Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Marthe Gjelstad

Matematisk modellering i *Sinus 1T*: En dokumentanalyse basert på den antropologiske teorien for det didaktiske

Masteroppgave i matematikk
Veileder: Heidi Strømskag
Mai 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Marthe Gjelstad

Matematisk modellering i *Sinus 1T*: En dokumentanalyse basert på den antropologiske teorien for det didaktiske

Masteroppgave i matematikk
Veileder: Heidi Strømskag
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne oppgaven er et resultat av en dokumentstudie av læreverket *Sinus 1T* av Oldervoll et al. utgitt i 2020. Studien er gjennomført for å undersøke hvordan læreverket behandler matematisk modellering, og hvilken rolle elementær algebra spiller i denne behandlingen. Matematisk modellering har fått en sentral plass i matematikkundervisningen, noe som blant annet kommer til uttrykk gjennom kjerneelementet «modellering og anvendelser» i læreplanen fra 2020.

Studien er gjennomført med den antropologiske teorien for det didaktiske (ATD) som metodisk og teoretisk rammeverk. Basert på teori og begreper knyttet til matematisk modellering i ATD, har jeg gjennomført en *prakseologisk analyse* av innholdet i kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner» i læreboka *Sinus 1T*. Videre har jeg undersøkt noen av de digitale utforskende oppgavene og hvordan disse tar for seg matematisk modellering. Sentrale begreper i arbeidet har vært *system*, *modell*, *formel* og *parameter*.

Resultatene fra studien viser at mange av oppgavene i de to analyserte kapitlene er begrenset til å jobbe med formler eller funksjoner. Disse modellerer ulike fenomener, men i oppgavene er det en manglende kobling mellom formelen eller funksjonen og det modellerte systemet. Det er få oppgaver som krever at elevene må undersøke generelle forhold og sammenhenger. Videre er det mange deloppgaver, som veileder elevene gjennom arbeidet, noe som frarøver dem muligheten til selv å oppdage nye sammenhenger og utvikle matematisk forståelse. Det er derimot viktig å påpeke at læreverket *Sinus 1T* også inneholder interessante modelleringsoppgaver, der elevene selv må konstruere modeller og bruke disse til å løse et problem. I slike tilfeller skapes en naturlig kobling mellom modellen og systemet.

Abstract

This thesis is the result of a document study of the textbook *Sinus 1T* by Oldervoll et al. published in 2020. The study has been carried out to analyse how the textbook treats mathematical modelling, and what part elementary algebra plays in this treatment. Mathematical modelling has become a central part in the mathematics education, which is exemplified in the curriculum from 2020 through the core element “modelling and applications”.

The study has been conducted with the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) as both theoretical and methodological framework. Based on theory and concepts related to mathematical modelling in the ATD, I have carried out a *praxeological analysis* of the content in the chapters “Formulas and Equations” and “Models and Functions” in the textbook *Sinus 1T*. Furthermore, I have investigated some of the digital exploratory tasks, and how these deal with mathematical modelling. Central concepts in the work have been *model*, *system*, *formula* and *parameter*.

The results from the study show that many of the tasks in the two analysed chapters are limited to working with formulas and functions. These are modelling different phenomena, but in the tasks there is a missing connection between the formula or function and the modelled system. There are few tasks where the students must study general conditions and relations. Moreover, there are many subtasks, which guide the students through the work, which take away their opportunity to discover new relations and develop their mathematical understanding. However, it is important to point out that the textbook *Sinus 1T* also contains interesting modelling tasks, where the students must construct their own models and use them to solve a problem. In these cases, a natural link between the model and the system is created.

Forord

Med denne masteroppgaven avslutter jeg min tid i Trondheim som lektorstudent, og jeg ser nå frem til å tre inn i lærerrollen. Tusen takk til min veileder, Heidi Strømskag, for all hjelp og støtte gjennom hele arbeidet med masteroppgaven. Ditt engasjement og din kunnskap har gjort arbeidet spennende og interessant, og jeg har lært så mye underveis. Takk for dine gode råd, og for at du alltid har vært tilgjengelig for å svare på spørsmål. Alle skulle hatt en veileder som deg!

Tusen takk til alle de fantastiske vennene mine som jeg har fått på studiet. Dere har gjort tiden i Trondheim utrolig bra, og jeg er så takknemlig for at dere alltid er der, både i medgang og motgang. Takk til romkameraten min, Kamilla, som har gjort det fint å komme hjem etter lange dager på skolen. Jeg kommer til å savne tacokvelder og fredagskvelder med sjokoladeis.

Til slutt, takk til mamma, pappa og Anders for at dere alltid er der for meg. Dere kommer alltid med gode råd, samt god trøst i stunder der det er nødvendig. Med dere har jeg også utrolig mange fine minner fra de siste fem årene.

Marthe Gjelstad,

Trondheim, mai 2023

Innhold

1 Introduksjon

1.1 Bakgrunn for oppgaven

I dag lever vi i en verden som er i rask utvikling, der teknologi får en stadig større plass. Vi møter på nye problemer og må ta i betraktning utfordringer som kan bli problemer dersom vi ikke gjør endringer allerede nå. Matematikk er et uunnværlig verktøy for å forstå og håndtere den verdenen vi er en del av. OECD trekker i den forbindelse frem begrepet *matematisk literacy*, som de definerer som:

> […] an individual's capacity to reason mathematically and to formulate, employ and interpret mathematics to solve problems in a variety of real-world contexts. […] It helps individuals know the role that mathematics plays in the world and make the well-founded judgements and decisions needed by constructive, engaged and reflective 21st Century citizens. (OECD, u.å.)

Begrepet utgjør grunnmuren for PISAs matematiske rammeverk[1] fra 2022, som relaterer matematisk resonnering med matematisk modellering. For å løse et problem må man *formulere* problemet som et matematisk problem. Det handler om evnen til å identifisere muligheter for å bruke matematikk, samt å innføre matematiske strukturer på et problem. Videre må man *anvende* matematikk for å løse det matematiske problemet. Man jobber med en modell av et virkelig problem, og arbeidet innebærer å identifisere sammenhenger mellom matematiske enheter og konstruere matematiske argumenter. Til slutt må man *forstå og evaluere* den matematiske løsningen, som innebærer å reflektere over løsninger og tolke disse i konteksten som initierte den matematiske modellen (OECD, u.å.). Denne modelleringssyklusen har mange fellestrekk med forståelsen av matematisk modellering i den antropologiske teorien for det didaktiske (heretter ATD), som utgjør det teoretiske og metodiske rammeverket for studien jeg har gjennomført.

Også i den norske læreplanen for matematikkfagene har matematisk modellering fått en sentral plass som ett av seks kjerneelementer (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kjerneelementene ble innført med den nye læreplanen fra 2020, og de inneholder det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i de ulike fagene (Utdanningsdirektoratet, 2019). I læreplanen for

---

[1] Dette rammeverket danner det teoretiske grunnlaget for PISA-testene i matematikk (OECD, u.å.).

matematikk 1T er en modell forklart som en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Kjerneelementet «modellering og anvendelser» innebærer at elevene skal ha innsikt i hvordan modeller brukes for å beskrive fenomener i den virkelig verden. Elevene skal konstruere modeller, samt vurdere deres gyldighet og i hvilke situasjoner de kan være egnet og nyttige (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Som avsnittene over illustrerer er det tydelig at matematisk modellering skal ha en sentral rolle i dagens matematikkundervisning, men hva slags rolle skal det ha? Hva er det elevene skal lære? Å stille spørsmål ved kunnskapen som undervises i skolen og i høyere utdanning, og ikke ta denne for gitt, er et kjerneprinsipp i ATD. Gjennom den didaktiske transposisjonsprosessen blir akademisk kunnskap transformert slik at den egner seg for undervisning i skolen (Bosch & Gascón, 2014). Chevallard (2019) og Strømskag og Chevallard (2022) peker på at uoppmerksomhet i denne prosessen kan føre til store endringer i den underviste kunnskapen, som i verste fall kan føre til at den mister mye av sin verdi. Flere (Bolea et al., 2004; Bosch, 2015; Ruiz et al., 2007; Strømskag & Chevallard, 2022) peker på at dette er tilfellet for elementær algebra, som er et uvurderlig verktøy i matematisk modellering. Til tross for dette viser tidligere forskning innenfor ATD at det i stedet kun undervises som en generalisering av aritmetikken, og som et separat fagfelt som elevene ikke ser noen nytte av utenfor skolen. Er dagens situasjon, med ny læreplan der matematisk modellering er vektlagt, den samme, eller kan vi se endringer?

For å undersøke hva slags kunnskap knyttet til modellering som undervises i skolen og hvilken rolle elementær algebra har i denne kunnskapen, er det interessant å undersøke hvordan læremidler[2] behandler temaet. Lærebokforfattere er en del av noosfæren, som i ATD beskrives som sfæren av de som tenker på undervisning, og de har en sentral rolle i den didaktiske transposisjonsprosessen (Bosch & Gascón, 2014, s. 71). Gilje et al. (2016) peker på at «Læremidler er viktige for læreres fortolkning av kompetansemålene i læreplanen» (s. xiii), og de har derfor en stor påvirkning på kunnskapen som undervises i skolen. I denne studien utforsker jeg behandlingen av matematisk modellering i læreverket *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c)[3], og rollen som elementær algebra spiller i denne sammenhengen.

[2] I forskriften til opplæringsloven er det beskrevet at «med læremiddel meiner ein alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa» (Forskrift til opplæringslova, 2006, §17-1).

[3] Jeg har studert selve læreboka *Sinus 1T*, samt to av utforskningsarkene på nettstedet til *Sinus 1T*. Når jeg skal vise til både boka og læremidlene på nettstedet, vil jeg referere til læreverket *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c). Selve læreboka vil jeg henvise til som Oldervoll et al. (2020a). Jeg vil vise til hvert av

I ATD handler matematisk modellering om å utvikle forståelse og oppdage nye sammenhenger mellom ulike matematiske enheter (García et al. 2006; Strømskag & Chevallard, 2022). Både som elev, student og lærer har jeg alltid vært opptatt av at man skal forstå og ikke pugge. Gjennom ulike fag i studietiden på NTNU har jeg blitt introdusert for og lært om fagfeltet teoretisk algebra, der ulike matematiske strukturer er bundet sammen i nettverk, som på et vis danner en egen verden. Engasjementet for at man skal forstå samt min egen interesse for algebra, dannet den første motivasjonen for den gjennomførte studien. Videre, gjennom et fag i matematikkdidaktikk ble jeg introdusert for ATD og hvorfor det er viktig og nødvendig å forske på innholdet i læreverk. Min evne, som fortsatt er i utvikling, til å bruke læremidler på en selvstendig måte med et kritisk blikk, vil være en verdifull egenskap når jeg nå skal inn i lærerrollen. Å bruke læreverk som nyttige ressurser, men samtidig ha en egen forståelse for kunnskapen, vil være viktig i arbeidet med å lage spennende undervisningsopplegg, der elevene får muligheten til å utvikle matematisk forståelse i tillegg til å oppdage sammenhenger både innenfor matematikk og på tvers av fagfelt.

1.2 Forskningsspørsmål og oppgavens oppbygning

I denne studien har jeg gjennomført en dokumentanalyse av deler av læreverket *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c) for å svare på forskningsspørsmålet:

> *Hvordan behandles matematisk modellering i Sinus 1T, og hvilken rolle spiller elementær algebra i denne behandlingen?*

Studien er gjennomført med ATD som metodisk og teoretisk rammeverk. I ATD er det utviklet et begrepsapparat for å undersøke kunnskapen i skolen samt ulike forhold og begrensninger som påvirker denne kunnskapen. Et av disse er begrepet *prakseologi*, og som en del av metoden for å svare på forskningsspørsmålet, har jeg gjennomført en *prakseologisk analyse* av kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner» i læreboka *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a). Videre har jeg i analysene brukt forståelsen av matematisk modellering i ATD, for å studere innholdet i de to kapitlene i lys av dette temaet. Jeg har også undersøkt oppgavene på de digitale utforskningsarkene, tilknyttet de to studerte kapitlene, på nettstedet til *Sinus 1T*. I

---

utforskningsarkene med henholdsvis Oldervoll et al. (2020b/2020c), samt en forklarende tekst om hvilket utforskningsark jeg referer til. Nettstedet til *Sinus 1T* er en ressurs man må kjøpe tilgang til. I forbindelse med arbeidet med masteroppgaven min fikk jeg en prøvetilgang av Cappelen Damm. Innloggingssiden til dette nettstedet finner man på https://utdanning.cappelendamm.no/login denne oppgaven trekker jeg frem noen av dem og diskuterer hvordan de fungerer som modelleringsoppgaver.

I denne oppgaven vil jeg først, i Kapittel 2, beskrive to tradisjoner, utenfor ATD, knyttet til matematisk modellering. Innenfor matematikkdidaktikk har matematisk modellering fått en stadig større oppmerksomhet de siste årene, og det har utviklet seg ulike tradisjoner knyttet til hvordan det skal undervises. Jeg har inkludert to av disse tradisjonene for å peke på hvordan det kan forstås og implementeres i skolen. Videre i Kapittel 3 vil jeg introdusere forskningsrammeverket ATD og hvordan matematisk modellering blir forstått her. I dette kapittelet vil jeg også forklare sentrale begreper jeg har brukt i analysen av læreverket *Sinus 1T*, som *prakseologi* og *epistemologisk referansemodell.* I tillegg vil jeg presentere viktige begreper knyttet til ulike forhold som påvirker kunnskapen i skolen. Dette inkluderer begrepene *didaktisk paradigme*, *skala av didaktisk medbestemmelse* og *didaktisk transposisjonsprosess*. For å analysere kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner» har jeg utarbeidet en egen referansemodell for kunnskap om algebra og funksjoner, og denne teorien vil jeg presentere i Kapittel 4. Videre i Kapittel 5 vil jeg redegjøre for den metodiske tilnærmingen i studien. I Kapittel 6 og Kapittel 7 vil jeg beskrive og diskutere analysene av henholdsvis kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner». Kapittel 8 inneholder en samlet oppsummering av forskningsresultatene fra de to kapitlene og et svar på det stilte forskningsspørsmålet. Til slutt, i Kapittel 9, vil jeg beskrive noen begrensninger ved studien og peke på mulig videre forskning. Jeg runder av oppgaven med noen refleksjoner om hva jeg har lært av å jobbe med den gjennomførte studien, samt hva andre kanskje kan lære av å lese mitt arbeid.

2 Matematisk modellering: Noen tradisjoner

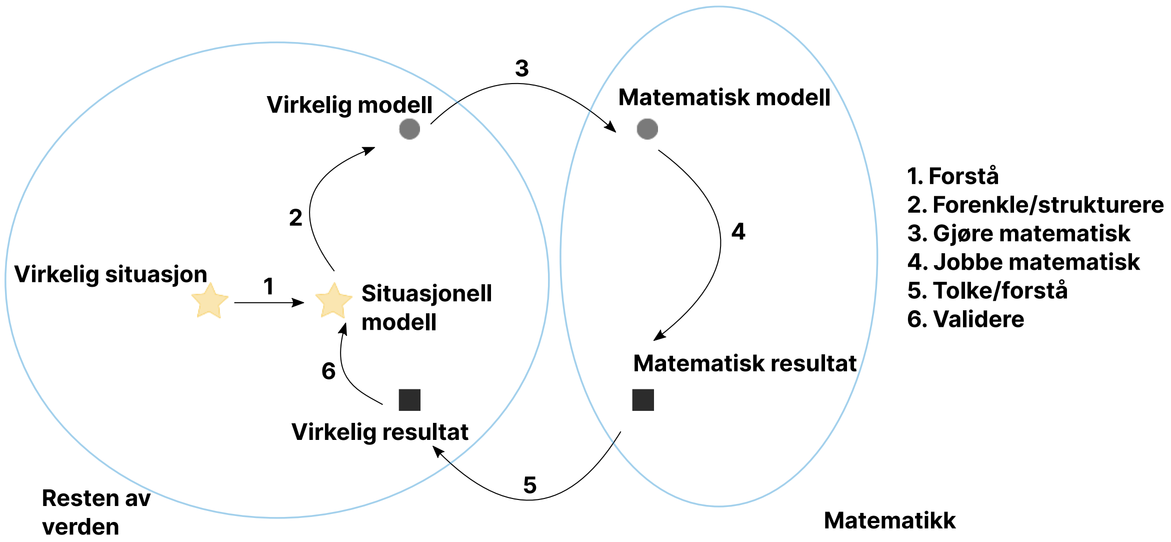
Siden midten av 1980-tallet har forskere innenfor matematikkdidaktikk hatt en voksende interesse for hvilken rolle modelleringsprosessen kan spille i undervisning og læring av matematikk (García et al., 2006, s. 229). Flere snakker om modellering i skolen som en dualitet. På den ene siden kan man kan bruke oppgaver der elevene må anvende matematikk og modellere et problem til å utvikle den matematiske forståelsen; på den andre siden kan modelleringskompetanse være et mål i seg selv (García et al., 2006; Niss et al., 2007). Utvikling innenfor forskningsfeltet har ført til ulike tradisjoner og teorier om matematisk modellering i skolen. *Modelleringssyklusen* i den tyske tradisjonen, *Realistic Mathematics Education* og modellering i ATD er tre eksempler på slike teorier. Jeg vil i dette kapittelet kort beskrive de to førstnevnte for å gi et lite innblikk i noen av teoriene som eksisterer. I Kapittel 3 vil jeg gi en mer omfattende presentasjon av matematisk modellering slik det er forstått i ATD, som er den forståelsen denne studien baserer seg på.

2.1 Modelleringssyklusen i den tyske tradisjonen

Blum og Leiß (2006) beskriver modelleringssyklusen som en fremgangsmåte som benyttes når man skal løse et modelleringsproblem. Man starter med et problem eller en situasjon utenfor matematikken. Det første steget i modelleringssyklusen er å forstå problemet, og problemløseren må lage en *situasjonell modell.* Deretter må situasjonen forenkles og struktureres for å lage en *virkelig modell.* Videre må man overføre den virkelige modellen til en *matematisk modell,* før man jobber matematisk med modellen for å få et *matematisk resultat*. Det matematiske resultatet må tolkes i den opprinnelige, virkelige situasjonen som et *virkelig resultat.* En *validering* av resultatet kan føre til at man må gå gjennom syklusen på nytt, dersom resultatet ikke er tilfredsstillende (s. 1626), se Figur 2.1.

Figur 2.1

Modelleringssyklusen



Merknad: Figuren er tilpasset etter Blum og Leiß (2006, s. 1626).

2.2 Realistic Mathematics Education

Realistic Mathematics Education (heretter RME) er en teori knyttet til matematikkundervisning utviklet i Nederland. Van den Heuvel-Panhuizen og Drijvers (2014) forklarer at *realistiske situasjoner* er sentrale, men at det ikke betyr at situasjonene må komme fra den virkelige verden. Realistisk innebærer at den som skal løse et problem kan se for seg problemet. Det kan derfor komme fra den virkelig verden, men også fra fantasien eller den matematiske verden (s. 521).

De virkelige situasjonene skal initiere til utvikling av matematisk forståelse. Matematikkundervisningen skal starte med en situasjon som er meningsfull for elevene, og arbeid med denne situasjonen skal føre til at elevene utvikler matematiske verktøy og matematisk innsikt. Matematikk blir ansett som en menneskelig aktivitet. Elevene skal ikke være mottakere av klargjort matematikk, men skal være aktive deltakere som selv utvikler de matematiske verktøyene og den matematiske forståelsen. I RME skiller man mellom *horisontal matematisering* og *vertikal matematisering*. Den førstnevnte matematiseringen handler om at elevene skal bruke matematiske verktøy til å organisere og løse problemer i virkelige situasjoner. Den sistnevnte beskriver en prosess der elevene reorganiserer innenfor det matematiske systemet, noe som resulterer i snarveier ved å bruke sammenhenger mellom begreper og strategier (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

Et annet viktig prinsipp i RME handler om at matematikk innebærer å gå gjennom flere steg av forståelse: fra uformelle kontekstrelaterte løsninger, til å oppnå innsikt i hvordan begreper er relatert. I den forbindelse er modeller sentrale, for de kan fungere som en bro mellom det uformelle og kontekstrelaterte til det formelle og generelle. Man må bevege seg fra *a model of* en spesiell situasjon til *a model for* alle typer lignende situasjoner (Streefland, 1985, 1993, 1996, referert i Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014, s. 523). Videre trekkes det frem at matematiske domener ikke må anses som isolerte, men integrerte, og elevene må få rike problemer, der de kan bruke varierte matematiske verktøy og kunnskaper (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014, s. 523).

3 Den antropologiske teorien for det didaktiske

I dette kapittelet vil jeg redegjøre for sentrale begreper i den antropologiske teorien for det didaktiske (ATD), som utgjør det metodiske og teoretiske rammeverket for den gjennomførte studien. Først, i Kapittel 3.1, vil jeg gi en kort introduksjon til ATD, før jeg i Kapittel 3.2 forklarer begrepet *prakseologi*, som jeg har brukt som analyseverktøy i studien av læreboka *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a). Videre, i Kapittel 3.3, vil jeg beskrive forståelsen av matematisk modellering i ATD og hvordan denne er knyttet til begrepet *matematisk prakseologi*. Et annet sentralt begrep i ATD er *didaktisk system*, som jeg forklarer i Kapittel 3.4. I Kapittel 3.5 vil jeg beskrive to didaktiske paradigmer, før jeg i Kapittel 3.6 forklarer begrepene *skala av didaktisk medbestemmelse*, *didaktisk transposisjonsprosess* og *epistemologisk referansemodell*.

3.1 ATD: En kort introduksjon

Den antropologiske teorien for det didaktiske er et forskningsrammeverk innenfor matematikkdidaktikk startet av Yves Chevallard på 1980-tallet. Rammeverket ble initiert av teorien for didaktiske situasjoner (TDS) utviklet av Guy Brousseau. Det eksplisitte målet er å modellere kunnskapen som utgjør kjernen i undervisnings- og læringsprosesser. Et viktig metodisk prinsipp i ATD er å unngå å ta for gitt elementer i den sosiale verden man er en del av. For å oppnå dette er det konstruert en mengde begreper for å modellere den didaktiske verden i et nytt perspektiv, uten påvirkning fra de ulike institusjonelle forholdene som finnes i samfunnet (Bosch et al., 2020).

3.2 Prakseologi

Et av de sentrale begrepene i ATD er *prakseologi*, som er en modell for å undersøke menneskelig aktivitet. I ATD kan all menneskelig aktivitet modelleres i form av en prakseologi eller en mengde av prakseologier. All form for aktivitet blir undersøkt på lik linje, og en aktivitet kan være alt fra å åpne en dør eller drikke et glass vann, til å løse en andregradslikning (Bosch et al., 2020).

Chevallard og Bosch (2020a) forklarer at en prakseologi p består av to blokker, en praksis-blokk og en logos-blokk. Praksis-blokka består av en type oppgave T og en teknikk τ for å løse den. I ATD kan all menneskelig aktivitet brytes ned til en rekkefølge av ulike typer oppgaver.

En type oppgave og en teknikk for å utføre oppgaver $t \in T$ danner et system $\Pi = [T, \tau]$, som utgjør praksis-blokka i prakseologien (s. 55).

Logos-blokka består av en teknologi θ, som forklarer og begrunner at teknikken τ er en korrekt måte å utføre en oppgavetype T. Videre er teorien Θ en diskurs som rettferdiggjør teknologien. Teorien er av en mer generell karakter. Sammen danner teknologien og teorien systemet $\Lambda = [\theta, \Theta]$, som utgjør logos-blokka i en prakseologi. En prakseologi er dermed et system av fire komponenter, $p = [T, \tau, \theta, \Theta]$ (Chevallard & Bosch, 2020a, s. 55–56). Et eksempel på en oppgavetype er å løse andregradslikninger ved å bruke abc-formelen, som utgjør teknikken. Teknologien skal forklare og begrunne hvorfor teknikken er riktig. I dette tilfellet innebærer det et bevis av abc-formelen, som kan utføres ved metoden der man «fullfører kvadratet». Den underliggende teorien er knyttet til likninger og løsninger av likninger.

3.2.1 Ulike nivåer av prakseologier

Videre karakteriserer Chevallard (1999, som referert i García et al., 2006, s. 227) fire ulike former for prakseologier, slik jeg beskriver i det følgende. En *spesifikk* prakseologi består av én type oppgave som kan løses med en bestemt teknikk. Teknologien som beskriver og begrunner teknikken, er ofte fraværende eller implisitt antatt. Videre kan flere spesifikke prakseologier som deler en felles teknologi, samles i en *lokal* prakseologi. Teknologien begrunner, forklarer og binder sammen de ulike teknikkene. De lokale prakseologiene som deler den samme teorien, kan organiseres i en *regional* prakseologi, og de regionale prakseologiene kan til slutt samles i en *global* prakseologi. For eksempel er oppgaven med å finne lengden på hypotenusen i en rettvinklet trekant gitt lengden av katetene, et eksempel på en spesifikk prakseologi. Denne spesifikke prakseologien er underordnet den lokale prakseologien der Pytagoras' teorem er den felles teknologien. Videre er denne lokale prakseologien en del av den regionale prakseologien tilknyttet teorien om euklidsk geometri. Samtidig peker Bosch et al. (2020) på at det i ATD er et viktig prinsipp at ulike objekter kan bli forstått på ulike måter avhengig av prakseologien man ser på og hvordan prakseologien blir forstått i en institusjon (s. xv). Dermed kan Pytagoras' teorem, som jeg her har ansett som teknologi, i andre prakseologier bli sett på som en teknikk eller som en teori.

3.2.2 Matematisk prakseologi

I ATD blir matematisk kunnskap beskrevet som en menneskelig aktivitet, og den kan derfor modelleres gjennom en prakseologi, en matematisk prakseologi. García et al. (2006) forklarer at det er matematiske prakseologier som undervises og læres i en undervisningssituasjon. En matematisk prakseologi oppstår ikke plutselig, og den har ingen endelig, fast form. Den er derimot et resultat av en kompleks og pågående aktivitet, et resultat av en studieprosess. Videre påpeker de at det ikke finnes noen matematisk prakseologi uten en studieprosess som skaper den, og det finnes ingen studieprosess uten at en matematisk prakseologi er i konstruksjon (s. 227).

Betraktningen av ulike prosesser knyttet til konstruksjon av matematikk viser seks dimensjoner, *didactic moments*, som strukturerer prosessene. De didaktiske øyeblikkene følger ikke nødvendigvis en kronologisk rekkefølge, men beskriver ulike dimensjoner ved den matematiske aktiviteten. De seks dimensjonene er 1) «Det første møtet» med en spesifikk oppgavetype. 2) «Øyeblikket der man utforsker» oppgavetypen. 3) «Øyeblikket der man konstruerer det teknologiske og teoretiske miljøet». Denne tredje dimensjonen forklarer og rettferdiggjør de brukte teknikkene og tillater produksjon av nye teknikker. Videre følger 4) «øyeblikket der man jobber med teknikken». Denne dimensjonen fører til utvikling av de eksisterende teknikkene i tillegg til dannelse av nye. 5) «Institusjonaliserings-øyeblikket», der komponentene i den konstruerte prakseologien blir avgrenset. 6) «Øyeblikket der man evaluerer» den konstruerte prakseologien (García et al., 2006, s. 227–228).

3.3 Matematisk modellering i ATD

Strømskag og Chevallard (2022) beskriver matematisk modellering i ATD gjennom trippelen (*S*, *Q*, *S'*), der *S* er et system, *Q* er et spørsmål knyttet til *S*, og *S'* er en modell av *S*. Et system *S* er et fragment av virkeligheten som har sine egne lover. For eksempel vil en rettvinklet trekant med sine lover, normalt kalt egenskaper, være et system. Formelen for arealet av trekanten, $A = \frac{gh}{2}$, er også et eksempel på et system. Matematisk modellering starter med et spørsmål *Q* knyttet til et system *S*. For å svare på *Q* konstruerer man en modell, eller bruker en allerede eksisterende modell, *S'* av *S*. Det sentrale er at modellen *S'* skal gjøre det enklere, tryggere og raskere å svare på spørsmålet *Q* sammenlignet med å studere systemet *S* direkte (s. 389–390). Videre følger et eksempel: Sammenhengen mellom bølgelengde λ, frekvens *f* og bølgehastighet *v* for en lydbølge er gitt ved formelen $\lambda = \frac{v}{f}$ (Oldervoll et al., 2020a, s. 313). Bølgefarten *v* avhenger av materialet bølgen brer seg i. Anta at en lydkilde sender ut lyd, og at frekvensen på lyden øker til det dobbelte. Hva skjer da med bølgelengden? For å svare på spørsmålet *Q*, kan vi bruke formelen $\lambda = \frac{v}{f}$ som modell for systemet med lydkilden som sender ut lydbølger. Da finner vi raskt og enkelt sammenhengen $\lambda = \frac{v}{2f}$, som betyr at bølgelengden halveres når frekvensen dobles. Sammenlignet med å svare på Q empirisk ved å sette opp et eksperimentelt forsøk, kunne vi raskere, enklere og tryggere svare på Q ved å bruke modellen.

Videre kan vi i stedet undersøke hvordan frekvensen varierer med varierende bølgelengde for en konstant bølgefart. Vi kan da *manipulere* formelen og få en formel for frekvensen uttrykt ved bølgelengden og bølgefarten: $f = \frac{v}{\lambda}$. Siden vi ønsker å undersøke hvordan frekvensen avhenger som funksjon av bølgelengden, kan vi skrive det som en funksjon $f_v(\lambda) = \frac{v}{\lambda}$, der bølgefarten v er en parameter, mens frekvensen f_v og bølgelengden λ opptrer som variabler. Vi kan også undersøke hvordan frekvensen avhenger av bølgefarten ved en konstant bølgelengde: $f_\lambda(v) = \frac{v}{\lambda}$. Her opptrer bølgefarten v som en variabel, mens bølgelengden λ er en parameter. Altså har variabelen og parameteren byttet roller. Jeg vil gi en presis definisjon av begrepene *variabel* og *parameter* i Kapittel 4.

Eksemplene ovenfor presenterer noen av styrkene ved algebra som modelleringsverktøy og den viktige rollen begrepet *formel* har. Strømskag og Chevallard (2022) bruker følgende definisjon på formel: «A rule or principle expressed in algebraic language» («Formula,» u.å.). Videre forklarer de at konstruksjon av en formel innebærer konstruksjon av en algebraisk modell av et system (s. 397). Abbott (1942/1971, som referert i Strømskag & Chevallard, 2022, s. 381) skriver at konstruksjon er én av tre grunnleggende operasjoner knyttet til formler. De to andre er *manipulasjon* og *evaluering*.

En formel kan betraktes som en likning med flere parametere eller som en funksjon med parametere og variabler (Strømskag & Chevallard, 2022). I eksempelet ovenfor, der vi undersøkte hva dobling av frekvens har å si for bølgelengden til en lydbølge, så vi på formelen som en likning med tre parametere λ, f og v. Gitt formelen $\lambda = \frac{v}{f}$ og verdier for bølgelengden v og frekvensen f, kan vi *evaluere* formelen og finne verdien for bølgelengden λ. Da vi undersøkte hvordan frekvensen til en lydbølge avhenger av bølgelengden, så vi på formelen som en funksjon $f_{v\,(ny)}(\lambda) = \frac{v}{\lambda}$, der v opptrådte som en parameter, mens λ og $f_{v\,(ny)}$ var variabler. Tilsvarende i funksjonen $f_\lambda(v) = \frac{v}{\lambda}$, var λ en parameter, mens v og f_λ var variabler. For å komme frem til funksjonsuttrykkene måtte vi først *manipulere* formelen $\lambda = \frac{v}{f}$ til $f = \frac{v}{\lambda}$, for å få f uttrykt ved v og λ. Strømskag og Chevallard (2022) understreker at det sentrale er hvordan formler og parametere gir oss fleksibilitet i studien av et system, siden de tillater oss å undersøke ulike spørsmål Q knyttet til systemet.

Modelleringsprosessen og begrepene system og modell kan videre settes i sammenheng med begrepet prakseologi. I ATD forstås modellering som en prosess der prakseologier blir konstruert og rekonstruert. Videre kan en matematisk prakseologi både være et system og en modell. Det avhenger av spørsmålet og systemet man studerer. En prakseologi blir en modell dersom det stilles spørsmål ved systemet prakseologien er en modell av. Det viktige startpunktet for en modelleringsprosess er ikke «virkeligheten» i et spørsmål/problem. Systemet som skal modelleres kan både være intramatematisk, systemet kommer fra matematikken, eller ekstramatematisk, systemet kommer fra den sosiale eller naturlige verden. Det viktige startpunktet er derimot mulighetene som ligger i spørsmålet/problemet for å utvikle og konstruere en mengde av sammenkoblede og integrerte prakseologier. For i studiet av et spørsmål Q knyttet til et system S vil det dukke opp nye spørsmål, som videre vil generere behovet for nye teknikker og teknologier. Slik blir modelleringsprosessen en prosess der prakseologier oppstår og knyttes sammen; fra spesifikke til lokale til regionale prakseologier (García et al., 2006).

Til slutt i dette delkapittelet vil jeg trekke noen sammenhenger mellom forståelsen av matematisk modellering i ATD og hvordan det er beskrevet av OECD, noe jeg kort var inne på i introduksjonen av denne oppgaven. Som i ATD blir matematisk modellering forstått av OECD (u.å.) som noe som gjennomsyrer all matematikk. Å løse et problem i den virkelige verden innebærer å konstruere en matematisk modell. Man formulerer det virkelige problemet med matematiske strukturer, og videre jobber man med den matematiske modellen for å identifisere sammenhenger mellom matematiske enheter og konstruere matematiske argumenter. I ATD blir dette beskrevet som prosessen der man jobber med en modell S' av et system S, for å svare på spørsmål Q knyttet til systemet. Dette arbeidet vil føre til konstruksjon av nye matematiske prakseologier, og man vil oppdage nye sammenhenger.

3.4 Didaktisk system

Et sentralt begrep i ATD er *didaktisk system*, som jeg vil ta i bruk i neste delkapittel for å forklare to ulike didaktiske paradigmer. En sosial situasjon er en didaktisk situasjon når en av aktørene Y gjør noe for å hjelpe en gruppe X med å lære noe ♥. Vi skriver det didaktiske systemet som $\mathcal{S}(X; Y; ♥)$. Det som skal læres, ♥, kalles for «the didactic stake», og kan bestå av spørsmål

Q eller prakseologier p. Et typisk didaktisk system finner vi i skolen, der en lærer y hjelper elevene $x \in X$ med å lære noe ♥ (Bosch & Gascón, 2014, s. 71).

3.5 To didaktiske paradigmer

I skolen har det i lang tid vært vanlig med didaktiske systemer $\mathcal{S}(X; Y; ♥)$, der ♥ er et arbeid O som læreren y har undersøkt før dannelsen av det didaktiske systemet, det vil si før undervisningstimen.[4] Elevene $x \in X$ har derimot ikke undersøkt O på egenhånd, men skal gjennom en forelesning av y bli presentert for arbeidet og på den måten «lære det». Denne formen for et didaktisk system tilhører *paradigmet som innebærer å besøke arbeider* (heretter PBA) (Chevallard & Bosch, 2020b, s. xxvi–xxvii). Chevallard (2015) beskriver et didaktisk paradigme som «[…] a set of rules prescribing, however implicitly, what is to be studied – what the didactic stake O can be – and what the forms of studying them are» (s. 174). I PBA besøker elevene arbeider eller «monumenter». De er tilskuere av kunnskapen de skal lære, og det er forventet at de skal beundre og more seg over kunnskapen, til tross for at de ikke vet noe om bakgrunnen for kunnskapen eller hva den kan brukes til. Et resultat av dette er at elevene ser på kunnskapen de lærer på skolen som institusjonell og som noe de kan glemme og ignorere når de har bestått eksamen. De ser ikke nytten av den utenfor skolen (Chevallard, 2015).

I de siste årene har derimot *paradigmet som innebærer å stille spørsmål ved verden* (heretter PSV) begynt å vokse frem. I dette paradigmet er «the didactic stake» ♥ i det didaktiske systemet et spørsmål Q som elevene $x \in X$ skal undersøke under oppsyn av læreren y (Chevallard & Bosch, 2020b, s. xxvii). For å finne et svar på spørsmålet må elevene undersøke allerede eksisterende svar $L^{\Diamond}$, samt andre arbeider A for å forstå og jobbe med de eksisterende svarene. En slik studieprosess blir kalt for en studie- og forskningsløype (Chevallard, 2015, s. 179), og den kan modelleres gjennom et herbartisk skjema: $[\mathcal{S}(X; Y; Q), ➡ M] ➥ L^{♥}$. Her er M det didaktiske miljøet, og dette består blant annet av de eksisterende svarene $L^{\Diamond}$ og arbeidene A, som det didaktiske systemet bruker for å finne et svar $L^{♥}$ på spørsmålet Q. Det didaktiske miljøet vil også bestå av flere spørsmål Q_i, som dukker opp underveis i studieprosessen (Chevallard & Bosch, 2020b, s. xxix). Chevallard (2015) påpeker at i motsetning til situasjonen der elevene besøker arbeider uten å vite hvorfor, vil de gjennom en studie- og forskningsløype møte på

[4] I ATD er et arbeid ethvert produkt som er skapt med vilje av en menneskelig aktivitet (Chevallard & Bosch, 2020b, s. xxxvii).

arbeidene fordi de har behov for dem. Slik vil elevene få en forståelse for både bakgrunnen og nytten av kunnskapen de lærer (s. 179–180).

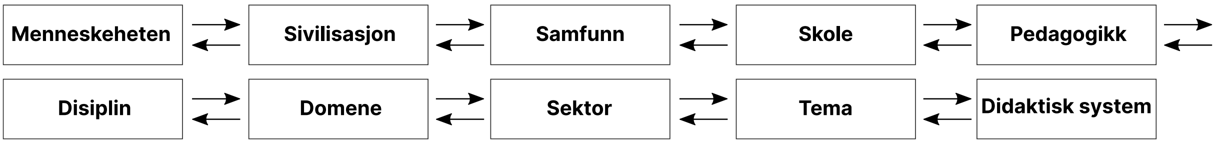
Som beskrevet er utgangspunktet for en modelleringsprosess et spørsmål Q knyttet til et system. I arbeidet med å finne et svar på Q konstruerer og rekonstruerer man matematiske prakseologier, som etter hvert kan knyttes sammen i integrerte nettverk. Parallellen til studieprosessen i det nye paradigmet er tydelig, der man gjennom en studie- og forskningsløype forsøker å finne et svar på et genererende spørsmål Q. Matematisk modellering har med andre ord en sentral plass i det nye paradigmet som innebærer å stille spørsmål ved verden.

3.6 Skala av didaktisk medbestemmelse, didaktisk transposisjonsprosess og epistemologisk referansemodell

Et viktig prinsipp i ATD er at all matematisk kunnskap blir produsert, undervist, lært og praktisert i en institusjon. Kunnskap er derfor institusjonalisert (Bosch, 2015, s. 53). Chevallard og Bosch (2020b) forklarer at begrepet *institusjon* har en bred betydning i ATD, og det viser til enhver skapt virkelighet som mennesker kan være medlemmer av. Eksempler er en klasse, en skole, et par, en fotballklubb eller en konsert (s. xxxi–xxxii). I denne forbindelse er begrepet *skala av didaktisk medbestemmelse* sentralt. Dette er et hierarki av ulike nivåer med forhold og begrensninger, som er med på å påvirke hva som skal studeres i skolen og hvordan det skal studeres (Bosch, 2015, s. 57), se Figur 3.1. Nederst på skalaen finner vi et *didaktisk system* $\mathcal{S}(X; Y; ♥)$. For å forklare hva som skjer i et didaktisk system er det ikke nok bare å undersøke handlingene til X og Y, for hva som foregår vil også være påvirket av de andre nivåene på skalaen. For eksempel er det en forutsetning for eksistensen av et didaktisk system at det finnes en institusjon, en *skole*, som systemet kan eksistere i. Mellom skole og didaktisk system finner vi en *pedagogikk*. Grupperingen av elever i klasser og oppdelingen av kunnskap i ulike disipliner, sektorer og temaer er eksempler på pedagogiske forhold. Mellom *samfunn* og skole finnes *noosfæren*. Dette er en sfære som forvalter organiseringen og fremtiden til skolene (Chevallard & Bosch, 2020b, s. xxxiv–xxxv). Bosch og Gascón (2014) forklarer at noosfæren består av de som tenker på undervisning, som for eksempel lærebokforfattere (s. 71). De øverste nivåene på skalaen er *sivilisasjon* og *menneskeheten* (Chevallard & Bosch, 2020b, s. xxxv).

Figur 3.1

Skala av didaktisk medbestemmelse



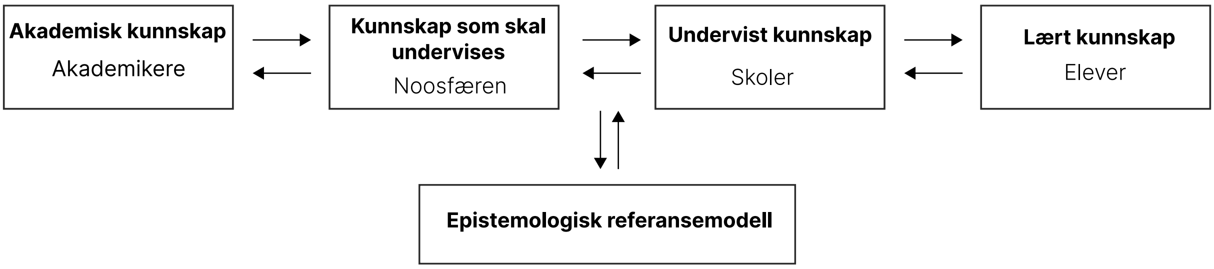
Merknad: Figuren er tilpasset etter Bosch (2015, s. 57).

Den akademiske kunnskapen i et samfunn blir transformert gjennom noosfæren til kunnskap elevene skal lære i skolen. Dette betegnes som en didaktisk transposisjonsprosess, som Bosch og Gascón (2014) forklarer som «[…] the transformations applied to a 'content' or a body of knowledge since it is produced and put into use, until it is actually taught and learned in a given educational institution» (s. 70), se Figur 3.2. Chevallard (2019) påpeker at denne transformasjonsprosessen kan føre til store endringer av den opprinnelige kunnskapen, som kan føre til at den blir uegnet til sitt opprinnelige bruk (s. 74). Endringer kan også skje uten at noosfæren er oppmerksom på at de skjer, noe som kan føre til at kunnskap mister sin instrumentelle verdi, det vil si hva den lar oss gjøre i relasjon til den nåværende og fremtidige verden (Strømskag & Chevallard, 2022). I ATD er det derfor et sentralt prinsipp at man stiller spørsmål ved kunnskapen som blir undervist på skolen: Hva består kunnskapen av, hvor kommer kunnskapen fra, og hva er nytten av den? (Bosch, 2015, s. 55).

For å studere innholdet, opprinnelsen og nytteverdien av kunnskapen som undervises i skolen er det nødvendig å frigjøre seg fra de institusjonelle forholdene som kunnskapen er knyttet til. Man må skape en distanse mellom seg selv som forsker og det man skal studere, for å unngå å ta institusjonens synspunkter for gitt. En måte å gjøre dette på er å konstruere en alternativ referansemodell, en epistemologisk referansemodell for kunnskapen. Slik kan man studere fenomenet fra en annen synsvinkel (Bosch, 2015). I neste kapittel (Kapittel 4) vil jeg redegjøre for to epistemologiske referansemodeller, en knyttet til algebra og en knyttet til funksjoner, som jeg utarbeidet i forkant av analysene av *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c).

Figur 3.2

Didaktisk transposisjonsprosess og epistemologisk referansemodell.



Merknad: Figuren er tilpasset etter Bosch og Gascón (2014, s. 71), med inspirasjon fra masteroppgaven til Kristianslund (2022, s. 7).

4 Teoretiske verktøy for analysen: to epistemologiske referansemodeller

Som beskrevet i Kapittel 3, er det nødvendig å løsrive seg fra institusjonelle synspunkter når man skal forske på kunnskap. Man må konstruere en egen referansemodell for kunnskapen, slik at man kan analysere den med en kritisk og uavhengig tankegang (Bosch, 2015). For å undersøke hvordan matematisk modellering behandles i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c) og rollen algebra har i denne behandlingen, har jeg gjennomført en dokumentanalyse av kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner» i læreverket. I forkant av disse analysene utarbeidet jeg to epistemologiske referansemodeller, en knyttet til algebra og en knyttet til funksjoner. Dette gjorde jeg for å skape en egen forståelse for kunnskapen, slik at jeg kritisk og objektivt kunne studere innholdet i *Sinus 1T*. De to modellene ble utviklet med utgangspunkt i de tre nevnte spørsmålene formulert av Bosch (2015): Hva består kunnskapen av; hvor kommer kunnskapen fra; hva er nytten av den? (s. 55).

Den epistemologiske referansemodellen for algebra er basert på teori i ATD om matematisk modellering, i tillegg til ulike artikler om sentrale algebraiske begreper. Hvordan ATD forstår matematisk modellering er beskrevet i Kapittel 3.3, mens jeg i Kapittel 4.2 vil ta for meg viktige algebraiske begreper. For å lage en epistemologisk referansemodell for funksjoner, studerte jeg lærebøker på universitetsnivå og hvordan disse presenterer og forklarer ulike typer funksjoner. Disse ga meg også innspill til hvilke fenomener de ulike funksjonene kan modellere, som jeg bygget videre på ved å bruke kunnskapen min i fysikk, som er mitt andre undervisningsfag. Videre leste jeg tekster om den historiske utviklingen av algebra og begrepet *funksjon*, for å få en forståelse for opprinnelsen til kunnskapen.

I dette kapittelet vil jeg presentere de to epistemologiske referansemodellene. Først, i Kapittel 4.1, vil jeg gi et kort overblikk over den historiske utviklingen av matematikken fra oldtidens Egypt til analysens inntreden på 1600-tallet. Videre i Kapittel 4.2 vil jeg beskrive den epistemologiske referansemodellen for algebra. Denne tar for seg viktige algebraiske begreper, som er sentrale for å forstå og bruke algebra som et modelleringsverktøy. I Kapittel 4.3 vil jeg forklare begrepet *funksjon*, slik vi definerer det i dag. Resten av den epistemologiske referansemodellen knyttet til funksjoner er presentert i vedlegget. Denne inkluderer teori om ulike typer av funksjoner samt litt om deres nytteverdi. Siden denne studiens fokus er på behandlingen av matematisk modellering i *Sinus 1T* og algebraens rolle i denne behandlingen, er ikke teori om de bestemte typene av funksjoner nødvendig for å forstå den gjennomførte analysen av læreverket. Denne teorien var derimot viktig for meg for å skape en objektiv forståelse av kunnskapen i forkant av analysen av kapittelet «Modeller og funksjoner».

4.1 Den historiske utviklingen av algebra og begrepet *funksjon*: Et kort overblikk

Den matematiske disiplinen algebra er et resultat av en sakte historisk utvikling, som har spor helt tilbake til oldtidens Egypt. Allerede i årene 1800–1600 før vår tidsregning var babylonerne dyktige til å løse algebraiske problemer som inneholdt både lineære og kvadratiske likninger. Metodene deres var derimot lite generelle, og det var ingen vekt på logiske bevis og utledninger (Edwards, 1979, s. 3–5). Ely og Adams (2012) peker på at det er i disse babylonske skriftene at vi finner noen av de eldste representasjonene av en ukjent (s. 23).

Den greske matematikken i antikkens Hellas sentrerte seg rundt geometri og hele positive tall. Grekerne definerte *tall* som positive heltall, og en brøk $\frac{a}{b}$, der a og b er positive heltall, ble sett på som et forhold og ikke som en egen enhet, et rasjonalt tall. Lenge ble det antatt at alle lengder er kommensurable (Edwards, 1979, s. 6–7). «To rette linjestykker A og B er kommensurable hvis det finnes et rett linjestykke C slik at lengden til A og B begge er hele multipler av lengden til C» («kommensurabel (matematikk),» 2022). Man sier at to størrelser er kommensurable med hensyn på et bestemt mål hvis forholdet mellom måltallene er et rasjonalt tall. Pytagoras' teorem viste derimot at sidelengden og diagonalen i et kvadrat med sidelengde 1 ikke er kommensurable lengder. For grekerne, som kun anså positive heltall som tall, betød dette at det fantes geometriske størrelser som ikke kunne måles med tall, og at geometriske størrelser hadde en kontinuerlig karakter, i motsetning til heltall som var diskret. Siden grekerne ikke anså komplekse tall som tall, hadde likninger som $x^2 = -2$ ingen løsning. Likninger på formen $x^2 = ab$ kunne løses ved å konstruere et kvadrat med likt areal som et rektangel med sidelengder a og b (Edwards, 1979, s. 10–11), noe som demonstrerer den tydelige geometriske tilnærmingen grekerne hadde til matematikken.

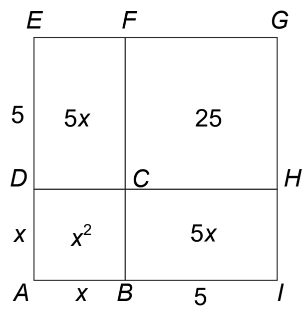
Videre var det et tydelig skille mellom geometri og aritmetikk/algebra. Den strenge adskillelsen mellom lengder og tall, samt den tydelig geometriske tilnærmingen, forhindret utviklingen av generelle algoritmer som kunne anvendes på klasser av problemer (Edwards, 1979, s. 79).

Kaput (1994, som referert i Ely & Adams, 2012, s. 26) trekker for eksempel fram at alle regneoperasjoner måtte ha en veldefinert geometrisk referanse, som medførte at alle mellomregninger måtte resultere i positive tall. Videre var mulige manipulasjoner og representasjoner avhengige av det matematiske objektet man studerte. Dette står i kontrast til den moderne matematikken, der vi kan manipulere ulike størrelser uten å bry oss om størrelsene for eksempel er reelle, rasjonale eller komplekse (Ely & Adams, 2012, s. 24–26). Grekerne hadde heller ikke noen form for symbolsk språk, så alt ble skrevet med ord (Edwards, 1979, s. 79).

Ordet *algebra* kommer fra den islamske matematikken, som begynte rundt år 825 etter vår tidsregning med matematikeren al-Khowarizmi. Han jobbet med størrelser som tall og ikke som geometriske størrelser, og han reduserte løsningen av likninger, lineære og kvadratiske, til algoritmer. Likningene hans inneholdt kvadrater (x^2), røtter (dvs. løsninger av likningen) (x) og konstanter. For eksempel undersøkte han likninger på formen $x^2 + 10x = 39$. Disse løste han gjennom metoden «å fullføre kvadratet», som han forklarte geometrisk, se Figur 4.1. Ved å legge til kvadratet av halvparten av roten, det vil si 5^2, får man et kvadrat. Siden $x^2 + 10x = 39$, må hele det store kvadratet (AEGI) ha totalt areal på 39 + 25 = 64. Dermed må x være lik 8 – 5 = 3. Arbeidene til al-Khowarizmi var helt verbale, uten noen form for symbolsk språk, og til og med tall var skrevet med ord. Dette var et steg tilbake fra Diofantos, som i det 3. århundre før vår tidsregning hadde introdusert forkortelser for potenser, slik som Δ^{γ} for kvadratet og K^{γ} for kuben (Edwards, 1979, s. 82–83).

Figur 4.1

Geometrisk løsning av likningen $x^2 + 10x = 39$.



Merknad: Figuren er tilpasset etter Edwards (1979, s. 83).

Tidlig på 1500-tallet var disiplinen algebra fortsatt konsentrert om å finne verdien til den ukjente i en likning med spesifikke numeriske verdier. Edwards (1979) forklarer at algebra derfor var «a bag of tricks», siden hvert spesifikke problem hadde sin løsningsmetode. Ideen om å studere generelle likninger som representerer klasser av problemer, hadde enda ikke oppstått. Det var den franske matematikeren François Viète som først kom med denne ideen. Han introduserte bruken av vokaler for ukjente størrelser og konsonanter for parametere. Dette medførte at man kunne studere generelle problemer og løsningsmetoder, og man kunne undersøke sammenhenger mellom ulike problemer (s. 94–95).

Viétes arbeider markerer starten på den klassiske algebraen. Videre på 1600-tallet utviklet Fermat og Descartes den analytiske geometrien. Edwards (1979) beskriver den sentrale ideen i analytisk geometri som «[…] the correspondence between an equation $f(x, y) = 0$ and the locus (generally a curve) consisting of all those points whose coordinates (x, y) relative to two fixed perpendicular axes satisfy the equation» (s. 95). Fermat og Descartes hadde samme mål om å bruke de algebraiske metodene fra renessansen til å løse geometriske problemer. Descartes startet med et geometrisk problem, som han oversatte til en geometrisk likning, mens Fermat startet med en likning og utledet fra denne de geometriske egenskapene til den korresponderende kurven. Et felles viktig særpreg var at de konsentrerte seg om ubestemte likninger, som involverer kontinuerlige variabler (Edwards, 1979, s. 96–97). I en ubestemt likning kan de ukjente ha flere verdier («Indeterminate equation,» u.å.). Likningen $4x + 2y = 1$ er et eksempel på en ubestemt likning, der løsningen er $y = \frac{1}{2} - 2x$. Altså en rett linje i planet. Viéte studerte derimot bestemte likninger, der den ukjente er en bestemt numerisk verdi man søker etter. Med andre ord jobbet Fermat og Descartes med formler med flere parametere, som de studerte som et funksjonelt forhold, der en variabel varierer i forhold til en annen variabel. Viéte jobbet derimot med likninger, der målet var å finne verdien til en ukjent.

Fermats og Descartes' innføring av begrepet *variabel* var helt sentralt for utviklingen av kalkulus på 1600- og 1700-tallet (Edwards, 1979, s. 97). Denne utviklingen startet med Newton og Leibniz, som jobbet med infinitesimale størrelser. Et arbeid som til slutt resulterte i det vi i dag kjenner som differensialregning. I disse analysene var det hovedsakelig geometriske kurver man studerte, og variablene assosiert med en kurve var geometriske (abscisse, ordinat, buelengde etc.). Disse geometriske variablene ble hovedsakelig assosiert med selve kurven og ikke med hverandre. Som Edwards (1979) skriver «In particular, the several variables associated with a curve were not generally viewed as depending upon some single 'independent' variable» (s. 270). Det var Leibniz som introduserte begrepet *funksjon,* og han forklarte at de ulike geometriske størrelsene assosiert med en kurve er funksjoner av kurven. Etter hvert ble det lagt større vekt på formlene og likningene som relaterer funksjonene til en kurve. Det medførte et økt fokus på symbolene i uttrykkene, det vil si på hvordan noen variabler var avhengige av andre variabler og tall i uttrykkene, og ikke kun avhengig av selve den geometriske kurven. I *Introduction to Analysis of the Infinite: Book I* (1748) kom Euler med sin definisjon av en funksjon. Senere kom han med en bredere definisjon, som praktisk talt er lik definisjonen vi bruker i dag (Edwards, 1979, s. 271).

4.2 Teoretiske verktøy for undervisning og læring av algebra

Som beskrevet i Kapittel 3.3 er algebra et viktig modelleringsverktøy. Ved hjelp av formler og parametere kan vi konstruere modeller *S'*, som tillater oss å undersøke ulike spørsmål *Q* knyttet til systemer *S* (Strømskag & Chevallard, 2022). I dette kapittelet vil jeg utdype noen av de allerede presenterte algebraiske begrepene samt introdusere noen nye. Jeg vil også presentere noen resultater fra tidligere forskning i ATD om hvordan algebra blir undervist i skolen.

4.2.1 Formel og algebraisk uttrykk

Et algebraisk uttrykk er «an expression obtained by a finite number of the fundamental operations of algebra upon symbols representing numbers» («Algebraic expression,» u.å.). De fundamentale algebraiske operasjonene inkluderer addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon, potenser og røtter (Strømskag & Chevallard, 2022, s. 392). Et eksempel på et algebraisk uttrykk er $x + y$, som for eksempel kan representere addisjon av to ulike tall.

En formel er «A rule or principle expressed in algebraic language» («Formula,» u.å.). Et eksempel på en formel er $A = \pi r^2$, som beskriver arealet av en sirkel med radius *r*. I forbindelse med formler beskriver Abbott (1942/1971) tre ulike algebraiske operasjoner: *konstruksjon*, *manipulasjon* og *evaluering* (referert i Strømskag & Chevallard, 2022, s. 381). Strømskag og Chevallard (2022) forklarer at konstruksjon av en formel innebærer å konstruere en algebraisk modell av et system. Manipulasjon betyr å gjøre om på en formel, mens evaluering av en formel innebærer å sette inn tallverdier for å finne den numeriske verdien til en parameter i en bestemt situasjon. For eksempel kan vi manipulere formelen for arealet av en sirkel, slik at vi får en formel for radien $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Dersom vi får oppgitt en verdi for arealet, kan vi regne ut radien (evaluere formelen).

4.2.2 Plassholder, ukjent og variabel

Formler og algebraiske uttrykk samt likninger og funksjoner inneholder bokstaver som representerer ulike numeriske verdier. I algebra kan bokstaver opptre i form av ukjente, variabler eller plassholdere, men det er derimot ingen enstemmig enighet blant matematikere i bruken av disse (Ely & Adams, 2012, s. 20). Her vil jeg ta utgangspunkt i beskrivelsene gitt av Ely og Adams (2012), samt forklaringene gitt av Strømskag og Chevallard (2022) som knytter begrepene til matematisk modellering.

En plassholder kan være en *parameter*, en *konstant* eller en *koeffisient*. Ely og Adams (2012) forklarer at «We use the word *placeholder* to mean a letter standing for a number that will be provided in a particular problem and context» (s. 21). Formelen $V = \pi r^2 h$ beskriver volumet av en sylinder med radius r og høyde h. Her er π en konstant, mens V, r og h er parametere. En parameter er et element av en modell som beskriver et system. Den har altså en funksjon i en modell. En koeffisient er ikke knyttet til en modell av et system. For eksempel vil bokstavene a, b og c i det generelle uttrykket for et andregradspolynom $ax^2 + bx + c$ være koeffisienter. De gjør at man kan beskrive alle former for andregradspolynomer, men uttrykket er ikke direkte knyttet til et system («Coefficient,» 2023).

Ta igjen utgangspunkt i formelen for volumet av en sylinder, $V = \pi r^2 h$. Dersom vi ønsker å få et uttrykk for h, kan vi løse *likningen* med hensyn på h og få uttrykket $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Da opptrer h som en *ukjent* i likningen (Strømskag & Chevallard, 2022). Ely og Adams (2012) forklarer at en ukjent står for en bestemt numerisk verdi (eller noen få verdier), som kan bestemmes fra den gitte informasjonen i problemet, og en ukjent er alltid en del av en likning (s. 21). I Kapittel 4.2.3 forklarer jeg begrepet *likning* nærmere.

Anta så at vi heller ønsker å se på hvordan volumet V av sylinderen varierer med varierende høyde h. Da kan vi undersøke *funksjonen* $V(h) = \pi r^2 h$, der π er en konstant, r er en parameter, mens V og h opptrer som *variabler* (Strømskag & Chevallard, 2022). Ely og Adams (2012) beskriver en variabel som en varierende størrelse, som er en del av et systematisk forhold: «a variable quantity can *vary*, and when it does there is some other quantity that varies with it» (s. 21).

4.2.3 Lineære likninger og likningssystemer

En matematisk likning er et utsagn om likhet mellom to matematiske uttrykk (Weisstein, u.å.a.). Den består vanligvis av bokstaver (parametere og ukjente), konstanter, matematiske operasjoner og et likhetstegn. Hensikten med en likning er å beskrive en sammenheng mellom to eller flere størrelser og å finne en løsning for en ukjent, der løsningen kan involvere én eller flere verdier. Likninger er grunnleggende objekter i matematikk og annen vitenskap. De brukes til å modellere fenomener i og utenfor matematikken, og til å løse problemer og lage prognoser.

I lineære likninger opptrer de ukjente kun i første grad. En generell lineær likning med *n* ukjente kan skrives på formen $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0$. En lineær likning med én ukjent kan dermed generelt skrives på formen $ax + b = 0$, mens en lineær likning med to ukjente skriver vi som $ax + by + c = 0$. Et lineært likningssystem består av en endelig mengde med lineære likninger. Løsningen av systemet må oppfylle alle likningene. Et system av lineære likninger kan løses ved hjelp av en matrise (Anton & Rorres, 2015, s. 2–20). Enkle systemer med to likninger og to ukjente løser vi derimot ofte ved hjelp av addisjonsmetoden eller innsettingsmetoden.

4.2.4 Tidligere forskning om algebraens rolle i skolen

I Kapittel 3.3 og her i Kapittel 4 har jeg forklart og illustrert algebra som et modelleringsverktøy, og spesielt hvordan formler og parametere lar oss undersøke ulike spørsmål knyttet til ulike systemer. Med utgangspunkt i en formel med flere parametere kan vi behandle formelen både som en funksjon og som en likning, avhengig av hva vi ønsker å undersøke i det studerte systemet. Tidligere forskning (Bolea et al., 2004; Bosch, 2015; Ruiz et al., 2007; Strømskag & Chevallard, 2022) peker derimot på at formler og parametere i stor grad har forsvunnet fra matematikken på ungdomsskolen og i videregående skole. Bokstaver i algebraiske uttrykk er enten ukjente størrelser i likninger eller variabler i en funksjon. Denne bruken av bokstaver er også et uttrykk for den tydelige oppdelingen i skolen av algebra og funksjoner i to ulike domener.

Bosch (2015) skriver at algebra, og spesielt bruken av parametere og formler, tidligere ble introdusert gjennom aritmetikken, der algebra ble brukt som verktøy for å løse en mengde av problemer (s. 56). Dette henger sammen med den historiske utviklingen av algebra, som gjorde det mulig for matematikerne å bevege seg fra å studere spesifikke løsninger på isolerte problemer, til å studere generelle løsninger på klasser av problemer. Bosch (2015) forklarer derimot at denne naturlige koblingen mellom algebra og aritmetikk i dag har forsvunnet. Algebra blir hovedsakelig identifisert med likninger og tekstoppgaver der man må anvende likninger. Elevene får også gjerne en kort introduksjon til det algebraiske språket og lærer om begreper som algebraisk uttrykk, likning, identitet, ledd og koeffisient (s. 56). Undervisningen av algebra har med andre ord en svært formell tilnærming, og algebra blir forstått som en generalisering av aritmetikken og ikke som et verktøy for å utvikle de matematiske prakseologiene innenfor aritmetikken (Bolea et al., 2004; Bosch, 2015; Ruiz et al., 2007; Strømskag & Chevallard, 2022). I forbindelse med dette peker Bolea et al. (2004) på fire oppgavetyper, som beskriver hva den elementære algebraen i skolen er begrenset til å være. Disse er

1. å skrive uttrykk for å beskrive eller generalisere aritmetiske kalkulasjonsteknikker
2. å manipulere algebraiske uttrykk for å simplifisere eller transformere
3. å etablere og manipulere algebraiske uttrykk, der bokstavene representerer ukjente tall (spesielt løse likninger)
4. å løse tekstoppgaver med likninger (s. 126)

Ruiz et al. (2007) presenterer begrepet «functional-algebraic modelling», som de forklarer som en utvikling av det algebraiske instrumentet. Dette viser til en utvikling som tillater å bygge ut de matematiske prakseologiene man møter på ungdomsskolen og på videregående. Videre beskriver de tre ulike nivåer av «functional-algebraic modelling»:

1. På det første nivået ser man på modeller som isolerte funksjoner med én variabel, og på de korresponderende likningene og ulikhetene. Slike modeller er på formen $B(x) = 6x – (2,5x + 150)$. Det er et tydelig skille mellom parametere og variabler. Oppgavene som er inkludert i slike modeller krever en analyse av forholdet mellom de ulike komponentene samt en analyse av den globale oppførselen til funksjonen. For eksempel kan man stille spørsmål som «for hvilke verdier av x er $B > 1000$?».
2. På det andre nivået ser man på modeller som familier av funksjoner med én variabel, og på den korresponderende parametriske likningen. Slike modeller er på formen $B_c(x) = 6x – (cx + 150)$. Det er fortsatt et skille mellom parametere og variabler.
3. På det tredje nivået ser man på modeller i form av familier av funksjoner i to eller flere variabler, og på de korresponderende algebraiske formlene. Slike modeller er på formen $B(x, c, L) = 6x – (cx + L)$. Det er ikke lenger noe skille mellom hva som er parametere og hva som er variabler (Ruiz et al., 2007, s. 2172–2173).

Ruiz et al. (2007) skriver at det i spansk ungdomsskole kun finnes oppgaver knyttet til det første nivået. Dette er også noe Bosch (2015) peker på, som forklarer at formler der man ikke skiller mellom ukjente og parametere, sjelden er å finne på ungdomsskolen og i videregående skole. Denne forståelsen og bruken av formler er derimot, blant annet, sentral i overgangen fra elementær algebra til funksjoner og differensialregning (s. 63).

4.3 Begrepet *funksjon*

Den historiske utviklingen av algebra og etter hvert kalkulus, viser hvordan Fermats og Descartes' innføring av variabler gjorde at man kunne studere forholdet mellom ulike parametere og hvordan de varierer i forhold til hverandre. Den videre utviklingen av kalkulus på 1600- og 1700-tallet førte etter hvert til introduksjonen av begrepet *funksjon*. I dag definerer vi begrepet på følgende måte:

> A function is a relation that uniquely associates members of one set with members of another set. More formally, a function from A to B is an object f such that every $a \in A$ is uniquely associated with an object $f(a) \in B$. (Stover & Weisstein, u.å.)

Altså er en funksjon en avbildning som tar ethvert element a i *definisjonsmengden A* til ett element b i *verdimengden B*. Vi skiller gjerne mellom algebraiske funksjoner og transcendentale funksjoner. Algebraiske funksjoner er konstruert ved å bruke algebraiske operasjoner, det vil si addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og røtter. Polynomfunksjoner, potensfunksjoner og rasjonale funksjoner er algebraiske funksjoner. Eksempler på transcendentale funksjoner er eksponentialfunksjoner, trigonometriske funksjoner og inverse av slike funksjoner (Weisstein, u.å.b.). Vedlegget inneholder teori om lineære funksjoner, polynomfunksjoner, eksponentialfunksjoner og potensfunksjoner, som er de kapittelet «Modeller og funksjoner» i *Sinus 1T* tar for seg.[5]

[5] Kapittelet «Modeller og funksjoner» i *Sinus 1T* beskriver også rasjonale funksjoner. Denne teorien og de tilhørende oppgavene er derimot ikke knyttet til modellering av systemer. Delkapittelet om rasjonale funksjoner er derfor ikke inkludert i denne studien.

5 Metode

I dette kapittelet vil jeg redegjøre for den metodiske tilnærmingen i studien. I Kapittel 5.1 vil jeg beskrive bakgrunnen for valg av tema og datamateriale, mens jeg i Kapittel 5.2 vil forklare det overordnede forskningsdesignet. I Kapittel 5.3 vil jeg redegjøre for den prakseologiske analysen av kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner» i læreboka *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a), før jeg i Kapittel 5.4 forklarer hvordan jeg har studert de digitale utforskningsarkene på nettstedet tilknyttet boka. Til slutt, i Kapittel 5.5, vil jeg diskutere påliteligheten og validiteten i studien samt ulike etiske betraktninger.

5.1 Valg av tema og datamateriale

Som beskrevet i introduksjonen til denne oppgaven, har matematisk modellering en sentral plass i skolen, noe som blant annet kommer til uttrykk gjennom kjerneelementet «modellering og anvendelser». I ATD handler matematisk modellering om å utvikle forståelse og oppdage nye sammenhenger, noe jeg alltid har ansett som viktig i læring og undervisning av matematikk. Sammen med min interesse for algebra og den tidligere forskningen knyttet til algebra i skolen, dannet dette bakgrunnen for å undersøke forskningsspørsmålet «Hvordan behandles matematisk modellering i *Sinus 1T*, og hvilken rolle spiller elementær algebra i denne behandlingen?».

I ATD er det, som forklart tidligere, et viktig prinsipp at man stiller spørsmål ved kunnskapen som undervises i skolen (Bosch, 2015; Bosch & Gascón, 2014; Chevallard, 2019, s. 72–77). Gilje et al. (2016) peker på at læreverk er viktige i lærernes fortolkning av læreplanen (s. xiii), og det er derfor nyttig å undersøke kunnskapen i læreverk, for å undersøke kunnskapen som blir undervist i klasserommet. I utgangspunktet hadde jeg planlagt også å undersøke *Sinus R1* og *Sinus R2* av Oldervoll et al. utgitt i henholdsvis 2021 og 2022, for å dekke hele realfagsmatematikken i videregående skole. På grunn av begrensninger i omfanget av en masteroppgave, endte jeg opp med kun å studere læreboka *Sinus 1T*. Jeg har derimot inkludert noen av utforskningsarkene på nettstedet tilknyttet læreboka. I et stadig mer digitalisert samfunn får digitale læringsmidler større og større plass i undervisningen (Gilje, 2021), og jeg syntes det derfor var viktig å inkludere de digitale ressursene til læreverket i studien.

I *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c) har jeg undersøkt de to kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner». Siden jeg i studien ønsket å undersøke behandlingen av matematisk modellering og algebraens rolle i denne behandlingen, var det ganske naturlig å gjøre en analyse av disse kapitlene. De tidligere forskningsfunnene som peker på et tydelig skille i skolen mellom algebra og funksjoner (Bolea et al., 2004; Ruiz et al., 2007; Strømskag & Chevallard, 2022), gjorde det også interessant å undersøke disse to kapitlene.

5.2 Overordnet forskningsdesign

For å undersøke hvordan matematisk modellering behandles i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c), og hvilken rolle elementær algebra har i denne behandlingen, har jeg gjennomført en dokumentstudie av læreverket, noe som faller inn under den kvalitative forskningstradisjonen. Bowen (2009) beskriver dokumentanalyse som en systematisk prosedyre for å undersøke og evaluere dokumenter. Han forklarer at det innebærer å finne og velge ut datamateriale, for deretter å undersøke og forstå dataene for å oppnå forståelse og utvikle kunnskap (s. 27–28). Mer presist har jeg gjennomført en *prakseologisk analyse* av læreboka *Sinus 1T*, mens jeg har studert de digitale utforskningsarkene mer overordnet med tanke på matematisk modellering. I Kapittel 5.3 gir jeg en detaljert beskrivelse av den prakseologiske analysen, mens jeg i Kapittel 5.4 forklarer hvordan jeg har studert de digitale utforskningsarkene.

Som forklart både i Kapittel 3 og i Kapittel 4, er det et viktig prinsipp i ATD å utarbeide en egen epistemologisk referansemodell for kunnskapen man skal undersøke, for å unngå å bli påvirket av institusjonelle synspunkter (Bosch, 2015). I Kapittel 4 har jeg presentert deler av den epistemologiske referansemodellen knyttet til funksjoner samt den epistemologiske referansemodellen for algebra. Den sistnevnte referansemodellen har vært sentral for utvalget av hvilke delkapitler og oppgaver jeg skulle inkludere i analysene av kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner». Viktige begreper har vært *formel*, *likning/likningssett*, *algebraisk uttrykk*, *funksjon*, *parameter*, *variabel* og *ukjent*. I tillegg har begrepsparet *system – modell* vært sentralt. Et delkapittel eller en oppgave er kun inkludert i analysene dersom det/den har inneholdt en form for transformasjon fra et system til en modell. I Kapittel 6.1 og Kapittel 7 beskriver jeg mer i detalj hvilke delkapitler jeg har inkludert i henholdsvis «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner».

5.3 Prakseologisk analyse av læreboka *Sinus 1T*

Den gjennomførte dokumentstudien av læreboka *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a) er en prakseologisk analyse av kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner». Det innebærer at jeg har identifisert oppgavetyper T med tilhørende teknikker τ i de to kapitlene. Videre har jeg studert teorien i kapitlene for å undersøke den presenterte teknologien θ bak teknikkene. I utformingen og gjennomføringen av den prakseologiske analysen av læreboka har jeg hentet inspirasjon fra masteroppgaven til Kristianslund (2022), som gjorde en prakseologisk analyse av differensialregning i matematikk R1. Som forklart ovenfor, har jeg brukt den epistemologiske referansemodellen knyttet til algebra, som er presentert i Kapittel 4, for å velge ut hvilke delkapitler og oppgaver jeg skulle inkludere i analysen. Jeg har behandlet de to kapitlene litt ulikt, og nedenfor beskriver jeg den metodiske tilnærmingen for hvert av dem.

5.3.1 Metodisk tilnærming for analyse av «Formler og likninger» i læreboka *Sinus 1T*

I den prakseologiske analysen av «Formler og likninger» startet jeg med å studere eksempler og oppgaver for å undersøke hvilke oppgavetyper som finnes og hvilke teknikker som er presentert for å løse de ulike oppgavetypene. Med andre ord startet jeg med å identifisere de spesifikke prakseologiene i kapittelet. For å sette ord på disse, og spesielt forklare de ulike teknikkene, brukte jeg den epistemologiske referansemodellen knyttet til algebra som begrepsapparat. Med inspirasjon fra masteroppgaven til Kristianslund (2022) begynte jeg med å studere eksemplene i kapittelet for å identifisere ulike oppgavetyper med tilhørende teknikker. Videre analyserte jeg oppgavene i teoridelen og i oppgaveseksjonen «Øv mer», som av Oldervoll et al. (2020a) blir beskrevet som oppgaver ment for repetisjon. Disse oppgavene er underordnet de ulike delkapitlene (s. 3). Denne analysen resulterte i et sett med spesifikke prakseologier, det vil si oppgavetyper som kan løses med bestemte teknikker. Deretter tok jeg for meg oppgavene i oppgaveseksjonene «Uten hjelpemidler» og «Med hjelpemidler», som er beskrevet som varierende oppgaver med passende utfordringer for alle (Oldervoll et al., 2020a, s. 3). Analysene av disse oppgavene resulterte i flere spesifikke prakseologier, slik at alle oppgaver passet inn i en spesifikk prakseologi.

Som Kristianslund (2022) har jeg valgt å se på en deloppgave som en oppgave i analysen. Dersom en deloppgave innebærer bruk av flere teknikker, har jeg plassert oppgaven innenfor flere spesifikke prakseologier. Hvis det i en deloppgave er to spørsmål som krever akkurat samme teknikk, har jeg plassert den kun én gang innenfor den tilhørende spesifikke prakseologien. For eksempel får man i oppgave 1.197a informasjon om to ulike lønnstilbud, og man skal konstruere formler som beskriver hvert av de to tilbudene (Oldervoll et al., 2020a, s. 319). De to lønnstilbudene er begge på lineær form, og det krever akkurat samme teknikk for å konstruere de to formlene for de to ulike tilbudene. I noen oppgaver blir man eksplisitt bedt om å løse oppgaven både grafisk og ved regning. Da har jeg kategorisert oppgaven to ganger innenfor den tilhørende spesifikke prakseologien. I oversikten over de ulike spesifikke prakseologiene, presentert i Kapittel 6.3, har jeg markert antall oppgaver som det er spesifisert skal løses grafisk. Jeg har derimot ikke differensiert mellom om en oppgave skal løses digitalt eller ikke.

Etter å ha studert praksis-blokka i kapittelet «Formler og likninger», undersøkte jeg teknologien, som begrunner og forklarer teknikkene. Dette gjorde jeg ved å studere den presenterte teorien i læreboka *Sinus 1T*. I tilfeller der denne var litt mangelfull, brukte jeg den epistemologiske referansemodellen knyttet til algebra. Den epistemologiske referansemodellen var også viktig i denne delen av analysen for å unngå å ta den presenterte teorien for gitt, og heller undersøke den med et kritisk blikk. De spesifikke prakseologiene som deler samme teknologi, plasserte jeg i samme lokale prakseologi. De lokale prakseologiene med tilhørende spesifikke prakseologier er beskrevet med eksempler i Kapittel 6.

Den prakseologiske analysen av «Formler og likninger» ga meg en oversikt over innholdet i kapittelet: hvilke oppgavetyper som finnes, hvilke teknikker som presenteres, og hvordan teknikkene er begrunnet i teknologier. Jeg studerte så disse resultatene enda nærmere for å sette dem i større sammenheng med matematisk modellering. Dette innebar en analyse av hvordan de ulike spesifikke prakseologiene inngår i modellering av ulike systemer.

5.3.2 Metodisk tilnærming for analyse av «Modeller og funksjoner» i læreboka *Sinus 1T*

Som for kapittelet «Formler og likninger», har jeg studert kapittelet «Modeller og funksjoner» med tanke på hvilke oppgavetyper som finnes, hvilke teknikker som presenteres for å løse de ulike oppgavetypene, og hvilke forklaringer som underbygger teknikkene, altså teknologiene. Jeg har behandlet deloppgaver på samme måte som i «Formler og likninger», og jeg har brukt samme fremgangsmåte der jeg først har studert eksempler og repetisjonsoppgaver, deretter de mer varierte oppgavene, og til slutt den forklarende teorien.

De fleste oppgavene inneholder flere deloppgaver, noe som står i kontrast til matematisk modellering slik det er forstått i ATD. I ATD tar modelleringsprosessen utgangspunkt i et system og et genererende spørsmål, og elevene skal gjennom arbeidsprosessen selv støte på ulike deloppgaver (García et al., 2006; Strømskag & Chevallard, 2022). På bakgrunn av dette har jeg også undersøkt den generelle oppbygningen av oppgavene.

Kapittelet «Modeller og funksjoner» tar for seg funksjonene lineære funksjoner, polynomfunksjoner, eksponentialfunksjoner og potensfunksjoner. I motsetning til kapittelet

«Formler og likninger», der jeg presenterer analyseresultatene ved å beskrive alle de spesifikke prakseologiene med eksempler, vil jeg for kapittelet «Modeller og funksjoner» presentere én oppgave knyttet til hver av funksjonene, for å peke på resultatene fra den prakseologiske analysen. Som jeg vil beskrive i Kapittel 7, er det for mange av oppgavene en manglende kobling mellom modell og system. Jeg har derfor utarbeidet en alternativ oppgave til hver av eksempeloppgavene for å peke på hvordan man med noen grep kan skape en større sammenheng mellom modell og system, samt hvordan algebra kan få en større rolle som modelleringsverktøy. Som Bosch (2015) peker på kan ikke det endelige målet med analysene reduseres til å beskrive hvordan ting er og hvorfor de muligens er slik, men å utforske på hvilke måter de kan utvikle seg (s. 64).

5.4 Metodisk tilnærming for analyse av utforskningsarkene på nettstedet til *Sinus 1T*

Som beskrevet får digitale læringsmidler en stadig større plass i skolen. Jeg har derfor undersøkt de digitale utforskningsarkene, tilknyttet kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner», på nettstedet til *Sinus 1T.* I denne oppgaven har jeg inkludert en analyse av tre av disse oppgavene. I «Formler og likninger» har jeg undersøkt Oppgave 2 og 3 på utforskningsarket «Lag et regnestykke av teksten». Disse vil jeg referere til som «Oldervoll et al., 2020b, utforskningsark [LRT]». Tilknyttet kapittelet «Modeller og funksjoner» har jeg sett på utforskningsarket «Mann på stige», som jeg vil referere til som «Oldervoll et al., 2020c, utforskningsark [MPS]». Disse oppgavene er eksempler på interessante modelleringsoppgaver eller oppgaver som med noen justeringer kan bli spennende modelleringsoppgaver. Jeg har studert de mer overordnet med tanke på matematisk modellering, der jeg har undersøkt i hvilken grad og hvordan elevene må konstruere egne modeller for å løse problemer tilknyttet ulike systemer.

5.5 Pålitelighet, validitet og etiske betraktninger

Bowen (2009) og Cohen et al. (2007) trekker frem at et viktig prinsipp i dokumentanalyse er å undersøke konteksten dokumentet er laget i. Det innebærer blant annet å undersøke formålet med dokumentet og hvem dokumentet er laget for. Oldervoll et al., (2020a, s. 3) skriver at *Sinus 1T* er utviklet etter læreplanen fra 2020. Læreverket skal derfor dekke både kompetansemål og kjerneelementer i læreplanen for matematikk 1T. Videre vil også forhold knyttet til samfunnet mer generelt påvirke både innholdet og oppbygningen av læreverk, slik skalaen av didaktisk medbestemmelse er en modell for. For eksempel vil tradisjonen med å dele opp skolehverdagen i adskilte fag, og videre de ulike fagene i ulike temaer, påvirke utformingen av læremidler.

Et annet viktig prinsipp som Bowen (2009) trekker frem i forbindelse med dokumentanalyser, er at man fremstiller dokumentet riktig og ærlig (s. 32). Dette prinsippet har jeg forsøkt å ivareta ved å trekke frem både generelle karakteristikker ved oppgavene og teorien i læreverket og ting som skiller seg ut. I analysen og diskusjonen av innholdet i kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner» har jeg gjengitt flere oppgaver fra *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c). Hensikten med dette er å gjøre det lett for leseren å forstå analysene jeg har gjort.

Å fremstille et dokument riktig og ærlig er videre knyttet til validiteten i studien, og bruken av prakseologi som analyseverktøy er med på å ivareta validiteten. Gjennom begrepet prakseologi har jeg som forsker fått muligheten til å studere ulike matematiske prakseologier på samme måte, uten å tillegge noen aktiviteter eller oppgaver større verdi enn andre (Bosch, 2015). I kategoriseringen av de ulike oppgavene i spesifikke prakseologier har jeg tatt utgangspunkt i de gjennomgåtte teknikkene, som er presentert gjennom eksempler og teori, i læreboka *Sinus 1T*. I mer åpne oppgaver, som spesielt krever flere teknikker og som ikke direkte er gjennomgått i teori eller eksempler, har jeg undersøkt ulike løsningsstrategier. Dette for å peke på fleksibiliteten i oppgaven, og for å unngå å pålegge oppgaven en spesiell løsningsmetode. Noen oppgaver har vært vanskeligere å kategorisere enn andre, og for noen oppgaver har jeg derfor spurt veileder og medstudenter om forslag til løsninger. Slik har jeg fått innspill til ulike løsningsstrategier.

En fordel med dokumentanalyse, som er med på å ivareta validiteten, er at forskeren og forskningsprosessen ikke kan påvirke eller endre selve dokumentet. Man unngår derfor trusselen for skjevheter i datamaterialet, som kan svekke validiteten i en kvalitativ studie. At dokumentet ikke endres, gjør også at resultatene er etterprøvbare for andre forskere (Bowen, 2009, s. 31). For at det skal være mulig å etterprøve resultatene jeg har kommet frem til har jeg i dette kapittelet grundig beskrevet hva jeg har gjort i studien, som inkluderer hvilke valg jeg har tatt og hvorfor. Dette er med på å ivareta prinsippet om pålitelighet (Bowen, 2009, s. 38).

En annen fordel med dokumentanalyser sammenlignet med andre kvalitative studier som intervju og observasjon, er at det ikke direkte er involvert noen personer i studien. Det er et grunnleggende prinsipp at forskeren har ansvar for alle personer som inngår i forskningen, og man skal respektere deres menneskeverd og personlighet (NESH, 2021, s. 18). I studien jeg har gjennomført handler det, som beskrevet av Bowen (2009), i større grad om å fremstille dokumentet ærlig og riktig. Som i all kvalitativ forskning vil det i analysene være elementer av subjektive vurderinger og overveielser. For å tydeliggjøre disse har jeg i denne oppgaven forsøkt å forklare grundig alle valgt jeg har gjort og hvorfor. Jeg vil påpeke at intensjonen med denne studien ikke er å vurdere kvaliteten på læreverket *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c). Målet er å undersøke, med ATD som metodisk og teoretisk rammeverk, hvordan matematisk modellering behandles, og hvilken rolle elementær algebra spiller i denne behandlingen.

6 Analyse av «Formler og likninger» i *Sinus 1T*

Gjennom denne studien har jeg undersøkt forskningsspørsmålet «Hvordan behandles matematisk modellering i *Sinus 1T*, og hvilken rolle spiller elementær algebra i denne behandlingen?». Jeg har tidligere beskrevet algebraens viktige oppgave som modelleringsverktøy, og spesielt den sentrale rollen formler og parametere har i modelleringen av et system. På bakgrunn av dette fant jeg det relevant å undersøke kapittelet «Formler og likninger» i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b).

I dette avsnittet av oppgaven min vil jeg først, i Kapittel 6.1, beskrive hvilke delkapitler og oppgaver jeg har studert, og hvorfor jeg har studert disse. Videre vil jeg i Kapittel 6.2 presentere resultatene fra den prakseologiske analysen av kapittelet «Formler og likninger» i læreboka *Sinus 1T*. Denne resulterte i to lokale prakseologier med en tilknytning til matematisk modellering, og jeg vil beskrive disse med tilhørende spesifikke prakseologier. I Kapittel 6.3 vil jeg gi en oversikt over fordelingen av de ulike spesifikke prakseologiene, før jeg i Kapittel 6.4 diskuterer resultatene fra den prakseologiske analysen i lys av forståelsen av matematisk modellering i ATD. I Kapittel 6.5 vil jeg presentere og diskutere tre interessante modelleringsoppgaver, der to av dem er hentet fra det digitale utforskningsarket «Lag et regnestykke av teksten» utviklet av Oldervoll et al. (2020b).

6.1 Valg av delkapitler og oppgaver i læreboka *Sinus 1T*

Kapittelet «Formler og likninger» i læreboka *Sinus 1T* inneholder ni delkapitler. Som jeg har beskrevet i metodekapittelet, brukte jeg den epistemologiske referansemodellen for algebra for å velge ut hvilke delkapitler jeg skulle inkludere i analysen. Viktige begreper i dette utvalget var *konstruksjon, manipulasjon og evaluering av formel, likning/likningssett, algebraisk uttrykk, funksjon, parameter, variabel* og *ukjent.* I tillegg var begrepsparet *system – modell* sentralt, og oppgavene som er inkludert i analysen inneholder en form for transformasjon fra et system (intramatematisk eller ekstramatematisk) til en modell. Jeg har derfor utelatt metodepregede oppgaver som «å trekke sammen algebraiske uttrykk», «å tegne rette linjer i et koordinatsystem» og «å løse ferdig oppsatte likninger».

De to første delkapitlene «Regnerekkefølge» og «Variabler og parenteser» inneholder teori og oppgaver om regnerekkefølge og forkorting av algebraiske uttrykk. Oppgavene er metodepreget, der elevene skal trene på disse regneoperasjonene. Jeg har derfor ikke ansett oppgavene som relevante knyttet til matematisk modellering, og de to delkapitlene er ikke en del av analysen. Delkapitlene «Rette linjer» og «Å finne likningen for ei linje» tar for seg teori knyttet til rette linjer. Det blir gjennomgått hvordan man kan finne konstantledd og stigningstall grafisk og ved regning, samt hvordan man kan tegne rette linjer gitt ulik informasjon om linja, som uttrykk, to punkter, eller ett punkt og informasjon om stigningstallet. Oppgavene går på disse tekniske metodene, og jeg har derfor ikke ansett de som relevante for forskningsspørsmålet mitt. Disse er derfor heller ikke inkludert i analysen.

I delkapittelet «Digital graftegning» blir det gjennomgått hvordan man kan bruke GeoGebra til å tegne rette linjer, og det inneholder derfor oppgaver der man skal tegne rette linjer digitalt. Disse deloppgavene har jeg ikke med i analysen. Det er derimot flere deloppgaver der man skal konstruere eller forklare formler, og disse har jeg valgt å inkludere. I delkapittelet som heter «Grafisk avlesing» forklarer forfatterne hvordan man kan løse likningssett grafisk både for hånd og med digitale hjelpemidler. Flere av oppgavene inneholder deloppgaver der man skal konstruere og evaluere formler samt sette opp og løse likninger eller likningssett knyttet til en virkelig situasjon. Jeg har derfor med dette delkapittelet i analysen. I delkapitlene «Likninger og identiteter» og «To lineære likninger med to ukjente» er det oppgaver der man skal konstruere og løse henholdsvis likninger og likningssett basert på informasjon i tekst. I delkapittelet som heter «Formler» er det oppgaver knyttet til konstruksjon, evaluering og manipulasjon av formler. Alle disse delkapitlene har jeg inkludert i analysen.

6.2 Prakseologisk analyse av «Formler og likninger» i læreboka *Sinus 1T*

Gjennom den prakseologiske analysen av kapittelet «Formler og likninger» i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a) har jeg kommet frem til to lokale prakseologier som har en form for forbindelse til matematisk modellering. Jeg vil videre presentere disse to lokale prakseologiene og de spesifikke prakseologiene som hører til hver av dem. Jeg vil forklare hvilke teknikker som blir presentert i læreboka *Sinus 1T* for å løse oppgavene, samt teknologien som teknikkene er begrunnet i.

6.2.1 Lokal prakseologi: Konstruere og løse likning/likningssett

Denne lokale prakseologien består av oppgaver som innebærer å konstruere og løse likninger og likningssett. Oppgavene deler samme teknologi om regneregler for likninger. Følgende oppgavetyper hører til prakseologien:

A1: Konstruere og løse likning fra tekstoppgave.

A2: Konstruere og løse likningssett fra tekstoppgave.

A3: Gitt formel som beskriver sammenheng mellom parametere. Konstruere og løse likning.

A4: Manipulasjon av formel/likning.

Den første spesifikke prakseologien A1: «Konstruere og løse likning fra tekstoppgave» inneholder oppgaver der man får informasjon gitt som tekst, og man skal bruke informasjonen til å konstruere en likning og finne verdien til en ukjent. Oppgave 1.135 er et eksempel på en typisk oppgave:

> I en klasse kan elevene velge mellom spansk, fransk og tysk. Halvparten av elevene velger spansk, en femtedel velger fransk, og resten av elevene velger tysk. Det er 9 elever som velger tysk. Hvor mange elever er det i klassen? (Oldervoll et al., 2020a, s. 312)

Teknologien er knyttet til regneregler for likninger, som i *Sinus 1T* er gitt i form av regler uten noen forklaring eller begrunnelse. Som Oldervoll et al. (2020a) forklarer, er dette regler elevene lærte på ungdomsskolen. De skriver at:

> Vi kan trekke fra eller legge til det samme tallet på begge sidene av likhetstegnet.
>
> Vi kan multiplisere eller dividere med det samme tallet på begge sidene av likhetstegnet dersom tallet ikke er null.
>
> Vi kan flytte et ledd over på den andre siden av likhetstegnet hvis vi samtidig skifter fortegn på leddet. (Oldervoll et al., 2020a, s. 13)

Her vil jeg påpeke at den første og den tredje regelen så å si er den samme, bortsett fra at det i den første kun er snakk om tall, mens i den tredje er det snakk om ledd. Å flytte et ledd i en likning over på den andre siden av likhetstegnet og bytte fortegn, er det samme som å trekke fra eller legge til leddet på begge sider av likhetstegnet. Teknologien knyttet til å omforme problemet fra en tekstoppgave til en likning er ikke gitt eksplisitt, men er forklart gjennom et eksempel med følgende innledning: «Noen ganger har vi oppgaver som ikke inneholder noen variabel, men som vi likevel kan løse ved hjelp av en likning. Da velger vi selv en variabel» (Oldervoll et al., 2020a, s. 17). Her er begrepet *variabel* brukt om bokstaven for den ukjente i likningen. I det presenterte eksempelet handler det derimot ikke om å undersøke hvordan en størrelse varierer med en annen størrelse. Målet er å finne en bestemt verdi for en *ukjent* i likningen.

Den spesifikke prakseologien A2: «Konstruere og løse likningssett fra tekstoppgave» inneholder oppgaver der informasjon er gitt som tekst, og man skal konstruere et likningssystem og finne verdien til de ukjente størrelsene. Det er hovedsakelig oppgaver med to ukjente og to likninger. Oppgave 1.144 er et eksempel på en typisk oppgave i dette delkapittelet: «Kari og Ola er til sammen 62 år. Om to år er Ola akkurat dobbelt så gammel som Kari. Hvor gamle er de i dag?» (Oldervoll et al., 2020a, s. 313). Teknologien er også her knyttet til regneregler for likninger, i tillegg til ulike metoder for å løse lineære likningssett med to likninger og to ukjente. Forfatterne skriver at «Å løse et likningssett med to ukjente er det samme som å finne verdier for *x* og *y* som passer i begge likningene samtidig» (Oldervoll et al., 2020a, s. 19). Videre blir innsettingsmetoden gjennomgått med utgangspunkt i likningssystemet

$$5x - 2y = 4 \tag{6.1}$$

$$x + y = 5 \tag{6.2}$$

Oldervoll et al. (2020a) forklarer at man ved hjelp av Likning 6.2 kan finne et uttrykk for *x*, som man kan sette inn i Likning 6.1. Deretter kan man løse Likning 6.1 for *y* og sette svaret inn i uttrykket for *x* (s. 19). Videre bruker de samme likningssystem for å forklare addisjonsmetoden. Ved å multiplisere Likning 6.2 med to og legge sammen de to ligningene, forsvinner *y*-leddet, og man kan løse likningen for *x*. For å finne verdien til *y* setter man inn verdien for *x* i en av de opprinnelige likningene (s. 20–21). Det er ingen forklaringer eller eksempler knyttet til å omforme en tekstoppgave til et likningssystem.

I nesten alle oppgavene i den spesifikke prakseologien A3: «Gitt formel som beskriver sammenheng mellom parametere. Konstruere og løse likning» er man gitt en formel på formen $y = ax + b$, der *a* og *b* har bestemte numeriske verdier. Verdien til *y* er gitt, og man skal finne verdien til *x*. Grafisk løsning innebærer å tegne linja for verdien til *y* og finne skjæringspunktet mellom denne og linja $y = ax + b$. Oppgave 1.198 på side 319 er et typisk eksempel:

> En familie skal på langtur med bilen. De fyller tanken helt full før kjøreturen begynner. Etter *x* mil er det igjen *B* liter bensin, der
>
> $$B = 60 - 0{,}8x$$
>
> **d)** Finn grafisk og ved regning hvor langt familien har kjørt når tanken er halvfull. (Oldervoll et al., 2020a)

Denne spesifikke prakseologien inneholder også oppgaver der man skal finne ut når to uttrykk på formen $y = ax + b$ er like. Oppgave 1.195 på side 319 er et eksempel:

Hans har 24 000 kr og bruker 1200 kr hver måned. Grete har 8000 kr og sparer 800 kr hver måned.

b) Finn grafisk med digitalt hjelpemiddel når Hans og Grete har like mye penger. Hvor mye har de da? (Oldervoll et al., 2020a)[6]

Den spesifikke prakseologien A4: «Manipulasjon av formel/likning» inneholder oppgaver med en gitt formel, der en parameter er uttrykt ved én eller flere andre parametere. I oppgaven skal man manipulere formelen, slik at man får et uttrykk for en av de andre parameterne. Hvis man for eksempel er gitt formelen for volumet av ei sirkulær kjegle, $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$, kan oppgaven innebære å finne en formel for h (Oldervoll et al., 2020a, s. 321). Teknologien er knyttet til løsning av likninger, siden manipulasjon av formler innebærer å behandle formelen som en likning og løse denne for en av parameterne.

6.2.2 Lokal prakseologi: Formler og algebraiske uttrykk

Denne lokale prakseologien inneholder oppgaver som innebærer å konstruere formler og algebraiske uttrykk, samt evaluere disse, eller undersøke hva som skjer med verdien av en parameter i en formel dersom en annen parameter endres. Oppgavene deler den samme teknologien knyttet til formler, algebraiske uttrykk og algebraiske regneregler. Følgende oppgavetyper hører til under denne lokale prakseologien:

B1: Konstruere formel som beskriver sammenhengen mellom to parametere.

B2: Konstruere og evaluere formel.

B3: Konstruere formel og løse likning.

B4: Forklare en gitt formel/likning/algebraisk uttrykk.

B5: Undersøke endring i en parameter når en annen parameter endres.

B6: Evaluere formel.

B7: Konstruere algebraisk uttrykk fra tekstoppgave.

Under den spesifikke prakseologien B1: «Konstruere formel som beskriver sammenhengen mellom to parametere» er det gitt informasjon om sammenhengen mellom to størrelser, og man

[6] I Deloppgave (a) skulle man konstruere en formel for henholdsvis beløpet til Hans og Grete etter *x* måneder.

skal bruke denne til å konstruere en formel på formen $y = ax + b$, der a og b er bestemte numeriske verdier. Oppgave 1.52 på side 26 er et typisk eksempel:

> Vanja kjøper en skuter som koster 24 000 kr. Hun regner med at verdien minker med 300 kr per måned.
>
> **a)** Finn en formel for verdien V i kroner av mopeden om t måneder. (Oldervoll et al., 2020a)

Tilknyttet delkapittelet om formler skriver forfatterne følgende:

> En *formel* gir oss verdien av en variabel ved hjelp av verdien av en eller flere andre variabler. Volumet V av ei kule er gitt ved
>
> $$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
>
> I denne formelen finner vi verdien for V når vi kjenner verdien av variabelen r, som er radien. Variabelen r kaller vi den *uavhengige variabelen*, og V kaller vi den *avhengige variabelen*. Vi velger verdier for den uavhengige variabelen og regner ut verdien for den avhengige variabelen. Formelen ovenfor inneholder også *konstanten* $\pi \approx 3{,}14$.
>
> Noen ganger trenger vi verdier for to variabler for å regne ut den tredje. Volumet V av en sylinder er gitt ved
>
> $$V = \pi r^2 h$$
>
> Her må vi kjenne både radien r og høyden h for å kunne finne volumet V. I dette tilfellet har vi to uavhengige variabler og én avhengig.
>
> I de fleste formlene vi skal arbeide med i denne boka, er det én uavhengig variabel og én avhengig. (Oldervoll et al., 2020a, s. 24)

I forklaringen ovenfor blir formler fremstilt som funksjoner. Oldervoll et al. (2020a) forklarer at formler består av variabler, der noen variabler er uavhengige, mens andre er avhengige. I stedet for å starte med en generell formel med parametere, som man enten kan behandle som en likning eller en funksjon, starter de med en funksjon, der det er bestemt hvilken variabel som er avhengig og hvilken som er uavhengig. Denne forhåndsbestemte og faste formen på formelen begrenser i stor grad hvordan vi kan anvende den. Denne bemerkning er først gjort av Strømskag og Chevallard (2022). Videre forklarer forfatterne at det i *Sinus 1T* hovedsakelig vil være formler med én avhengig og én uavhengig variabel. Dette er naturlig ettersom elevene i matematikk 1T ikke skal jobbe med flervariable funksjoner. Samtidig er det flere oppgaver med formler med flere enn to parametere. For eksempel inneholder Oppgave 1.152 på side 314 tre parametere, der formelen $v = \frac{b^2 \cdot k}{11\,880}$ beskriver sammenhengen mellom vekta v, brystmålet b og kroppslengden k for en hest (Oldervoll et al., 2020a).

Den spesifikke prakseologien B2: «Konstruere og evaluere formel» inneholder oppgaver på formen «Kjersti har spart 6000 kr og fortsetter å spare 600 kr hver måned. Hvor mye har hun spart etter 9 måneder?» (Oldervoll et al., 2020a, s. 314). Her må man først implisitt konstruere en formel, og deretter evaluere den. Også i den spesifikke prakseologien B3: «Konstruere formel og løse likning» må man først implisitt konstruere en formel. For eksempel er man i Oppgave 10b på kapitteltesten gitt informasjon om en møbelfabrikk som produserer 720 reoler hver måned, men som begynner å trappe ned produksjonen med 60 reoler hver måned til de ikke lenger produserer reoler. Fra denne informasjonen skal man svare på hvor lang tid det tar før produksjonen er slutt (Oldervoll et al., 2020a, s. 55). For å løse oppgaven kan man først konstruere formelen $R = 720 - 60x$, som beskriver sammenhengen mellom produserte reoler R og antall måneder x, før man løser likningen $0 = 720 - 60x$.

I oppgavene knyttet til den spesifikke prakseologien B4: «Forklare en gitt formel/likning/algebraisk uttrykk» får man oppgitt en formel, et algebraisk uttrykk eller en likning. Den/det beskriver enten en virkelig situasjon, eller det er et uttrykk som beskriver flere etterfølgende regneoperasjoner på et generelt tall x. Oppgavene innebærer å forklare hvorfor formelen/likningen/det algebraiske uttrykket beskriver den gitte situasjonen i oppgaven. Oppgave 1.193, som er gjengitt nedenfor, er et eksempel på denne type oppgave.

> Bensintanken på bilen til Lise tar 60 liter. Ved langkjøring forbrenner motoren 0,75 liter per mil. Lise fyller tanken helt full og legger ut på en lang biltur.
>
> **a)** Forklar at etter x mil er det y liter bensin igjen på tanken, der
>
> $y = 60 - 0{,}75x$. (Oldervoll et al., 2020a, s. 318)

Den spesifikke prakseologien B5: «Undersøke endring i en parameter når en annen parameter endres» innebærer å manipulere en formel når en parameter får en endring og undersøke hvordan dette påvirker en annen parameter. Teknologien er knyttet til algebraiske regneregler. For eksempel er man i Oppgave 1.157 gitt formelen $P = 0{,}0003 \cdot v^3 \cdot A$, som beskriver effekten P til en vindturbin, der v er vindstyrken målt i meter per sekund, og A er arealet i kvadratmeter av sirkelen rotorbladene lager når de roterer. I oppgaven skal man undersøke hva som skjer med effekten dersom vindstyrken dobles (Oldervoll et al., 2020a, s. 315). Dette kan løses ved å manipulere uttrykket for P på denne måten: $P_2 = 0{,}0003 \cdot (2v)^3 \cdot A = 8 \cdot P$, som viser at effekten blir åtte ganger så stor.

I den spesifikke prakseologien B6: «Evaluere formel» har man en formel der en parameter er uttrykt ved andre parametere. Gitt numeriske verdier for de andre parameterne, skal man regne ut verdien til parameteren man har et eksplisitt uttrykk for. For eksempel er man i Oppgave 1.150a gitt formelen $U = 650\,000 – 25\,000t$, som beskriver lånet til en familie etter t år, og man skal finne lånebeløpet etter 5 år (Oldervoll et al., 2020a, 313). Grafisk løsning av denne oppgaven hadde innebåret å finne skjæringspunktet mellom linja til U og linja $t = 5$.

Den spesifikke prakseologien B7: «Konstruere algebraisk uttrykk fra tekstoppgave» innebærer å bruke informasjon gitt i løpende tekst til å sette opp et algebraisk uttrykk. Teknologien er knyttet til regnerekkefølge, bruk av parenteser og forkorting av algebraiske uttrykk. Oppgave 1.300 på side 324 er et eksempel:

> Tenk på et tall. Legg til 5. Gang svaret med 2. Trekk fra 4. Del på 2. Trekk fra tallet du tenkte på.
>
> **d)** Kall det tallet du tenker på, for *x*, og bevis at du alltid vil få det samme svaret til slutt. (Oldervoll et al., 2020a)

I tillegg til de to beskrevne lokale prakseologiene med sine spesifikke prakseologier, er det én annen oppgavetype jeg vil nevne, men som jeg ikke vil gå videre i dybden av. Dette er oppgavetypen «å løse tekstoppgaver med grunnleggende regneoperasjoner». Disse oppgavene er enkle tekstoppgaver, som kan løses ved hjelp av regnestykker som inneholder addisjon/subtraksjon og multiplikasjon/divisjon. Et eksempel er Oppgave 1.196a på side 319, der man får oppgitt fart i kilometer i timen, og man skal gjøre om til kilometer i minuttet (Oldervoll et al., 2020a).

6.3 Fordeling av spesifikke prakseologier

Tabell 6.1 viser en fordeling av de ulike spesifikke prakseologiene i læreboka *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a). Oversikten kan bidra til å gi en forståelse for hva som er vektlagt i kapittelet og hva som har fått mindre oppmerksomhet.

Tabell 6.1

Fordeling av de spesifikke prakseologiene i kapittelet «Formler og likninger» i læreboka Sinus 1T.

Spesifikk prakseologi	A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
1.3 Likninger og identiteter	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1.4 To lineære likninger med to ukjente	0	4	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1.5 Formler	0	0	9	11	4	2	0	3	4	18	0
1.8 Digital graftegning	0	0	0	0	3	0	0	2	0	0	0
1.9 Grafisk avlesing	0	0	11	1	5	2	0	6	0	6	0
«Uten hjelpemidler»	4	2	0	7	2	1	1	0	0	5	0
«Med hjelpemidler»	3	6	10	6	5	3	2	5	1	8	4
Totalt	**14**	**12**	**31[I]**	**25**	**20**	**8**	**3**	**16**	**5[III]**	**38[II]**	**5**

Merknad: [I]12 av oppgavene skal løses grafisk. [II]6 av oppgavene skal løses grafisk. [III]I 3 av oppgavene gjør løsningsforslaget hele utregningen på nytt. Se utfyllende forklaring i avsnittene som følger.

Fra Tabell 6.1 kommer det frem at det er flest oppgaver i den spesifikke prakseologien B6: «Evaluere formel» og A3: «Gitt formel som beskriver sammenheng mellom parametere. Konstruere og løse likning». Det er også mange oppgaver av typen A4: «Manipulasjon av formel/likning». Som beskrevet av Strømskag og Chevallard (2022) er manipulasjon av formler helt sentralt når vi skal modellere et system og undersøke det på ulike måter. I læreboka *Sinus 1T* er disse oppgavene begrenset til å være mengdetreningsoppgaver knyttet til algebraiske regneoperasjoner, og oppgavene bidrar lite til en større forståelse for det modellerte systemet som undersøkes. Jeg vil utdype dette mer i diskusjonskapittelet som følger.

Den spesifikke prakseologien B5: «Undersøke endring i en parameter når en annen parameter endres» dreier seg også om manipulasjon av formler, men i motsetning til oppgavene av typen A4, skal man bruke manipulasjonene og formelen til å si noe om systemet mer generelt. Sammenlignet med den spesifikke prakseologien A4 er det derimot svært få oppgaver av typen B5. Her er det også nødvendig med en utfyllende kommentar, for det er egentlig bare to av de fem oppgavene som spesifikt krever at elevene jobber med formlene. Den ene er Oppgave 1.157 på side 315, der man får oppgitt formelen $P = 0{,}0003 \cdot v^3 \cdot A$, som beskriver effekten til en vindturbin når vindstyrken er v m/s, og rotorbladene sveiper over et areal som er A m^2. I

Deloppgave (b) får man oppgitt at vindstyrken dobles, og man skal undersøke hva som da skjer med effekten (Oldervoll et al., 2020a). Jeg har også for eksempel kategorisert deloppgavene i Oppgave 1.57 på side 29 i den spesifikke prakseologien B5. Før denne oppgaven er det et eksempel som tar utgangspunkt i samme formel for effekten til en vindturbin som den gitt i Oppgave 1.157. Eksempelet regner ut årlig produsert energi for én vindturbin når v = 5 m/s, med antagelsen om at vindstyrken er konstant, og at vindturbinen er i gang 300 døgn i året. I Deloppgave (d) får man oppgitt årlig energiforbruk for en vanlig norsk husstand, og man skal regne ut hvor mange husstander som kan få energi fra én vindturbin. I Oppgave 1.57 skal man i Deloppgave (a) regne ut antall husstander som kan få strøm fra én turbin dersom vindstyrken i stedet er 10 m/s (Oldervoll et al., 2020a), som vil si at vindstyrken har doblet seg. Denne oppgaven løste jeg på følgende måte:

$$P = 0{,}0003 \cdot (2v)^3 \cdot A = 8 \cdot (0{,}0003 \cdot v^3 \cdot A)$$

Altså blir effekten, og dermed energien, åtte ganger så stor, og man kan ta verdien fra Deloppgave (d) i eksempelet og multiplisere med åtte. Løsningsforslaget på nettstedet til *Sinus 1T* gjør derimot alle utregningene fra eksempelet på nytt med den nye verdien for vindstyrken.[7]

6.4 Diskusjon av resultater fra den prakseologiske analysen av «Formler og likninger» i læreboka *Sinus 1T*

I dette delkapittelet vil jeg diskutere resultatene fra den prakseologiske analysen av kapittelet «Formler og likninger» i læreboka *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a) i lys av forståelsen av matematisk modellering i ATD.

6.4.1 Algebra som generalisert aritmetikk

I denne studien har jeg undersøkt forskningsspørsmålet «Hvordan behandles matematisk modellering i *Sinus 1T*, og hvilken rolle spiller elementær algebra i denne behandlingen?». Som jeg har beskrevet i Kapittel 4, viser tidligere forskning (Bolea et al., 2004; Bosch, 2015; Ruiz et al., 2007; Strømskag & Chevallard, 2022) at algebra blir undervist som en generalisering av aritmetikken og som et separat fagfelt. Dette i motsetning til å bli brukt som et nyttig modelleringsverktøy for å utvikle forståelsen for andre matematiske domener, samt for å konstruere sammenhenger på tvers av ulike prakseologier. Bolea et al. (2004) oppsummerer algebra som generalisert aritmetikk gjennom fire oppgavetyper, som forklart i Kapittel 4.2.4.

[7] For oppgavene i teoridelen i læreboka *Sinus 1T* er det løsningsforslag på nettstedet til læreverket.

Ruiz et al. (2007) beskriver tre nivåer av «functional-algebraic modelling». På det første nivået jobber man med formler der det er et tydelig skille mellom parametere og variabler, og Ruiz et al. peker på at elevene i spansk ungdomsskole kun jobber med formler på dette nivået. Dette er noe jeg også har funnet at gjelder for mange av oppgavene i kapittelet «Formler og likninger» i læreboka *Sinus 1T*. Analysen av kapittelet viser også at de fleste oppgavene kan kategoriseres som én av de fire oppgavetypene til Bolea et al. (2004). Nedenfor har jeg satt de spesifikke prakseologiene fra min analyse i sammenheng med oppgavetypene til Bolea et al. (2004) og det første nivået av «functional-algebraic modelling»:

A1: «Konstruere og løse likning fra tekstoppgave» og A2: «Konstruere og løse likningssett fra tekstoppgave» hører til den fjerde oppgavetypen beskrevet av Bolea et al. (2004).

A4: «Manipulasjon av formel/likning» hører til den andre oppgavetypen av Bolea et al. (2004).

A3: «Gitt formel som beskriver sammenheng mellom parametere. Konstruere og løse likning», B1: «Konstruere formel som beskriver sammenhengen mellom to parametere», B2: «Konstruere og evaluere formel», B3: «Konstruere formel og løse likning» og B6: «Evaluere formel» tilhører første nivå av «functional-algebraic modelling».

B7: «Konstruere algebraisk uttrykk fra tekstoppgave» hører til den første oppgavetypen til Bolea et al. (2004).

«B4: «Forklare gitt formel/likning/algebraisk uttrykk» kan både være tilknyttet det første nivået av «functional-algebraic modelling» eller én av de fire oppgavetypene til Bolea et al. (2004).

Den spesifikke prakseologien B5: «Undersøke endring i en parameter når en annen parameter endres» er den eneste oppgavetypen som ikke passer helt inn under en av oppgavetypene til Bolea et al. (2004) eller under det første nivået av «functional-algebraic modelling». Oppgavene innebærer at elevene må manipulere en formel, slik som i den spesifikke prakseologien A4, som jeg har plassert under den andre oppgavetypen til Bolea et al. (2004). I motsetning til oppgavene av typen A4, innebærer oppgavene av typen B5 at man skal bruke manipulasjonen av formelen til å si noe om forholdet mellom parameterne generelt. Man bruker formelen til å si noe om det modellerte systemet. Disse oppgavene inneholder formler med flere enn én parameter, og de passer derfor ikke helt inn under det første nivået av «functional-algebraic modelling».

Generelt reflekterer oppgavene i kapittelet om formler og likninger i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a) de tidligere forskningsresultatene, som peker på at algebra i liten grad blir brukt som et modelleringsverktøy for å knytte matematiske prakseologier sammen, men heller blir undervist som et eget fagfelt med fokus på algebraiske regneoperasjoner.

6.4.2 Formler og parametere – rutinepregede oppgaver

At algebra blir undervist som et separat fagfelt og ikke blir brukt som et modelleringsverktøy, har ifølge Strømskag og Chevallard (2022) medført at parametere har forsvunnet fra formler, likninger og algebraiske uttrykk som elevene møter på ungdomsskolen og på videregående. Dette setter igjen begrensninger for hvordan elevene kan studere ulike systemer og hvilke spørsmål de kan svare på. I forbindelse med begrepet formler har jeg identifisert fire kategorier av oppgaver i læreboka *Sinus 1T*. Disse er:

1. rutineoppgaver, der man skal manipulere og evaluere en formel
2. oppgaver med formler på formen $y(x) = ax + b$, der a og b har bestemte numeriske verdier
3. oppgaver der man skal manipulere en formel og bruke dette til å si noe om systemet formelen modellerer
4. oppgaver som kan løses på ulike måter, som
    a. å manipulere en formel og deretter evaluere den
    b. å sette inn numeriske verdier i en formel og deretter løse en likning

Den første kategorien inneholder oppgaver der man får oppgitt en formel, som man skal manipulere og deretter evaluere. Oppgave 1.152 på side 314 er et typisk eksempel. Man er gitt formelen $v = \frac{b^2 \cdot k}{11\,880}$, som beskriver sammenhengen mellom vekta v, brystmålet b og kroppslengden k til en hest. I Deloppgave (b) skal man finne en formel for k ved å manipulere formelen, før man skal evaluere formelen for gitte verdier av b og v (Oldervoll et al., 2020a). Disse oppgavene har jeg kalt for rutineoppgaver, ettersom de kun innebærer å jobbe algebraisk med formlene. Det er ingen spørsmål knyttet til selve systemet formlene modellerer.

Den andre kategorien inneholder formler med én avhengig og én uavhengig variabel, om jeg skal bruke begrepene i *Sinus 1T*. Det er mange oppgaver med formler på denne formen. I oppgavene skal man enten selv konstruere formelen basert på informasjon i tekst, eller man får oppgitt en formel og skal forklare hvorfor denne beskriver den gitte situasjonen. Deretter følger deloppgaver der man skal evaluere formelen (B6), finne verdien for den uavhengige variabelen når den avhengige variabelen er gitt en numerisk verdi (A3), eller manipulere formelen, slik at man endrer hvilken variabel som er avhengig og uavhengig (A4). Oppgavene er svært like og rutinepregede, og de fungerer derfor hovedsakelig som mengdetreningsoppgaver for å øve på algebraiske regneoperasjoner.

I motsetning til den første og den andre kategorien inneholder den tredje kategorien oppgaver der man må bruke formelen til å si noe om systemet formelen modellerer. I Oppgave 1.157, som jeg også har trukket frem tidligere, er man gitt formelen $P = 0{,}0003 \cdot v^3 \cdot A$ for effekten til en vindturbin, og man skal undersøke hva som skjer med effekten når vindstyrken v dobles. Ved å manipulere formelen får man uttrykket $P = 0{,}0003 \cdot (2v)^3 \cdot A = 8 \cdot 0{,}0003 \cdot v^3 \cdot A$, som viser at effekten blir åtte ganger så stor. Her manipulerer man formelen for å undersøke sammenhengen mellom to parametere i systemet. Jeg har identifisert én annen oppgave (1.322) som er slik som 1.157. I tillegg har jeg plassert tre andre deloppgaver (1.57a og b, 1.58a) i denne kategorien. Boka har derimot løst disse deloppgavene med numeriske verdier, i stedet for å manipulere formlene, slik som forklart tidligere i Kapittel 6.3.

I den siste kategorien er det oppgaver som kan løses på ulike måter. Dette er for eksempel Oppgave 1.151 på side 313:

> For bølger med frekvensen f og bølgelengden λ er bølgefarten v gitt ved
>
> $$v = f \cdot \lambda$$
>
> Menneskeøret er normalt i stand til å oppfatte svingninger mellom ca. 20 Hz og 20 000 Hz som lyd. Vi setter lydfarten til 340 m/s. Hva er den korteste og den lengste bølgelengden øret kan oppfatte? (Oldervoll et al., 2020a)

Her kan man enten manipulere formelen å få et uttrykk for λ, som man deretter kan evaluere for de gitte verdiene for bølgefarten og frekvensen, eller man kan sette inn de oppgitte verdiene for frekvensen og bølgefarten og løse likningen for λ. Med den første metoden får man et generelt uttrykk for bølgelengden: $\lambda = \frac{v}{f}$. Som forklart i Kapittel 3.3, kan man bruke denne formelen til å undersøke de generelle sammenhengene mellom de tre parameterne. For eksempel er 20 000 tusen ganger så stort som 20. Det betyr at bølgelengden ved en frekvens på 20 000 Hz vil være 1000 ganger så liten som bølgelengden ved en frekvens på 20 Hz, noe man enkelt kan observere fra formelen $\lambda = \frac{v}{f}$. Dersom man først setter inn numeriske verdier og deretter løser likningen for bølgelengden λ, vil slike forhold og sammenhenger være vanskeligere å oppdage og studere.

Oppsummert inneholder flere av oppgavene i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a) formler og parametere, men det er svært få oppgaver der man faktisk må bruke disse til å si noe om det modellerte systemet. De fleste oppgavene er rutineoppgaver, der man kan trene på algebraiske regneoperasjoner. I læreboka blir heller ikke begrepet *parameter* brukt, for i forbindelse med formler bruker forfatterne begrepet *variabel*. I svært mange av oppgavene er formlene på formen $y = ax + b$, med en avhengig variabel y og en uavhengig variabel x. Altså blir formlene presentert som funksjoner, der variabelen y avhenger av variabelen x. Tidligere studier innenfor ATD peker på at parametere generelt har forsvunnet fra formler, algebraiske uttrykk og likninger som elevene møter på skolen (Bolea et al., 2004; Bosch, 2015; Ruiz et al., 2007; Strømskag & Chevallard, 2022). Mine analyser av oppgavene i kapittelet om formler og likninger viser at det er flere oppgaver med formler med flere parametere, men ofte skal elevene kun jobbe algebraisk med formlene uten å knytte noen forbindelse til systemet som formelen modellerer. Bosch (2015) peker på de samme funnene og forklarer at elevene på ungdomsskolen og i videregående skole sjelden studerer den systematiske manipulasjonen av den globale strukturen til et problem (s. 63).

I tillegg til de nevnte kategoriene vil jeg trekke frem Oppgave 1.315, som er et eksempel på en oppgave der man selv må innføre en parameter. Denne oppgaven er ikke inkludert i den prakseologiske analysen, ettersom den ikke er knyttet til modellering av et system. Oppgaven lyder som følger:

> **a)** Løs likningsettet både ved regning og i CAS.
>
> $x + 2y = 3$
>
> $4x + 5y = 6$
>
> **b)** Løs likningssettene i CAS.
>
> **1)** $7x + 8y = 9$ **2)** $13x + 14y = 15$
>
> $10x + 11y = 12$ $16x + 17y = 18$
>
> **c)** Sammenlikn svarene i likningssettene i oppgave a og b. Hva finner du? Finn også ut hvordan likningssettene er bygd opp.
>
> **d)** Prøv å stille opp det generelle likningssettet som oppgavene i a og b passer til, og løs deretter likningssettet. Løs oppgaven ved både å bruke innsettingsmetoden og CAS. (Oldervoll et al., 2020a, s. 327)

Her skal man komme frem til det generelle likningssettet

$$ax + (a + 1)x = a + 2$$
$$(a + 3)x + (a + 4)x = a + 5,$$

så oppgaven innebærer at man må innføre parameteren a, samt løse det generelle likningssettet. Samtidig er ikke likningssettet en modell av noe system. Det beskriver en spesiell form for et likningssett, som alltid har løsningene $x = -1$, $y = 2$, men det har ingen kobling til den sosiale eller naturlige verden. Det er et generelt likningssett uten noen form for funksjon. Som Strømskag og Chevallard (2022) beskriver: «The algebraic expressions that the students are required to work with then become 'algebraic cadavers', formerly living creatures from which life has gone, abandoned human creations whose raison d'être has vanished» (s. 391).

6.4.3 Mange deloppgaver – elevene blir veiledet gjennom oppgavene

I ATD blir modellering forstått som en prosess som tar utgangspunkt i et spørsmål Q knyttet til et system. For å svare på spørsmålet Q kan man konstruere en modell *S'*, slik at studiet av Q blir lettere, raskere og tryggere enn å studere systemet direkte (Strømskag & Chevallard, 2022, s. 389–390). I studieprosessen dukker det gjerne opp spørsmål underveis, som gjør at man må bruke eller konstruere andre matematiske prakseologier (García et al., 2006). Hovedandelen av oppgavene i kapittelet «Formler og likninger» i læreboka *Sinus 1T* inneholder derimot flere deloppgaver, som veileder elevene gjennom oppgaven. Særlig kommer dette til uttrykk i oppgaver knyttet til kapitlene «Formler», «Digital graftegning» og «Grafisk avlesing». Man får enten eksplitt eller implisitt en modell, det vil si at modellen er innlysende, og man skal kun utføre rutineoperasjoner. Elevene får altså ikke muligheten til selv å konstruere matematiske prakseologier gjennom studiet av et genererende spørsmål Q knyttet til et system. Alle deloppgavene veileder elevene gjennom hele prosessen og gir de ikke muligheten til å støte på nye genererende spørsmål, som kan føre til utvikling av nye matematiske prakseologier og sammenhenger.

Denne karakteristikken for mange av oppgavene er derimot ikke unik for læreboka *Sinus 1T*, men representerer heller en generell utvikling for matematikken i skolen, særlig hvis søkelyset rettes mot algebra. Hovedandelen av oppgavene passer godt inn under *paradigmet som innebærer å besøke arbeider*, som har vært, og fortsatt i stor grad er, styrende i skolen. Tar vi skalaen av didaktisk medbestemmelse i betraktning og undersøker de andre nivåene enn *skole*, finner vi forhold som er med på å påvirke oppgavene i lærebøkene. Bolea et al. (2004) og Ruiz et al. (2007) peker for eksempel på at det på de aller fleste skoler er vanlig å organisere skoledagen i ulike fag, og matematikkfaget er organisert i ulike domener og temaer. Matematisk modellering innebærer derimot en langvarig studieprosess, der prakseologier oppstår og knyttes sammen. Dette står i kontrast til den oppdelte skolehverdagen.

6.5 Eksempler på interessante modelleringsoppgaver i *Sinus 1T*

Det er læreplanene som legger føringer for innholdet i læreverkene, og *Sinus 1T* er laget for den nye læreplanen fra 2020. I denne læreplanen har utforskning og dybdelæring fått en sentral plass. Utdanningsdirektoratet (2020a) skriver at «I læreplanen er det lagt vekt på at elevene skal bli gode problemløsere og oppdage sammenhenger i, og mellom fagets kunnskapsområder og andre fags kunnskapsområder. Det er disse sammenhengene som legger til rette for dybdelæring og forståelse i faget». Kompetansemålene i matematikk er bygget opp rundt de seks kjerneelementene, og Utdanningsdirektoratet (2020b) forklarer at «For at elever skal kunne tilegne seg forståelse, trenger de mye tid til å arbeide med fagets kjerneelementer. Vi har derfor lagt til rette for at elever arbeider med færre tema hvert år, og dette skal sikre progresjon og tid til å utvikle forståelse igjennom å utforske sammenhenger i faget» (01:14). Her finner vi flere nøkkelord som «oppdage sammenhenger» og «tid til å arbeide», som peker i retning av *paradigmet som innebærer å stille spørsmål ved verden.* I læreverket *Sinus 1T* er det også oppgaver som passer under dette paradigmet, der elevene selv må konstruere modeller og finne en løsningsstrategi. Slike oppgaver har jeg funnet i selve læreboka, dog svært få, og på nettstedet til *Sinus 1T*. I delkapitlene som følger vil jeg gjengi tre slike oppgaver samt komme med forslag til mulige løsninger. I tillegg vil jeg peke på hvordan disse skiller seg fra de mer rutinepregede oppgavene i læreboka.

6.5.1 En modelleringsoppgave fra læreboka *Sinus 1T*

I selve læreboka *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a) vil jeg trekke frem Oppgave 1.218 på side 322. Denne oppgaven har jeg ikke kategorisert i den prakseologiske analysen ettersom den i stor grad skiller seg fra de andre oppgavene i kapittelet. Oppgaven er gjengitt nedenfor, etterfulgt av et løsningsforslag jeg har laget.

Undersøk om arealene av de to blå områdene er like store.

Merknad: Figuren er hentet fra *Sinus 1T* (s. 322) av Oldervoll et al. (2020a). Gjengitt med tillatelse av Cappelen Damm.

Videre følger min løsning av oppgaven: La r være radien i den innerste sirkelen. Da vil det indre blå området ha radius lik $3r$, og areal $A_1 = \pi \cdot (3r)^2 = 9\pi r^2$. Radien til hele den store sirkelen er lik $5r$, så arealet er lik $A_2 = \pi \cdot (5r)^2 = 25\pi r^2$. Radien til og med det røde området er lik $4r$, så dette arealet er lik $A_3 = \pi \cdot (4r)^2 = 16\pi r^2$. Det ytterste blå området har dermed areal lik $A_2 - A_3 = 25\pi r^2 - 16\pi r^2 = 9\pi r^2$. Altså har de to blå områdene likt areal.

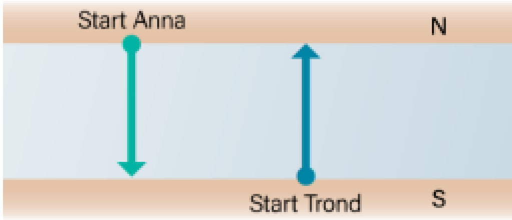
Det som skiller denne oppgaven fra de andre oppgavene i kapittelet «Formler og likninger» i læreboka *Sinus 1T* er at den er åpen, i så måte at det ikke er gitt hvordan den skal løses. Den følger ikke et av oppsettene gitt i de gjennomgåtte eksemplene, og man må selv komme frem til en løsningsmetode. Gitt systemet med sirkelskiven som er satt sammen av flere mindre sirkler med antatt lik bredde, skal man svare på spørsmålet Q om de to blå områdene er like store. I min løsning har jeg konstruert en algebraisk modell i form av formler som gir arealet for ulike deler av hele sirkelskiven.

6.5.2 To modelleringsoppgaver på nettstedet til *Sinus 1T*

Fra nettstedet til *Sinus 1T* vil jeg trekke frem to oppgaver tilknyttet kapittelet «Formler og likninger». Begge oppgavene er på utforskningsarket «Lag et regnestykke av teksten». Nedenfor gjengir jeg de to oppgavene og presenterer mulige løsningsforslag. Videre forklarer jeg hvordan de skiller seg ut fra de mer rutinepregede oppgavene i selve boka *Sinus 1T*.

Utforsk – Lag et regnestykke av teksten, Oppgave 3

Nedenfor ser du en fjord som går fra øst til vest. Anna står på den nordlige bredden, og Trond står på den sørlige bredden. De starter samtidig med å svømme over fjorden. Begge svømmer med konstant fart, men de svømmer ikke like fort.



Merknad: Figuren er hentet fra nettstedet til *Sinus 1T*, utviklet av Oldervoll et al. (2020b). Gjengitt med tillatelse av Cappelen Damm.

De passerer hverandre når de er 80 meter fra den nordlige bredden. Når de kommer til motsatt bredd av der de startet, snur de og svømmer tilbake til utgangspunktet. På veien tilbake passerer de hverandre igjen, denne gangen 40 meter fra den sørlige bredden. Begge gangene de møter hverandre, svømmer de mot hverandre.

Hvor bred er fjorden? (Oldervoll et al., 2020b, utforskningsark [LRT])

Løsningsforslag: Anta at Anna svømmer *a* m/s, mens Trond svømmer *c* m/s. La *b* være bredden på fjorden, og t_1 og t_2 tiden ved henholdsvis første og andre møte. Da kan vi sette opp likningene

Første møte:		Andre møte:	
$at_1 = 80$	(7.1)	$at_2 = b + 40$	(7.3)
$ct_1 = b - 80$	(7.2)	$ct_2 = b + (b - 40) = 2b - 40$	(7.4)

Ved å dele Likning 7.2 på Likning 7.1 og Likning 7.4 på Likning 7.3, får vi to uttrykk for $\frac{c}{a}$, som vi kan sette lik hverandre:

$$\frac{b-80}{80} = \frac{2b-40}{b+40}$$
$$(b-80)(b+40) = 80(2b-40)$$
$$b^2 - 200b = 0$$
$$b = 200$$

Altså er bredden av fjorden lik 200 m.

Denne løsningen er ikke lik den som er gitt av Oldervoll et al. (2020b), som eksemplifiserer at det ikke finnes en bestemt standardmåte for å løse oppgaven. Man må selv komme frem til en løsningsmetode. I løsningen over har jeg innført parameterne *a* og *c* for henholdsvis farten i meter per sekund som Anna og Trond svømmer med. Siden det er oppgitt at de svømmer med konstant fart, vet vi at de etter tiden *t* vil ha svømt henholdsvis *at* m og *ct* m. Jeg har brukt *b* som symbol for den ukjente lengden på fjorden. Deretter har jeg satt opp en modell i form av fire likninger, som beskriver hvor langt hver av de har svømt ved første og andre møte.

På samme utforskningsark som den gjengitte oppgaven ovenfor, finner vi en annen oppgave som har mye potensiale for å kunne bli en spennende modelleringsoppgave. Denne oppgaven lyder som følger:

> Utforsk – Lag et regnestykke av teksten, Oppgave 2
>
> Tre barn går og kjøper en pose gummigodt for 30 kroner. De betaler en ti-kroning hver og går fornøyde ut av butikken.
>
> Etterpå oppdager den ansatte i kassen at godteriposen er på tilbud i denne uka og nå bare koster 25 kroner. Han tar 5 kroner ut av kassen og løper etter barna for å gi dem penger tilbake. Han møter barna, men ingen av dem vet hvordan de skal dele 5 kroner på tre. Barna sier da at de kan få en krone tilbake hver, og at ekspeditøren kan beholde de siste 2 kronene fordi han var så grei og ærlig.
>
> Da har barna betalt 9 kroner hver for godteriet. Det er 27 kroner til sammen.
>
> Ekspeditøren har fått 2 kroner. Det blir til sammen 29 kroner.
>
> Men barna betalte 30 kroner i starten. Det mangler altså en krone.
>
> Hvor er den? (Oldervoll et al., 2020b, utforskningsark [LRT])

Løsningsforslag fra forfatterne:

De 30 kronene blir fordelt slik:

25 kr for godteri		25	kr
1 krone til hvert av de tre barna		3	kr
2 kroner til ekspeditøren	+	2	kr
Totalt	=	30	kr

En kan så stille seg spørsmålet: Hva skjer dersom den nye prisen for eksempel er 22 kr? Da vil barna få igjen 2 kr hver og den ansatte 2 kr. Sammen gir dette summen: $3 \cdot 8 + 2 = 24 + 2 = 26$. Altså har det nå «forsvunnet» 4 kr.

For å angripe denne problemstillingen mer generelt kan vi bruke algebra som verktøy og konstruere en algebraisk modell. La x være pengene hvert av barna får igjen av den ansatte, og la y være pengene den ansatte får. Da kan vi sette opp uttrykket

$$(10 - x) \cdot 3 + y = 30 - 3x + y$$

Vi har at $y < 3$, siden y er resten når vi deler det barna totalt skal få igjen på 3. Siden $x \geq 1$, vil $y < 3x$. Dermed vil uttrykket over alltid bli mindre enn 30. Differansen fra 30 vil bli større når den rabatterte prisen blir lavere, fordi leddet $3x$ vil øke i forhold til y.

Vi kan gjøre det enda mer generelt ved å innføre parameterne z og a for henholdsvis den opprinnelige prisen og antall barn. Igjen har vi at $y < a$, siden y er resten når vi deler det barna totalt skal få igjen på a. Da får vi uttrykket:

$$(z - x) \cdot a + y = az - ax + y < az$$

Hvis vi derimot gjør som i løsningsforslaget av Oldervoll et al. (2020b), og regner oss opp fra den rabatterte prisen, får vi uttrykket

$$(z - ax - y) + ax + y = z,$$

og det er lett å se at vi alltid kommer tilbake til det opprinnelige beløpet.

I denne oppgaven er det med andre ord mye potensiale for å undersøke generelle sammenhenger ved hjelp av algebra som modelleringsverktøy. Slik oppgaven er fremstilt på nettstedet til *Sinus 1T* kommer ikke dette veldig tydelig frem, men ved å stille nye spørsmål om for eksempel hva som skjer dersom den rabatterte prisen blir lavere, kan man møte på nye interessante funn, som gjør at man søker etter generelle sammenhenger.

7 Et kritisk blikk på «Modeller og funksjoner» i *Sinus 1T* og noen alternative tilnærminger

Ettersom forskningsspørsmålet jeg har undersøkt innebærer å studere hvordan *Sinus 1T* behandler matematisk modellering, fant jeg det naturlig å se på kapittelet «Modeller og funksjoner». I dette avsnittet av oppgaven min vil jeg gjennom eksempeloppgaver presentere resultatene fra den prakseologiske analysen gjort av «Modeller og funksjoner» i læreboka *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a). Videre vil jeg knytte disse resultatene opp mot matematisk modellering ved å diskutere hvordan eksempeloppgavene tar for seg modellering av ulike systemer. Jeg vil også trekke frem et av utforskningsarkene, tilknyttet kapittelet, på nettstedet til *Sinus 1T*. Analysene av kapittelet viser at det i mange av oppgavene er en manglende kobling mellom system og modell. Jeg vil derfor komme med forslag til alternative oppgaveformuleringer og løsninger, der målet er at elevene skal jobbe med formler og parametere for å utvikle både den matematiske forståelsen og forståelsen for det modellerte systemet.

Først, i Kapittel 7.1, vil jeg gi en oppsummering av resultatene fra den prakseologiske analysen av kapittelet «Modeller og funksjoner» i læreboka *Sinus 1T*. Videre i Kapittel 7.2 vil jeg gjennom eksempeloppgaver illustrere analyseresultatene. Jeg har valgt ut én eksempeloppgave knyttet til henholdsvis funksjonene lineære funksjoner, polynomfunksjoner, eksponentialfunksjoner og potensfunksjoner. I tillegg vil jeg presentere oppgavene på et av de digitale utforskningsarkene. Kapittelet «Modeller og funksjoner» inneholder også delkapitler om potenser, prosentregning og rasjonale funksjoner, men disse dreier seg ikke om modellering av systemer, og de er derfor ikke inkludert i studien. Til slutt, i Kapittel 7.3, følger en diskusjon av analyseresultatene.

7.1 En oppsummering av analyseresultatene av «Modeller og funksjoner» i læreboka *Sinus 1T*

Den prakseologiske analysen av læreboka *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a) viser at i så å si alle oppgavene i kapittelet «Modeller og funksjoner» skal man jobbe med en funksjon som beskriver et virkelig fenomen. For polynomfunksjoner og potensfunksjoner får man enten oppgitt et funksjonsuttrykk man skal jobbe med i oppgaven, eller man skal bruke regresjon i

GeoGebra på oppgitte måledata til å finne et funksjonsuttrykk som beskriver dataene. Det finnes ingen forklaringer eller oppgaver knyttet til å forstå funksjonsuttrykket og hvorfor det beskriver systemet man studerer. For eksempel skal man i Oppgave 5.132 bruke regresjon for å komme frem til et femtegradspolynom som beskriver utviklingen av antall henvendelser om huggormbitt til Giftinformasjonen mellom 2013 og 2018 (Oldervoll et al., 2020a, s. 375–376). Polynomet passer bra med dataene, men man har for eksempel ingen forståelse for hva de fem koeffisientene egentlig beskriver. For lineære funksjoner og eksponentialfunksjoner er det derimot også oppgaver der man skal bruke datapunkter eller informasjon gitt som tekst til å konstruere et funksjonsuttrykk.

Felles for oppgavene i kapittelet er at de inneholder flere deloppgaver, og man skal bruke funksjonen man har funnet eller fått oppgitt til å løse deloppgavene. Spesielt er det mange spørsmål der man skal evaluere funksjonen for en bestemt x-verdi, og oppgaver der man skal finne x-verdien som samsvarer med en gitt funksjonsverdi ved å konstruere og løse en likning. For eksempel skal man i Oppgave 5.174 bruke regresjon i GeoGebra for å komme frem til funksjonsuttrykket $h(x)$, som beskriver sammenhengen mellom diameteren x og høyden $h(x)$ til et tre. I to av deloppgavene skal man henholdsvis svare på spørsmålene «Hvor høyt er et slikt tre når det har diameteren 1,8 m?» og «Finn diameteren til et tre med høyden 40 m» (Oldervoll et al., 2020a, s. 383). I bunn og grunn innebærer de fleste oppgavene å gjennomføre regneoperasjoner på funksjonsuttrykk, og det er en manglende kobling mellom funksjonen og systemet funksjonen modellerer. I stedet for et genererende spørsmål Q knyttet til systemet S, får man mange deloppgaver, som i stor grad veileder en gjennom hele oppgaven. Oppgavene blir begrenset til å bruke funksjonene til å svare på mange mindre deloppgaver, men ikke til å forstå og si noe om systemet generelt ved å undersøke forholdet mellom de ulike parameterne og variablene.

I dette kapittelet er modeller redusert til å være funksjoner. I stedet for å starte med en formel med parametere som man kan betrakte som en funksjon, jobber man kun med modeller som funksjoner. Dette kan være en av årsakene til at det er svært få oppgaver knyttet til manipulasjon av formler, som er helt sentralt i arbeid med matematisk modellering (Strømskag & Chevallard, 2022). Igjen, som tidligere forskning viser (Bolea et al., 2004; Ruiz et al., 2007; Strømskag & Chevallard, 2022), ser vi praksisen med å dele opp funksjoner og algebra i to adskilte domener.

7.2 Eksempeloppgaver fra «Modeller og funksjoner» i *Sinus 1T*

I avsnittene som følger presenterer jeg oppgaver fra *Sinus 1T* knyttet til hver av de fire funksjonene lineære funksjoner, polynomfunksjoner, eksponentialfunksjoner og potensfunksjoner, samt en sammensatt funksjon fra nettstedet til læreverket. For hver av oppgavene vil jeg beskrive hvilke teknikker som er presentert i læreboka *Sinus 1T* for å løse de ulike oppgavetypene. Videre vil jeg kommentere oppgavene i lys av forståelsen av matematisk modellering i ATD, før jeg vil presentere en alternativ oppgaveformulering med løsningsforslag.

7.2.1 Lineære funksjoner

7.2.1.1 Eksempeloppgave fra læreboka Sinus 1T

For lineære funksjoner har jeg plukket ut Oppgave 5.302 på side 390 som en eksempeloppgave. Den er gjengitt nedenfor, og jeg har videre beskrevet et løsningsforslag, som er basert på de presenterte teknikkene i læreboka *Sinus 1T*.

> Tabellen nedenfor viser resistansen (den elektriske motstanden) $R(t)$ målt i ohm i en kobbertråd med temperaturen t målt i celsiusgrader.
>
> | t (°C) | 0 | 16 | 22 | 36 | 49 | 60 | 75 |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | $R(t)$ (ohm) | 56,0 | 59,5 | 60,8 | 63,9 | 66,7 | 69,0 | 72,3 |
>
> **a)** Bruk tabellen og finn en lineær modell for sammenhengen mellom temperatur og resistans i kopperträden.
>
> **b)** Finn resistansen i en koppertråd ved 68 °C.
>
> **c)** Finn ved regning temperaturen i koppertråden når resistansen er 65,1 ohm.
>
> **d)** Hvor mange grader stiger temperaturen i en koppertråd når resistansen øker med 1 ohm? (Oldervoll et al., 2020a, s. 390)

Basert på de presenterte teknikkene i *Sinus 1T* kan den første deloppgaven løses på to måter:

1. Ved regresjon i GeoGebra.

2. Ved å bruke to datapunkter og informasjonen om at modellen er lineær. Siden modellen er lineær, vil den være på formen $R(t) = R_0 + at$. Vi finner R_0 ved å evaluere modellen for $t = 0$, noe som gir 56 ohm. Videre vet vi at en temperatur på 75 °C tilsvarer en resistans på 72,3 ohm. Dette kan vi bruke for å finne stigningstallet a:

$$72{,}3 = 56 + a \cdot 75$$
$$a = 0{,}217$$

Den lineære modellen er altså lik $R(t) = 56 + 0{,}217t$.

I Deloppgave (b) skal vi evaluere modellen for $t = 68$ °C. Dette gir en resistans på 70,8 ohm. Videre i Deloppgave (c) skal vi finne temperaturen som tilsvarer en resistans på 65,1 ohm. Basert på den presenterte teknikken i *Sinus 1T* innebærer dette å løse likningen $65{,}1 = 56 + 0{,}217t$ for t, noe som gir $t = 42$ °C. Deloppgave (d) kan løses på flere måter, der jeg har identifisert tre mulige løsningsstrategier:

<u>Metode 1:</u> Vi vet at $R(0) = 56$. Videre kan vi undersøke hva temperaturen er for $R = 56 + 1 = 57$:

$$57 = 56 + 0{,}217t$$
$$t = 4{,}6$$

Så temperaturen øker med 4,6 °C når resistansen øker med 1 ohm.

<u>Metode 2:</u> La t_1 være starttemperaturen og t_2 temperaturen når resistansen har økt med 1 ohm. Da kan vi konstruere likningen nedenfor og løse denne for t_2:

$$0{,}217t_1 + 56 + 1 = 0{,}217t_2 + 56$$
$$t_2 = 4{,}6 + t_1$$

<u>Metode 3:</u> Vi kan manipulere formelen for R, slik at vi får et uttrykk for t:

$$R = 0{,}217t + 56$$
$$t = \frac{R - 56}{0{,}217}$$

Deretter kan vi betrakte formelen for t som en funksjon $t(R)$:

$$t(R) = 4{,}6R - 258{,}1$$

Stigningstallet er 4,6, som betyr at når resistansen øker med 1 ohm, vil temperaturen øke med 4,6 °C.

I denne oppgaven blir vi presentert for et system med en tabell som beskriver sammenhengen mellom resistans og temperatur i en koppertråd. I den første deloppgaven skal vi komme frem til den lineære modellen $R(t) = 56 + 0{,}217t$. Deloppgave (b) og (c) innebærer henholdsvis å evaluere modellen og å løse en lineær likning. De innebærer at vi jobber med det lineære uttrykket, men de bidrar ikke til noen større forståelse for det modellerte systemet. Vi jobber med spesifikke tall, i stedet for med generelle forhold og sammenhenger. Deloppgave (d) er mer åpen enn de andre deloppgavene, og den kan løses på flere måter. Den tredje metoden jeg har presentert ovenfor innebærer viktige operasjoner knyttet til matematisk modellering, som manipulasjon av en formel, samt evnen til å variere hvordan man betrakter en formel. Ved å se på formelen for t som en lineær funksjon, ser vi at stigningstallet er lik 4,6. Da vet vi at temperaturen vil øke med 4,6 °C når resistansen øker med 1 ohm.

7.2.1.2 En alternativ oppgave med løsningsforslag

Den presenterte oppgaven ovenfor fra *Sinus 1T* tar for seg et viktig system, som vi finner overalt i samfunnet. Strøm, spenning og resistans er fenomener vi er fullstendig avhengige av. Oppgaven toucher innom viktige aspekter ved matematisk modellering, som beskrevet for løsningen av Deloppgave (d). Samtidig kan den videreutvikles og omformuleres for å fange enda mer av de generelle sammenhengene i systemet. Nedenfor beskriver jeg en alternativ oppgave som tar for seg strøm, resistans, spenning og temperatur, der målet er at elevene skal studere sammenhenger mellom disse parameterne.

> Sammenhengen mellom strømmen I gjennom en elektrisk leder, spenningen V over lederen og resistansen R i lederen kan beskrives med Ohms lov: $V = IR$[8]. Spenningen beskriver hvor mye arbeid som kreves for å få strømmen til å gå i lederen, mens resistansen er et mål på hvor mye motstand lederen gjør mot strømmen. Resistansen i en elektrisk leder er avhengig av temperaturen t i lederen. Denne sammenhengen kan generelt beskrives med formelen $R = R_0 + R_0\alpha t$, der R er resistansen ved temperaturen t, R_0 er resistansen når temperaturen er 0 °C, og α kalles temperaturkoeffisienten. Dette er en parameter som avhenger av hvilket materiale den elektriske lederen er laget av (Young & Freedman, 2015b , s. 844–849).
>
> Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom resistans og temperatur for kobber.

t (°C)	0	16	22	36	49	60	75
$R(t)$ (ohm)	56,0	59,5	60,8	63,9	66,7	69,0	72,3

> a) Bruk dataene i tabellen og informasjonen du har fått oppgitt om resistans og temperatur til å lage en modell som beskriver sammenhengen.

[8] Ohms lov beskriver at spenningen V og strømmen I er proporsjonale størrelser, altså $V=IR$, der R er proporsjonalitetskonstanten. Formelen definerer resistans for enhver leder, men Ohms lov gjelder kun for ohmske ledere, det vil si at resistansen er konstant for en bestemt temperatur (Young & Freedman, 2015b, s. 844–849).

b) Hva er temperaturkoeffisienten for kobber, og hva forteller den om sammenhengen mellom temperaturen og resistansen i en kobberledning?

c) Hva skjer med strømmen i en kobberledning når temperaturen øker?

Videre følger en mulig løsning av oppgaven. I Deloppgave (a) kan vi, som i oppgaven fra *Sinus 1T*, enten bruke regresjon for å finne en modell, eller vi kan bruke to datapunkter og informasjonen om at modellen er på formen $R = R_0 + at$ til å konstruere en modell. Da kommer vi frem til det lineære uttrykket $R = 56 + 0{,}217t$. Videre vet vi at stigningstallet, 0,217, er lik $R_0\alpha$, og vi kan dermed finne temperaturkoeffisienten: $\alpha = \frac{0{,}217}{56} \approx 0{,}0039$. Dermed har modellen formen $R = 56 + 56 \cdot 0{,}0039t$. Siden α er positiv, vil resistansen øke når temperaturen øker.

I Deloppgave (c) skal vi undersøke hva som skjer med strømmen når temperaturen øker, og vi vet at økende temperatur betyr økende resistans. Videre har vi at sammenhengen mellom resistans og strøm kan beskrives med ohms lov, $V = IR$. Vi kan manipulere formelen og få et uttrykk for strømmen I, $I = \frac{V}{R}$. Altså vil strømmen minke når temperaturen øker, siden dette medfører at resistansen øker. Strømmen vil møte mer motstand ved høyere resistans.

Sammenlignet med oppgaven i *Sinus 1T* får man i den alternative oppgaven en forklaring på parameterne i modellen som beskriver sammenhengen mellom resistans og temperatur. Stigningstallet 0,217 er ikke bare en konstant, men en parameter som er lik $R_0\alpha$. Videre får man en forståelse for hva temperaturkoeffisienten har å si for sammenhengen mellom resistansen og temperaturen, der positiv temperaturkoeffisient betyr at resistansen øker med temperaturen. I den alternative oppgaven må man undersøke generelle sammenhenger, som bidrar til en større forståelse for systemet og forholdet mellom de ulike parameterne. Dette i stedet for å evaluere et funksjonsuttrykk eller løse en likning med numeriske verdier.

7.2.2 Polynomfunksjoner

7.2.2.1 Eksempeloppgave fra læreboka Sinus 1T

Som eksempeloppgave der man bruker en polynomfunksjon som modell, har jeg valgt ut Oppgave 5.130 på side 375. Den handler om sammenhengen mellom fart og stopplengde, og den lyder som følger:

Stopplengden for en bil i fart er avhengig av reaksjonstida til føreren og bremselengden. Tabellen nedenfor viser stopplengden *S(x)* målt i meter ved noen hastigheter målt i km/h for en bestemt bil og en bestemt sjåfør.

x (km/h)	40	60	80	100
$S(x)$ (m)	24	45	73	108

a) Marker tallene i tabellen som punkter i et koordinatsystem og forklar hvorfor en andregradsfunksjon ser ut til å passe bra.

b) Finn den andregradsfunksjonen *S* som passer best med dataene, og tegn grafen sammen med punktene. Ta med 3 desimaler i svaret for funksjonsuttrykket.

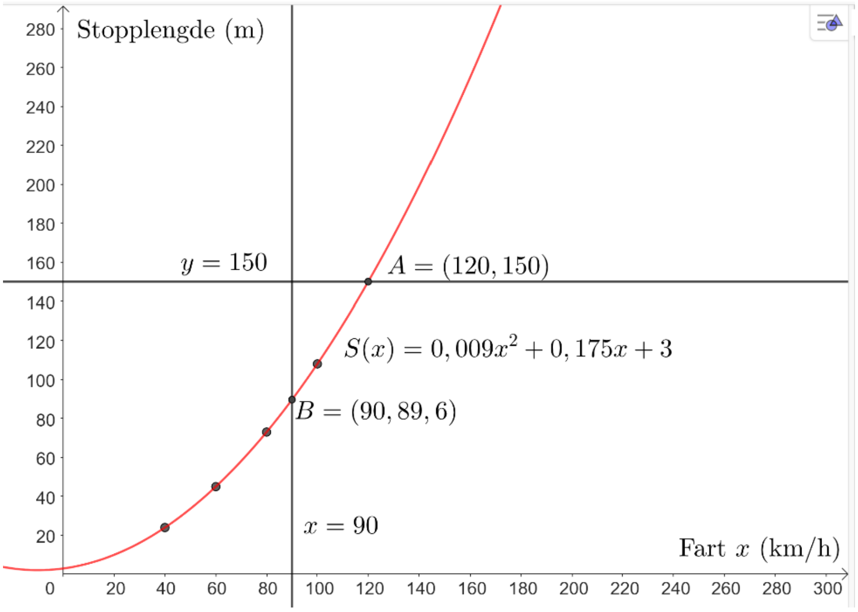
c) Finn grafisk hvilken fart som svarer til stopplengden 150 m.

d) Finn grafisk hvilken stopplengde som svarer til farten 90 km/h. (Oldervoll et al., 2020a, s. 375)

I Deloppgave (a) skal vi markere de fire datapunktene som viser sammenhengen mellom fart og stopplengde, og basert på disse skal vi forklare hvorfor en andregradsfunksjon kan passe til å beskrive dataene. Den presenterte teknikken i boka innebærer å se på kurven punktene danner og sammenligne denne med kurven til et andregradspolynom. Videre i Deloppgave (b) skal vi bruke regresjon i GeoGebra for å komme frem til funksjonsuttrykket $S(x) = 0{,}009x^2 + 0{,}175x + 3$. I Deloppgave (c) skal vi grafisk finne hvilken fart som tilsvarer stopplengden 150 m. Den presenterte teknikken innebærer å løse likningen $150 = 0{,}009x^2 + 0{,}175x + 3$ for x. I kapittelet «Modeller og funksjoner» er det ikke eksplisitt forklart hvordan man skal løse likningen grafisk. I kapittelet «Formler og likninger» er slike oppgaver løst ved å tegne linja $y = 150$ og finne skjæringspunktet mellom denne og grafen til $S(x)$, se Figur 7.1. Da får vi svaret $x = 120$ km/h. Den siste deloppgaven innebærer å evaluere funksjonen for $x = 90$ km/h. Det er heller ikke eksplisitt forklart hvordan dette skal gjøres grafisk, men i kapittelet «Formler og likninger» er slike oppgaver løst ved å tegne linja $x = 90$ og finne skjæringspunktet mellom denne og grafen til $S(x)$. Da kommer vi frem til at $S(90) \approx 90$ m.

Figur 7.1

Grafen til S(x), som viser sammenhengen mellom stopplengde i meter og fart i km/h.



I denne oppgaven skal vi bruke regresjon for å komme frem til en funksjon som beskriver sammenhengen mellom stopplengde og fart. Da får vi en funksjon som passer godt med måledataene. Det er derimot vanskelig å si hva de ulike parameterne i funksjonsuttrykket beskriver. Videre skal vi løse en likning for å finne farten som tilsvarer en gitt stopplengde, samt evaluere funksjonen for en bestemt *x*-verdi. Funksjonen som modell for systemet (sammenhengen mellom stopplengde og fart) og deloppgavene bidrar ikke til noen større forståelse for systemet, for oppgaven begrenses til å jobbe med funksjonen. Det er ingen spørsmål som gjør at vi må undersøke de generelle sammenhengene.

7.2.2.2 En alternativ oppgave med løsningsforslag

Generelt kan sammenhengen mellom fart og bremselengde modelleres med formelen $s = kv^2$, der s er bremselengden i meter, v er farten i m/s, og k (s^2/m) er en parameter som avhenger av føret på veien og bildekkene[9]. For tørr asfalt er k omtrent lik 0,065 s^2/m, mens for isete vei har k en verdi rundt 0,32 s^2/m (Erstad et al., 1984, referert i Strømskag & Chevallard, 2022, s. 398). Nedenfor beskriver jeg en alternativ oppgave som tar for seg sammenhengen mellom fart og

[9] Mer spesifikt har vi formelen $s = \frac{v^2}{2\mu g}$, der v er farten (m/s), μ er friksjonskoeffisienten, og g er tyngdeakselerasjonen (Young & Freedman, 2015a). Se vedlegget for en grundigere forklaring.

bremselengde, der elevene blant annet må undersøke og forstå hva proporsjonalitetskonstanten k beskriver.

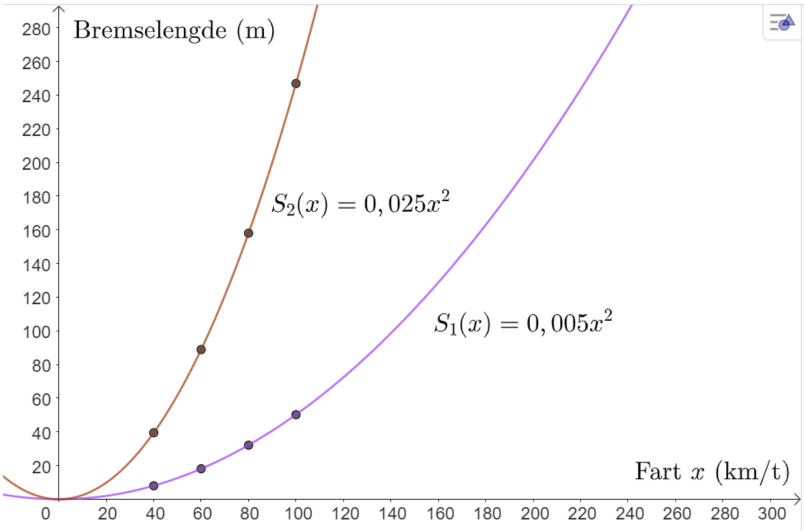
> Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom bremselengde (m) og fart (km/t) på tørr asfalt og isete vei.
>
> | Fart (km/t) | Bremselengde (m) på tørr asfalt | Bremselengde (m) på isete vei |
> |---|---|---|
> | 40 | 8,0 | 39,5 |
> | 60 | 18,1 | 88,9 |
> | 80 | 32,1 | 158,0 |
> | 100 | 50,2 | 246,9 |
>
> Generelt er sammenhengen slik at bremselengden er proporsjonal med kvadratet av farten.
>
> Finn en modell som beskriver sammenhengen mellom fart og bremselengde for henholdsvis tørr asfalt og isete vei, og undersøk sammenhengene mellom de ulike parameterne i modellene du kommer frem til.

Denne oppgaven kan vi løse, som oppgaven i *Sinus 1T*, ved å bruke regresjon i GeoGebra. Vi har fått oppgitt at bremselengden er proporsjonal med kvadratet av farten. Det betyr at modellene må være på formen $s = kv^2$, der s er bremselengden, k er proporsjonalitetskonstanten, og v er farten. Dersom vi plotter dataene inn i regnearket i GeoGebra og bruker regresjonsverktøyet, der vi bestemmer at funksjonene skal være på formen kx^2, får vi uttrykkene $S_1(x) = 0{,}005x^2$ og $S_2(x) = 0{,}025x^{2,}$ der x er farten, og $S_1(x)$ og $S_2(x)$ beskriver sammenhengen mellom bremselengden og farten for henholdsvis tørr asfalt og isete vei, se Figur 7.2.

Fra de to funksjonene ser vi at parameteren k er mye mindre for tørr asfalt sammenlignet med isete vei. Dermed har vi for en gitt fart at bremselengden er mye kortere på tørr asfalt enn på isete vei. Dette kan vi observere fra formelen $s = kv^2$, og det kommer også tydelig frem i grafene til de to funksjonene S_1 og S_2. Parameteren k gir oss altså informasjon om veigrepet. Videre kan vi for eksempel observere at bremselengden, uansett veigrep, vil bli fire ganger så stor dersom farten blir dobbelt så stor, noe vi kan utlede fra den generelle formelen: $S^* = k \cdot (2v)^2 = 4S$. Sammenlignet med oppgaven i *Sinus 1T* har vi en forståelse for alle parameterne i modellene, og vi kan bruke modellene til å undersøke generelle sammenhenger, slik at vi øker vår forståelse for det modellerte systemet.

Figur 7.2

Sammenhengen mellom fart x (km/t) og bremselengde $S_1(x)$ og $S_2(x)$ (m) for henholdsvis tørr asfalt og isete vei.



7.2.3 Eksponentialfunksjoner

7.2.3.1 Eksempeloppgave fra læreboka Sinus 1T

Tilknyttet eksponentialfunksjoner vil jeg trekke frem Oppgave 5.310, som handler om nedbrytning av radioaktivt materiale. Det er flere oppgaver i kapittelet «Modeller og funksjoner» som handler om dette, og alle oppgavene er svært like. Oppgaven er gjengitt nedenfor.

> Funksjonen gitt ved
>
> $$P(t) = 100 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5730}}$$
>
> viser hvor mange prosent av opprinnelig mengde ^{14}C som er igjen i en plante *t* år etter at planten er død.
>
> **a)** Tegn grafen til *P* for $t \in [0, 12\,000]$.
>
> **b)** En prøve fra et gammelt plantemateriale viste at det var 12 000 år gammelt. Hvor mange prosent av vanlig ^{14}C-innhold var det i trematerialet?
>
> **c)** Hvor lang tid tar det før den opprinnelige mengden ^{14}C i en plante er halvert?
>
> **d)** Et gammelt plantemateriale har et ^{14}C-innhold på 88,6 %. Hvor gammelt er trematerialet? (Oldervoll et al., 2020a, s. 395)

Den første deloppgaven innebærer å tegne grafen i GeoGebra, og i Deloppgave (b) skal vi evaluere funksjonen for t = 12 000. Videre i Oppgave (c) skal vi finne halveringstida. Basert på den presenterte teknikken i *Sinus 1T* skal vi gjøre dette ved å løse likningen $100 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5730}} = 50$, enten grafisk eller ved hjelp av CAS. Dette gir svaret t = 5730. I Deloppgave (d) bruker vi samme teknikk som i (c) og løser likningen $100 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5730}} = 88{,}6$.

Oppgaven er begrenset til å jobbe med funksjonen. Det er for eksempel ingen spørsmål eller forklaringer knyttet til hvorfor funksjonsuttrykket har formen det har. I eksempelet på side 207 er det forklart at ^{14}C er en radioaktiv isotop av karbon, og at en fast brøkdel av karbonet i atmosfæren er ^{14}C. Siden levende organismer tar opp karbon, vil også alle levende organismer inneholde den samme brøkdelen av ^{14}C som atmosfæren. Når en levende organsisme dør, vil den radioaktive isotopen brytes ned, og mengden ^{14}C reduseres (Oldervoll et al., 2020a, s. 207). Dette danner en bakgrunn for oppgavene knyttet til radioaktiv nedbrytning, men det sier likevel ingenting om formelen som modellerer den radioaktive nedbrytningen.

7.2.3.2 En alternativ oppgave med løsningsforslag

Nedenfor beskriver jeg en alternativ oppgave om radioaktiv nedbrytning.

> ^{14}C er en radioaktiv isotop av grunnstoffet karbon, og i atmosfæren vil alltid en fast andel av mengden karbon være ^{14}C. Planter tar opp karbon i fotosyntesen, og i dette karbonet vil den samme andelen være ^{14}C som i atmosfæren. Så lenge planten lever tar den opp karbon, men når planten dør, stopper alle prosesser. Alle radioaktive stoffer er ustabile og brytes ned. Når planten dør, vil derfor andelen ^{14}C reduseres (Mangerud, 2023). Prosentandelen P av ^{14}C som er igjen i en plante etter t år kan modelleres med formelen
>
> $$P = 100 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5730}}.$$
>
> Halveringstida til et radioaktivt stoff er tiden det tar før mengden av det er halvert. Halveringstida for ^{14}C er 5730 år.
>
> a) Forklar formelen som beskriver andelen av ^{14}C i en plante etter t år.
>
> b) Hvor mange prosent avtar andelen ^{14}C hvert år? Hva sier dette tallet om nedbrytningsprosessen?

I den første deloppgaven skal vi bruke informasjonen om halveringstid til å forklare den gitte formelen. Når t = 0, er det 100 % av opprinnelig ^{14}C igjen i planten. Dette forklarer konstanten 100 i formelen. Vi vet at etter 5730 år skal det være 50 % igjen av den opprinnelige mengden

^{14}C. Dersom vi setter inn *t* = 5730 i formelen, blir eksponenten lik 1, og 100 multiplisert med 0,5 er lik 50. Dersom *t* < 5730, vil eksponenten være mindre enn 1, og faktoren vi multipliserer 100 med vil være større enn 0,5, som tilsier at det er mer enn 50 % av den opprinnelige mengden ^{14}C igjen. Motsatt vil det være når *t* > 5730.

For å finne årlig prosentvis nedgang kan vi gjøre om på uttrykket og finne vekstfaktoren. Vi har at

$$100 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5730}} = 100 \cdot \left(0{,}5^{\frac{1}{5730}}\right)^{t}$$

Nå har vi formelen på formen ak^x, og vi ser at vekstfaktoren er lik $0{,}5^{\frac{1}{5730}} \approx 0{,}9999$. Det betyr at årlig prosentvis nedgang omtrent er 0,012 %. Altså går nedbrytningsprosessen svært sakte.

Sammenlignet med oppgaven i *Sinus 1T* handler den alternative oppgaven om å forstå den gitte formelen, som beskriver hvordan andelen ^{14}C minker. Blant annet ved å undersøke vekstfaktoren ser vi at nedbrytningsprosessen går svært sakte. I stedet for kun å bruke formelen til å løse oppgaver med spesifikke numeriske verdier, kan vi undersøke formelen mer generelt. I matematikk R1 skal elevene lære om logaritmer. Da får de et svært nyttig verktøy i arbeid med eksponentialfunksjoner, siden logaritme- og eksponentialfunksjoner er inverse funksjoner[10] (Briggs & Cochran, 2011, s. 387–393). For eksempel kan man utlede en generell formel for halveringstida til radioaktive stoffer, som vist nedenfor.

$$y_0 k^t = \frac{1}{2} y_0$$
$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(k)}$$

Hvert radioaktive stoff har en bestemt halveringstid, som (selvfølgelig) avhenger av den prosentvise nedgangen i andelen stoff hvert år, altså vekstfaktoren *k* (Briggs & Cochran, 2011, s. 414).

[10] Se vedlegget for utdyping.

7.2.4 Potensfunksjoner

7.2.4.1 Eksempeloppgave fra læreboka Sinus 1T

For potensfunksjoner har jeg valgt ut Oppgave 9 på kapitteltesten tilknyttet kapittelet. Denne skiller seg fra de andre oppgavene ettersom den blant annet innebærer manipulasjon av en formel. Samtidig inneholder den typiske oppgaver som å bruke regresjon for å finne et funksjonsuttrykk. Oppgaven er gjengitt nedenfor.

> Noen fysikkelever skal undersøke hvordan utstrålingstettheten *U* til ei lyspære, målt i watt per kvadratmeter (W/m^2), varierer med avstanden *x* målt i meter fra lyspæra. Resultatet fra forsøket står i tabellen nedenfor.
>
> | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|
> | *x* (m) | 0,20 | 0,50 | 0,75 | 1,0 | 2,0 |
> | *U* (W/m^2) | 119 | 19,1 | 8,5 | 4,77 | 1,19 |
>
> **a)** Finn ved regresjon den potensfunksjonen som passer best med tabellverdiene.
>
> **b)** Tegn grafen til *U* når $x \in [0, 2{,}5]$.
>
> **c)** Hvor langt fra lyspæra er utstrålingstettheten 2,12 W/m^2?
>
> **d)** En kan vise at dersom lyspæra har effekten *P*, målt i watt (W), er lysutstrålingen gitt ved
>
> $$U = \frac{P}{4\pi \cdot x^2}$$
>
> Finn effekten til lyspæra som er brukt i oppgave a.
>
> **e)** Finn en formel for avstanden *x* uttrykt ved *P* og *U*.
>
> **f)** Hvor stor er avstanden fra ei 100 W lyspære når utstrålingstettheten er 1,99 W/m^2? (Oldervoll et al., 2020a, s. 229)

Videre følger en mulig løsning av oppgaven, som er basert på de presenterte teknikkene i læreboka. I Deloppgave (a) skal vi bruke regresjon i GeoGebra for å komme frem til potensfunksjonen $U(x) = 4{,}77x^{-2}$, som beskriver sammenhengen mellom utstrålingstettheten *U* og avstanden *x* til lyspæra. Deloppgave (b) innebærer å tegne grafen til *U*. I Deloppgave (c) skal vi finne *x*-verdien som svarer til $U = 2{,}12$. Basert på de presenterte teknikkene i kapittelet skal vi gjøre dette ved å løse likningen $2{,}12 = 4{,}77x^{-2}$ for *x*. Da får vi svaret $x = 1{,}5$ m. Videre i Oppgave (d) er vi gitt en formel som viser sammenhengen mellom utstrålingstettheten *U* og effekten *P* til lyspæra. Ved å sette uttrykket for $U(x)$ inn i formelen, kan vi finne effekten:

$$4{,}77x^{-2} = \frac{P}{4\pi \cdot x^2}$$
$$P = 4{,}77 \ \cdot 4\pi$$

Deloppgave (e) innebærer å manipulere formelen fra Oppgave (d), for å få et eksplisitt uttrykk for avstanden *x*. Dette innebærer å betrakte formelen som en likning og løse denne med hensyn på *x*. Da får vi formelen $x = \sqrt{\frac{P}{4\pi \cdot U}}$. I den siste deloppgaven skal vi evaluere formelen for *x* når *U* = 1,99 W/m^2, og effekten *P* er lik 100 W. Dette gir $x = \sqrt{\frac{100}{4\pi \cdot 1{,}99}} = 2$. Altså er utstrålingstettheten for en 100 W lyspære lik 1,99 W/m^2 når avstanden til lyspæra er 2 m.

I oppgaven møter vi på systemet *S* med lyspæra som sender ut energi i form av lys og varme. De tre første oppgavene er begrenset til henholdsvis å bruke regresjon til å finne et funksjonsuttrykk, tegne grafen til funksjonen og løse en likning. Oppgavene bidrar ikke til noen større forståelse for systemet. I Deloppgave (d) får vi oppgitt en formel som viser sammenhengen mellom utstrålingstettheten *U*, effekten *P* og avstanden *x* til ei lyspære, og i Oppgave (e) skal vi manipulere denne for å finne et uttrykk for *x*. Her toucher oppgaven innom viktige operasjoner knyttet til matematisk modellering, for manipulasjon av formler er helt sentralt når vi arbeider med modeller av systemer (Strømskag & Chevallard, 2022). Samtidig skal vi verken bruke formelen for *U* eller formelen for *x* til å si noe om systemet generelt, og den siste oppgaven er begrenset til å evaluere formelen for *x* for gitte verdier for *U* og *P*.

7.2.4.2 En alternativ oppgave med løsningsforslag

Nedenfor beskriver jeg en alternativ oppgave knyttet til lysutstråling fra en kuleformet lyspære.

> En kuleformet lyspære sender ut energi i form av lys og varme. Effekten *P* til lyspæra er energien (joule, J) den sender ut per tidsenhet (sekunder, s). Enheten for effekt er watt, W. Utstrålingstettheten *U* til lyspæra er effekten per areal (m^2). Denne vil variere med avstanden *x* (m) fra lyspæra. Formelen $U = \frac{P}{4\pi \cdot x^2}$ beskriver sammenhengen mellom utstrålingstettheten, effekten og avstanden til lyspæra.
>
> Forklar formelen for utstrålingstetthet, og undersøk sammenhengene mellom utstrålingstettheten, effekten og avstanden til lyspæra.

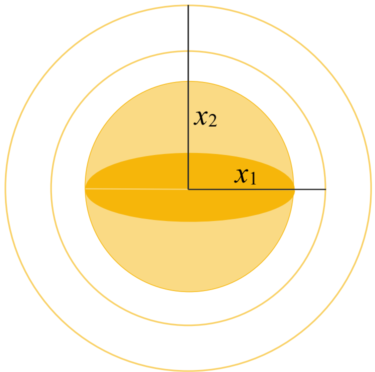
Videre følger en mulig løsning av oppgaven. Først skal vi forklare formelen $U = \frac{P}{4\pi \cdot x^2}$. Vi kan tegne en modell av den kuleformede lyspæra, se Figur 7.3. Energien pæra utstråler sendes ut i form av kuleflater med areal $4\pi x^2$, der *x* er avstanden fra sentrum av kula. Dermed har vi at energien sprer seg over et areal som er gitt ved $4\pi x^2$. Siden utstrålingstetthet er effekt per areal, får vi formelen $U = \frac{P}{4\pi \cdot x^2}$.

Videre skal vi undersøke sammenhengen mellom utstrålingstettheten og avstanden til lyspæra. Dette kan vi gjøre direkte ved å studere formelen for U. Da ser vi at utstrålingstettheten vil avta med økende avstand. La for eksempel avstanden bli tre ganger så stor. Ved å bruke formelen kan vi undersøke hva som vil skje med utstrålingstettheten: $U_2 = \frac{P}{4\pi \cdot (3x)^2} = \frac{P}{9 \cdot 4\pi x^2} = \frac{1}{9}U$. Altså vil utstrålingstettheten bli 9 ganger så liten når avstanden blir 3 ganger så stor. Vi kan også undersøke forholdet mellom U og x ved å studere funksjonen $U(x) = \frac{P}{4\pi \cdot x^2}$, med effekten P som en parameter. Ved for eksempel å tegne grafen for en 100 watts lyspære, ser vi at utstrålingstettheten nærmer seg null når avstanden blir veldig stor, se Figur 7.4. Vi kan også la avstanden være en parameter og i stedet studere funksjonen $U(P) = \frac{P}{4\pi \cdot x^2}$. Da ser vi at denne sammenhengen er lineær, se Figur 7.5.

Videre kan vi manipulere formelen og få et uttrykk for x, $x = \sqrt{\frac{P}{4\pi \cdot U}}$. Da ser vi for eksempel at avstanden minker med økende utstrålingstetthet, noe som er naturlig, ettersom jo nærmere lyspæra man er, desto mindre areal blir energien spredt ut på. Avstanden øker derimot med økende effekt, noe som kan forklares med at effekten må øke dersom utstrålingstettheten skal holdes konstant for en økende avstand.

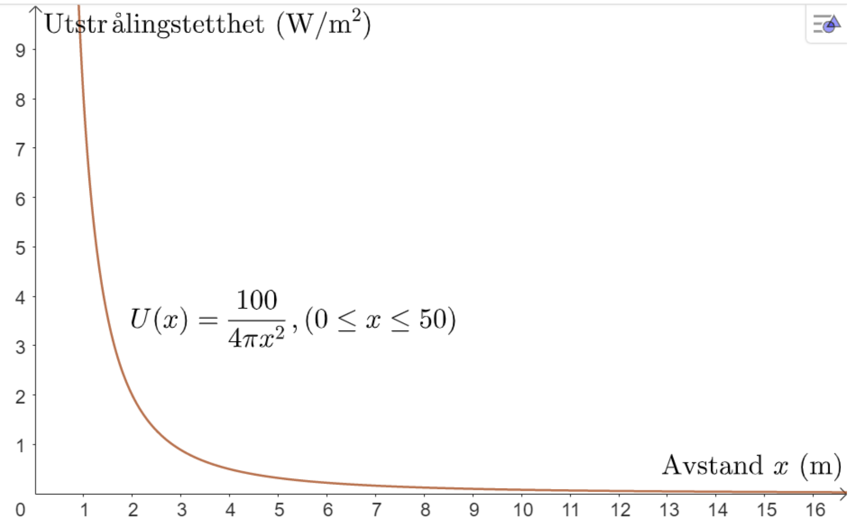
Figur 7.3

Modell av kuleformet lyspære



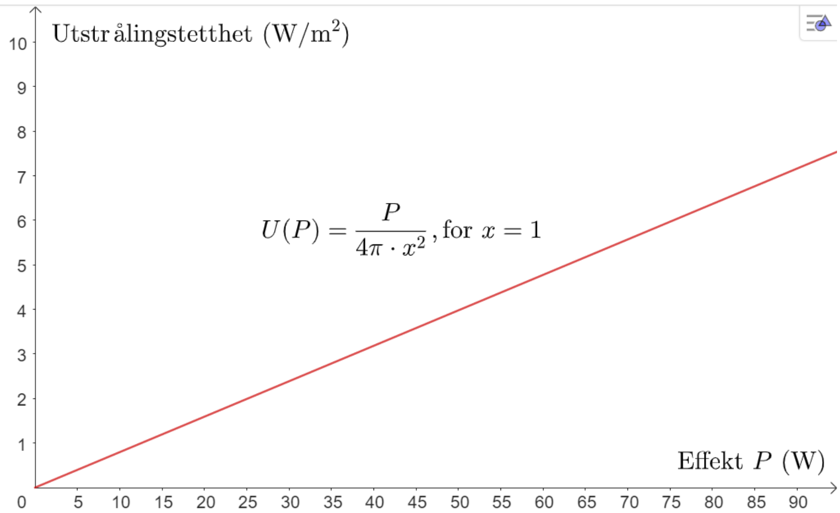
Figur 7.4

Utstrålingstetthet U (W/m²) som funksjon av avstand x (m) for en 100-watts lyspære.



Figur 7.5

Utstrålingstetthet U (W/m²) som funksjon av effekt P (W) i en avstand 1 m fra lyspæra.



7.2.5 En sammensatt funksjon ved bruk av Pytagoras

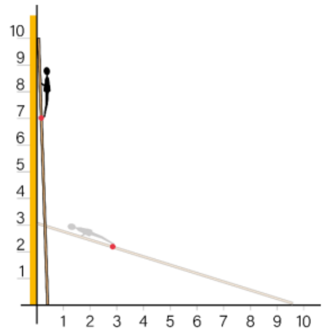
7.2.5.1 Eksempeloppgave fra nettstedet til Sinus 1T: «Mann på stige»

Som i kapittelet «Formler og likninger» er det også i kapittelet om modeller og funksjoner utforskende oppgaver på nettstedet til *Sinus 1T*. En av disse er oppgaven «Mann på stige», der en mann står på ulike trinn i en 10 m lang stige, og vi skal undersøke hvilke kurver mannen følger når stigen sklir. Denne oppgaven skiller seg fra oppgavene i boka. I oppgavene i boka får vi enten data i en tabell, vi får oppgitt et uttrykk, eller vi får informasjon som tekst, som vi skal bruke til å konstruere et funksjonsuttrykk. Her har vi i stedet et mer geometrisk system som vi skal undersøke. Oppgaven lyder som følger:

Oppgave 1

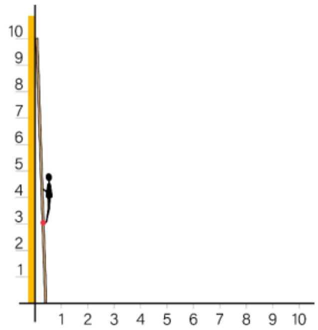
En 10 meter høy stige står opp langs en mur. En mann står på et trinn 7 meter oppe i stigen. Stigen begynner å skli ut langs underlaget så langsomt at mannen klarer å bli stående på samme trinnet mens dette skjer. Toppen av stigen er hele tida i kontakt med veggen.

a) Bruk figuren og tegn inn flere punkter på kurven som mannen følger mot bakken.



b) Hvilken geometrisk form har kurven mannen følger mot bakken?

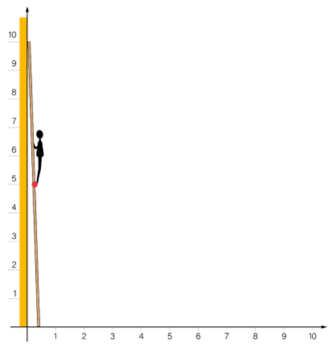
c) Neste gang mannen klatrer opp stigen er han litt mer forsiktig. Denne gangen står han i et trinn 3 meter oppe i stigen før den begynner å skli.



Hvordan ser kurven han nå følger ut?

Oppgave 2

Dagen etter klatrer mannen opp i stigen igjen. Denne gangen står han midt på stigen når den begynner å skli.



a) Hvordan ser kurven han følger mot bakken ut da?

b) Kan du finne et funksjonsuttrykk for denne kurven? (Oldervoll et al., 2020c, utforskningsark [MPS])

Merknad: Figurene i den siterte oppgaven er hentet fra nettstedet til *Sinus 1T*, utviklet av Oldervoll et al. (2020c). Gjengitt med tillatelse av Cappelen Damm.

I Oppgavene (1a) og (1c) skal vi bruke de gitte figurene i oppgaven til å skissere for hånd hvilke kurver mannen følger når stigen sklir. Dette vil være deler av en ellipse. I Oppgave (2a) skal vi komme frem til at mannen følger en kurve som tilsvarer en kvart sirkel. Videre forklarer Oldervoll et al. (2020c) at vi kan bruke Pytagoras til å finne likningen for denne kurven. Da vil vi komme frem til funksjonsuttrykket $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x \in [0,5]$ (utforskningsark [MPS]).

7.2.5.2 En alternativ oppgave med løsningsforslag

En annen måte å angripe oppgaven «Mann på stige» er å konstruere en generell modell som kan beskrive de ulike kurvene mannen følger når stigen sklir. Dette kan vi for eksempel gjøre ved hjelp av GeoGebra. Først kan vi lage en glider *a* fra 0–10 og punktet *A*(*a*, 0). Dette punktet vil tilsvare bunnen av stigen. Videre må vi lage et punkt som tilsvarer toppen av stigen og som varierer i takt med bunnen av stigen. Dette punktet vil være på formen *B*(0, *b*), der *b* varierer i takt med a. Siden stigen er 10 m lang, må det alltid være 10 enheter mellom punktene *A*(*a*, 0) og *B*(0, *b*). Vi kan derfor bruke Pytagoras til å uttrykke *b* som funksjon av *a*:

$$a^2 + b^2 = 10^2$$

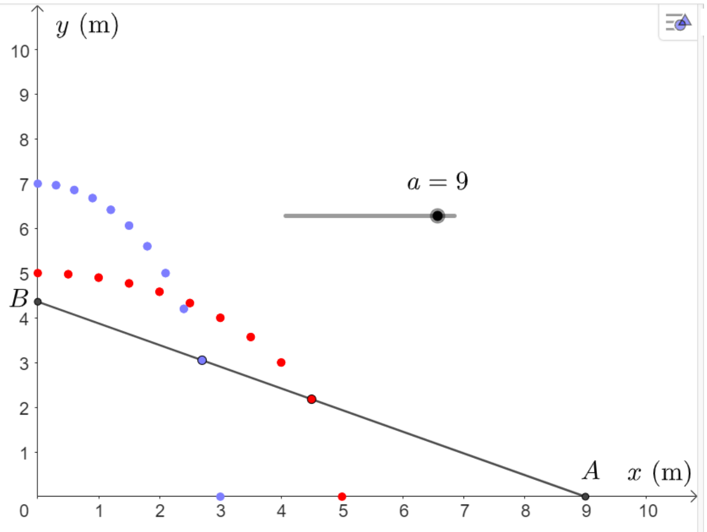
$$b = \sqrt{100 - a^2}$$

Dermed har vi et punkt *B*(0, *b*) som varierer i takt med punktet *A*(*a*, 0). For å skissere de ulike kurvene mannen følger når han står på de ulike trinnene kan vi bruke GeoGebra til hjelp. Ved å bruke den innebygde funksjonen «punkt på objekt» kan vi feste et punkt på linja mellom

$A(a, 0)$ og $B(0, b)$. Slik kan vi markere hvilket trinn mannen står på. Deretter kan vi velge kommandoen «vis spor», for å følge kurven mannen følger når stigen sklir, se Figur 7.6.

Figur 7.6

Modell av kurvene mannen følger når han står på et trinn 7 m over bakken (blå kurve) og et trinn 5 m over bakken (rød kurve).



I den gitte oppgaven på nettstedet til *Sinus 1T* blir vi presentert for systemet *S* med mannen som står på en stige som sklir. Tilknyttet systemet blir vi stilt spørsmål om hvilke kurver mannen vil følge når han står på ulike trinn av stigen. I Oppgave (2b) skal vi finne et funksjonsuttrykk som beskriver en kvart sirkel. Dette funksjonsuttrykket er en modell for den kvarte sirkelen, men det er et endelig resultat og ikke en modell vi bruker for å løse et spørsmål knyttet til systemet.

I den alternative måten å angripe oppgaven på konstruerer vi en generell modell som modellerer alle kurvene mannen følger. Dermed kan vi bruke modellen til å svare på spørsmål knyttet til systemet. Som for oppgaven på nettstedet til *Sinus 1T* får vi bruk for Pytagoras, men vi får også bruk for å innføre parametere, slik at vi kan studere systemet generelt.

7.3 Diskusjon av analyseresultater av «Modeller og funksjoner» i *Sinus 1T*

Som de presenterte oppgavene i forrige delkapittel er eksempler på, er en generell karakteristikk for oppgavene i kapittelet «Modeller og funksjoner» at de innebærer å jobbe med en funksjon som beskriver et virkelig fenomen. Formler i form av funksjoner kan være svært nyttige når vi skal modellere og undersøke systemer, for eksempel når vi skal studere hvordan en parameter varierer i forhold til en annen. Utfordringen med oppgavene i «Modeller og funksjoner» i *Sinus 1T* er at modellene er begrenset til å være funksjoner, og oppgavene er redusert til kun å jobbe med funksjonene. I oppgavene skal man stort sett jobbe med bestemte numeriske verdier, og man skal løse likninger og evaluere funksjoner. Dette i stedet for å undersøke generelle sammenhenger i systemet, som kommer til uttrykk gjennom modellene. For å løse oppgavene er det derfor ikke nødvendig med noen forståelse for det virkelige fenomenet.

I de alternative oppgavene har jeg forsøkt å skape en sterkere kobling mellom modell og system. For eksempel er det viktig og nødvendig at man har en forståelse for parameterne i modellene man bruker for å kunne oppnå en god forståelse for det modellerte systemet. Hvis man ikke forstår modellen, er det svært vanskelig å forstå det virkelige fenomenet. Videre har jeg formulert spørsmål som vil innebære at man må anvende algebraiske regneoperasjoner og studere sammenhengen mellom de ulike parameterne. Slik kan man øke både sin forståelse for det modellerte systemet og sin matematiske forståelse, i tillegg til å oppleve nytten av algebra som modelleringsverktøy.

De alternative oppgavene er i stor grad basert på de presenterte eksempeloppgavene fra *Sinus 1T*. For eksempel er de virkelige fenomenene man skal jobbe med i disse oppgavene svært interessante, og de er viktige i samfunnet. Gjennom de alternative oppgavene har jeg forsøkt å trekke frem disse spennende fenomenene, slik at man gjennom matematikken kan øke sin forståelse for dem. Oppgavene i *Sinus 1T* inneholder derfor viktige elementer knyttet til matematisk modellering. Ved å endre hvilke typer spørsmål vi stiller, kan vi «tvinge» elevene til å undersøke generelle sammenhenger, der de får bruk for å anvende formler og parametere. Spørsmålene vil generere hvilke modeller de får bruk for, og videre hvilke sammenhenger de må studere og forstå.

8 Konklusjon

I denne studien har jeg undersøkt forskningsspørsmålet «Hvordan behandles matematisk modellering i *Sinus 1T*, og hvilken rolle spiller elementær algebra i denne behandlingen?». For å svare på spørsmålet vil jeg først peke på oppdelingen av innholdet i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c) i de to kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner». Denne oppdelingen signaliserer at modeller er knyttet til funksjoner, mens algebra er et annet separat fagfelt. I kapittelet «Modeller og funksjoner» er modellene redusert til å være funksjoner, og det er svært få oppgaver som krever manipulasjon av formler. Dette forskningsfunnet støttes av tidligere forskning, som peker på at algebra i skolen ikke blir brukt som et modelleringsverktøy (Bolea et al., 2004; Bosch, 2015; Ruiz et al., 2007; Strømskag & Chevallard, 2022).

Et felles trekk ved mange av oppgavene i de to kapitlene er at det er en manglende kobling mellom modell og system. Den gjennomførte analysen av «Formler og likninger» viser at det er flere oppgaver der elevene skal jobbe med formler og parametere. Oppgavene er derimot begrenset til å jobbe algebraisk med formlene uten å knytte noen forbindelse til det modellerte systemet. I kapittelet «Modeller og funksjoner» innebærer oppgavene å jobbe med en funksjon som beskriver et virkelig fenomen. I flere av oppgavene får elevene et funksjonsuttrykk, eller de skal bruke GeoGebra til å komme frem til et funksjonsuttrykk som beskriver de oppgitte dataene i oppgaven. Dette medfører at elevene jobber med modeller der de ikke nødvendigvis har noen forståelse for hva de ulike parameterne beskriver. Videre skal de i oppgavene bruke funksjonen til å svare på flere deloppgaver. Oppgavene er redusert til å jobbe med funksjonen, og det er en manglende kobling til systemet funksjonen modellerer.

Gjennom de alternative oppgavene presentert i Kapittel 7.2 har jeg forsøkt å eksemplifisere hvordan man kan konstruere oppgaver og spørsmål der det er en tydelig kobling mellom modell og system. Dette innebærer blant annet at elevene må ha en forståelse for parameterne i modellene de bruker. En manglende forståelse for modellen gjør det vanskelig å utvikle forståelse for det virkelige fenomenet. Videre innebærer de alternative oppgavene at elevene må undersøke generelle sammenhenger mellom de ulike parameterne, og bruke disse sammenhengene for å utvikle forståelse for det modellerte systemet.

Det er viktig å påpeke at læreverket *Sinus 1T* også inneholder spennende oppgaver, der elevene selv må utvikle modeller, innføre parametere og bruke modellene til å løse et problem. I disse oppgavene er ikke løsningsstrategien innlysende og rett frem, og det er ikke flere deloppgaver som veileder elevene gjennom. Elevene må derimot selv bryte ned problemet. Videre er det oppgaver med interessante kontekster og fenomener, som kan bli lærerike og utfordrende modelleringsoppgaver dersom vi endrer hvilke spørsmål vi stiller. Fra spørsmål som dreier seg om å anvende funksjoner for å løse mindre deloppgaver med bestemte numeriske verdier, må vi bevege oss til spørsmål som utfordrer elevene til å bruke formler og parametere for å undersøke generelle sammenhenger.

I denne studien har jeg brukt ATD som metodisk og teoretisk rammeverk for å studere kunnskapen knyttet til matematisk modellering og elementær algebra i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c). Begrepet prakseologi har vært et nyttig verktøy for å analysere de ulike oppgavene på en objektiv måte. Videre har forståelsen av matematisk modellering i ATD vært sentral for å få en forståelse for hvordan dette temaet er behandlet i *Sinus 1T*, hvilke begrensninger som er knyttet til den presenterte kunnskapen, men også hvilke muligheter som finnes i mange av fenomenene som er behandlet i læreverket.

9 Begrensninger ved studien, videre forskning og noen avsluttende ord

I denne studien har jeg kun undersøkt kapitlene «Formler og likninger» og «Modeller og funksjoner» i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020b, 2020c), for å undersøke hvordan læreverket behandler matematisk modellering, og hvilken rolle elementær algebra har i denne behandlingen. Denne oppgaven presenterer derfor funn knyttet til disse delene av læreverket, men om dette representerer læreverket som helhet har jeg ingen forutsetninger for å si noe om. Det vil derfor være nyttig for videre forskning også å undersøke de andre kapitlene. For eksempel kan kapittelet «Vekstfart og derivasjon» være spennende å studere, ettersom endring og hvordan størrelser endrer seg i forhold til hverandre er en del av nesten alle fenomener. En analyse av *Sinus R1* og *Sinus R2* vil også være nyttig for å få en helhetlig forståelse for hvordan læreverket *Sinus* behandler matematisk modellering i realfagsmatematikken i videregående skole.

Matematisk modellering handler om å gi elevene muligheter til selv å utvikle modeller, konstruere matematiske prakseologier og oppdage nye sammenhenger. De må oppleve at matematikken er et nyttig verktøy for å løse ulike problemer. Modelleringsprosessen innebærer en endring i klasseromskulturen, der elevene må få tid til å utvikle modeller, jobbe med modeller og finne svar. Vi må bevege oss fra *paradigmet som innebærer å besøke arbeider* til *paradigmet som innebærer å stille spørsmål ved verden.* I ATD er studie- og forskningsløyper et svar på den nye klasseromskulturen (se Chevallard, 2015). Denne formen for læringsaktivitet innebærer et stort skifte i hvordan undervisningen skal foregå, med nye roller og nytt ansvar for både lærere og elever. Det er derfor nødvendig og viktig at vi forsker på hvordan vi kan legge opp undervisningen for å gi rom og tid til at elevene selv får utforske sammenhenger og utvikle ny kunnskap.

Vi lever i dag i en verden som er i stadig utvikling, og matematikk er et uvurderlig verktøy for å forstå og beskrive fenomenene rundt oss, samt for å forutsi fremtidige fenomener. Vi møter stadig på nye problemer, som vi må løse både med kunnskapen vi har og ved å tilegne oss ny kunnskap. Vi må selv bryte ned problemet i mindre deloppgaver og finne matematiske modeller som kan hjelpe oss frem til en løsning. I opplæringsloven står det at «Elevane og lærlingane skal utvikle kunnskap, dugleik og holdningar for å kunne meistre liva sine og for å kunne delta i arbeid og fellesskap i samfunnet. Dei skal få utfalde skaparglede, engasjement og utforskartrong» (Opplæringslova, 1998, §1-1). For å møte dette formålet med opplæringen må vi gi elevene muligheten til å møte på nye problemer, som de selv må dele opp i mindre deloppgaver, der de selv må konstruere egne modeller og finne egne løsningsstrategier.

Gjennom arbeidet med denne oppgaven har jeg utviklet kunnskap om nyttige verktøy jeg kan bruke i mitt arbeid med læreverk som lærer. Videre har jeg utvidet min forståelse for matematisk modellering, og hvordan det gjennomsyrer alle former for matematisk aktivitet. Jeg har jobbet med hvordan vi kan utforme oppgaver og spørsmål som gir elevene muligheter til å utvikle både matematisk forståelse og forståelse for ulike virkelige fenomener. Jeg håper oppgaven min kan være til hjelp for lærere, lærebokforfattere og alle som jobber for å utvikle undervisningen i skolen.

Referanser

Algebraic expression. (u.å.). I *Merriam-Webster*. Hentet 14. mars 2023 fra https://www.merriam-webster.com/dictionary/algebraic%20expression

Anton, H. & Rorres, C. (2015). *Elementary linear algebra with supplemental applications* (11. utg.). Wiley.

Blum, W. & Leiß, D. (2006). "Filling up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. I M. Bosch (Red.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1623–1633). Ramon Llull University & ERME.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *14*, 125–133.

Bosch, M. (2015). Doing research within the anthropological theory of the didactic: The case of school algebra. I S. J. Cho (Red.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 51–69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_4

Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the anthropological theory of the didactic (ATD). I A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Red.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (s. 67–83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_5

Bosch, M., Chevallard, Y., García, F. J. & Monaghan, J. (2020). Introduction: An invitation to the ATD. I M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García & J. Monaghan (Red.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (s. xii–xvii). Routledge.

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal*, *9*(2), 27–40. https://doi.org/10.3316/QRJ0902027

Briggs, W. L. & Cochran, L. (2011). *Calculus*. Pearson.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. I S. J. Cho (Red.), *The Proceedings of the 12th International Congress* *on Mathematical Education* (s. 173–187). Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 12*(1), 71–114.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2020a). Anthropological theory of the didactic (ATD). I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 53–61). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100034

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2020b). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. I M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García & J. Monaghan (Red.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (s. xviii–xxxvii). Routledge.

Coefficient. (2023, 28. mars). I *Wikipedia* https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Coefficient&oldid=1146978161

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg.). Routledge.

Edwards, C. H. Jr. (1979). *The historical development of the calculus.* Springer-Verlag.

Ely, R. & Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x? *Mathematics Education Research Journal, 24*(1), 19–38. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0029-9

Formula. (u.å.). I *Webster's 1913 Dictionary*. Formula | Definition of Formula by Webster's Online Dictionary (webster-dictionary.org)

Forskrift til opplæringslova. (2006). *Forskrift til opplæringslova* (FOR-2006-06-23-724). Lovdata. https://lovdata.no/forskrift/2006-06-23-724

García, F. J., Gascón, J., Higueras, L. R. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 226–246. https://doi.org/10.1007/BF02652807

Gilje, Ø. (2021). På nye veier: Læremidler og digitale verktøy fra kunnskapsløftet til fagfornyelsen. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift, 105*(2), 227–241. https://doi.org/10.18261/issn.1504-2987-2021-02-10

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., Knain, E., Mørch, A., Naalsund, M. & Skarpaas, K. G. (2016). *Med ARK&APP: Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer.* UiO.

Indeterminate equation. (u.å.). I *Merriam-Webster*. Hentet 30. april 2023 fra https://www.merriam-webster.com/dictionary/indeterminate%20equation

Kommensurabel (matematikk). (2022, 4. august). I *Store norske leksikon*. https://snl.no/kommensurabel_-_matematikk

Kristianslund, A. K. (2022). *En prakseologisk analyse av resultatet av didaktiske transposisjonsprosesser innenfor differensialregning i matematikk R1* [Masteroppgave, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet]. NTNU Open. https://hdl.handle.net/11250/3042505

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (MAT09-01)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat09-01

Mangerud, J. (2023, 9. april). C-14-datering. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/C-14-datering

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. Hentet 26. april 2023 fra https://www.forskningsetikk.no/ressurser/publikasjoner/retningslinjer-nesh/

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (s. 3–32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

OECD. (u.å.). *PISA 2022 Mathematics framework*. Hentet 30. april 2023 fra https://pisa2022-maths.oecd.org/index.html

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Jacobsen, R. B. & Pedersen, T. (2020a). *Sinus 1T: Matematikk* (4. utg.). Cappelen Damm.

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Jacobsen, R. B. & Pedersen, T. (2020b). *Sinus 1T: Matematikk Utforskningsark [LRT].*

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Jacobsen, R. B. & Pedersen, T. (2020c). *Sinus 1T: Matematikk Utforskningsark [MPS].*

Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa* (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/lov/1998-07-17-61

Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). The functional algebraic modelling at secondary level. I D. Pitta-Pantazi & C. Philippou (Red.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2170–2179). Cyprus University & ERME.

Stover, C. & Weisstein, E. W. (u.å.). Function. I *Mathworld.* Hentet 25. mars 2023 fra https://mathworld.wolfram.com/Function.html

Strømskag, H. & Chevallard, Y. (2022). Elementary algebra as a modelling tool: A plea for a new curriculum. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *42*(3), 371–409.

Utdanningsdirektoratet. (2019, 18. november). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2020a, 3. september). *Hva er nytt i matematikk?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

Utdanningsdirektoratet. (2020b, 3. september). *Hva er nytt i matematikk?* [Video]. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 521–525). Springer. https://www.icrme.net/uploads/1/0/9/8/109819470/rme_encyclopaediamathed.pdf

Weisstein, E. W. (u.å.a.). Equation. I *Mathworld*. Hentet 2. april 2023 fra https://mathworld.wolfram.com/Equation.html

Weisstein, E. W. (u.å.b.). Transcendental function. I *Mathworld*. Hentet 29. april 2023 fra https://mathworld.wolfram.com/TranscendentalFunction.html

Young, H. D. & Freedman, R. A. (2015a). *Sears & Zemansky's University Physics with Modern Physics: Scandinavian Edition Volume 1* (14. utg.). Pearson.

Young, H. D. & Freedman, R. A. (2015b). *Sears & Zemansky's University Physics with Modern Physics: Scandinavian Edition Volume 2* (14. utg.). Pearson.

Vedlegg

I dette vedlegget presenterer jeg den epistemologiske referansemodellen for funksjoner, som jeg utarbeidet i forkant av analysen av kapittelet «Modeller og funksjoner» i *Sinus 1T* av Oldervoll et al. (2020a, 2020c). Referansemodellen inneholder kunnskap om polynomfunksjoner, lineære funksjoner, potensfunksjoner og eksponentialfunksjoner. Dette innebærer grunnleggende teori om de ulike typene av funksjoner, i tillegg til litt om ulike fenomener de kan modellere. I denne oppgaven forholder jeg meg til *reelle* funksjoner.

Polynomfunksjoner

Polynomer er funksjoner med generelt funksjonsuttrykk på formen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ ... \ + a_1 x + a_0$, der koeffisientene a_i er reelle tall, og $a_n \neq 0$. Eksponentene er positive heltall, og n kalles graden til polynomet. Definisjonsmengden er alle reelle tall. Et polynom kan ha opptil n reelle røtter (Briggs & Cochran, 2011, s. 10).

Den deriverte av et generelt polynom er gitt ved $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + \cdots + a_1$, et polynom med grad $n - 1$ (Briggs & Cochran, 2011, s. 113–116). Siden polynomer er definert for alle reelle tall, er også den deriverte av et polynom definert for alle reelle tall. Dette betyr at polynomer er deriverbare på hele definisjonsmengden, som medfører at polynomer er kontinuerlige på hele definisjonsmengden (Briggs & Cochran, 2011, s. 107).

Tilknyttet matematisk modellering er andre- og tredjegradspolynomer viktige. De kan blant annet brukes i modellering av problemer knyttet til areal og volum. Andregradspolynomer er også sentrale i fenomener knyttet til strekning, fart og akselerasjon. For eksempel vil posisjonen til et legeme som beveger seg med konstant akselerasjon være gitt med et andregradspolynom. Legemer som beveger seg i fritt fall, det vil si kun påvirket av tyngdekraften, er eksempler på bevegelse langs en rett linje der akselerasjonen er konstant. Den konstante akselerasjonen er lik tyngdeakselerasjonen, omtrent lik 9,81 m/s^2 (Young & Freedman, 2015a, s. 69–74). Sammenhengen mellom bremselengde og fart kan også modelleres med et andregradspolynom.

Et andregradspolynom er på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$, der a, b og c er reelle tall. Den deriverte av et andregradspolynom er et polynom av første grad. En rett linje, som ikke er konstant, vil alltid krysse x-aksen. Et andregradspolynom har derfor alltid ett kritisk punkt, det vil si et punkt der $f'(x) = 0$. Dette punktet vil enten være et toppunkt eller et bunnpunkt (Hildrum, 2022). Grafen til en andregradsfunksjon kalles en parabel (Kristensen & Aanensen, 2022). Et tredjegradspolynom er på formen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, der a, b, c og d er reelle tall. Den deriverte av et tredjegradspolynom er et polynom av grad to. Et tredjegradspolynom kan derfor ha null, ett eller to kritiske punkter, avhengig av antall nullpunkter til den deriverte.

Utledning av formel for bremselengde

Når et legeme sklir på en overflate, virker det en friksjonskraft mot bevegelsesretningen. Denne friksjonskraften er gitt ved $f = \mu n$, der n er normalkraften fra underlaget på legemet, og μ er friksjonskoeffisienten (Young & Freedman, 2015a, s. 167).

Når en kraft virker på et legeme, utfører kraften et arbeid på legemet. Dersom legemet beveger seg langs en rett linje, og kraften er konstant, er arbeidet gitt ved $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\theta$, der $\vec{F}$ er kraften, $\vec{s}$ er forflytningen, og θ er vinkelen mellom bevegelsesretningen og kraften. Når et legeme sklir på en overflate, virker friksjonskraften i motsatt retning av bevegelsen, og θ er dermed lik 180 grader. Arbeidet utført av friksjonskraften på legemet er derfor gitt ved $-Fs$, der det negative fortegnet viser at kraften virker i motsatt retning av bevegelsen. Det totale arbeidet W_{tot} utført på et legeme er lik endringen i legemets kinetiske energi E_k. Vi har dermed sammenhengen $W_{tot} = \Delta E_k = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$, der m er massen til legemet, og v_1 og v_0 er henholdsvis sluttfart og startfart (Young & Freedman, 2015a, s. 197–204).

Når en bil bremser, virker det friksjonskrefter fra underlaget på bilens dekk. Friksjonskoeffisienten avhenger av dekkene (slitte vs. nye dekk) og underlaget (glatt vs. tørt føre). Bremselengde er definert som hvor langt bilen forflytter seg fra man tråkker inn bremsen til bilen stopper (Vianor, u.å.). Ved å bruke sammenhengene ovenfor kan vi finne et uttrykk for bremselengden. Arbeidet utført av friksjonskraften ved oppbremsing er gitt ved

$$W = fs = \mu ns = \mu mgs,$$

der normalkraften n er lik tyngdeakselerasjonen g multiplisert med massen av bilen m. Dette arbeidet er lik endringen i den kinetiske energien til bilen. Siden sluttfarten er lik null, får vi likningen

$$\mu mgs = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

Ved å gjøre om på likningen får vi et uttrykk for bremselengden s:

$$s = \frac{{v_0}^2}{2\mu g}.$$

Altså er bremselengden gitt ved en andregradsfunksjon. $2g$ er en konstant omtrent lik 19,62 m/s^2, mens μ er en parameter som avhenger av bildekk og føre.

Lineære funksjoner

Innenfor kalkulus blir lineære funksjoner forstått som polynomfunksjoner av grad null eller én, det vil si funksjoner der grafen er en rett linje. Funksjonsuttrykket er derfor på formen $f(x) = ax + b$, der a og b er reelle tall (Weisstein, u.å.). Definisjonsmengden er alle reelle tall (Briggs & Cochran, 2011, s. 10–11). Innenfor lineær algebra er derimot en lineær funksjon en funksjon som oppfyller de to kriteriene for linearitet:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(ax) = af(x)$,

for alle x og y i definisjonsmengden og skalarer a (Weisstein, u.å.). Lineære funksjoner, slik de er beskrevet i kalkulus, blir ofte kalt for affine funksjoner. I denne oppgaven ser jeg på lineære funksjoner slik de er forstått i kalkulus, altså funksjoner på formen $f(x) = ax + b$. Den deriverte av en lineær funksjon $f(x) = ax + b$, er lik a, altså en konstant (Briggs & Cochran, 2011, s. 113–114).

Lineære funksjoner kan brukes til å beskrive alle fenomener som har en konstant endring. Fra fysikken er det flere eksempler: Posisjonen s til en bil som kjører med en konstant fart v er gitt ved $s = vt + s_0$, der t er kjøretiden, og s_0 er posisjonen ved tiden $t = 0$. Farten v til en stein som slippes fra en høyde kan tilnærmet beskrives med $v = at$, der $a = 9{,}81$ m/s^2 er tyngdeakselerasjonen, og t er tiden fra steinen starter å falle (Young & Freedman, 2015a, s. 69–74). Ohms lov sier at spenningen U over en elektrisk leder tilnærmet er gitt ved RI, der R er resistansen i lederen, og I er strømmen gjennom lederen (Young & Freedman, 2015b, s. 844–849). Den potensielle energien E_p til et legeme med masse m som befinner seg i en høyde h over bakken er gitt ved $E_p = mgh$, der g er tyngdeakselerasjonen (Young & Freedman, 2015a, s. 227–228).

Potensfunksjoner

Potensfunksjoner er funksjoner på formen $f(x) = x^k$, der k er en konstant (Edwards & Penney, 2002, s. 24). Verdien for konstanten k bestemmer egenskapene til funksjonen. Nedenfor følger en kort oversikt over hva ulike verdier for k har å si for funksjonen $f(x) = x^k$.

1. k positivt heltall: Funksjonen er definert for alle reelle verdier av x.
    a. k et partall: Grafen ligner på grafen til x^2. $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$ medfører at $f(x) \to \infty$.
    b. k et oddetall: Grafen ligner på grafen til x^3. $x \to \infty$ medfører at $f(x) \to \infty$, mens $x \to -\infty$ medfører at $f(x) \to -\infty$.
2. k negativt heltall: $f(x) = x^k = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, der m er et positivt heltall. Funksjonen er definert for alle reelle verdier av x, bortsett fra $x = 0$.
    a. k et partall: Funksjonen er alltid positiv. $x \to \infty$ og $x \to -\infty$ medfører at $f(x) \to 0$. $x \to 0$ medfører at $f(x) \to \infty$.
    b. k et oddetall: $x \to \infty$ medfører at $f(x) \to 0$ fra positiv side. $x \to -\infty$ medfører at $f(x) \to 0$ fra negativ side. $x \to 0$ fra positiv side medfører at $f(x) \to \infty$. $x \to 0$ fra negativ side medfører at $f(x) \to -\infty$.
3. k et rasjonalt tall: $f(x) = x^k = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, der m og n er heltall.
    a. n oddetall, og m partall eller oddetall: $f(x)$ er definert for alle reelle tall x, bortsett fra 0 dersom $m < 0$.
    b. n partall, og m partall: $f(x)$ er definert for alle reelle tall x, bortsett fra 0 dersom $m < 0$.
    c. n partall, og m oddetall: $f(x)$ er definert for alle positive reelle tall x.
4. k et irrasjonalt tall: $f(x) = x^k$ er definert for $x \geq 0$ (Edwards & Penney, 2002, s. 24–25).

Potensfunksjoner brukes blant annet i modellering av fenomenet allometrisk vekst. Når en organisme vokser, er det sjelden at alle deler av kroppen vokser med samme hastighet. Organismen endrer dermed form, og dette kaller vi for allometrisk vekst. La $y = y(t)$ være størrelsen til et organ ved tiden t, og la $x = x(t)$ være størrelsen til hele organismen ved tiden t. Forsøk viser at x og y ofte tilnærmet er knyttet sammen med $y = cx^k$. c er en konstant som avhenger av måleenhetene til x og y, mens k kalles for allometrikonstanten (Gulliksen et al., 2022, s. 141). Et eksempel på allometrisk vekst er hvordan menneskehodet vokser saktere enn kroppen (Shingleton, 2010). Dette kalles negativ allometrisk vekst, og i modellen vil k være mindre enn 1 (Voje, 2022).

Eksponentialfunksjoner

Eksponentialfunksjoner er funksjoner på formen $f(x) = b^x$, der b er et reelt positivt tall, og $b \neq 1$. b kalles for grunntallet til funksjonen. Den viktigste eksponentialfunksjonen er den naturlige $f(x) = e^x$, med $e = 2{,}71828$ som grunntall (Briggs & Cochran, 2011, s. 10).

Den naturlige eksponentialfunksjonen kan utledes fra den naturlige logaritmefunksjonen. Den naturlige logaritmen til et tall $x > 0$ er definert som $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Definisjonsmengden er $(0, \infty)$, mens verdimengden er $(-\infty, \infty)$. Den deriverte til $\ln(x)$ følger fra analysens fundamentalteorem og er gitt ved

$$\frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{x}, \text{ for } x > 0$$

Siden $\frac{1}{x}$ er definert for alle $x > 0$, er $\ln(x)$ deriverbar for alle $x > 0$. Det følger da at $\ln(x)$ er kontinuerlig i hele definisjonsmengden. I tillegg er funksjonen strengt voksende ettersom $\frac{1}{x} > 0$ når $x > 0$. $\ln(x)$ har dermed en invers funksjon, og dette er den naturlige eksponentialfunksjonen e^x. Definisjonsmengden er $(-\infty, \infty)$, og verdimengden er $(0, \infty)$, ettersom henholdsvis verdimengden og definisjonsmengden til $\ln(x)$ er $(-\infty, \infty)$ og $(0, \infty)$. Siden $\ln(x)$ og e^x er inverse funksjoner, har vi sammenhengene:

$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

$e^{\ln(x)} = x$ for $x > 0$, og $\ln(e^x) = x$ for alle x (Briggs & Cochran, 2011, s. 387–392).

Fra den naturlige eksponentialfunksjonen kan vi utlede eksponentialfunksjoner med andre grunntall. Vi har sammenhengen

$$b^x = \left(e^{\ln(b)}\right)^x = e^{x\ln(b)}$$

Noen sentrale egenskaper ved funksjonen b^x er listet nedenfor:

1. Definisjonsmengden er lik alle de reelle tallene. Siden verdimengden til e^x er $(0, \infty)$, er verdimengden til b^x lik $(0, \infty)$. Dette er på grunn av sammenhengen $b^x = e^{x\ln(b)}$.
2. $b^0 = e^{0 \cdot \ln(b)} = e^0 = 1$.

3. Hvis $b > 1$, er $\ln(b) > 0$, som medfører at $b^x = e^{x\ln(b)}$ er en voksende funksjon.
4. Hvis $0 < b < 1$, er $\ln(b) < 0$, som medfører at $b^x = e^{x\ln(b)}$ er en minkende funksjon (Briggs & Cochran, 2011, s. 399–400).

Den deriverte av $f(x) = e^x$ er lik e^x. Den naturlige eksponentialfunksjonen er altså sin egen derivert (Briggs & Cochran, 2011, s. 393). Den deriverte av $g(x) = b^x$ er gitt ved

$\frac{d}{dx}(b^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln(b)}\right) = e^{x\ln(b)} \cdot \ln(b) = b^x \cdot \ln(b)$ (Briggs & Cochran, 2011, s. 402).

Fenomener som endrer seg eksponentielt kan modelleres med funksjoner på formen $y(t) = y_0 e^{kt}$, der t er tiden, $y_0 = y(0)$, og k er en konstant. Denne funksjonen har følgende egenskaper:

1. $y'(t) = y_0 k e^{kt} = ky(t)$. Endringen er altså proporsjonal med funksjonsverdien.
2. $\frac{1}{y(t)} y'(t) = \frac{ky(t)}{y(t)} = k$. Den relative endringen er konstant. Dette betyr at det er en konstant prosentvis endring (Briggs & Cochran, 2011, s. 409).

Eksponentialfunksjoner kan brukes til modellering av fenomener som følger en eksponentiell utvikling. Adams og Essex (2013) skriver at «Many natural processes involve quantities that increase or decrease at a rate proportional to their size» (s. 185). Som eksempler nevner de vekst av bakteriekulturer, vekst av beløp som øker med en prosentvis rente, og nedbrytning av radioaktivt materiale.

Kort om den historiske utviklingen av eksponentialfunksjoner

Leonard Euler (1707–1783) utforsker i sin bok *Introduction to Analysis of the Infinite: Book I* (1748) eksponential- og logaritmefunksjoner. I kapittel VI «On Exponentials and Logarithms» starter han med å undersøke potenser på formen a^z, der a er en konstant, og z er en variabel. Først ser han på ulike verdier av z, og han forklarer at a^{-1}, a^{-2}, $a^{-3}\ldots$ henholdsvis er lik $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ ... Videre ser han på tilfellet der $z \in \mathbb{Q}$, som $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{3}{4}}$. Når man tar roten av et tall, kan man få to eller flere verdier. For å unngå dette forklarer Euler at «However we will consider only their primary value, that is the real positive values since a^z is to be thought of as a single valued function» (Euler, 1748/1988, s. 76).

Deretter tar han for seg ulike verdier av a. Dersom $a > 1$ og $z > 0$, vil a^z øke når z øker, og dersom z går mot uendelig, vil a^z gå mot uendelig. Dersom $z < 0$, vil $a^z < 1$, og hvis z går mot negativ uendelig, vil a^z nærme seg null. For $0 < a < 1$ og $z > 0$, vil a^z minke når z øker. a^z vil derimot øke dersom $z < 0$ og blir mer negativ. Etter å ha undersøkt tilfellet der $a < 0$ og ulempene dette medfører, konkluderer Euler med at a^z kun er definert for positive verdier av a. Til slutt definerer han funksjonen $y = a^z$ (Euler, 1748/1988, s. 76–77).

Videre i samme kapittel definerer han logaritmefunksjonen, basert på eksponentialfunksjonen. Ifølge Edwards (1979) var dette første gangen logaritmer ble forstått eksplisitt som eksponenter (s. 272). Euler forklarer at:

> [...] given a positive value for y, we would like to give a value for z, such that $a^z = y$. This value of z, insofar as it is viewed as a function of y, it is called the LOGARITHM of y. The discussion about logarithms supposes that there is some fixed constant to be substituted for a, and this number is the *base* for the logarithm. Having assumed this base, we say the logarithm of y is the exponent in the power a^z such that $a^z = y$. It has been customary to designate the logarithm of y by the symbol log y. If $a^z = y$, then $z = \log y$. (Euler, 1748/1988, s. 78–79)

I kapittel VII «Exponentials and Logarithms Expressed through Series» uttrykker Euler potenser og logaritmer som uendelige rekker. Ved hjelp av rekkeutvikling kommer han frem til sammenhengene $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ og $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$, og han forklarer at når man velger dette grunntallet, kalles logaritmefunksjonen for den naturlige (Euler, 1748/1988, s. 92–100).

Referanser vedlegg

Adams, R. A. & Essex, C. (2013). *Calculus 1: Selected chapters from: Calculus: A complete course, eighth edition*. Pearson.

Briggs, W. L. & Cochran, L. (2011). *Calculus*. Pearson.

Edwards, C. H. Jr. (1979). *The historical development of the calculus.* Springer-Verlag.

Edwards, C. H. & Penney, D. E. (2002). *Calculus* (6. utg.). Prentice Hall.

Euler, L. (1988). *Introduction to analysis of the infinite: Book I* (J. D. Blanton, Overs.) Springer. (Opprinnelig arbeid utgitt i 1748). https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1021-4

Gulliksen, T. H., Hashemi, A. M. & Hole, A. (2022). *Matematikk i praksis* (7. utg.). Universitetsforlaget.

Hildrum, F. (2022, 21. september). *Derivasjon*. Institutt for matematiske fag, NTNU: TMA4100 Matematikk 1. https://wiki.math.ntnu.no/tma4100/tema/differentiation

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2022, 25. januar). *Generell form for andregradsfunksjoner*. Nasjonal digital læringsarena, NDLA. https://shorturl.at/kwAFH

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Jacobsen, R. B. & Pedersen, T. (2020a). *Sinus 1T: Matematikk* (4. utg.). Cappelen Damm.

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Jacobsen, R. B. & Pedersen, T. (2020c). *Sinus 1T: Matematikk Utforskningsark [MPS]*.

Shingleton, A. (2010). Allometry: The study of biological scaling. *Nature Education Knowledge, 3*(10). https://www.nature.com/scitable/knowledge/library/allometry-the-study-of-biological-scaling-13228439/

Vianor. (u.å.). *Bremselengde – hva er det?* Hentet 19. februar 2023 fra https://vianor.no/dekkinformasjon/fakta-om-dekk/bremselengde/

Voje, K. L. (2022, 16. september). Allometri. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/allometri

Weisstein, E. W. (u.å.). Linear function. I *MathWorld*. Hentet 27. februar 2023 fra https://mathworld.wolfram.com/LinearFunction.html

Young, H. D. & Freedman, R. A. (2015a). *Sears & Zemansky's University Physics with Modern Physics: Scandinavian Edition Volume 1* (14. utg.). Pearson.

Young, H. D. & Freedman, R. A. (2015b). *Sears & Zemansky's University Physics with Modern Physics: Scandinavian Edition Volume 2* (14. utg.). Pearson.

NTNU

Kunnskap for en bedre verden