Anniken Gjengår

Resonnering og argumentasjon i matematikkbøker.

En undersøkelse av tre norske læreverk i matematikk.

Masteroppgave i fagdidaktikk studieretning matematikk
Veileder: Anita Valenta
Januar 2022

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Anniken Gjengår

Resonnering og argumentasjon i matematikkbøker.

En undersøkelse av tre norske læreverk i matematikk.

Masteroppgave i fagdidaktikk studieretning matematikk
Veileder: Anita Valenta
Januar 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne studien har jeg undersøkt oppgaver og forklaringer innen geometri i læreverk som bygger på den nye læreplanen, LK20. Hensikten med studien er å få innsikt i hvilke muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon som legges til rette for i læreverkene. I den nye læreplanen er seks av ti kompetansemål knyttet til geometri på sjette trinn. Forskningsspørsmålet jeg stiller i denne studien er: Hvilke muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon finnes innen geometri i tre læreverk i matematikk for 6. trinn?

I studien har jeg benyttet mixed-methods som metode for å undersøke både frekvens og trekk ved oppgaver og forklaringer innen geometri i tre læreverk. Datamaterialet er undersøkt ved bruk av innholdsanalyse. I studien har jeg brukt et rammeverk utviklet av Otten et al. (2014). Rammeverket angir hvilke muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon som finnes i geometri i lærebøker.

Studien viser hvordan rammeverket kan brukes til å identifisere hvordan den nye læreplanen blir behandlet i de nye matematikkbøkene med tanke på arbeid med resonnering og argumentasjon. Resultatene fra studien viser at det finnes noen muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon innen geometri i lærebøker for sjette trinn. Studien viser også at størsteparten av oppgavene i lærebøkene handler om arbeid med ikke-gyldige bevis og hypoteser. Nesten ingen oppgaver ber om en spesifikk metode som skal benyttes i argumentasjon. De fleste forklaringene inneholder empirisk argumentasjon eller ingen begrunnelse for det som står.

Nøkkelord: resonnering og argumentasjon, bevis, lærebøker og læreplan.

Abstract

In this study I have examined tasks and explanations within geometry in textbooks based on the new curriculum, LK20. The purpose of the study is to gain insight into what opportunities textbooks facilitate, when it comes to working with reasoning and argumentation. In the new curriculum, six out of ten competence targets are linked to geometry in the 6th grade. The research question I ask in this study is: *What opportunities for working with reasoning and argumentation exist within geometry in three 6th grade mathematics textbooks?*

In this study, I have used mixed-methods as a method to examine both the frequency and features of tasks and explanations within geometry in three textbooks. The data material has been examined using content analysis. In this study, I have used a framework developed by Otten et al. (2014). The framework specifies opportunities for working with reasoning and argumentation in geometry in textbooks.

The study shows how the framework can be used to identify how the new curriculum is treated in the new mathematics textbooks with regard to working with reasoning and argumentation. The results of the study show that there are some opportunities for working with reasoning and argumentation within geometry in textbooks for the 6th grade. The study also shows that most of the tasks in the textbooks provide for working with non-valid proofs and conjectures. Almost no tasks ask for a specific method to be used in argumentation. Most of the explanations contain empirical argumentation or no justification for what is stated.

Keywords: reasoning and argumentation, evidence, textbooks and curriculum.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på to år som student innen master i fagdidaktikk - studieretning matematikk. Etter å ha jobbet 19 år som lærer, har studentlivet bydd på et positivt, men og til tider hektisk avbrekk. To år går veldig fort, og tanken om at jeg ikke lenger skal tilbringe mesteparten av tiden på å sitte foran pc-en i stua føles nesten litt rar.

Ønsket om å få lov til å ta en mastergrad innenfor matematikkdidaktikk, er noe jeg har gått med lenge. Endelig har ønsket mitt gått i oppfyllelse, og jeg vil derfor rette en takk til rektor Jan Tilset Larsen som har bidratt til at dette har blitt mulig for meg. Samtidig vil jeg takke arbeidsgiver som godkjente meg som søker til videreutdanningsprogrammet *Kompetanse for Kvalitet,* og Utdanningsdirektoratet som har gitt støtte til masterutdanningen min gjennom dette programmet.

Å studere til en mastergrad har gitt meg ny giv som matematikklærer. Det har vært to innholdsrike år som student, der jeg har fått god kunnskap om både didaktikk, pedagogikk og forskning. Dette er noe jeg vil ta med meg videre fremover i yrket som lærer. Jeg er inspirert til å fortsette å holde meg oppdatert på forskningsfeltet i matematikkdidaktikk, og jeg håper jeg opprettholder denne inspirasjonen og fortsetter å lese aktuelle artikler om forskning og teori. Takk til kunnskapsrike og engasjerte lærere på NTNU, som har sørget for lærerik, interessant og utviklende undervisning. Motivasjonen til å ha et fokus på geometri, og resonnering og argumentasjon i masteroppgaven, kommer fra dere, og jeg har hatt stor nytte av deres forelesninger og arbeidskrav i utviklingen av oppgaven.

Jeg vil også takke min veileder, Anita Valenta, for god og verdifull veiledning. Du er en kilde til inspirasjon, og en utrolig god støttespiller. Takk for gode konstruktive tilbakemeldinger og motiverende ord.

En takk rettes også til medstudent Hilde Rotabakk. Du har vært en utrolig god sparringspartner, og ingen har vel pushet meg så mye som du.

Til slutt vil jeg sende en stor takk til familien min som har gitt meg tid og spillerom til å drive med studiene. Jeg er veldig takknemlig for at dere har vært så tålmodige og positive hele veien. Tusen takk til min samboer, Rune Mellingseter, for at du har vært min bauta i denne perioden. Din støtte har vært uvurderlig!

«Den pytagoreiske læresetning,» sa Lillebror. «Tror du det er en sykdom?» sa Knerten. «Det høres så nifst ut.»

Anne-Cath Vestly

Trondheim, mai 2023

Anniken Gjengår

Innhold

Figurer

Tabeller

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studiet

En av de meste bemerkelsesverdige gaver den menneskelige sivilisasjonen har arvet fra antikkens Hellas er oppfatningen om matematisk bevis. Euclids elementer har holdt seg gjennom årtusener, og til tross for innovasjoner innen matematikken, styrer det fortsatt mønstrene for matematisk kommunikasjon (Babai, 1992, referert i Harel & Sowder, 2007).

Arbeid med bevis er med andre ord noe som i flere tusen år har vært en sentral del av matematisk arbeid, der matematikere jobber med å finne sammenhenger og etablere ny matematisk kunnskap. Innen forskningsfeltet for matematikkdidaktikk hevder flere forskere at arbeid med bevis også må spille en sentral rolle i undervisning i skolen (se f.eks. Hanna, 1995; Stylianides, 2007). Ved å inkludere dette i undervisningen får elevene den samme muligheten som matematikere til å se sammenhenger og etablere kunnskap innenfor matematikk (Stylianides, 2008). Ball et al. (2002) hevder at det ikke bare er viktig å drive med bevis fordi det er et verktøy for å skape matematisk forståelse, men i tillegg er det "hjertet i matematisk arbeid" (s. 907). Dette må vel med andre ord bety at matematikk ikke kan eksistere uten bevis. Når man arbeider med bevis, er det ikke kun for å bevise at noe er sant, det er også for å bevise hvorfor noe er sant, og i på den måten utvikler man matematisk forståelse (Hanna, 2000). Bevis gir elevene kunnskap om nye metoder, verktøy, strategier og begreper de kan bruke i andre kontekster (Valenta & Enge, 2020, s. 3) Det kan dermed pekes på to argument for å inkludere bevis i skolen. For det første bør undervisning i ethvert fag i skolen respektere faget slik matematikere driver med det (Ball & Bass, 2003). Det andre argumentet er det pedagogiske aspektet med at arbeid med bevis kan skape læring i matematikk.

Forskere innen matematikkdidaktikk er enige om at arbeid med bevis i skolen er viktig, men forskningsfeltet er ikke nødvendigvis enige i hva som karakteriserer et gyldig bevis i barneskolen. Stylianides (2008) hevder at bevis i skolen ofte kun har handlet om å lære formelle bevis, for eksempel ved at bevis fremstilles ved hjelp av algebraiske symboler. Dersom elevene kun lærer å gjengi formelle bevis, går de glipp av viktige prosesser som er med på å skape forståelse. Stylianides (2008) bruker samlebegrepet bevis- og -resonnering (reasoning- and- proving). I hans definisjon peker han på at bevis kan uttrykkes på ulike måter, og dermed kan bevis også være tilpasset barnetrinnet.

Resonnering, bevis og argumentasjon, er ord som ofte kommer sammen (Valenta & Enge, 2020). I denne studien vil jeg bruke begreper fra Jeannotte og Kieran (2017). De definerer matematisk resonnering som et overordnet begrep, som omfatter argumentasjon og bevis, slik at det å argumentere og det å bevise, er ulike prosesser innenfor resonnering.

De siste tiårene har arbeid med bevis blitt fremhevet i læreplaner i flere land (Valenta & Enge, 2020). Dette er en trend som også gjenspeiles i den nye norske læreplanen, LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2019). Valenta og Enge (2020) har undersøkt hvordan kompetanser i den nye læreplanen knyttet til arbeid med bevis fremkommer på trinn 1–

10. Analysen viser at læreplanen legger opp til at elever skal arbeide med flere bevisrelaterte kompetanser, som å utforske og argumentere i matematikk, og arbeide med ulike representasjoner og sammenhenger. Bevis nevnes ikke eksplisitt i den trinnspesifikke delen av læreplanen, men står nevnt i kjerneelementet *resonnering og argumentasjon*. I den nye læreplanen finner man altså resonnering og argumentasjon som et av kjerneelementene i matematikkfaget, og sammen med læreplanen for øvrig, legger dette grunnlag for utvikling av kompetanser knyttet til arbeid med bevis. Det at resonnering og argumentasjon står som et kjerneelement, betyr at arbeidet med resonnering og argumentasjon skal integreres i all matematikkundervisning på alle skoletrinn, både i grunnskolen og videregående skole. At resonnering og argumentasjon skal inkluderes i matematikkundervisningen allerede fra første skoleår, samstemmer med matematikkdidaktisk forskning rettet mot barnetrinnet. Studier har vist at elever på lave skoletrinn, og også i barnehagen, kan resonnere rundt matematiske sammenhenger, og at de kan argumentere for sine resonneringer i tilfeller der de blir oppfordret og støttet i slikt arbeid (Ball & Bass, 2003).

Tidligere forskning rundt resonnering og argumentasjon har ofte dreid seg om hvordan slike aktiviteter blir gjennomført i klasserommet, eller hvordan lærere og elever forstår resonnering og argumentasjon. Det mangler imidlertid studier om hvilke muligheter for aktiviteter knyttet til dette som finnes i matematikkbøkene (Stylianides, 2009). Dette til tross for at lærebøker i matematikk spiller en stor rolle for hvordan det undervises i faget (Fan et. al., 2013; Stylianides, 2009). Her er Norge intet unntak. Mellom 2005 og 2012 ble det gjennomført fire undersøkelser av læremidler i norsk skole, og disse undersøkelsene viser i hovedsak at den papirbaserte læreboka har en sentral rolle og dominerer undervisningen (Gilje et al., 2016). I Norge har altså læreboka en sterk posisjon i klasserommet, og matematikkbokas sentrale rolle er spesielt fremtredende (Kongelf, 2019). Det vil si at det som blir undervist i klasserommet, ofte blir styrt av læreboka i matematikk. De siste 15 årene har nasjonal forskning vist at matematikk er et fag preget av helklasseundervisning og individuelt arbeid (Kongelf, 2019). Gilje et al. (2016) mener det er rimelig å anta at vanlig praksis er forklaring av lærer på tavla, etterfulgt av at elevene jobber med oppgaver i lærebok, oppgavehefte og kladdebok (s. 68). Det er derfor nærliggende å tro at innholdet i matematikkboka, og metodene den tilbyr, spiller en stor rolle for hva elevene får av undervisning. Det betyr også at lærerens undervisning og elevenes læring ser ut til å bli påvirket av hva som presenteres i læreboka, i tillegg til hvordan det presenteres, og hvor mye (Kongelf, 2019).

Sammen med at den nye læreplanen trådte i kraft i 2020, ble det skrevet nye lærebøker i de ulike fagene. Når man underviser i matematikk, fungerer læreboka som en link mellom læreplan og undervisning i timene (Fan et. al, 2013). Det betyr at matematikkboka er et viktig bindeledd. Det ser ut til at mange lærere anser læreboka for å "sikre" at kompetansemålene i et fag blir dekket (Gilje et. al., 2016, s. 27). Det er derfor viktig at de nye matematikkbøkene sørger for at elevene oppnår kunnskap og kompetanse slik læreplanen har tenkt.

1.2 Egen motivasjon for studien

Jeg har nå jobbet som lærer i matematikk på barneskolen i 19 år. Med dette som bakgrunn har jeg mange års erfaring med undervisning i matematikk, og bruk av matematikkbøker i undervisningen. Jeg synes det er spennende med ny læreplan, og jeg mener læreplanen har blitt forbedret med tanke på nytt innhold i form av blant annet kjerneelementer og dybdelæring. I forbindelse med ny læreplan har vi på skolen der jeg er ansatt, vært gjennom flere vurderingsrunder for å velge ut lærebøker i de ulike fagene. Vi som underviser i matematikk har sett gjennom flere bøker, for å vurdere hvilket læreverk i matematikk som vi syntes var best egnet.

Mine to år som masterstudent har gitt meg mye ny kunnskap og ny giv som lærer i matematikk. Jeg har spesielt fattet interesse for arbeid med resonnering og argumentasjon. Dette kommer fra arbeid med både historisk og filosofisk matematikk, og fagdidaktikk. Med andre ord kommer interessen for arbeid med resonnering og argumentasjon både fra et historisk-filosofisk ståsted, i tillegg til det didaktiske. Arbeid med bevis er tett knyttet til sammenhenger i geometri, og av den grunn nevnte jeg innledningsvis Euklids elementer. Selv om resonnering og argumentasjon skal være inkludert i all matematikkundervisning, er det geometri som historisk sett henger sammen med arbeid med bevis. Arbeid med bevis er dermed også mest utbredt innenfor geometri (Otten et al., 2014). Argumentasjon blir også nevnt eksplisitt i kompetansemålene i læreplanen, i forbindelse med geometri. Som masterstudent har jeg ervervet meg kunnskap om hvor viktig arbeid med resonnering og argumentasjon er for utviklingen av forståelse og matematisk kompetanse hos elevene. Dette, sammen med resonnering og argumentasjon som et av kjerneverdiene i den nye læreplanen, har bidratt som motivasjonsfaktor bak studien.

Jeg har i samtale med mine kolleger erfart at et fåtall vet hva det vil si å bruke resonnering og argumentasjon i undervisningen. Utsagn som dette blir også bekreftet av studier som har undersøkt læreres oppfatning av hvordan man kan bruke resonnering og argumentasjon i undervisningen. Slike undersøkelser viser blant annet at lærere ikke forstår den viktige rollen bevis spiller i skolen, og spesielt ikke den forklarende funksjonen (Harel & Sowder, 2007). Det kan være vanskelig å undervise i resonnering og bevis, om man ikke har en grunnleggende tanke om hvorfor man skal gjøre det, annet enn at det står i læreplanen. I tillegg er det vanskelig å undervise i noe man har lite kompetanse i. Dette fører nok til at det elevene får møte av muligheter for å arbeide med resonnering og argumentasjon, stort sett kommer fra matematikkbøkene. Ved denne studien kan jeg bidra til økt bevissthet og kompetanse rundt det å arbeide med bevis, i form av resonnering og argumentasjon. I tillegg ønsker jeg å undersøke hvilke muligheter for slikt arbeid som finnes i matematikkbøkene. Om lærere har liten kompetanse i, eller ikke forstår hensikten, resonnering og argumentasjon i undervisningen, er det viktig at dette blir ivaretatt i matematikkbøkene.

1.3 Forskningsspørsmål

Jeg har av flere grunner valgt å holde meg til begrepene resonnering og argumentasjon i denne studien. For det første er det dette begrepet som blir benyttet i den norske læreplanen. For det andre er det å bevise en form for argumentasjon som inneholder spesielle egenskaper.

Formålet med studien er å undersøke hvilke muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon som finnes i de nye lærebøkene i matematikk. Tanken bak formålet er både hvordan arbeid med resonnering og argumentasjon kan utvikle læring i matematikk, og at det står som et kjerneelement i den nye læreplanen. Med hensyn til at det som oftest er læreboka som styrer undervisningen, i tillegg til at den fungerer som en link mellom læreplan og undervisning, vil dette gi nyttig kunnskap.

Forskningsspørsmålet jeg stiller i denne studien er derfor:

Hvilke muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon finnes innen geometri i tre læreverk i matematikk for 6. trinn?

For å finne svar på forskningsspørsmålet mitt, definerer jeg ordet muligheter både som hvor mange, og hvilke, muligheter som finnes. Det vil blant annet si at jeg måler muligheter i både frekvens, og type eller form. Hvilke typer eller former for muligheter jeg ser etter, kommer jeg nærmere inn på i teorikapitlet.

Jeg har valgt å analysere både oppgaver og det jeg har valgt å kalle forklaringsbokser. Forklaringsbokser er for eksempel instrukser, eksempler eller løsningsforslag som står i matematikkbøkene. Jeg vil utdype dette nærmere i metodekapittelet. Årsaken til at jeg har valgt å analysere både oppgaver og forklaringsbokser, er fordi begge deler kan tilby muligheter for elevers deltakelse i aktiviteter relatert til arbeid med resonnering og bevis (Otten et el., 2014).

For å svare på forskningsspørsmålet har jeg gjennomført analyse av alle forklaringsbokser og oppgaver i kapitler relatert til geometri på 6. trinn. Jeg har valgt tre læreverk som kommer fra de største lærebokforlagene i Norge. Læreverket Multi har fordelt kapitlene som omhandler geometri på to grunnbøker, og av den grunn har jeg gjort undersøkelser i fire forskjellige matematikkbøker. I denne studien skiller jeg derfor mellom læreverk og matematikkbok eller lærebok, der læreverk henviser til alt materialet utgitt innen faget fra samme forlag, mens matematikkbok eller lærebok henviser til en bestemt bok innenfor læreverket. Jeg har kun undersøkt det som forlagene kaller grunnbok eller elevbok, som anses som hovedboka i læreverkene. Det vil si at jeg ikke har inkludert tilleggsmateriale som for eksempel oppgavebøker eller nettsteder. Jeg har heller ikke inkludert lærerveiledninger i denne studien.

Jeg har valgt å avgrense studien til å omfatte temaet geometri. Bakgrunnen for dette henger mye sammen med motivasjonen for å arbeide med resonnering og argumentasjon i geometri. Selv om jeg er enig i at resonnering og argumentasjon hører sammen med alle tema innenfor matematikken, slik forskere og læreplanen viser til, er det mange muligheter til slikt arbeid innenfor geometri. Valget med å undersøke dette på 6. trinn, henger sammen med at geometri er det mest sentrale temaet på dette trinnet. I tillegg er dette et av få trinn der argumentasjon eksplisitt nevnes i et av kompetansemålene. Jeg har definert og identifisert hvilke forklaringsbokser og oppgaver som kan sies å gi muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon innen geometri på 6. trinn. Videre jeg har benyttet meg av mixed-methods som metode, hvilket vil si at jeg har undersøkt både kvantitative og kvalitative aspekter.

Studiens rammeverk som er brukt til å besvare forskningsspørsmålet, er hentet fra Otten et al. (2014) sin studie, og er utviklet spesielt med tanke på å identifisere muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon innenfor geometri i matematikkbøker. Rammeverket inneholder kategorier som hjelper til med å identifisere hvilke muligheter som finnes.

1.4 Oppgavens videre oppbygning

I kapittel 2 vil jeg gjøre rede for begreper som er relatert til resonnering og argumentasjon, og hva dette betyr i skolen. I tillegg vil jeg gjøre en nærmere utgreiing av rammeverket. Til slutt vil jeg trekke frem relevant forskning på resonnering og argumentasjon i lærebøker i matematikk. I kapittel 3 beskriver jeg forskningsmetode og metode for datainnsamling, i tillegg til analyse, som er med på å danne grunnlaget for denne studien. Her vil jeg også kommentere studiens kvalitet gjennom validitet og reliabilitet. I kapittel 4 presenterer jeg analysen av forklaringsbokser og oppgaver fra lærebøkene i matematikk. I kapittel 5 avsluttes studien med en diskusjon der jeg drøfter studiens funn opp mot relevant forskning og teori. En avsluttende konklusjon presenteres i kapittel 6, med mulige virkninger for videre forskning.

2 Teori

I denne studien undersøker jeg hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis som finnes innen temaet geometri i fire matematikkbøker for 6. trinn. Sentrale begreper i studien er resonnering, argumentasjon og bevis. Jeg vil i dette kapittelet redegjøre nærmere for dette, i tillegg til andre relevante begrep. Deretter vil jeg presentere rammeverket til Otten et al. (2014), som blir benyttet under analysen. Til slutt presenterer jeg relevant forskning på lærebøker som et grunnlag for den videre diskusjonen rundt resonnering og bevis.

2.1 Resonnering, argumentasjon og bevis

Som nevnt i innledningen har bevis i matematikken har eksistert i tusener av år, og forskere innenfor matematikkdidaktikk mener arbeid med bevis også må få plass allerede i grunnskolen fordi det bidrar til å utvikle kunnskap og forståelse i matematikk (Valenta & Enge, 2020). For å få et helhetlig perspektiv på undervisning med bevis, bør man inkludere matematiske og historisk-epistemologiske faktorer, kognitive, og sosiologiske faktorer (Harel & Sowder, 2007). Det vil si at man både bør innlemme elementer som hva et bevis er, hvilke oppfatninger elever har av bevis, og hvorfor man bør inkludere bevis i undervisningen i skolen. I avsnittene under vil slike elementer være en naturlig del i redegjørelsen av begreper og teori knyttet til bevis i undervisningen.

2.1.1 Matematisk resonnering

Ordet resonnering blir brukt på ulike måter av ulike forskere. Det er som regel ikke definert hva det betyr, fordi det generelt er forventet at alle forstår hva å resonnere innbefatter (Jeannotte & Kieran, 2017). Jeg har valgt å følge Jeannotte og Kieran (2017) sin definisjon av matematisk resonnering som et overordnet begrep som omfatter både argumentasjon og bevis. De har etter en omfattende litteraturstudie kommet frem til en modell som blant annet ser på prosesser som handler om å søke etter likheter og ulikheter for å formulere en matematisk påstand, og prosesser som handler om å finne ut om den gitte påstanden stemmer eller ikke. Slike prosesser er beskrevet av Stylianides (2008) som aktiviteter der elevene jobber med identifisering av mønster, formulere hypoteser, formulere ikke-gyldige bevis og formulere bevis.

Når elevene jobber med resonnering, handler altså en del av det om at de utvikler en matematisk påstand som de skal finne ut om er sann eller ikke, og deretter begrunne hvorfor. Ball et al. (2002) deler derfor resonneringsprosessen i to, henholdsvis undersøkelse og argumentasjon. Delen av resonneringsprosessen som handler om å undersøke, er den der man oppdager og utforsker nye ideer. Den delen av resonneringsprosessen som handler om argumentasjon, er der man forsøker å bevise matematiske påstander. Når elevene utvikler matematiske påstander kan enkelte fremstå som åpenbart sanne, blant annet at "60 har en tier mer enn 50", mens noen påstander kan virke mer usikre. Påstander som ikke umiddelbart fremstår som sanne, kalles hypoteser (Enge & Valenta, 2022). En hypotese er dermed en antakelse om at en matematisk påstand kan være sann, men at det finnes usikkerhet rundt sannheten (Stylianides, 2008).

Formulering av ikke-gyldige bevis, og bevis, er aktiviteter som kan tilknyttes prosesser rundt det å argumentere og å bevise. Jeannotte og Kierans (2017) beskrivelse av matematisk resonnering er dermed i samsvar med hvordan Stylianides (2008) betrakter matematisk resonnering. Han bruker begrepet resonnering- og- bevis (reasoning- and-proving;) som et samlebegrep for å understreke at aktiviteter som omhandler disse er integrert i hverandre. Ved at resonnering og bevis henger tett sammen, gis det muligheten til et bredere syn på viktige prosesser relaterte til arbeid med bevis enn om man hadde sett på dem separat, og argumentasjon blir dermed ofte satt i sammenheng med en større matematisk handling, som for eksempel å resonnere- og -bevise (Stylianides et. al, 2016).

2.1.2 Matematisk bevis - en form for argumentasjon

I LK20 står det i beskrivelsen av kjerneelementet resonnering og argumentasjon at "Argumentasjon i matematikk handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige". (Valenta & Enge, 2020) har i sin studie undersøkt hvilke kompetanser i LK20 knyttet til arbeid med bevis som fremkommer i læreplanen for 1. - 10. trinn. Der kom de frem til at ingen av formuleringene i kompetansemålene eller underveisvurderinga knyttet til enkelttrinn nevner eksplisitt bevis eller det å bevise. Slik ordet beviser står i dette kjerneelementet, kan det tenkes at ordet bevis i læreplanen blir brukt som en type argumentasjon. Dette samsvarer med hva mange i forskningsfeltet også sier.

I følge Stylianides et. al (2016) er forskere stort sett enige om at begrepet argumentasjon vanligvis blir brukt til å beskrive kommunikasjonen eller retoriske virkemidler (ikke nødvendigvis matematiske), brukt av individer eller grupper for å overbevise andre om en påstand er sann eller usann (s. 316). Når man forsøker å bevise om en påstand er sann eller ikke, vil man argumentere for det man finner ut. Matematisk argumentasjon handler derfor om å utvikle et argument der man prøver å overbevise seg selv eller andre om en matematisk påstand er sann eller usann (Jeannotte & Kieran, 2017). Dette skjer både som en kognitiv prosess der man konstaterer sannheten overfor seg selv, og som en sosial prosess der man søker å overbevise andre. Dersom argumentet tilfredsstiller bestemte krav, kalles det et bevis. (Mariotti, 2006; Stylianides, 2007).

For noen elever kan for eksempel et argument basert på at "læreren har sagt det er sånn" virke overbevisende, men et slikt argument er ikke matematisk gyldig. Forskere innen matematikkdidaktikk har lenge vært søkt etter å prøve å finne en nøyaktig definisjon av hva undervisning og læring av argumentasjon innebærer. (Balacheff, 2002) hevder at forskningsfeltet har vært hemmet av mangel på konsensus om hva ordene "bevis" og "argumentasjon" betyr i matematikkfaget i skolen. Stylianides (2007) hadde ønske om å gjøre noe med denne mangelen på konsensus ved å presentere en definisjon på hva bevis og argumentasjon i skolen er. En definisjon som nå er mye sitert i forskning på resonnering argumentasjon i skolen (Bieda et al., 2014)

I følge Stylianides (2007) sin definisjon er et bevis en type matematisk argument, for eller mot en matematisk påstand med bestemte karakteristikker:

- Argumentasjonen må bruke ord og begreper som er kjente, aksepterte og forståelige for et gitt fellesskap, for eksempel i en klasse.
- Argumentasjon og resonnering som eleven bruker må være av slik art at den er gyldig og kjent for, eller mulig å forstå for deltakerne i fellesskapet.

- Det må kommuniseres ved bruk av uttrykksformer (representasjonsformer) som er passende og kjent for deltakerne i fellesskapet. Det betyr at elevene i klassen må kunne forstå eventuelle notasjoner eller illustrasjoner, der dette blir brukt.

(s. 291, min oversettelse)

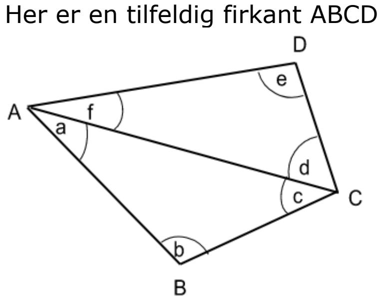
Med denne definisjonen tar Stylianides (2007) hensyn til hvordan man kan definere et bevis, både ut fra elevperspektiv og med hensyn til matematikken. Definisjonens beskrivelser om bevis gjør at den passer på tvers av ulike nivåer innen utdanningen. Dette passer inn med den positive trenden med å gjøre bevis til en del av læreplaner i matematikk, allerede fra grunnskolen av (Stylianides et.al., 2016). Stylianides (2007) sin definisjon omhandler flere perspektiver på bevis som har blitt diskutert i litteraturen. Dette er for eksempel synet på at et bevis er en logisk deduktiv kjede av resonnement (Knuth, 2002; Mariotti, 2000). Definisjonen fremhever de kognitive og sosiale aspektene av bevis som fører til at bevis kan sees på som et argument som enten bekrefter eller avkrefter sannheten i en matematisk påstand (Harel & Sowder, 2007), og som et argument som aksepteres av et fellesskap på et gitt tidspunkt (Balacheff, 1988). Med andre ord sier definisjonen at et deduktivt bevis uten argumentasjonsmåter eller representasjonsformer som er kjente for en bestemt elevgruppe eller innen rekkevidde for elevene, ikke vil kunne regnes som et bevis i skolen. I tillegg sier definisjonen at et resonnement som bygger på aksepterte sannheter for en bestemt gruppe elever, men som ikke er deduktivt, heller ikke kan betegnes som et bevis i skolen.

Cabassut et. al (2012) viser til at det i skolematematikken har blitt vanlig å bruke begrepet "argumentasjon" for resonnement som ennå ikke er bevis, og begrepet "bevis" for godkjente matematiske bevis. At et bevis er matematisk gyldig, vil si at beviset er valid (Valenta & Enge, 2020). Validering er da når man arbeider med å finne ut om en matematisk påstand er sann eller usann, og hvorfor det er slik (Jeannotte & Kieran, 2017). Mariotti (2006) fremhever at formålet med validering er å bekrefte hvorvidt en påstand er sann eller ikke, ut ifra den logiske riktigheten fra matematiske argument.

Begrepet deduktiv er nevnt i foregående avsnitt, og bør følgelig utdypes. Deduktive matematiske resonnement er å dra en konklusjon ved å starte med regler man allerede vet er riktig (Yumiati, 2017, s. 285). Et eksempel på et deduktivt resonnement vises i eksempel 1, under.

Vis at vinkelsummen i firkanter er 360°.

Vi vet at vinkelsummen i en trekant er 180°.
Vi vet at enhver firkant kan deles inn i to trekanter.
Her er en tilfeldig firkant ABCD som er delt i to trekanter; △ ABC og △ CDA.



Vinkelsummen i △ ABC er 180°. (∠a + ∠ b + ∠ c = 180°)
Vinkelsummen i △ CDA er også 180°. (∠d + ∠e + ∠ f = 180°)
Vinkelsummen i firkant ABCD blir dermed: 180° • 2 = 360°

Dette gjelder for alle firkanter, uavhengig av form.

Eksempel 1: Vinkelsum i firkanter. Deduktivt resonnement.

Eksempel 1 viser at det i resonnementet blir brukt tidligere etablert kunnskap til å bevise vinkelsummen i firkanter. I dette eksemplet er det allerede etablert kunnskap om vinkelsum i trekanter, og kunnskap om at alle firkanter kan deles i to trekanter. Å benytte seg av deduksjon i sine argument betyr dermed at man trekker en konklusjon ved å følge en logisk tankerekke av aksiomer, definisjoner eller andre tidligere beviste sannheter. Ball et al. (2002) mener dermed at deduktive matematiske bevis gir mennesker den enkleste formen for å skille rett fra feil (s. 911). Det er nok også grunnen til at begrepet deduktiv resonnering er sterkt knyttet til det å skulle bevise, og at matematiske bevis ofte har blitt definert i form av deduktiv resonnering (G. J. Stylianides & Stylianides, 2008).

Når man argumenterer forsøker man gjerne å lete etter faktaopplysninger, eller forklaringer man kan knytte sammen med tidligere kunnskap. For at argumentasjonen skal telle som et gyldig bevis, må den i tillegg bevise noe generelt, med andre ord være gjeldende for alle andre eksempler (Stylianides, 2008). Et gyldig bevis kan også bli presentert i form av et motargument. Dersom man argumenterer for at en påstand er sann, kan et motargument motbevise påstanden. Påstanden “alle primtall er også oddetall” kan motbevises ved å komme med et argument som motbeviser dette, nemlig at “2 er både et partall og et primtall, dermed er ikke alle primtall også oddetall”. Dette gir et gyldig bevis for at påstanden ikke stemmer.

I motsatt fall er argumentasjon som kun baseres på et utvalg oppgaver eller mønster som ser ut til å stemme, ikke et gyldig matematisk bevis. Slike argument blir av flere forskere kalt empirisk eksempel eller empirisk argumentasjon (Balacheff, 1988; Lannin, 2005; Stylianides, 2008). Et eksempel på et empirisk argument kan se slik ut:

Vis at vinkelsummen i firkanter er 360°.

$90° \bullet 4 = 360°$

$70°+70°+110°+110° = 360°$

Disse to eksemplene viser at vinkelsummen i en firkant er 360°.

Eksempel 2: Vinkelsum i firkanter. Empirisk argument.

Selv om man prøver ut om påstanden stemmer på veldig mange eksempler, er det ikke nødvendigvis slik at det stemmer for alle. Empiriske argument er dermed ugyldige fordi de baseres på ufullstendige bevis (Stylianides, 2007).

En annen form for argumentasjon som ikke er et gyldig bevis, kalles redegjørelse, og er et argument som har noen mangler, men som skiller seg fra et empirisk argument (Stylianides, 2008). Argumentet kan kalles en redegjørelse når det for eksempel ikke eksplisitt blir referert til noen sentrale aksepterte sannheter som benyttes, eller det blir brukt utsagn som ikke anses som sannheter i elevgruppen (Stylianides, 2008). Med utgangspunkt i eksempel 1, kan en redegjørelse se slik ut:

Vinkelsummen i en firkant er 360° fordi man kan legge sammen to trekanter, og da blir det 180 ° + 180° = 360°.

Eksempel 3: Vinkelsum i firkanter. Redegjørelse.

Selv om dette stemmer, har det noen mangler. Argumentet forteller ikke hva i trekantene man legger sammen, eller hvorfor man kan legge sammen to trekanter, for å finne vinkelsummen i en firkant.

2.1.3 Resonnering og argumentasjon i skolen

I skolen har det tidligere vært vanlig å møte matematiske bevis først på videregående skole, gjerne i form av formelle krav til prosessen. Imidlertid har forskning vist at elever på alle trinn har utbytte av å drive med bevisrelaterte aktiviteter (Hanna, 2000; Stylianides, 2007; G. J. Stylianides & Stylianides, 2008). Å arbeide med resonnering og argumentasjon er viktig for å kunne utvikle forståelse og kunnskap i matematikkfaget. (Ball et al., 2002; Stylianides, 2008). Matematikere gjennomgår prosesser for å finne sammenhenger og etablere ny matematisk kunnskap. Om elevene ikke får jobbet med bevis som en naturlig del av matematikkundervisningen, går de glipp av denne prosessen. Det er derfor viktig at elevene får hjelp til å utvikle ferdigheter i, og forståelse for oppgaver som ofte er en del av prosessen i å gi mening og etablere matematisk kunnskap, som å lage hypoteser, teste dem ut, og bevise deres gyldighet. Et bevis blir både legitimt og overbevisende når det fører til matematisk forståelse (Hanna, 2000). Med andre ord kan man si at dersom man utvikler forståelse for matematikken som ligger bak beviset, for eksempel en kjede med logiske argument, fører dette samtidig til at beviset fremstår som troverdig.

Stylianides (2007) påpeker at hans definisjon av bevis både er gyldig på universitetsnivå, i tillegg til at den også passer inn i grunnskolen. Dette kommer av at definisjonen tar hensyn til at dette gjelder matematikk både som et fag, og at dette er elever under matematisk opplæring. Den gir en konsistent mening rundt bevis opp gjennom klassetrinnene. Ved å ta i bruk Stylianides (2007) sin definisjon rundt bevis i grunnskolen, åpnes det opp for at et bevis kan uttrykkes på andre måter enn formelle matematiske bevis, ved at det blir bygget på en forståelse som allerede finnes i elevgruppa. I skolen må derfor arbeid med bevis tilby mer enn logisk korrekthet og validering for å bidra til utvikling av kunnskap hos elevene. Dette vil si at i tillegg til å være akseptabelt fra et matematisk synspunkt, må det samtidig gi mening for elevene (Mariotti, 2006). Ut ifra definisjonen gitt av Stylianides (2007) må man ta hensyn til at argumentasjonen bygger på gyldige definisjoner, kjente sammenhenger, har en gyldig argumentasjonsform og en passende uttrykksform, samtidig som beviset må være matematisk gyldig.

At resonnering og argumentasjon har en sentral rolle i ulike læreplaner har dermed flere begrunnelser. En av dem er at man gjennom resonnering og argumentasjon kan utvikle forståelse innen forskjellige områder i matematikkfaget (Skott et al., 2018). En annen begrunnelse er at utvikling av, eller det å være kritisk til, matematiske resonnementer og argumenter er sentralt i matematisk aktivitet og handling (Skott et al., 2018)

I LK20 kan kjerneelementet resonnering og argumentasjon ses på både som en prosess og et produkt i matematikkundervisningen. Som et produkt skal elevene lære de karakteristiske egenskapene hos resonnering og argumentasjon, ved at elevene for eksempel blir i stand til å skille mellom ulike typer matematiske argumenter, og hvilke av disse som teller som gyldige bevis. Når elevene forstår egenskapene til ulike typer av resonnering og argumentasjon, betyr det at elevene utvikler kompetanse ifølge argumenter gitt av både lærer og medelever, samtidig som de lærer å utvikle egne argumenter (Skott et al., 2018). Ordet resonnement blir i LK20 brukt som en måte å tenke på, eller konkludere, og kan dermed anses som aktivitet (Reid, 2022). Av den grunn kan resonnering og argumentasjon også betraktes som en prosess for å lære og utvikle forståelse for det matematiske innholdet i faget, og ikke bare noe som skal overbevise noen om at et matematisk argument er sant eller usant. Undervisningen bør med andre ord i tillegg forklare elevene hvorfor et argument er sant eller usant.

Forskning viser til at det er en overdreven tillit til empiriske argumenter (Otten et al., 2011). Det viser seg at både lærere og elever har en tendens til å ta med seg måten de argumenterer og resonnerer på i dagliglivet, inn i matematikkundervisningen (Harel & Sowder, 2007). Studier har vist at flere lærere tror at empiriske argument teller som bevis (Stylianides, 2007). Det er da rimelig å anta at lærere også oppmuntrer til eller lar elevene tro at empiriske argument er holdbart som bevis (Stylianides, 2007). Balacheff (1988) mener elever som tror at empirisk argumentasjon er gyldig, får det vanskeligere med å generalisere. Når elever støtter seg til eksempler i sine argumentasjoner, kan det komme av at det kan være vanskelig for dem å flytte fokuset slik at de kan lage generaliseringer (Lannin, 2005).

2.2 Geometri på 6. trinn

I LK20 er seks av ti kompetansemål knyttet til geometri på 6. trinn. Det betyr at geometri gis større fokus i undervisning dette skoleåret. Et av kompetansemålene på dette trinnet er at elevene skal kunne «måle radius, diameter og omkrins i sirklar og utforske og argumentere for samanhengen», noe som knytter geometri, og resonnering og argumentasjon, sammen. Før 6. trinn står argumentasjon nevnt konkret bare på 2. trinn (Valenta & Enge, 2020). Det betyr at 6. trinn er et av få der det spesifikt står uttalt at elevene skal arbeide med argumentasjon. Kjerneelementene er ment å være det viktigste faglige innholdet som elevene skal jobbe med (Kunnskapsdepartementet, 2019), og sammen med kompetansemålet om argumentasjon, betyr dette at arbeid med resonnering og argumentasjon blir viktig i undervisning i geometri.

Blant kompetansemålene for trinn 1.–10. trinn, finnes det å argumentere for nesten bare i geometri (Svendsen, 2020). Flere forskere anbefaler at argumentasjon og resonnering bør bli en sentral del av aktiviteter med matematikk i alle emneområder og i alle klassetrinn (Ball & Bass, 2003; Hanna, 1995). Otten et al. (2014) påpeker likevel at til tross for at mange forskere og læreplaner jobber for å innlemme resonnering og argumentasjon i alle temaer i matematikk, bør man samtidig se tilbake og reflektere over karakteristiske trekk ved resonnering og argumentasjon som allerede eksisterer i geometrien. Et trekk ved geometrien er blant annet at de fleste bevisene lar seg lett forklare hvorfor de er sanne (Hanna, 2000). Et annet karakteristisk trekk kan også ses ved å ta en sveip innom historien, der Euklid bygde opp bevis innen geometri hjelp av aksiomer, definisjoner og setninger. Det er usikkert om LK20 deler synet om at resonnering og argumentasjon naturlig hører hjemme i geometrien. Det kan likevel virke som at argumentasjon er nært knyttet til geometri i den norske læreplanen.

Når resonnering og argumentasjon er viktige elementer i geometri på 6. trinn, er dette noe som påvirker lærebokforfattere når de skriver matematikkbøker som følger LK20. Man kan derfor tenke seg at en stor del av geometrien i lærebøkene knyttes sammen med arbeid med resonnering og argumentasjon på 6. trinn. Det er likevel viktig å tenke på at mye i geometrien blant annet består av navn på figurer, definisjoner og metoder for å bruke måleinstrumenter. I denne forbindelsen kan man skille mellom det som er vilkårlig og det som er nødvendig (Hewitt, 1999). Vilkårlig i geometrien er for eksempel ulike navn på figurer, som "sirkel", "kvadrat" eller "prisme". Når noe er vilkårlig, handler dette om noe man ikke kan finne ut av selv. Elevene må derfor bli fortalt at trapes heter trapes, eller hvordan man bruker en gradskive. På den andre siden finner man det som kalles nødvendig. Dette er elementer som man kan finne ut av, basert på kunnskap man har fra før (Hewitt, 1999). For eksempel kan elevene se det som nødvendig å finne formelen for å regne ut omkretsen av en sirkel, og kan ta i bruk kunnskap om forholdet mellom omkrets og diameter. Med andre ord bygger man ny kunnskap på det man vet fra før, blant annet ved å se på egenskaper og relasjoner. Det som regnes som nødvendig, er det som kan knyttes til arbeid med resonnering og argumentasjon. Likevel er det sentralt at elevene får kunnskap om det vilkårlige, for å kunne bygge kunnskap. Av den grunn er det trolig å forvente at geometri i matematikkbøkene på 6. trinn inneholder både muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon, i tillegg til muligheter for arbeid med det som er vilkårlig.

2.3 Rammeverk for analyse av muligheter for resonnering og bevis i geometri

Det er flere rammeverk som er utviklet for å analysere måten bevis blir behandlet på i lærebøker (f.eks. Bieda et al., 2014; Davis, 2012; Stylianides, 2009). Imidlertid har jeg kun funnet et rammeverk som omfatter muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i matematikkbøker, som samtidig retter seg inn mot geometri. Dette rammeverket er utviklet av Otten et al. (2014), og blir benyttet som denne studiens analytiske rammeverk. Jeg vil under presentere og redegjøre for rammeverket.

2.3.1 Analytisk rammeverk

Otten et al. (2014) har fulgt anbefalinger fra andre lærebokanalyser, om å inkludere både forklaringsbokser og oppgaver i en lærebokanalyse i matematikk (f.eks. Li, 2000). Med forklaringsbokser menes all forklarende eller fortellende tekst i en leksjon. Slik tekst er gjerne adskilt fra oppgavene med en innramming, og inneholder definisjoner, formler, teoremer eller eksempler. For en mer inngående beskrivelse av forklaringsbokser, se metodekapittelet. Årsaken til at både forklaringsbokser og oppgaver inkluderes i rammeverket, er fordi begge deler bidrar til de potensielle mulighetene elever har til å delta i aktiviteter med resonnering og argumentasjon (Otten et al., 2014). Rammeverket er basert på et tidligere rammeverk, utviklet av Thompson et al. (2012), som også inneholder kategorier for å analysere både forklaringsbokser og oppgaver.

Rammeverket utviklet av Otten et el. (2014) skiller både mellom forklaringsbokser og oppgaver, i tillegg til at det skjelner mellom ulike former for argumentasjon og elevaktiviteter som omhandler resonnering og argumentasjon. Rammeverket presenteres i sin helhet i figur 1. I etterkant følger forklaringer av de ulike kategoriene i rammeverket. Eksempler på kategoriene i rammeverket presenteres i metodedelen.

	Forklaringsbokser	**Oppgaver**	
	Egenskaper, teoremer eller påstander	Relatert til matematiske påstander	Relatert til matematisk argumentasjon
Matematisk påstand eller situasjon	- Generelle påstander - Spesifikke påstander	- Generelle påstander - Spesifikke påstander - Generelle påstander med utgangspunkt i et spesifikt eksempel	- Generelle påstander - Spesifikke påstander - Generelle påstander med utgangspunkt i et spesifikt eksempel
Forventet elevaktivitet		- Lag en hypotese eller endre en påstand. - Fyll inn det som mangler i hypotesen. - Undersøk en hypotese	- Utvikle et matematisk bevis. - Utvikle en redegjørelse eller et ikke-gyldig bevis - Bearbeide et bevis, eller fullføre et bevis - Fyll inn det som mangler i argumentet eller beviset. - Evaluer eller korriger et argument eller bevis. - Finn et motargument.
Type begrunnelse / argumentasjon (eller situasjon)	- Deduktiv - Empirisk - Oppbygging av et bevis. - Fortid eller fremtid. - Overlatt til eleven. - Ingen	- Deduktiv (eksplisitt) - Empirisk (eksplisitt) - Implisitt	- Deduktiv (eksplisitt) - Empirisk (eksplisitt) - Implisitt
	- Utsagn *om* resonnering og bevis	- Oppgaver *om* resonnering og bevis.	

Figur 1: Et analytisk rammeverk for resonnering og argumentasjon i geometri. (egen oversettelse fra Otten et al., 2014, s. 58)

2.3.2 Matematisk påstand eller situasjon

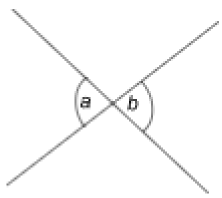
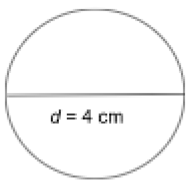
I rammeverket skiller Otten et al. (2014) mellom matematisk påstand og argumentasjon ved å sette dem i ulike kategorier. Jeg vil komme nærmere inn på dette skillet i delkapittel 2.3.4, men først vil jeg klargjøre hvilke former for matematiske påstander som blir omfattet av rammeverket.

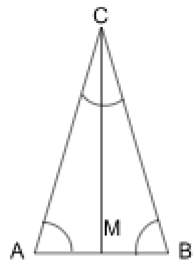
Otten et. al (2014) har i rammeverket spesifisert matematiske påstander i form av hva de omfatter. *Generelle påstander* og *spesifikke påstander* finnes i både forklaringsbokser og oppgaver, mens kategorien *generelle påstander med utgangspunkt i et gitt eksempel* kun er å finne i oppgaver.

Generelle påstander er matematiske påstander som gjelder et helt utvalg matematiske objekter eller situasjoner, og påstanden gjelder alle tilfeller eller objekter i utvalget, uten unntak. En generell påstand kan for eksempel gjelde *alle* firkanter, *alle* sirkler, eller *alle* rettvinklede trekanter. I arbeid med bevis kan ofte generelle påstander gjenkjennes ved at de begynner med ordlyden «la rektangel ABCD være et tilfeldig rektangel» (Otten et al., 2014). At rektangel ABCD er et tilfeldig rektangel indikerer for eksempel at egenskapene ved rektangel ABCD, gjelder alle rektangler.

Spesifikke påstander gjelder et spesifikt matematisk objekt eller situasjon, eller et begrenset sett med objekter. En spesifikk påstand gjelder for eksempel en spesifikk trekant, et spesifikt rektangel, eller en spesifikk koordinat. Spesifikke påstander kommer ikke med ordlyden «la rektangel ABCD være et tilfeldig rektangel», men i stedet gjelder påstanden akkurat rektangel ABCD.

Generelle påstander med utgangspunkt i et gitt eksempel, er en generell påstand der et spesifikt eksempel har blitt valgt ut slik at elevene skal kunne bruke det i sin resonnering. Otten et. al (2014) påpeker at generelle påstander med utgangspunkt i et gitt eksempel gjelder forhåndsgitte eksempler som matematikkboka presenterer for elevene, slik at de kan bruke eksempelet for å kunne argumentere for et helt utvalg matematiske objekter eller situasjoner. Det er med andre ord ikke slik at elevene selv skal komme produsere eksempler for å underbygge sin argumentasjon.

	Forklaringsbokser	**Oppgaver**
Generelle påstander	Når to linjer i ulike retninger fra et felles punkt danner en vinkel, kalles det felles punktet for vinkelens toppunkt. Linjene som danner en vinkel kalles vinkelbein. Vinkler som har samme toppunkt, der vinkelbeina er i motsatt retning, kalles *toppvinkler.*  Her er *a* = *b* fordi linjene skjærer hverandre og danner to toppvinkler på hver side av toppunktet.	Bevis at et kvadrat også er et rektangel.
Spesifikke påstander	I sirkelen under er diameteren 4 cm. 	Vis hvordan du kan regne ut arealet av rektangelet under. 
Spesifikke påstander med utgangspunkt i et gitt eksempel	Gjelder ikke forklaringsbokser	Med utgangspunkt i figuren under, vis at vinklene ved grunnlinjen i en likebeint trekant alltid er like store.

		 Legg merke til: - ∠C har vinkelbena CA og CB, der CA = CB. - ∠C er halvert av halveringslinja CM, og △AMC kan da speiles over linje CM.

Figur 2: Eksempler påstander i rammeverket

Figur 2 viser eksempler på hvordan ulike påstander kan se ut i forklaringsbokser og oppgaver.

2.3.3 Ulike former for oppgaver med muligheter for resonnering og argumentasjon

I rammeverket står kategorier for ulike forventede elevaktiviteter etter kategoriene som handler om påstander. I oppgavene står instruksjonen som elevene skal følge for å løse oppgavene. Ved å analysere oppgavene, kan man da identifisere hvilke former for aktiviteter som er forventet at elevene kommer til å gjennomføre når de jobber med oppgavene.

Innenfor forventede elevaktiviteter finnes det flere kategorier som spesifiserer ulike former for muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon. Otten et al. (2014) fremhever spesielt forskjellen mellom det å forklare og det å bevise. Der Thompson et al. (2012) valgte å ha kun en kategori for å *utvikle et argument*, skiller rammeverket for denne studien mellom å *utvikle et matematisk bevis* og *utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis.* Otten et al. (2014) assosierer ord som "forklar", "begrunn", "vis" eller "hvorfor" med kategorien *utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis*, og ord som "bevis" eller "vis ved hjelp av deduksjon" med *utvikle et bevis.*

Man kan ikke vite om elevene kommer til å produsere et bevis eller et ikke-gyldig bevis dersom det ikke eksplisitt står i teksten hva de skal gjøre. Rammeverket legger dermed til rette for at man kan finne muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i oppgavene, ved at man her også kun analyserer teksten som står, i stedet for å komme med hypoteser om hva elevene kan komme til å gjøre.

Kategoriene innenfor forventet elevaktivitet er følgende:

- *Lag en hypotese eller endre en påstand.* Oppgaver der elevene blir bedt om å formulere en matematisk påstand, eller gjøre en falsk hypotese om til noe elevene tror er sant (endre på en feil påstand), får denne koden.
- *Fyll inn det som mangler i hypotesen.* Oppgaver der elevene blir bedt om å fullføre en matematisk hypotese der noe av hypotesen allerede er gitt, tildeles denne koden.

- *Undersøk en hypotese.* Oppgaver der elevene blir bedt om å avgjøre om noe kan være sant i en presentert hypotese, eller der de skal avgjøre sannhetgraden i noe de akkurat har antatt selv, tildeles denne koden.
- *Utvikle et matematisk bevis.* Oppgaver som spesifikt bruker begrepet "bevis", får denne koden.
- *Utvikle en redegjørelse eller et ikke-gyldig bevis.* Oppgaver der elevene blir bedt om å forklare hvorfor noe er sant eller feil, og som inneholder ord som "forklar", "begrunn", "vis" eller "hvorfor", får denne koden. Kun oppgaver som ber elevene begrunne eller forklare hvorfor noe er sant eller usant, eller hvilke trinn de har utført i oppgaven.
- *Bearbeide et bevis, eller fullføre et bevis.* Oppgaver der elevene blir bedt om å gi en disposisjon av et bevis, eller skrive et fullstendig bevis fra en gitt disposisjon, får denne koden.
- *Fyll inn det som mangler i argumentet eller beviset.* Oppgaver der elevene får noen argument eller bevis, og får beskjed om å fylle inn de manglende delene, eller formulere et fullstendig argument eller bevis, tildeles denne koden.
- *Evaluer eller korriger et argument eller bevis.* Oppgaver der et argument eller bevis blir presentert, og elevene blir bedt om å avgjøre om det er valid eller om å finne feil og korrigere dem, tildeles denne koden.
- *Finn et motargument.* Elevene blir bedt om å komme med et motargument som viser at en matematisk påstand er feil.

2.3.4 Skille mellom matematiske påstander og argumentasjon

Etter kategorier for forventet elevaktivitet, finner man i rammeverket kategorier for ulik argumentasjon. Det finnes tre kategorier for argumentasjon som kan identifiseres i oppgavene. Kategoriene for argumentasjon som finnes i forklaringsboksene blir beskrevet i avsnitt 2.3.5.

Otten et al. (2014) ønsker i dette rammeverket å separere påstander og argumentasjon. Grunnen til dette er at generelle påstander kan argumenteres for ved å ta i bruk både ved å bruke deduksjon og empiri, selv om ikke alle former for argumentasjon er valide bevis. Ved å skille mellom påstander og argumentasjon i oppgavene på denne måten, legges det til grunn at man ikke kan anta at elevene argumenterer på den ene eller den andre måten. Otten et al. (2014) påpeker at når de gjør et skille mellom matematiske påstander og argumentasjon i rammeverket, vil ikke resultatene fra analysen konstrueres som en formodning om elevers resonnering (s. 60). I stedet vil disse kategoriene i rammeverket fange opp hvilken argumentasjon som eksplisitt står skrevet i oppgaveteksten i matematikkbøkene.

De ulike formene for argumentasjon er som følger:

- *Deduktiv*. Oppgaver som eksplisitt ber om et deduktivt argument eller en logisk kjede med argumentasjon tilegnes denne koden.
- *Empirisk*. Oppgaver som eksplisitt ber om bekreftende eksempler eller målinger tilegnes denne koden.

- *Implisitt*. Oppgaver som ber elevene om å gjennomføre en form for resonnering og argumentasjon, for eksempel "bevis at" eller "forklar hvorfor", men ikke eksplisitt ber om en spesiell form for argumentasjon, tilegnes denne koden.

Implisitt-koden er lagt til for at man ikke skal gjøre antakelser om hvilke argument elever kan produsere. Otten et al. (2014) påpeker at rammeverket er laget for en studie som analyserer muligheter som finnes i en lærebok, og ikke hvordan elevene faktisk resonnerer. Jeg deler denne oppfatningen, og vil i metodekapittelet begrunne nærmere hvorfor jeg i denne studien kun benytter meg av analyse av tekst, og ikke pedagogisk bruk eller tolkning av tekst utover det som eksplisitt står skrevet.

2.3.5 Argumentasjon i forklaringsbokser

I forklaringsboksene er det lagt til flere koder som kan benyttes i forbindelse med hvordan matematikkboka argumenterer for påstandene. Det er heller ikke i forklaringsboksene noen selvfølgelighet at for eksempel generelle påstander blir argumentert for ved å bruke valide bevis.

Følgende koder gjelder for type argumentasjon som kan finnes i forklaringsbokser:

- *Deduktiv*. Forklaringsbokser der den matematiske påstanden begrunnes ved et logisk argument bygd opp av definisjoner, aksiomer, eller tidligere etablerte resultater for å støtte eller bevise påstanden, får denne koden.
- *Empirisk*. Forklaringsbokser der det gis et bekreftende eksempel for å understøtte en matematisk påstand eller viser at noe stemmer i en påstand ved hjelp av et utvalg av relevante situasjoner, tilegnes denne koden.
- *Oppbygging av et bevis.* Forklaringsbokser som inneholder en disposisjon av et bevis eller viktige trinn til et bevis som vil etablere om en matematisk påstand stemmer eller ikke tilegnes denne koden.
- *Fortid eller fremtid.* Forklaringsbokser som i stedet for å komme med en argumentasjon, eksplisitt uttaler at et bevis eller en annen form for argumentasjon finnes i et tidligere kapittel, eller i et senere kapittel, eller ved å benytte en ekstern kilde (for eksempel internett), får denne koden.
- *Overlatt til eleven.* Forklaringsbokser som i stedet for å argumentere for påstanden, eksplisitt uttaler at elevene vil komme frem til en argumentasjon senere i aktiviteten, får denne koden.
- *Ingen.* Forklaringsbokser som ikke inneholder noen argumentasjon for hvorfor den matematiske påstanden stemmer, tilegnes denne koden.

2.3.6 Utsagn eller oppgaver *om* resonnering og argumentasjon

Den siste kategorien i det analytiske rammeverket handler om muligheten for å reflektere eller tenke på hvordan resonnering og argumentasjon brukes i matematisk sammenheng. Otten et al. (2014) har inkludert disse kategoriene i rammeverket, blant annet på grunn av at årsaken til at mange elever strever med resonnering og argumentasjon er fordi de ikke forstår helt hva det er. En annen grunn til å inkludere dette i rammeverket, er at refleksjon rundt resonnering og argumentasjon kan hjelpe elevene å oppdage nytten ved å bevise ved hjelp av deduksjon. Dette fordi de får muligheten til å bevisstgjøres på dette via teksten, i stedet for kun å arbeide med det på egen hånd.

I forklaringsboksene blir denne koden gitt til eksempler med ulike former for bevis, metoder for hvordan bevise noe (f.eks. motbevis), ulike former for resonnering (induktiv vs. deduktiv), forklaringer av strategier for å konstruere et bevis (f.eks. jobbe baklengs).

I oppgavene gis denne koden til oppgaver der elevene skal jobbe med ulike former for bevis, metoder for hvordan bevise noe (f.eks. motbevis), ulike former for resonnering (induktiv vs. deduktiv), eller forklaringer av strategier for å konstruere et bevis (f.eks. jobbe baklengs).

2.3.7 Et rammeverk basert på prinsippet om nødvendighet

Ifølge Otten et al. (2014) kan nødvendighetsprinsippet være til hjelp i undersøkelser av lærebøker i matematikk. Nødvendighetsprinsippet ble av Harel og Tall (1991) angitt som en standard for pedagogikk som innebærer at det skal legges til rette for at elevene skal kunne se den intellektuelle nødvendigheten med å ha kompetanse innen et emne (s. 8). Otten et. al (2014) hevder at ved å trekke inn nødvendighetsprinsippet i en lærebokanalyse, anerkjennes ikke bare lærebokens innflytelse på undervisningen, men også det direkte pedagogiske forholdet mellom tekst og elev (s. 54).

Studier viser at mange elever regner ikke-gyldige bevis, som empiriske argument for å være gyldige bevis (Balacheff, 2002; Lannin, 2005). I tillegg har det vist seg at elever ofte anser deduktive argument for å være en vilkårlig oppgave i logisk tankegang, kun for å bekrefte allerede etablerte sannheter, eller for å vise bruken av nyinnlærte teoremer, i stedet for å se på det som en mulighet til å utvikle matematisk forståelse (Otten et al., 2014). Nødvendighetsprinsippet kan i slike tilfeller virke som en rettledning for læringsmuligheter som kan få elevene forbi empirisk argumentasjon, og videre mot å gjenkjenne behovet for deduktiv argumentasjon når beviset skal være gyldig for et uendelig antall tilfeller (Otten et al., 2014).

Rammeverket legger til rette for å undersøke hvilke muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon som finnes i matematikkbøkene, og nødvendighetsprinsippet kan dermed fungere som en linse for å tolke disse mulighetene. Gjennom linsen kan man identifisere hvilke oppgaver og forklaringsbokser som tilbyr elevene muligheten til å oppdage nødvendigheten med gyldige former for resonnering og argumentasjon. Dersom det eksempelvis er forklaringsbokser med empirisk argumentasjon, kan dette forsterke mistolkningen enkelte elever har om at man kan bevise noe i form av noen bekreftende eksempler (Stylianides, 2008). I motsatt fall, kan for eksempel forklaringsbokser med gyldige former for arbeid med bevis, rettlede elevene mot forståelsen av behovet for deduksjon i egne argument. Slike eksempler omfatter også oppgaver.

2.4 Tidligere forskning på resonnering og argumentasjon i lærebøker i matematikk

Det er gjennomført flere studier som undersøker muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i lærebøker i matematikk. Enkelte av disse studiene har undersøkt både forklaringsbokser og oppgaver (f.eks. Otten et al., 2014; Thompson et al., 2012). Andre studier har kun hatt fokus på å analysere oppgaver. Den eneste forskningen jeg har funnet, som har omhandlet muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i geometri, er gjennomført av Otten et al. (2014). Jeg vil her presentere noen av studiene som har undersøkt mulighetene for arbeid med resonnering og argumentasjon i matematikkbøker, og jeg vil trekke frem enkelte hovedfunn som interessante å diskutere opp mot min egen undersøkelse. Diskusjonen rundt funn fra studiene jeg presenterer her, sammenlignet med funn fra egen studie, utføres i diskusjonskapitlet.

Stylianides (2009) gjennomførte en analyse av et utvalg amerikanske matematikkbøker. I sin analyse kom han frem til at det var en lav prosentandel av oppgavene som ga elevene muligheter til å jobbe med empirisk argumentasjon, og argumentasjon som baserer seg på generiske eksempler. I andre enden var det en høy prosentandel av oppgavene som la til rette for argumentasjon i form av en redegjørelse.

Lignende funn er gjort av Otten et. al. (2014) som i sin studie gjennomførte en lærebokanalyse av seks geometribøker, beregnet på elever rundt alderen 13 - 16 år. Otten et al. (2014) fant at den mest vanlige formen for aktiviteter med resonnering og bevis, var de som ba elevene ta stilling til sannhetgraden av påstander, eller komme med begrunnelser i form av forklaringer eller andre ikke-gyldige bevis. Dette er det som i rammeverket blir beskrevet som redegjørelser.

Bieda et al. (2014) gjennomførte en lærebokanalyse på sju matematikkbøker for 5. trinn i USA. De fokuserte på å finne frekvensen av oppgaver som inneholdt resonnering og argumentasjon, sammenlignet med totalen av andre typer oppgaver i matematikkbøkene. De fokuserte også på hvordan oppgavene var formulert, med tanke på hvilken type aktivitet med resonnering og argumentasjon de tilbød. Deres funn gikk ut på at det totale antallet oppgaver med resonnering og argumentasjon i hver av lærebøkene var ganske lavt. De fleste oppgavene av denne typen, var oppgaver som handlet om at elevene skulle lage og begrunne matematiske påstander. De oppdaget tydelig mangel på oppgaver som gikk ut på å evaluere påstander. I motsetning til funn i studien gjennomført av Stylianides (2009), fant Bieda et al. (2014) at den mest utbredte formen for argumentasjon var empirisk. I tillegg fant de at oppgavene ga sjelden elevene muligheten for å arbeide med resonnering som omhandler generelle påstander.

Thompson et al. (2012) undersøkte muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i matematikkbøker laget for high-school i USA. De hadde spesielt fokus på slike muligheter innen områdene algebra og funksjoner. Resultater fra studien tilsa at muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon var å finne i 6 % av de undersøkte matematikkoppgavene, med hovedvekt på aktiviteter som handlet om at elevene skulle utvikle et argument, eller undersøke en hypotese. Thompson et al. (2012) fant også at omtrent 50 % av forklaringsboksene inneholdt muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon, der 40 % av disse ikke inneholdt noen form for begrunnelse.

I Norge har Tømmerdal (2021) gjennomført en studie i forbindelse med sin masteroppgave, der han undersøker hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis som finnes blant oppgaver innen temaet brøk i fire ulike lærebøker for 5. trinn. Hans hevdet at hans funn indikerte at lærebøkene tilbyr et begrenset antall brøkoppgaver som gir elever muligheter for resonnering og bevis, men at oppgavene han analyserte innehar gode egenskaper for arbeid med resonnering og argumentasjon. Oppgavene med resonnering og argumentasjon handlet stort sett om å forklare og argumentere for en matematisk påstand.

I store trekk kan det fremheves at flere av de ovennevnte studiene antyder at andelen oppgaver som gir mulighet for arbeid med resonnering og argumentasjon er lav (Bieda et al., 2014; Thompson et al., 2012; Tømmerdal, 2021). Mange av aktivitetene som står i oppgavene, dreier seg om hypoteser og påstander, enten i form av at elevene skal ta stilling til sannhetgraden av en påstand (Otten et al., 2014; Thompson et al., 2012; Tømmerdal, 2021), eller i form av at elevene selv skal lage påstander (Bieda et al., 2014). Studier viser også at en stor andel oppgaver gir mulighet for arbeid med redegjørelser (Otten et al., 2014; Stylianides, 2009).

3 Metode

I denne studien har jeg undersøkt hvilke muligheter for aktiviteter med argumentasjon og bevis i geometri som finnes i matematikkbøker for 6. trinn. Som nevnt i innledningen, tolker jeg muligheter som et mål for både frekvens og innhold. Det vil med andre ord si at jeg undersøker både *hvor mange* muligheter, i tillegg til *hvilke* muligheter for argumentasjon og resonnering finnes. For å kunne svare på dette har jeg valgt mixed-methods som forskningsmetode. Som en del av denne forskningsmetoden, har jeg valgt dokumentanalyse.

3.1 Mixed-methods

I forskning skilles det ofte mellom kvantitative og kvalitative metoder. Kvantitative undersøkelser handler som oftest om tall og lukkede spørsmål, der man gjerne tester forholdet mellom ulike variabler, mens kvalitative blir assosiert med åpne spørsmål og ord, der forskeren gjerne undersøker hva et individ eller en liten gruppe mener (Creswell, 2009). Det er forskningsspørsmålet som gir føringer for hvilke metoder som passer best for å bruke. I en lærebokanalyse er det ikke gitt hvilken metode som best egner seg. På lik linje med alle andre studier, avhenger det av hva man ønsker å undersøke. I min studie skulle jeg undersøke hvilke muligheter for aktiviteter med resonnering og argumentasjon som finnes i oppgaver innen temaet geometri i tre ulike læreverk i matematikk for 6. trinn. Underlagt dette ligger både innhold og omfang. Jeg undersøkte da innholdet med tanke på hva som står der, med andre ord hva læreverkene forklarer og gir i oppgave til elevene. I tillegg så jeg på antall oppgaver som gir muligheter kontra de som ikke gjør det. Jeg endte dermed opp med noen variabler som påvirket utfallet av undersøkelsene mine. Dette vil si at jeg vil benytte meg av begge metoder, såkalt mixed-methods (Bowen, 2009; Creswell, 2009; Greene et al., 1989; Pingel, 2010).

Mixed-methods vil si at man blander både kvantitativ og kvalitativ metode i samme undersøkelse. Creswell (2009) poengterer at dette ikke handler om at man kun samler inn kvantitative data og kvalitative data, for så å analysere begge deler. Mixed-methods er et samspill mellom begge metoder, slik at resultatet av undersøkelsen står sterkere enn om man bare skulle ha benyttet seg av den ene. I min studie har jeg bruk for dette samspillet for å kunne si noe om både innhold og frekvens. Jeg finner støtte for dette hos Pingel (2010) som hevder at mixed-methods er den beste metoden for lærebokanalyse. Selv om man kan bruke kvantitativ metode som å kode og telle hyppigheten av ord eller oppgaver, er utvalget som man velger å telle av kvalitativ art (s. 68).

Kvantitative metoder	Mixed-methods	Kvalitative metoder
Statistiske analyser	Statistisk- og tekstanalyse	Tekst- og bildeanalyse

Figur 3: Hentet fra Creswell (2009, s.32) (egen oversettelse)

Figur 3 viser forskjellen mellom kvantitative undersøkelser, kvalitative undersøkelser, og mixed methods. Jeg teller ikke bare antall oppgaver som inneholder muligheter for aktiviteter med resonnering og argumentasjon, som tilsvarer kvantitative undersøkelser.

Jeg går også i dybden i innholdet, og sier noe om hvilke aktiviteter som finnes der, lik kvalitative undersøkelser. Av den grunn stemmer min undersøkelse overens med mixed-methods.

3.1.1 Dokumentanalyse

Fan et al. (2013) mener at man skal skille mellom undersøkelser der man ser på bruken av lærebøker og analyser av lærebøker, der sistnevnte blir kalt for en dokumentanalyse (s. 640). Et lignende skille gjøres av Rezat & Sträßer (2015), som i sin studie deler forskning på matematikkbøker inn i kategorier som forskning på selve læreboka, og bruken av læreboka og dens innvirkning (s. 250). I min undersøkelse av læreverk tok jeg ikke hensyn til hvordan lærerne bruker læreverkene i sin undervisning. I stedet så jeg kun på innholdet i matematikkbøkene. Dokumentanalyser kan inkluderes i metoder med mixed-methods (Bowen, 2009), og jeg synes begge metoder passet for at jeg skulle kunne finne svar på problemstillingen for masteroppgaven.

Dokumentanalyse er det samme som enkelte kaller for en innholdsanalyse, der man undersøker innholdet i et dokument. Dokumenter kan for eksempel være dagbøker, brosjyrer og journaler (Bowen, 2009), og i min studie var dokumentene jeg undersøkte matematikkbøker. En dokumentanalyse går ut på å undersøke og tolke tekst slik at man får en forståelse for, og en mening bak, det som undersøkes (Bowen, 2009). For hver oppgave eller forklaringsboks måtte jeg tolke innholdet for å sjekke om det ga muligheter for argumentasjon eller bevis. I tillegg måtte jeg identifisere type argument, påstand eller bevis som presenteres i bøkene. I arbeid med dokumentanalyser er det imidlertid viktig at man ikke drar slutninger for hvordan lærebøkene påvirker undervisningen, eller hvilken kompetanse elevene får, siden dokumentanalyser kun forteller hvilke muligheter for læring som finnes (Rezat & Sträßer, 2015). Dette er noe jeg har måttet være bevisst på i arbeid med min analysering av lærebøkene. Når man har jobbet mange år som lærer, er det fort gjort å trekke slutninger basert på erfaring.

I dokumentanalyser kan det skilles mellom induktiv og deduktiv tilnærming til kategorisering (Pingel, 2010; Rezat & Sträßer, 2015). Ved induktiv tilnærming lager man ulike kategorier i etterkant av analysen. Dersom man ser på innholdet i lærebøker deduktivt, er kategoriene etablert i forkant av analysen, ut ifra hva man forventer å finne i bøkene (Pingel, 2010). Med tanke på at jeg har brukt et rammeverk med kategorier som allerede er beskrevet, betyr det at jeg har benyttet meg av en deduktiv tilnærming under analyseprosessen. Kriteriene for hva som hørte til i de ulike kategoriene i rammeverket er laget ut fra en forståelse av emnet resonnering og argumentasjon i geometri, med andre ord hva jeg kunne forvente å finne.

Etter analysen var det mye som kunne tyde på at jeg burde ta en revisjon av rammeverket, fordi flere av kategoriene ikke traff noen av oppgavene. Dette var for eksempel kategoriene "fyll inn det som mangler i hypotesen", "bearbeide et bevis, eller fullføre et bevis" og "oppgaver *om* resonnering og bevis". Med nødvendighetsprinsippet i tankene, og viktigheten med at elevene får muligheten til å se behovet for når det er nødvendig med deduktiv argumentasjon, førte dette til at jeg ikke fjernet kategoriene. Jeg tok dermed et valg om at det er viktigere å synliggjøre at det finnes flere kategorier som gir muligheter for resonnering og argumentasjon enn hva som var å finne blant datamaterialet, enn å tilpasse rammeverket ut ifra mine funn.

3.2 Utvalg

Hensikten med denne studien er å beskrive hvilke muligheter for aktiviteter med resonnering og argumentasjon som finnes i geometri i matematikkbøker for 6. trinn. Som grunnlag for studien har jeg valgt ut fire lærebøker fra de tre største forlagene i Norge; Matemagisk 6B grunnbok (Kongsnes, Raen og Sørdal, 2021), Matematikk 6 grunnbok (Gulbrandsen, Løchsen, Måleng og Olsen, 2020) Multi Elevbok 6A grunnbok og 6B grunnbok (Alseth, Røsseland, Arnås og Nordberg, 2021). Årsaken til at både Multi 6A og 6B har blitt med i studien, er fordi kapitlene som omhandler geometri er fordelt på begge bøkene. Jeg har vært i kontakt med forlagene i håp om å få tilgang til salgsstatistikker på de ulike matematikkbøkene, men dette kunne de ikke oppgi til hensyn av konkurransehensyn. Hanne-Mari Eide Bennett fra Gyldendal kunne likevel meddele at Multi har vært et av de mest foretrukne læreverkene i matematikk på barnetrinnet, siden verket først ble lansert i 2006. Formålet med å velge matematikkverk fra disse tre forlagene, har vært å velge ut ifra det som kan være representativt i norske klasserom.

Alle matematikkverkene har flere ressurser i form av ekstrabøker og nettressurser i tillegg til grunnbøkene, men disse er ikke tatt med i studien. Lærerveiledningene ble heller ikke med i studien, tross at de kan inneholde mer inngående instrukser for oppgavene og gjerne tilbyr ekstra informasjon eller oppgaver som læreren kan bruke i undervisningen. Pingel (2010) anbefaler også at man holder analysering av lærerveiledning og elevbok separat. Elevene må kunne forstå teksten i egen bok, uten å søke forklaring i lærerveiledningen. I tillegg er det kun læreren som har tilgang til lærerveiledning, og dermed lærerens beslutning om det i lærerveiledningen skal gjennomføres. Ved å bruke lærerveiledningene som datamateriale begynner man å bevege seg bort fra en innholdsanalyse, mot pedagogisk bruk av lærerverket.

De utvalgte kapitlene i bøkene er kapitler med tema som havner innenfor geometri, som beskrevet i tabellen under.

Lærebok	Forlag	Kapittelnavn	Antall geometri-oppgaver	Antall forklarings-bokser.
Matemagisk 6B	Aschehoug	Kap 5. Vinkler og parallelle linjer Kap 6. Trekanter og firkanter Kap. 7 Geometriske mønstre Kap. 8 Areal og omkrets Kap 9. Tredimensjonale figurer	510	28
Matematikk 6	Cappelen Damm	Kap. 3 Geometri Kap. 5 Algebra Kap. 6 Tredimensjonale figurer	291	27
Multi 6A Multi 6B	Gyldendal	Kap. 3 To- og tredimensjonale figurer Kap. 4 Omkrets, areal og volum Kap. 6 Mønster og koordinatsystemet	443	35
Totalt			1244	90

Tabell 1: Kapitler fra lærebøkene i utvalget

Studiens datamateriale består av totalt 1244 geometrioppgaver fordelt på fire lærebøker, og 90 forklaringsbokser (tabell 3). I utvelgelsen av kapitler har jeg valgt å følge definisjonen for geometri fra den tidligere læreplanen “Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006” (LK06):

> Geometri i skolen handlar mellom anna om å analysere eigenskapar ved to- og tredimensjonale figurar og gjere konstruksjonar og berekningar. Ein studerer dynamiske prosessar som spegling, rotasjon og forskyving. Hovudområdet omfattar òg å beskrive plassering og forflytting i rutenett, kart og koordinatsystem. (Kunnskapsdepartementet, 2013)

Ved å studere tematikken for de utvalgte kapitlene, ser man at disse passer overens med denne definisjonen.

Materiell fra kapitlene som ikke er medregnet er spillaktiviteter, nettressurser som Geogebra og programmering, og oppgaver som omtales som “temaoppgaver” (Matematikk 6) og “terrengløypa” (Matemagisk 6B), da dette er sammensatte oppgaver fra ulike temaer og kapitler.

Kapitlene til de utvalgte lærebøkene består av ulike typer oppgaver, forklaringer, eksempler på oppgaveløsning og oppsummeringer. Jeg har valgt å definere forklaringer, eksempler og oppsummeringer som forklaringsbokser. Både når det gjelder forklaringsbokser og geometrioppgaver har jeg valgt å telle enheter. Enkelte oppgaver inneholder deloppgaver, ofte i form av bokstaver, for eksempel 3a - d. Dersom alle deloppgavene inneholder samme instruks, for eksempel “mål vinklene i oppgave a, b og c” ble alle deloppgavene telt som en enhet til sammen. På samme måte ble oppgaver der deloppgavene fulgte en streng med instrukser, der neste oppgave var avhengig av den forrige, telt som en samlet enhet. Hvis deloppgavene derimot inneholdt ulike instrukser, ble hver deloppgave telt som enheter.

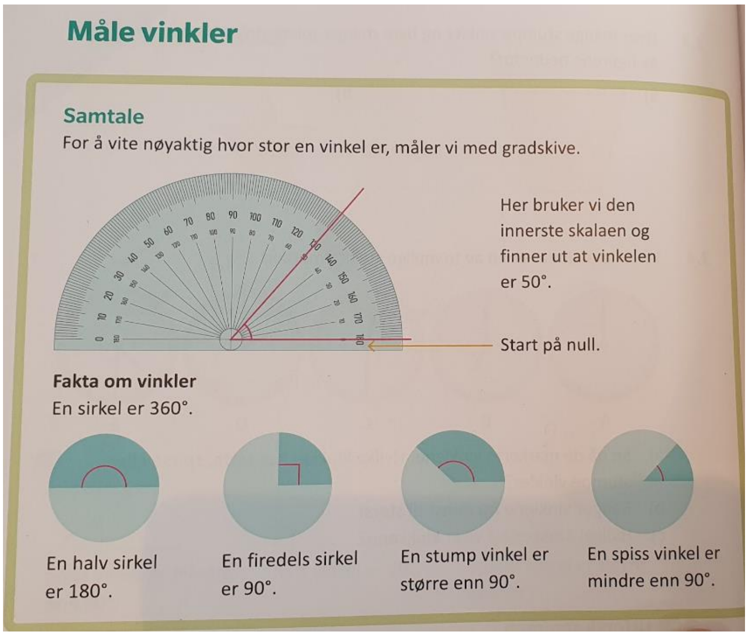
I prosessen måtte jeg også definere hvordan jeg skulle dele inn forklaringsboksene i enheter. Enkelte forklaringsbokser har tekst og illustrasjoner som gjelder for mer enn et element. I slike tilfeller tok jeg en avgjørelse for at jeg skulle dele opp forklaringsboksen i enheter som representerte hver av elementene. Dersom en forklaringsboks for eksempel viste en metode for hvordan finne omkrets og areal av en sirkel, ble dette ansett for å være to enheter, siden dette gjelder to ulike temaer, henholdsvis omkrets og areal, selv om begge gjaldt figuren sirkel. Forklaringsboksene i Matematikk 6 er utformet som en grønn rute, merket “samtale”, og skiller seg ut fra de i de andre utvalgte matematikkbøkene. Forklaringsboksene i Matematikk6 inneholder spørsmål, eller problemstillinger, som står over ei linje inne i ruta. Disse skal danne grunnlag for samtale. Under streken står det et eller flere løsningsforslag eller metoder. Jeg har valgt å definere hele ruten merket “samtale” som forklaringsboks. Grunnen til dette er at både spørsmål og løsningsforslag eller metoder står tilgjengelig for elevene. Jeg kan dermed ikke vite hvordan læreren tar i bruk disse rutene i undervisning. Det jeg tar utgangspunkt i, er tekst og illustrasjoner som er tilgjengelige for elevene, og da anser jeg disse alt som står i rutene som løsningsforslag eller metoder til bruk på spørsmål lignende som dem som står skrevet. Otten et al. (2014) fant også i sitt datamateriale, forklaringsbokser som var lagt opp slik at elevene skulle være en aktiv part, men også de angir at det er rimelig å anta at elevene til en viss grad kun kommer til å være lesere eller mottakere av slikt innhold. Eksempler på slike forklaringsbokser kan ses i analysekapitlet.

3.2.1 Utvelgelse av analysemateriale

Før jeg kunne starte med analysen, måtte jeg finne ut hvilke forklaringsbokser og oppgaver som inneholdt muligheter for resonnering og argumentasjon. Jeg begynner her med å forklare hvordan jeg har valgt ut forklaringsbokser og viser noen eksempler. Under eksemplene på forklaringsbokser, presenterer jeg hvordan jeg har valgt ut oppgaver.

I forbindelse med forklaringsbokser, skilte jeg mellom tilfeller som inneholdt noe vilkårlig og tilfeller som inneholdt noe nødvendig (Hewitt, 1999). Som nevnt i teorikapitlet, er det som er nødvendig innen matematikk, tilfeller som blant annet fremmer behovet for å forstå og bruke matematiske relasjoner, noe som vil si at dette relateres til resonnering og argumentasjon. Disse ble kodet i henhold til passende koder i rammeverket. Forklaringsbokser som inneholdt det som i matematikken anses som vilkårlig, ble ikke gjenstander for analyse. Disse ble likevel telt opp, slik at jeg kunne sammenligne antall enheter med muligheter for resonnering og argumentasjon med enheter som ikke gir slike muligheter.

Eksempel 4 og 5 viser forklaringbokser med vilkårlig innhold, som ikke ble med i analysen.



Eksempel 4: Matematikk 6 s. 84

Eksempel 4 viser en forklaringsboks som både gir instruks om hvordan man skal bruke en gradskive, og den forklarer blant annet hva definisjonen på en stump og spiss vinkel er. Selv om elevene selv kan erfare hvor stor en halv vinkel er, eller at en firedels vinkel er 90 grader, så er antall grader et standardmål som en gang har blitt bestemt. Med andre ord kan dette betegnes som vilkårlig (Hewitt, 1999).


F Koordinatsystem

Et koordinatsystem består av to tallinjer som krysser hverandre. Punktet der linjene krysser hverandre, kalles *origo*.

Den vannrette tallinja kalles *førsteakse*, og den loddrette kalles *andreakse*. Et koordinatsystem brukes til å beskrive plassering av punkter på en flate.

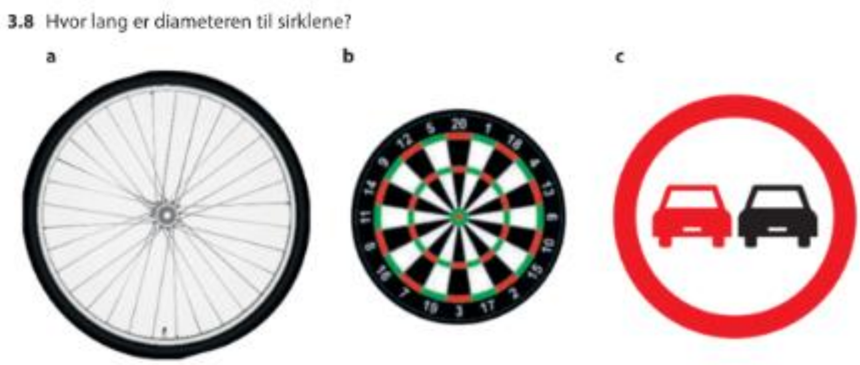
Et punkt i koordinatsystemet blir beskrevet med to tall, som kalles *koordinater*. Koordinatene til punkt A er −3 og 4 og skrives slik: A (−3, 4)

Eksempel 5: Multi 6A s. 46

Eksempel 5 inneholder en forklaring på hvordan man skal skrive koordinater, den forklarer hva de ulike delene i et koordinatsystem kalles, og hva man bruker et koordinatsystem. Dette eksemplet er ikke tatt med i analysen, av samme årsak som eksempel 1.

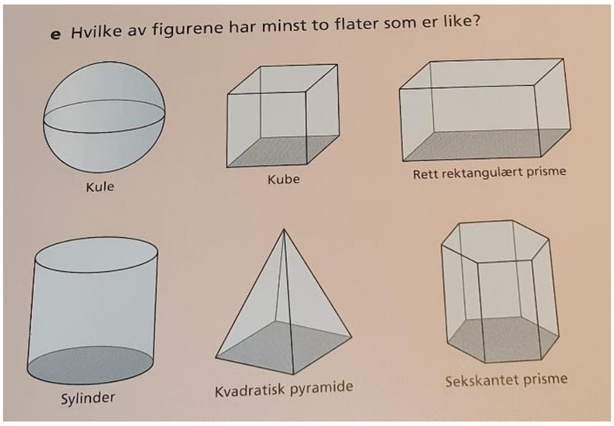
Når det gjaldt oppgaver, fulgte jeg Otten et al. sin metode for utvelgelse. Dette går ut på at kun oppgaver som havnet innenfor en av kategoriene i rammeverket, var de som ble analysert. Eksempler på oppgaveenheter som ikke ble analysert er da de som ber elevene om å regne ut omkrets eller areal, måleoppgaver, eller oppgaver der elevene skal beskrive geometriske figurer eller identifisere deler som diameter, hjørne, kant eller flate.

Eksempel 6 og 7 viser oppgaver som ikke ble med i analysen.


3.8 Hvor lang er diameteren til sirklene?

Eksempel 6: Multi 6A s. 81

Eksempel 6 viser en oppgave der elevene skal måle diameteren med linjal, og inneholder ingen tekst som tilsier at elevene skal komme med noen form for resonnering og argumentasjon. Elevene må identifisere hva en diameter i en sirkel er, og hvordan denne kan måles ved hjelp av linjal. Denne havner ikke innenfor noen av kategoriene i rammeverket, og er av den grunn ikke analysert.



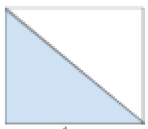
Eksempel 7: Matemagisk s. 182

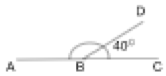
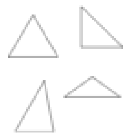
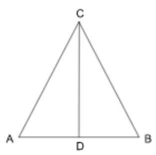
Eksempel 7 viser en oppgave som inneholder definisjoner. For å svare på oppgaven, trenger elevene kun å ramse opp figurene som har minst to flater som er like, uten at teksten krever noen form for resonnering og argumentasjon. For å kunne svare på oppgaven må elevene kunne navn på figurene, hva en flate er, og hva det vil si at de er like. Oppgaven havner med dette ikke innenfor noen av kategoriene i rammeverket, og ble da heller ikke analysert.

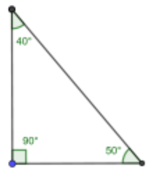
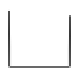
3.3 Analyseprosessen

Innholdsanalysen startet med å lokalisere analyseenhetene ut ifra kriteriene gitt over. Jeg har jobbet meg gjennom bøkene flere ganger for å sjekke om det var noe jeg ville endre på, eller noe jeg kunne ha oversett. Det ble mindre justeringer etter hvert som jeg jobbet meg gjennom datamaterialet flere ganger. Jeg har støttet meg på teori fra Otten et al. (2014) i analyseprosessen, da rammeverket er utviklet av dem.

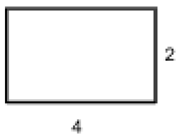
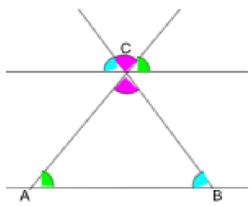
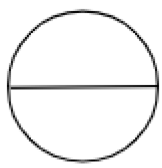
Figur 4 og 5 viser fullstendig kodeoversikt for analysen med illustrerende eksempler.

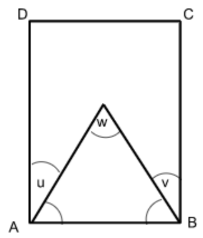
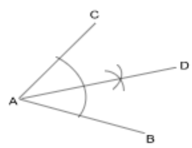
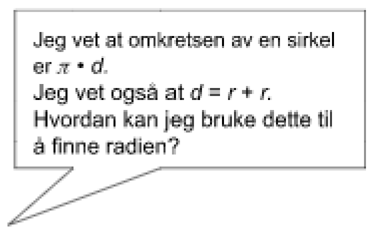
Forklaringsbokser			
	Koder	Betydning	Eksempel
Matematisk	Generelle påstander	Påstanden gjelder et helt utvalg av matematiske objekter eller situasjoner uten unntak.	Formelen for arealet av trekanter: $A = \frac{g \cdot h}{2}$
	Spesifikke påstander	Påstanden gjelder et spesifikt matematisk objekt eller situasjon (eller et begrenset sett med objekter)	Arealet av hele kvadratet er $4 \cdot 4 = 16$ Arealet av den skraverte trekanten er halvparten av arealet av kvadratet. Det vil si at arealet av trekanten er $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$  4 4

påstand			
Type argumentasjon	Deduktiv begrunnelse	Boka gir et logisk argument bygd opp av definisjoner, aksiomer, eller tidligere etablerte resultater for å støtte eller bevise en matematisk påstand.	Her er AC et rett linjestykke og ∠CBD 40°. Vi skal finne ut hvor stor ∠DBA er.  Siden AC er en rett linje, er ∠DBA + ∠CBD = 180°. Dermed er ∠DBA + 40° = 180°. Da er ∠DBA = 180° - 40° = 140°
	Empirisk begrunnelse	Boka gir et bekreftende eksempel for å understøtte en matematisk påstand eller viser at noe stemmer i en påstand ved hjelp av et utvalg av relevante situasjoner.	Ved å måle og legge sammen vinklene i disse trekantene, ser vi at vinkelsummen i alle trekanter er 180°. 
	Oppbygging av et bevis.	Eksemplet inneholder en skisse av et bevis eller viktige trinn til et bevis som vil etablere om en matematisk påstand stemmer eller ikke.	Vi viser her at to vinkler i en trekant er like hvis og bare hvis to sider i trekanten er like. Først tegner vi figuren.  Vi vil vise at: ∠A = ∠B ⇔ △ADC ≅ △ BDC ⇔ AC = BC Det er viktig med definisjoner: Hvis CD er normalen fra C, kan vi bruke kongruenssetningen. △ADC og △BDC er da rettvinklede trekanter med felles katet. Hvis ∠A = ∠B er de kongruente, og hvis hypotenusene AC og BC er like

			store, vil det si at de også er kongruente.
	Fortid eller fremtid.	I stedet for å gi en forklaring i forklaringsboksen, blir det eksplisitt uttalt at et bevis eller en annen form for begrunnelse kan bli funnet i et tidligere kapittel, en senere undervisning, eller i en ekstern kilde (f.eks. internet)	Hvis vi tegner en tilfeldig trekant, er summen av vinkelmålene alltid 180°.  Hvorfor dette alltid stemmer, skal vi se nærmere på senere.
	Overlatt til eleven.	I stedet for å gi en begrunnelse, er det eksplisitt uttalt at elevene vil komme frem til en begrunnelse senere i aktiviteten.	Omkretsen av en sirkel kan regnes ut ved å bruke følgende formel: $O = \pi \cdot d$ Oppgavene på neste side viser hvorfor denne formelen stemmer.
	Ingen	Det er ikke gitt noen begrunnelse for en gitt matematisk påstand, og det er ikke eksplisitt uttalt at elevene senere vil produsere en begrunnelse.	For å finne arealet av et rektangel brukes denne formelen: $A = l \cdot b$
	Utsagn *om* resonnering og bevis	Eksempler med ulike former for bevis, metoder for hvordan bevise noe (f.eks. motbevis), ulike former for resonnering (induktiv vs. deduktiv), forklaringer av strategier for å konstruere et bevis (f.eks. jobbe baklengs)	Når du skal begrunne at noe ikke er sant, kan det være lurt å komme med et motargument. Påstand: Man kan tegne en trekant med to rette vinkler. Motargument: Dersom man har to rette vinkler kan man ikke sette figuren sammen til en trekant. 

Figur 4: Oversikt over koder og eksempler for forklaringsbokser

Oppgaver			
	Koder	Betydning	Eksempel
Matematisk påstand	Generelle påstander	Elevene jobber med en påstand knyttet til et helt utvalg matematiske objekter eller situasjoner uten unntak.	Vis at formelen for omkrets av en sirkel er: $O = \pi \cdot d$
	Spesifikke påstander	Elevene jobber med en påstand som knyttet til et spesifikt matematisk objekt eller situasjon (eller et begrenset sett med objekter)	Vis hvordan du kan regne ut arealet av figuren: 
	Generelle påstander med utgangspunkt i et spesifikt eksempel	Elevene jobber med en påstand knyttet til et helt utvalg matematiske objekter, der et spesifikt eksempel har blitt valgt ut som elevene skal kunne ta i bruk i sin resonnering.	Bruk figuren til å vise at vinkelsummen i en trekant alltid er 180° 
Forventet ele	Lag en hypotese eller endre en påstand.	Elevene blir bedt om å formulere en matematisk påstand, eller endre en feil hypotese til noe elevene tror er sant.	Lag en tråd like lang som diameteren og sjekk hvor mange ganger den går rundt sirkelen. Hva tror du dette forteller om forholdet mellom diameter og omkretsen av en sirkel? 
	Fyll inn det som mangler i hypotesen.	Elevene blir bedt om å fullføre en matematisk hypotese der en del allerede er gitt.	Diameteren går 3,14 ganger rundt omkretsen av en sirkel. Hvordan kan du bruke dette for å regne ut omkretsen av en sirkel?
	Undersøk en hypotese	Elevene blir bedt om å avgjøre om noe kan være sant i en gitt formodning, eller avgjøre sannhetgraden i noe de akkurat har antatt selv.	Sant eller usant? - Et kvadrat er også et rektangel.

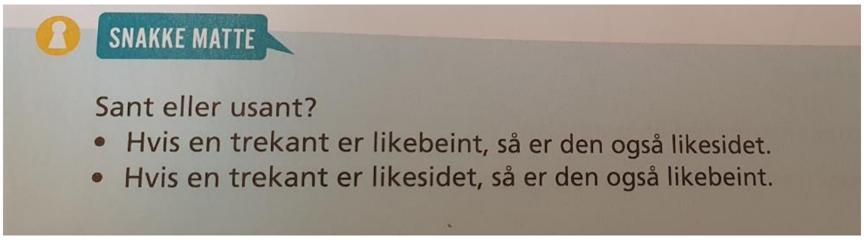
vaktivitet			- Et rektangel er også et kvadrat.
	Utvikle et matematisk bevis.	Oppgaver som spesifikt bruker begrepet “bevis”.	Bevis at $\angle u + \angle v = \angle w$ 
	Utvikle en redegjørelse eller et ikke-bevis	Oppgaver som ber elevene forklare, begrunne, eller vise *hvorfor* noe er sant eller feil, men trenger ikke være et gyldig bevis.	Sant eller usant? **Begrunn** svaret. - Et kvadrat er også et rektangel. - Et rektangel er også et kvadrat.
	Bearbeide et bevis, eller fullføre et bevis	Elevene blir bedt om å gi en disposisjon av et bevis, eller skrive et fullstendig bevis fra en gitt disposisjon.	Ole har konstruert en halveringslinje for ∠BAC, men han har problemer med å begrunne hvorfor AD er halveringslinja til ∠BAC. Hvordan kan Ole gjøre dette, og hva er det viktig at Ole husker på når han begrunner? 
	Fyll inn det som mangler i argumentet eller beviset.	Elevene får noen argument eller bevis, og får beskjed om å fylle inn de manglende delene, eller formulere et fullstendig argument eller bevis.	Hjelp Eva med å finne radien i en sirkel når hun vet at omkretsen er 100 cm. 
	Evaluer eller korriger et argument eller bevis.	Et argument eller bevis blir presentert, og elevene blir bedt om å avgjøre om det er valid eller om å finne feil og korrigere dem.	Sant eller usant? $d = O / \pi$ siden $O = \pi \cdot d$
	Finn et motargument	Elevene blir bedt om å komme med et motargument som viser at en matematisk påstand er feil.	Finn ut som påstandene er sanne eller usanne. Vis gjerne med et motargument om det er mulig. - Et rektangel har bare fire symmetrilinjer.

			- En sirkel har uendelig med symmetrilinjer. - En likesidet trekant har flere symmetrilinjer enn en rettvinklet trekant.
Type argumentasjon	Deduktiv (eksplisitt)	Oppgaven ber elevene følge en logisk kjede med begrunnelser, eller et "deduktivt argument".	Vis trinn for trinn hvordan du kan finne arealet av en kvart sirkel.
	Empirisk (eksplisitt)	Oppgave ber elevene om et eller flere bekreftende eksempler, eller finne støtte i et gitt eksempel.	Tegn fire rektangler. Del hvert rektangel i to, slik at du får to trekanter. Klipp ut rektanglene og trekantene og sammenlign. Hvordan kan du bruke dette for å vise hvordan man finner arealet av en trekant?
	Implisitt	Oppgaven ber elevene bli med på å resonnere og bevise (f eks.. "bevis at.." eller "forklar hvorfor.."), men spesifiserer ikke hvilken type argument elevene skal komme med.	Ole sier: Når omkretsen av en sirkel er 21 cm er diameteren omtrent 7 cm. Er påstanden til Ole sann? Forklar hvorfor den er sann eller usann.
	Oppgaver *om* resonnering og bevis.	Oppgaver der elevene skal jobbe med ulike former for bevis, metoder for hvordan bevise noe (f.eks. motbevis), ulike former for resonnering (induktiv vs. deduktiv), forklaringer av strategier for å konstruere et bevis (f.eks. jobbe baklengs)	Vanligvis forbinder man Pythagoras med Pythagoras teorem, men det var også andre sivilisasjoner som var klar over sammenhengen mellom sidene i en rettvinklet trekant. Det er flere bevis for Pythagoras teoremet, og et av dem er et gammelt kinesisk bevis av Zhao Shuang. Gå inn på linken for å se beviset på Youtube: Zhao Shuang Prøv deretter å forklare så godt som mulig, ved hjelp av illustrasjoner og tekst, hvordan dette beviset er bygd opp.

Figur 5: Oversikt over koder og eksempler for oppgaver.

Rammeverket skiller, som nevnt i teorikapittelet, mellom matematiske påstander og type argumentasjon, og disse blir ansett som separate dimensjoner (Otten et al., 2014). For eksempel kan generelle påstander, argumenteres for både deduktivt og empirisk. Dette skillet gjør at forklaringsbokser og oppgaver får flere koder tilknyttet seg, fordi de må analyseres innenfor hver kategori i rammeverket. En oppgave kan også få flere koder som gjelder aktivitet, for eksempel om oppgaven ber om å "undersøke en hypotese", og så ber om en begrunnelse.

Jeg illustrerer her hvordan en oppgave tildeles flere koder.


SNAKKE MATTE

Sant eller usant?

- Hvis en trekant er likebeint, så er den også likesidet.
- Hvis en trekant er likesidet, så er den også likebeint.

Eksempel 8: Fra Matemagisk 6B s. 42

Denne oppgaven ble først identifisert som en oppgave med muligheter for resonnering og argumentasjon. Dette henger sammen med at oppgaven kan relateres til kategorien "relateres til matematiske påstander", og elevaktiviteten "undersøke en hypotese".

Deretter plasseres de andre kodene ut ifra hvordan ordlyden i teksten er skrevet. Oppgaven får da følgende koder:

- generell påstand
- forventet elevaktivitet: undersøk en hypotese
- implisitt argument

Begrunnelse for «generell påstand» er at ordlyden i teksten viser til «en trekant», og det kan dermed være snakk om en hvilken som helst trekant. Elevene bes om å finne ut om de gitte hypotesene er sanne eller usanne, og det er grunnen til koden «undersøk en hypotese». «Implisitt»-koden gis fordi teksten i denne oppgaven ber ikke om noen bestemt form for argumentasjon.

I etterkant av innholdsanalysen, tok jeg tak i den kvantitative siden. De ulike kategoriene i rammeverket ble brukt for å finne frekvensen av ulike former for argumentasjon og bevis i forklaringsboksene og oppgavene. Jeg kunne da for eksempel sammenligne antall ulike typer forventet elevaktiviteter som gir mulighet for arbeid med argumentasjon og bevis i de ulike bøkene, og type argumentasjon. Resultatet av dette fremstilles i analysekapittelet.

3.4 Etiske hensyn

Som forsker har man flere etiske hensyn man må ta i forbindelse med gjennomføringen. Arbeid med dokumentanalyse av lærebøker vil ha færre etiske hensyn, sammenlignet med andre forskningsmetoder som for eksempel innebærer intervju eller observasjon av elever eller lærere. Min studie krever verken godkjenning angående personvern, eller for oppbevaring av innsamlet data. Det er likevel noen etiske hensyn jeg må ta i rollen som forsker. Som et bidrag til at forskning skal foregå i henhold til etiske normer har de nasjonale forskningsetiske komiteene satt en rekke retningslinjer som skal følges. I min studie vil det være retningslinjer fra Den nasjonale forskningsetiske komite for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) som er aktuelle. Blant retningslinjene fra NESH står det om god henvisningsskikk. Jeg mener jeg har tatt hensyn til dette i mitt arbeid ved å henvise til andres forskning, og dermed anerkjent det arbeidet de har gjort.

I min studie har jeg valgt å skille mellom læreverkene, selv om jeg ikke har foretatt en komparativ analyse. Verken forskningsspørsmålet mitt, eller diskusjonskapitlet har sammenligning av læreverkene som fokus. Likevel synes jeg det er ærlig overfor andre som kan ha interesse av resultatene fra min studie, blant annet lærere, lærebokforfattere og andre forskere, at resultatene blir vist for hvert læreverk. Dette samsvarer med punkt

A.6 i retningslinjene fra NESH, der det blant annet står at materiale og resultater bør deles så åpent som mulig for å kunne utvikle ny kunnskap og etterprøve andres analyser og resultater.

Jeg har etterstrebet å gjennomføre analysen med mest mulig objektivitet. For å få til dette har jeg laget kriterier for utvelgelse av datamateriale og analysering. På den måten har lærebøkene blitt analysert på likt grunnlag. Likevel må det presiseres at analysen er min tolkning av datamaterialet, basert på tilknyttet teori. Av den grunn er det vanskelig å si at min studie er preget av absolutt objektivitet, selv om dette har vært målet.

3.5 Studiens kvalitet

For å vurdere kvaliteten til en studie ser man på validitet (gyldighet) og reliabilitet (pålitelighet) (Postholm & Jacobsen, 2018). Det finnes ulike typer validitet og reliabilitet (Cohen et al., 2017). Av den grunn har jeg gjort et utvalg som er relevant for denne studien. Disse blir herunder presentert og diskutert opp mot denne studien.

3.5.1 Validitet

Validitet er kvaliteten på forskningsresultatene som fører til at de blir akseptert som sanne (Krippendorff, 2004). Om en oppgave innehar har høy eller lav validitet, vil peke på hvor gyldig resultatet er (Grønmo, 2016). Krippendorff (2004) skriver at innenfor innholdsanalyser er det ideelle å beskrive og følge prosedyrene for utvelgelse av tekst, lesing og analysering av tekst, så nøyaktig at enhver som benytter seg av de samme prosedyrene på det samme datamaterialet, vil kunne få samme resultat. Prosedyrene i min studie er beskrevet i avsnittene over, der jeg har presentert hvordan jeg har valgt ut forklaringsbokser og oppgaver til analyse, hvordan rammeverket blir brukt, og hvordan dette bidrar til å finne svar på forskningsspørsmålet. Grønmo (2016) påpeker viktigheten med at validitet ses i sammenheng med forskningsspørsmålet, og at validiteten kan måles ut fra i hvor stor grad datainnsamling og analyse resulterer i funn som er relevante for forskningsspørsmålet. Dersom gjennomføringen og funnene svarer til forskningsspørsmålet, vil det si at oppgaven har høy validitet. Prosedyrene jeg har fulgt i denne studien, har vært gjennomført for å kunne gi svar på forskningsspørsmålet.

Postholm & Jacobsen (2018) deler gyldigheten til en studie i indre og ytre validitet. Indre gyldighet handler om hvilke konklusjoner man kommer frem til, og i hvilken grad konklusjonene er gyldige ut ifra det som er studert. I denne forbindelsen handler det i hovedsak om to forhold; årsaksforhold og begrepsvaliditet. Årsaksforhold er ikke relevant for denne studien, så det er kun begrepsvaliditet som kommenteres. Begrepsvaliditet handler om at virkeligheten som blir studert og analysert, står i samsvar med begreper og teori benyttet i denne sammenhengen (Postholm & Jacobsen, 2018). I denne studien har jeg benyttet meg av teoretiske begreper hentet fra tidligere forskning. I tillegg er rammeverket gjort rede for, både ved hjelp av teori og eksempler som henviser til hvordan forklaringsbokser og oppgaver kan se ut i de ulike kategoriene. Analysen er gjennomført med bruk av rammeverket, og er gjort rede for ved hjelp av illustrerende eksempler. Av denne grunn mener jeg det er samsvar mellom virkeligheten som fremvises i datamaterialet, og begreper og teori.

Ytre validitet blir av Postholm og Jacobsen (2018) beskrevet som muligheten for å generalisere. Med andre ord i hvilken grad konklusjoner og funn fra en undersøkelse kan være gjeldende for en større mengde data enn det som ble undersøkt av studien. Jeg har i denne studien undersøkt mulighetene for arbeid med resonnering og argumentasjon i fire matematikkbøker for 6. trinn. Disse lærebøkene er gitt ut av de tre største forlagene for i Norge. På bakgrunn av dette kan jeg si at funn fra undersøkelsen til en viss grad er generaliserbare. Datamaterialet har bestått av en stor mengde forklaringsbokser og oppgaver, og ut ifra trekk som går igjen i flere av matematikkbøkene, kan det dras noen hovedlinjer som kan sies å overføringsverdi slik at det kan generaliseres. Noe som for eksempel går igjen i flere oppgaver er at elevene skal ta stilling til om påstander kan være sanne eller usanne. I og med at resonnering og argumentasjon er en kjerneverdi i matematikkfaget, og funn tilsier at slike type oppgaver går igjen flere ganger i de utvalgte matematikkbøkene, mener jeg det er nærliggende å tro at denne typen oppgaver går igjen i flere emner og på flere trinn. På samme måte mener jeg at det er nærliggende å tro at funn som handler om frekvensen av forklaringsbokser og oppgaver som gir mulighet for arbeid med resonnering og argumentasjon, kan si noe om tendens. Med andre ord, det er nærliggende å tro at de fleste andre matematikkbøker opererer med lignende frekvens av muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon. Dessuten, siden matematikkbøkene i utvalget kommer fra de største forlagene, representerer de matematikkbøker som stort sett blir brukt i norske klasserom, og da kan man si at de representerer matematikk som norske elever møter i læreverk. En negativ side med studien, med tanke på ytre validitet, er at jeg valgte å ikke innlemme lærerveiledningen i datamaterialet. Dermed har ikke studien tatt hensyn til aktiviteter knyttet til de ulike temaene som står i lærerveiledning. Jeg har tidligere begrunnet valget om å ikke inkludere lærerveiledningen, men jeg vil likevel anerkjenne at elevene i realiteten kan få flere muligheter til arbeid med resonnering og argumentasjon, enn hva mine funn tilsier.

3.5.2 Reliabilitet

Ifølge Grønmo (2016) er reliabilitet noe som viser hvor pålitelig datamaterialet er, med andre ord hvor i hvor stor grad man kan stole på at funn fra forskning stemmer. I tillegg knyttes reliabilitet til refleksjon over hvordan forskeren eller undersøkelsen, eller begge deler, kan ha bidratt med å påvirke resultatet (Postholm & Jacobsen, 2018). Grønmo (2016) skiller mellom to måter å måle reliabilitet på; stabilitet og ekvivalens. Stabilitet handler om graden av samsvar mellom datamateriale, der to undersøkelser gjentas ved ulike tidspunkt. Dersom denne studien gjentas ved et senere tidspunkt, ved å bruke samme de samme data og lik prosedyre for analyse, vil stabiliteten være høy dersom resultatene fra den andre undersøkelsen samsvarer med mine. I denne studien har jeg benyttet et fast rammeverk i analysen, noe som fører til at prosedyren med analyseringen blir systematisk og objektiv, og dermed ikke påvirkes over tid. I tillegg består datamaterialet av nye matematikkbøker som er skrevet i henhold til ny læreplan. Av den grunn er det derfor rimelig å anta at datamaterialet ikke endrer seg, noe som gjør at undersøkelsen blir lett å gjenskape.

Den andre måten man kan oppnå høy grad av reliabilitet på, er via ekvivalens. Dersom forskjellige forskere gjennomfører samme studie, ved hjelp av samme datamateriale og prosedyre for analyse, og kommer frem til lik konklusjon, har studien høy grad av ekvivalens (Grønmo, 2016). Dette er med andre ord i motsetning til stabilitet, der reliabiliteten blir målt ved hjelp av tid. Undersøkelsene mine er godt forankret i teorien, i tillegg inneholder rammeverket gode beskrivelser for de ulike kategoriene og kodene som er brukt. Jeg har hatt god dialog med veileder som også har gjennomgått analyse av enkelte av enhetene i datamaterialet, og vi har hatt stor grad av enighet når det har kommet til hvilke koder enhetene skulle tildeles. Med dette vil jeg si at studien har høy grad av reliabilitet, både i form av stabilitet og ekvivalens.

4 Resultater og analyse

Forskningsspørsmålet i denne studien er: Hvilke muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon finnes i forklaringsbokser og oppgaver innen temaet geometri i tre læreverk i matematikk for 6. trinn? Jeg vil her presentere analysen og resultater fra analysen av forklaringsboksene og oppgavene i de fire matematikkbøkene som læreverkene består av. Studien er ikke en komparativ studie, men det er likevel hensiktsmessig å skille mellom matematikkbøkene i stedet for å se på datamaterialet under ett. Dette vil gi et mer realistisk bilde av muligheter for arbeid med argumentasjon og bevis som faktisk tilbys elevene, siden de som regel følger et læreverk.

Jeg har kodet forklaringsbokser og oppgaver i henhold til rammeverket, slik det ble beskrevet i metodekapitlet. Jeg har tatt utgangspunkt i rammeverket for å danne strukturen i dette kapitlet, med hensyn til inndelingen av avsnitt. Først vil jeg gjennomgå funn og analyse av forklaringsbokser, deretter vil jeg gjøre det samme med oppgaver. Til slutt oppsummerer jeg funn fra hele analysen.

Datamaterialet består av til sammen 1244 geometrioppgaver og 90 forklaringsbokser. Av disse inneholder henholdsvis 61 geometrioppgaver og 32 forklaringsbokser, muligheter for arbeid med argumentasjon og bevis. Oversikt over geometrioppgaver og forklaringsbokser fordelt på de ulike matematikkbøkene kan ses i tabell 2.

Bøker	Antall geometrioppgaver	Antall geometrioppgaver med argumentasjon og bevis.	Antall forklaringsbokser	Antall forklaringsbokser med argumentasjon og bevis.
Multi 6A & 6B	243	8	35	13
Matematikk 6	291	19	27	10
Matemagisk 6B	510	44	28	9
Totalt	1244	71	90	32

Tabell 2: oversikt over oppgaver og forklaringsbokser i geometri

Analysen av de fire lærebøkene, viser at 6 % av alle oppgavene innen geometri gir muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon. Blant alle forklaringsboksene er det 36 % som inneholder slike muligheter.

4.1 Resonnering og argumentasjon i forklaringsbokser

Forklaringsboksene er som tidligere nevnt delt inn i enheter, da noen av instruksjonen eller forklaringene inneholder sammensatt informasjon. Når jeg refererer til en forklaringsboks, er det dermed en enhet. Forklaringsboksene inneholder enten generelle eller spesifikke påstander. I forbindelse med hvilken form for argumentasjon som er brukt for å vise at påstandene i forklaringsboksene stemmer, viser funnene at det er benyttet deduktiv, empirisk eller ingen begrunnelse. De øvrige kategoriene i rammeverket var ikke å finne blant datamaterialet.

Av 32 forklaringsbokser som inneholder resonnering og argumentasjon, er det 68 % som inneholder generelle påstander. Fordelingen av påstander funnet i forklaringboksene i matematikkbøkene vises i tabell 3 under.

Bøker	Antall forklaringsbokser med argumentasjon og bevis.	Antall forklaringsbokser med påstander	Antall forklaringsbokser med spesifikke påstander
Multi 6A & 6B	13	11	2
Matematikk 6	10	5	5
Matemagisk 6B	9	6	3
Totalt	32	22	10

Tabell 3: Fordeling av generelle og spesifikke påstander i matematikkbøkene.

Når det gjelder hvilken type argumentasjon eller begrunnelse som er benyttet i forklaringsboksene, er det flest påstander som argumenteres empirisk for, eller som ikke har noen begrunnelse.

Bøker	Antall forklaringsbokser med argumentasjon og bevis.	Antall forklaringsbokser med deduktiv argumentasjon	Antall forklaringsbokser med empirisk argumentasjon	Antall forklaringsbokser med ingen begrunnelse
Multi 6A & 6B	13	4	8	1
Matematikk 6	10	1	4	5
Matemagisk 6B	9	1	4	4
Totalt	32	6	16	10

Tabell 4: Fordeling av ulike former for argumentasjon eller begrunnelse i forklaringsboksene

Tabell 4 viser fordelingen av type argumentasjon i forklaringsboksene. Av disse utgjør 50% empirisk argumentasjon, 31 % ingen begrunnelse, og 19 % inneholder deduktiv argumentasjon.

Forklaringsboksene med innhold som gir muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon, i de undersøkte matematikkbøkene, omhandler som oftest temaer som omkrets, areal, volum og vinkler. Dette gjelder for alle de læreverkene i datamatemarialet. Under vil jeg vise eksempler på forklaringbokser som har gjennomgått analyse. Jeg vil i tillegg redegjøre for analysen av den enkelte forklaringsboksen.

Avsnittene er delt opp i kategoriene fra rammeverket som har fokus på type begrunnelse eller argumentasjon.

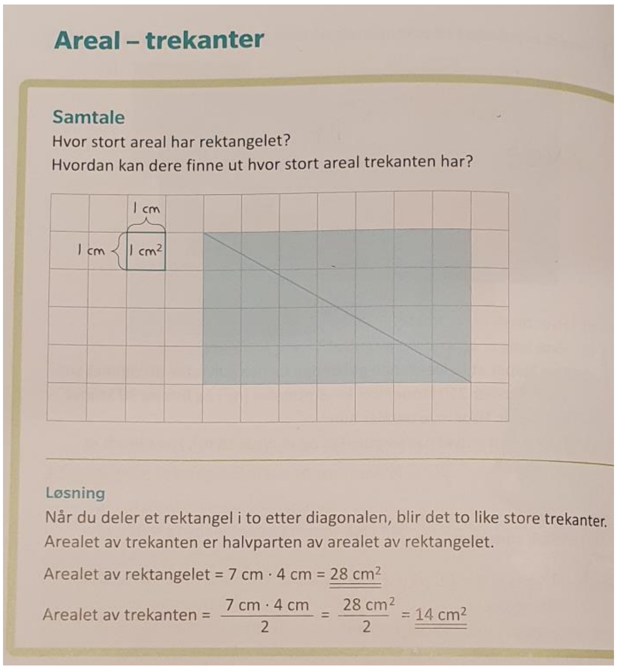
4.1.1 Påstander i forklaringsbokser med deduktiv argumentasjon

I forklaringsboksene der påstandene blir begrunnet ved et deduktivt argument, viser tekst og/ eller illustrasjon i forklaringsboksen at argumentasjonen er bygd opp av tidligere etablert kunnskap, eller ved en logisk kjede av argumenter. Når elever møter forklaringsbokser med deduktiv argumentasjon, kan dette være med på å få elevene til å forstå oppbygningen av et gyldig argument, og dermed få muligheten til å innse behovet for å benytte seg av samme måte på egen hånd.

Analysen viser at det er færrest forklaringsbokser som benytter seg av deduktiv argumentasjon som begrunnelse for påstandene i forklaringsboksene. Jeg vil her vise noen eksempler på forklaringsbokser som benytter seg av deduktiv argumentasjon, og begrunne hvorfor de har fått tildelt de ulike kodene.

Forklaringsboksene i Matematikk 6 skiller seg fra forklaringsboksene i de øvrige bøkene, ved at de er utformet som en oppgave eller et spørsmål som deretter tilbys en løsning. Denne metoden er ikke brukt i de andre matematikkbøkene i datamaterialet. I eksempel under, står to spørsmål som besvares under teksten "løsning".

Eksempel 9: Matematikk 6 s. 106.



Areal – trekanter

Samtale

Hvor stort areal har rektangelet?

Hvordan kan dere finne ut hvor stort areal trekanten har?

Løsning

Når du deler et rektangel i to etter diagonalen, blir det to like store trekanter.

Arealet av trekanten er halvparten av arealet av rektangelet.

Arealet av rektangelet = $7\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} = \underline{\underline{28\ \text{cm}^2}}$

Arealet av trekanten = $\frac{7\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm}}{2} = \frac{28\ \text{cm}^2}{2} = \underline{\underline{14\ \text{cm}^2}}$

Tildelte koder:

- spesifikk påstand
- deduktivt argument

Begrunnelse:

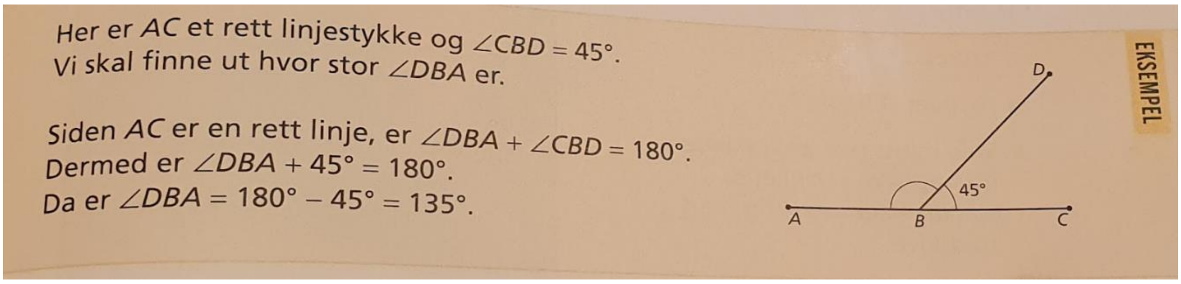
Forklaringsboksen i eksempel 9 tildeles koden "spesifikk påstand" fordi eksempelet viser til en konkret figur med teksten "rektangelet" og "trekanten". I løsningen som vises under, er det også utregning som viser til denne konkrete figuren.

Illustrasjonen viser at man har et rektangel som deles i to like store trekanter. Det første spørsmålet handler om å finne arealet av rektangelet, deretter kommer et nytt spørsmål om trekanten. Dermed viser både tekst og illustrasjon at resultatet av det man skal finne ut; arealet av trekanten, kommer av det tidligere resultatet; arealet av rektangelet. Dette gjør at eksemplet i tillegg får koden "deduktivt argument".

Overskriften i forklaringboksen i eksempel 9 tilsier at elevene i påfølgende sider skal arbeide med å regne ut arealet av trekanter. Forut for denne siden, har oppgavene handlet om å finne omkretsen og arealet av rektangler. Dette er med på å understøtte at forklaringen gis ved hjelp av deduktiv argumentasjon, siden forklaringboksen benytter seg av tidligere etablerte sannheter for å vise at regnemåten om å finne arealet av trekanten er riktig. Dette er i tråd med det Yumati (2017) skriver om at man ved deduksjon konkluderer ved å starte med regler man allerede vet stemmer.

En annen forklaringsboks med samme koder kan ses i eksempel 10.

Eksempel 10: Matemagisk 6B s. 28


Her er AC et rett linjestykke og $\angle CBD = 45°$.
Vi skal finne ut hvor stor $\angle DBA$ er.

Siden AC er en rett linje, er $\angle DBA + \angle CBD = 180°$.
Dermed er $\angle DBA + 45° = 180°$.
Da er $\angle DBA = 180° - 45° = 135°$.

Tildelte koder:

- spesifikk påstand
- deduktivt argument

Begrunnelse:

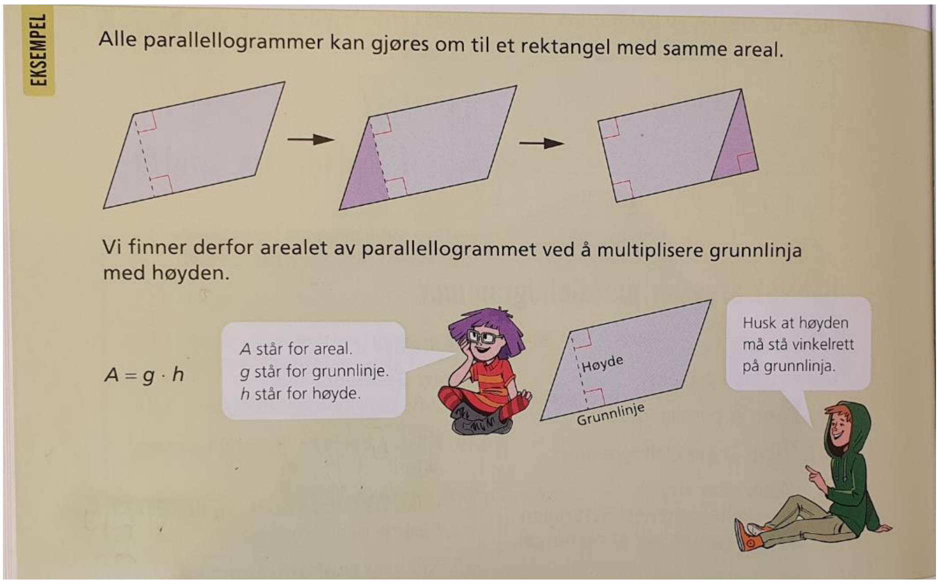
Forklaringsboksen i eksempel 10 har fått koden "spesifikk påstand" fordi den viser til en konkret figur, som både er navngitt og satt vinkelmål på. Teksten henviser ikke til at dette i tillegg gjelder andre lignende figurer.

Argumentasjonen er logisk bygd opp, noe vi ser av ordlyden "siden", "dermed" og "da er", og dette er grunnen til koden "deduktiv" når det gjelder type begrunnelse eller argumentasjon. Eksemplet starter med en definisjon på en rett linje, og bygger argumentasjonen på denne definisjonen i tillegg til resultatet av målingen av en kjent vinkel.

Både eksempel 9 og eksempel 10 benytter deduktiv argumentasjon for å bevise fremgangsmåter, men på noe ulikt vis. Forklaringsboksen fra Matemagisk 6B har tekst som forteller at man starter med en definisjon som bygges videre på, mens forklaringsboksen fra Matematikk 6 i hovedsak benytter seg av en illustrasjon for å vise fremgangsmåten ved å starte med noe kjent. Begge eksemplene viser deduktiv argumentasjon ved å bygge videre på et resultat eller noe man vet fra før, og kan dermed gi muligheten for at elevene forstår nytten av å bygge opp argumentasjon på denne måten.

Påstanden i eksempel 11 under, er også argumentert for ved hjelp av deduksjon. Til forskjell fra de to foregående eksemplene, inneholder dette eksemplet en generell påstand. Dette viser at både spesifikke og generelle påstander kan bli argumentert for via deduksjon.

Eksempel 11: Matemagisk 6B s. 140.



Tildelte koder:

- generell påstand
- deduktivt argument

Begrunnelse:

Forklaringsboksen i eksempel 11 får koden "generell påstand" fordi teksten henviser til "alle" parallellogrammer. I tillegg inneholder illustrasjonen ingen form for mål eller navn, og teksten henviser ikke spesifikt til denne illustrasjonen. Tegningen viser at dette kan gjøres med alle parallellogrammer.

Årsaken til at eksempel 11 i tillegg har fått koden "deduktivt argument", er at illustrasjonen viser en fremgangsmåte der man starter med et parallellogram, deretter gjør man om parallellogrammet til et rektangel, og så finner man arealet av rektangelet. Illustrasjonen kunne like gjerne ha blitt erstattet med teksten «først», «deretter» og «så», men fungerer likevel fint alene som en deduktiv argumentasjon for hvorfor påstanden $A = g \cdot h$ stemmer. Forklaringen viser med andre ord hvordan resultatet "rektangel" kan oppnås, for derved å regne ut arealet av rektangelet.

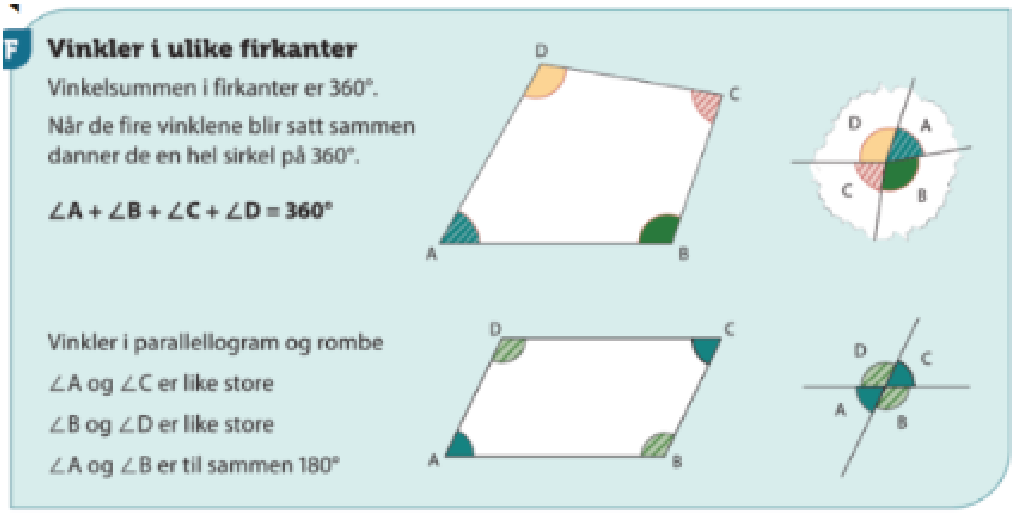
4.1.2 Påstander i forklaringsbokser med empirisk argumentasjon

De neste eksemplene inneholder forklaringsbokser med både generelle og spesifikke påstander som blir begrunnet ved empirisk argumentasjon. Dette er forklaringbokser som inneholder tekst eller illustrasjoner med et eller flere bekreftende eksempler for å understøtte en matematisk påstand, eller viser at noe stemmer i en påstand ved hjelp av et utvalg av relevante situasjoner.

Innledningsvis viste tabell 3 at det var flest forklaringsbokser som inneholdt generelle påstander. I tillegg til dette viste tabell 4 at var flest forklaringsbokser som inneholdt empirisk argumentasjon. Da jeg kryssjekket hvor mange forklaringsbokser som både inneholdt generelle påstander og empirisk argumentasjon, kom jeg frem til at dette gjaldt 11 av de analyserte forklaringsboksene. Til sammenligning var det fem forklaringsbokser med deduktiv argumentasjon og seks forklaringsbokser med ingen begrunnelse, av de som omhandler generelle påstander.

Under følger de utvalgte eksemplene på forklaringsbokser med empirisk argumentasjon for påstandene.

Eksempel 12: Multi 6A s. 91



Tildelte koder:

- generell påstand
- empirisk argument

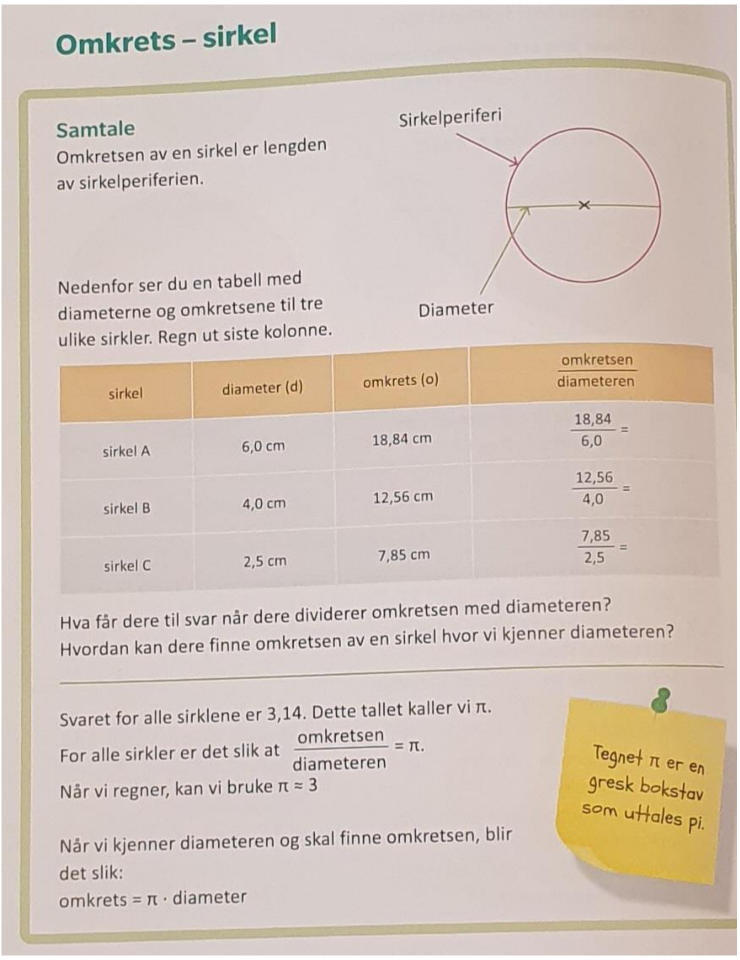
Begrunnelse:

Forklaringsboksen i eksempel 12 fikk koden «generell påstand» fordi forklaringen ikke viser til en spesiell firkant. Ordlyden i forklaringsboksen sier "firkanter", noe som ikke henviser til verken en spesiell firkant eller et utvalg firkanter, men at dette gjelder hele utvalget firkanter.

Påstanden understøttes med to eksempler; en irregulær firkant og et parallellogram. Disse eksemplene gjør at denne forklaringboksen i tillegg tillegges koden "empirisk argument". Eksemplene i forklaringsboksen er gitt for å vise at påstanden stemmer.

Eksempel 13, under, viser en forklaringsboks illustrerer en annen måte å benytte seg av et empirisk argument på. I stedet for å fremvise bekreftende modeller som i eksempel 12, viser eksempelet under at påstanden blir begrunnet av tre utprøvninger som gir samme resultat.

Eksempel 13: Matematikk 6 s. 112



Omkrets – sirkel

Samtale

Omkretsen av en sirkel er lengden av sirkelperiferien.

Sirkelperiferi

Diameter

Nedenfor ser du en tabell med diameterne og omkretsene til tre ulike sirkler. Regn ut siste kolonne.

sirkel	diameter (d)	omkrets (o)	$\frac{\text{omkretsen}}{\text{diameteren}}$
sirkel A	6,0 cm	18,84 cm	$\frac{18,84}{6,0} =$
sirkel B	4,0 cm	12,56 cm	$\frac{12,56}{4,0} =$
sirkel C	2,5 cm	7,85 cm	$\frac{7,85}{2,5} =$

Hva får dere til svar når dere dividerer omkretsen med diameteren?
Hvordan kan dere finne omkretsen av en sirkel hvor vi kjenner diameteren?

Svaret for alle sirklene er 3,14. Dette tallet kaller vi π.

For alle sirkler er det slik at $\frac{\text{omkretsen}}{\text{diameteren}} = \pi$.

Når vi regner, kan vi bruke $\pi \approx 3$

Når vi kjenner diameteren og skal finne omkretsen, blir det slik:
omkrets = $\pi \cdot$ diameter

Tegnet π er en gresk bokstav som uttales pi.

Tildelte koder:

- generell påstand
- empirisk argument

Begrunnelse:

Forklaringsboksen i eksempel 13 fikk tildelt koden «generell påstand» fordi påstandene som gjelder forholdet mellom diameter og omkrets, og hvordan man regner ut omkretsen av en sirkel, gjelder for alle sirkler.

Forklaringsboksen har fått koden "empirisk argument" fordi den inneholder en tabell som viser at forholdet mellom omkrets/ diameter blir 3,14, for tre ulike sirkler. Denne tabellen med de tre utprøvningene brukes som argumentasjon for at påstandene om forholdet mellom omkrets og diameter stemmer alltid er π (3,14), og at man derfor kan finne omkretsen av en sirkel ved å regne π · diameter.

Når elevene møter forklaringsbokser med empirisk argumentasjon, kan dette ha betydning for hvordan de betrakter hva som kan telles som gyldig argumentasjon, noe jeg vil diskutere i diskusjonskapittelet. I forhold til at empirisk argumentasjon ble benyttet i mange forklaringsbokser som omhandlet generelle påstander, var det relativt få forklaringsbokser som inneholdt spesifikke påstander og empirisk argumentasjon. Kun fire av forklaringsboksene med muligheter for resonnering og argumentasjon hadde denne kombinasjonen. Et av dem vises i eksempel 11 under.

Eksempel 14: Multi 6A s. 112

Tildelte koder:

- spesifikk påstand
- empirisk argument

Begrunnelse:

Forklaringsboksen i eksempel 14 ble tildelt koden «spesifikk påstand» fordi den henviser til en spesifikk trekant med både illustrasjon og ordlyden «trekanten», og eksemplet viser hvordan man finner omkretsen rundt trekanten som inneholder spesifikke mål som blir brukt i utregningen.

Forklaringsboksen får i tillegg koden «empirisk argument» fordi påstanden om å legge sammen sidelengdene på trekanten stemmer, understøttes med det illustrerte eksemplet, som i dette tilfellet gjorde at omkretsen rundt trekanten ble tolv meter.

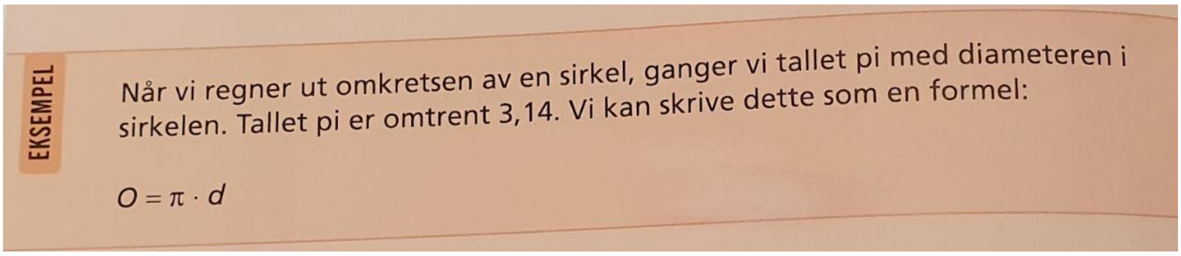
Forklaringboksen i eksempel 14 inneholder også setningen «omkrets er lengden rundt en figur». Denne setningen kan like gjerne handle om en hvilken som helst figur, da ordlyden ikke peker på en spesifikk figur. Av den grunn viser akkurat denne setning til et generell påstand. Dette er likevel ikke en setning som var gjenstand for analysering, siden dette er vilkårlig innenfor matematikken (Hewitt, 1999). At lengden rundt en figur heter omkrets er med andre ord noe som elevene bare må bli fortalt, og betyr kun at dette er et begrep som må læres. Det er dermed heller ikke en matematisk påstand. Påstanden som argumenteres for er utregningen for å finne omkretsen av trekanten.

4.1.3 Påstander i forklaringsbokser uten begrunnelse

De siste eksemplene med forklaringsbokser, viser de som ikke inneholder noen form for begrunnelse eller argumentere for matematiske påstander som blir fremstilt. Disse forklaringsboksene fikk koden «ingen begrunnelse», noe som gjaldt 10 av alle forklaringsboksene med muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon. På samme måte som forklaringsbokser med empirisk argument, gjaldt også størsteparten av forklaringsboksene uten begrunnelse, generelle påstander. 7 av 10 forklaringsbokser som ble kodet med ingen begrunnelse, gjaldt for generelle påstander.

Under følger de utvalgte eksemplene med forklaringsbokser uten begrunnelse eller argumentasjon for påstandene.

Eksempel 15: Matemagisk 6B s. 150


EKSEMPEL

Når vi regner ut omkretsen av en sirkel, ganger vi tallet pi med diameteren i sirkelen. Tallet pi er omtrent 3,14. Vi kan skrive dette som en formel:

$O = \pi \cdot d$

Tildelte koder:

- generell påstand
- ingen begrunnelse

Begrunnelse:

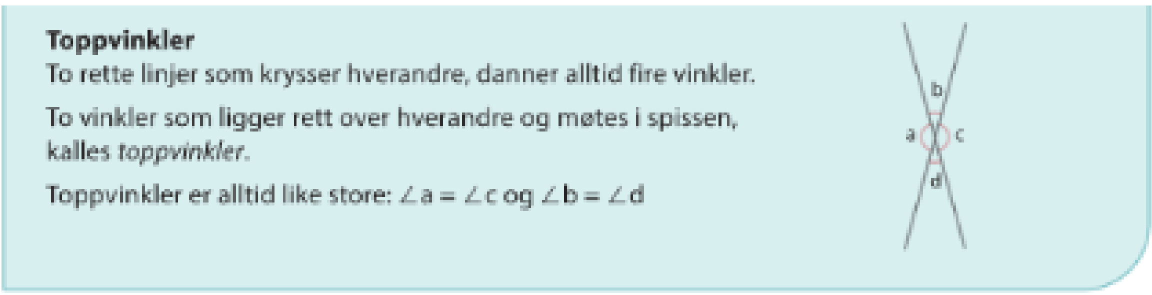
Forklaringsboksen i eksempel 15 har fått koden «generell påstand» fordi teksten henviser til utregning av omkretsen av en sirkel. Ved bruk av ordlyden «en sirkel» vil det si en hvilken som helst sirkel, og det henvises ikke til en bestemt figur. I tillegg står den generelle formelen for å regne ut omkretsen av en sirkel, utformet som en matematisk påstand.

Påstanden er ikke begrunnet, noe som gjør at den også får koden «ingen begrunnelse». Påstanden viser ikke til noen figur, eller forsøker å argumentere med tekst eller symboler for hvorfor den stemmer.

Selv om denne regelen for å regne ut omkretsen av en sirkel er matematisk korrekt, er den presentert kun som en sannhet, uten noen form for å forsøke å argumentere for gyldigheten. Dermed blir det som står i forklaringsboksen kun en påstand uten argumentasjon. To av oppgavene på sidene i forkant av denne forklaringsboksen ber elevene om å sammenligne diameter og omkrets i tre ulike sirkler. Ved at forklaringsboksen hadde henvist til disse oppgavene, kunne den blitt kodet «empirisk argument», og det kan være nærliggende å tro at elevene anser disse oppgavene som bevis for at påstanden stemmer. Man kan likevel ikke anta hvilke slutninger elevene kommer frem til, og jeg har av den grunn forholdt meg til faktisk tekst i forklaringsboksen i eksempel 15.

Neste eksempel viser en generell påstand om toppvinkler som ikke er begrunnet. Denne forklaringsboksen har tekst med tilhørende illustrasjon. Illustrasjonen viser hvordan toppvinkler ser ut, og teksten forteller hva toppvinkler er, men verken tekst eller illustrasjon forsøker å komme med en begrunnelse for hvorfor toppvinkler alltid er like store.

Eksempel 16: Multi 6A s. 86.


Toppvinkler

To rette linjer som krysser hverandre, danner alltid fire vinkler.

To vinkler som ligger rett over hverandre og møtes i spissen, kalles *toppvinkler*.

Toppvinkler er alltid like store: $\angle a = \angle c$ og $\angle b = \angle d$

Tildelte koder:

- generell påstand
- ingen begrunnelse

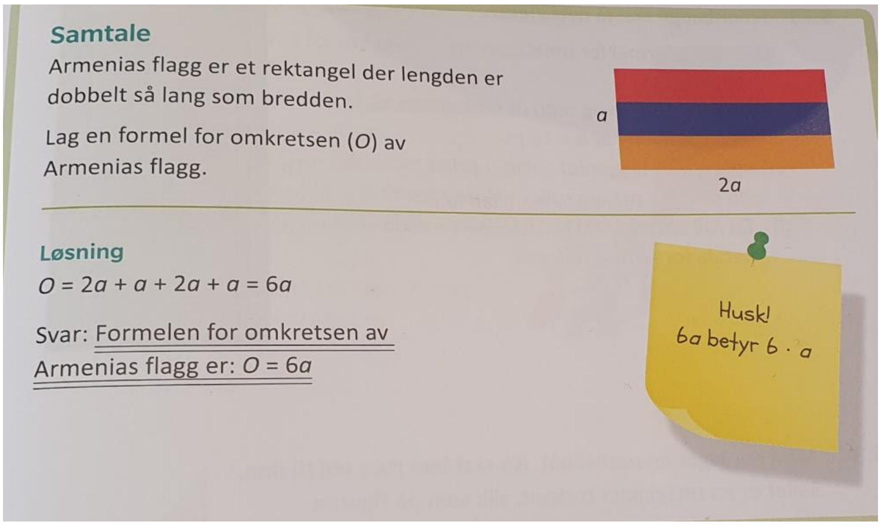
Begrunnelse:

Forklaringsboksen i eksempel 16 tildeles koden «generell påstand» fordi forklaringsboksen inneholder informasjon som gjelder toppvinkler, og det er ikke spesifisert at dette gjelder en spesifikk type toppvinkler, et utvalg toppvinkler, eller figuren som er avbildet.

Påstanden er at toppvinkler alltid er like store, men det begrunnes verken deduktivt eller empirisk for dette. Dersom målene for antall grader de ulike vinklene hadde vært, hadde forklaringsboksen fått koden «empirisk argument». Slik den står nå, gir ikke forklaringsboksen et bekreftende eksempel, som er funksjonen til et empirisk argument (Otten et al., 2014)

Eksempel 17 som vises under, er en av få forklaringsbokser som både har fått kodene «spesifikk påstand» og «ingen begrunnelse». Dette eksemplet er hentet fra Matematikk 6, og som de andre forklaringsboksene derfra, inneholder denne også et spørsmål som blir etterfulgt av et løsningsforslag. Hensikten med å gjøre det slik, er ifølge boka at elevene skal reflektere og argumentere for ulike løsninger. Det er som nevnt vanskelig å vite hvordan læreren legger opp undervisningen med tanke på dette, og dermed kan man heller ikke vite om elevene får reflektert og argumentert, slik det er ment at de skal gjøre.

Eksempel 17: Matematikk 6 s. 191



Tildelte koder:

- spesifikk påstand
- ingen begrunnelse

Begrunnelse:

Forklaringsboksen i eksempel 17 har fått koden «spesifikk påstand». Teksten og illustrasjonen handler kun om Armenias flagg. Påstanden om at formelen for å regne ut omkretsen er 6a, gjelder med andre ord kun dette flagget.

Forklaringsboksen fått koden «ingen begrunnelse» fordi det ikke står noen argumentasjon for hvorfor påstanden *O = 2a + a + 2a + a =6a stemmer*.

Som tidligere nevnt mangler det blant forklaringsboksene argumentasjon eller begrunnelse av påstandene i kategoriene «oppbygging av et bevis», «fortid eller fremtid», og «overlatt til eleven». Disse kategoriene er beskrevet i teorikapitlet, og det er gitt eksempler for hvordan slike forklaringsbokser kan være utformet i metodekapitlet.

I kapittel 4.2 følger eksempler på analyserte oppgaver.

4.2 Resonnering og argumentasjon i oppgaver

Når jeg i analysekapitlet bruker ordet «oppgave», betyr dette en enhet slik jeg definerte det i metodekapitlet. Oppgaver som tilbyr muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon utgjør 6 % av det totale antallet analyserte oppgavene. Disse oppgavene omfatter generelle påstander, spesifikke påstander, og generelle påstander med et spesifikt eksempel. Flesteparten av disse oppgavene omhandler spesifikke påstander, nærmere bestemt 52 % av de analyserte enhetene. 31 % omhandler generelle påstander, og 17 % av oppgavene inneholdt generelle påstander der det var tatt utgangspunkt i et spesifikt eksempel.

I tillegg til å analysere hva som omfattes av påstandene, analyserer jeg i tillegg hvilken type aktivitet med resonnering og argumentasjon som det er forventet at elevene skal gjennomføre i oppgavene, og jeg undersøker på hvilken måte oppgavene ber elevene om å begrunne eller argumentere. Når det gjelder forventet elevaktivitet, finner jeg kun oppgaver med disse aktivitetene:

- Lag eller endre en hypotese eller påstand
- Undersøk en hypotese
- Utvikle en redegjørelse eller et ikke-bevis
- Fyll inn det som mangler i argumentet eller beviset
- Finn et motargument.

Med andre ord fant jeg ikke oppgaver som passet i de øvrige kategoriene i rammeverket.
Disse kategoriene som står i tabell 5.

Fyll inn det som mangler i hypotesen.
Utvikle et matematisk bevis.
Bearbeide et bevis, eller fullføre et bevis.
Evaluer eller korriger et argument eller bevis.

Tabell 5: Kategorier i rammeverket som ikke passet med noen av oppgavene.

Som nevnt tidligere, ser jeg på formuleringen av oppgavene, for å finne de som gir muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon. Det betyr at jeg ikke tilegner oppgavene tolkning basert på hva jeg tror elevene kan produsere. Med dette vil jeg heller ikke komme med antakelser om hva jeg tror elevene kommer til å bruke av tidligere kunnskap, resultater, eller hvordan de ser og bruker sammenhenger, med mindre det eksplisitt står uttalt i oppgaveteksten at elevene skal benytte seg av disse.

Bøker	Antall oppgaver med argumentasjon og bevis.	Antall oppgaver med generelle påstander	Antall oppgaver med spesifikke påstander	Antall oppgaver med generelle påstander med spesifikt eksempel
Multi 6A & 6B	8	3	3	2
Matematikk 6	19	1	17	1
Matemagisk 6B	44	18	17	9
Totalt	71	22	37	12

Tabell 6: Fordeling av påstander i oppgavene blant matematikkbøkene

Blant 71 oppgaver som tilbyr muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon, finner jeg følgende fordeling av forventede elevaktiviteter i de ulike bøkene, vist i tabell 7.

Bøker	Lag eller endre en hypotese eller en påstand.	Undersøk en hypotese	Utvikle en redegjørelse eller et ikke-bevis	Fyll inn det som mangler i argumentet eller beviset.	Finn et motargument.
Multi 6A & 6B	2	6	0	0	0
Matematikk 6	11	3	7	0	0
Matemagisk 6B	5	9	30	2	1
Totalt	18	18	37	2	1

Tabell 7: Fordeling av type forventede elevaktiviteter i oppgavene.

Som nevnt i metodekapitlet var det enkelte av oppgavene som ble tildelt flere enn en kode med tanke på hvilken elevaktivitet som kan forventes at elevene gjennomfører. Analysen tilsier at 62 % av oppgavene fikk koden «utvikle en redegjørelse eller ikke-bevis», noe som utgjorde flesteparten av oppgavene med resonnering og argumentasjon. 26 % av oppgavene fikk koden «undersøk en hypotese», og like mange, altså 26 % fikk koden «lag eller endre en hypotese eller påstand». De andre to kategoriene i tabellen var bare å finne i Matemagisk 6B.

Når det gjelder hvilken type resonnering eller argumentasjon elevene blir bedt gjennomføre, er det klart flest som havner under kategorien implisitt. Det vil si at flesteparten av oppgavene ikke eksplisitt ba om en spesiell form for argumentasjon, eller krevde en bestemt måte å resonnere på. Dette er i tråd med Otten et al. (2014) sin studie, der de også anerkjente at de fleste oppgavene kom til å få denne koden, på grunn av at oppgaver i matematikkbøkene ofte ikke ber om en bestemt form for resonnering eller argumentasjon. Det er likevel viktig å ha denne koden, siden man ikke kan forutse hvilken metode elevene kommer til å bruke i resonneringen, eller hvilken form for argumentasjon elevene kommer til å produsere uten at oppgaven krever det.

Oversikt over ulike former for resonnering eller argumentasjon som oppgavene ba om, vises i tabell 8.

Bøker	Antall oppgaver med resonnering og argumentasjon.	Antall oppgaver med deduktiv resonnering eller argumentasjon	Antall oppgaver med empirisk resonnering eller argumentasjon	Antall oppgaver med implisitt resonnering eller argumentasjon
Multi 6A & 6B	8	0	2	6
Matematikk 6	19	0	0	19
Matemagisk 6B	44	3	9	32
Totalt	71	3	11	57

Tabell 8: Oversikt over ulike former for argumentasjon i oppgavene.

Under vil jeg vise eksempler fra oppgaver som gir muligheter for arbeid med argumentasjon og bevis. Jeg har valgt å dele inn delkapitlene slik at de presenterer ulike former for forventede elevaktiviteter som er funnet i de analyserte oppgavene.

4.2.1 Utvikle en redegjørelse eller et ikke-gyldig bevis

Jeg starter med å vise eksempler fra kategorien som flest oppgaver havnet innenfor. Dette var oppgaver som ble kodet «utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis». Oppgaver som mottok denne koden gir elevene muligheter til å arbeide med resonnering og argumentasjon, ved at elevene blir bedt om å forklare, begrunne eller vise hvorfor noe er sant eller usant, eller hvilke trinn de har utført i en oppgave. Det står da ikke eksplisitt nevnt i oppgaven hvordan elevene skal utføre disse aktivitetene. Med andre ord kan det for eksempel stå at elevene skal forklare hvorfor vinkelsummen i en trekant er 180°, men det står ikke på hvilken måte det skal forklares. Slike oppgaver krever dermed ingen spesifikk måte elevene skal arbeide med resonnering på. Alle oppgavene som mottok denne koden, fikk i tillegg kodene «empirisk» eller «implisitt» når det kom til hvilken form for argumentasjon oppgaven ba om.

I tillegg var det overvekt av oppgaver med koden «utvikle redegjørelse eller ikke-gyldig bevis», som også ble kodet «spesifikke påstander». 23 av oppgavene fikk kombinasjonen av disse kodene. Til sammenligning ble 7 av oppgavene kodet «generelle påstander», og 6 av oppgavene kodet «generelle påstander med spesifikke eksempel», i kombinasjon med «lag en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis».

Eksemplene under viser ulike oppgaver som har fått koden «utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis» i kombinasjon med andre koder.

I alle tilfeller kommer jeg også med en begrunnelse for kodene som er brukt.

Eksempel 18 viser en oppgave der det er forventet at elevene kommer til å produsere en redegjørelse eller et ikke-gyldig bevis. Som Otten et al. (2014) påpeker, er det ikke utenkelig at enkelte elever kommer til å produsere et gyldig argument eller resonnere empirisk i arbeid med slike oppgaver. Man kan ikke forutse hva elevene kommer til å gjøre når det ikke står mer spesifikt i oppgaven, enn at elevene i dette tilfellet skal «forklare».

Eksempel 18: Matemagisk 6B s. 35

b Tenk deg at du har *n* slike linjestykker, der *n* er et hvilket som helst positivt heltall. Forklar hvordan du kan regne ut hvor mange vinkler mellom 0° og 360° som dannes av disse *n* linjestykkene.

Tildelte koder:

- generell påstand
- forventet elevaktivitet: utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis
- implisitt argument

Begrunnelse:

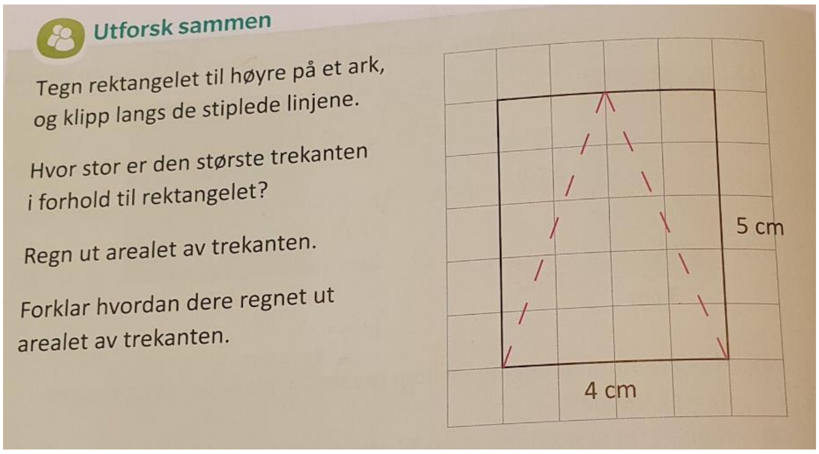
Oppgaven i eksempel 18 har fått koden «generell påstand» fordi det i teksten står at *n* skal være «et hvilket som helst positivt heltall». Ifølge oppgaven skal elevene da lage en generell regel.

Oppgaven har fått tildelt koden «utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig» bevis fordi det i teksten står at elevene skal «forklare». I denne oppgaven skal elevene forklare hvilke trinn de må ta for å finne ut hvordan de kan regne ut antall vinkler i den gitte konteksten. Når elevene skal forklare i denne oppgaven, kan man ikke vite om elevene kommer til å bruke en logisk kjede med argumenter, vise med eksempler, eller forklare på en annen måte.

Oppgaven får koden «implisitt argument» av samme begrunnelse som koden for elevaktivitet, fordi det ikke eksplisitt står hvordan elevene skal forklare eller hvordan de skal komme frem til forklaringen.

Eksempel 19, som vises under, demonstrerer en spesifikk påstand i en oppgave med «utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis» som forventet elevaktivitet. Også i denne oppgaven blir elevene bedt om å «forklare».

Eksempel 19: Matematikk 6 s. 108



Tildelte koder:

- spesifikk påstand
- forventet elevaktivitet: utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis
- implisitt argument

Begrunnelse:

Oppgaven i eksempel 19 har fått koden «spesifikk påstand» fordi både tekst og illustrasjon henviser til en bestemt figur med påsatte mål. Det er denne figuren elevene skal jobbe med, og legge forklaringer til. Det står ikke at elevene skal relatere forklaringen sin til flere eller alle typer trekanter.

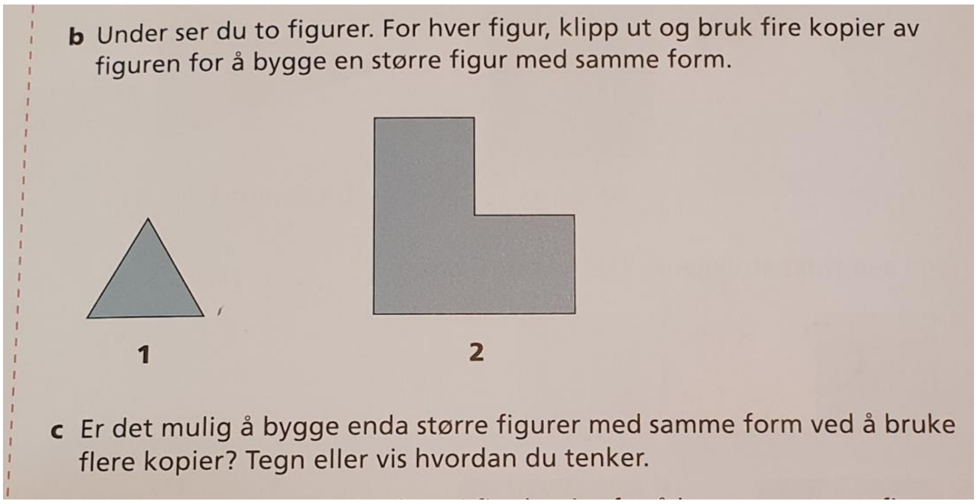
Oppgaven har fått tildelt koden «utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis» fordi det i teksten står at elevene skal forklare hvordan de har regnet ut arealet av trekanten i figuren. Elevene må dermed forklare hva de har gjort for å regne ut arealet. Det står ikke forklart i oppgaveteksten hvordan elevene skal resonnere over hvordan arealet ble regnet ut. Man kan derfor ikke vite om elevene benytter seg av størrelsesforholdet mellom rektangelet og den trekanten i resonneringen, eller om de forklarer uavhengig av dette.

Oppgaven får koden «implisitt argument», siden det i teksten ikke står på hvilken måte elevene skal jobbe med forklaringen på.

I forkant av oppgaven, i eksempel 19, har elevene hatt muligheter for å arbeide med oppgaver som handler om å finne arealet av trekanter. I tillegg inneholder forklaringsboksen forut for denne oppgaven, et løsningsforslag for hvordan elevene kan regne ut arealet av en trekant. Når oppgaven ber elevene om å forklare hvordan de regnet ut arealet av trekanten, kan det like godt tenkes at de forklarer ved hjelp av kunnskap fra oppgaver de har regnet ut forut for denne oppgaven, som at de benytter seg av det de har gjennomført av sammenligning mellom rektangel og trekant. Når det ikke står skrevet eksplisitt i teksten hva elevene skal bruke i sin resonnering, kan man ikke forutse hva elevene kommer til å gjøre. Denne oppgaven gir altså muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon ved at elevene blir bedt om å komme med en forklaring for hva de gjør, men man vet ikke hvilken metode elevene vil komme til å bruke.

Neste eksempel, 20, er en av få oppgaver med koden «lag en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis», som samtidig eksplisitt ber om empirisk argumentasjon ved at elevene skal tegne eller vise hvordan de tenker. Eksempel 20 viser to oppgaver, og det er oppgave c som gir muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon. Oppgave b er tatt med i eksemplet fordi oppgave c er en videreføring av det elevene blir bedt om å gjøre i oppgave b.

Eksempel 20: Matemagisk 6B s. 90



Tildelte koder:

- spesifikk påstand
- forventet elevaktivitet: utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis
- empirisk argument

Begrunnelse:

Oppgave c i eksempel 20 har fått koden «spesifikk påstand» fordi elevene skal jobbe med problemstillingen som handler om de to figurene som er illustrert.

Oppgaven har fått tildelt koden «utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis» fordi oppgaven handler om at elevene skal forklare om det er mulig eller ikke mulig å bygge større figurer med samme form.

Oppgaven i eksempel 20 fikk koden «empirisk argument», fordi elevene eksplisitt blir bedt om å tegne eller vise hvordan de tenker. Oppgaven ber dermed om at elevene skal forklare hvordan de tenker, ved hjelp av eksempler.

Neste delkapittel viser jeg analyserte oppgaver der det er forventet at elevene skal undersøke en hypotese. Det var også mange oppgaver som havnet innen kategorien «undersøk en hypotese» i rammeverket.

4.2.2 Undersøk en hypotese

Oppgaver der elevene skal avgjøre om noe er sant eller usant i en hypotese, fikk koden «undersøk en hypotese». Som nevnt er en hypotese en påstand som man antar er sann, samtidig som det finnes usikkerhet rundt antakelsen. En hypotese i oppgaver som har fått denne koden, kan enten være en de har antatt selv, eller det kan være en hypotese som boka presenterer. 18 av de analyserte oppgavene fikk denne koden. De fleste av dem inneholder en rekke påstander der elevene skal bestemme eller finne ut om de er sanne eller usanne. Når elevene jobber med å finne sannhetgraden til ulike hypoteser, får de muligheten til å arbeide med resonnering og argumentasjon blant annet ved at de får erfare hvordan en hypotese eller påstand kan være utformet, de må resonnere seg frem til om påstandene kan være sanne, og de må argumentere for hvorfor.

Flesteparten av oppgavene som ble kodet «undersøk en hypotese» inneholdt generelle påstander. I tillegg ble nesten alle oppgavene med denne koden, i tillegg kodet «implisitt argument» når det gjaldt hvilken form for argumentasjon som oppgaven ber om.

Under viser jeg utvalgte eksempler på oppgaver som fikk koden «undersøk en hypotese».

Eksempel 21: Multi 6A s. 102

3.42 Bestem om påstandene er sanne eller usanne.

- **a** I en likesidet trekant er alle vinklene 60°.
- **b** Når to sider i en trekant er like lange, er trekanten rettvinklet.
- **c** En likesidet trekant er alltid likebeint.
- **d** I en likesidet trekant kan den ene vinkelen være 50°.
- **e** I en rettvinklet trekant kan aldri den ene vinkelen være 100°.
- **f** Når vinklene i en trekant er 45°, 45° og 90°, er trekanten både rettvinklet og likebeint.

Tildelte koder:

- Generell påstand
- Forventet elevaktivitet: undersøk en hypotese
- Implisitt argument

Begrunnelse:

Oppgaven i eksempel 21 har fått koden «generell påstand» fordi oppgaven ber elevene bestemme om en rekke påstander er sanne eller usanne. Teksten viser ikke til spesifikke figurer, men elevene skal ta stilling til påstander med ordlyden «en trekant». Dette kan da gjelde en hvilken som helst trekant.

Oppgaven har fått koden «undersøk en hypotese» som forventet elevaktivitet fordi oppgaven relateres til matematiske påstander, og elevene må undersøke påstandene for å kunne si om de er sanne eller ikke.

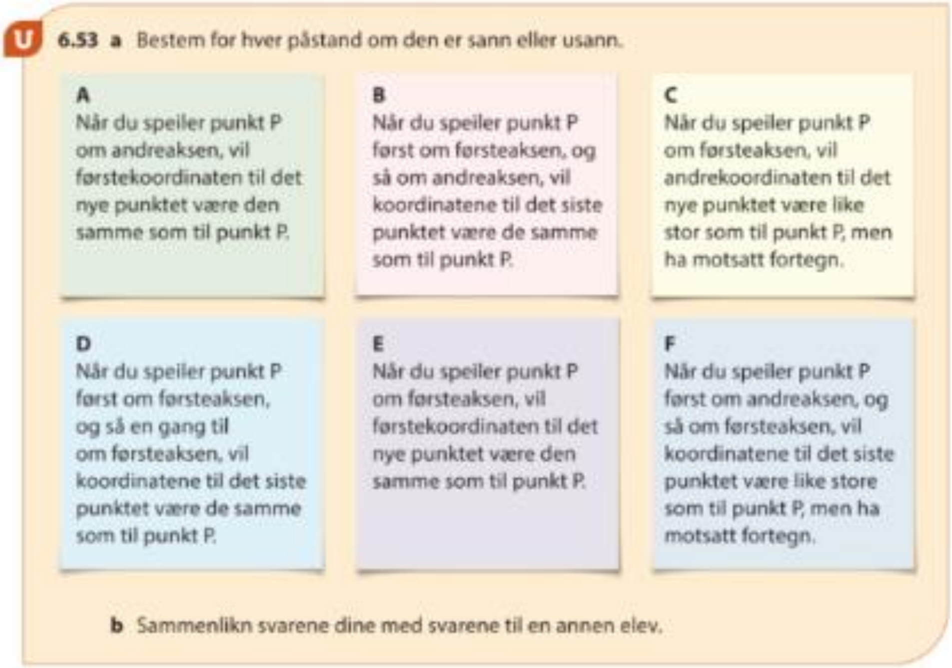
Oppgaven har blitt tildelt koden «implisitt argument» fordi det ikke står i oppgaven hvilket argument elevene skal presentere i arbeidet med å bestemme sannhetgraden av påstandene.

Eksempel 21 viser hvordan mange av oppgavene som fikk koden «undersøk en hypotese» er utformet. Ofte blir elevene presentert for en rekke påstander, og de må deretter finne ut om påstandene stemmer eller ikke. Ingen oppgaver der elevene skal finne ut om en påstand er sann eller usann, kaller påstandene de presenterer for hypoteser. Påstandene kan likevel være hypoteser, i og med at man kan anta at påstandene stemmer.

Eksempel 22, under, viser enda en oppgave der det er forventet at elevene undersøker om påstandene er sanne eller usanne. Både oppgaven i eksempel 21, og oppgaven i eksempel 22, inneholder mange begreper som elevene må kunne for å finne ut om påstandene stemmer eller ikke. I forkant kan man da anta at elevene har arbeidet med det som betegnes som vilkårlig.

Eksempel 22 viser en av få oppgaver som ga mulighet for arbeid med resonnering og argumentasjon, der innholdet handler om noe annet enn vinkler, omkrets, areal og volum.

Eksempel 22: Multi 6B s. 60



U **6.53** **a** Bestem for hver påstand om den er sann eller usann.

A
Når du speiler punkt P om andreaksen, vil førstekoordinaten til det nye punktet være den samme som til punkt P.

B
Når du speiler punkt P først om førsteaksen, og så om andreaksen, vil koordinatene til det siste punktet være de samme som til punkt P.

C
Når du speiler punkt P om førsteaksen, vil andrekoordinaten til det nye punktet være like stor som til punkt P, men ha motsatt fortegn.

D
Når du speiler punkt P først om førsteaksen, og så en gang til om førsteaksen, vil koordinatene til det siste punktet være de samme som til punkt P.

E
Når du speiler punkt P om førsteaksen, vil førstekoordinaten til det nye punktet være den samme som til punkt P.

F
Når du speiler punkt P først om andreaksen, og så om førsteaksen, vil koordinatene til det siste punktet være like store som til punkt P, men ha motsatt fortegn.

b Sammenlikn svarene dine med svarene til en annen elev.

Tildelte koder:

- generell påstand
- forventet elevaktivitet: undersøk en hypotese
- implisitt argument

Begrunnelse:

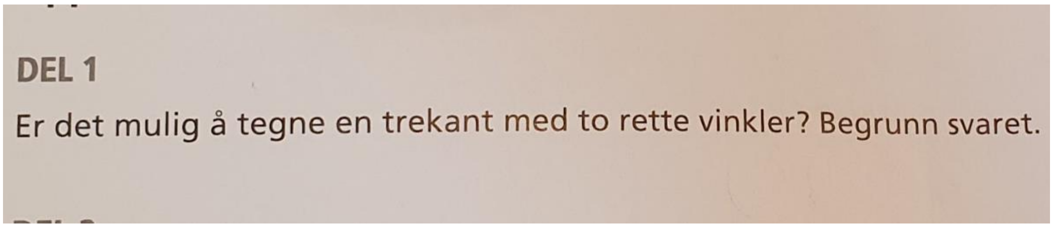
Oppgaven i eksempel 22 ble tildelt koden «generell påstand». Teksten henviser til «punkt P», og bokstaven P står for «punkt». Dette er derfor noe som gjelder et hvilket som helst punkt. I tillegg er det ikke oppgitt noen spesifikke koordinater, og punktet kan da ha hvilke som helst koordinater, så lenge resten av instruksen blir fulgt.

Oppgaven har fått koden «undersøke en hypotese» fordi elevene skal ta bestemme for hver av påstandene, om de er sanne eller usanne. Boka presenterer altså en rekke påstander som kan være sanne, med andre ord hypoteser, men elevene må finne ut om hypotesene stemmer eller ikke.

Oppgaven har fått tildelt koden «implisitt argument» fordi oppgaven ikke ber om en spesifikk begrunnelse eller argument elevene skal gi når de forklarer om påstandene er sanne eller usanne.

I tillegg til at mange oppgaver med denne koden er utformet på lignende måte som eksemplene over viser, inneholder noen oppgaver en konkret påstand eller hypotese som elevene skal undersøke. Dette kan ses i eksempel 23, under. Oppgaven i eksempel 23 er en av oppgavene som fikk to koder som gjaldt forventet elevaktivitet. Dette er i tråd med hva Otten et al. (2014) gjorde i sin analyse, når de møtte på oppgaver som først ba elevene om å utføre noe, og deretter ba om en begrunnelse eller en forklaring.

Eksempel 23: Matemagisk 6B s. 38


DEL 1

Er det mulig å tegne en trekant med to rette vinkler? Begrunn svaret.

Tildelte koder:

- generell påstand
- forventet elevaktivitet: undersøk en hypotese
- forventet elevaktivitet: utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis
- implisitt argument

Begrunnelse:

Oppgaven i eksempel 23 fikk koden «generell påstand» fordi det i teksten står «en trekant», og dette kan da være en hvilken som helst trekant. Teksten henviser dermed heller ikke til en spesifikk figur.

Oppgaven har blitt tildelt to ulike koder når det kommer til elevaktivitet. Disse er «undersøke en hypotese» og utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis». Kodene er gitt fordi elevene først blir bedt om å ta stilling til om påstanden «er det mulig å tegne en trekant med to rette vinkler» er sann eller usann. Deretter ber oppgaven om at elevene skal *begrunne hvorfor* påstanden er sann eller usann.

Oppgaven har fått koden «implisitt argument» fordi elevene ikke blir bedt om et spesifikt argument de skal gi, når de skal begrunne om det er mulig å tegne en trekant med to rette vinkle.

Neste delkapittel viser eksempler med oppgaver som også omhandler hypoteser og påstander.

4.2.3 Lag eller endre en hypotese eller påstand

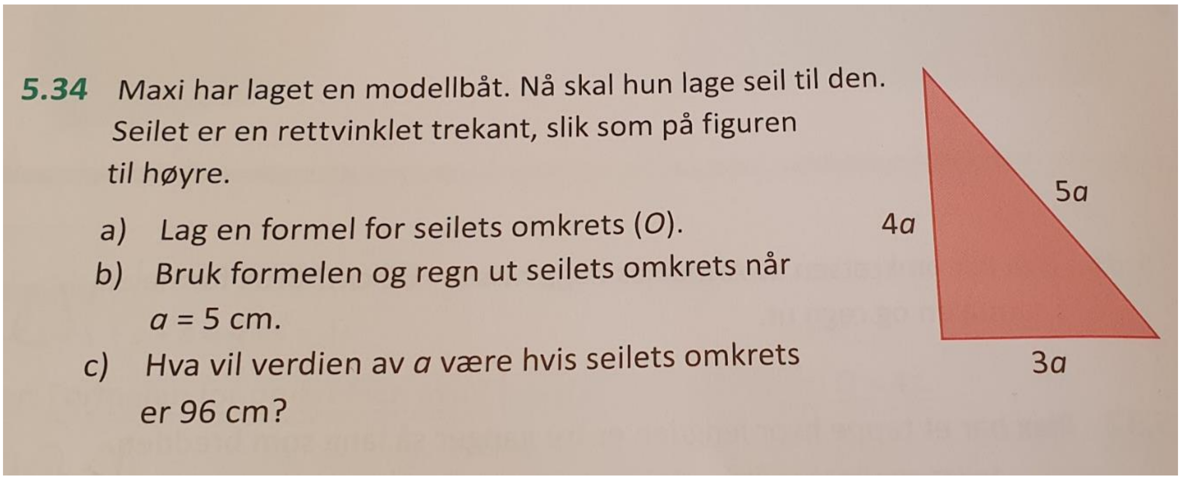
Oppgaver som ber elevene formulere en matematisk påstand, eller endre en hypotese de mener er usann, slik at den blir sann, fikk koden «lag eller endre en hypotese eller påstand». Oppgaver som inneholder slike elevaktiviteter gir elevene muligheter til å arbeide med formulering av hypoteser og matematiske påstander, som er en del av resonneringsprosessen. Det var like mange oppgaver som inneholdt denne typen aktiviteter, som de som ble kodet «undersøk en hypotese». Det vil si at det til sammen var 38 oppgaver som ga elevene muligheter til å arbeide med hypoteser og påstander, både ved å finne ut om en hypotese kan være sann, og ved å produsere en hypotese eller påstand på egen hånd.

Av oppgavene som fikk denne koden, var det 4 som inneholdt generelle påstander, 7 inneholdt spesifikke påstander, og 4 besto av generelle påstander med spesifikt eksempel. Flesteparten av oppgavene fikk koden «implisitt argument» ut ifra hvilken form for begrunnelse eller argumentasjon de ba om.

Under viser jeg noen eksempler på oppgaver som fikk denne koden, i tillegg til andre tilhørende koder.

Eksempel 24, under, viser tre ulike oppgaver (a, b og c), men det er kun a som inneholder muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon, fordi den kan plasseres under en kategori i rammeverket som er relatert til matematiske påstander. Oppgave a ber elevene «lage en formel». Selv om elevene lager en formel, eller en regel, vet man ikke om formelen er riktig. I oppgaver der det blir bedt om å lage en formel, anser jeg derfor formelen for å være en hypotese.

Eksempel 24: Matematikk 6 s. 192



5.34 Maxi har laget en modellbåt. Nå skal hun lage seil til den. Seilet er en rettvinklet trekant, slik som på figuren til høyre.

a) Lag en formel for seilets omkrets (O).

b) Bruk formelen og regn ut seilets omkrets når $a = 5$ cm.

c) Hva vil verdien av a være hvis seilets omkrets er 96 cm?

Tildelte koder:

- spesifikk påstand
- forventet elevaktivitet: lag eller endre en hypotese eller påstand
- implisitt argument

Begrunnelse:

Oppgaven i eksempel 24 ble tildelt koden «spesifikk påstand» fordi oppgaven ber elevene om å lage en formel til denne bestemte trekanten. Illustrasjonen inneholder mål som spesifikt gjelder denne trekanten.

Oppgaven kodes «lag eller endre en hypotese eller påstand» fordi formelen som oppgaven ber om, er en matematisk påstand. Påstanden er med andre ord hvordan elevene kan finne omkretsen av denne spesifikke trekanten.

Oppgaven har fått koden «implisitt argument» fordi oppgaven ikke ber om noen spesifikk måte elevene skal arbeide på, for å komme frem til formelen. Selv om elevene får muligheten for å prøve ut formelen i oppgave b og c, står det ikke skrevet i oppgaven at dette er for å bekrefte at formelen stemmer.

Flesteparten av oppgavene som ble kodet med denne typen elevaktivitet, fikk i tillegg koden «implisitt argument», men to av oppgavene ble kodet «empirisk argument». En av disse oppgavene vises i eksempel 25 under.

Dette Eksempelet viser deloppgave a - f. Dette blir regnet som en enhet, fordi oppgaven viser en streng med instrukser. Siste ledd er at elevene blir bedt om å skrive en regel.

Eksempel 25: Multi 6A s. 90

Tildelte koder:

- generell påstand med utgangspunkt i et spesifikt tilfelle
- forventet elevaktivitet: lag eller endre en hypotese eller påstand
- empirisk argument

Begrunnelse:

Oppgaven i eksempel 25 har fått koden «generell påstand med spesifikt eksempel" fordi elevene kan ta utgangspunkt i illustrasjonen når de jobber med denne oppgaven. For øvrig henviser teksten i oppgaven til en generell påstand, der elevene skal komme frem til en regel som gjelder for summen av vinkler i firkanter. Ordet «firkanter» betyr at dette ikke gjelder for noen bestemte firkanter. Hvis det hadde vært tilfelle, ville det i stedet stått «firkantene», som betyr at det viser til noen bestemte firkanter.

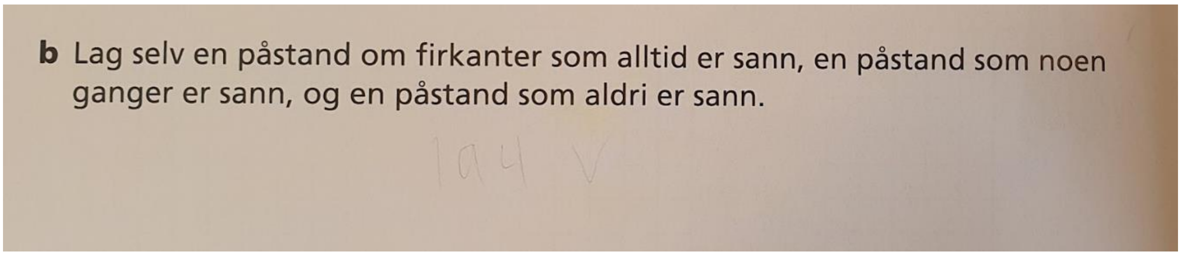
Oppgaven kodes «lag eller endre en hypotese eller påstand» fordi regelen elevene skal skrive, anses å være en matematisk påstand. Man kan ikke vite om påstanden elevene kommer frem til er sann eller usann, med andre ord vet man ikke om regelen de skriver, er en regel som kan gjelde for alle firkanter. Dermed kan man også si at regelen elevene kommer frem til, også er en hypotese.

Oppgaven har fått koden «empirisk argument» fordi oppgaven ber elevene teste ut denne fremgangsmåten to ganger. De to utprøvingene som elevene gjennomfører, er dermed målinger som bekrefter det elevene skal finne ut. Elevene kan argumentere for at målingene deres stemmer, ved å henvise til at det virket de to gangene de prøvde det ut.

Når elevene jobber med oppgaver som i eksempel 25, kan de ikke vite om det de kommer frem til stemmer for alle i utvalget, i denne sammenhengen, alle firkanter. Elevene får sjekket at dette stemmer ved å gjennomføre aktiviteten to ganger, og oppgaven kan dermed gi signaler til elevene om at dette er holdbart for å kunne skrive en regel som gjelder for alle. Dette er noe jeg kommer tilbake til i diskusjonskapittelet.

Eksempel 26, som vises under, inneholder en oppgave der elevene eksplisitt blir bedt å lage påstander.

Eksempel 26: Matemagisk 6B s. 70


b Lag selv en påstand om firkanter som alltid er sann, en påstand som noen ganger er sann, og en påstand som aldri er sann.

Tildelte koder:

- generell påstand
- forventet elevaktivitet: lag eller endre en hypotese eller påstand
- empirisk argument

Begrunnelse:

Oppgaven i eksempel 26 har fått koden «generell påstand» fordi elevene blir bedt om å lage ulike former for påstander som gjelder alle firkanter. Dette kommer av at teksten inneholder ordet «firkanter», som ikke peker på noen spesielle firkanter.

Oppgaven får koden «lag eller endre en hypotese eller påstand» fordi teksten direkte ber elevene om å lage påstander.

Oppgaven tildeles koden «implisitt argument» fordi det ikke står i oppgaveteksten hvordan elevene skal komme frem til påstandene de skal lage, eller at de skal argumentere for hvorfor de er sanne eller usanne.

I tillegg til at oppgaven i eksempel 26 ber elevene om å lage påstander, blir elevene bedt om å sørge for at påstandene skal være sanne og usanne. Elevene får dermed muligheten til å jobbe med flere aspekter knyttet til resonnering og argumentasjon, enn bare å produsere påstander. Ved å finne påstander som skal være sanne eller usanne, kan elevene ta del i resonnering knyttet til bevis, selv om de ikke eksplisitt blir bedt om å argumentere eller bevise ut fra oppgaveteksten. Ordlyden i teksten tilsier likevel at elevene må være sikre på at det de skriver er riktig, i fremstillingen av disse påstandene.

Neste delkapittel viser oppgaver der det er forventet at elevene skal arbeide med argumentasjon og bevis.

4.2.4 Fyll inn det som mangler i argumentet eller beviset

To av oppgavene som gir muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon har fått denne koden. Begge oppgavene er fra Matemagisk 6B, og er utformet på lik måte. Begge oppgavene begynner med en påstand, der elevene skal være med på å vise at denne stemmer. Elevene skal følge en bestemt rekkefølge på instruksene, som fører til at dette blir et bevis for påstanden. Jeg viser en av oppgavene i eksempel 27, under.

Oppgaven i eksempel 27 består av en rekke gitte aksiomer, etterfulgt av deloppgave a-e. Deloppgavene telles som en enhet, fordi de følger en streng med instrukser.

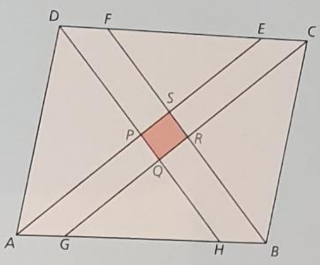
Eksempel 27: Matemagisk 6B s. 79

T4 I denne oppgaven skal vi vise denne sammenhengen:

Hvis vi har et parallellogram, vil vinkelhalveringslinjene til vinklene i parallellogrammet alltid danne et rektangel.

Til høyre ser du et parallellogram *ABCD*.

- *E* er skjæringspunktet mellom vinkelhalveringslinja til $\angle BAD$ og linjestykket *CD*.
- *F* er skjæringspunktet mellom vinkelhalveringslinja til $\angle CBA$ og linjestykket *CD*.
- *G* er skjæringspunktet mellom vinkelhalveringslinja til $\angle DCB$ og linjestykket *AB*.
- *H* er skjæringspunktet mellom vinkelhalveringslinja til $\angle ADC$ og linjestykket *AB*.
- *P* er skjæringspunktet mellom *AE* og *DH*.
- *Q* er skjæringspunktet mellom *CG* og *DH*.
- *R* er skjæringspunktet mellom *CG* og *BF*.
- *S* er skjæringspunktet mellom *AE* og *BF*.



Vi skal nå vise at *PQRS* er et rektangel.

a Forklar at $\angle BAD + \angle CBA = 180°$.

b Vis ved regning at $\angle BAS + \angle SBA = 90°$.

c Begrunn at $\angle ASB = 90°$.

d Begrunn på tilsvarende måte at $\angle HPE = \angle CQD = \angle FRC = 90°$.

e Begrunn at *PQRS* er et rektangel.

Tildelte koder:

- generell påstand med spesifikt eksempel
- forventet elevaktivitet: fyll inn det som mangler i argumentet eller beviset
- deduktivt argument

Begrunnelse:

Oppgaven har fått kodet «generell påstand med spesifikt eksempel» fordi ordlyden i teksten henviser til ubestemt form for parallellogram, og rektangel, noe som vil si at dette gjelder for en hvilken som helst figur av disse. I tillegg bruker teksten ordet «alltid», som også forteller om noe som skjer generelt. Sammen med teksten er det en illustrasjon som kan hjelpe elevene i resonneringsarbeidet, og dette utgjør det spesifikke eksemplet.

Oppgaven er kodet «fyll inn det som mangler i argumentet eller beviset» fordi argumentet i oppgaven blir fullstendig ved hjelp av svarene til elevene. Spørsmålene i oppgaven er ufullstendige argument, som blir komplette når elevene utfører hver instruks.

Oppgaven har fått koden «deduktivt argument» fordi elevene skal følge en logisk kjede med argumentasjon, ved at de følger instruksen trinn for trinn.

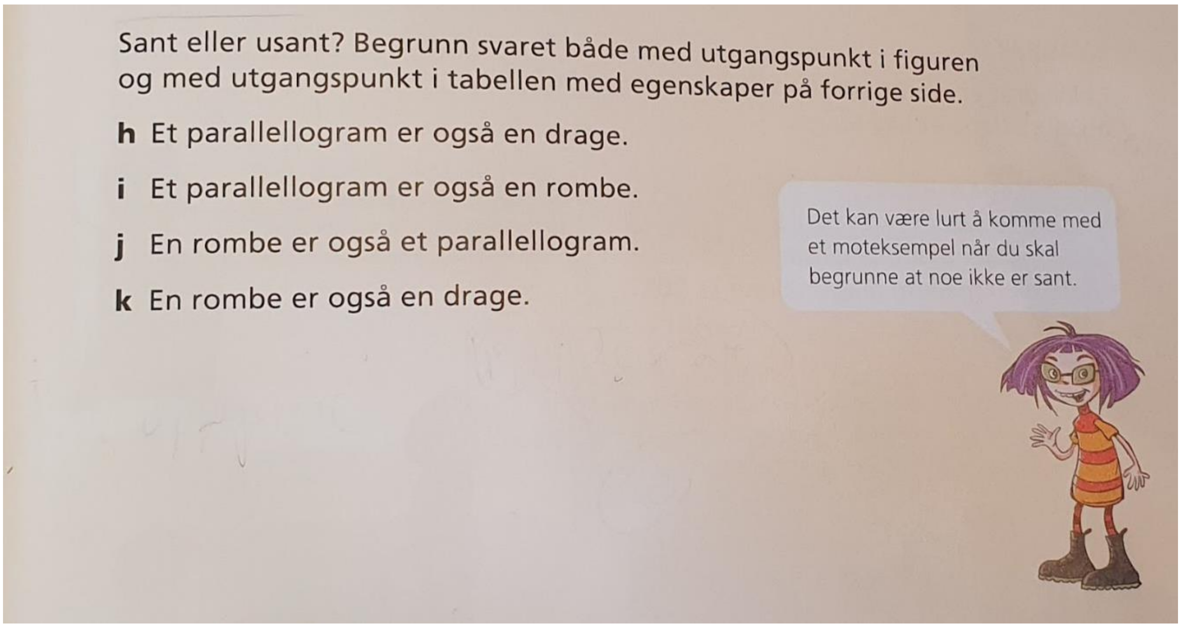
De to oppgavene som har fått denne koden, gir mulighet for arbeid med resonnering og argumentasjon, knyttet til bevis. Oppgavene legger opp til at elevene skal være med på å danne et fullstendig bevis for påstandene som står øverst i en hvit rute, som i eksempel 24. Otten et al. (2014) påpeker at elevene ikke vet hva det innebærer om en oppgave bærer ordlyden "vis" ("show"), men i dette tilfellet er det ingen tvil hva elevene skal gjøre, siden de skal følge trinnene som deloppgavene gir. Elevene får jobbet med argumentasjon ved hjelp av deduktiv resonnering, for å bevise noe generelt. Dette ender derfor opp i et gyldig bevis, og elevene gis muligheten til å være med på å validere påstandene.

4.2.5 Finn et motargument.

Kun en av de analyserte oppgavene ba spesifikt om et motargument. Jeg viser denne oppgaven i eksempel 28, under, og begrunner kodene oppgaven er tildelt.

Eksempel 28 består av deloppgave h-k, men telles som en enhet fordi alle deloppgavene inneholder samme instruks. Oppgaven i eksemplet har også fått to koder, fordi oppgaven først ber elevene finne ut om påstandene er sanne eller usanne, deretter blir elevene bedt om å begrunne svaret ved hjelp av å ta i bruk moteksempler.

Eksempel 28: Matemagisk 6B s. 73


Sant eller usant? Begrunn svaret både med utgangspunkt i figuren og med utgangspunkt i tabellen med egenskaper på forrige side.

h Et parallellogram er også en drage.

i Et parallellogram er også en rombe.

j En rombe er også et parallellogram.

k En rombe er også en drage.

Det kan være lurt å komme med et moteksempel når du skal begrunne at noe ikke er sant.

Tildelte koder:

- generell påstand med spesifikt eksempel

- forventet elevaktivitet: undersøk en hypotese
- forventet elevaktivitet: finn et motargument
- deduktivt argument

Begrunnelse:

Oppgaven har fått koden «generelle påstand med spesifikt eksempel» fordi teksten inneholder ord som står i ubestemt form, noe som betyr at det kan gjelde hvilken som helst av de nevnte formene. I tillegg står det i oppgaveteksten at elevene skal ta utgangspunkt i en figur og en tabell på forrige side, i arbeidet med å argumentere for om påstandene stemmer eller ikke.

Oppgaven har blitt tildelt koden «undersøk en hypotese» fordi elevene skal finne ut om de ulike påstandene er sanne eller usanne.

Oppgaven har også blitt tildelt koden «finn et motargument» som forventet elevaktivitet. Illustrasjonen viser en person som ber elevene komme med et moteksempel når de skal begrunne. Selv om personen i illustrasjonen sier at «det kan være lurt ...», analyserer jeg dette som en mulighet for elevene å benytte seg av moteksempel i sin argumentasjon.

Oppgaven får koden «deduktiv» fordi det står i oppgaveteksten at eleven skal ta tak i en figur og en tabell når de begrunner påstandene. Tabellen viser en oversikt over egenskaper til ulike geometriske figurer, og figuren viser sammenhengen mellom disse. Ved at elevene benytter seg av figuren og tabellen, bruker de allerede kjent kunnskap for å underbygge sine resonnement og argument.

Både denne oppgaven, og oppgavene nevnt i avsnittet over, gir dermed elevene muligheter til å arbeide med deler av resonneringsprosessen knyttet til validering og gyldige bevis. Dette er noe jeg vil drøfte videre i diskusjonskapittelet.

4.3 Oppsummering av funn fra analysen

For å kunne svare på forskningsspørsmålet til denne studien har jeg både hatt et kvantitativt og et kvalitativt perspektiv på datamaterialet. Det kvantitative perspektivet gir svar på frekvensen av forklaringsbokser og oppgaver innen geometrien som gir muligheter for arbeid med argumentasjon og bevis. Det kvalitative perspektivet har hjulpet i prosessen med å kategorisere ulike former for argumentasjon og bevis, der jeg har hatt behov for å studere både tekst og illustrasjoner for å kunne angi aktuelle koder. Det kvalitative aspektet ved datamaterialet gir grunnlag for det kvantitative, og på denne måten er begge perspektiv nødvendig for å kunne gi svar på forskningsspørsmålet. Dette er igjen med på å bekrefte at metoden mixed-methods er riktig for denne studien.

Rammeverket består av ferdige kategorier, og med tanke på at studien er en dokumentanalyse, har jeg ikke kodet ut ifra hva jeg har trodd elevene kommer til å forstå eller gjøre. Selv om enkelte elever kan produsere et godkjent bevis, kan jeg ikke anta at elevene gjør dette dersom ikke oppgaven krever det. På lik linje er det ikke sikkert elevene produserer godkjente bevis til tross for at oppgaven krever det. Ved at jeg ønsker å finne muligheter for arbeid med argumentasjon og bevis, har jeg tatt dette til følge. Det har også derfor vært viktig for meg å kun se på hva som faktisk står, for å kunne benytte meg av rammeverket og finne svar på forskningsspørsmålet.

Rammeverket som er benyttet i studien har vist seg å være nyttig for å kunne skille ut forklaringsbokser og oppgaver fra datamaterialet, som kan kvalifiseres som en enhet som gir mulighet for arbeid med resonnering og argumentasjon. I tillegg har rammeverket sørget for at enhetene har blitt analysert på en hensiktsmessig måte, for å kunne svare på forskningsspørsmålet. Analysen viser at 36 % av forklaringsboksene i datamaterialet inneholder muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon. Blant oppgavene gjelder disse mulighetene for 6 % av det totale antallet oppgaver. Det vil med andre ord si at elevene tilbys flest muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon fra forklaringsbokser i de analyserte matematikkbøkene. Dersom kun oppgavene hadde vært gjenstand for analyse, tilsier funnene at elevene tilbys noe begrensede muligheter. På grunn av at rammeverket tar for seg både forklaringsbokser og oppgaver, presenteres et større perspektiv på tilfellene som elevene møter. Som tidligere nevnt har jeg bevisst valgt å ikke modifisere rammeverket ved å fjerne kategorier der ingen av forklaringsboksene eller oppgavene havnet innenfor. Bakgrunnen for dette henger sammen med nødvendighetsprinsippet (Harel & Tall, 1991). Flere av kategoriene som ikke fikk noen tilhørende oppgaver, er kategorier der elevene får muligheten til å arbeide med prosesser knyttet til deduksjon og gyldige bevis. Dette er for eksempel kategoriene «Utvikle et matematisk bevis», «bearbeide et bevis, eller fullføre et bevis» og «evaluer eller korriger et argument eller bevis». For at elevene skal kunne oppdage behovet for å arbeide med deduksjon, må de få muligheten til å arbeide med dette i oppgavene, eller oppleve det i forklaringsboksene.

Blant forklaringsboksene var det flest enheter med generelle påstander. Dette vil si at de fleste gangene elevene tilbys muligheter for resonnering og argumentasjon i forklaringsbokser, er dette påstander som gjelder et helt utvalg matematiske objekter eller situasjoner, der påstanden gjelder for alle tilfellene. I tillegg inneholder de fleste forklaringsboksene, empirisk argumentasjon, eller ingen begrunnelse. Det vil med andre ord si at størsteparten av disse enhetene ikke ble validert av matematikkboka.

I motsetning til forklaringsboksene, var det blant oppgavene, flest spesifikke påstander. Det var likevel ingen stor overvekt med slike tilfeller i oppgavene. Dersom jeg legger sammen antallet oppgaver med generelle påstander og generelle påstander med spesifikt eksempel, er det liten differanse mellom disse og oppgaver med spesifikke påstander. De spesifikke eksemplene er ment som støtte til elevene under resonneringsarbeidet, og slike eksempler i oppgavene kan bidra til at elevene får muligheten til å ta steget mot generalisering (Otten et al., 2014).

Blant oppgavene var det aktiviteter som handlet om at elevene skulle «utvikle en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis», som sto for den største andelen. Dette vil si at i de fleste oppgavene, ble elevene bedt om å forklare, begrunne eller vise for eksempel hvordan de selv har gått frem for å løse en oppgave, eller hvorfor noe er sant i en fremsatt påstand. Analysen viste også at mange oppgavene inneholder aktiviteter som gir muligheter for å arbeide med hypoteser og påstander. Dette var enten i form av å undersøke hypoteser, eller ved at elevene ble bedt om å lage eller endre hypoteser eller påstander.

Det var meget få oppgaver som ga muligheter for at elevene på egen hånd kunne arbeide med prosesser relatert til validering. Slike oppgaver ble vist i henholdsvis eksempel 27 og 28. For at en oppgave skal kunne gi muligheter for arbeid knyttet til valideringsprosesser, må den inneholde elementer som tilbyr en deduktiv struktur, eller et motargument.

5 Diskusjon

Hensikten med denne studien har vært å undersøke hvilke muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon som finnes innen geometri i tre læreverk i matematikk for 6. trinn. Min analyse av matematikkbøkene innen de tre læreverkene viser at det eksisterer slike muligheter, og de fleste er å finne i forklaringsboksene. Valget med å inkludere både forklaringsbokser og oppgaver, kommer som følge av at begge deler bidrar til potensielle muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon. Dette er i tråd med hva Otten et al. (2014) beskriver i sin studie.

I og med at læreboka i matematikk har stor innvirkning på undervisningen i norsk skole (Kongelf, 2019) er det viktig at matematikkbøkene har et innhold som sørger for å dekke opp mål og intensjoner i læreplanen. Denne studien kan ikke si noe om de øvrige kapitlene i matematikkbøkene, men funnene kan likevel komme med antydninger som gjelder innen kapitlene som danner grunnlag for datamaterialet. I lys av lærebokas rolle som link mellom læreplan og undervisning (Fan et al., 2013; Pepin et al., 2013), er det klart at det som finnes i matematikkbøkene har påvirkning på om elevene undervises i henhold til læreplanen. Med resonnering og argumentasjon som et av læreplanens seks kjerneelementer, blir viktigheten av å inkludere dette i undervisningen løftet frem. Kjerneelementer skal både være det viktigste innholdet i faget, i tillegg til det elevene må lære for å kunne mestre å bruke faget (Utdanningsdirektoratet, 2019). Av den grunn kan det være interessant å diskutere om funn fra denne studien samsvarer med læreplanens formål når det gjelder resonnering og argumentasjon. Dette er noe av det jeg vil drøfte i dette kapittelet. I tillegg vil jeg diskutere funn fra studien opp mot relevant litteratur. Avslutningsvis vil jeg fremstille noen implikasjoner mine funn kan ha for matematikkundervisningen. I avsnitt 5.5 setter jeg søkelys på studiens rammeverk, og i avsnitt 5.6 vil jeg diskutere kvaliteten på studien.

5.1 Frekvensen av muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon

Mine undersøkelser viser at 71 av 1244 geometrioppgaver inneholder muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon. Dette utgjør en frekvens på 6 %, noe som ikke viker langt fra funn gjort i andre lignende studier. Studier gjennomført av Davis (2012), Bieda et al. (2014) og Thompson et al. (2012) viser til tilsvarende andeler av oppgaver i matematikkbøker som omfatter arbeid med resonnering og argumentasjon. Disse undersøkelsene ble gjennomført på matematikkbøker laget for undervisning i USA, men vendes blikket hjemover til Norge finner jeg blant annet Tømmerdal (2021) som i sin masteroppgave undersøkte hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis som finnes blant oppgaver innen temaet brøk i fire ulike lærebøker for 5. trinn. Tømmerdal (2021) fant at 3 % av brøkoppgavene i de undersøkte matematikkbøkene inneholdt muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon.

Blant forklaringsboksene var andelen med innhold som omhandlet resonnering og argumentasjon, en god del høyere enn hos oppgavene, nærmere sagt 36 %. Dette samsvarer også med funn i andre studier (Otten et al., 2014; Thompson et al., 2012). Valget med å inkludere både oppgaver og forklaringsbokser i datamaterialet, gir et større bilde på faktiske muligheter som finnes i de undersøkte matematikkbøkene. Som nevnt innledningsvis, er begge elementer med å bidra til at elevene får arbeidet med resonnering og argumentasjon. Forklaringsbokser tilbyr muligheten til arbeid med resonnering og argumentasjon ved at de viser eller modellerer hvordan det kan gjøres (Thompson et al., 2012).

Utdanningsdirektoratet (2019) fremhever som nevnt kjerneelement som det viktigste innholdet i faget, og beskriver at det består av sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer. Det vil si at resonnering og argumentasjon er noe av det viktigste innholdet i matematikk, og elevene skal få kunnskap om det, og lære å bruke det i ulike sammenhenger. Mine funn viser en lav frekvens av muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i oppgavene, innen geometri i matematikkbøker på 6. trinn, med tanke på læreplanens intensjoner. Forklaringsbokser kan bidra med at elevene får kunnskap om innholdet i kjerneelementet, men som Thompson et al. (2012) påpeker, får ikke elevene selv muligheten til å arbeide med resonneringsprosesser på egen hånd, dersom dette mangler matematikkoppgavene.

Flere av de nevnte studiene har antydet at funnene tyder på begrensede muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i matematikkbøker. Her i Norge er resonnering og argumentasjon et nytt element i læreplanen for grunnskolen, både som kjerneelement og kompetansemål. Implementering av læreplanen startet i 2020, og ble ikke innført på 10. trinn før skoleåret 2021-2022. Innføring av læreplanen på siste år i videregående skole, foregår dette skoleåret (Utdanningsdirektoratet, 2023). Det er mye nytt i den nye læreplanen, og derfor er det satt av tid i en overgangsfase til implementering. Det tar tid for lærere å skaffe seg oversikt og forståelse over endringene som må gjøres i skolen (Hagelia, 2021). Siden resonnering og argumentasjon er noe nytt, opplever mange lærere at det er vanskelig å drive med aktiviteter som omhandler dette, fordi de ikke er vant med det fra egen skolegang (Maher et al., 2014). Det er ikke urimelig å tenke at dette også er noe lærebokforfattere har liten erfaring med fra tidligere. Det kan da også tenkes at lærebokforfattere trenger tid til å forstå læreplanen, for å kunne tilby elever lærebøker som gjenspeiler læreplanens hensikter og mål. Selv om det kan antydes at det finnes begrensede muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i matematikkbøker, har utviklere av læreverk fått inn enkelte elementer som tilbyr slike muligheter.

5.2 Matematisk resonnering i forklaringsboksene

Når forklaringsbokser tilbyr muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon kan det komme i form av at elevene for eksempel ser hvordan en matematisk påstand ser ut, hva et matematisk bevis er, eller hvordan matematiske påstander blir argumentert for. Disse mulighetene blir gitt i form av at forklaringsboksene fungerer som modeller for elevene. Med andre ord noe de kan se etter, og etterligne i eget arbeid. I denne studien fant jeg i forklaringsboksene resonnering og argumentasjon i deduktiv eller empirisk form, eller uten en begrunnelse for den matematiske påstanden. Jeg fant ingen som passet i kategoriene "oppbygging av et bevis", "fortid eller fremtid" eller "overlatt til eleven". Alle de utelatte kategoriene inneholder muligheter for at elevene skal kunne oppdage begrunnelser eller finne bevis for matematiske påstander. Når disse kategoriene ikke finnes i matematikkbøkene, kan det bety at elevene går glipp av enkelte muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon.

Blant forklaringsboksene som inneholdt resonnering og argumentasjon, viste det seg å være flest som inneholdt empirisk argument. Forskning peker på at elever anser empiriske argument for valide (Balacheff, 1988) Dersom forklaringsboksene inneholder matematiske påstander med eksempler av empirisk art, kan dette forsterke troen mange elever har om at empirisk argumentasjon som teller som gyldige bevis (Thompson et al., 2012).

I tillegg til empirisk argumentasjon utgjorde forklaringsboksene med ingen begrunnelse, en stor andel. Arbeid med bevis viser ikke bare at noe stemmer, men også hvorfor noe stemmer (Hanna, 2000). Når forklaringsbokser presenterer matematiske påstander uten å fremstille en begrunnelse for hvorfor dette stemmer, kan en konsekvens være at elevene ikke ser behovet for argumentasjon og resonnering, siden matematikk blir presentert som et ferdig produkt. Trekker man nødvendighetsprinsippet (Harel & Tall, 1991) inn i dette aspektet, bør det legges mer til rette for at elevene skal oppdage den intellektuelle nødvendigheten med å kunne arbeide med resonneringsprosesser som fører frem til et gyldig bevis. Dersom eksemplene i matematikkboka ikke tilbyr begrunnelser, kan det gi et signal til elevene om at dette ikke er nødvendig for å vite eller forstå hvorfor noe stemmer i matematikk, siden det ikke er viktig nok til å stå i forklaringsboksene (Davis, 2012).

Funnene mine tilsier at elevene også får muligheten til arbeid med deduktiv resonnering og argumentasjon fra forklaringsboksene, da enkelte av de analyserte enhetene havnet innenfor denne kategorien. Otten et al (2014) påpeker at det er spesielt viktig at elevene forstår betydningen av ulike former for resonnering og argumentasjon, og da særlig behovet for deduktive metoder. Dette kommer blant annet av at elevene da får kunnskap om hvordan matematikken er bygd opp, og at regler og fremgangsmåter ikke har oppstått av seg selv. I den forbindelse er det viktig at elevene forstår betydningen av ulike former for resonnering og argumentasjon, og særlig behovet for deduktiv resonnering og argumentasjon (Otten et al., 2014). Siden matematikkboka ofte er den som styrer undervisningen (Fan et al., 2013; Kongelf, 2019; G. J. Stylianides, 2009) bør elevene dermed i stor grad tilbys muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i form av deduktiv resonnering i matematikkbøkene. Mine funn antyder at 6. trinns elever gis reduserte muligheter til å arbeide med, og forstå viktigheten av, deduktiv resonnering, når det gjelder geometri i de fire utvalgte matematikkbøkene.

5.3 Muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon i oppgaver

Dersom oppgavene gir muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon, vil det si at elevene selv får prøvd ut ulike aktiviteter knyttet til dette. Forskning viser at arbeid med resonnering og argumentasjon gir bedre læring og forståelse for matematikkfaget (Stylianides, 2008). Det er derfor viktig at elevene selv får muligheten til å se sammenhenger, finne hypoteser, og argumentere og bevise for påstander, fremfor kun å få kunnskap om det gjennom forklaringsboksene.

Det var flest oppgaver der elevene ble bedt om å forklare eller begrunne, og av den grunn fikk koden "lag en redegjørelse eller ikke-gyldig bevis". Dette er i tråd med funn gjort av Stylianides (2009), som fant at en stor andel av oppgavene i hans studie, ba elevene fremstille en redegjørelse. Også Otten et al. (2014) kom frem til at en stor andel av oppgavene ikke ba om et spesifikt argument, noe som førte til at de ble kategorisert som "ikke-gyldige bevis". Når elever arbeider med slike oppgaver, forventes det ikke et spesifikt resultat. Man kan derfor ikke vite hvordan elevene vil komme til å arbeide med resonnering. Muligens kan man anta at elevene vil produsere en form for bevis, ut ifra at en nøkkelfunksjon med bevis nettopp er å forklare (Villiers, 1995). Rammeverket som er brukt i analysen legger imidlertid ikke opp til slike antakelser, så dette har ikke vært aktuelt i denne studien. Otten et al. (2011) stiller spørsmålet om elevene vil forstå at den beste måten å besvare en "forklare"-oppgave, er med å frembringe et bevis (s. 353). Å finne svar på dette vil kreve en pedagogisk vinkling på studien, noe som ikke omfattes av en dokumentanalyse.

Flere av oppgavene inneholdt aktiviteter som handlet om hypoteser, enten i form av å fremstille hypoteser selv, eller undersøke sannhetgraden i hypoteser gitt av boka. Otten et al. (2014) sin studie viste også at mange av oppgavene inneholdt aktiviteter som ba elevene ta stilling til sannhetgraden av matematiske hypoteser. Arbeid med hypoteser er aktiviteter som hjelper med å forstå matematiske sammenhenger, og bygger et grunnlag for utvikling av bevis (Stylianides, 2009). Å jobbe med hypoteser er dermed en viktig del av arbeidet med resonnering og argumentasjon. Stylianides (2009) påpeker at det å jobbe med bevis, handler nettopp om det å lage og teste hypoteser, etter å ha utforsket mønster og sammenhenger i matematikken. Dette er dermed en stor del av resonneringsprosessen, der neste steg er å argumentere for sannhetgraden av hypotese.

Blant oppgavene var det tre oppgaver der elevene ble bedt om å gjennomføre aktiviteter som kan knyttes til arbeid med gyldige bevis. To av disse ga muligheter for elevene til å ta del i deduktiv resonnering. Harel og Tall (1991) uttrykker viktigheten med at matematikken utvikles som konsepter innen de ulike emnene, og i lys av nødvendighetsprinsippet, skjer dette ved at elevene ser det kognitive behovet for deduksjon. En del av deduktiv resonnering er å kunne konstruere gyldige bevis og evaluere validitet (G. J. Stylianides & Stylianides, 2008). Om elever ikke får oppgaver som inneholder disse elementene, går de glipp av viktige prosesser som kan føre frem til at elevene ser det intellektuelle behovet for deduktiv resonnering. I tillegg kan det tenkes at elevene ikke oppdager at empiriske argument ikke holder mål. I kjerneelementet om resonnering og argumentasjon står det at elevene skal bevise at resonnementene og fremgangsmåtene er gyldige. Siden matematikkboka ofte er den som styrer undervisningen (Fan et al., 2013; Kongelf, 2019; Stylianides, 2009) burde elevene i henhold til læreplanen, i større grad få muligheten til å jobbe med slike oppgaver.

Ingen av oppgavene i bøkene fikk kodene "utvikle et matematisk bevis", "bearbeide et bevis, eller fullføre et bevis", eller "evaluer eller korriger et argument eller bevis". De ubrukte kodene representerer oppgaver som er direkte linket til det å bevise. Dermed er det flere kategorier i rammeverket, tett knyttet til deduksjon, som elevene ikke får muligheten til å arbeide ved hjelp av de undersøkte matematikkbøkene.

5.4 Andre bemerkninger

I forklaringsboksene fantes flest generelle påstander, mens det i oppgavene var mest spesifikke påstander. Dette samsvarer med funn i Otten et al. (2014) sin studie. En konsekvens av at elevene stort sett møter generelle påstander i forklaringsboksene, i motsetning til oppgaver de skal løse selv, er at de kan få en oppfatning av at matematikk er noe som kun er oppdaget av andre (Otten et al., 2011). Dette fordi de overordnede reglene eller fremgangsmåtene er de som står i forklaringsboksene. I motsetning handler oppgavene til elevene ofte om å ta i bruk informasjonen fra forklaringsboksene når de arbeider med resonnering rundt spesifikke påstander. Det blir som om matematikkboka presenterer det viktige, mens elevene kun skal øve på det i etterkant.

Verken forklaringsboksene eller oppgavene inneholdt tekst *om* resonnering og bevis. Slike tekster gir muligheter for å reflektere over sammenhenger i matematikken, og utvikle metakognitive ferdigheter som kan være viktige i eget arbeid med resonnering og argumentasjon (Otten et al., 2014). Når slike tekster uteblir, reduseres også muligheten til denne typen refleksjon.

Med tanke på at matematikk består av både vilkårlig og nødvendig kunnskap (Hewitt, 1999) må man forvente en viss andel forklaringsbokser som ikke inneholder muligheter for resonnering og argumentasjon. Elevene må få kunnskap om det vilkårlige for å kunne arbeide med alle former for matematikk, også geometri. På lik linje må man forvente at en andel av oppgavene handler om å øve på å gjenkjenne, finne og regne ut, uten at dette knyttes opp mot resonnering og argumentasjon.

5.5 Mulige implikasjoner

Dersom mulighetene for arbeid med resonnering og argumentasjon i matematikkbøker som blir brukt i undervisningen, ikke fremstår som tilstrekkelige, kan elevene gå glipp av viktige prosesser som gir økt forståelse og kunnskap i matematikk. Dette betyr at lærerne må sette seg godt inn i læreplanverket for å kunne gi best mulig undervisning i tråd med hvilken kunnskap det er forventet at elevene skal erverve. Studien kan dermed implisere at det er viktig at læreren er kjent med læreplanen, bevisst hvilke læringsmål som dekkes av matematikkbøkene, og planlegger undervisningen slik at elevene oppnår forståelse og kunnskap i matematikken. Det vil si at mye av ansvaret legges på læreren. Dette ansvaret setter på sin side et nytt søkelys på lærerens kompetanse. I og med at resonnering og argumentasjon er nytt i læreplanen i forhold til tidligere, er det rimelig å anta at lærere mangler nok kompetanse innen dette emnet.

Dersom lærere skal få nok kompetanse til å undervise i nytt innhold fra læreplanen, fører dette til at skoleledere og skoleeiere må ta ansvar for å sørge for kompetanseheving blant sine ansatte. Det ligger også et ansvar på lærerutdanningene, som slik at de nyutdannede lærerne er best mulig rustet til å undervise i henhold til læreplanen og dens nye kompetansemål og kjerneelementer.

5.6 Studiens rammeverk

Rammeverket brukt i studiet har vist seg nyttig for å kunne svare på problemstillingen min. Siden denne studien kun har vært en dokumentanalyse, og ikke en analyse av pedagogisk bruk av matematikkbøker, har rammeverket hjulpet meg til å holde rett kurs. Rammeverket har bidratt til at jeg har funnet svar på kvantitative og kvalitative aspekter ved min undersøkelse, og dertil hjulpet til med å sette søkelys på hva som finnes i norske matematikkbøker for 6. trinn.

Rammeverket tar for seg viktige begreper innen resonnering og argumentasjon. Ved å bevare kategoriene til tross for at enkelte av dem ble stående tomme, har vist seg å være nyttig med tanke på å kunne se hva som mangler i matematikkbøkene for at elevene skal oppnå ønsket læring når de jobber med resonnering og argumentasjon.

5.7 Kvaliteten på studien

Metodevalget med mixed- methods har gitt meg både en kvantitativ og kvalitativ tilnærming som har hjulpet meg til å finne hvilke muligheter for resonnering og argumentasjon det er i kapitlene som omhandler geometri i de tre læreverkene i matematikk på 6. trinn. Den kvalitative tilnærmingen ga meg muligheten til å studere innholdet i både forklaringsbokser og oppgaver. Begge deler ble nøye gjennomarbeidet i flere runder for å finne hvilke former for muligheter med resonnering og argumentasjon de tilbyr. Ved tvilstilfeller har jeg drøftet med veileder, noe som både har ført til økt forståelse og grundige gjennomganger. Drøftingen har dermed vært verdifull for både kvaliteten og troverdigheten til studien, og dens funn. Den kvantitative tilnærmingen har gitt svar på frekvensen av muligheter for resonnering og argumentasjon elevene får innen geometri i de utvalgte matematikkbøkene.

Jeg har analysert etter beste evne samtlige forklaringsbokser og oppgaver i geometri i de fire matematikkbøkene ved hjelp av rammeverket utviklet av Otten et al. (2014), som gir et godt bilde av mulighetene for resonnering og argumentasjon. Dette er et rammeverk som mulig ikke er så mye utprøvd på norske matematikkbøker. I så måte kan studien min være et bidrag til forskning i dette feltet. Utvalget til studien har vært læreverk i matematikk fra de største lærebokforlagene i Norge. Studien kan antyde hvordan kjerneelementer og nye kompetansemål i læreplanen gjenspeiles i matematikkbøker. I tillegg kan den bidra til å gi nyttig kunnskap til skoleledere og matematikklærere i Norge.

6 Konklusjon

Denne studien har satt fokus på å undersøke hvilke muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon som finnes innen geometri i norske lærebøker i matematikk. Forskning har lenge hatt fokus på hvordan resonnering og argumentasjon setter sine spor i skolen. Dette gjenspeiles i læreplaner internasjonalt, og nylig også nasjonalt. I 2020 trådte den nye læreplanen, Kunnskapsløftet, i kraft. Denne læreplanen inneholder nye kompetansemål og kjerneelementer for matematikk, som forteller hva hovedinnholdet i matematikk i grunnskolen skal være. Med et kjerneelement som omhandler resonnering og argumentasjon betyr det at dette er noe av det viktigste innholdet i matematikkundervisningen. Med tanke på at læreboka i matematikk er linken mellom læreplan og undervisning (Fan et al., 2013), har det vært interessant å undersøke hvordan den nye læreplanen gjenspeiles i de nye matematikkbøkene. Spesielt med tanke på at lærere ofte mangler kunnskap om hvor viktig det er å benytte seg av resonnering og argumentasjon i undervisningen, i tillegg til at mange mangler erfaring med dette (Harel & Sowder, 2007).

Min analyse av de undersøkte matematikkbøkene for 6. trinn har avdekket både kvantitative og kvalitative funn. De kvantitative funnene tilsier at det finnes noen muligheter for arbeid med resonnering og argumentasjon innen geometri i matematikkbøker for 6. trinn. De kvalitative funnene forteller at disse mulighetene kommer i form av ulike aktiviteter i oppgavene. Mange av aktivitetene kan knyttes til deler av resonneringsprosesser uten at de kommer i mål med validering som et siste stopp, mens noen få oppgaver inneholder aktiviteter som kan knyttes til deduksjon og validering.

Jeg har med denne studien jobbet tett inn på det som regnes som bindeleddet mellom læreplan og undervisning, nemlig matematikkboka. Dette har ført til at jeg har skaffet meg god oversikt over forskning i begge ender. Valenta og Enge (2020) har gjort en grundig analyse av den nye læreplanen, og det finnes utallig mye forskning som handler om resonnering og argumentasjon i undervisning. Rammeverket har sammen med metodevalget gitt klare rammer for analysen. Med dette har jeg greid å være rigid med tanke på at jeg ikke har lagt noen tolkninger eller antakelser inn i analysen. Dette har også ført til at jeg ikke kan si noe om den pedagogiske bruken av matematikkbøkene jeg har undersøkt. Det hadde vært interessant å undersøke hvordan lærere bruker forklaringsbokser og oppgaver med muligheter for resonnering og argumentasjon, i undervisning. Min studie åpner opp for å forske på dette. I tillegg kan undersøkelsen min åpne opp for å studere elevers oppfatning av resonnering og argumentasjon, slik det blir fremstilt i matematikkbøker. I andre enden kunne det vært interessant å utforske hvordan lærebokforfattere tolker og bruker læreplanen i sitt arbeid når de utvikler nye læreverk.

Referanser

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216, 235.

Balacheff, N. (2002). *The researcher epistemology: A deadlock for educational research on proof.*

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 27–44.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. lll, pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J., & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64, 71–80. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.06.005

Bowen, G. (2009). Document Analysis as a Qualitative Research Method. *Qualitative Research Journal*, 9, 27–40. https://doi.org/10.3316/QRJ0902027

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F.A., Furinghetti, F., Jahnke, H. DurandGuerrier N. & Morselli, F. (2012) Conceptions of proof – In research and teaching. In Hanna, G. & de Villiers, M. (Eds*.) Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI study*, pp. 169–190. New York: Springer

Creswell, J. W. (2009). Research Design*: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. SAGE Publications.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2017). *Research methods in education*: routledge.

Davis, J. D. (2012). An examination of reasoning and proof opportunities in three differently organized secondary mathematics textbook units*. Mathematics Education Research Journal,* 24(4), 467–491. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0047-2

Enge, O. & Valenta, A. (2022) Matematisk resonnering, argumentasjon og bevis på barnetrinnet. I T. S. Gustavsen, R. A. Rinvold, K. R. Choi Hinna, T. Sundtjønn (Red.), *QED1-7 Matematikk for grunnskolelærerutdanningen, Bind 1*, (2. utg., s. 507-544). Oslo: Cappelen Damm AS

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM*, 45(5), 633–646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., . . . Granum, K. (2016). Med ARK&APP. *Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer*. Oslo: 67 Universitetet i Oslo. Retrieved from https://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/arkapp_syntese_endelig_til_trykk.pdf

Greene, J. C., Caracelli, V. J., & Graham, W. F. (1989). Toward a Conceptual Framework for Mixed-Method Evaluation Designs. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 11(3), 255–274. https://doi.org/10.3102/01623737011003255

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2.utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Gulbrandsen, J. E., Måleng, K., Løchsen, R., Olsen, V. S. (2021). *Matematikk 6 Grunnbok.* Oslo: Cappelen Damm AS*.*

Hagelia, M. (2021, juli 14). Kjerneelementene – det virkelig nye i fagfornyelsen. *Utdanningsnytt.* https://www.utdanningsnytt.no/bedre-skole-fagartikkel-fagfornyelse/kjerneelementene--det-virkelig-nye-i-fagfornyelsen/290318

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof*. For the Learning of Mathematics*, 15.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview*. Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* 2, 805–842.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics*. For the Learning of Mathematics,* 11(1), 38–42.

Hewitt, D. (1999). Arbitrary and Necessary Part 1: A Way of Viewing the Mathematics Curriculum*. For the Learning of Mathematics*, 19(3), 2–9.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in Mathematics Education*, 379-405.

Kongelf, T. R. (2019). Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra? [Doctoral thesis, Universitetet i Agder]. I *238*. https://hvlopen.brage.unit.no/hvlopen-xmlui/handle/11250/2616700

Kongsnes, A., Lerø, K. R., Markussen, M. S. (2021). *Matemagisk 6B Grunnbok* (2.utg). Oslo: Aschehoug

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: an introduction to its methodology*. (Second edition ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Kunnskapsdepartementet (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag(Mat1-04).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Hovedomraader#

Kunnskapsdepartementet. (2019). Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05). Retrieved from https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Li, Y. (2000). A Comparison of Problems That Follow Selected Content Presentations in American and Chinese Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31(2), 234–241. https://doi.org/10.2307/749754

Maher, C. A., Palius, M. F., Maher, J. A., Hmelo-Silver, C. E., & Sigley, R. (2014). Teachers Can Learn to Attend to Students' Reasoning Using Videos as a Tool. *Issues in Teacher Education*, 23(1), 31–47.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25–53. https://doi.org/10.1023/A:1012733122556

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173–204). Rotterdam, The Netherlands: SensePublishers.

Nordberg, G. M., Arnås, A. C., Alseth, B., Røsseland, M. (2021a). *Multi 6A elevbok* (3.utg). Oslo: Gyldendal.

NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi i Hentet fra https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/humsam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-ogteologi/

Nordberg, G. M., Arnås, A. C., Alseth, B., Røsseland, M. (2021a). *Multi 6A elevbok* (3.utg). Oslo: Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C., Røsseland, M. Nordberg, G. M. (2021b). *Multi 6B elevbok* (3.utg). Oslo: Gyldendal.

Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M., & Clark, D. L. (2011). Reasoning-and-Proving in Geometry Textbooks: What Is Being Proved? *I North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. https://eric.ed.gov/?id=ED586011

Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M., & Clark, D. L. (2014). The Mathematical Nature of Reasoning-and-Proving Opportunities in Geometry Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning,* 16(1), 51–79. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.857802

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: Two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM*, *45*(5), 685–698. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0526-2

Pingel, F. (2010). *UNESCO guidebook on textbook research and textbook revision* (2nd rev. and updated ed). UNESCO ; Georg Eckert Institut for International Textbook Research. http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001171/117188e.pdf

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018) *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm AS.

Reid, D. A. (2022). «Reasoning» in national curricula and standards. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy.* https://hal.science/hal-03746833v2

Rezat, S., & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education (Nordisk Matematikk Didaktik*), 20, 247–266.

Skott, J., Skott, C. K., Jess, K. & Hansen, H.C. (2018). *Matematik for lærerstuderende: Delta 2.0 Fagdidaktik, 1.–10. klasse* (2. udg. ed.). Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N. & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. I Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Red.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education*: *The journey continues* (s. 315-351). Rotterdam: SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9

Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9–16.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258–288. https://doi.org/10.1080/10986060903253954

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students’ Ability for Deductive Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), 103–133. https://doi.org/10.1080/10986060701854425

Svendsen, S. (2020, april 19). Bevisets stilling i matematikkundervisningen. *Utdanningsnytt.* https://www.utdanningsnytt.no/fagartikkel-matematikk/bevisets-stilling-i-matematikkundervisningen/239369

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253–295. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.3.0253

Tømmerdal, S. (2021). *Hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis er å finne blant oppgaver innen temaet brøk i fire ulike lærebøker for 5. trinn?*[Masteroppgave]. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Utdanningsdirektoratet. (2019). Kjernelementer – fag i grunnskolen og gjennomgående fag i vgo. Retrieved from https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet (2023). *Innføring og overgangsordninger for nye læreplaner.* Hentet fra: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/innforing-og-overgangsordninger-for-nye-lareplaner/#a166492

Valenta, A., & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden*, *14*(3), Art. 3. https://doi.org/10.5617/adno.8195

Villiers, M. (1995). An alternative introduction to proof in dynamic geometry. *MicroMath*, 11, 14–19.

Yumiati, Y., & Noviyanti, M. (2017). Abilities of Reasoning and Mathematics Representation on Guided Inquiry Learning. *Journal of Education and Learning (EduLearn)*, *11*(3), Artikkel 3. https://doi.org/10.11591/edulearn.v11i3.6041

NTNU

Kunnskap for en bedre verden