Dette betyr at elevene skal forstå måten problemet løses på og vurdere hvorvidt det er en god metode.

5.2.1 Hovedfunn fra oppgaver i læreverket

Fra analysen av oppgavene i læreverket Matematikk 1T fremkommer det at flest oppgaver kodes under kode 1, som handler om å finne sammenhenger lete etter mønster, og kode 3, som handler om å fokusere på strategier og fremgangsmåter. Færrest oppgaver er kodet under kode 2, som handler om å diskutere for å finne felles forståelse.

I oppgaver som er kodet under kode 1, der elevene skal finne sammenhenger og lete etter mønster, blir ikke elevene bedt om å forklare *hvorfor* løsningen er riktig eller ikke riktig. Det oppstår dermed et behov for å se kjerneelementet utforsking og problemløsning i sammenheng med kjerneelementet resonnering og argumentasjon.

Et tredje funn er at alle oppgavene slik de står kan brukes som diskusjonsoppgaver. Det betyr at alle oppgavene egentlig kan kodes under kode 2, som handler om å diskutere for å finne felles forståelse, dersom læreren bruker oppgavene som en undervisningsaktivitet.

5.3 Intervjuer

I dette delkapittelet skal det andre steget på reisen fra læreplan til klasserom tas. Jeg følger tråden fra læreverket og inn i lærernes tolkning av kompetansemålene og hvordan de selv anvender utforske-begrepet i undervisningen. Jeg vil ta for meg sitater fra alle de fire lærerne som er intervjuet, og vise hvordan utsagnene fra intervjuene kodes under hver av de tre forskjellige kodene. Analysen skal gi innsikt i hvordan lærerne tolker utforske-begrepet, og hvilke elementer fra kjerneelementet utforsking og problemløsning som går igjen i deres oppfattelser og utførelser av læreplanen i undervisningen.

Presentasjonen av intervjuene kommer i den rekkefølgen de ble intervjuet, først kommer Anne, deretter Silje og til slutt Stine og Maria. Til slutt vil jeg oppsummere hovedfunnene fra intervjuene og si noe om tendenser og hva de forskjellige kodene innebar i de tre intervjuene.

5.3.1 Intervju med Anne

I intervjuet begynner vi med å snakke litt om kompetansemålene og slik de står i læreplanen, og hun diskuterer hvordan ordet utforske blir brukt. Ifølge Anne er overgangen fra å regne for hånd til å løse oppgaver gjennom grafiske verktøy, for eksempel digitale verktøy og programmering en måte å utforske strategier for å løse likninger.

> *Når jeg tenker på strategier for å løse likninger så ville jeg startet på, begynt på det de har lært på ungdomsskolen som er, løse det på papiret. (…) Også bygge på derfra, og da kan vi utvide med å løse det grafisk i GeoGebra. (…) Og så at vi kan løse det i CAS, og så etter hvert da, at vi kan løse det med programmering. Så da har vi fire måter for ulike strategier for å løse likninger.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Dette utsagnet kan kodes under kode 1, å finne sammenhenger og lete etter mønster. Hun uttrykker at elevene skal kunne løse likninger på fire forskjellige måter, for hånd, grafisk i GeoGebra, digitalt i CAS og gjennom programmering. Anne sier ingenting eksplisitt om at elevene skal finne sammenhenger, men ved å følge overgangen mellom de ulike måtene å løse likninger på, vil det kunne hjelpe elevene til å se sammenhenger mellom algebraiske og grafiske eller digitale fremstillinger og løsninger av likninger.

> *Og på likningssystemer så liker jeg at vi tar for oss både, vi tar for oss likninger først, og da ser vi på innsettingsmetode og addisjonsmetode. Og da er det å snakke litt om når det er hensiktsmessig å bruke de forskjellige metodene, for vi kan alltid bruke begge to, men noen gjør at det blir mye mer komplisert regning. Så når de skal velge en strategi selv, når de får en oppgave, da vil jeg prøve å lære dem at de skal klare å se hva det er lurest å bruke.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Anne trekker frem to ulike strategier for å løse likninger, innsettingsmetoden og addisjonsmetoden. Hun sier hun ønsker å gå gjennom disse to metodene for å lære elevene forskjellige måter å løse likninger på, og poengterer viktigheten med å kunne forstå når det mer hensiktsmessig å bruke den ene eller den andre metoden. Det er en del av å kunne vurdere løsninger og strategier, forstå måten problemet løses på og vurdere om det er en god metode. Utsagnet kodes under kode 3, å fokusere på strategier og fremgangsmåter.

> *Også det med å kunne løse ting digitalt gjør jo at de kan sjekke svarene da, som de regner på papiret.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Utsagnet underbygger tidligere skildringer, og vil kodes under kode 3, der elevene selv skal få vurdere hvilken metode som er riktigst, men de kan benytte seg av digitale verktøy for å sjekke om løsningen er riktig. Løsningen i seg selv trenger ikke vurdering, men verifisering. Vurderingen av løsningsmetodene prioriteres.

> *Men samtidig er det viktig da* [å løse en likning for hånd], *synes jeg, fordi hvis du bare tar inn ting på PC så kan du gjøre det, men du skjønner ikke hvorfor … Så derfor er det viktig at vi starter på papiret og så oversetter vi det til PC.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Dette utsagnet viser at Anne synes det er viktig at elevene skal forstå hvorfor en løsning eller løsningsmetode er riktig. Vurderingen av strategier og fremgangsmåter er én side av saken, men argumentasjon for hvorfor strategien er god eller løsningen er riktig er også viktig. Dette er et utsagn som poengterer viktigheten av å kunne se kjerneelementet utforsking og problemløsning i sammenheng med kjerneelementet resonnering og argumentasjon.

Det å kunne se sammenhenger er noe som går igjen når Anne diskuterer utforsking i algebra i 1T. Hun trekker ofte frem sammenhengen mellom algebraiske og grafiske representasjoner innenfor matematikken.

> *Og på ulikheter også, den synes jeg er veldig fin grafisk. Fordi hvis, det at du skjønner at det er større eller mindre enn noe, da skal vi ikke bare frem til et punkt der x er lik en løsning, og det er litt vanskeligere å forstå. Det snakker vi en del om, vi lager forskjellige uttrykk som er større eller mindre enn noe, også ser vi hvor på grafen det må være større eller mindre enn. (…) Så, det er jo også veldig fint å se sånn med øynene, fordi da forstår du det, føler jeg, ganske mye bedre.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Her poengterer Anne viktigheten med det visuelle fremstillinger. Dette utsagnet kodes under kode 1. Hun sier at det å kunne se sammenhengen mellom grafisk og algebraisk representasjon er noe hun snakker med elevene om. Hun påpeker hvordan hun mener at det å se en grafisk representasjon av en ulikhet vil gjøre at elevene forstår ulikheter bedre. Hvorvidt dette er noe som vil øke forståelsen av noe er ikke tema for denne analysen, men at å kunne se sammenhenger mellom ulike representasjoner er en del av utforsking er et faktum, ifølge kjerneelementet utforsking og problemløsning. Hun trekker frem kvadratsetningene som et eksempel hun kan starte en økt med, som elevene skal få jobbe med.

> *For eksempel kvadratsetningen, så må man jo ha litt på første og andre og tredje kvadratsetning, og kanskje vi går begge veier, både fra faktorisert form til uttrykk som ikke er faktorisert, og så omvendt, altså at vi ser litt begge veier* (intervju med Anne, 08.09.22)

Anne er en lærer som bruker mange eksempler i undervisningen sin, hun pleier ofte å starte en undervisningsøkt med et eksempel som elevene skal få prøve seg på først. Hun sier at hun ikke ønsker å legge løsningen på eksempelet i fanget på elevene, og hun utfordrer dem oftest til å prøve å løse problemet selv først, før de sammen med resten av klassen ser på hvordan man kan løse problemet.

> *Da jobber vi oss litt sammen gjennom eksempelet, fordi de har masse forslag.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Dette er et eksempel på å diskutere for å finne en felles forståelse, altså kode 2. Hun sier at hun pleier å starte timene på denne måten, og lar elevene diskutere sammen hvordan de selv ville løst oppgaven. En slik helklassediskusjon vil la elevene se ulike måter å løse et problem på, og vil kunne gi dem en felles forståelse av temaet de jobber med. Noen ganger vil det også være flere løsningsmetoder som fungerer for å få riktig svar. Denne måten å legge opp undervisningen på kan også kodes under kode 3, å fokusere på strategier og fremgangsmåter, dersom Anne gjør som hun sier, og ikke gir elevene en løsningsmetode før hun presenterer elevene for et eksempel som de skal prøve å løse selv på egenhånd.

> *Det snakker vi også om, selv om at jeg gjør det sånn her nå, så kan det hende at dere har løst det på en måte som dere synes er bedre, og da er det helt fint.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Dette gjør at slike helklassediskusjoner også kan være en måte å vurdere hverandres og egne løsningsmetoder og strategier på, som faller under kode 3. Denne måten å undervise på vil dekkes av kode 2 og kode 3, og avhengig av hvilken type eksempler hun gir som oppgaver, så kan de også kodes under kode 1.

Anne peker på forskjellene mellom kompetansemålet som handler om å kunne forklare forskjellen mellom en identitet, likning, et algebraisk uttrykk og en funksjon, og kompetansemålet der elevene skal utforske strategier for å løse likninger, likningssystem og ulikheter (Kunnskapsdepartementet, 2019).

> *Det her er litt mindre forståelse kanskje, når du skriver forklar forskjellen, enn når det står utforsk strategier, da må de, da går du dypere inn i temaet, enn på bare forklare.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Det kan tyde på at Anne mener at når læreplanen bruker verbet utforske, så ligger det i det at elevene skal forstå mer enn når læreplanen bruker verbet forklare. Hun påpeker også at utforsking krever at elevene går dypere inn i temaet. Når vi ser nærmere på verbet utforske slik det står i kompetansemålene, så har hun noen tanker om hvilke faktorer som må være til stede for at elevene skal kunne utforske.

> *… for å kunne utforske noe selv, så må de jo ha lært ulike måter som de kan bruke, de må ha bygd seg opp den grunnmuren med matematisk kunnskap før de klarer å gå løs på et problem helt selv. Og den grunnmuren bruker vi lang tid på å bygge opp, og det er derfor det er litt utfordrende det her med at de skal kunne utforske.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Ut fra Annes beskrivelser kan det tenkes at hun mener at utforsking krever et høyere matematisk nivå fra elevene. Elever som kommer inn i videregående skole med mange hull fra grunnskolen vil måtte tette de hullene for å kunne utforske på en tilfredsstillende måte. Vi snakker litt videre om hvordan Anne synes at utforske-begrepet er litt vanskelig å tolke, og hvordan hennes måte å løse det på er å gi dem hjelpemidler for å kunne utforske.

> *De har ikke kommet frem til det nødvendigvis selv, selv om de har vært med på veien, for som regel så gir jeg dem aldri en fremgangsmåte, sånn «gjør det sånn», med en gang. Jeg lar dem alltid tenke over ting selv først, og det føler jeg kanskje er litt utforsking da.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Hun problematiserer hvordan hun ikke kan være sikker på om det teller som utforsking dersom læreren gir elevene fremgangsmåten. Vektlegging av strategier og fremgangsmåter er en del av kjerneelementet utforsking og problemløsning, men det kan virke som at Anne opplever at elevene ikke utforsker dersom de får gitt løsningsmetoden de skal bruke. Likevel så uttrykker hun at alltid lar elevene prøve selv først, som vil kunne la elevene utvikle egne fremgangsmåter. Ifølge Anne så er det å tenke over ting selv først en måte å utforske på.

> *(…) kanskje pugger de en metode, også skjønner de kanskje ikke egentlig helt hvorfor de kan gjøre det sånn.* (intervju med Anne, 08.09.22)

Dette fremhever viktigheten av å kombinere utforsking og problemløsning med resonnering og argumentasjon.

5.3.2 Intervju med Silje

Silje forteller om en måte å jobbe med algebra i 1T på som hun og hennes kollegaer har kommet til enighet om som de benytter seg av i år. Dette innebærer at de starter med å undervise om algebra og likninger, og så hopper de frem til funksjonskapittelet der de snakker om likninger med funksjonsuttrykk av første grad. Når de er ferdig med det hopper de tilbake til andregradslikninger, før de deretter går tilbake til funksjonskapittelet og diskuterer likninger av andre grad, og så videre.

> *Så går vi fremover og jobber litt med funksjoner de tre neste ukene, også når vi kommer til andregradsfunksjoner så går vi litt tilbake igjen også repeterer vi litt på kvadratsetningene og ser det i sammenheng, og så begynner vi å faktorisere, også kobler vi inn nullpunkt i forhold til faktorisering.* (intervju med Silje, 15.09.22)

Denne måten å dele opp kapitlene på gjør hun for at elevene skal kunne se sammenhengen mellom det rent algebraiske og det grafiske, der det algebraiske presenteres i algebra- og likninger-kapitlene, og det grafiske i funksjonskapittelet. Dette utsagnet kodes under kode 1, som handler om å se sammenhenger.

> *Sånn at jeg prøver å koble frem og tilbake sånn at de får teorien mer på de praktiske tingene.* (intervju med Silje, 15.09.22)

Silje mener at ved å gjøre det på denne måten vil elevene kunne se sammenhengene mellom det hun kaller teori og praksis. Her kan det tenkes at hun ser på teori som algebraiske representasjoner og praksis som grafiske eller visuelle representasjoner. Visuelle representasjoner er noe hun virker å benytte seg av. Hun beskriver hvordan hun gjerne lar elevene få klippe og lime for å jobbe med matematikk. Utsagnet kodes under kode 1.

> *Jeg har jo litt troen på at du lærer lettere dersom du får bruke flere sanser, (...) så har vi i første time delt de inn i grupper og måtte lage den her* [pappfiguren], *også henger vi den opp også må de repetere og repetere og repetere. (...) Jeg har jo litt tro på både det her med aktivitet og farger og utfordringer, og da er vi jo litt inne på det her med å utforske.* (intervju med Silje, 15.09.22)

Hun underbygger tanken om å aktivisere elevene med at hun tror på at de lærer lettere dersom de får bruke flere sanser. Aktivitet, farger og utfordringer er noe hun tenker kan falle under utforsking. Dette utsagnet kan derimot ikke plasseres under noen av kodene.

I intervjuet diskuterer vi litt hvordan oppbygningen til kompetansemålene ser ut, og hva hennes tanker om utforsking slik det står i kompetansemålene er.

> *Ja, og jeg tenker at der det som blir å utforske, det blir å se den her sammenhengen. For det er jo ikke så lett å gjøre noe praktisk, man kan jo ikke snekre noe.* (intervju med Silje, 15.09.22)

Her antyder Silje at hun anser praktiske oppgaver som en måte å se sammenhenger på. Det påpekes at det å kunne se sammenhenger går mye igjen. Silje ønsker gjerne at elevene skal se sammenhengen mellom det matematiske og hvordan det gjøres rent praktisk. «Det er jo ikke så lett å gjøre noe praktisk», sier hun, og begrunner med det valget om å se algebra i sammenheng med kapittelet som handler om funksjoner.

Hun viser meg et eksempel på en type oppgave som hun gjorde sammen med elevene i praksis, da har de brukt papir som de klippet inn i kvadrater for å regne på kvadratsetningene.

> *Det som var litt artig når vi holdt på med kvadratsetningen var jo at mange av elevene kom frem til den generelle regelen (...) for vi hadde jo bare delt det inn sånn her, at her var det åtte centimeter også var den siden sju og den siden én, også er det sju her nede, og når vi da skulle finne arealet av hele så skulle det bli 64, og når de da tok sju pluss én på den ene siden og sju pluss én på den andre siden, så merket de av på figuren også fant de ut hva arealet ble.* (intervju med Silje, 15.09.22)

Denne oppgaven er veldig lik oppgave 3 som jeg har valgt å kalle babyloneroppgaven, fra kapittel 5.2. Hun har brukt denne oppgaven som en undervisningsaktivitet der elevene skal gjøre noe praktisk for å utforske prinsippene ved kvadratsetningene og andregradsuttrykk. Hun forteller videre om hva hun tenker om begrepet utforske i matematikk.

> *Når det er sånn 'utforske', så er det mer sånne gruppeoppgaver. Og da må vi kanskje jobbe på en litt annen måte enn å bare sitte og løse de som er i boka.* (intervju med Silje, 15.09.22)

Utsagnet indikerer at Silje tenker på gruppeoppgaver når hun hører ordet utforske. Dette kan kodes under kode 2. Gruppeoppgaver der elevene må samarbeide for å finne en løsning på problemet krever at elevene kan diskutere og snakke om matematikk. Målet med en slik oppgave vil være å komme frem til en felles forståelse.

5.3.3 Intervju med Stine og Maria

I dette intervjuet er det to personer som intervjues, så for ordens skyld vil utsagn fra Stine markeres med en 'S' og utsagn fra Maria markeres med en 'M'.

I intervjuet snakker Stine og Maria litt om hvordan de tolker utforske-begrepet i læreplanen og hvordan det kommer frem i undervisning. Det kommer frem av intervjuene at de bruker læreverket Matematikk 1T.

> S: *Vi har jo sånne 'utforsk'-oppgaver som ligger gjennomgående i kapitlene som er veldig fine, sånn bare sette elevene til å diskutere i grupper, for eksempel. Og diskutere små ting underveis.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Her bruker Stine utforsk-oppgavene fra Matematikk 1T på en måte som gjør at dette utsagnet kodes under kode 2. Dette fordi hun setter elever til å diskutere i grupper, og som det kommer frem av kapittel 5.2 er disse oppgavene avhengig av at lærerne bruker de som undervisningsaktiviteter der elevene får snakke matematikk. Elevene kan dermed bruke diskusjonen fra gruppearbeidet for å føre frem til en felles forståelse av et begrep eller en matematisk idé.

Stine utbroderer nærmere om hvordan hun bruker utforsking i undervisningen. Hun påpeker at hun ikke bruker utforske-begrepet direkte, men mer indirekte.

> S: *Vi prøver jo å ha litt variasjon i hvordan vi, at det ikke bare er tavlegjennomgang og regning. Så vi gjør litt forskjellige ting, og det kan være en måte å utforske på, for kanskje*

> *man ser ting fra en annen side enn når man bare sitter og regner oppgaver fra boka, for eksempel.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Dette utsagnet forteller at Stine opplever det å gjøre ulike ting som ikke innebærer gjennomgang av teori på tavla og selvstendig regning som utforsking. Det kan tolkes som at Stine tenker at undervisningsaktiviteter som gruppearbeid er å utforske innenfor matematikken.

Maria forklarer videre at hun sjeldent sier til elevene at de skal utforske, men at det heller er noe som inngår i planleggingen av undervisningsøktene. Videre kan hun fortelle hvordan den overordnete delen, eller generelle delen, av læreplanen er et viktig moment.

> M: *Den generelle delen er viktigere for meg nå enn før. (…) Så den bruker vi jo også en del i forhold til hva er det de skal finne og hva er generelle ferdigheter, og at vi prøver å variere mellom de ferdighetene i undervisningen. (…) Generell del sier at vi skal være mer variert, muntlig, skriftlig, digitalt.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Marias tolkning av den overordnete delen av læreplanen innebærer variasjon i hvordan elevene skal bearbeide og uttrykke matematiske begrep. Dette nevnes i en samtale om hvordan de bruker utforsking i undervisningen. Det er rimelig å anta at Maria mener at ulike måter å uttrykke matematikk på kan oppfattes som utforsking.

I intervjuet med Stine og Maria kommer det også frem hvilke aktiviteter de har benyttet seg av i klasserommet.

> S: *Vi har fått små tavler inn i klasserommet som vi har plassert rundt omkring. Og da går det ut på at vi trekker tilfeldig, de får et nummer for eksempel, også deler vi inn i fire grupper. (…) Også må de stå, stå og regne, også får de kanskje noen oppgaver de skal gjøre sammen og diskutere og føre på tavla.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Dette er en undervisningsaktivitet, og utsagnet kodes under kode 2, som handler om å diskutere for å finne en felles forståelse. Stine sier at elevene gjør oppgaver sammen og diskuterer og fører oppgavene på tavla. Elevene må altså kunne snakke om matematikk og formidle egne tanker om hvordan oppgaven skal løses. I intervjuet forteller Stine at de ofte presenterer disse løsningene for resten av klassen, og dermed må elevene som er på gruppe komme sammen om en løsning, altså diskutere for å finne en felles forståelse. Gruppene presenterer for resten av klassen, som igjen kan føre til en bredere forståelse av oppgaven i hele klassen.

Maria forteller videre om hvordan hun pleier å legge opp sine undervisningsøkter.

> M: *... Hva er det egentlig kapittel 2a sier, og så går jeg gjennom regler, (...) markerer dem tydelig også kommer jeg alltid med et oppfølgingseksempel, sånn at de har noe å se på, og så prøver jeg å tenke at, OK, en liten økt så skal de få jobbe selv, eller at vi eventuelt har et oppbrudd med en aktivitet, sånn som de tavlene.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Dette kan minne om slik Anne beskriver hennes foretrukne undervisningsmetode, der undervisningsøkten starter med teoretisk gjennomgang, etterfulgt av et eksempel som elevene skal få prøve å løse på egenhånd. Maria forklarer at hun henter ut det hun har valgt å kalle «regler», som kan være regneregler innenfor kapittelet eller formler og lignende som elevene kan få bruk for. Vi snakker videre om hvorvidt de bruker verbene i kompetansemålene i undervisningen.

> M: *Ja, 'forklare', da har vi jo ofte gjennom at vi setter dem to og to sammen, også går de gjennom for eksempel en sånn 'snakk'-oppgave eller et bevis eller et eller annet, og så skal de drøfte hva det egentlig er de finner ut, og så tar vi gjerne en sånn felles plenumsrunde etterpå, og det kan jo òg være en av de aktivitetene mine.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Her forteller Maria hvordan hun bruker snakk-oppgavene fra Matematikk 1T eller bevis o.l. som gruppeoppgaver der elevene skal diskutere for å finne løsning på oppgaven sammen og drøfte løsningene. Dette utsagnet kodes under kode 2. Gruppearbeidet ender gjerne i en helklassediskusjon eller oppsummering med hele klassen. Det kommer frem av samtalen med Stine og Maria at slike aktiviteter står i fokus når vi snakker om utforsking i matematikk.

> M: *I forhold til det her med å formulere ting selv, problemløsningsstrategier, så har vi jo brukt også i modellering at de lager seg et problem de skal løse ved hjelp av utforsking, der de får litt frie tøyler, det kan være strikkhopp eller muffinsformer i fritt fall.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Her forteller Maria om en annen, litt mer tidkrevende, undervisningsaktivitet som de har gitt til elevene sine, som er større problemløsningsoppgaver der elevene enten velger fra en liste eller lager et eget problem som de skal undersøke. Det ender i en større, åpen oppgave, som de også bruker som vurderingsgrunnlag for elevene. Dette er et gruppearbeid som gjør at dette vil kodes under kode, men også kode 3. Elevene skal både diskutere og jobbe sammen for å komme til en felles enighet om løsningen på problemet, i tillegg til at en slik problemløsningsoppgave legger til rette for å fokusere på strategier og fremgangsmåter, da det ikke eksisterer noen gitt måte å løse et slikt åpent problem på. Stine påpeker at dette har også mye med eksamensformen å gjøre.

> S: *... men vi ble jo litt obs, spesielt da det kom det der med at del tre på eksamen skulle være sånn der oppgaver der elevene skulle utforske, så måtte vi forberede elevene på det og sånne typer oppgaver.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Slik eksamensordningen er i dag, opplever Stine at det kreves at utforsking må inn i undervisningen for å forberede elevene på en eventuell eksamen i 1T. Det kommer frem at Maria opplever utforsking i matematikkundervisningen som noe krevende, av samme årsaker som Anne poengterte tidligere.

> M: *Men det er også veldig avhengig av elevgruppe. (...) Elevene jeg hadde var i faglig sterke nok til å kunne hente ut informasjon selv. (...) Man kan kanskje utforske på lavt nivå, men du må ha ganske grei forståelse for å kunne utforske på en relevant måte.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Hun opplever at utforsking krever et høyere matematisk nivå, eller i hvert fall et solid grunnlag fra grunnskolen, for å kunne utforske på en relevant måte. Stine trekker også frem en annen måte å utforske på.

> S: *Det her med å utforske og det å skulle forklare, i starten så var jeg jo veldig sånn at hvis de* [elevene] *ba om hjelp så ga jeg dem svaret, men i stedet for at jeg skal si hva de skal gjøre i den oppgaven, så stiller jeg mer indirekte spørsmål for å få dem til å reflektere og tenke og forklare selv. (...) Så det handler om sånne småting også, om man kan utforske og reflektere og kunne forklare underveis i prosessen.* (intervju med Stine og Maria, 22.09.22)

Her forklarer Stine hvordan hun tenker at å reflektere selv uten å få svar fra læreren er en måte å utforske på. Dette utsagnet er for generelt for å kunne kodes under noen av de gjeldende kodene.

5.3.4 Hovedfunn fra intervjuene

Hovedfunnene fra intervjuene kan oppsummeres med at kode 1, å finne sammenhenger og lete etter mønster, gikk oftest igjen i intervjuet med Anne og Silje. Disse to lærerne beskriver utforsking som å se sammenhenger mellom ulike representasjoner, der Anne følger en rekkefølge fra å regne for hånd, via GeoGebra og CAS og til programmering. Silje setter algebra i kontekst av funksjonslære for å se de samme sammenhengene.

Alle fire lærerne beskriver gruppearbeid og helklassediskusjon som en måte å utforske på. Silje, Stine og Maria legger også ekstra vekt på undervisningsaktiviteter der elevene må være aktive deltakere. Denne måten å tolke utforsking på kodes under kode 2, å diskutere for å finne felles forståelse.

Anne beskriver det å vurdere løsningsstrategier og når de er hensiktsmessig å bruke som en måte å utforske på, som går under kode 3, å fokusere på strategier og fremgangsmåter. Stine og Maria har introdusert større problemløsningsoppgaver til sine elever, der strategiene og fremgangsmåtene ikke nødvendigvis finnes fra før, og åpner for å la elevene finne ut selv hvilke strategier som fungerer best til deres valgte problem. Silje har ingen utsagn som kan kodes under kode 3.

5.4 Oppgaver gitt av lærerne

I dette delkapittelet skal det tredje og siste steget fra læreplan til klasserommet tas. Det er redegjort for lærernes tolkninger av utforske-begrepet slik det kom frem av intervjuene. Videre skal det presenteres et utvalg av oppgavene som er gitt av lærerne til sine elever når de har jobbet med algebra i 1T. Denne analysen skal gi innsikt i hvorvidt lærerne legger til rette for utforsking for elevene, og om dette stemmer overens med lærernes tolkninger av utforske-begrepet slik det står i læreplanen. Av dette delkapittelet skal det fremkomme hvilke elementer fra kjerneelementet utforsking og problemløsning som er tilstedeværende i oppgavene gitt av lærerne til elevene i matematikkundervisningen som omfatter algebra i 1T. Oppgavene presenteres i samme rekkefølge som i delkapittel 5.3. Til slutt vil det komme en oppsummering av hovedfunnene fra oppgavene gitt av lærerne.

5.4.1 Oppgaver fra Anne

Fra oppgavebanken jeg har laget med alle oppgavene tilsendt meg av lærerne har jeg gått gjennom alle oppgavene fra Anne, og valgt ut to oppgaver som kan kodes under en eller flere av de forhåndsbestemte kodene. Jeg vil presentere to oppgaver fra Anne. Anne lager egne ark til hvert tema med oppgaver som hun har hentet fra ulike læreverk, og noen har hun også laget selv. Oppgavene jeg har valgt ut er oppgaver som kunne kodes innenfor en av de tre forhåndsbestemte kodene. Det er viktig å nevne at disse oppgavene ikke har referanse til noen kilde, da de er sendt til meg fra læreren uten henvisning til hvor oppgavene er hentet fra.

Oppgave 1

Et firma skal produsere en bestemt vare. Kostnaden ved å produsere varen kan deles i to deler. Den faste kostnaden er på 15 000 kr og er uavhengig av hvor mange enheter som blir produsert. Denne kostnaden dekker blant annet utgifter til produksjonsutstyr. Den variable kostnaden er knyttet direkte til produksjonen av en enhet. Utgiftene ved å produsere en enhet er her 250 kr.

a) Hvor mye koster det i alt å produsere 150 enheter?

b) Finn et uttrykk for totalkostnaden K i kroner når det blir produsert x enheter.

c) Fremstill kostnaden K grafisk. Velg x mellom 0 og 200.

d) Firmaet selger denne varen for 400 kr per stk. Forklar at inntekten I er gitt ved

$$I = 400x$$

Fremstill I grafisk i det samme koordinatsystemet.

e) Finn av kurven hvor mange enheter firmaet må produsere og selge for at inntekten av salget skal dekke utgiftene.

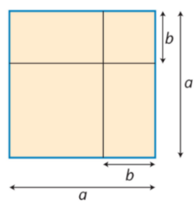
f) Bruk kurvene til å finne ut hvor stort overskudd firmaet hadde da det solgte 150 enheter.

Denne oppgaven kodes under kode 1, å finne sammenhenger og lete etter mønster, med trykk på å se sammenhenger. Elevene skal svare på hvor mye det vil koste å produsere et gitt antall enheter, med utgangspunkt i en fast kostnad og utgifter ved å produsere en enhet. De skal finne K, som er et uttrykk for totalkostnaden, når det blir produsert x enheter, og fremstille dette grafisk innenfor en gitt definisjonsmengde. Elevene blir også bedt om å forklare hvorfor et gitt uttrykk for inntekten

I stemmer, og også fremstille dette grafisk. Fra den grafiske fremstillingen skal elevene bestemme hvor mange enheter som må produsere for at inntektene skal dekke utgiftene, og bruke de samme grafene til å finne ut hva overskuddet er når det er solgt 150 enheter. I oppgaven skal elevene håndtere flere representasjoner, både algebraisk, grafisk og også tolke en situasjonsbestemt forklaring. Det legges til rette for at elevene skal kunne se sammenhengene mellom disse representasjonene, og elevene bes også i oppgave 1d forklare et gitt resultat.

Oppgave 2

Bruk kvadratet nedenfor til å utlede den andre kvadratsetningen.



Denne oppgaven kodes under kode 1, å se sammenhenger og å lete etter mønster, i tillegg til å ha elementer fra kode 3, å fokusere på strategier og fremgangsmåter. I denne oppgaven skal elevene ved hjelp av et kvadrat med sider $a \times a$, utlede den andre kvadratsetningen. Figuren kan gi leseren et lite hint om at denne oppgaven kan ligne på babyloneroppgaven fra kapittel 5.2. Elevene må bruke den geometriske representasjonen og hente ut relevant informasjon for å utlede, og dermed se sammenhengen med, en algebraisk formel den andre kvadratsetningen. Dette gjør at oppgaven kodes under kode 1. Elementene fra kode 3 omfatter hvordan elevene skal utlede kvadratsetningen. Svaret er allerede gitt, dersom elevene vet hva formelen er, og de skal selv finne ut hvordan man kan utlede denne formelen. Dette gjør at oppgaven legger opp til et fokus på strategier og fremgangsmåter, da svaret allerede er gitt, men ikke løsningen.

5.4.2 Oppgaver fra Silje

På samme måte som med Anne, har jeg gått gjennom oppgaver fra Silje som hun har gitt sine elever. Jeg har valgt ut to oppgaver fra Silje. Silje gir elevene undervisningsaktiviteter og oppgaver som er tatt fra læreverket de benytter seg av som er Matematikk 1T. Oppgavene kan kodes innenfor en eller flere av de tre forhåndsbestemte kodene.

Oppgave 1

Vi har gitt likningssystemet

(1) $kx + y = 3$

(2) $x - 2y = 1$

a) For hvilke verdier av *k* har likningssystemet

1 én løsning

2 ingen løsninger

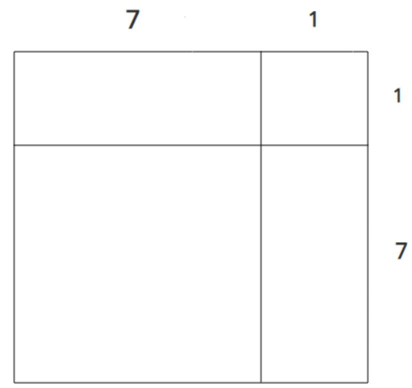
b) Hvorfor er det ikke mulig å finne en verdi for *k* som gir uendelig mange løsninger på likningssystemet?

(Borge et al., 2020, s. 239)

Denne oppgaven kodes under kode 1 som innebærer å finne sammenhenger og å lete etter mønster. I denne oppgaven får elevene gitt et likningssystem, og de skal finne ut for hvilke verdier av *k* som gir én løsning og ingen løsninger. Elevene blir også bedt om å forklare *hvorfor* det ikke går an å finne en verdi for *k* som vil gi likningssystemet uendelig mange løsninger. Elevene skal finne ut hva endringer i *k* vil gjøre med resultatet, og spesielt finne ut hva som vil én løsning, og ingen løsninger. Dette kan hjelpe elevene med å observere et mønster, med endring av *k*, og se sammenhengen mellom konstanten *k* og løsningene.

Den siste oppgaven jeg ønsker å ta med fra Silje har ingen oppgavetekst, da den ble gitt som en undervisningsaktivitet til elevene. Oppgaven er beslektet med babyloneroppgaven fra kapittel 5.2, med noen endringer, og innebærer at elevene får utdelt saks og papir, og skal i grupper klippe ut kvadrat og bruke det til å utlede den første kvadratsetningen. Silje forteller om oppgaven i intervjuet, og der beskriver hun at elevene kommer frem til det hun kaller «den generelle regelen», altså den første kvadratsetningen. Kvadratet er et 8×8-kvadrat, og skulle klippes ut som vist i figur 1.

Figur 1: Kvadrat delt inn i fire deler: et 1×1-kvadrat, et 7×7-kvadrat, og to 7×1-firkanter.



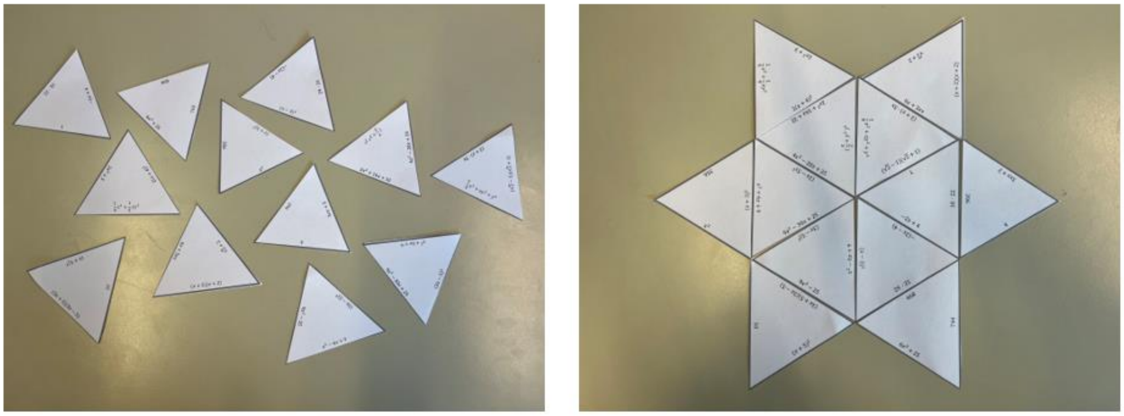
Denne oppgaven vil kodes under kode 2, å diskutere for å finne en felles forståelse, med elementer av kode 3, å fokusere på strategier og fremgangsmåte, samt elementer fra kode 1, å finne sammenhenger og å lete etter mønster. Elevene skal jobbe sammen og diskutere for å utlede formelen for den første kvadratsetningen. De blir ikke gitt noen fremgangsmåte, bare et kvadrat med gitte dimensjoner. Elevene skal diskutere og finne en felles forståelse av kvadratsetningen. Elementene fra kode 3 omfatter hvordan elevene selv skal finne ut hvordan man kan finne frem til formlene. Svaret er gitt, de kan enkelt slå opp den algebraiske formelen i læreboka, men målet med oppgaven er å bruke fysiske hjelpemidler i form av firkanter i papir med bestemte lengder for å finne ut hvordan disse henger sammen. Dette bringer også inn hvordan kode 1, å finne sammenhenger og lete etter mønster kommer frem i oppgaven, da elevene skal finne sammenhengen mellom en fysisk geometrisk fremstilling og en algebraisk formel.

5.4.3 Oppgaver fra Stine og Maria

Stjerneoppgaven

Den første oppgaven fra Stine og Maria har jeg valgt å kalle stjerneoppgaven, en oppgave som lærerne har hentet fra den digitale ressursen som tilhører læreverket Matematikk 1T. Denne oppgaven går ut på at elevene deles inn i grupper og får utdelt tolv trekanter (se figur 2) som de skal sette sammen til en stjerne. På hver side i trekantene står det et tall eller et algebraisk uttrykk, og det er elevenes oppgave å finne ut hvilke sider fra hvilke trekanter som korresponderer med hverandre. Et eksempel kan være at på en side i en trekant står det $4x^2 - 20x + 25$ og på en annen trekant vil det på en av sidene stå $(2x - 5)^2$. Disse to sidene av trekantene settes mot hverandre, siden $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$. Elevene skal diskutere og jobbe sammen for å sette trekantene sammen på riktig måte, slik at det danner en stjerne.

Figur 2: Figuren viser et eksempel på hvordan stjerneoppgaven kan se ut. Her er det tolv trekanter som er klippet ut fra et ark, med et tall eller et algebraisk uttrykk på hver side av trekanten (eget foto). På venstresiden ser vi trekantene ligge hver for seg, på høyresiden er trekantene satt sammen til en stjerne med uttrykkene som hører sammen liggende mot hverandre.



Denne oppgaven kodes under kode 2, å diskutere for å finne felles forståelse, med elementer av kode 1, å finne sammenhenger og lete etter mønster. Oppgaven er gitt som en undervisningsaktivitet der elevene skal jobbe sammen i grupper, som gjør dette til en oppgave som legger til rette for at elevene skal kunne snakke om matematikk, og bruke diskusjonen til å bli enige om hvilke uttrykk som hører sammen. Elementene fra kode 1, å finne sammenhenger og lete etter mønster, ligger i hvordan elevene skal se likhetene mellom to uttrykk eller tall, altså to representasjoner av det samme.

Faktoriseringsoppgaven

Den andre oppgaven fra Stine og Maria vil jeg kalle faktoriseringsoppgaven. Elevene får utdelt et ark med regler, brikker og et spillebrett (se figur 3). Oppgaven går ut på at elevene skal spille mot hverandre, to og to, og legge en brikke på et tall etter tur. Den første spilleren må legge sin brikke på et partall. Neste spiller må legge brikken på et tall som enten er en faktor i det forrige tallet, eller der det forrige tallet er en faktor. Den spilleren som ikke kan legge brikken på noe tall taper spillet. Oppgaven spør også elevene om de finner noen strategi for hvilke tall det vil være lurt å legge brikker på.

Figur 3: Spillebrettet til faktoriseringsoppgaven, et 10×10-brett med tall i kronologisk rekkefølge fra 1 til 100.

Spillebrett:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Denne oppgaven kodes under kode 3, å fokusere på strategier og fremgangsmåter. Gjennom å spille mot hverandre skal elevene finne gode strategier for hvordan det vil være lurt å legge brikkene, som i sin tur krever at elevene må kunne finne en fremgangsmåte som er hensiktsmessig og gjør at de vinner. For et trent øye kan det hende man ser en god strategi med en gang, men for elever som introduseres for algebra på videregående skole for første gang kan dette være et problem som krever at de tar i bruk problemløsningsevnene sine for å kunne løse.

5.4.4 Hovedfunn fra oppgaver gitt av lærerne

Samlet sett er det en jevn fordeling over alle de tre kodene, men fordelingen ser litt annerledes ut fra lærer til lærer.

Den første oppgave fra Anne er en typisk regneoppgave, som elevene kan jobbe med på egenhånd. Dette gjenspeiles også i hvordan det ikke er noen oppgaver fra Anne som kan kodes under kode 2, å diskutere for å finne felles forståelse.

Oppgavene fra Silje er fordelt ut over alle kodene, med noen oppgaver som ligner mer på oppgavene gitt av Anne. Silje har også en undervisningsaktivitet som gjenspeiler det hun forteller i intervjuene, at hun har tro på at dersom elevene får bruke flere sanser så lærer de lettere.

Undervisningsaktivitetene fra Stine og Maria er to ganske forskjellige aktiviteter, som krever ganske ulike ting av elevene, men det som går igjen er at oppgavene ikke ber elevene om å forklare *hvorfor* svaret er riktig.

6 Diskusjon

Analysen viser at det er flere måter å tolke utforsking på. Flere av lærerne opplever at utforsking er et omfattende begrep, men samtidig kommer det frem at flere av lærerne er usikre på hva man kan kalle utforsking, og hvorvidt disse tolkningene er tilstrekkelige til å kunne kalle noe for utforsking. I dette kapittelet skal jeg ta for meg resultatene fra analysen og vurdere hvordan de har kommet til uttrykk hos læreverk og lærere, og diskutere dem i lys av relevant teori.

6.1 Utforsking er å se sammenhenger

Kjerneelementet utforsking og resonnering begynner med setningen *utforsking i matematikk T handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar …* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kode 1, å finne sammenhenger og lete etter mønster, er tatt direkte fra dette utdraget. I teoridelen beskrives det å se sammenhenger blant annet som å kunne oversette mellom ulike semiotiske representasjoner (Duval, 2006). Dette innebærer at elevene skal kunne forstå hva representasjonene betyr, og oversette mellom dem. Det å kunne se sammenhengen mellom matematiske idéer har også flere paralleller til beskrivelsen av relasjonell forståelse slik den fremkommer i teorikapittelet. Relasjonell forståelse kan oppsummeres med at elever skal vite hva de skal gjøre, men også hvorfor (Skemp, 1978). Koblingen mellom å se sammenhenger og å kunne argumentere for det vil diskuteres i delkapittel 6.4, mens dette delkapittelet tar for seg første del, som handler om oppfatningen om at utforsking er å se sammenhenger.

Fra læreverket finner jeg at flere av oppgavene innebærer å finne sammenhenger og lete etter mønster. Både oppgave 3 (s. 30), oppgave 5 (s. 32) og oppgave 6 (s. 33) er alle oppgaver der elevene skal oversette mellom forskjellige semiotiske representasjoner. I oppgave 5 og 6 skal elevene oversette mellom algebraiske og grafiske representasjoner, mens det i oppgave 3 skal oversettes mellom geometrisk og algebraisk representasjon. Det å kunne oversette mellom forskjellige semiotiske representasjoner er helt essensielt for at elever skal kunne bedrive problemløsning i matematikk (Duval, 2006, s. 107). Oversettingen i oppgave 5 og 6 innebærer at elevene enten skal tilpasse kurver eller tegne grafer, mens det i oppgave 3 innebærer gjenkjenning av parametere og tegning (Janvier, 1987, s. 28). Omdannelsene som elevene må gjøre er parametergjenkjenning, tegning og tilpasning og kurver, som er vanskeligere enn for eksempel plotting, avlesning og lesing (Janvier, 1987, s. 28). Også i oppgave 2 (s. 28) skal elevene se sammenhenger, men denne oppgaven skiller seg fra de andre, da hovedpoenget med denne oppgaven er at elevene skal oppdage et mønster og dermed se hvordan Pascals trekant kan brukes til å transformere uttrykk av n-te grad. Ved hjelp av digitale verktøy skal elevene gå fra faktorisert form til ufaktorisert form av uttrykket. Dette er en behandling av semiotiske representasjoner, ved hjelp av en annen semiotisk representasjon. Dette er ikke en omdannelse, og er også mye mindre krevende enn omdannelsene man ser gjort i oppgave 3, 5 og 6.

I intervjuene forteller Anne om hvordan hun tenker på utforsking som en slags progresjon fra å regne for hånd, gjennom algebraiske uttrykk, til å bruke grafisk verktøy som for eksempel GeoGebra, og videre gjennom CAS og ved programmering. I kjerneelementet utforsking og problemløsning står det at elevene skal kunne vurdere om problemer kan løses best ved hjelp av digitale verktøy, eller uten digitale verktøy (Kunnskapsdepartementet, 2019). Anne sin tolkning av utforsking kan gi elevene et større forråd av løsningsmetoder, og hun påpeker også at elevene skal kunne vurdere når det er best å bruke de ulike måtene å løse problemene på. Dette kan i sin tur hjelpe elevene med å se sammenhenger mellom ulike semiotiske representasjoner. Duval sier at elever må kunne integrere minst to forskjellige typer semiotiske representasjoner for å kunne forstå et matematisk objekt, så det å introdusere elevene for ulike måter å løse et problem på, der elevene kan se sammenhengene mellom semiotiske representasjoner, som Anne legger opp til, vil kunne bidra til elevers i forståelse i matematikk (Duval, 2006, s. 107). Anne forteller videre at hun synes det å vise ulikheter grafisk er «veldig fint». Matematiske begrep er abstrakte, men dersom elevene kan få se noe grafisk og faktisk se hvordan disse to semiotiske representasjonene henger sammen, vil det kunne hjelpe elevene til å forstå begrepet. Dette stemmer overens med Anne sin oppfatning. Det er også viktig at elevene skal kunne oversette mellom de to representasjonene, for å kunne bedrive utforsking og problemløsning, og det er det Anne legger til rette for i måten hun bruker grafiske verktøy for å la elever se sammenhenger mellom representasjoner.

Silje trekker også frem den samme måten å se sammenhenger mellom algebraiske uttrykk og grafiske fremstillinger på, men hun gjør det på en litt annen måte. Hun kontekstualiserer det elevene lærer om algebra og likninger, likningssystem og ulikheter gjennom å hoppe mellom algebrakapitlene og funksjonskapittelet. Hun sier at hun gjør det på denne måten for at elevene skal «få teorien mer på de praktiske tingene». Det tolkes som at teorien er de algebraiske fremstillingene, mens praktiske ting er grafiske fremstillinger. Denne måten å gjøre det på kan gjøre det mer relevant for elevene, på den måten at de ser hvordan uttrykk, likninger, likningssystem og ulikheter ser ut i et koordinatsystem, og får en relasjon til hva tallene betyr i en annen semiotisk representasjon. Dette er viktig for at elever skal kunne bedrive problemløsning, da de må kunne integrere minst to semiotiske representasjoner (Duval, 2006, s. 107). På denne måten kan det også gjøre algebra mer meningsfylt, som igjen vil legge til rette for at elever skal forstå forholdene og sammenhengene mellom de ulike matematiske idéene, gjennom å oppnå en relasjonell forståelse av algebra (Skemp, 1978).

Anne forklarer i intervjuet at hun opplever at verbet utforske i læreplanen innebærer mer forståelse enn for eksempel verbet forklare i læreplanen. Både Maria og Anne forteller at de opplever at utforsking krever et høyere matematisk nivå av elevene. Dersom elevene ikke har en relasjonell forståelse av begrepene vil de ikke kunne utforske dem på en måte som er nyttig. Skemp (1978) beskriver hvordan en instrumentell forståelse, altså en mer overfladisk og prosedyreorientert forståelse av matematikken, kan hindre elevene i å kunne løse større problemløsningsoppgaver, som vil innebære utforsking i matematikk. Elever som Anne og Maria ikke opplever har et høyt nok nivå, eller godt nok matematisk grunnlag for å kunne utforske, kan være elever som har en mer instrumentell tilnærming til matematikk. Dette vil kunne begrense deres utforskingsmuligheter.

Alle lærerne gir oppgaver som er eksempler på hvordan elever skal se sammenhengen mellom ulike semiotiske representasjoner. Måten det kommer frem i oppgaven gitt av Stine og Maria på er gjennom stjerneoppgaven (s. 49-50), der elevene skal finne hvilke algebraiske uttrykk og tall som er like. Dette er ikke å omdanne semiotiske representasjoner, men er en behandling (Duval, 2006). De nevner heller ikke det å se sammenhenger eller lete etter mønster i intervjuene, hvilket skiller disse to lærerne fra Anne og Silje. Oppgavene gitt av Anne (s. 46-47) demonstrerer hvordan elever skal se sammenhenger mellom ulike semiotiske representasjoner, da spesielt sammenhengen mellom algebraisk formel og grafisk fremstilling, og sammenhengen mellom geometrisk fremstilling og algebraisk formel. Måten det kommer frem på i oppgaven gitt av Silje (s. 48), er at elevene skal finne sammenhengen mellom endring i en gitt faktor og hvordan det vil påvirke et likningssystem med denne faktoren.

Det å se sammenhenger og lete etter mønster er en del av kjerneelementet utforsking og problemløsning. Av analysen fremkommer det at dette i stor grad gjenspeiles i tolkningene fra læreverket, og av Anne og Silje. Det legges mye fokus på hvordan elevene skal se sammenhengene mellom ulike semiotiske representasjoner, og oppgavene fra læreverket er for det meste kognitivt krevende omdannelsesoppgaver. Det blir ikke nevnt i like stor grad av Stine og Maria, men det finnes spor av denne koden i én av oppgavene gitt til elevene.

6.2 Gruppearbeid og diskusjon som utforsking

Det å diskutere for å finne felles forståelse er en del av kjerneelementet utforsking og problemløsning i læreplanen, og er også en del av problemløsning i matematikk. Dette kan manifestere seg i klasserommet på mange måter. Elever som jobber sammen to og to, gruppearbeid eller helklassediskusjon er bare noen eksempler på hvordan denne koden kan utspilles i klasserommet.

I analysekapittelet påpekte jeg hvordan flere av utforsk- og snakk-oppgavene fra læreverket kan brukes på en måte som gjør at de vil kodes under kode 2, som handler om å diskutere for å finne felles forståelse. På grunn av dette er det ingen av oppgavene som har kode 2 som sin hovedkode, men det er mange av dem som har elementer av denne koden. Dette er fordi det i utgangspunktet er måten oppgavene gis til elevene på som vil avgjøre hvorvidt den omfatter denne delen av kjerneelementet, nemlig det å diskutere for å finne felles forståelse. Fra intervjuene kunne Silje fortelle at hun brukte utforsk- og snakk-oppgavene fra læreverket Matematikk 1T ved at hun setter elever i grupper for å diskutere oppgavene. Stine og Maria gjør også det samme, men med snakk-oppgavene fra det samme læreverket. De forteller at elevene sammen skal drøfte oppgaven, og så avslutter de aktiviteten med at de går gjennom løsningene i plenum, som en helklassediskusjon. Dersom oppgavene gis som en undervisningsaktivitet på denne måten, som krever at elevene skal snakke matematikk med hverandre, så vil dette vær en del av kode 2, å diskutere for å finne felles forståelse.

En av oppgavene fra læreverket som i utgangspunktet er ment som en diskusjonsoppgave er oppgave 6 (s. 33). Det kan argumenteres for at oppgaven av denne grunnen bør kodes under kode 2, men det vil avhenge av hvordan læreren bruker oppgaven i klasserommet. I innledningen til læreverket har lærebokforfatterne spesifisert at snakk-oppgaver skal gi elevene muligheten til å kommunisere matematikk (Borge et al., 2020, uten sidetall), så denne typen oppgave er ment å brukes som diskusjonsoppgave. Dersom den brukes på denne måten, vil oppgaven kunne hjelpe elever til å finne en felles forståelse gjennom å diskutere deres oppfatninger og løsninger på hvordan ulikheten kan løses ved hjelp av det grafiske bildet gitt i oppgaven, og dermed komme til enighet om hva som er den mest riktige løsningen. Dette er også en viktig del av kjerneelementet utforsking og problemløsning (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Anne forteller i intervjuene at hun pleier å starte øktene sine i 1T med et eksempel, der elevene skal prøve å løse eksempelet på egenhånd først, før klassen jobber seg gjennom eksempelet sammen med læreren, gjerne på tavla. Dette er også en måte å diskutere for å finne felles forståelse. Anne sier at når hun går gjennom eksempler hun har gitt elevene i oppgave å løse på tavla, så har elevene mange forslag til hvordan man kan løse det, og da kan det åpne for at elevene skal se ulike måter å løse problemer på og oppdage ting de ikke hadde funnet ut av selv. Med læreren som medierer samtalen vil elevene på denne måten kunne oppnå en felles, men også riktig, forståelse av det matematiske begrepet som eksempelet omfatter. Dette er også en del av utforsking innenfor matematikk. Stine og Maria forteller i intervjuet hvordan de benytter seg av små tavler plassert rundt omkring i klasserommet, der elevene deles inn i grupper, og så får de oppgaver som de skal løse sammen på tavla. Ofte skal elevene også presentere løsningene sine gruppevis for resten av klassen, som kan være en slags helklassediskusjon, og er også en måte å diskutere for å finne felles forståelse på.

Silje forklarer at hun assosierer utforsking med gruppeoppgaver. Stjerneoppgaven fra Stine og Maria (s. 49-50) er også en oppgave der elevene skal jobbe sammen i grupper. De skal diskutere for å bli enige om hvilke uttrykk som er like. Dette kan regnes som utforsking gjennom at det dekkes av kode 2. Gruppeoppgaver innebærer at elever skal jobbe sammen for å løse et problem. Avhengig av hvordan oppgaven ser ut, kan dette ha mange likheter med slik problembasert læring er lagt opp. Gruppearbeid i problembasert læring beskrives som at det skal være strukturert rundt et problem som omfatter en praktisk situasjon (Graaff & Kolmos, 2003). Et eksempel som Silje gir elevene, er oppgaven som er beslektet med babyloneroppgaven (s. 48-49). Her skal elevene gjennom gruppearbeid utlede den første kvadratsetningen. Denne oppgaven kan bli et generisk eksempel, da figuren kan representere kvadrater generelt, og har helt karakteristiske egenskaper ved et kvadrat. Sidene i kvadratet har gitte lengder, og dersom elevene greier å se strukturen, kan disse lengdene byttes ut med a og b i stedet, og figuren er å regne som et generelt eksempel. Ved at elevene gir aksepterte argumenter for hvordan kvadratet kan brukes for å utlede kvadratsetningen, vil dette også kunne regnes som et tilfredsstillende bevis (Balacheff, 1988, s. 219).

Et eksempel på problembasert læring som kommer frem av analysen er Stine og Maria som gir elevene større problemløsningsoppgaver, som de skal jobbe med i grupper. Gruppearbeidet er strukturert rundt en situasjon eller et problem som elevene velger selv, i tråd med Graaff og Kolmos' beskrivelse av PBL (Graaff & Kolmos, 2003). Noen eksempler som lærerne gir, er strikkhopp eller muffinsformer i fritt fall. Her kan elevene ut fra situasjonen lage egne problemstillinger som passer til situasjonen, og løse dem. Dette kan ligne på Pólya sin beskrivelse av en problemløsningsprosess, der elevene skal (1) forstå problemet, (2), utforme en plan, (3) utføre planen og (4) reflektere over løsningen (Pólya, 1945). Denne undervisningsaktiviteten, som lærerne for øvrig også sier de bruker som en del av vurderingsgrunnlaget, vil gi elevene mulighet til å lære om matematikk gjennom åpne spørsmål, og ved å utforske flere veier mot en løsning (Maaß & Doorman, 2013). Dette er også likt slik inquiry-prosessen blir beskrevet, der elever starter med et spørsmål, og skal finne løsningen gjennom observering, undersøking, planlegging og analysering (Artigue & Blomhøj, 2013). Slik Stine og Maria formidler måten de organiserer denne problemløsningsoppgaven på, får elevene mulighet til å bedrive utforsking og problemløsning på en tilfredsstillende måte.

Læreverket Matematikk 1T fra Aschehoug Undervisning legger opp til at utforsk- og snakk-oppgavene skal kunne brukes som gruppeoppgaver og diskusjonsoppgaver. Silje, Stine og Maria bruker disse oppgavene på denne måten. Det er også flere måter lærerne får elevene til å diskutere og snakke matematikk på, gjennom eksempler gitt ved starten av timen av Anne, gruppeoppgaver og større problemløsningsoppgaver.

6.3 Utforsking og problemløsning

Problemløsning er en del av kjerneelementet utforsking og problemløsning, som er utgangspunktet for utarbeidelsen av de forhåndsbestemte kodene som resultatene fra denne studien er analysert ved hjelp av. I teoridelen dras det frem hvordan man skiller mellom et problem og et spørsmål. Et problem vil ikke ha en gitt metode for å løse det, dette i motsetning til et spørsmål. Om noe er et spørsmål eller et problem vil dermed avhenge av mottakeren av spørsmålet eller problemet. Når det ikke foreligger en gitt metode for hvordan det skal løses, vil en oppgave av denne typen gå under kode 3, å fokusere på strategier og løsningsmetoder, da et problem i sin natur vil kunne løses på mange måter. Dette er en del av utforsking i matematikk.

Fra læreverket Matematikk 1T kommer problemløsning frem i form av oppgaver der elever skal vurdere ulike fremgangsmåter. Både oppgave 1 (s. 27), oppgave 3 (s. 30) og oppgave 4 (s. 31), av totalt seks oppgaver, er av typen der elevene blir presentert med én eller flere måter å løse et problem på, og så skal elevene vurdere løsningsmetodene. Dette er i tråd med det Pólya sier om at elever børe reflektere over effektiviteten i strategier for å løse problemer, og finne de mest optimale og tilfredsstillende løsningene (Pólya, 1945). Dette er også en del av kjerneelementet utforsking og problemløsning, der det presiseres at elever *skal* legge mer vekt på strategiene og fremgangsmåtene enn på løsningene (Kunnskapsdepartementet, 2019), som har flere paralleller med problembasert læring, og er i tråd med det Graaff og Kolmos sier om at formuleringen av problemstillingen bør ha høyere prioritet enn svaret man kommer frem til i problembasert læring (Graaff & Kolmos, 2003). Det å prioritere strategier og fremgangsmåter fremfor løsningen i seg selv støttes også av det Hiebert et. al. sier om reflective inquiry, der måten det vil komme frem i matematikkundervisningen på er gjennom måten løsningen på et problem vil åpne for dypere forståelse og gi innsyn i nye forhold i matematikken, men ikke har like mye å gjøre med selve løsningen til problemet (Hiebert et al., 1996, s. 14-15).

En oppgave som har gått mye igjen i analysen av resultatene er oppgaven jeg har valgt å kalle babyloneroppgaven. Den er først presentert i kapittel 5.2, oppgaver fra læreverket, og videre i kapittel 5.4, oppgaver gitt av lærerne. Denne oppgaven gis både av Anne (s. 47) og Silje (s. 48-49), men på to litt ulike måter å presentere den for elevene på. Anne har gitt oppgaven som en vanlig tekstoppgave, der elevene blir presentert for en figur som de skal bruke til å utlede den andre kvadratsetningen. Silje har gitt oppgaven som en undervisningsaktivitet, der elevene skal bruke en fysisk geometrisk representasjon av den samme figuren for å utlede kvadratsetningen, uten en gitt fremgangsmåte. Oppgaven har blitt kodet under alle de tre kodene gjennom analysekapittelet, og dette er fordi måten den blir gitt til elevene på er såpass forskjellig fra læreverket, og mellom Anne og Silje. Likevel vil den i alle tre tilfellene ha noen elementer av kode 3, å fokusere på strategier og fremgangsmåter. Dette fordi elevene i utgangspunktet allerede vet svaret, dersom de har blitt introdusert for formelen for kvadratsetningene. De skal bruke en annen representasjon enn en algebraisk representasjon for å utlede formelen, og må derfor benytte seg av problemløsning, gjennom å utvikle en strategi for å koble de to representasjonene sammen på en optimal og tilfredsstillende måte, som er en del av problemløsningsprosessen. Dette må også kombineres med å vurdere løsningen, og forstå hvorfor løsningen er riktig eller ikke riktig. Dette vil jeg komme tilbake til i neste delkapittel, kapittel 6.4, som handler om naiv empirisme i utforsking.

I analysen kom det frem hvordan Anne liker å bruke eksempler som innledning til undervisningen, der hun alltid lar elevene få prøve å løse eksempelet først, før hun går gjennom det sammen med elevene og til slutt gir dem løsningen, eller at de finner løsningen sammen. Dette er i tråd med det Hiebert et. al. sier om hvordan matematikkundervisningen bør innledes med spørsmål og problem i problembasert læring, som er en undervisningsmetode med mange likhetstrekk til kjerneelementet utforsking og problemløsning (Hiebert et al., 1996, s. 12). Dersom elevene ikke vet hvordan eksempelet skal løses fra før, så er dette et problem. På denne måten vil måten Anne introduserer matematikktimene sine på ha likheter med måten læreplanen beskriver utforsking, gjennom at elevene selv skal lage en måte å løse et problem som de ikke kjenner fra før (Kunnskapsdepartementet, 2019).

En av undervisningsaktivitetene fra Stine og Maria, som jeg har valgt å kalle faktoriseringsoppgaven (s. 50-51), vil ha flere fellesnevnere til det læreplanen sier om problemløsning. I denne oppgaven skal elevene utvikle strategier for å vinne spillet. Dette samstemmer med det læreplanen sier om at elevene skal utvikle måter å løse et problem de ikke vet hvordan de skal løse fra før (Kunnskapsdepartementet, 2019). Stine og Maria forteller også om hvordan de gir elevene sine det de kaller større problemløsningsoppgaver, der elevene skal lage problemstillinger selv, og utforske en situasjon, der strikkhopp eller muffinsformer i fritt fall er eksempler på situasjoner som kan brukes. Ifølge Howard Barrows' beskrivelser, vil dette være et godt eksempel på problembasert læring i klasserommet (Graaff & Kolmos, 2003). Denne måten å bedrive problemløsning på kan være verdifull for elevene, da de vil kunne se nytten i hvordan matematikken kan brukes, samtidig som de lærer matematikk (Hiebert et al., 1996, s. 18). Dette er en måte å oppnå en relasjonell forståelse for matematikk på, som i sin tur kan bidra til at elever lettere kan se sammenhengen mellom ulike matematiske idéer (Skemp, 1978, s. 12). Det kan bety at problemløsning, slik som Stine og Maria gjør det med sine elever, kan være en måte å fokusere på strategier og fremgangsmåter på (kode 3) som kan hjelpe elever med å se sammenhenger (kode 1). Måten denne oppgaven gis på av Stine og Maria innebærer at elevene skal jobbe sammen i grupper, og diskutere for å løse oppgaven og presentere den som et vurderingsgrunnlag for matematikk 1T. Denne typen større problemløsningsoppgaver dekkes av elementene nevnt i kjerneelementet utforsking og problemløsning.

Læreverket legger i stor grad til rette for problemløsning og vurdering av strategier og fremgangsmåter i matematikk. Anne gjør det samme, gjennom å alltid la elever prøve å regne ut eksempler først, og utvikle egne metoder for å løse oppgaver. Babyloneroppgaven er også en oppgave gitt av flere av lærerne, der elevene skal vurdere og fokusere på strategier og fremgangsmåter. Problemløsning kommer i stor grad til uttrykk gjennom større problemløsningsoppgaver gitt av Stine og Maria.

6.4 Naiv empirisme og resonnering i utforsking

I analysen av datamaterialet kom det frem hvordan flere oppgaver ber elevene om å løse problemer, men ikke om begrunnelse for hvorfor løsningen er riktig. Konsekvensene av dette kan være at elevene risikerer å ende opp med å løse oppgaver gjennom naiv empirisme. Dette er en slags bevismetode, som egentlig ikke kan regnes som et fullkomment bevis, fordi den innebærer at elever gjennom å verifisere flere tilfeller hevder at noe stemmer (Balacheff, 1988). Det kan bety at man gjør den samme utregningen på uttrykk med små endringer, og dermed påstår at løsningen stemmer. Denne løsningsmetoden ønsker jeg å problematisere, og vil i dette delkapittelet ta for meg hvordan naiv empirisme ser ut i datamaterialet, og også diskutere det i lys av kjerneelementet som heter resonnering og argumentasjon. Jeg skal ta for meg underspørsmålet som ble presentert i innledningen til denne oppgaven: *hvordan henger utforsking og problemløsning sammen med resonnering og argumentasjon i denne prosessen?*

I læreverket ser jeg tendenser til naiv empirisme i oppgave 2 (s. 28), hvor elevene skal se sammenhengene mellom algebraiske uttrykk og Pascals trekant, og i oppgave 5 (s. 32), der de skal se på grafiske fremstillinger av likningssystem, og si noe om antall løsninger for et likningssystem. Det står ingen steder i noen av oppgavene at elevene skal begrunne svarene sine. Oppgavene legger ikke til rette for at elevene nødvendigvis skal forstå *hvorfor* mønsteret eller sammenhengene er der. Oppgaver som *kan* tolkes som utforskende, har også en tendens til å mangle resonneringsaspektet. I oppgave 5 blir elevene bedt om å svare på hvordan det grafiske bildet ser ut, og si noe om antall løsninger. Begge oppgavene er merket som ‘utforsk’-oppgaver av læreverket, men de mangler et viktig aspekt, der elever skal forklare hvorfor deres løsninger er riktige eller hvorfor strategier fungerer eller ikke fungerer. Denne tendensen ser vi også i oppgave 1 (s. 46) gitt av Anne til elevene.

Det som skjer i oppgaveteksten til disse oppgavene er at resonnering og argumentasjon forsvinner. Tidligere har inquiry blitt nevnt som et viktig begrep som omfatter utforsking i matematikk, og en viktig del av inquiry-prosessen er å kombinere den med å forstå prosessen og det den innebærer (National Research Council, 2000). Dersom denne delen av oppgaveløsningen forsvinner, så vil det være et hinder for elevers videre utvikling av kognitive evner og resonnering i matematikk. Dewey sier at inquiry ikke stopper med løsningen på et problem, og en konklusjon, men man må begrunne *hvorfor* løsningen fungerer (Artigue & Blomhøj, 2013). Inquiry-based learning kan hjelpe elever til å utvikle kritisk tenkning, og det er viktig for at de skal kunne resonnere og argumentere for sine løsninger (Maaß & Doorman, 2013). Det nevnes også i læreplanen, der resonnering og argumentasjon i matematikk blir beskrevet som at «elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det er tydelig at dette er noe som er viktig i matematikk, og derfor er det viktig at når elever skal bedrive utforsking, så må dette ses i lys av kjerneelementet resonnering og argumentasjon. Utforsking for utforskingen sin del har lite å si dersom elevene ikke forstår hvorfor de gjør det. Lærerne nevner også dette, Anne forteller hvordan hun synes det er viktig at elever kan løse likninger for hånd, og ikke bare på PC. Dette fordi de får svaret direkte gjennom å skrive inn likninger i CAS, for eksempel, og dersom elever får dette svaret og ikke skjønner hvorfor det stemmer, så sier hun at de egentlig ikke har skjønt det. Relasjonell forståelse innebærer at elevene vet hvorfor de gjør noe (Skemp, 1978), så det Anne forteller om at elevene egentlig ikke har skjønt det, betyr at elevene ikke har en relasjonell forståelse for begrepet, men det kan likevel bety at de har en instrumentell forståelse.

Et hovedfunn fra denne studien er at utforsking i matematikk krever at elevene har en relasjonell forståelse av matematiske begrep. Dette kan bare oppnås gjennom at elevene får tilgang til begreper gjennom semiotiske representasjoner, men også kan oversette mellom representasjonene. Utforsking og problemløsning i matematikk må dermed ses i lys av resonnering og argumentasjon.

7 Fremtidige perspektiver

Da Kunnskapsløftet 2020 ble innført, var det mye snakk blant mine medstudenter og i didaktikkforum på nett om det nye begrepet 'utforske'. Dette omfattende, men samtidig vage begrepet, som man nå måtte ta stilling til. Arbeidet med masteroppgaven har gitt meg en ny forståelse av utforsking i matematikk innebærer, og hvordan det kan påvirke matematikkundervisningen. Jeg har også blitt mer bevisst kjerneelementenes rolle i læreplanen, og spesielt kjerneelementene utforsking og problemløsning, og resonnering og argumentasjon. Gjennom intervjuer har jeg fått innsikt i andre læreres tolkning av læreplanen, både nyutdannede, erfarne, og til og med snart pensjonerte lærere. Alle med en ulik bakgrunn, og varierende erfaringer med læreplaner. Jeg har også fått innsikt i hvordan utforsking kan komme til uttrykk i læreverk, og hvordan man som lærer kan benytte seg av de ressursene et læreverk har å by på. Fremover tror jeg at jeg kommer til å verdsette det å kunne samarbeide med andre lærere som kanskje har ulik bakgrunn enn meg selv. Jeg observerer at den nye læreplanen LK20 krever en del tolkning, og jeg observerer også at det finnes mange forskjellige måter å tolke den på. Noen lærere kan se aspekter ved læreplanen som jeg ikke ser, og motsatt. Dette utsagnet kan kodes under kode 2, å diskutere for å finne felles forståelse! Jeg tror at utforsking i et lærerfelleskap kan være like verdifullt for lærere som det kan være for elever.

Det er viktig for meg som fremtidig matematikklærer å ha en bred forståelse av hva kjerneelementene i læreplanen innebærer. Gjennom arbeidet med denne studien har jeg utforsket mye. Som snart ferdigutdannet realfagslektor tror jeg aldri at jeg kommer til å slutte med utforsking, og dette er nok mye fordi det er drevet av nysgjerrighet, som også er grunnen til at jeg valgte å skrive om utforsking i matematikk.

Litteraturliste

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 797-810. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-230). Hodder and Stoughton.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press.

Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T., & Vie, S. M. (2020). *Matematikk 1T* (4. utg.). Aschehoug Undervisning.

Chandra, Y., & Shang, L. (2019). Inductive coding. *Qualitative research using R: A systematic approach* (s. 91-106). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-3170-1_8

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Graaff, E. D., & Kolmos, A. (2003). Characteristics of problem-based learning. *International Journal of Engineering Education*, *19*(5), 657-662.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A., & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, *25*(4), 12-21.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s. 27-32). Lawrence Erlbaum.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk T (MAT09-01)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat09-01

Maaß, K., & Doorman, M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM Mathematics Education*, *45*(6), 887-899. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-013-0505-7

National Research Council. (2000). *Inquiry and the National Science Education Standards: A Guide for Teaching and Learning*. The National Academies Press. https://nap.nationalacademies.org/catalog/9596/inquiry-and-the-national-science-education-standards-a-guide-for

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* Undervisningsministieriet.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Robson, C., & McCartan, K. (2011). *Real world research* (4. utg.). Wiley.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15. http://www.jstor.org/stable/41187667

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I M. Blomhøj, O. Skovsmose, & H. Alrø (Red.), *Kan det virkelig passe? Om matematiklæring* (s. 143-158). Forlag Malling Beck.

Strømskag, H., & Valenta, A. (2017, 1.-5. februar). *Constraints to a justification of commutativity of multiplication* [Paperpresentasjon]. Tenth congress of the European society for research in mathematics education, Dublin, Ireland. http://hdl.handle.net/11250/2493667

Utdanningsdirektoratet. (2021, 22. september). *Slik ble læreplanene utviklet*. Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/slik-ble-lareplanene-utviklet/

Utdanningsdirektoratet. (2023, 25. januar). *Innføring og overgangsordninger for nye læreplaner*. Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/innforing-og-overgangsordninger-for-nye-lareplaner/#a166492

8 Vedlegg

Merknad til vedleggene: tittelen på oppgaven har blitt endret underveis i prosjektet.

8.1 Vedlegg 1: Intervjuguide

Intervjuguide

Semistrukturert intervju: Man benytter seg av en intervjuguide som skal fungere som en sjekkliste for tema som bør dekkes, samt en måte å ordlegge seg på og en rekkefølge som er bestemt. Uplanlagte spørsmål kan forekomme, følger flyten i intervjuet.

- Typer spørsmål
  - Lukket, åpen, skalert
- Probes
  - Brukes for å få intervjuobjektet til å utdype, f.eks. “noe mer?” eller “kan du gå over det igjen?”, stillhet eller “mmmhmm … “, osv.
- Prompts
  - Se s. 289

1. *Introduksjon.* Hei, her er jeg, dette er hva jeg vil finne ut av med dette intervjuet, forsikre intervjuobjekt om konfidensialitet, be om lov til å ta notater/opptak.
2. *Oppvarming*. Lette, ikke-truende spørsmål til å begynne med for å roe nerver og varme opp hverandre.
3. *Hoveddel*. Her dekkes det viktigste i intervjuet i en logisk rekkefølge. Vanskelige spørsmål bør spares til slutt, slik at dersom intervjuobjekt ikke ønsker å svare, mister vi mindre informasjon.
4. *“Cool-off”*. Noen rett frem spørsmål helt til slutt for å lette på trykket.
5. *Avslutning*. Tusen takk for hjelpen, og ha det bra. Dersom det skulle oppstå mer informasjon i ettertid, etter dette punktet, noter hva som skjer og hvordan man taklet situasjonen. For eksempel at man ber om å få notere ned det som ble sagt i ettertid.

Introduksjon

I dette intervjuet vil jeg finne ut av hvilke kompetansemål læreren benytter seg av, samt hvordan de anvendes i algebraundervisningen. Alt som blir sagt i dette intervjuet er konfidensielt, og all informasjon og data jeg tilegner meg vil bli behandlet med respekt og i henhold til gjeldende personvernregler.

Oppvarming

Vi begynner med noen lette spørsmål. Under er noen eksempler på spørsmål som kan brukes.

- Hvor lenge har du undervist i matematikk på videregående skole?
- Har du undervist under andre læreplaner enn L20? Hvilke læreplaner, kort om hva du opplever som de største forskjellene mellom dem?
- Har du undervist andre matematikkfag enn 1T? Preferanser/erfaringer ...

Hoveddel

Her kommer hoveddelen av intervjuet. Vi stiller spørsmål med substans. Rekkefølgen vi stiller spørsmålene i er viktig for flyten av intervjuet. Under er eksempler på spørsmål, men rekkefølgen på temaene bør følges.

- Her er en liste over kompetansemålene, la dem tenke over hvilke de ville pekt ut som relevante (marker hvilke), og eventuelt hvorfor. Si at vi skal snakke mer om disse senere.
    - Hva legger du i dette kompetansemålet? (Eksempelvis, hva betyr det at elevene skal kunne **utforske** strategier for å løse likninger …)
    - Hvordan ville du tolket dette kompetansemålet dersom du skulle planlegge en undervisningsøkt i algebra? Finn ut hva de ville lagt vekt på i kompetansemålet, viktige begreper og hvordan man skulle arbeidet med begrepene.
- I tillegg til kompetansemål, pleier du å utarbeide konkrete læringsmål for timen?
    - Hvor ofte?
    - Kan du gi noen eksempler på hvordan et læringsmål i algebra kan høres ut for deg? (For å se om noen begreper går igjen)
    - Benytter du læreverk eller andre inspirasjonskilder i utarbeidelsen av læringsmål?
- Hvordan benytter du deg av læreverk i undervisningen og i planleggingen?
    - Finn ut hva de bruker læreverk til, er det som oppgavebank, inspirasjon til forklaringsmåter, fremdriftsplan, etc.
    - Hvilke læreverk? Nettressurser? Andre ressurser?
    - Hva liker du med dette læreverket/ressursen …
    - Hva henter du ut av læreverket/ressursen du benytter deg av?
- Kan du beskrive hvordan en planleggingsøkt ser ut for deg?
    - Finn ut hva som er viktig for intervjuobjektet å tenke på, f.eks. hvilke spørsmål elevene vil komme med, hva de tar med seg fra kompetansemålene, hva de **ikke** tar med seg fra kompetansemålene, hvilke begreper som skal læres eller gjennomføres (fagterminologi vs. utforske/forstå/identifisere/beskrive/forklare)
    - Eventuelt NÅR benytter du deg av kompetansemål? (På forhånd/når man lager prøver)
- Vi ser på kompetansemålene igjen …

Vil se på prosessen mellom læreplanen og klasserommet. Hva skjer med kunnskapen i denne overgangen? Hva er det som påvirker denne transformasjonsprosessen?

- Mister vi noe kunnskap, er det noe som endres? Hva skjer i tolkningen av kompetansemålene som kan påvirke dette?
    - Hva legger du i det begrepet
    - Hvilke tema er viktige å ta opp innenfor dette kompetansemålet
    - Hvilke nøkkelord i kompetansemålene er viktige for deg?

HUSK SKALERTE OPPFØLGINGSSPØRSMÅL, PROMPTS & PROBES

Cool-off

Vi sparer spørsmål som er enkle å besvare helt til slutt, for å ta brodden av intervjuet og avslutte på en god tone.

- Hvordan vil du beskrive læreplanen i 1T? F.eks. beskriv med tre ord, e.l.
- Har du noen øvrige kommentarer til L20, eller andre ting, som ikke har blitt dekt?
- Etc. (se an)

8.2 Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Frida Sogge Steimoeggen
[redacted]

Trondheim, 31.08.2022

Vil du delta i forskningsprosjektet «En studie av matematikklæreres tolkning av kompetansemål i Kunnskapsløftet 2020»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt til en masteroppgave der formålet er å få innsikt i hvordan dagens lærere i 1T tolker og anvender kompetansemålene fra Kunnskapsløftet 2020.

Formål

Jeg er en student på lektorprogrammet i realfag ved NTNU. Masteroppgaven jeg skriver i høst handler om læreres tolkning og anvendelser av kompetansemålene i L20. Målet er å få en oversikt over hvilke refleksjoner du som lærer har, og hvilke valg du har tatt i løpet av semesteret, for så å sammenligne disse dataene med epistemologiske analyser av algebra som fagfelt, samt å se det i lys av hvilke læreverk som blir brukt ved din respektive skole.

Din rolle vil være å svare på spørsmål, og gjøre deg opp tanker og refleksjoner underveis som kan være nyttig. For å få så godt dokumenterte data som mulig ønsker jeg å benytte meg av lydopptaker under intervjuet. Lydopptakene som blir gjort vil kun bli hørt av meg i ettertid, og relevante deler av intervjuet vil bli transkribert og anonymisert.

Jeg ber om din tillatelse til å kunne gjøre disse lydopptakene. Forutsetningen for denne tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, samt at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern. **Det er helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.** Hvis du ikke ønsker å delta på dette prosjektet, så gir du beskjed til meg enten via telefon, e-post eller personlig.

Dette prosjektet skal resultere i en masteroppgave som skal markere slutten på min utdannelse ved NTNU. Det jeg lærer fra denne forskningen vil være verdifullt for meg både for oppgaven min, men også videre i livet som ferdig utdannet lektor.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Den ansvarlige institusjonen er institutt for matematiske fag ved NTNU. Dersom det er ønskelig med mer informasjon om prosjektet og hva det innsamlede materialet skal brukes til kan jeg kontaktes per telefon eller e-post.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du har blitt kontaktet fordi du underviser 1T ved en videregående skole, og har undervist under enten LK06 og/eller L20 tidligere, og det vil være meget interessant å se hvilke tanker du har rundt det aktuelle temaet.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du stiller til intervju med meg som vil bli tatt opp med lydopptaker. Intervjuet vil ha en varighet på ca. 1 time, avhengig av hvor mye du selv har å meddele. Her vil jeg stille spørsmål om kompetansemålene i L20, hvordan du tolker og anvender de, og øvrige spørsmål om din matematikkundervisning som kan være relevant.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helste trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Den eneste personen som vil høre på lydopptak gjort fra intervjuet er meg. Hvis du ikke ønsker å delta i prosjektet vil det ikke gå utover deg på noen måte, det skal være helt frivillig.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Jeg vil bare bruke opplysningene om deg til formålene som beskrevet i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Den eneste personen som vil ha tilgang til opplysningene vil være meg selv. For å sikre at ingen uvedkommende får tilgang til personopplysningene dine, vil navnet ditt bli anonymisert. Lydopptaket fra intervjuet vil være lagret på en leid lydopptaker eid av matematisk institutt på NTNU, og slettes før utstyret leveres tilbake innen prosjektslutt. Ingen lydopptak vil bli lagret noen sted, ettersom de relevante delene vil bli transkribert og anonymisert slik at stemmen din ikke kan gjenkjennes.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene destrueres ved prosjektets ende. Lydopptak slettes.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet personopplysninger om deg

- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra institutt for matematiske fag ved NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

Prosjektets forfatter er meg, Frida Sogge Steimoeggen, tlf.: [redacted]; e-post: [redacted]

Faglig ansvarlig og veileder for oppgaven er Frode Rønning, tlf.: [redacted]; e-post: [redacted]

NTNUs personvernombud er Thomas Helgesen, tlf.: [redacted]; e-post: [redacted]

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på e-post (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon 55 58 21 17.

Jeg håper du synes denne forskningen er av verdi, og at du er villig til å være med på den. Jeg ber om at svarslippen på neste side fylles ut dersom du ønsker å gi eller ikke gi tillatelse til deltakelse i prosjektet.

På forhånd takk!

Med vennlig hilsen

Frode Rønning	Frida Sogge Steimoeggen
(Veileder)	(Masterstudent)

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «En studie av matematikklæreres tolkning av kompetansemål i Kunnskapsløftet 2020», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til å delta i personlig intervju.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

NTNU

Kunnskap for en bedre verden