Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for lærerutdanning

Mathilde Eidem Holm

Ungdomskoleelevers generaliseringsstrategier i møte med figurmønster

En kvalitativ studie av ungdomskoleelevers bruk og forståelse av generalisering i arbeid med en figurmønsteroppgave.

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5.-10.trinn
Veileder: Ole Enge
Mai 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Mathilde Eidem Holm

Ungdomskoleelevers generaliseringsstrategier i møte med figurmønster

En kvalitativ studie av ungdomskoleelevers bruk og forståelse av generalisering i arbeid med en figurmønsteroppgave.

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5.-10.trinn
Veileder: Ole Enge
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne studien har det blitt undersøkt hvordan elever på 9.trinn generaliserer i arbeid med en figurmønsteroppgave. Målet med studien er å se på hvilke generaliseringsstrategier elevene tar i bruk, samt å få en noe dypere innsikt i tankegangen som ligger til grunn for deres valg av strategier. Studiens problemstilling er: *Hvilke generaliseringsstrategier tar ungdomsskoleelever i bruk i arbeid med en figurmønsteroppgave, og hvordan forklarer gruppene tankegangen bak valget av de ulike generaliseringsstrategiene?*

Studien har en kvalitativ tilnærming, hvor data ble samlet inn ved at elevene jobbet i grupper, der de sammen skulle løse gitte oppgaver til et figurmønster. I forlengelsen av dette arbeidet, ble det gjennomført gruppeintervjuer med tre av gruppene, for å komme dypere inn i tankegangen bak strategibruken. Utvalget i studien besto totalt av 12 elever, som igjen var delt inn i fire grupper med tre elever per gruppe. Av de fire gruppene som deltok i gruppearbeidet, var det kun tre av gruppene der alle deltakerne samtykket til å bli intervjuet.

Løsningsstrategiene gruppene kom frem til skulle presenteres på plakater. Plakatene ble senere samlet inn og analyserte i lys av Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier. Intervjuene ble tatt opp på lydopptak, og transkribert i etterkant. Deretter ble de analysert ved hjelp av en tematisk analyse, der koder og kategorier ikke var forhåndsdefinerte. Resultatene fra disse analysene ga innsikt i tankegangen som lå til grunn for de generaliseringsstrategiene hver enkelt gruppe hadde benyttet.

Funnene i studien viser at alle de fem generaliseringsstrategiene fra Lannin (2005) sitt rammeverk ble tatt i bruk i arbeidet med den lineære figurmønsteroppgaven. Tre av fire grupper benyttet seg både av *ikke-eksplisitte* og *eksplisitte* generaliseringsstrategier. Ei av gruppene brukte *eksplisitt* generaliseringsstrategi på alle oppgavene. I analysene av intervjutranskripsjonene ble de tre hovedkategoriene; *forenklinger, formel* og *visualisering*, utarbeidet. I tillegg kom det frem av analysene at alle gruppene leter etter system for å løse oppgavene til figurmønsteret, system er derfor en kjernekategori i denne studien. Denne kategorien knytter resultatene fra plakatene og intervjuene sammen.

Abstract

This study investigates how 9th-grade students generalize when working on figure pattern tasks. The primary aim is to explore the generalization strategies employed by the students and gain a deeper understanding of the underlying thought processes guiding their strategy choices.

The research question for this study is: *What generalization strategies do secondary school students utilize in figure pattern tasks, and how do the groups explain the rationale behind their chosen strategies?*

A qualitative approach was adopted, where data was collected through group work sessions, during which students collaborated to solve assigned figure pattern tasks. In addition, group interviews were conducted with three of the groups to gain deeper insights into the thought processes underlying their strategy usage. The study sample consisted of a total of 12 students, divided into four groups with three students per group. Among the four groups participating in the group work, only three groups had all participants consenting to be interviewed.

The solution strategies developed by the groups were presented on posters. Subsequently, the posters were collected and analyzed using Lannin's (2005) framework for generalization strategies. The interviews were audio recorded and transcribed, and a thematic analysis was performed without predefined codes and categories. The results of these analyses provided insights into the underlying thought processes guiding the generalization strategies employed by each group.

The findings of this study demonstrate that all five generalization strategies outlined in Lannin's (2005) framework were employed in solving the linear figure pattern tasks. Three out of four groups utilized both non-explicit and explicit generalization strategies. One group exclusively employed explicit generalization strategies for all tasks. The analysis of interview transcripts revealed the use of three main categories: simplifications, formulas and visualization. Additionally, the analysis show that all groups sought a systematic approach to solving the figure pattern tasks, making *system* a core category in this study. This category establishes a connection between the results obtained from the posters and the interviews.

Forord

Denne studien er gjennomført våren 2023, og markerer slutten for meg som lærerstudent på grunnskolelærerutdanningen for 5-10. trinn ved NTNU i Trondheim. Arbeidet med masteroppgaven i matematikkdidaktikk har vært både en lærerik, spennende, interessant og utfordrende prosess. Til tross for både opp og nedturer, har masterprosessen gitt meg ny og viktig kunnskap, som jeg tar med meg inn i læreryrket.

Først vil jeg takke min veileder, Ole Enge, for gode råd og tilbakemeldinger gjennom skriveprosessen. En stor takk rettes også til praksislæreren min, som la til rette for at forskningsarbeidet var mulig å gjennomføre i praksis. Elevene som takket ja til å delta i studien, fortjener også en stor takk. Uten elevene ville studien ikke vært mulig å gjennomføre.

Til slutt vil jeg takke mine nærmeste venner og familie som har bidratt med god støtte og hjelp gjennom hele skriveprosessen. En spesielt stor takk til samboeren min, som har vært der for meg gjennom hele masterprosessen og støttet meg gjennom både gode og dårlige dager. Uten dere ville ikke denne studien vært mulig å gjennomføre.

Trondheim, mai 2023

Mathilde Holm

Innholdsfortegnelse

Tabeller

Figurer

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn for masteroppgaven

Algebra har vært et viktig emne i skolematematikken i lang tid, men måten emnet algebra introduseres på i skolen, har i løpet av noen tiår endret seg en betraktelig. Fra å være en gren innen matematikken, der regler og symbolmanipulasjon har vært det viktigste, har fokuset nå dreid mot en type undervisning som skal gi elevene større mulighet til å bruke flere representasjoner, bruke algebra i mer realistiske situasjoner og å bruke algebra i tilknytning til teknologiske verktøy (Kieran 2014, s.27-28). Kieran (2014) sier i sin artikkel at den tradisjonelle måten å jobbe med algebra på har blitt erstattet av undervisning som setter søkelys på å skape mening i symbolbruken og de algebraiske prosessene (s.28).

Den nevnte endringen i synet på algebraundervisning ble tydelig på matematikkonferansen, Research Agenda Conference in Algebra, som ble avholdt i Georgia i 1987 (Radford, 2006, s. 2-3). Et sentralt tema som her ble løftet fram var behovet for mer og ny forskning rundt temaet algebraisk tenking. Siden den gang har det blitt utført flere studier på dette området (Radford, 2006, s.2-3). Kaput (2008) beskriver den tradisjonelle skolealgebraen som et problem. Han sier at dette problemet kan løses gjennom å involvere en dyp og ny måte å tenke på, en rekonstruering av læreplaner, lærerutdanning, klasseromspraksis og vurdering (Kaput, 2008, s.5-6). Algebra i skolen må ikke begrense seg til å være et avgrenset emne, algebraundervisning må starte allerede på småtrinnet og algebra må bli en måte å tenke på og brukes til å løse problemer (Kaput, 2008, s.6).

Også i Norge har algebra i skolen vært i endring. Dette gjenspeiles blant annet i måten læreplanen har blitt revidert på. Fra L97, som ikke bruker begrepet generalisering i kompetansemålene som omhandler arbeid med algebra, til LK20 som blant annet sier at elevene etter 8. trinn skal være i stand til å generalisere og beskrive mønstre, både algebraisk og med egne ord (Utdanningsdirektoratet, 2020). Et av læreplanmålene etter 9.trinn sier at elevene skal være i stand til å både beskrive, forklare og presentere strukturer og utviklinger i geometriske mønstre og tallmønstre (Utdanningsdirektoratet, 2020). Også kjerneelementene i LK20 fremhever generalisering. Her er det blant annet beskrevet at generalisering i matematikk handler om at elevene selv skal oppdage sammenhenger og strukturer og ikke få løsningen gjennom en ferdig oppskrift (Utdanningsdirektoratet, 2020). Elevene skal både kunne forstå, begrunne og lage sine egne resonnementer for å løse ulike matematiske problemer. Den matematiske kompetansen til elevene kommer frem når de er i stand til å resonnere over fremgangsmåtene og strategiene som de tar i bruk, samt løsningene sine (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Til tross for at det har skjedd endringer, og at det nå blir brukt mye tid på algebra i skolen, viser forskning at algebra er et tema som mange elever opplever som vanskelig og utfordrende. Den internasjonale TIMSS-undersøkelsen, er en undersøkelse som blir utført i fagene matematikk og naturfag hvert fjerde år. Denne undersøkelsen ble utført i Norge med elever på 9.trinn både i 2015 og 2019. Resultatene fra 2015 viste at elevene hadde spesielt lave prestasjoner i temaet algebra (Utdanningsdirektoratet, 2016). Sammenligner man resultatene fra 2015, med resultatene fra 2019, viser resultatene at det var en svak nedgang i prestasjonene i matematikk. Dette forteller oss at mange av elevene i Norge har vansker med temaet algebra (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Også forskere som Becker og Rivera (2006) beskriver noe av den samme problematikken. I deres artikkel kom det frem at mange elever i ungdomsskolen ikke er i stand til å utføre en grunnleggende oppgave i algebra. I perioden fra år 2000 til 2005 gjennomførte Becker og Rivera (2006) en studie som omhandlet generalisering av lineære mønstre. Om lag 70 000 elever på 8.trinn, fra San Francisco-området i USA, deltok i studien (Becker & Rivera, 2006, s.95). Analysene av elevarbeidene fra denne 5 år lange studien viste at mindre enn 18% av elevene som deltok i studien var i stand til å uttrykke korrekte algebraiske relasjoner, samt å være i stand til å generalisere mønstre til en eksplisitt og lukket formel, noe som Becker og Rivera (2006) mener er urovekkende (s.95).

Radford (2006) gjennomførte også en studie om læring og undervisning i algebra. I denne studien var et av målene å få en dypere forståelse av elevenes algebraiske tenkning (s.2). Radford (2006) legger frem at det er vanskelig å gi en klar og entydig definisjon på hva algebraisk tenkning innebærer. Dette begrunner han med at algebra som emne rommer et såpass bredt spekter av innfallsvinkler, prosesser og tilnærmingsstrategier (Radford, 2006, s.3). I studien fokuserte Radford (2006) på algebraisk tenkning knyttet til generalisering av mønster. En faktor som Radford (2006) peker på i denne studien er at ikke alt arbeid med generalisering av mønster fører til algebraisk tenkning. Han sier at lærere må være bevisst på hva som er algebraisk generalisering og hva som for eksempel er aritmetisk generalisering (Radford, 2006, s. 3-4). Lærere må ha gode pedagogiske strategier for at elevene skal bli i stand til å jobbe med generalisering av mønster på en algebraisk måte (Radford, 2006, s. 3-4).

Som lærerstudent og snart ferdigutdannet matematikklærer, har jeg også selv fått oppleve i praksis at emnet algebra, og nærmere bestemt arbeid med generalisering av mønster, er et tema som mange elever opplever som vanskelig og utfordrende i matematikken. Med bakgrunn i egne erfaringer og med bakgrunn i utfordringer som blant annet Radford (2006) og Becker og Rivera (2006) gjennom sin forskning peker på innenfor dette emnet, vil det være interessant å undersøke hvilke generaliseringsstrategier elever i ungdomsskolen tar i bruk i arbeid med figurmønster. I tillegg vil det være interessant å komme litt nærmere inn på tankegangen bak elevenes strategibruk. Dette er et felt i matematikken som er interessant å undersøke, for å kunne få en noe dypere innsikt i elevers forståelse for algebraisk generalisering.

Selv om det er gjort mye forskning og gjennomført flere studier som peker på hvilke generaliseringsstrategier man ofte ser tendenser til at elevene tar i bruk, så er dette av flere årsaker fortsatt et felt som er interessant og relevant å undersøke. En av grunnene til dette er blant annet at læreplanen, som beskrevet lenger opp, legger vekt på at elevene både skal lære seg å generalisere, og å beskrive sine generaliseringer algebraisk (Utdanningsdirektoratet, 2020). I tillegg vil dette feltet fortsatt være relevant å undersøke fordi det for matematikklærere er viktig å ha en forståelse for, og å være bevisste på hvordan elevene generaliserer (Mason, 1996, s. 65). Som matematikklærer vil det også være viktig å opparbeide seg en forståelse for ulike typer generaliseringsstrategier, samt tankegangen bak de ulike strategiene, slik at elevene kan få hjelp til å utvikle sin matematiske forståelse for algebraisk generalisering videre. Dersom matematikklærere ikke er bevisste på elevene sine generaliseringer, vil heller ikke matematisk tenkning finne sted (Mason, 1996, s.65).

1.2 Forskningsspørsmål

Formålet med denne studien er å se på hvilke generaliseringsstrategier elever i ungdomsskolen tar i bruk i arbeid med mønsteroppgaver, og å få en noe dypere innsikt i tankegangen bak strategibruken. I grunnskolen blir mønsteroppgaver introdusert allerede på småtrinnet (Utdanningsdirektoratet, 2020). Men, til tross for at elevene tidlig blir introdusert for emnet, har jeg ut ifra egne erfaringer som lærerstudent i praksis, og ut ifra hva forskning sier, sett at emnet algebra er utfordrende for mange elever. Som matematikklærer vil det være viktig å få en forståelse for disse utfordringene.

Figurmønsteroppgaver i skolen blir ofte valgt som en innfallsvinkel i arbeidet med generalisering og algebraisk tenkning (Radford, 2010, s. 55). Som matematikklærer vil det derfor være viktig å ha kunnskap om hvilke generaliseringsstrategier elevene benytter seg av, og hvordan tankemåter som ligger bak strategibruken, for å kunne hjelpe elevene på veien mot å utvikle forståelse for algebraisk generalisering og tenkning.

Med dette som utgangspunkt har jeg utviklet følgende forskningsspørsmål:

Hvilke generaliseringsstrategier tar ungdomsskoleelever i bruk i arbeid med en figurmønsteroppgave, og hvordan forklarer gruppene tankegangen bak valget av de ulike generaliseringsstrategiene?

1.3 Oppgavens oppbygning

Masteroppgaven er delt inn i seks hoveddeler. Disse seks delene er innledning, teori, metode, analyse, diskusjon og til slutt en avsluttende del. I teoridelen presenteres relevant forskningslitteratur som er med på å belyse problemstillingen. Sentrale begreper som algebra, algebraisk tenkning og generalisering vil her bli gjort rede for. Teori om ulike typer generaliseringsstrategier, og teori om hvordan algebra har endret seg i skolen vil bli lagt fram. Rammeverket til Lannin (2005) som beskriver ulike typer generaliseringsstrategier vil i studien bli brukt som hovedrammeverk for deler av datamaterialet. Rammeverket vil derfor legges detaljert frem i teorikapittelet.

I metodekapittelet vil studiens forskningsprosess og forskningens metode presenteres. Det vil her bli begrunnet hvorfor studien er en kvalitativ studie, og hvorfor kasusstudie er den beste egnede forskningstilnærmingen å ta i bruk for å belyse forskningsspørsmålet i studien. I tillegg vil forskningens utvalg, datainnhenting og analyseprosess bli gjort rede for. De forskningsetiske hensynene som ligger til grunn i studien, og refleksjoner rundt studiens kvalitet, vil også vektlegges i dette kapittelet.

I kapittel 4, analysekapittelet, vil resultatene fra datainnsamlingen bli presentert. Resultatene vil bli lagt frem gjennom to overordnede deler.

Diskusjonskapittelet vil diskutere funnene i forskningen, opp mot tidligere teori og forskning, som er lagt frem i studiens kapittel 2.

I studien sitt siste kapittel vil noen avsluttende refleksjoner som oppsummerer hovedtrekkene og resultatene i studien bli presentert. Studien avsluttes med noen refleksjoner om videre forskning på dette feltet.

2.0 Teori

I teorikapittelet vil forskningsspørsmålet bli belyst gjennom at sentral teori, og sentrale begreper vil bli gjort rede for. I første del av teorien vil det bli beskrevet hva som ligger i begrepet algebra og hvordan emnet algebra har endret seg i skolen. Videre vil begrepene algebraisk tenkning og generalisering bli gjort rede for. I forlengelsen av dette vil rammeverket til Lannin (2005) om ulike generaliseringsstrategier, rammeverket som i denne studien blir brukt som hovedrammeverk for å analysere deler av datamaterialet, bli presentert. Videre blir det lagt frem teori om hva som påvirker elevenes valg av generaliseringsstrategier, og hva noen andre forskere har funnet ut om elevers generaliseringsstrategier. Til slutt vil teori om figurmønsteroppgaver i skolen bli presentert.

2.1 Hva er algebra?

Begrepet algebra, er som beskrevet i innledningen, et begrep som rommer mye (Radford, 2006). Algebra kan romme alt fra likninger, funksjoner og mønster, til ulike matematiske prosesser og måter å tenke på (Radford, 2006, s.3). Fordi begrepet er såpass innholdsrikt, gjør dette at *algebra* som begrep i matematikken kan være vanskelig å finne en klar og spesifikk definisjon på. Forskningsteori vektlegger flere forskjellige aspekter for å beskrive hva algebra er.

Lee (1996) beskriver i sin artikkel at det er nyttig å se begrepet *algebra* som en mindre kultur innenfor matematikken. Hvor matematikk blir sett på som den overordnede kulturen (s.87). Blant annet kan begrepet *algebra* i lys av en mindre kultur, både bli sett på som et sett med aktiviteter og som et språk (Lee, 1996, s.87). Algebra kan beskrives som noe du gjør (Lee, 1997, s. 187). I tillegg vil det være hensiktsmessig å kunne se på samspillet mellom algebra og aritmetikk (Lee, 1996, s. 87). Aritmetikk kan også bli sett på som en mindre kultur innenfor matematikken (s.87).

Fordi algebra er et begrep som rommer mye, peker også Kaput (2008) i sin artikkel på at det er vanskelig å finne en beskrivelse som omfavner og tar for seg alle sider ved begrepet. Algebra er ikke en statisk form for kunnskap (Kaput, 2008, s. 9). Selv om det er utfordrende å definere begrepet på måter som belyser alle sider ved algebraen, velger Kaput (2008) i likhet med Lee (1996) å se begrepet som et kulturelt artefakt (s. 8-9). Algebra kan karakteriseres som en selvstendig gren av kunnskap i matematikken, som utvikler seg som et kulturelt artefakt gjennom symbolsystemene som den representerer (Kaput, 2008, s. 8-9). I tillegg kan algebra sees på som en menneskelig aktivitet, altså noe menneskene gjør (Kaput, 2008, s. 9). Mennesker, som i denne sammenhengen er elever i skolen, utvikler blant annet sin algebraiske tenkning gjennom at de utvikler seg og lærer over tid (Kaput, 2008, s. 9). Med bakgrunn i dette, kan algebra derfor forstås både som et øyeblikksbilde av ulike strukturer og funksjoner som fins i matematikken i dag, men også som et dynamisk bilde på hvordan algebraen har utviklet seg evolusjonært og utviklingsmessig gjennom historien (Kaput, 2008, s.9).

2.1.1. Kaput (2008) sine to kjerneaspekter for å beskrive algebra

I tillegg til at algebra kan forstås som et kulturelt artefakt, tar Kaput (2008) også utgangspunkt i to forskjellige kjerneaspekter, og tre forskjellige «tråder» for å beskrive hva som ligger i begrepet (s.11).

Det første kjerneaspektet, kjerneaspekt A, legger vekt på at algebra handler om generalisering (Kaput, 2008, s. 10). Algebra blir i det første kjerneaspektet sett på som det å kunne uttrykke generaliseringer og at formålet med generaliseringen er at den skal ende opp i det standardiserte symbolspråket som en formel (Kaput, 2008, s. 10). Det andre kjerneaspektet, kjerneaspekt B, legger derimot vekt på at algebra er menneskelige aktiviteter som blir generalisert inn i et symbolsystem (Kaput, 2008, s. 11). Vanligvis utvikler kjernaspekt A seg før kjerneaspekt B. Dette er fordi regelbaserte handlinger, med utgangspunkt i symboler, krever en forståelse av hvilke kombinasjoner av symboler som er tillatte og hvordan symbolene forholder seg til hverandre. Spesielt er dette viktig når det gjelder kunnskap om hvilke symbolkombinasjoner som er likeverdige med andre (Kaput, 2008, s.11).

De to kjerneaspektene som Kaput (2008) tar utgangspunkt i for å beskrive begrepet *algebra,* kommer begge også til syne gjennom det Kaput (2008) kaller tre «tråder». Disse trådene sier alle noe om forskjellige områder i det komplekset nettet som algebra rommer. Den første tråden legger vekt på at algebra er studien av strukturer og systemer, som kommer til syne gjennom ulike relasjoner og beregninger (Kaput, 2008, s.11). Denne tråden inkluderer systemer og relasjoner som også er å finne i aritmetikken. Nærmere bestemt handler den første tråden om generalisert aritmetikk (Kaput, 2008, s. 11-12). Det fremheves at det viktigste innenfor denne tråden er å studere og finne sammenhengene i de aritmetiske uttrykkene, heller enn å være opptatt av selve tallene og svarene som utrykkene gir. Dette kan for eksempel dreie seg om å studere hvorfor summen av to partall alltid blir ett partall (Kaput, 2008, s. 12).

Den andre «tråden» legger vekt på algebra som studien av funksjoner, forhold og relasjoner. Denne tråden tas ofte i bruk gjennom arbeid med elementære mønsteraktiviteter. Slikt arbeid blir ofte sett på som et nødvendig utgangspunkt for å etter hvert kunne utvikle andre former for generalisering innenfor matematikken (Kaput, 2008, s. 12). Den siste av de tre trådene tar for seg algebra som modellering, nærmere bestemt algebra som et modelleringsspråk både i og utenfor matematikken (Kaput, 2008, s.11). Modellering kan sees på som en algebraisk aktivitet, der de ulike typene modellering det til enhver tid er snakk om avhenger av hvilke av de to kjerneaspektene som tas i bruk (Kaput, 2008, s. 14-15). Kaput (2008) peker på tre ulike modelleringer der den ene tar utgangspunkt i kjerneaspekt A. Denne modelleringens formål er å kunne uttrykke mønstre og regelmessigheter i forskjellige situasjoner som oppstår enten i eller utenfor matematikken. For eksempel kan dette være å uttrykke hvordan et geometrisk mønster vokser (Kaput, 2008, s. 14-15).

2.1.2 Algebra i skolematematikken:

I skolematematikken har det de siste tiårene skjedd mange endringer i hva man legger i emnet algebra, samt endringer i hva læreplanen vektlegger at elevene i grunnskolen skal lære i dette emnet (Kieran, 2014, s.27). Disse endringene er også en av grunnene til at det er vanskelig å finne en klar og spesifikk definisjon på hva algebra og algebraisk tenkning er.

Mason (1996) beskriver at algebra i skolematematikken kan forstås som et språk, hvor uttrykk og manipulering av generaliteter står i fokus (s.65). Viktige faktorer å ta hensyn til for å lykkes i algebraundervisningen beskrives av Mason (1996) som det å gi oppmerksomhet til uttrykket av den naturlige algebraiske tenkningen (s.65). Dette betyr at det vil være viktig å vise og skjerpe følsomheten innenfor nærværet og potensialet i algebraisk tenking (Mason, 1996, s. 65).

Skolealgebra blir ofte introdusert som en forlengelse av matematikkundervisning i aritmetikk. Elever som er vant til å arbeide med aritmetiske problemer, er ofte vant til å se matematiske problemer på måter der de skal komme frem til et lukket og avgrenset svar på problemet de står ovenfor (Kieran, 2014, s.29). Dette kan gjøre overgangen fra aritmetikk til algebra komplisert. I arbeid med algebra må tankegangen til elevene endres. Den må endres fra en tankegang der elevene ofte leter etter et avgrenset svar på et regnestykke, over til en tankegang der det er relasjonene i de algebraiske problemene som er i sentrum (Kieran, 2014, s.29). Kieran (2014) peker også på noen undervisningstilnærminger som har vist seg å være vellykket i arbeidet med å endre den matematiske tankegangen til elevene fra en aritmetisk- og over til en algebraisk tankegang. Eksempel på en slik underviseningstilnærminger er blant annet å bruke mønstre, variabler og funksjoner for å jobbe med generalitet og å uttrykke generalitet (Kieran, 2014, s. 29).

Tidligere har algebraundervisningen i skolen hatt sitt hovedfokus på bokstav- og symbolmanipulering. Dette pekes på av flere forskere. Både Kieran (2014) og Kilpatrick (2011) beskriver i sin artikkel at skolealgebraen har vært dominert av en forestilling om at elevene lærer algebra gjennom å huske algebraiske regler som trengs for å kunne utføre forskjellige symbolmanipuleringer (Kieran, 2014; Kilpatrick, 2011.). Det har også eksistert en forestilling om at elevene lærer algebra gjennom å øve på å løse likninger og forenkle algebraiske uttrykk (Kiran, 2014, s. 27-28). Dette samsvarer også med Kilpatrick (2011) sin beskrivelse av at man i matematikken ofte har sett tendenser til at det er symbolmanipulajon og løsning av likninger som er blitt vektlagt (Kilpatrick, 2011, s. 125).

En slik smal forståelse av algebra har ført til at forskere, som for eksempel Kaput (2008), mener at det algebraiske synet i skolen må utvides (s.8). En dypere forståelse av hva algebra er, kan være med på å gi skolealgebraen en større dybde og kraft (Kaput, 2008, s.8). Kaput (2008) poengterer også at det kun er ved å utvide synet på algebra at denne grenen av matematikken kan bli integrert på tvers av alle trinn og emner i matematikken (s.8). I tillegg vil ulike mennesker sine oppfatninger av hva man legger i, og hva man mener at algebra er, ha betydning for hvordan man nærmer seg algebra i matematikken (Kaput, 2008, s.8). Dette vil si at synet som matematikklærere i skolen har av hva algebra er, også er med på å påvirke hvordan denne grenen av matematikken blir jobbet med i undervisningen.

2.1.3 Algebraisk tenkning

I matematikken kan algebraisk tenkning sees som en spesiell form for tenkning og refleksjon (Radford, 2006, s. 3). Radford (2006) peker i sin artikkel på tre ulike og sammenhengende grunner til hva som karakteriserer den algebraiske tenkningen som særegen (s.3). Han sier for det første at algebraisk tenkning kan karakteriseres som særegen på grunn av arbeidet med å finne ukjente algebraiske objekter og variabler, i motsetning til når man jobber med numeriske matematiske problemer (Radford, 2006, s. 3). For det andre, sier Radford (2006), at algebraisk tenkning er særegen fordi de ukjente objektene og variablene kan håndteres analytisk, i motsetning til det å håndtere noe numerisk der man jobber med kjente størrelser (s.3).

For det tredje har algebraisk tenkning også en særegen karakter på grunn av de matematiske symbolene som blir brukt for å representere det som er ukjent (Radford, 2006, s. 3). De matematiske symbolene som blir brukt kan for eksempel være i form av bokstaver (Radford, 2006, s. 3). Men det er her viktig å presisere at å bruke bokstaver for å uttrykke noe som er ukjent, ikke er det samme som å gjøre algebra (Radford, 2006, s. 3).

Med tanke på at algebra er et stort emne som rommer mye og som kan ha mange definisjoner, er det noen mennesker som i tillegg til å se på hvordan algebraen skiller seg fra aritmetikken velger å se på algebra med hovedfokus på de abstrakte egenskapene som en finner i emnet (Driscoll, 1999, s. 1). Ved å se algebra ut ifra et slikt perspektiv vil algebraisk tenkning handle om å ha forståelse for ukjente størrelser, i motsetning til aritmetikken der det jobbes med kjente størrelser (Driscoll, 1999, s. 1).

2.2 Generalisering

I matematikken kan generalisering beskrives som en av de viktigste og mest fundamentale prosessene innenfor matematisk tenkning (Driscoll, 1999, s. 64). Generalisering kan beskrives som en prosess som gir oss mulighet til å se utover det spesielle i et matematisk problem (Driscoll, 1999, s. 64). Driscoll (1999) beskriver at elever i skolen vil lære seg å generalisere ved siden av prosessen der de lærer seg å formulere og lage overbevisende argumenter i matematikken (s. 64).

Mason (1996) beskriver også i likhet med Driscoll (1999) at generalisering er en av de viktigste prosessene i matematikken. Generalisering kan ifølge Mason (1996) bli sett på som selve hjerte i matematikken (s.65). I lys av dette, vil det som matematikklærer derfor være viktig å være bevisste på hvordan elever generaliserer, samt å legge til rette i undervisningen for at elevene får arbeide med å utrykke forskjellige generaliseringer (Mason, 1996, s. 65). Matematisk tenkning vil ikke være til stede dersom matematikklærere ikke er bevisste på elevene sine generaliseringer (Mason, 1996, s.65).

Radford (2003) beskriver tre ulike nivåer som generalisering kan utvikle seg gjennom. De tre nivåene er beskrevet som faktuelt nivå, kontekstuelt nivå og symbolsk nivå (Radford, 2003, s. 37). Nivå 1, beskrives som et nivå der den som generaliserer fokuserer på selve materialet som skal generaliseres (Radford, 2003, s. 65). Det kontekstuelle nivået beskrives derimot som et mer abstrakt nivå, hvor språket er en viktig faktor for å forklare generaliseringene (Radford, 2003, s. 65). Personer som generaliserer kontekstuelt, vil i følge Radford (2003) ofte beskrive sine generaliseringer med uttalelser som «den neste figuren». Innenfor det siste av de tre nivåene, *det symbolske nivået*, brukes symboler og algebraisk notasjon for å beskrive generaliseringene (Radford, 2003, s.66).

2.2.1 Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier

John K. Lannin (2005) beskriver i sin artikkel et rammeverk bestående av fem ulike generaliseringsstrategier som elever i skolen ofte benytter seg av, i arbeid med figurmønsteroppgaver. I Lannin (2005) sin studie ble dette rammeverket brukt for å undersøke hvilke av de fem generaliseringsstrategiene et utvalg bestående av tjuefem elever i en 6.klasse tok i bruk i arbeid med mønsteroppgaver, samt hvordan disse elevene resonnerte over sine strategier (s.231). I min studie vil dette rammeverket bli benyttet som hovedrammeverk for å analysere deler av datamaterialet som er samlet inn. Gjennom å analysere deler av mitt datamateriale i lys av Lannin (2005) sitt rammeverk, ønsker jeg å få en noe dypere innsikt i hvilke generaliseringsstrategier elever benytter seg av, i arbeid med en mønsteroppgave. Generaliseringsstrategiene, som utvalget i min studie tar i bruk kan være med på å gi et innblikk i den algebraiske forståelsen til elevene.

Rammeverket til Lannin (2005) består av to hovedkategorier, der de to kategoriene er omtalt som som; *ikke-eksplisitte strategier* og *eksplisitte-strategier* (Lannin, 2005, s. 234). Hovedkategorien *ikke-eksplisitte strategier,* beskriver generaliseringsstrategier som er avhengige av en bestemt figur i mønsterrekka, for å kunne finne den neste figuren i rekka (Lannin, 2005, s. 234). Dette i motsetning til de *eksplisitte strategiene*, som har som formål å finne verdien til en hvilken som helst figur i et bestemt mønster (Lannin, 2005, s. 234).

De to hovedkategoriene i rammeverket deles igjen inn i fem underkategorier. Underkategoriene beskriver fem forskjellige typer generaliseringsstrategier. To generaliseringsstrategier blir beskrevet under hovedkategorien *ikke-eksplisitte* strategier, mens tre forskjellige generaliseringsstrategier blir beskrevet under hovedkategorien *eksplisitte strategier.* De to generaliseringsstrategiene som i rammeverket blir beskrevet som *ikke-eksplisitte strategier* er kalt for; *telling* og *rekursiv strategi* (Lannin, 2005, s. 234). Underkategorien *telling* omhandler strategier der elevene representerer den gitte problemsituasjonen gjennom tegning, eller ved at de konstruerer bilder eller modeller av situasjonen (Lannin, 2005, s. 234). Den ikke-eksplisitte strategien*, rekursiv strategi,* omhandler derimot strategier der elevene benytter seg av ett bestemt ledd i mønsterrekka, for å kunne komme frem til det etterfølgende leddet i en gitt mønsterrekke (Lannin, 2005, s. 234).

Hovedkategorien *eksplisitte strategier* deles, som nevnt, opp i tre ulike typer generaliseringsstrategier. Disse tre strategiene har i Lannin (2005) sitt rammeverk fått navnene; *hel-objekt-, gjett-og-sjekk-* og *kontekstuell* strategi (s.234). Generaliseringsstrategien som er kalt for *hel-objekt*, går ut på at man i arbeidet med et figurmønster bruker en del eller ett ledd i mønsteret som enhet, for så å komme frem til en del eller ett ledd lengre frem i figurrekka. Denne strategien blir ofte benyttet sammen med multiplikasjon (Lannin, 2005, s. 234). Elever som tar i bruk denne strategien, kan for eksempel begrunne svaret sitt med at figur nummer 20 er det dobbelte av figur nummer 10, og at de da vil multiplisere med to.

Generaliseringsstrategien *gjett-og-sjekk,* som er den andre av de tre *eksplisitte strategiene,* omhandler strategier der elevene prøver- eller gjetter seg frem til for eksempel rett generell formel som passer til det figurmønsteret elevene jobber med (Lannin, 2005, s.234). Den generelle formelen som elevene har gjettet seg frem til, blir deretter testet ut på flere av figurene i mønsteret for å sjekke om formelen fungerer. Når strategien *gjett-og-sjekk* blir benyttet, ligger fokuset ofte på å finne rett generell formel for den bestemte problemsituasjonen, i stedet for å se den generelle sammenhengen i et videre perspektiv (Lannin, 2005, s. 252).

Kontekstuell strategi, som er den siste av de tre eksplisitte strategiene. Elevene vil, når de bruker denne strategien, ta utgangspunkt i informasjonen eller konteksten som er gitt i oppgaven. Videre blir denne informasjonen bli brukt til å konstruere en formel eller regel som passer til et gitt figurmønster (Lannin, 2005, s. 234).

Tabell 1: Min tolkning av Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier.

Generaliseringsstrategi	Forklaring
Ikke-eksplisitte strategier	
Telling	Elevene illustrerer det voksende figurmønsteret gjennom tegning, eller gjennom å representere problemsituasjonen med en modell. Illustrasjonene eller modellene blir brukt som et hjelpemiddel for å kunne telle seg frem til den ønskede løsningen.
Rekursiv	Rekursiv strategi bygger på tidligere ledd eller sekvenser av ledd i figurfølgen for å bestemme bestemte etterfølgende ledd i mønsterrekka.
Eksplisitte strategier	
Hel-objekt	Elevene bruker en del av en enhet for å konstruere en større enhet i mønsterrekka. Dette innebærer multiplikasjon.
Gjett-og-sjekk	Strategien innebærer å gjette seg frem til en regel eller formel, uten å ha kunnskap om regelen/formelen stemmer for det bestemte mønsteret. Denne strategien innebærer ofte å eksperimentere eller å utforske problemsituasjonen.
Kontekstuell	Elevene konstruerer en regel/formel ut ifra informasjonen som er gitt i problemsituasjonen. Regelen/formelen kan relateres til en telleteknikk.

2.2.2 Hva påvirker elevenes valg av generaliseringsstrategier?

Lannin, Barker og Townsend (2006) gjennomførte en studie der de så på hvilke generaliseringsstrategier som ble tatt i bruk av to elever på mellomtrinnet. Målet med studien var å belyse hvilke faktorer som er med på å påvirke elevene sine valg av generaliseringsstrategier. Dette med bakgrunn i at det finnes mye forskning som omhandler ulike typer generaliseringsstrategier, men lite forskning på dette feltet som omhandler hva som påvirker valget av de forskjellige generaliseringsstrategiene (Lannin et al., 2006, s. 3).

Lannin et al. (2006) fant i sin studie at det er flere sammensatte faktorer som påvirker hvordan generaliseringsstrategier elevene tar i bruk. De trekker blant annet frem i sin artikkel at det er vanskelig å peke på en enkelt faktor som påvirker valget av strategi, samt endringer i strategi bruk (Lannin et, al. 2006, s. 3). Dette påvirkes av flere, varierte og sammensatte faktorer, der noen av faktorene de nevner i sin artikkel er: inngangsverdi, den matematiske strukturen til oppgaven, tidligere strategier, visuelt bilde av situasjonen og sosial samhandling med lærer og de andre elevene i klassen (Lannin et., al. 2006, s. 3).

Gjennom Lannin et al. (2006) sin studie kan det også se ut som at elever som har et sterkt visuelt bilde av problemsituasjonen, er i stand til å koble den rekursive strategien de har benyttet sammen med problemsituasjonen (s.23). Elever som generaliserer rekursivt, men som legger sitt fokus på tallverdiene i problemkonteksten, kan derimot se ut til å ha en svakere kobling mellom strategi og problemkontekst (Lannin et al., 2006, s.23).

Når det gjelder eksplisitte generaliseringsstrategier, har det vist seg at disse strategiene sjelden er en av de første strategiene som blir tatt i bruk i oppgaver hvor elevene i skolen må generalisere (Lannin et al., 2006, s. 18). De eksplisitte strategiene blir ofte benyttet når tallverdiene det blir spurt etter i oppgaven er høye. Dette kan tolkes som et tegn på at elevene da søker etter mer effektive strategier for å komme frem til en løsning, heller enn å for eksempel bruke en strategi der de teller seg frem (Lannin et al., 2006, s. 18-19). I tillegg peker Lannin et al. (2006) på at det visuelle bilde til elevene spiller en viktig rolle når eksplisitte strategier blir benyttet (s.18). Det beskrives i deres studie at det visuelle bilde blant annet hadde betydning for om elevene var i stand til å komme frem til en korrekt eksplisitt regel eller ikke (Lannin et al., 2006, s. 18-19). Eksplisitte strategier, blir også i større grad benyttet enn ikke-eksplisitte strategier, i oppgaver der økningen i et mønster ikke så enkelt lar seg identifisere kun ved å studere det gitte mønsteret (Lannin et al., 2006, s. 21-22).

Den eksplisitte strategien gjett- og sjekk blir i følge Lannin et al. (2006) ofte benyttet av elever som har et svakt visuelt bilde (s.19). Elever som benytter seg av generaliseringsstrategien *gjett-og-sjekk* kan ofte ha vanskeligheter med å lage en rett generell regel i en gitt problemsituasjon (Lannin et al., 2006, s.19). Dette i motsetning til elever med sterkt visuelt bilde. Lannin et al. (2006) fant i sin studie at elever som hadde et sterkt visuelt bilde av problemsituasjonen også nesten alltid var i stand til å lage rett generell regel (s.19).

2.2.3 Becker og Rivera – figurativ og numerisk tilnærming til generalisering

Becker og Rivera (2006) påpeker også styrker og svakheter i de strategiene som elevene bruker i arbeid med generalisering av figurmønster. I sin artikkel peker de på at mennesker ofte bruker to forskjellige måter å uttrykke generalitet på. Disse to metodene blir kalt for numerisk og figurativ (Becker & Rivera, 2006, s.96) Innenfor numerisk metode bruker elevene ofte strategien prøving- og feiling (Becker & Rivera, 2006, s. 96). Innenfor den numeriske tilnærmingen prøver elevene gjennom å prøve og feile å tilpasse verdier og tall fra mønsteret de utforsker over til en generell formel. Elever som bruker denne strategien har som regel liten forståelse for hva konstanten er, samt hva den representerer i et lineært mønster. Variabler blir ofte sett på som plassholdere, og elevene kan ha problemer med å forstå sammenhengen mellom de beregningene de gjør og selve mønsteret (Becker & Rivera, 1996, s.96). Elevene går ofte bort fra selve figurene i mønstret, og velger å se på verdiene i figurfølgen. Den andre strategien som Becker og Rivera (2006) peker på er som nevnt figurativ generalisering (s. 96).

Elever som generaliserer figurativt har sitt fokus på selve figurene de utforsker, samt figurenes egenskaper (Becker & Rivera, 2006, s. 96). Strategiene som blir tatt i bruk er ofte visuelle strategier. Becker og Rivera (2006) poengterer også at det er de elevene som bruker en figurativ tilnærming som oftest vil lykkes best i deres generaliseringer (s.100).

2.2.4 Radford sine to hovedkategorier innen generalisering

Radford (2010) sin forskning peker på noe av det samme som blant annet Becker og Riviera (2006) sier om generaliseringsstrategier. I sin studie undersøkte han hvordan elever var i stand til å generalisere algebraisk når de arbeidet med mønsteroppgaver. I studien fant Radford (2010) at generaliseringsstrategiene som elevene tok i bruk kunne dels inn i to hovedkategorier. De to hovedkategoriene er kalt for: *naiv induksjon* og *generalisering* (Radford, 2010, s. 40). Innenfor kategorien naiv induksjon så Radford (2010) ofte tendenser til at elevene benyttet seg av generaliseringsstrategier basert på prøving og feiling. Elevene som benyttet seg av en slik strategi for å generalisere testet som regel ut gyldighetene til generelle formelen eller regelen de hadde funnet på noen av figurene i mønsteret (Radford, 2010, s. 41). Dette kan i følge Radford (2010) ikke karakteriseres som en sofistikert måte å generalisere på (s.41). En generell formel som er konstruert gjennom å prøve seg frem, kan sees på som en hypotese (Radford, 2010, s. 41). En slik metode å generalisere på vil ikke bli sett på som en algebraisk generalisering, men kun en induksjon. Slutningen er ingen logisk slutning, men en slutning basert på gjetning og observasjon (Radford, 2010, s. 41-42).

Den andre generaliseringsstrategien som det ble sett tendenser til at elevene ofte tok i bruk, var en strategi der elevene aktivt prøvde å finne en felles enhet eller noe som gjentok seg i det gitte mønsteret (Radford, 2010, s.43-44). Den gjentakende enheten som elevene finner i mønsteret, generaliserer elevene som bruker denne strategien deretter over de til etterfølgende figurene i mønsterrekka (Radford, 2010, s.43-44). Dette er en annen måte å tenke på enn den første strategien, hvor elevene lager en generell regel gjennom å gjette.

2.3 Figurmønsteroppgaver i skolen

Mye forskning som handler om algebra og generalisering i skolen legger vekt på bruken av mønsteroppgaver i algebraopplæringen. Driscoll (1999) peker blant annet på at mønsterbaserte oppgaver og aktiviteter i nyere materiell som blir brukt i matematikkundervisningen, er en produktiv måte å innlede algebra på (Driscoll, 1999, s.90). En av grunnene til dette er fordi barn allerede i sine tidlige leveår vil være i stand til å gjenkjenne og beskrive ulike mønstre som de observerer (Driscoll, 1999, s.90).

Selv om barn allerede i sine tidlige leveår er i stand til å beskrive og gjenkjenne mønstre, peker Radford (2006) på at elever i begynneropplæringen av algebra ikke bare legger merke til likhetene i mønstrene automatisk (s.5-6). Prosessen med å oppdage likheter i algebraiske mønster er en prosess som skjer gradvis over tid, der elevene må lære seg å skille mellom hva som er likt og ulikt i mønstrene de studerer (Radford, 2006, s.5-6). Det poengteres også i Radford (2006) sin artikkel at det ikke finnes noen fasit på hvordan man ser på det like og forskjellige i mønstrene (s.5-6). Elevene kan ta i bruk mange forskjellige metoder og strategier for å uttrykke hvordan for eksempel et mønster vokser (Radford, 2006, s.5-6).

Lannin et al. (2006) påpeker også at et viktig poeng i arbeid med generalisering, er at matematikklæreren bør legge opp til at feil som oppstår i arbeid med forskjellige generaliseringsstrategier blir fremhevet og tatt opp til diskusjon i klassen (s.25). I tillegg kan elevene lære av hverandres strategier, noe som forutsetter at det i matematikktimene legges opp til at elevene får dele sine tankemåter med hverandre, samt prøve å forklare fordeler og ulemper med strategiene de har benyttet seg av (Lannin et., al, 2006, s. 25). Lannin et. al. (2006) beskriver også at elevene gjennom å koble strategiene sine til geometriske representasjoner kan bli oppmuntret til å både forklare og begrunne generaliseringene de er kommet frem til (s.25).

Som tidligere nevnt er vanskelig å definere begrepene algebra og algebraisk tenkning på en kortfattet og presis måte. Men, Radford (2010) foreslår følgende definisjon av generalisering av mønster:

Generalizing a pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some elements of a sequence S, being aware that this commonality applies to all the terms of S and being able to use it to provide a direct expression of whatever term of S.
(Radford, 2010, s. 42).

Selv om arbeid med generalisering av mønster ofte blir sett på som en fin måte å introdusere elever til emnet algebra, samt å arbeide med elevene sin forståelse av generalisering, så betyr ikke dette at all form for generalisering er algebraisk (Radford, 2010, s. 40). Radford (2010) peker derfor spesielt på viktigheten av å skille mellom hva som kan sees på som algebraiske generalisering, og hva som heller bør sees på som aritmetiske generaliseringer. Med bakgrunn i dette, er det derfor viktig at matematikklærere er bevisste på hva som skiller algebraisk generalisering fra andre typer generalisering i matematikken (Radford, 2010, s. 40). Dersom elevene for eksempel skal jobbe med generalisering av et gitt mønster, vil elevene først generalisere algebraisk når de er i stand til å legge merke til noe felles eller noe likt som går igjen i mønsteret, for deretter å bruke denne informasjonen til å lage et uttrykk som gjelder for alle figurene i mønsteret (Radford, 2010, s.55-56). Dersom elevene kun oppdager noe felles eller en likhet som kun gjelder for noen få av figurene i mønstret, og ikke er i stand til å lage et generelt uttrykk som gjelder for et hvilket som helst ledd i figurrekka, beskriver Radford (2010) at elevene generaliserer aritmetisk (s.55-56).

Også English og Warren (1998) peker på at arbeid med mønsteroppgaver ikke nødvendigvis fører til algebraisk generalisering. Undersøkelser viser at til tross for at mønsteraktiviteter ser ut til å være en god måte å introdusere algebraiske ideer for elevene på, vil elever som mangler en grunnleggende forståelse for konseptet variabler, og som derfor ikke er i stand til å tenke fleksibelt i sitt møte med algebraiske problemstillinger, ofte få vanskeligheter med å generalisere (English & Warren, 1998,167-168).

English og Warren (1998) gjennomførte en studie med 430 elever i alderen 12 til 15 år, hvor målet med studien var å undersøke elevene sin evne til å generalisere algebraisk. I studien kom det frem at elevene hadde vansker med å generalisere selv de enkleste mønster (English & Warren, 1998, s. 167). Noe som kan ha en sammenheng med de strategiene som elevene tok i bruk for å komme frem til en generell formel. Det kom også frem i studien at de svakeste elevene tok i bruk strategier som hadde en rekursiv tilnærming. Dette vil si at elevene enten generaliserte ved hjelp en additiv strategi eller ved hjelp av det de kaller en Ratio strategi (English & Warren, 1998, s. 167). Førstnevnte går ut på at elevene teller, mens elever som benytter seg av sistnevnte har en forståelse av forholdstall; for eksempel at figur 30 i rekka er ti ganger større enn figur 3, og at de derfor kan ta antallet i figur 3 og multiplisere med 10 for å finne antallet i figur 30 (English & Warren, 1998, s. 167). Elevene som brukte slike strategier for å generalisere var heller ikke i stand til å beskrive generaliseringene med algebraisk notasjon. Det kom også frem at jo sterke elevene var i matematikk, desto bedre var elevene til å se på relasjonene i mønstrene og utrykke dette med hjelp av algebraisk notasjon (English & Warren, 1998, s. 167).

3.0 Metode

I studiens metodekapittel vil valg av metode og studiens forskningsprosess bli presentert. Det vil i dette kapittelet bli gjort rede for studiens metodiske tilnærming, studiens utvalg, datainnsamlingsprosess, analyseprosess, samt studiens kvalitet. Etiske hensyn som er vurdert i forskningen vil også bli detaljert beskrevet. I kapittelets siste del, vil noen kritiske betraktninger i studien bli lagt fram.

3.1 Valg av metode

Målet med denne studien er som beskrevet i innledningen, å belyse hvilke generaliseringsstrategier elever i ungdomsskolen tar i bruk i arbeid med generalisering av figurmønster. Samt å få en noe dypere innsikt i hvordan elevene tenker, nærmere bestemt å få en dypere forståelse for tankegangen som ligger bak strategibruken til elevene. For å kunne belyse og å komme i dybden av forskningsspørsmålet i studien, har jeg tatt utgangspunkt i en kvalitativ forskningsmetode. Valget av forskningsmetode vil bli begrunnet under.

3.1.1 Forskningsparadigme

I ethvert forskningsarbeid legger forskerens filosofiske antakelser om verden omkring seg, nærmere bestemt hvordan verdensbilde forskeren har, grunnlaget for forskningsdesignet som blir valgt i forskningen (Creswell, 2014, s. 5). Det filosofiske verdenssynet til forskeren vil være med i avgjørelsen på om forskeren velger en kvalitativ eller kvantitativ forskningstilnærming (Creswell, 2014, s. 6).

Verdensbilde til forskeren, og som forskeren tar med seg inn i sin forskning, kan bli beskrevet ut ifra hvilket forskningsparadigme som forskeren stiller seg innenfor. Et forskningsparadigme kan defineres som et grunnleggende sett av tro, som fører til bestemte handlinger (Creswell & Poth, 2018, s. 16-18). Paradigmet er med på å avgjøre hvordan datamaterialet i studien studeres og tolkes, samt hvilke metoder som blir tatt i bruk i forskningen (Creswell & Poth, 2018, s. 18).

I min studie er det tatt utgangspunkt i et konstruktivistisk forskningsparadigme. Forskere som stiller seg innenfor det konstruktivistiske paradigme ønsker å se virkeligheten gjennom deltakerne sine øyne (Creswell, 2014, s.8). Virkeligheten blir innenfor det konstruktivistiske paradigmet ikke sett på som noen statisk enhet. Det er innenfor dette paradigmet lagt vekt på at virkeligheten formes og kan forstås ulikt fra individ til individ

(Creswell, 2014, s.8). Det er deltakernes subjektive erfaringer, meninger og opplevelser som står i fokus (Creswell, 2014, s.8). Forskere som tar et konstruktivistisk forskningsperspektiv, velger også ofte å nærme seg forskningen sin gjennom en kvalitativ forskningsmetode.

I min studie ønsker jeg å se på hvilke generaliseringsstrategier noen elever i ungdomsskolen tar i bruk i arbeid med en figurmønsteroppgave, samt å få en noe dypere forståelse for tankegangen som ligger bak valget av generaliseringsstrategiene. For å komme i dybden av tankegangen bak strategibruken til deltakerne var det derfor naturlig å velge kvalitativ forskningsmetode. Forskningsspørsmålet blir undersøkt gjennom både å studere elevarbeid der elevene skriftlig i grupper presenterer sine løsninger av en gitt mønsteroppgave, og gjennom intervju av tre grupper i etterkant. I intervjuet blir elevene spurt om å utdype tankegangen sin ytterligere.

3.1.2 Kvalitativ forskningsmetode

Forskere som forsker kvalitativt ønsker å komme i dybden på og å forstå deltakernes perspektiver på det som skal undersøkes (Postholm, 2020, s. 17). En forsker som forsker kvalitativt, ønsker også ifølge May Britt Postholm (2020) å rette forskningen sin inn mot deltakerne sine naturlige omgivelser og hverdagshandlinger (s.17). I likhet med Postholm (2020) beskriver også Creswell (2014) i sin artikkel at datamaterialet i kvalitative studier ofte samles inn i omgivelsene til deltakerne (s.4). I min studie ønsker jeg å komme i dybden på hvilke generaliseringsstrategier elever i ungdomsskolen tar i bruk når de jobber med figurmønster. Gjennom Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier ønsker jeg å identifisere hvilke strategier utvalget i studien tar i bruk. Dette arbeidet skal foregå i elevenes naturlige omgivelser, og derfor blir arbeidet gjennomført i en vanlig klasseromssituasjon, nærmere bestemt som et gruppearbeid i en matematikktime. I tillegg ønsker jeg å få en dypere forståelse for tankegangen bak elevenes valg av de forskjellige strategiene gjennom intervju. Intervju som metode kan egne seg godt når en skal få et innblikk i informantenes egne tanker og erfaringer (Dalen, 2004, s.15). Gjennom intervjuene vil tankegangen til noen av deltakerne komme tydeligere fram, og en får mulighet til å få frem perspektiver som ikke kom fram i det skriftlige arbeidet. Creswell (2014) beskriver i sin artikkel at det i kvalitativ forskning er viktig å ha fokus på de individuelle meningene til deltakerne i studien, samt å gjøre rede for kompleksiteten som en kan finne i en situasjon (s.4).

For å belyse forskningsspørsmålet i min studie ønsker jeg gjennom å velge en kvalitativ forskningsmetode, å komme tett på deltakerne i studien, for å på denne måten få fram detaljer og nyanser i elevenes generaliseringsstrategier og tankemåter. Ved å identifisere gruppene i studien sine valg av generaliseringsstrategier og ved å studere noe av tankegangen som ligger bak strategibruken, kan en også få et innblikk i utvalgets forståelse for algebraisk generalisering.

3.1.3 Kasusstudie

Den kvalitative forskningstilnærming som velges i en kvalitativ studie bestemmes ut ifra formålet med studien og forskningsspørsmålet (Creswell & Poth, 2018, s. 66-67). I min studie er det naturlig å nærme seg forskningsspørsmålet gjennom den kvalitative forskningstilnærmingen; *Kasusstudie.*

Kasusstudie defineres ifølge Creswell & Poth (2018) som en kvalitativ tilnærming der forskeren undersøker et eller flere virkelige og avgrensede kasuser over tid (s. 96). Kasuset eller kasusene som skal etterforskes, etterforskes gjennom å bruke flere datainnsamlingsmetoder. Å ta i bruk flere datainnsamlingsmetoder vil gi rom for å få en dyp og detaljert forståelse for problemet som forskningen på kasuset skal gi (Creswell & Poth, 2018, s. 96). Kasuset kan for eksempel være et individ, en eller flere grupper individer, et samfunn, en prosess, eller et spesifikt prosjekt (Creswell & Poth, 2018, s. 97).

I mitt forskningsarbeid vil multippel kasusstudie være den best egnede forskningstilnærmingen. Dette fordi jeg i min studie ønsker å gå i dybden på hvilke generaliseringsstrategier et utvalg elever fra 9. trinn benytter når de løser oppgaver knyttet til et mønster, og for å komme nært på tankegangen til disse elevene. Kasusene i dette forskningsarbeidet vil være fire elevgrupper med tre elever per gruppe. I en multippel kasusstudie velger forskeren å studere flere enn ett kasus for å belyse forskningsspørsmålet. Gjennom å studere flere kasus har forskeren mulighet til å sammenligne de ulike kasusene, og se på likheter og ulikheter (Creswell & Poth, 2018, s. 99). Sammenlikning av de fire kasusene i denne studien, kan gi dypere forståelse for hvordan elevene tenker når de velger generaliseringsstrategier i arbeid med figurmønster. Data blir i studien innhentet gjennom to ulike datainnsamlingsmetoder. Dette for i størst mulig grad kunne sikre at innhentet data belyser problemstillingen så bredt som mulig. De to datainnsamlingsmetodene er innsamling av skriftlig elevarbeid fra hver av de fire gruppene, og gruppeintervju. Datainnsamlingen vil bli beskrevet i detalj, i kapittel 3.3 i metodekapittelet.

Postholm (2020) beskriver at kasusstudier kan defineres som utforskning av et system som er bundet til tid og sted (s.50). I min studie er også arbeidet tid- og stedbundet.

Prosessen med arbeidet av mønsteroppgaven er stedbundet fordi datainnsamlingen foregår i deltakerne sitt klasserom, og tidsbundet fordi datainnsamlingen ble samlet inn i løpet av ei uke i praksis, over tre matematikktimer. Kasusstudie vil derfor være en passende forskningstilnærming.

En kasusstudie kan også være både beskrivende og fortolkende, samt å ha til hensikt å støtte eller utvikle eksisterende teori (Postholm, 2020, s. 51). I tillegg kan en kasusstudie være nyttig dersom teori som allerede eksisterer er mangelfull. I tidligere forskning av elevers arbeid med generalisering av mønster pekes det på hvilke generaliseringsstrategier elever i grunnskolen ofte tar i bruk, men det er lite forskning som omhandler bakgrunnen for valget av strategibruken (Lannin et al., 2006, s. 4).

3.2 Utvalget i studien

I kvalitative studier er utvalget i studien ofte strategisk valgt ut (Bryman, 2021, s. 377). Denne typen utvalg skiller seg fra sannsynlighetsutvalg, en type utvalg der deltakerne blir valgt ut tilfeldig (Bryman, 2021, s. 377-378). I et strategisk utvalg vil forskeren målrettet velge deltakere for å belyse problemstillingen slik at datamaterialet blir så meningsfullt og informativt som mulig (Bryman, 2021, s. 377-378). I valget av deltakere til denne studien, var det hensiktsmessig å velge elever i ungdomsskolen som informanter. Det var naturlig å velge elever i ungdomsskolen blant annet fordi min egen utdanning retter seg mot elever på 5.-10.trinn. For å kunne samle inn data på en mest mulig effektiv måte, ble det også naturlig å innhente utvalget fra den skolen jeg hadde praksis på. Utvalget i studien falt derfor på elever fra 9.trinn, da jeg i praksis hadde ansvar for en 9.trinns klasse i matematikk. 9. trinn var også passende fordi det på dette trinnet legges vekt på både algebra og generalisering i læreplanen og i kompetansemålene (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Det var til sammen 12 elever fra den utvalgte 9.trinns klassen som deltok i studien. I utvalget var begge kjønn representert, men valg av kjønn hadde ingen betydning for selve forskningen. I tillegg hadde jeg som forsker et ønske om at de 12 informantene skulle bestå av elever som befant seg på middels og høyt nivå i matematikk. Det var ønskelig med elever på middels og høyt nivå i matematikk for å få samlet inn mest mulig reflekterte og innholdsrike data. Matematikklæreren til disse elevene fikk ansvaret for å velge ut elever, da jeg kun hadde kjent elevene i kort tid.

De 12 deltakerne som ble valgt ut, og som hadde samtykket til å delta i studien, ble delt inn i fire grupper, med tre elever per gruppe. Gruppene skulle jobbe sammen, diskutere og reflektere over oppgaver som var utformet til en gitt mønsteroppgave. Alle gruppene fikk tildelt samme figurmønster og oppgaver i tilknytning til mønsteret. I tillegg hadde deltakeren på tre av de fire gruppene i studien samtykket til å delta i et intervju i etterkant av arbeidet med figurmønsteret. Som forsker ønsket jeg å intervjue gruppene i etterkant av oppgavejobbingen for å kunne komme noe dypere inn tankegangen som lå bak de forskjellige strategiene som ble tatt i bruk.

Elevene som deltok i studien, hadde noe erfaring med arbeid med generalisering av mønster fra før. Matematikklæreren til elevutvalget ga informasjon om at elevene hadde arbeidet med algebra og generalisering av mønster også på 8.trinn. I tillegg jobbet elevene med denne type oppgaver da jeg hadde min praksisperiode høsten 2022, altså 9. trinn for elevene.

3.3 Metode for datainnhenting

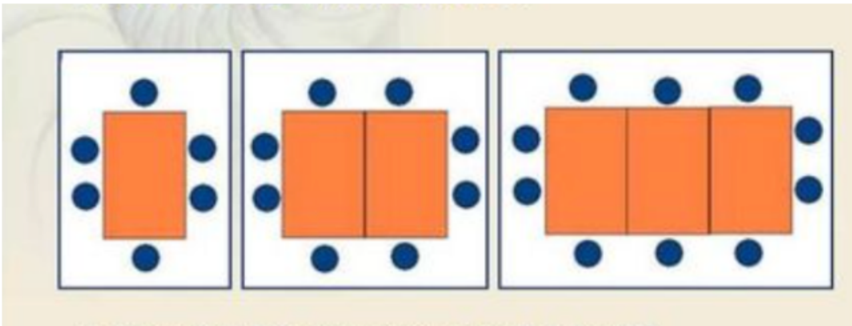
I mitt forskningsarbeid er målet å se på hvilke generaliseringsstrategier elever i ungdomsskolen benytter seg av i arbeid med generalisering av et figurmønster, samt å få en noe dypere forståelse for tankegangen bak de forskjellige strategiene. For å kunne belyse forskningsspørsmålet i studien var det hensiktsmessig å ta utgangspunkt i to datainnsamlingsmetoder. Det var hensiktsmessig å samle inn data både gjennom innsamling av plakater med gruppenes fremgangsmåter og løsninger av den gitte figurmønsteroppgaven, og et intervju i forlengelsen av gruppearbeidet. Deltakerne i studien fikk i oppgave å diskutere og løse flere oppgaver i tilknytning til en gitt mønsteroppgave. Plakatene ble samlet inn av meg forsker i etterkant av arbeidet.

3.3.1 Utforming av mønsteroppgave

I utformingen av figurmønsteroppgaven ønsket jeg å finne en figurmønsteroppgave som ikke la noen føringer for hvordan spesifikke metoder elevene skulle bruke i oppgaveløsningene sine, og hvordan de skulle gå frem for å finne en generell formel. Med bakgrunn i at det i denne studien er viktig å få fram tankegangen og refleksjonene til elevene var det også viktig at oppgavene som deltakerne skulle løse ikke var av for høy vanskelighetsgrad. I tillegg ønsket jeg at utformingen av figurmønsteroppgaven var i tråd med det LK20 sier om relevans for elevene (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Valget av figurmønsteroppgave falt, med bakgrunn i mine krav som er beskrevet over, på en lineær figurmønsteroppgave der elevene skulle finne ut sammenhengen mellom antall bord og stoler. Denne type figurmønster er ganske vanlig i læreverk og oppgavesamlinger som er brukt i ungdomsskolen, og derfor ble det viktig å undersøke med elevenes matematikklærer om dette var en kjent oppgave for elevene. Jeg ønsket at figurmønsteret skulle være et mønster elevene ikke hadde jobbet med tidligere.

Figurmønsteret elevene ble presentert for er hentet fra *Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen*, og mønsteret ser ut som følger:



Figur 1: Figurmønsteret.

Oppgaveteksten til mønsteret tok utgangspunkt i elevenes hverdagsliv og var formulert slik;
Klasse 9E skal møblere til foreldremøte. De trenger derfor å sette ut nok bord og stoler til alle foreldrene som skal komme. De foresatte skal sitte sammen på et langbord.

Oppgavearket bestod av seks forskjellige oppgaver som var knyttet til mønsteret, oppgave a-f. Vanskegraden på oppgavene økte gradvis, fra oppgave a som ba elevene finne ut hvor mange foresatte det var plass til rundt fire bord, til oppgave f hvor elevene skulle finne frem til en generell formel for hvor mange stoler en trenger til n-antall bord.

Oppgave a)
Dersom elevene setter sammen 4 bord, hvor mange foresatte blir det plass til da?

Oppgave b)
Finn antall foresatte det er plass til ved 5, 6 og 7 bord.

Oppgave c)
Hvor mange stoler er det i figur nummer 10?

Oppgave d)
Ser dere et mønster? Beskriv dette mønsteret så detaljert som mulig.

Oppgave e)
Hvor mange stoler trenger dere til 20 bord?

Oppgave f)
Finner dere en formel for å finne ut hvor mange stoler man trenger til n-antall bord?

Figur 2: Oppgavene til figurmønsteret

3.3.2 Gjennomføring av gruppearbeid

Arbeidet med figurmønsteroppgaven som er beskrevet over, ble gjennomført på skolen der jeg hadde praksis. Praksisperioden var delt i to uker med praksis på høsten 2022 og en uke med praksis i januar 2023, på samme skole. Gjennomføringen av gruppearbeidet foregikk over to matematikktimer i praksisperioden etter jul. Hver matematikktime hadde et omfang på 60 minutter.

I forkant av praksisperioden etter jul, hadde praksislærer fått tilsendt samtykkeskjema og beskrivelse av prosjektet. Prosjektbeskrivelsen beskrev hva formålet med studien var, samt hvordan forskningen skulle gjennomføres. Praksislærer fikk i oppgave i forkant av siste praksisperiode å dele ut prosjektbeskrivelsen og samtykkeskjemaet til praksisklassen. Elevenes foresatte og eleven selv hadde derfor samtykket til å delta i studien før praksisperioden etter jul startet.

Gjennomføringen av gruppearbeidet, foregikk ved at elevene i klassen, med hjelp fra praksislærer, ble delt inn i grupper på tre og tre. I studien ønsket jeg å studere besvarelsene til fire grupper i klassen. Praksislærer delte derfor inn gruppene etter hvem som hadde samtykket til å delta studien, samt hvordan nivå elevene lå på i matematikk. Som nevnt tidligere ønsket jeg å studere besvarelsene til elever som lå på middels og/eller høyt nivå i matematikk. Med tanke på at temaet for forskningen og mønsteroppgaven var relevant for hele klassen, valgte jeg i samråd med praksislærer å gjennomføre selve opplegget med alle elevene i klassen. Gjennomføringen foregikk i klasserommet til elevene. Klasserommet er en del av elevenes naturlige omgivelser, og kan for mange elever oppleves som en trygg arena å oppholde seg i.

Før elevene fikk sette i gang med selve oppgavejobbingen, brukte jeg som forsker ca. 10 minutter av første matematikktime til å beskrive og introdusere prosjektet muntlig for elevene. I introduksjonen ble det forklart at det var viktig at elevene som var på gruppe sammen diskuterte og reflekterte høyt sammen på gruppa om hvordan de tenkte for å løse oppgavene. I tillegg poengterte jeg at det var viktig at gruppene skrev ned akkurat hva de tenkte og gjorde for å løse oppgavene. Løsningene og tankegangen til elevene skulle presenteres på et A3 ark. Jeg forklarte at det var tankegangen og fremgangsmåtene til elevene som var viktig, og ikke selve svarene som de kom frem til. Dette var også presisert på selve oppgavearket som gruppene fikk tildelt etter introduksjonen. Det var i tillegg viktig å tydelig formidle til elevene at de når som helst kunne trekke seg fra studien, dersom de ikke lenger ønsket å delta.

Etter en muntlig innføring i prosjektet, ble gruppene lest opp og elevene fikk beskjed om å sette seg sammen med gruppa si. Som forsker hadde jeg i forkant av gjennomføringen reflektert over min rolle i gjennomføringen. For å belyse og komme i dybden på problemstillingen på en mest mulig objektiv måte, valgte jeg å ikke hjelpe elevene underveis. På slutten av andre matematikktime ble plakatene samlet inn, og for å anonymisere deltakerne skulle elevene ikke skrive navn på plakatene.

3.3.3 Intervju

Formålet med gruppearbeidet var å undersøke hvilke generaliseringsstrategier elevene tok i bruk for å løse oppgavene gitt til bordmønsteret. For å få en noe dypere innsikt i tankegangen bak valgene av strategier, ønsket jeg å intervjue gruppene i etterkant av gruppearbeidet. I kvalitativ forskning er intervju en metode som kan brukes for å utvikle en dypere forståelse for praksisfeltet som blir etterforsket (Postholm, 2020. s. 68). Gjennom å intervjue deltakerne i en studie kan forskeren få innblikk i sider ved deltakerne som ikke kan observeres, som for eksempel deltakernes meninger, opplevelser og tanker (Postholm, 2020. s. 68). Det ville derfor, gjennom å intervjue deltakerne i etterkant av oppgaveløsningen, være mulig å få et mer sammensatt og helhetlig bilde av tankegangen bak gruppene sine strategier og elevenes forståelse for algebraisk generalisering. Av de fire gruppene som hadde samtykket til å delta i forskningens gruppearbeid, var det kun tre av de fire gruppene der alle informantene også hadde samtykket til å delta i et intervju.

Intervjuene som ble gjennomført var gruppeintervju. Gruppeintervju brukes ofte i situasjoner hvor det er hensiktsmessig at deltakerne hjelper hverandre med å utdype og beskrive erfaringer og hendelser som er felles i gruppa (Postholm, 2020, s. 72-73). Med bakgrunn i at oppgaveløsningen av bordmønsteret hadde foregått i grupper, ble det også naturlig å intervjue hver gruppe sammen i etterkant.

Gruppeintervjuene som ble gjennomført var utformet som semistrukturerte intervju. Det vil si at spørsmålene som ble stilt i intervjuene var forhåndsbestemte i en intervjuguide (Vedlegg 2). Selv om hovedspørsmålene til intervjuene var utformet på forhånd, står forskeren også fritt til å stille oppfølgingsspørsmål til det deltakerne forteller underveis (Bryman, 2021, s. 425-426). Muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål, ga meg som forsker rom til å stille ekstra spørsmål til gruppene dersom jeg opplevde at det var vanskelig å forstå noen av forklaringene elevene ga. Dersom det dukket opp spørsmål underveis, som kunne være interessante å få svar for å belyse problemstillingen, ga semistrukturert intervju også rom for at jeg kunne stille disse. Ved å bruke semistrukturert intervju kan intervjudeltakerne oppleve at intervjusekvensen føles mer som en samtale, heller enn et avhør. Dette kan igjen føre til at deltakerne føler på en større trygghet i gjennomføringen av intervjuene.

3.3.4 Intervjuguide

Intervjuguiden ble utformet i lys av forskningsspørsmålet og bordmønsteroppgaven som deltakerne i studien skulle arbeide med i forkant av intervjuene. Intervjuguiden inneholdt til sammen fire hovedspørsmål, og spørsmålene var utformet som åpne spørsmål (vedlegg 2). Det var viktig å utforme åpne spørsmål, fordi dette gir rom for mer utfyllende og reflekterte svar. Det var viktig å få mest mulig reflekterte og utfyllende svar fra deltakerne for å få et godt grunnlag å jobbe ut ifra når materialet i etterkant skulle analyseres.

Det første spørsmålet i intervjuguiden var utformet for å koble elevene på bordmønsteroppgaven og temaet for forskningen. Tanken bak utformingen av det første spørsmålet var at gruppene som ble intervjuet skulle føle seg trygge i situasjonen og bli koblet på temaet gjennom å reflektere over hva de selv tenker om å utforske matematikk på måten de hadde gjort i gruppearbeidet. Etter hvert ble spørsmålene spisset mer inn mot tankegangen bak løsningsstrategiene som gruppene hadde brukt på de forskjellige oppgavene til bordmønsteret. Avslutningsvis skulle deltakerne reflektere over hvordan fordeler det hadde at mønsteroppgaven var utformet i en realistisk kontekst og på hvilke måter praktiske oppgaver kunne hjelpe elevene til å forstå generalisering bedre.

Intervjuguiden ble utformet i forkant av oppgaveløsningen. Hovedspørsmålene i intervjuene var derfor utformet på en slik måte at deltakerne kunne besvare disse spørsmålene uavhengig av hvilke metoder de tok i bruk under selve oppgaveløsningen. I etterkant av oppgaveløsningen studerte jeg plakatene med løsningene og begrunnelsene for løsningene til de ulike gruppene. Dette ga grunnlag for eventuelle oppfølgingsspørsmål som kunne bli stilt underveis i intervjuene.

3.3.5 Gjennomføring av intervjuene

Intervjuene foregikk gruppevis på et grupperom rett utenfor klasserommet til elevene. Gjennomføringen av intervjuene ble gjort på et grupperom for å unngå distraksjoner, støy og forstyrrelser fra omgivelsene rundt. I løpet av ei skoleuke hadde elevene tre matematikktimer, og intervjuene ble gjennomført i den siste matematikktimen elevene hadde i praksisuka i januar. Hvert intervju tok ca. 15 minutter. Elevene som hadde samtykket til å delta på intervjuene, hadde også samtykket til at intervjuene ble tatt opp på lydopptak. Elevene ble i forkant av intervjuene informert om at lydopptakene skulle slettes i kort tid etter at intervjuene var gjennomført, samt at alt av datamaterialet ville bli anonymisert. Det ble i tillegg informert om at deltakerne når som helst kunne trekke seg fra studien. De tre gruppene som ble intervjuet, ble også spurt muntlig under oppgavejobbingen om det var greit for alle å bli intervjuet. Deltakerne ble tidlig i praksisuka informert om når intervjuene ville finne sted.

Intervjuprosessen foregikk som en samtale mellom meg som forsker og deltakerne på hver gruppe. Det var god flyt i alle intervjuene, men det ble fort tydelig at det på alle gruppene var en deltaker som tok ledelsen på vegne av gruppa. Dette er en svakhet i forskningen fordi alle deltakernes refleksjoner og meninger ikke kommer fram. Til slutt i intervjuene ble deltakerne spurt om det var noe mer de ønsket å legge til, som ikke hadde kommet frem gjennom spørsmålene som var stilt.

Alle de tre intervjuene ble kort tid etter gjennomføringen transkribert og anonymisert. Rett etter transkriberingen ble lydopptakene slettet.

3.4 Analyse av data

Det innsamlede datamaterialet i forskningsarbeidet er analysert gjennom det som kalles en abduktiv analysetilnærming. Abduktiv analysetilnærming er en form for analyse i kvalitativt arbeid der forskeren bruker allerede eksisterende teori i sine analyser for å analysere datamaterialet, samt at forskeren også ser behovet for endringer i allerede eksisterende forståelser av et fenomen (Kennedy & Thornberg, 2018, s.4). Kvalitative forskere som velger å analysere datamaterialet i forskningen abduktivt har et ønske om å prøve å være både sensitiv og åpen overfor datamaterialet, samtidig som forskeren benytter seg av tidligere teori i analysene. Målet er at forskeren gjennom en slik analysetilnærming skal kunne sette sammen gammel og ny teori på nye måter, for å øke forståelse og kunnskap om det fenomenet som undersøkes (Kennedy & Thornberg, 2018, s.4).

I min studie består datamaterialet, som beskrevet tidligere i metodekapittelet, både av innsamlet elevarbeid som omhandler en figurmønsteroppgave og av transkripsjoner fra tre forskjellige gruppeintervju. De innsamlede plakatene som viser løsningsstrategier og begrunnelsene for løsningene de fire gruppene som deltok i forskningen kom frem til, er analysert gjennom Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier. Analysene av plakatene er analysert gjennom allerede eksisterende teori. Transkripsjonene fra intervjuene er derimot analysert gjennom en deduktiv analysemetode. Transkripsjonene er ikke analysert gjennom et allerede eksisterende teoretiskrammeverk. I analysen av transkripsjonene ønsket jeg å se etter nye mønster og strukturer. Disse kom jeg frem til gjennom å kode materialet. Analyseprosessen av plakatene og intervjuene vil bli beskrevet mer detaljert i kapittel 3.4.1 og 3.4.2.

De sentrale funnene fra analysen av plakatene og analysen av intervjutranskripsjonene, skal sammen brukes for å belyse problemstillingen. Funnene fra analysene vil i diskusjonskapitlet bli knyttet opp mot hva tidligere forskning sier.

3.4.1 Analyse av plakatene

Analysen av plakatene skulle, som før nevnt, ta utgangspunkt i Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier. I forkant av gjennomlesning og studering av plakatene hadde jeg som forsker satt meg ordentlig inn i Lannin (2005) sitt rammeverk. Prosessen med å analysere generaliseringsstrategiene de fire gruppene tok i bruk, startet med en nøye gjennomlesning og studering av oppgaveløsningene som var presentert på de innsamlede plakatene. Min forståelse og tolkning av de ulike generaliseringsstrategiene som Lannin (2005) presenterer i sitt rammeverk, er beskrevet i tabell 1 i teorikapittelet.

Veien videre i analyseprosessen var å identifisere, gjennom rammeverket til Lannin (2005), hvilke generaliseringsstrategier gruppene hadde tatt i bruk på hver av de seks deloppgavene. I denne prosessen tok jeg systematisk for meg en og en plakat, og studerte løsningsstrategiene som gruppene hadde brukt for å løse hver av de seks deloppgavene. For å skaffe et tydelig oversiktsbilde over hvilke generaliseringsstrategier elevene tok i bruk, førte jeg alle funnene på strategier inn i en tabell. Tabellen under viser hvordan generaliseringsstrategier, det gjennom analysene av plakatene, ble identifisert at gruppene tok i bruk for hver av de seks deloppgavene.

Tabell 2: Oversikt over generaliseringsstrategiene, som det gjennom analysen ble identifisert at gruppene tok i bruk.

	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 4
Oppgave a	Telling	Formel (startet med oppgave f)	Rekursiv	Telling
Oppgave b	Rekursiv	Formel (startet med oppgave f)	Rekursiv	Telling
Oppgave c	Rekursiv	Formel (startet med oppgave f)	Rekursiv	Telling
Oppgave d	Kontekstuell	Formel (startet med oppgave f)	Rekursiv	Rekursiv
Oppgave e	Fant svaret I oppagve f), før oppgave e). Brukte formel.	Formel (startet med oppgave f)	Hel-objekt	Hel-objekt
Oppgave f	Gjett-og-sjekk.	Kontekstuell	Gjett-og-sjekk	Gjett-og-sjekk.

Tabellen gjorde det lettere å skaffe seg en oversikt over de ulike generaliseringsstrategiene som gruppene hadde brukt. For å tydeliggjøre hvilke strategier som jeg identifiserte på hver av de seks deloppgavene, laget jeg fargekoder. Hver farge tilsvarer en spesifikk strategi fra Lannin (2005) sitt rammeverk. Dette er vist i tabellen over. Ved å organisere funnene av generaliseringsstrategier i en tabell, ble det også lettere å sammenligne forskjellene og likhetene i strategibruk hos de fire gruppene. Analysefunnene fra plakatene vil i diskusjonskapittelet bli diskutert opp mot funnene fra intervjuene og presentert teori.

3.4.2 Analyseprosess av intervju

I arbeidet med å kode og kategorisere datamaterialet, brukte jeg den deskriptive analyseformen; tematisk analyse. Formålet i en tematisk analyse er å se etter og identifisere mønster i det innsamlede datamaterialet (Vasimoradi, et al. 2013). Intervjuene i min studie ble gjennomført for å innhente data om tankegangen som lå bak strategibruken til elevene, for deretter å lete etter likheter og forskjeller i tankemåtene til de tre gruppene som ble intervjuet. Arbeidet med å analysere dette datamaterialet tok utgangspunkt i Braun og Clark (2006) sine seks faser for gjennomføring av en tematisk analyse.

Første fase i min analyseprosess av intervjuene startet med Braun og Clark (2006) sin fase en for tematisk analyse, som omhandler å bli kjent med datamaterialet (s.16). Prosessen med å analysere datamaterialet startet med en transkribering av de tre lydopptakene som ble tatt under intervjuene. Transkriberingen ble utført kort tid etter at alle intervjuene var gjennomført. Etter at transkriberingen av intervjuene var gjennomført, var veien videre i analyseprosessen å skaffe seg et oversiktsbilde over datamaterialet. Oversiktsbilde ble skaffet gjennom å lese over transkripsjonene flere ganger. I denne fasen startet også en prosess med å sortere og organisere datamaterialet og søke etter mening og mønster. Her markerte jeg de delene av transkripsjonene for hvert intervju der elevene forteller noe som har med tankegangen bak strategiene de brukte under arbeidet med bordmønsteroppgaven.

I fase 2 av analyseprosessen startet jeg med å plukke ut de delene av datamaterialet jeg fant mest interessante for min forskning. Jeg satte opp tre tabeller, en for hvert av de tre intervjuene, for å organisere datamaterialet på en oversiktlig måte. Tabellen ble organisert i fire kolonner, og innholdet i disse vil bli beskrevet i teksten under. I tabellen sin første kolonne samlet jeg sitater fra transkripsjonene som sa noe om tankegangen bak strategibruken til elevene. Deretter ble sitatene komprimert ned til en setning for å gjøre datamaterialet mer oversiktlig og forståelig. Denne setningen var min tolkning av hva elevene hadde formidlet i hvert av sitatene. Disse setningene ble plassert i andre kolonne i hver av de tre tabellene.

Setningene jeg laget ble utgangspunktet for å lage et system av koder. Koder skal identifisere de mest interessante trekkene ved datamaterialet og bidra til å organisere datamaterialet i enda større grad (Braun & Clark, 2006, s. 18-19). Den komprimerte setningen "Det er lurt å finne den generelle formelen først", fikk for eksempel disse kodene: *formel, nytteverdi*, *løsning*, *strategi* og *forenkling*. På grunn av at problemstillingen til studien var laget på forhånd, ble kodene utformet med tanke på at kodene skulle kunne belyse problemstillingen og kobles opp mot generaliseringsstrategier. Dette arbeidet ble gjennomført på alle de tre transkriberte intervjuene. Alle kodene ble etter hvert plassert i den tidligere beskrevet tabellen, i kolonne tre. Dette ble gjort for å få et oversiktlig system.

I den neste fasen, utarbeidet jeg det som ble den siste kolonnen i tabellen, nemlig kolonnen for de overordnede kategoriene, eller temaene i datamaterialet. Her ble alle kodene for hvert enkelt utdrag av transkripsjonene sammenfattet til overordnede kategorier. Kategoriene rommer altså flere koder. I mitt datamateriale, som tidligere beskrevet, ble sitater fra transkripsjonene komprimert til en setning. Ut ifra setningen ble det laget koder som sa noe om det jeg tolket at var hovedessensen i det som ble formidlet. Alle kodene som jeg hadde funnet for hver av de komprimerte setningene ble samlet under en overordnet kategori. Et eksempel på dette er de fem kodene som er beskrevet tidligere, altså *formel*, *nytteverdi, løsning, strategi* og *forenkling*. Disse ble samlet under den overordnede kategorien *forenkling*, da jeg fant at dette begrepet sammenfattet essensen i de fem kodene. Prosessen med å finne samlende kategorier ble gjennomført for alle de tre transkripsjonene. I intervju 1 endte jeg til slutt opp med sju kategorier, i intervju 2 fikk jeg åtte kategorier og i intervju 3 fikk jeg totalt seks kategorier. Dette vil si at jeg til sammen i de tre intervjuene endte opp med 21 overordnede kategorier. Kategoriene er vist i tabell 4, vedlegg 4.

I fase 4 sier Braun og Clark (2006) at en må vurdere hvilke av kategoriene som passer best inn i studien (s.20). En må også vurdere om alle kategoriene skal brukes videre i studien eller om noen skal forkastes. I mitt arbeid ble første steg å sammenligne kategoriene jeg fant i de tre intervjuene. I denne prosessen fant jeg at fem av de overordnede kategoriene gikk igjen for alle de tre intervjuene. Disse valgte jeg å ta med videre i forskningsarbeidet da dette ga en mulighet til å se på likheter og forskjeller i tankegangen bak strategibruken i mønsteroppgaven. De 21 kategoriene ble dermed redusert til fem kategorier. Disse fem hovedkategoriene var; *visualisering, forenkling, system, formel* og *læring*. Med tanke på problemstillingen valgte jeg å redusere disse fem kategoriene ned til de fire hovedkategoriene: *visualisering, forenkling, formel* og *system,* da jeg fant disse mest relevant for problemstillingen.

De tre hovedkategoriene *forenklinger, formel og visualisering* forteller alle noe om tydelige likheter og forskjeller i gruppenes tankegang bak deres strategibruk, og vil bli lagt frem i kapittel 4. Hovedkategorien *forenklinger* viser hvordan elevene på ulikt vis prøver å forenkle problemsituasjonen for å løse deloppgavene, og omhandler hvilke typer forenklinger gruppene tar i bruk for å løse oppgavene til bordmønsteret. Hovedkategorien *formel* omhandler hvordan intervjuene fikk frem gruppene sine tanker om den generelle formelen og hvordan de tenkte for å komme frem til denne formelen. I prosessen med å analysere de tre intervjuene fant jeg også at alle de tre gruppene som ble intervjuet, formidlet noe om hvordan de så for seg utviklingen av mønsteret. Hovedkategorien *visualisering* forteller derfor noe dette. Den siste hovedkategorien, som jeg har valgt å kalle for *system*, binder sammen de tre andre hovedkategoriene, *forenkling, visualisering* og *formel*. I tillegg binder den sammen hovedkategoriene med generaliseringsstrategiene som er identifisert på gruppenes plakater. *System*, ble derfor en kjernekategori i min studie.

3.5 Etikk

I forskningsarbeid er det viktig å ta hensyn til forskningsetiske retningslinjer. Det er viktig å ta hensyn til forskningsetiske retningslinjer for å sikre at forskningen blir utført på en forsvarlig og god måte (NESH, 2021). I kvalitativt forskningsarbeid står forskeren og deltakerne i studien nær hverandre (Postholm, 2020, s.142). Som forsker har du derfor et viktig ansvar i å ta vare på deltakerne som deltar i forskningsarbeidet ditt (NESH, 2021). Den nasjonale forskningsetiske komite for samfunnsvitenskap og humaniora, også kjent som NESH, beskriver blant annet at det er viktig å ta hensyn til informantenes sikkerhet, integritet og deres personlige velferd (NESH, 2021). I min studie er dette blant annet tatt hensyn til gjennom at jeg i forkant av datainnsamlingen meldte forskningsprosjektet inn til NSD, Norsk senter for forskningsdata. Det var viktig å melde prosjektet inn til NSD for å sikre at forskningen fylte alle krav til personvern (Sikt, 2022).

Elevene jeg ønsket skulle delta i studien, samt deres foresatte, fikk i forkant av datainnsamlingen utdelt et informasjonsskriv og et samtykkeskjema med nøye og detaljerte beskrivelser av masterprosjektet (vedlegg 1). Elevene måtte samtykke til at de ønsket å delta, før prosessen med å samle inn data ble satt i gang. I tillegg måtte elevenes foresatte samtykke til at deres barn fikk lov til å delta, fordi elevene i denne studien var under 16 år. Barn har spesielt krav på beskyttelse (NESH, 2021). Da informasjonsskrivet ble skrevet i en tidlig fase av forskningsprosjektet, har problemstillingen endret seg noe underveis. Men, hovedessensen for forskningen, som også ble gitt i informasjonsskrivet er den samme. Elevene og deres foresatte ble i samtykkeskjemaet informert om at det var helt frivillig å delta i prosjektet og at deltakerne når som helst kunne trekke seg fra forskningen uten at det ville få noen konsekvenser. Dette ble det også informert om muntlig i klasserommet før datainnsamlingen ble satt i gang.

Elevene og deres foresatte ble også informert om at alt av datamateriale ville bli anonymisert og slettet rett etter at studien blir avsluttet. For å anonymisere deltakerne som deltok i intervjuene, er elevene fra gruppe 1 omtalt som elev 1-3, elevene fra gruppe 2 blir omtalt som elev 4-6 mens elevene fra den siste gruppa, gruppe 4, er omtalt som elev 7-9. I elevgruppe 3, hadde ikke alle deltakerne samtykket til å delta på intervjurunden, og derfor ble denne gruppa ikke intervjuet.

3.6 Forskningens kvalitet

I alt forskningsarbeid er det viktig å ta hensyn til og reflektere over forskningens kvalitet. Forskningens kvalitet kan vurderes gjennom å ta hensyn til, og å reflektere over påliteligheten og gyldigheten i forskningen. For å beskrive forskningens pålitelighet og gyldighet blir ofte begrepene reliabilitet og validitet brukt. Generelt kan begrepet reliabilitet bli beskrevet som en måling på om forskningen som utføres vil få de samme resultatene dersom forskningen ble utført på nytt ved bruk av akkurat de samme metodene og under de samme forholdene (Bryman, 2021, s.40). Begrepet validitet kan generelt bli beskrevet ut ifra om konklusjonene som trekkes fra datamaterialet er gyldige (Bryman, 2021, s.40). Selv om begrepene validitet og reliabilitet generelt kan forklares med beskrivelsene over, må begrepene sees i lys av om forskningen som er utført ble utført med en kvalitativ eller kvantitativ forskningstilnærming. Hensikten med forskningen er med på å bestemme hvordan kvaliteten må vurderes.

Min studie tar som beskrevet tidligere i metodekapittelet utgangspunkt i en kvalitativ forskningstilnærming. Det er som Creswell & Poth (2018) legger vekt på, viktig å reflektere over kvaliteten i kvalitativt forskningsarbeid gjennom både forskeren, deltakerens og lesernes øyne (s.253). Under, i kapittel 3.6.1 og 3.6.2, vil en mer detaljerte beskrivelser av hvordan kvaliteten i min studie er tatt hensyn til bli gjort rede for.

3.6.1 Validitet

Validiteten i kvalitativ forskning bestemmer hvor nøyaktige funnene i forskningen er gjennom standpunktene som forskeren selv, deltakerne i studien, samt leserne av forskningen tar (Creswell & Poth, 2018, s. 253). For å beskrive validiteten i kvalitativ forskning er det flere forskjellige strategier en som forsker må vurdere og ta hensyn til i forskningen. Noen strategier som Creswell & Poth (2018) legger vekt på for å oppnå en ønsket validitet i kvalitativt forskningsarbeid, og som det blir tatt hensyn til i min studie er følgende; triangulering, tykke og rike beskrivelser, samt å tydeliggjøre skjevheter jeg som forsker tar med meg inn i studien (Creswell & Poth, 2018, s. 259-261).

Triangulering betyr at forskningens datamateriale er hentet gjennom flere former for datainnsamling (Creswell & Poth, 2018, s. 260). I min studie er datamaterialet innhentet fra to forskjellige datainnsamlingskilder. Datamaterialet er innhentet fra elevarbeid, der deltakerne i studien fikk i oppgave å løse en gitt figurmønsteroppgave. Tankegangen og løsningene som deltakerne kom frem til gjennom gruppearbeidet skulle presenteres detaljert på en plakat. Plakatene ble samlet inn av meg som forsker i etterkant av de to matematikktimene som elevene fikk til rådighet for å utføre oppgavene. I tillegg ble tre av gruppene spurt om de kunne tenke seg å bli intervjuet i etterkant av oppgaveløsningen. Forskningens validitet blir på denne måten styrket ved at jeg som forsker hadde to ulike former for datainnsamling. På denne måten hadde jeg mulighet til å komme dypere inn i tankegangen bak strategibruken til gruppene som deltok i studien. Intervjuene som ble gjort i etterkant av arbeidet med plakatene ga mulighet til å få fram nyanser i tankegangen til gruppene som ikke kom fram i plakatene. For elever på 9. trinn kan det være utfordrende å formidle helt presist hva de tenker skriftlig. Ved å intervjue gruppene, hadde jeg også mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål for å få best mulig tak i hva elevene egentlig tenkte. Dersom jeg bare hadde tatt utgangspunkt i det skriftlige arbeidet kunne resultatene blitt mer utsatt for egen tolkning av tankemåtene bak strategibruken.

I tillegg til triangulering, er det gjennom hele forskningen også lagt vekt på å gi rike og detaljerte beskrivelser av hele forskningsprosessen, samt miljøet og konteksten der forskningen fant sted. Rike og detaljerte beskrivelser vil være med på å styrke validiteten i forskningen gjennom at lesere av forskningen kan se for seg forskingssituasjonen, samt å opparbeide seg et klart og tydelig bilde på hvordan forskningen ble utført (Creswell & Poth, 2018, s.263). Rike og detaljerte beskrivelser av hele forskningsprosessen gir rom for at andre forskere kan etterprøve forskningen under så like forhold som mulig ved en senere anledning. Det har for meg som forsker vært viktig å prøve å gi et så transparent bilde på forskningsprosessen som mulig. Funnene i studien vil derfor også være underbygget med sitater og utklipp fra det innsamlede datamaterialet.

En siste faktor som det er lagt vekt på for å styrke validiteten i forskningen er å gjøre rede for hvilke skjevheter jeg som forsker tar med meg inn i forskningen. Dette handler om hvordan mine erfaringer og synspunkter som forsker kan være en faktor som er med på å påvirke forskningen. Postholm (2020) beskriver i sin bok at forskerens rolle i forskningsarbeidet må gjøres rede for før selve forskningen starter (s.126). I tillegg bør forskernes subjektive erfaringer og opplevelser ved det som undersøkes bli beskrevet (Postholm, 2020, s.127). En skjevhet i min forskning kan være at jeg som lærerstudent har lite erfaring med undervisning av slike typer oppgaver, dette kan påvirke forskningen på ulike måter. For eksempel kan spørsmålene som ble stilt i intervjuene være påvirket av dette. En lærer med lang erfaring ville kanskje stilt spørsmål som ville gitt enda mer utfyllende og presise svar fra elevene. I tillegg har jeg erfaring med at generalisering av figurmønsteroppgaver er et felt i matematikken som elevene ofte opplever som utfordrende. Dette kan også ha påvirket hvordan materialet i min studie ble analysert.

3.6.2 Reliabilitet

Reliabiliteten eller påliteligheten i kvalitativ forskning kan bli vurdert gjennom å ta hensyn til flere ting. Blant annet kan kvaliteten i kvalitativ forskning bli vurdert opp mot om forskningen er konsistent. Dette kan for eksempel måles gjennom å se på om kodene som er funnet og beskrevet i analysedelen er stabile og konsistente gjennom hele forskningsrapporten (Creswell & Poth, 2018, s. 264). I tillegg er det viktig at det er en rød tråd gjennom hele oppgaven. For meg som forsker har det i forskningsprosessen vært viktig å være bevisst på og å reflektere over om mine funn belyser forskningsspørsmålet i studien.

Reliabilitet handler, som nevnt tidligere, generelt om etterprøvbarheten i forskningen. Nærmere bestemt om forskningen ville fått de samme resultatene dersom den ble utført på nytt på akkurat samme måte (Bryman, 2021, s.154-155). I en kvalitativ studie, som mitt forskningsarbeid er, vil det være vanskelig å etterprøve resultatene på akkurat samme måte da jeg som forsker er med på å påvirke resultatene gjennom spørsmålene jeg for eksempel stilte gruppene under datainnsamlingen. I tillegg vil elevenes miljø endre seg over tid. Men, det vil være mulig å gjennomføre et tilnærmet likt forskningsarbeid. Forskningsarbeidet kan bli etterprøvd ved at flere elevgrupper, ved en senere anledning jobber med å løse den samme figurmønsteroppgaven, og ved at forskeren her prøver å bruke samme fremgangsmåte, samt samme datainnsamlingsmetoder. En kunne da fått en enda dypere og større innsikt i strategibruk i arbeid med generalisering av mønster og bakgrunnen for valg av generaliseringsstrategier.

3.7 kritiske betraktninger

Dersom denne studien skulle blitt gjennomført på nytt, med økt kvalitet, er det viktig å også reflektere over kritiske betraktninger ved studien. Ett kritikkverdig aspekt ved denne studien, er at studiens utvalg kun er hentet fra en 9.klasse, på en skole i Norge. Et større utvalg hentet fra flere ungdomsskoler i Norge, har kunnet bidratt til å styrke forskningsarbeidet. Gjennom å ta i bruk et større utvalg ville en som forsker kunne kommet enda i mer i dybden på problemstillingen. En kunne da fått sikrere data som forteller om hvilke generaliseringsstrategier elever i ungdomsskolen tar i bruk, samt fått en enda dypere forståelse for tankegangen bak strategibruken. Dette ville vært med på å stryket både påliteligheten og gyldigheten i forskningen. I min studie ble størrelsen på utvalget valgt med tanke på det begrensede tidsomfanget til studien. Et større utvalg ville vært hensiktsmessig og mulig og tatt i bruk dersom studiens tidsomfang hadde vært større.

Da datamaterialet i denne studien skulle bli innhentet i løpet av praksis, som hadde et tidsomfang på ei uke, ble det mest effektivt å la deltakerne bare arbeide med kun en figurmønsteroppgave. Analyse av arbeid med kun en figurmønsteroppgave vil ikke kunne gi et tilstrekkelig bilde på hvilke generaliseringsstrategier ungdomsskolen generelt benytter seg av. Det vil ikke gi nok informasjon til at en kan trekke konklusjoner for hvorfor elevene velger de ulike generaliseringsstrategiene. Funnene i studien kunne blitt styrket ved å innhente data fra arbeid med flere forskjellige figurmønster.

4.0 Resultat

I dette kapittelet vil studiens resultater fra plakatene og intervjuene presenteres. Resultatene som presenteres i dette kapittelet vil legges frem for å kunne belyse forskningsspørsmålet mitt:

Hvilke generaliseringsstrategier tar ungdomsskoleelever i bruk i arbeid med en figurmønsteroppgave, og hvordan forklarer gruppene tankegangen bak valget av de ulike generaliseringsstrategiene?

Jeg har valgt å organisere resultatkapitelet i to hoveddeler, der den første hoveddelen presenterer resultatene fra de innsamlede plakatene. Formålet med plakatene var å innhente data om hvilke generaliseringsstrategier jeg, sett i lys av Lannin (2005) sitt rammeverk, har identifisert at fire små grupper med elever fra 9. trinn tok i bruk for å løse oppgavene til det gitte bordmønsteret. I hoveddel én er resultatene delt inn i to deler. I den første delen vil jeg legge frem i hvilke av deloppgavene gruppene tok i bruk *ikke-eksplisitte* strategier, og i den andre delen vil jeg legge frem hvilke av deloppgavene gruppene tok i bruk *eksplisitte* strategier. Disse to begrepene finner vi igjen i rammeverket til Lannin (2005). Likheter og forskjeller i hvilke generaliseringsstrategier gruppene tok i bruk på de ulike deloppgavene vil også legges frem. Resultatene i denne delen vil underbygges med utklipp fra plakatene som viser hvordan gruppene har gått frem for å løse deloppgavene til bordmønsteret.

I andre del av resultatkapittelet vil tydelige trekk som ble funnet i forklaringene som elevgruppene ga i sine intervju, og som fremhever hvordan de har tenkt for å løse de ulike oppgavene, bli presentert. Tydelige likheter og forskjeller i gruppenes måter å tenke på, vil bli presentert gjennom de tre hovedkategoriene: *forenklinger, formel,* og *visualisering.* Før resultatene innen hver hovedkategori blir presentert, vil det spesifiseres hva som legges i kategorititlene. Til slutt i kapittelet vil kjernekategorien *system* presenteres. Denne kategorien binder resultatene fra plakatene og intervjuene sammen. I intervjuene kom det også tydelig fram om gruppene generaliserte gjennom en numerisk eller figurativ tilnærming. Dette vil også legges frem til slutt i kapittelet under kjernekategorien *system*.

Hovedfunnene knyttet til hvilke generaliseringsstrategier gruppene tok i bruk på de ulike deloppgavene, samt forskjeller og likheter i gruppenes tankegang, som presenteres gjennom de tre hovedkategoriene og kjernekategorien *system*, vil i studiens diskusjonskapittel knyttes sammen og diskuteres i lys av tidligere forskning.

4.1 Ikke-eksplisitte strategier

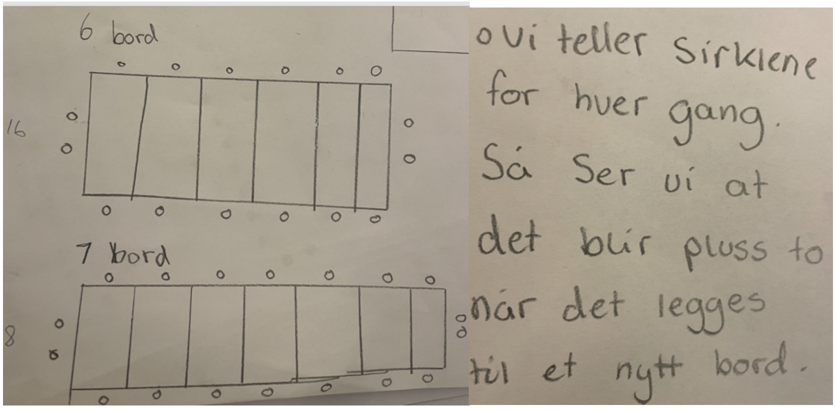
I arbeidet med å identifisere hvilke av de fem generaliseringsstrategiene fra Lannin (2005) sitt rammeverk utvalget i studien tok i bruk, kom det frem at tre av fire grupper brukte *ikke-eksplisitte* generaliseringsstrategier for å løse de tre første deloppgavene. Resultatet av analysen av plakatene, viser at gruppe 1,3 og 4 tok i bruk generaliseringsstrategiene *telling* eller *rekursiv* for å løse oppgave a til c. Dette er vist i tabell 3 under. Et trekk som kjennetegner alle de tre første deloppgavene, er at disse legger vekt på å finne de neste figurene i rekka. Ut ifra resultatene som er funnet gjennom analysen av plakatene, vises et tydelig mønster der elevene i dette utvalget i hovedsak benyttet seg av *ikke-eksplisitte* strategier når oppgavene ba elevene om å finne de neste figurene i rekka. Gruppene benyttet seg av generaliseringsstrategiene *telling* eller *rekursiv* når oppgavene ba elevene finne antall stoler det er plass til i de etterfølgende figurene som ligger tett opp mot de tre første figurene i mønsteret som allerede var illustrert i oppgaveteksten. I teksten under vil det bli presentert utdrag fra løsningsstrategiene som gruppe 1, 3 og 4 tok i bruk for å løse oppgave a, b og c.

Tabell 3: Generaliseringsstrategiene det gjennom analysen av plakatene, ble identifisert at gruppene tok i bruk.

	Gruppe 1	**Gruppe 2**	**Gruppe 3**	**Gruppe 4**
Oppgave a	*Telling*	*Formel (startet med oppgave f)*	*Rekursiv*	*Telling*
Oppgave b	*Rekursiv*	*Formel (startet med oppgave f)*	*Rekursiv*	*Telling*
Oppgave c	*Rekursiv*	*Formel (startet med oppgave f)*	*Rekursiv*	*Telling*
Oppgave d	*Kontekstuell*	*Formel (startet med oppgave f)*	*Rekursiv*	*Rekursiv*
Oppgave e	*Fant svaret I oppgave f), før oppgave e). Brukte formel.*	*Formel (startet med oppgave f)*	*Hel-objekt*	*Hel-objekt*
Oppgave f	*Gjett-og-sjekk.*	*Kontekstuell*	*Gjett-og-sjekk*	*Gjett-og-sjekk.*

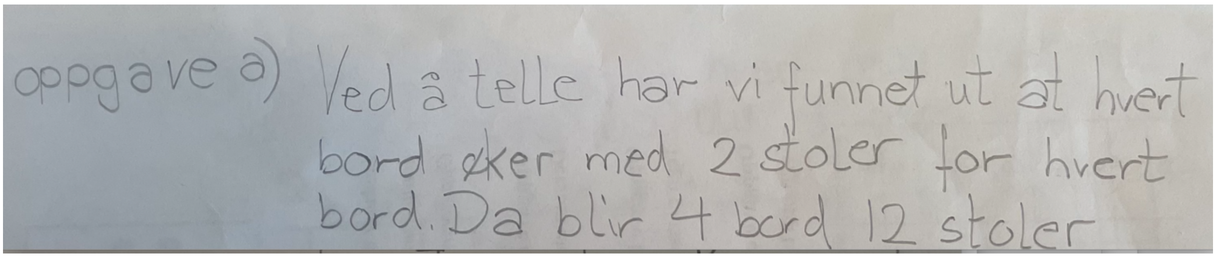
4.1.1 Telling

Èn av gruppene benyttet *telling* som sin generaliseringsstrategi i alle de tre første deloppgavene. For å finne ut hvor mange foresatte det var plass til rundt 4, 5, 6 og 7 bord, har gruppe 4 brukt en strategi der de har tegnet opp bordene og stolene. Gruppe 4 har ut ifra tegningene sine telt opp hvor mange stoler det er plass til i hver figur. Dette er vist i figur nummer 3 under. Gruppen beskriver på plakaten sin at metoden de har brukt for å løse oppgavene er at de teller sirklene de har tegnet opp for hvert nye bord som legges til i mønstret.



Figur 3: Figuren viser hvordan Gruppe 4 bruker telling som sin generaliseringsstrategi.

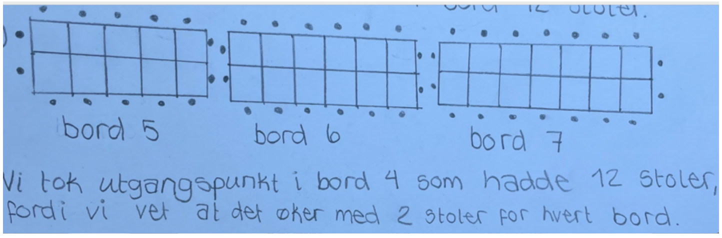
Gruppe 1 bruker også *telling* som en av sine generaliseringsstrategier. I motsetning til gruppe 4, kom det frem gjennom analysen av denne gruppas plakat, at gruppa kun bruker *telling* i oppgave a), der de skal finne ut hvor mange foresatte det er plass til rundt fire bord. Analysen av plakaten til gruppe 1 viser at denne gruppen ved å telle opp antall stoler i figur 4, finner et system i hvordan mønsteret vokser fra figur til figur.



Figur 4: Gruppe 1 sin løsning på oppgave a).

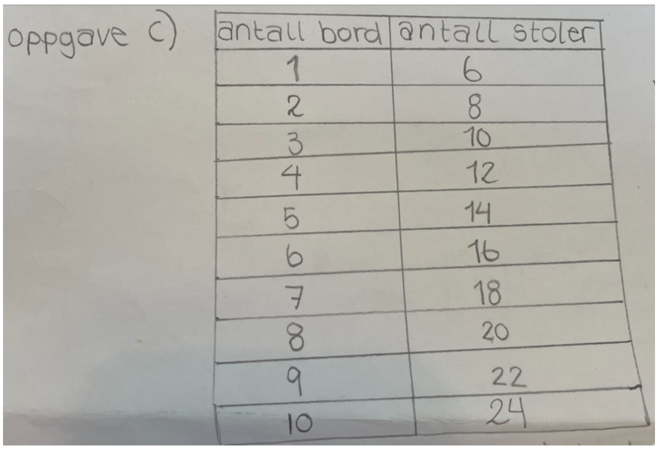
4.1.2 Rekursiv

Gruppe 1, beveger seg i deloppgave b) og c) over til den *ikke-eksplisitte* generaliseringsstrategien; *rekursiv strategi.* Oppgave b) ber gruppene finne ut hvor mange stoler det er plass til ved 5, 6 og 7 bord, mens gruppene i oppgave c) fikk beskjed om å finne ut hvor mange foresatte det er plass til hvis man setter sammen 10 bord. Min tolkning av generaliseringsstrategien *rekursiv,* ut ifra rammeverket til Lannin (2005), beskriver at personer som tar i bruk rekursiv strategi benytter seg av tidligere ledd eller sekvenser i figurrekka for å finne ut hva etterfølgende ledd i mønsteret må være. Ut ifra analysen av gruppe 1 sin plakat kan det se ut som at denne gruppen har tatt utgangspunkt i rekursiv strategi på oppgave b), fordi gruppen beskriver på plakaten sin at de har tatt utgangspunkt i figur nummer 4 for å løse oppgave b). Antall stoler i figur nummer 4, fant gruppen som beskrevet tidligere, i oppgave a), ved hjelp av strategien *telling*. Det kan ut ifra analysen av plakaten til gruppe 1, se ut som at gruppen har tatt utgangspunkt i informasjonen de fikk ved å løse oppgave a), og benyttet seg av denne for å finne antall stoler i figur nummer 5, 6 og 7. Gruppen beskriver på plakaten sin at de har funnet ut at for hver ny figur så øker antall stoler med 2. Denne informasjonen kan fortelle at gruppen benyttet seg av leddet foran i figurrekka, for å finne de neste leddene i det bestemte mønsteret.



Figur 5 Viser hvordan gruppe 1 har gått frem for å løse oppgave b).

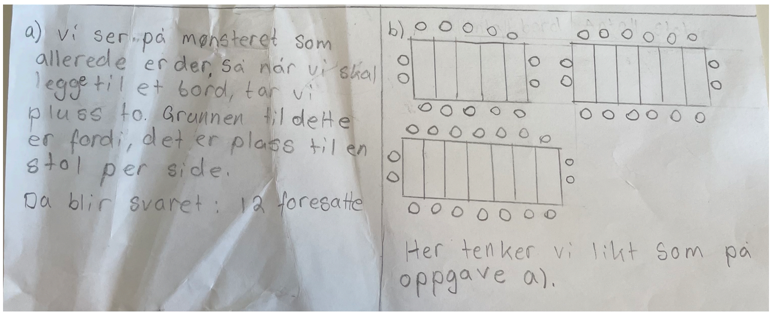
Resultatet som kom frem gjennom analysen av gruppas oppgave c, viser at gruppa har benyttet seg av *rekursiv* strategi. Gruppe 1 tegner opp en tabell, som vist på figur nummer 6 under. I tabellen har gruppen tegnet to kolonner, en kolonne som gir informasjon om antallet bord, og en kolonne som gi informasjon om antallet stoler til tilsvarende bord. Gruppen har som presentert under kapittel 4.1.1 funnet ut at for hvert nye bord så øker antall stoler med to. Gruppe 1 viser i tabellen at det for hvert nye bord er lagt til to nye stoler.


oppgave c)

antall bord	antall stoler
1	6
2	8
3	10
4	12
5	14
6	16
7	18
8	20
9	22
10	24

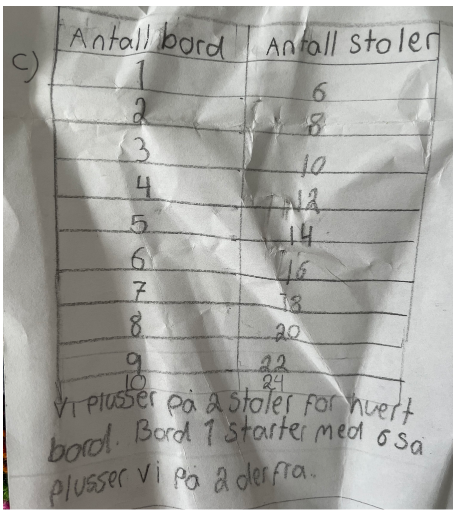
Figur 6: Gruppe 1 sin løsning av oppgave c)

Ut ifra analysen av plakaten til gruppe 3, kan det se ut som om denne gruppen utelukkende har benyttet *rekursiv* strategi for å løse alle de fire første deloppgavene. Resultatene av arbeidet til gruppe 3 på oppgave a) til og med d), kan identifiseres med *rekursiv* generaliseringsstrategi fordi gruppen allerede på oppgave a) beskriver at de plusser på to stoler for hver ny figur. Løsningsstrategiene gruppen presenterer på sin plakat viser at de tar utgangspunkt i antall stoler i figuren foran for å finne neste figuren i rekka. I oppgave a), kan det for eksempel se ut som at gruppen har tatt utgangspunkt i de tre første figurene i mønstret som allerede var illustrert på oppgavearket, for deretter å finne figur nummer 4. Fordi gruppe 3 hadde sett at mønstret økte med to nye stoler for hver ny figur, og at de samtidig visste at figur 3 bestod av 10 stoler, la gruppen til to ekstra stoler for å finne antall stoler i figur 4. Gruppen brukte også samme strategi for å finne antall stoler i figur nummer 5, 6 og 7.



Figur 7: Gruppe 3 sin løsning av oppgave a) og b).

I oppgave c), skulle gruppene finne ut hvor mange stoler det var i figur nummer 10. Gruppe 3, presenterer dette gjennom en tabell på sin plakat. Gruppen har i tabellen skrevet opp alle bordene fra 1 til og med 10 i venstre kolonne, og i høyre kollene har gruppen skrevet opp antallet stoler i forhold til antall bord. For hver ny figur i tabellen, har gruppen lagt til to nye stoler. Dette kan også identifiseres med en *rekursiv* løsningsstrategi. Ved å sette opp en tabell, får gruppen tydelig vist at de var avhengige av figuren foran for å finne neste figuren i rekka. Analysen viser at denne gruppen fant, som vi kan se ut ifra figur nummer 8, at antall stoler det var plass til rundt ett bord til og med ni bord, før de til slutt kom frem til antall stoler det var plass til rundt 10 bord. Dette som vist i figuren under.

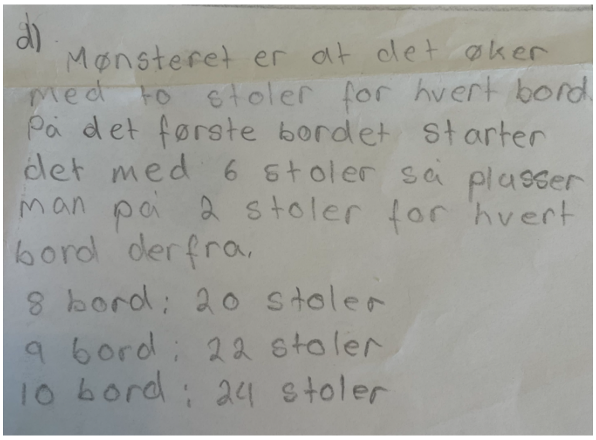

c)

Antall bord	Antall stoler
1	6
2	8
3	10
4	12
5	14
6	16
7	18
8	20
9	22
10	24

Vi plusser på 2 stoler for hvert bord. Bord 1 starter med 6 så plusser vi på 2 derfra.

Figur 8: Figuren viser hvordan gruppe 3 har satt opp en tabell for å finne antallet stoler i figur nummer 10.

I oppgave d) skulle gruppene beskrive utviklingen i bordmønsteret. I min analyse av gruppe 3 sin plakat identifiserte jeg at gruppen også på oppgave d) beskrev mønsteret ut ifra en rekursiv strategi. Gruppe 3 beskriver at de har sett at det øker med to nye stoler for hvert nye bord. Grupper 3 viser for eksempel at når bord 8 har 20 stoler, så vil det være 22 stoler ved bord 9.



Figur 9: Gruppe 3 sin beskrivelse av utviklingen til figurmønsteret.

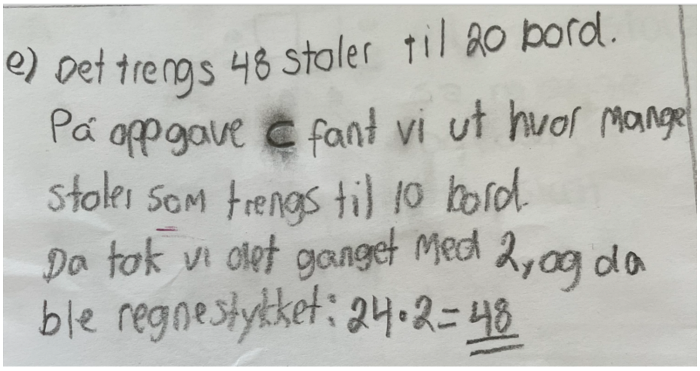
4.2 Eksplisitte strategier

Gruppene sin bruk av *eksplisitte* generaliseringsstrategier, samt hvilken type eller typer *eksplisitte* strategier gruppene tok i bruk, vil under bli presentert gjennom de tre strategiene som i Lannin (2005) sitt rammeverk blir omtalt som; *hel-objekt-, gjett-og-sjekk-* og *kontekstuell* strategi.

4.2.1 hel-objekt

I min analyse av plakatene ble det identifisert at to av fire grupper i utvalget benyttet seg av den *eksplisitte* generaliseringsstrategien *hel-objekt.* Analysene av datamaterialet viser at gruppe 3 og 4 brukte hel-objekt på oppgave e).

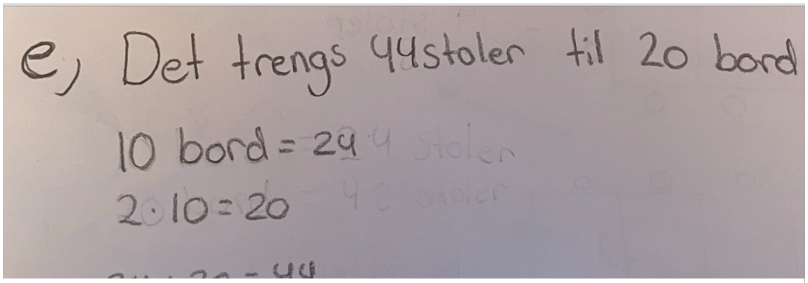
Løsningen som gruppe 3 presenterte på oppgave e), kan identifiseres som strategien *hel-objekt*, fordi gruppen her benytter seg av figur nummer 10 for å finne antall stoler det er plass til i figur nummer 20 i mønsterrekka. Gruppa tok utgangspunkt i en av de tidligere figurene i mønsterrekka, altså figur nummer 10, som er halvparten så stor som figur nummer 20. Gruppe 3 presenterte løsningen sin av oppgave e) på følgende måte:


e) Det trengs 48 stoler til 20 bord.
På oppgave c fant vi ut hvor mange
stoler som trengs til 10 bord.
Da tok vi det ganget med 2, og da
ble regnestykket: 24·2=48

Figur 10: Figuren viser hvordan gruppe 3 tar i bruk generaliseringsstrategien hel-objekt for finne antallet stoler i figur nr. 20.

Beskrivelsen fra figur nummer 10 forteller at gruppen har tatt utgangspunkt i en mindre enhet, altså antall stoler i figur nummer 10, som ble funnet i oppgave c), for så å multiplisere denne enheten med to. Ut ifra min analyse kan det se ut som om gruppen multipliserer med to fordi de vet at 20 er dobbelt så stort som 10. Gruppen kommer på denne måten frem til at figur nummer 20 må bestå av 48 stoler. Ut ifra analysen av figur nummer 12 kommer det også frem at gruppen ikke har tatt hensyn til at de fire endestolene alltid vil være det samme unnsett antall bord, og dermed ikke kan dobles. Gruppe 3 ender derfor opp med fire stoler for mye i sin løsning.

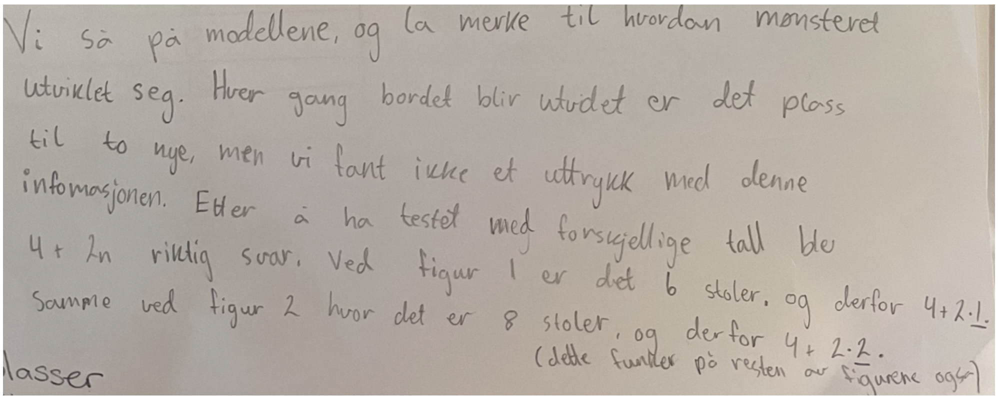
Mine analyser viser at gruppe 4 også brukt hel-objekt strategien for å løse oppgave e), men denne gruppen har tatt hensyn til at de fire endestolene ikke kan dobles. Gruppe 4 trekker fra de fire endestolene i figur nummer 10. Ut ifra mine analyser kan det se ut som at gruppen tar utgangspunkt i opplysningen de har funnet før, at det er 24 stoler ved 10 bord. Deretter viser gruppen at det ved 10 bord uten de fire endestolene er 20 stoler totalt. Gruppe 4 legger sammen de 20 stolene med 24 stoler, som er figur 10 med de fire endestolene, og får at figur 20 består av 44 stoler. Denne gruppen ender derfor opp med riktig løsning ved bruk av hel-objekt strategien. Gruppe 4 sin løsning på oppgave e) er presentert på følgende måte:


e) Det trengs 44stoler til 20 bord
10 bord = 24
2·10=20

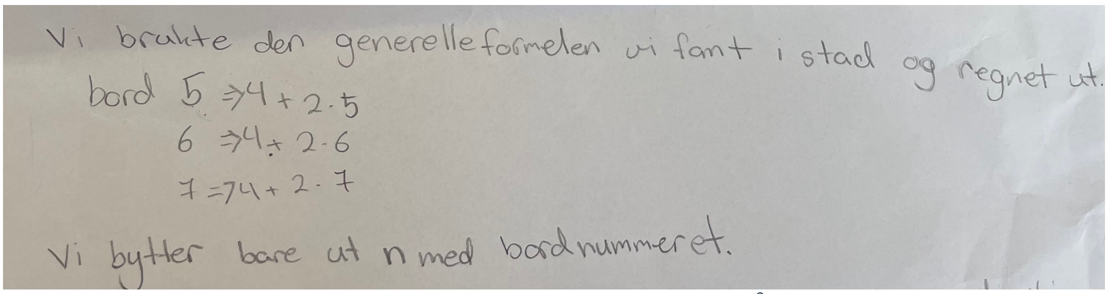
Figur 11: Gruppe 4 sin fremgangsmåte for å løse oppgave e).

4.2.2 Gjett og sjekk

Resultatene fra mine analyser, viser at tre av gruppene, gruppe 1, 3 og 4, tar i bruk generaliseringsstrategien *gjett-og-sjekk* på oppgave f), oppgaven som ber gruppene om å finne en generell formel som passer til mønsteret. Gruppe 1 skriver på sin plakat at de i arbeidet med å finne en generell formel, først så på hvordan mønsteret utviklet seg. Gruppen fant ut at bordmønsteret økte med to nye stoler for hvert nye bord som ble lagt til i mønsteret, men skriver at de at de ikke finner noe generelt uttrykk med denne informasjonen. For å finne den generelle formelen bruker gruppe 1 en strategi der de prøver seg frem med forskjellige tall. Gruppen skriver på plakaten sin, som vist i figur nummer 12 og 13 at de prøvde ut forskjellige tall for å finne formelen. Gruppe 1 tester det de tror er rett generell formel med forskjellige tall, og ender opp med den generelle formelen $4 + 2n$. For å vise til at denne formelen stemmer beskriver gruppen følgende på plakaten sin:

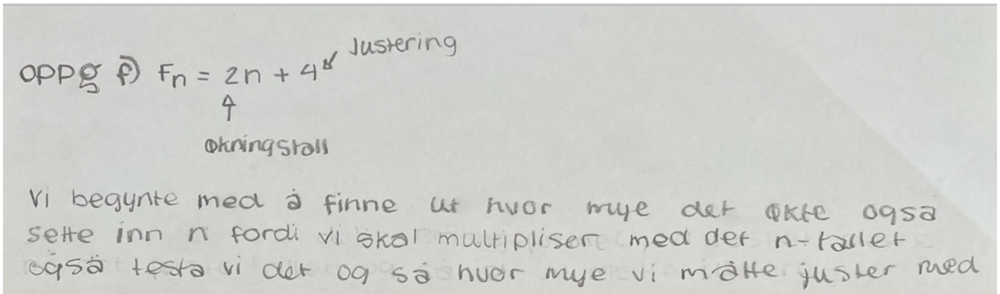

Vi så på modellene, og la merke til hvordan mønsteret
utviklet seg. Hver gang bordet blir utvidet er det plass
til to nye, men vi fant ikke et uttrykk med denne
infomasjonen. Etter å ha testet med forskjellige tall ble
4+2n riktig svar. Ved figur 1 er det 6 stoler, og derfor 4+2·1.
Samme ved figur 2 hvor det er 8 stoler, og derfor 4+2·2.
(dette funker på resten av figurene også)
lasser

Figur 12: Figuren viser hvordan gruppe 1 beskriver at de har prøvd seg frem med forskjellige tall, for å finne den generelle formelen.


Vi brukte den generelle formelen vi fant i stad og regnet ut.
bord 5 ⇒ 4+2·5
6 ⇒ 4+2·6
7 ⇒ 4+2·7
Vi bytter bare ut n med bordnummeret.

Figur 13: Figuren viser hvordan gruppe 1 testet ut formelen de fant på flere av figurene.

Mine analyser av gruppe 4 sin plakat viser at denne gruppen, i likhet med gruppe 1, også benytter seg av strategien *gjett-og-sjekk* for å finne den generelle formelen som passer til hvilken som helst figur i bordmønsteret. Denne gruppen beskriver på oppgave f), hvor målet var å komme frem til en generell formel, at de startet med å finne økningen i mønstret, altså hvor mange stoler det økte med for hvert nye bord. Dette tallet, altså 2, multipliserer gruppen med n, for videre å teste ut formelen og undersøke hva de må justere på i formelen for at formelen skal stemme for alle figurene i mønsteret. Gruppen finner da, som vist på figuren under, at de må legge til fire i formelen, for at den skal stemme.

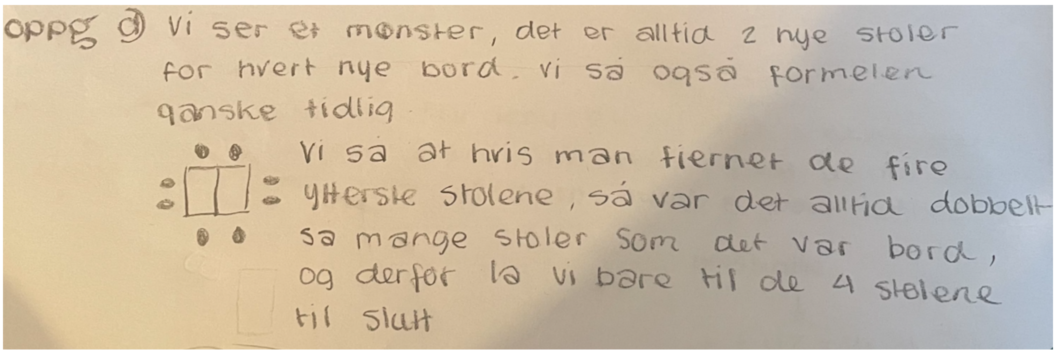

oppg f) $F_n = 2n + 4$ Justering
Økningstall

Vi begynte med å finne ut hvor mye det økte også sette inn n fordi vi skal multipliser med det n-tallet også testa vi det og så hvor mye vi måtte juster med

Figur 14: Figuren viser hvordan gruppe 4 har gått frem for å finne den generelle formelen som passer til mønsteret.

4.2.3 Kontekstuell

I mine analyser av Gruppe 1 sin plakat identifiserte jeg at gruppen tar i bruk *kontekstuell* generaliseringsstrategi på oppgave d). Ved bruk av *kontekstuell* generaliseringsstrategi har gruppen, som det beskrives i Lannin (2005) sitt rammeverk, tatt tak i informasjonen som gis i forbindelse med mønsteret, for videre å konstruere en generell formel som gjelder for hvilken som helst figur i den gitte problemsituasjonen.

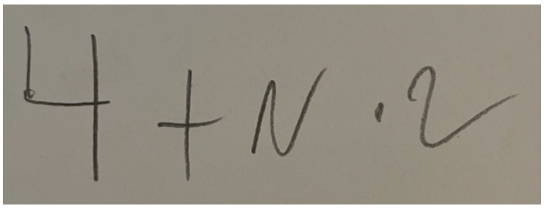

oppg d) Vi ser et mønster, det er alltid 2 nye stoler for hvert nye bord. vi så også formelen ganske tidlig.

Vi så at hvis man fjernet de fire ytterste stolene, så var det alltid dobbelt så mange stoler som det var bord, og derfor la vi bare til de 4 stolene til slutt

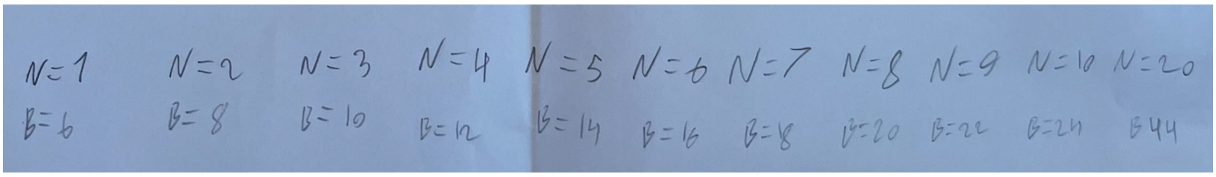
Figur 15: Figuren viser hvordan gruppe 1 tar i bruk konteksten til mønsteret, for å beskrive hvordan mønsteret utvikler seg.

I Figur nummer 15 fremkommer det at gruppe 1 bruker figuren for å beskrive utviklingen i mønsteret. Gruppe 1 ser for seg at de to endestolene på hver side settes til side, og kan plasseres tilbake uansett hvor mange nye bord som blir lagt til. Da blir regnestykket to stoler per bord, multiplisert med antallet bord. Til slutt beskriver gruppa at de alltid også må legge til de fire endestolene.

Gruppe 2 skiller seg ut fra alle de andre gruppene i utvalget. Som eneste gruppe, viser mine analyser at denne gruppen har de tatt i bruk *eksplisitt* generaliseringsstrategi på alle oppgavene som skulle løses ut ifra det gitte bordmønsteret. Det kommer frem fra analysen av plakaten til gruppe 2 at de allerede i oppgave a) tok i bruk denne *eksplisitte* strategien. Gruppe 2 har kun skrevet den generelle formelen på plakaten sin på oppgave a). De gikk rett på å finne en generell formel som passet til mønsteret allerede fra første oppgave. Deretter kan det se ut som gruppa brukte den generelle formelen de hadde kommet frem til, for å finne svar på alle de andre deloppgavene. På plakaten skriver gruppen opp alle bordnumrene som det spørres om i alle deloppgavene. Under bordnummeret har gruppe 1 skrevet opp antall stoler. Det kan se ut som at gruppen her har brukt den generelle formelen. Plakaten til gruppe 2 viser lite av hva gruppa har tenkt for å finne formelen, men tankegangen til denne gruppa kommer bedre fram i gruppeintervjuet, som ble utført i etterkant av oppgaveløsningen. Gruppe 2 formidlet lite av tankegangen sin på plakaten. På plakaten er det kun skrevet formel og svar. Sentrale funn som sier noe om tankegangen til gruppe 2 vil derfor bli utdypet ytterligere under resultatkapitelets kapittel 4.3. I dette kapittelet vil vi kunne se at også denne gruppa har brukt kontekstuell generaliseringsstrategi.



Figur 16: Figuren viser gruppe 2 sin løsning på oppgave a). Gruppen har kun skrevet den generelle formelen.



Figur 17: Figuren viser hvordan gruppe 2 presenterer antall stoler som trengs til de forskjellige bordsammensetningene som det spørres om i oppgaven.

4.3 Gruppene sine tankemåter bak generaliseringsstrategiene

I denne delen av resultatkapittelet vil resultatene fra analysene av gruppeintervjuene som ble gjennomført i etterkant av oppgaveløsningen bli presentert. Gruppeintervjuene ble utført for å komme noe dypere inn i tankegangen bak strategibruken til gruppene. Resultatene fra analysene av gruppeintervjuene vil bli presentert gjennom de tre hovedkategoriene *forenklinger, formel og visualisering.* Til slutt vil resultatene fra plakatene og intervjuene bindes sammen i kjernekategorien *system.* Som tidligere nevnt, vil hva som legges i hver av de tre hovedkategoriene og kjernekategorien kort beskrives i starten av hvert nye delkapittel. Som beskrevet i metodekapittelet var det kun tre av de fire gruppene, der alle deltakerne hadde samtykket til å delta i et intervjue i etterkant av oppgaveløsningen. Resultatene fra analysene av intervjuene vil derfor kun gjelde gruppe 1, gruppe 2 og gruppe 4.

4.3.1 Forenklinger

Kategorien *forenklinger* handler om det at elevene på ulikt vis prøver å forenkle problemsituasjonen for å løse deloppgavene. Kategorien omhandler hvilke typer forenklinger analysen av intervjuene viser at elevene tar i bruk når de skal løse oppgavene.

Gruppe 2 hadde ikke presentert mye av tankegangen sin på plakaten, men i intervjuet i etterkant kom det tydeligere frem hvordan gruppen hadde tenkt, samt hvordan de hadde løst alle deloppgavene. Elev 4 på gruppe 2 poengterte følgende tidlig i intervjuet når gruppen ble spurt om tankegangen bak sin strategibruk:

5. **Intervjuer:** Hvordan tenkte dere på første oppgave der dere skulle finne antall stoler ved fire bord?
6. **Elev 4:** Vi brukte algoritmen på alle oppgavene. Hvis vi fant algoritmen først, ville det være lettere å finne svar på alle oppgavene.
7. **Intervjuer:** Hva mener du med algoritmen?
8. **Elev 4:** Jeg mener at man må finne en formel som passer til alle oppgavene.

Gruppe 2 forenkler på denne måte problemsituasjonen ved å finne formel allerede i oppgave a). Som elev 4 uttrykker, vil det ved hjelp av en formel være lettere å finne svar på alle oppgavene som er gitt i forbindelse med bordmønsteret. Dette er i motsetning til gruppe 4 som forenkler problemsituasjonen ved hjelp av ikke-eksplisitte strategier på de første deloppgavene.

I analysen av gruppe 1 sitt intervju kommer det frem at gruppen forsøkte å forenkle problemsituasjonen ved å bruke informasjonen de hadde om hvordan mønsteret økte for hver ny figur da de skulle finne den generelle formelen i siste deloppgave. Økningen hadde de funnet ut i de første deloppgavene ved å tegne og telle antallet stoler i de første figurene i mønsterrekka. En av elevene på denne gruppa uttrykker følgende:

15. Elev 7: Det vanskeligste er å finne formelen fordi her må vi prøve oss frem. Det er ikke alltid så lett å se med en gang hva formelen blir. Men med tallene og tegningene fra de tidligere oppgavene, så går det å prøve seg litt frem. Vi kan da sjekke med flere av figurene om formelen stemmer.

Gruppe 4 forenkler også problemsituasjonen for å kunne løse alle oppgavene. Dette kommer for eksempel frem i analysene av intervjuet når de forklarer hvordan gruppen løste oppgave e). Som vist til i kapittel 4.2.1 benyttet gruppen den eksplisitte strategien *hel-objekt* for å løse oppgave e). Det kommer i analysene av intervjuet til gruppe 1 frem følgende:

12. Intervjuer: Brukte dere samme metode på oppgave e som på oppgave a?

13. Elev 1: Ehh, nei jeg tror ikke vi gjorde det.

14. Intervjuer: Kan dere beskrive hvordan dere tenkte for å finne antall stoler i figur 20?

15. Elev 2: På 20 bord tok vi 10 gange 2 er lik 20, fordi vi må gange bordene for å få svaret på hvor mye det er på flere bord. Så plusset vi 20 med de tidligere 24 plassene og fikk 44 plasser.

Gjennom denne forklaringen viser gruppen at de måtte forenkle problemsituasjonen da de fikk i oppgave å finne en figur som lå langt ut i mønsterrekka. Istedenfor å telle seg frem til antall stoler i figur nummer 20, brukte gruppa informasjonen de hadde om mønsteret tidligere i figurrekka. Mine analyser av intervjuet til gruppe 4 viser at de forenkler oppgaven ved å ta utgangspunkt i figur nummer 10 som de allerede har funnet i oppgave c). Deretter multipliserer gruppa 10 med 2 for å finne ut hvor mange flere stoler det vil bli plass til ved 20 bord, sammenliknet med 10 bord. På grunn av at bordmønsteret alltid øker med to for hvert nye bord, blir 10 multiplisert med 2. Ti nye bord kan legges til figur 10, for å finne figur nummer 20. Uten de fire endestolene, finner gruppe 1 derfor ut at det er plass til 20 stoler ved ti bord. De 20 stolene blir så lagt til de 24 plassene som figur nummer 10 består av, og figur nummer 20 består derfor av 44 plasser.

4.3.2 Formel

Kategorien *formel* omhandler hvordan analysene av intervjuene får frem gruppene sine tanker om den generelle formelen. Alle de tre gruppene som ble intervjuet viste gjennom sine refleksjoner allerede fra starten av intervjuet at de var klar over at det fantes en generell formel som passet til mønsteret. Hver gruppe hadde litt ulike innfallsvinkler for å komme frem til denne formelen, selv om noen av gruppene benyttet seg av samme generaliseringsstrategi. Kategorien *formel* handler om hvordan elevene tenker når de skal finne den generelle formelen.

Som vist til tidligere, ble det på plakatene til to av gruppene i utvalget, gruppe 1 og gruppe 4, identifisert at den *eksplisitte* generaliseringsstrategien *gjett-og-sjekk* ble tatt i bruk for å komme frem til den generelle formelen som passet til mønsteret. På spørsmål i intervjuet om hvordan gruppene tenkte for å komme frem til den generelle formelen, forteller gruppe 4 blant annet at de i arbeide med å komme frem til rett formel måtte prøve seg frem. Elev 8 på gruppen forklarer at de kom frem til den generelle formelen på følgende måte når gruppa blir spurt om dette:

> **12. Intervjuer:** Men, jeg ser her, altså når dere jobbet med oppgavene her så kom dere frem til en formel til slutt, hvordan kom dere frem til denne formelen?
>
> **13. Elev 8:** Vi prøvde å finne formel på den første oppgaven, men fikk det ikke til. Vi tegnet derfor opp bord og prøvde å se systemet. Vi prøvde først seks gange 2n, men dette fant vi ut at ikke gikk. Vi prøvde ut forskjellige tall til det stemte med flere figurer.

Det kommer gjennom analysen av forklaringen til gruppe 4 frem, at gruppa ikke fikk til å se den generelle formelen gjennom å kun studere det gitte mønstret. Gruppe 4 måtte testet ut ulike formler, som de i intervjuet beskriver som tall, for deretter å teste om formlene passet med flere av figurene i mønsteret. Hvis formelen de testet ikke passet med noen av figurene i bordmønsteret, som for eksempel formelen $6 \cdot 2n$, forkastet gruppa formelen og testet en ny formel. Når formelen gruppa fant fungerte på flere av figurene i mønstret, trakk gruppa konklusjonen om at det var denne formelen som var den rette. I tillegg kommer det frem gjennom analysen av intervjuet til gruppe 4 at de konkluderer med, at når de fant formelen så ville det bli enklere å finne alle mulige figurer i mønsteret. Elev 7 sier dette:

> **17. Elev 7:** Det gjør jo oppgavene mye enklere etter man har funnet formelen, fordi vi kan løse alle oppgavene med formelen.

I likhet med gruppe 4, benyttet også gruppe 1 seg av *gjett-og-sjekk* som strategi for å komme frem til den generelle formelen. For å forklare hvordan gruppa tenkte for å komme frem til rett generell formel, ga gruppe 1 følgende forklaring i intervjuet:

> **18. Intervjuer:** Hvordan tenkte dere for å finne den generelle formelen til mønsteret?
>
> **19. Elev 1:** Vi prøvde oss bare frem til formelen stemte.
>
> **20. Intervjuer:** Kan dere utdype hvordan dere prøvde dere frem? Hvordan prøvde dere, dere frem?

21. Elev 2: Vi prøvde først med formelen 2n + 2, men dette ble ikke riktig. Figur 1 fikk da to forlite stoler. Vi måtte derfor justere på det siste tallet til det stemte. 2n + 4 ble derfor riktig fordi det stemte når vi testa det ut på flere av figurene.

22. Intervjuer: Hvordan visste dere med en gang at det skulle være 2n i formelen?

23. Elev 2: Fordi vi hadde sett at mønsteret økte med to for hver gang. Vi må derfor gange 2 med hvilken av figurene vi skal finne.

Gruppe 1 forklarer at de prøvde seg frem til de fant rett generell formel. Når de får spørsmål om å utdype fremgangsmåten sin ytterligere, kommer det frem at gruppen først testet ut formelen $2n + 2$. Denne formelen ga ikke rett resultat, fordi ved at gruppen testet ut denne formelen på figur 1, så fikk de en løsning som hadde to stoler for lite. I forklaringen som elev 2 på gruppe 1 gir, kommer det frem at gruppen da endret formelen sin. Gruppen prøvde ut formelen $2n + 4$ og så at denne stemte for flere av figurene. Derfor ble konklusjonen til gruppen at det var dette som var rett generell formel.

4.3.3 Visualisering

Den siste hovedkategorien, *visualisering,* omhandler gruppe 1,2 og 4 sine forklaringer på hvordan de ser for seg utviklingen av mønsteret. Gjennom intervjuene formidlet alle gruppene noe om hvordan de visualiserte veksten av mønsteret.

Gjennom analysen av intervjuene, kom det fram at alle de tre gruppene som ble intervjuet visualiserte problemsituasjonen til det gitte mønstret ved å se for seg hvordan mønstret vokste fra en figur til den neste figuren i figurrekka. Måten gruppe 4 visualiserte mønsteret på, kom frem gjennom forklaringen som en av elevene på denne gruppa ga for å beskrive hvordan gruppa tenkte for å finne antallet stoler i figur nummer 4. Elev 7 på gruppa forteller:

9. **Elev 7:** Mønsteret eller bilde på arket viser at det går opp to plasser hele tiden. For hvert bord går det for eksempel opp fra 6 til 8 til 10 til 12. Med ett bord er det seks plasser. På to bord er det åtte plasser og på tre bord er det 10 plasser. Da ser vi at det går opp to plasser hver gang et bord er satt sammen.

Forklaringen over viser at gruppe 4 visualiserer problemsituasjonen ved å se på bildene som er gitt på oppgavearket, altså bord 1, 2 og 3. Gruppen lager seg et mentalt bilde av hvordan antall stoler øker med to for hvert nye bord som blir lagt til.

Gjennom analysen av intervjuet som ble gjennomført med gruppe 2, kommer det også frem noe om hvordan denne gruppa visualiserte problemsituasjonen. Gruppe 2 forklarte, i likhet med gruppe 4, hvordan de så for seg veksten i mønsteret. I gruppen sin forklaring av mønsterutviklingen kommer det frem at de så for seg de fire endestolene i mønsterrekka som konstante. De fire endestolene måtte derfor alltid bli lagt til for hver ny figur i mønsterrekka, sammen med økningen av nye stoler i den bestemte figuren. Dette kommer til uttrykk når gruppa får spørsmål om hvordan de tenkte for å komme frem til formelen i mønstret:

10. **Intervjuer:** Hvordan tenkte dere for å komme frem til denne formelen?

11. **Elev 5:** Vi så på bordene, fant ut at det uansett ville være to på hver side. Hvert bord ville da øke med to. Derfor bordnummer gange to pluss fire stoler. Hvis du setter bordet inn mot veggen blir det det samme, men minus to stoler.

Gjennom forklaringen over kan det også se ut som at gruppe 2 brukte *kontekstuell* generaliseringsstrategi for å løse alle deloppgavene som var gitt i forbindelse med det bestemte bordmønstret. Konkret hvilken generaliseringsstrategi gruppen brukte, kom som nevnt tidligere ikke frem gjennom analysen av plakaten til gruppen. I forklaringen som elev 5 gir over, kan det se ut som at gruppe 2 tok utgangspunkt informasjonen som var gitt i problemsituasjonen og lagde en formel kun ut ifra å se på de gitte bordfigurene.

Gruppe 1 visualiserte problemsituasjonen til mønsteret på samme måte som gruppe 2. Denne gruppa forklarte også at de så for seg at de fire endestolene i mønsteret for hver ny figur, samtidig som det legges til to nye stoler for hvert nye bord. Gruppe 1 trekker også frem at det er enklere å sette seg inn i problemsituasjonen og finne økningen til mønsteret når oppgaven er knyttet opp mot en realistisk kontekst. Gruppa forklarer at det er lettere å forstå oppgavene når de kan se for seg problemsituasjonen i virkeligheten.

26. **Intervjuer:** Hva tenker dere rundt at mønsteret dere jobbet med her, var knyttet til en virkelig situasjon?

27. **Elev 2:** Jeg synes det er litt artigere å jobbe med matte når oppgavene på en måte gir mening.

28. **Elev 3:** Ja, det er mye enklere å gjøre oppgavene når vi kan se for oss det vi gjør.

29. **Elev 2:** Ja, for det var det var jo ganske enkelt å se mønsteret her, så hvis det er litt mer utfordrende mønster da så blir det jo vanskeligere å gjøre oppgaven.

4.4 System

Som nevnt i innledningen til resultatkapittelet, har jeg valgt å binde de tre hovedkategoriene, *forenkling, visualisering* og *formel,* samt generaliseringsstrategiene som er indentifisert på gruppenes plakater gjennom kjernekategorien *system*. Denne kategorien omhandler hvordan gruppene systematiserer informasjonen de blir gitt i mønsteroppgaven. Når gruppene visualiserer mønsteret, gjør forenklinger og leter etter den generelle formelen, er alt dette en form for systematisering. Alle de tre gruppene, viser gjennom intervjuene at de leter etter system for å løse oppgavene, og for å kunne beskrive hvordan mønsteret vokser. Kategorien *system* sier noe om hvilke typer system elevene lagde og forteller om.

I intervjuene forklarer gruppene noe om hvordan de prøver å sette informasjonen de har fått inn i et slags system, og elev 7 på gruppe 4, gir uttrykk for dette på denne måten:

Vi prøvde å finne formel på den første oppgaven, men fikk det ikke til. Vi tegnet derfor opp bord og prøvde å se systemet.

I funnene fra analysen av gruppeintervjuene kom det frem at alle gruppene ga uttrykk for at de etter hvert ønsket å finne en generell formel. Gjennom intervjuene og gjennom arbeidet som er gjort på plakatene, kom det tydelig frem at gruppene har ulike framgangsmåter når de leter etter system for å forstå mønsteret. Gruppe 2 som brukte formel allerede fra oppgave a), brukte det som i Lannin (2005) sitt rammeverk kalles for kontekstuell generaliseringsstrategi. Gruppa sin framgangsmåte kan også identifiseres med det som Becker og Rivera (2006) beskriver som figurativ tilnærming. Ved å studere bordmønsteret som var avbildet på oppgavearket, fant gruppe 2 den generelle formelen direkte ved at de oppdaget systemet i mønstretes vekst. Dette var den eneste gruppa som viste en figurativ tilnærmingsmåte for å finne formel. De andre gruppene hadde det som Becker og Rivera (2006) kaller numerisk tilnærming for å finne den generelle formelen. Gjennom analyse av intervjuene og plakatene til gruppe 1, 3 og 4, kommer det frem at disse gruppene brukte en rekke forskjellige strategier for å finne system i mønsteret. Eksempler på strategier som ble brukt for å skape system og forstå mønsterets vekst er som tidligere belyst: tegning, telling og å systematisere informasjonen i en tabell.

5.0 Diskusjon

Formålet med studien er å belyse forskningsspørsmålet:
Hvilke generaliseringsstrategier tar ungdomsskoleelever i bruk i arbeid med en figurmønsteroppgave, og hvordan forklarer gruppene tankegangen bak valget av de ulike generaliseringsstrategiene?

I dette kapittelet vil sentrale resultater og funn, som er presentert i studiens resultatkapittel, bli diskutert opp imot tidligere teori og forskning som er lagt frem i studiens kapittel 2. Kapittelet har jeg valgt å dele inn i to hoveddeler. De to hoveddelene er igjen delt inn i flere underkapitler. I første del vil resultatene som forteller hvilke generaliseringsstrategier utvalget i studien tok i bruk, bli diskutert opp imot hva forskning sier om de ulike generaliseringsstrategiene. Denne hoveddelen vil bli delt inn i de to underkapitlene *ikke-eksplisitte* og *eksplisitte* strategier. I diskusjonskapittelets andre hoveddel, vil resultatene som forklarer noe om hvordan tre av gruppene i utvalget forklarer sin tankegang i arbeidet med bordmønsteroppgaven bli diskutert. Resultatene som forteller noe om gruppene sine tankemåter, vil bli diskutert i lys av de tre hovedkategoriene, *forenklinger*, *formel* og *visualisering*, som er presentert i studiens resultatkapittel. Kjernekategorien, *system*, som i min studie binder de tre hovedkategoriene og de ulike generaliseringsstrategiene som det er identifisert at gruppene i min studie tok i bruk, for å løse bordmønsteroppgaven, vil også bli diskutert. Forskjeller og likheter i gruppenes strategibruk og tankegang vil bli diskutert i begge de to hoveddelene.

5.1 Generaliseringsstrategier

5.1.1 Ikke-eksplisitte strategier

Det er identifisert at tre av fire grupper i studien brukte ikke-eksplisitte generaliseringsstrategier for å løse de første deloppgavene til bordmønstret. Det er vist at både gruppe 1, 3 og 4 brukte *telling* eller *rekursiv* strategi fra Lannin (2005) sitt rammeverk, for å løse oppgave a) til og med c). Gruppenes bruk av ikke-eksplisitte strategier i de første deloppgavene var ikke et overaskende utfall, da disse oppgavene ba elevene om å finne antallet stoler til noen av de første figurene i mønsterrekka. I tillegg peker forskning på at eksplisitte strategier, sjelden er en av de første strategiene som elevene tar i bruk i arbeid med generalisering (Lannin et al., 2006, s.18). Overgangen fra ikke-eksplisitte strategier og over til eksplisitte strategier skjer ofte når elevene ser et behov for mer effektive strategier og arbeider med høye tallverdier (Lannin et al., 2006, s.18-19). Ut ifra resultatene kan det se ut som at gruppe 1, 3 og 4 fokuserer på mønsteret de ser på oppgavearket, altså på det konkrete, og ikke det generelle. Radford (2003) kaller en slik måte å generalisere på for faktuelt nivå, som han peker på at er det første av tre ulike nivåer i utviklingen av generalisering. På dette nivået ligger fokuset på selve materialet som skal generaliseres (Radford, 2003, s.65).

Studien til English og Warren (1998) viste at elever som var svake i matematikk, ofte brukte rekursive strategitilnærminger for å generalisere (s.167). Elevene som brukte slike strategier for å generalisere var ikke i stand til å beskrive generaliseringene med algebraisk notasjon (English & Warren, 1998, s.167). Sammenligner vi dette med gruppe 1, 3 og 4 sin bruk av ikke-eksplisitte strategier på de tre første deloppgavene, er det i deres løsninger av disse oppgavene heller ikke brukt noen algebraisk notasjon. Gruppe 4 som brukte *telling* for å løse oppgave a-c, beskrev, som lagt frem i resultatkapittelet, økningen i mønstret ved hjelp av ord. Gruppen beskrev at de telte sirklene, som symboliserte antallet stoler, for hver ny figur, og at de da så at det legges til to nye stoler for hvert nye bord. Gruppe 1 brukte telling på oppgava a), men gikk i oppgave b) og c) over til rekursiv strategi. Gruppe 3 brukte rekursiv på alle de tre første deloppgavene. Begge disse to gruppene beskrev også mønsteret med ord. Når disse gruppene beskriver med ord hvordan mønsteret øker, ser vi tydelig at de beskriver med det English og Warren (1998) kaller for en rekursiv additiv strategi (s.167). English og Warren (1998) sier at elever som bruker denne metoden kan få problemer med å se forholdet mellom algebraiske uttrykket og mønsteret (s.168). Dette kan være et tegn på at den algebraiske forståelsen til utvalget enda er på et forholdsvis lavt nivå.

5.1.2 Eksplisitte strategier

Resultatene som kom frem gjennom analyse av plakatene, og som er presentert i studiens kapittel 4, viser at alle de fire gruppene tok i bruk en eller flere av de eksplisitte generaliseringsstrategiene fra Lannin (2005) sitt rammeverk. Som beskrevet i resultatkapittelet, var et tydelig fellestrekk som gikk igjen i bruken av de eksplisitte generaliseringsstrategiene, nemlig det at alle gruppene blant annet brukte eksplisitte strategier for å løse de to siste deloppgavene til figurmønsteret, nærmere bestemt oppgave e) og f). I oppgave e) skulle gruppene finne antallet stoler i figur nummer 20, mens elevene i den aller siste deloppgaven, oppgave f), skulle finne en generell formel som passet til hvilket som helst ledd i figurrekka.

En grunn til at alle gruppene tok i bruk eksplisitte strategier på de to siste deloppgavene, kan ha sammenheng med at elevene har sett et behov for å finne strategier som er mer effektive enn å telle seg frem til en løsning. Dette er i tråd med hva Lannin et al. (2006)

beskriver om eksplisitte generaliseringsstrategier. De beskriver i sin studie at når tallverdiene i figurene som elevene skal finne er høye, så har elevene en tendens til å søke etter mer effektive strategier (Lannin et al., 2006, s. 18-19). I oppgave e) skulle elevene finne antallet stoler i figur nummer 20, her vil en ikke-eksplisitt strategi, som for eksempel *telling*, være tungvint. Og de tre gruppene som brukte ikke-eksplisitte strategier på de tre første oppgavene, går her over til å bruke eksplisitte strategier.

Lannin (2005) beskriver at formålet til eksplisitte strategier i arbeid med å generalisere, er å finne verdien til et hvilket som helst ledd i et gitt figurmønster (s.234). I lys av en slik beskrivelsen, vil det være naturlig at elevene bruker ulike eksplisitte strategier for å finne en generell formel som passer til bordmønsteret. Resultatene bekrefter også dette. Med utgangspunkt i at det er vanskelig å telle seg frem til en formel, så bruker gruppene forskjellige eksplisitte strategier.

5.1.2.1 Gjett- og sjekk

Resultatene viser at både gruppe 1, gruppe 3 og gruppe 4 tok i bruk den eksplisitte strategien *gjett-og-sjekk* i oppgave f), der oppgaven ba elevene om å finne en generell formel som passet til bordmønsteret. I resultatkapittelet er det lagt frem hvordan gruppe 1 og gruppe 4 løste denne oppagven. Begge disse gruppene nærmet seg altså denne oppgaven, ved hjelp av den eksplisitte strategien som Lannin (2005) beskriver som å prøve eller gjette seg frem til en formel som passer figurmønsteret man jobber med (s.234). Lannin (2005) poengterer også at elever som bruker denne strategien ikke er i stand til å vurdere om formelen de gjetter seg frem til stemmer. I tilfeller hvor denne strategien blir tatt i bruk blir problemsituasjonen som formelen skal passe til ofte utforsket (Lannin, 2005, s. 234).

Ut ifra beskrivelsen som er gitt på gruppe 1 sin plakat, der de beskriver hvordan de har gått frem for å finne den generelle formelen, kom det frem at når gruppen trodde de hadde funnet rett generell formel, så gikk deres neste steg ut på å teste om formelen stemte på flere av figurene i mønsteret. I følge Radford (2010) kan ikke dette sees på som en sofistikert måte å generalisere på. Dette er blant annet fordi formler som er konstruert gjennom å prøve og feile seg frem, kan sees på som hypoteser (Radford, 2010, s. 41). Elever som bruker en slik strategi og tester på noen få av figurene i mønstret de arbeider med, som både gruppe 1 og gruppe 4 gjorde i arbeidet med bordmønstret, vil mest sannsynlig forklare at formelen deres stemmer fordi den passet til noen av de første figurene i mønstret. Hadde elevene derimot blitt spurt om å finne figur nummer 100 med formelen de hadde funnet med strategien *gjett-og-sjekk,* ville de ikke lenger hatt en effektiv måte for å teste ut om formelen fungerte. Grunnen til dette er at det er lite effektivt og tar lang tid å tegne opp de 100 første figurene i mønsteret. Den generelle reglen til gruppe 1 og 4 baserer seg altså ikke på noen logisk slutning, de to gruppene har funnet den generelle regelen ut ifra gjetning og observasjon av mønstret (Radford, 2010, 41-42). Radford (2010) kaller en slik metode å generalisere på for en induksjon heller enn en algebraisk generalisering.

I likhet med både Lannin (2005) og Radford (2010) beskriver også Becker og Riviera (2006) prøving- og feiling som en strategi som ofte blir tatt i bruk i arbeid med mønster. De beskriver denne strategien under det de kaller for numerisk metode å generalisere på, og beskriver at elevene ofte innenfor denne tilnærmingen for generaliserer prøver og feiler med forskjellige formler for å tilpasse verdier som passer til mønsteret de jobber med (s.96).

Bordmønsteret som elevene i min studie skulle finne en generell formel til, er et lineært mønster. Noe som vil si at mønsteret øker med den samme verdien for hver ny figur, altså to nye stoler. Ifølge Becker og Rivera (2006) vil elever som bruker en numerisk generaliseringsstrategi på lineære mønster, hvor de prøver og feiler seg frem til en formel, ha liten forståelse for hva konstanten i utrykket representerer (s.96). Tar man dette i betraktning, kan det være grunn til å tro at selv om vi ser at både gruppe 1 og gruppe 4 i studien brukte *gjett-og-sjekk* som sin strategi for å finne formel, så kan man ikke konkludere med elevene på disse to gruppene har forstått hva variablene i formelen faktisk representerer. I resultatkapittelet kommer det også frem at gruppe 1 bare bytter ut n i formelen med bordnummeret til figuren de skal finne. Dette kan være et tegn på at elevene, i likhet med det Becker og Rivera (2006) poengterer, forstår variablene i uttrykket som plassholdere (s.96). Elevene går bort i fra selve figurene i mønsteret, for heller å konsentrere seg om selve verdiene i figurfølgen (Becker og Rivera, 2006, s.96). Dette vil si at selv om elevene kommer frem til rett generell formel, ved hjelp av en strategi der elevene prøver og feiler seg frem, og betyr ikke dette nødvendigvis at elevene har en algebraisk forståelse for den generelle formelen. En slik strategibruk bør heller derimot sees på som at elevene mangler en forståelse for hva sammenhengen mellom er mellom deres beregninger og selve mønsteret de jobber med (Becker og Rivera, 2006, s.96).

5.1.2.2 Hel-objekt:

To av gruppene i studien, gruppe 3 og 4, tok i bruk den eksplisitte strategien *hel-objekt* som en av sine generaliseringsstrategier. Disse to gruppene så denne strategien som nyttig på oppgave e) der de skulle finne antallet stoler i figur nummer 20. I Lannin (2005) sitt rammeverk blir denne strategien beskrevet som en eksplisitt strategi der elevene bruker en enhet til å konstruere en større enhet i mønsterreakka (s.234). Både gruppe 3 og 4 har i arbeidet med bordmønsteret sett at det kunne være nyttig å benytte seg av figuren som var halvparten så stor som figur nummer 20, altså figur nummer 10, for å finne antallet stoler i figur 20.

Resultatene viser at både gruppe 3 og 4 helt frem til oppgave e) bare hadde benyttet seg av ikke-eksplisitte strategier. Analysene som er gjort av løsningsstrategiene på plakatene til gruppene, vil ikke kunne gi et tilstrekkelig grunnlag for å med sikkerhet kunne si noe om hvorfor de to gruppene akkurat på oppgave e) valgte å endre strategi fra ikke-eksplisitte og over til den eksplisitte strategien hel-objekt. Som Lannin et al. (2006) peker på så er det flere sammensatte faktorer som er med på å påvirke endringen i strategibruk. Men, en faktor som ofte spiller en avgjørende rolle for valg av strategi er effektivitet (Lannin et al., 2006, s. 18-19). Effektivitet kan derfor være en faktor som her påvirket elevene til å endre sin strategi. Å telle seg frem til figur 20 vil ta lang tid og kan sies å være lite effektiv.

En typisk feil som elever ofte gjør i forbindelse med hel-objekt strategien er at de ikke tar hensyn til konstanten i det lineære mønsteret (Lannin, 2005, s.241). Dette kommer også frem i studien her, da resultatene viser at det kun var gruppe 4 som kom frem til rett løsning. Gruppe 3 tok derimot ikke hensyn til at de fire endestolene ikke kunne dobles. De doblet bare antallet stoler i figur 10, uten å trekke fra de fire endestolene. I følge Lannin et al. (2006) bør feil som oppstår i arbeidet med mønster, bli fremhevet og diskutert med klassen (s.25). Diskusjon av feil kan føre til at elevene lærer av hverandre og korrigerer kunnskapen sin.

5.1.2.3 Kontekstuell:

Gruppe 2 i studien skiller seg ut fra alle de andre gruppene, ved at det er identifisert at denne gruppen tok i bruk *kontekstuell* generaliseringsstrategi allerede fra oppgave a). Lannin (2005) beskriver denne strategien som en eksplisitt strategi der elevene tar utgangspunkt i problemkonteksten for å lage en generell formel. Denne måten å generalisere på, kan sammenlignes med det Becker og Rivera (2006) kaller for figurativ generalisering. En figurativ måte å generalisere på kan bli sett på som en visuell strategi (Becker og Rivera, 2006, s. 96). De beskriver at elever som generaliserer figurativt har sitt fokus på selve figurene og egenskapene til figurene som de jobber med. Elever som er i stand til å generalisere visuelt eller med en figurativ tilnærming, vil ofte også lykkes best i deres generaliseringer (Becker og Rivera, 2006, s. 96). Gruppe 2 sin måte å generalisere på var effektiv i forhold til strategiene de andre gruppene brukte, da denne gruppa brukte svært kort tid på å løse oppgavene i forhold til de andre gruppene.

Det er også identifisert at gruppe 1 i studien har tatt i bruk den *kontekstuelle* generaliseringsstrategien fra Lannin (2005) sitt rammeverk. Men, i motsetning til gruppe 2, brukte denne gruppa kun denne strategien for å løse oppgave d). Altså oppgaven som ba elevene om å beskrive utviklingen til mønsteret. Gruppa bruker her problemkonteksten og selve mønsteret for å beskrive utviklingen av bordmønsteret. Gruppa har et tydelig bilde av problemsituasjonen og beskriver mønsteret på samme måte som gruppe 2, men resultatene viser at gruppa bruker *gjett-og-sjekk* når de skal finne generell formel. Vi kan ikke konkludere med hvorfor gruppa ikke bruker beskrivelsene de gir i oppgave d) av utviklingen til mønsteret videre for å finne den generelle formelen til mønstret. Men, med utgangspunkt i endringen av strategibruken til gruppe 2, kan man anta at gruppa lener seg mer mot en aritmetisk måte å generalisere på enn en algebraisk måte å generalisere på. Radford (2010) beskriver noe om disse to måtene å generalisere på. Han sier at elever som er i stand til å generalisere algebraisk vil være i stand til å oppdage hvordan mønstret utvikler seg, og bruke denne informasjonen videre for å lage en generell formel. Dette er i motsetning til de som er i stand til å oppdage noe felles for figurene, men ikke er i stand til å bruke denne informasjonen videre for å lage en generell formel (Radford, 2010, s. 55-56). Gruppe 2 har i arbeidet med bordmønsteret sett og beskrevet hvordan mønstret utvikler seg, men med tanke på strategibruken deres for å finne den generelle formelen, så kan man peke på at gruppa kanskje ikke har den fulle og hele algebraiske forståelsen.

5.2 Tenkemåter

I teorikapittelet er det beskrevet at det er gjort mye forskning på hvilke typer strategier elevene bruker for å generalisere, men at det er gjort lite forskning på hva som påvirker elevenes valg av strategier (Lannin et al., 2006, s.3). Det er ingen enkel konklusjon på hvilke faktorer som påvirker elevene sine strategivalg, da disse blir påvirket av mange faktorer (Lannin et al., 2006, s.3). Det er i denne studien også vist at elevene har tatt i bruk mange forskjellige generaliseringsstrategier, og som både er av typen *ikke-eksplisitte* og *eksplisitte strategier*. Selv om det er vist at elevene tar i bruk mange typer strategier, er det også både viktig og interessant å komme litt tettere på tankegangen for de ulike strategiene.

5.2.1 Forenklinger

I resultatkapittelet er det lagt frem at *forenklinger* er en kategori som gikk igjen i alle de tre gruppeintervjuene som ble gjennomført for å få et litt dypere innblikk i hvordan elevene tenkte for å løse bordmønsteroppgaven. Alle de tre gruppene som ble intervjuet prøvde på ulike måter å forenkle problemsituasjonen for å løse oppgavene. Elev 4 på gruppe 2 uttrykte for eksempel at det ville være lettere å finne svar på alle oppgavene dersom gruppa fra starten fant den generelle formelen. Gruppe 1 så også et behov for å forenkle problemsituasjonen, men denne gruppa klarte i motsetning til gruppe 2, ikke å finne formelen ved å bruke det avbildede mønsteret på oppgavearket. Denne gruppa forklarte at de måtte tegne opp flere figurer i mønsteret og bruke disse for å prøve seg frem til en formel. Den siste gruppa som ble intervjuet, gruppe 4, så et behov for å forenkle problemsituasjonen på oppgave e), der de skulle finne figur 20. Gruppe 1 gikk da over til den eksplisitte strategien hel-objekt.

En kan se en tendens gjennom forklaringene til gruppene at elevenes fokus er å komme frem til et svar på alle oppgavene på en mest mulig effektiv måte. Det kan være nærliggende å tenke at dette kan ha en sammenheng med elevenes tidligere matematikkundervisning i aritmetikken. Algebra er ofte blitt introdusert som en forlengelse av matematikkundervisning i aritmetikken, og elevene er da som regel vant med å jobbe på måter der fokuset er å komme frem til lukkede og avgrensede svar på de matematiske problemene (Kieran, 2014, s.29). Analysene av forklaringene som gruppene i studien ga i intervjuene om hvordan de tenkte for å løse flere av oppgavene, viser at elevene er ute etter effektive måter å gå frem på. For eksempel så kan det se ut som at gruppe 1 ikke lenger så på telling, som en effektiv strategi i oppgave e). Denne gruppa endret derfor strategi. Men, selv om alle gruppene har en tendens til å fokusere på forenklinger og effektivitet, så kommer det ikke frem at gruppene legger sitt fokus på fremgangsmåten sin fremfor selve løsningen. Det er ingenting av det de sier som tyder på at fokuset er å forstå mønsteret på det å få en forståelse av utviklingen av mønsteret.

5.2.2 Formel

Analysen av de tre gruppeintervjuene fikk frem at alle de tre gruppene som ble intervjuet i etterkant av oppgavejobbingen, var bevisste på at de skulle komme frem til en generell formel som passet til bordmønsteret allerede fra starten av oppgaven. En grunn til at alle de tre gruppene gjennom forklaringene viser at de er bevisste på at de skal finne en generell formel til mønsteret, kan ha en sammenheng med at de har arbeidet med slike typer oppgaver tidligere.

Men, selv om det gjennom gruppens forklaringer kommer frem at de er bevisste på at det finnes en formel, så nærmet de seg denne formelen på ulike måter. Gruppe 1 og 4, nærmet seg for eksempel formelen gjennom å prøve og feile seg frem. Elev 8 på gruppe 4 forklarte for eksempel at de prøvde å finne en generell formel allerede fra første oppgave, men at de ikke fikk det til. Denne gruppa ble derfor nødt til å prøve og feile seg frem. Det at elevene sine forklaringer viser at de ikke er i stand til å finne en formel uten å bruke gjett-og-sjekk, kan tyde på at elevene trenger å utvikle sin algebraiske forståelse ytterligere.

Som i kapittelet *forenklinger,* der vi ser at elevene kanskje er mer opptatt av målet og ikke prosessen, kan vi også her se denne tendensen. Elevene kommer raskt inn på at de skal finne formel, men det er lite snakk om selve mønsteret. Som nevnt tidligere sier Radford (2010) at generalisering av mønster kan være en fin introduksjon til algebra, men at det er viktig å være klar over at ikke all form for generalisering er algebraisk (s.40).

Et av kjerneaspektene i algebra er i følge Kaput (2008) og kunne utrykke generaliseringer (s.10). Samt at formålet med generalisering er at man skal kunne ende opp i en formel med standardisert symbolspråk. Alle gruppene kom frem til en generell formel der de brukte det standardiserte symbolspråket, men selv om de kom frem til rett generell formel så kan det tyde på at det ikke var generaliseringen som var det viktigste for elvene, men heller å få rett formel. Driscoll (1999) sier også at generalisering kan beskrives som en prosess der målet er å kunne se utover det spesielle i et matematisk problem (s.64). Tankegangen til gruppene gjennom det de forklarte i intervjuene kan tyde på at de var i stand til å finne en formel, men at gruppene ikke var opptatte av relasjonene mellom formelen og selve mønsteret. I utvikling av algebraisk forståelse vil det være viktig å hjelpe elevene til å endre tankegangen sin fra å tenke på konkrete og lukkede svar og over til en relasjonsorientert tankegang (Kieran, 2014, s.29). Dersom elevene fortsetter å jobbe aktivt med mønster og generalisering, samt reflekterer over hva algebra og generalisering egentlig er, så kan dette bidra til å utvikle deres algebraiske tankegang.

5.2.3 Visualisering

De tre gruppene som ble intervjuet i etterkant av oppgavejobbingen, gruppe 1, 2 og 4, formidlet alle noe om hvordan de visualiserte veksten til bordmønsteret. Alle gruppene visualiserte eller lagde seg et bilde av hvordan mønsteret vokste for hver ny figur i figurrekka. Selv om det i resultatkapittelet kom frem at både gruppe 1, 2 og 4 visualiserte problemsituasjonen, så visualiserte de situasjonen på litt ulike måter. Elev 7 på gruppe 4, beskrev for eksempel at de så for seg hvordan mønsteret økte med to nye stoler for hver ny figur. Mens gruppe 2 visualiserte mønstret gjennom at de så for seg de to endestolene i mønstret som konstante. Dette er med på å vise at mennesker er forskjellige, som igjen fører til at elevene ser utviklingen i mønster på forskjellige måter. Det finnes, som Radford (2006) poengterer, ingen fasit på hvordan man visualiserer mønstrene man jobber med (s.5-6). Elever kan bruke mange forskjellige metoder for å utrykke mønsterveksten, samt hvordan de ser for seg hva som er likt og hva som er forskjellig i figurene i mønsteret (Radford, 2006, s. 5-6).

Det visuelle bilde som elevene har av mønstersituasjonen er i følge Lannin et al. (2006), også en av flere faktorer som er med på å påvirke hvilken generaliseringsstrategi elevene tar i bruk når de skal løse ulike mønsteroppgaver. Blant annet viser studien til Lannin et al. (2006) at det visuelle bilde til elevene var med på å påvirke om elevene var i stand til å komme frem til rett eksplisitt formel eller ikke (s.18-19). I min studie kom alle de fire gruppene til slutt frem til rett generell formel, men dette sier ikke nødvendigvis at hele dette utvalget har et sterkt visuelt bilde. Som beskrevet tidligere, brukte både gruppe 1 og 4, begge den eksplisitte strategien *gjett-og-sjekk* i oppgave f) der de skulle finne den generelle formelen 2n+4 som passet til bordmønsteret. Ser man dette i lys av Lannin et al. (2006), så kommer det frem at elever som benytter denne strategien, ofte har et svakt visuelt bilde (s.19). I tillegg peker de på at elever som bruker denne også kan ha vanskeligheter med å komme frem til rett generell formel for den gitte problemsituasjonen. Selv om det kom frem i intervjuet at gruppe 1 og 4 visualiserte mønstersituasjonen, tok de allikevel i bruk gjett-og-sjekk metoden når de skulle finne den generelle formelen til mønsteret. I og med at elevene forandrer strategi til gjett-og-sjekk når de skal finne generell formel, kan tyde på at disse elevene har et svakt visuelt bilde. I arbeid med et mer komplisert mønster ville de kanskje ikke klart å komme frem til rett generell formel.

Gruppe 2, i motsetning til de andre gruppene, forklarte ved hjelp av selve mønsteret hvordan de kom frem til den generelle formelen. I resultatkapittelet er det lagt frem at gruppa kom frem til den generelle formelen ved å se på bordene. Elev 5 på gruppa forklarte i intervjuet at det uansett ville være to stoler på hver side av bordet. Altså to stoler på hver side som var konstante, og at hver ny figur økte med to. Gruppa fant formelen dirkete gjennom å oppdage hvordan mønstrete utviklet seg, ved å studere begynnelsen av bordmønsteret som var avbildet på oppgavearket. Som nevnt delkapittelet som kontekstuell strategibruk mener Becker og Rivera (2006) at elever som bruker denne strategien vil være de som lykkes best med sine generaliseringer. Også Radford (2010) påpeker at dette er en mer sofistikert måte å generalisere på enn prøving og feiling.

5.3 System

I resultatkapittelet er *system* presentert som en fellesnevner. System går igjen som en rød tråd i både analysene av plakatene og i analysene av intervjuene. Det kom frem i resultatene at alle gruppene utforsker både mønstrene og tallene på leting etter system som kan gi dem svar på oppgavene. For å skape system så bruker gruppene blant annet tegning, telling og systematisering av tall i tabell. Kaput (2008) sier at den første tråden i algebranettet handler om å studere systemer og strukturer som kommer fram gjennom relasjoner man finner og beregninger man gjør. Han sier videre at dette er systemer en kan finne igjen i aritmetikken, han kaller det generalisert aritmetikk (Kaput, 2008, s.11-12).

Mønsteroppgaven er en annen måte å jobbe med algebra på enn den tidligere algebraundervisningen, og elevene får mulighet til å jobbe fra en annen innfallsvinkel enn tidligere. Forskere som både Kieran (2014) og Kilpatrick (2011) har beskrevet at skolealgebraen har vært preget av det å huske algebraiske regler, symbolmanipulering, det å øve på å løse likninger og forenkle algebraiske uttrykk. Kaput (2008) mener dette er en smal forståelse av algebra, og at synet på algebra må utvides i skolen, slik at elvene kan få en dypere forståelse for algebra.

I mitt utvalg kan det se ut som om alle gruppene unntatt gruppe 2 jobbet med å finne system ved hjelp av strategier som telling, tegning og systematisering av informasjonen i en tabell, for videre å kunne benytte denne informasjonen til å forstå utviklingen til bordmønstret, og å løse oppgavene. Alle gruppene klarte til slutt å komme frem til den generelle formelen som passet til mønstret, med rett algebraisk notasjon. Man kan anta at de tre gruppene som brukte disse strategiene ikke helt har forståelse for sammenhengen mellom formelen de kom fram til, og mønsterutviklingen. Disse elevene jobber med noe av det Kaput (2008) beskriver som viktige faktorer på veien til å utvikle forståelse for algebra. Blant annet handler en av Kaput (2008) sine tre tråder om strukturer og systemer. Men, da disse gruppene ikke basere arbeidet med å finne formel på det Becker og Riviera (2006) kaller figurativ tilnærming, kan en anta at disse elevene ennå ikke oppnådd det Kaput (2008) kaller en dypere forståelse av algebra.

Gruppe 2 beskriver hvordan de studerte systemet i mønstret for å finne formelen. Denne gruppa var i stand til å forklare sammenhengen mellom formelen og mønsteret. Becker og Rivera (2006) sier at elever som generaliserer på denne måten lykkes best med generaliseringer. Selv om alle gruppene i denne studien kom frem til rett generell formel, kunne utfallet blitt annerledes dersom gruppene også skulle funnet formel til mer kompliserte mønster. Det ville da kanskje kommet tydeligere frem om gruppe 2 har en bedre forståelse for algebraisk generalisering enn de andre gruppene i studien som ikke brukte sammenhengen mellom mønster og verdier for å lage formel.

6.0 Avslutning

6.1 Oppsummering

Formålet med denne studien har vært å belyse hvilke generaliseringsstrategier elever i ungdomsskolen tar i bruk i arbeid med figurmønster, og å komme noe dypere inn i tankegangen bak strategibruken til elevene. I studien er følgende problemstilling blitt belyst: *Hvilke generaliseringsstrategier tar ungdomsskoleelever i bruk i arbeid med en figurmønsteroppgave, og hvordan forklarer gruppene tankegangen bak valget av de ulike generaliseringsstrategiene?*

Det ble i denne studien tatt utgangspunkt i to datainnsamlingsmetoder for å belyse problemstillingen. Datainnsamlingsmetodene var gruppearbeid og gruppeintervju. I gruppearbeidet skulle fire elevgrupper fra 9.trinn, med tre elever per gruppe, samarbeide om å løse oppgaver til et gitt figurmønster. Gruppene sine løsningsstrategier skulle presenteres på en plakat. I etterkant av gruppearbeidet ble tre av de fire gruppene intervjuet, hvor målet var å komme enda mer i dybden av tankegangen bak generaliseringsstrategiene som gruppene benyttet seg av. Dette ble gjort for å kunne si noe om bakgrunnen for valg av generaliseringsstrategier i arbeid med generalisering av figurmønster. Plakatene ble analysert gjennom Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier, mens intervjuene ble analysert ved hjelp av analyseformen; tematisk analyse. Det innsamlede og analyserte datamaterialet, i samspill med tidligere forskning og teori, ga grunnlag for å kunne si noe om hvilke generaliseringsstrategier elever tar i bruk, samt noe om hvilken tankegang som førte til de ulike generaliseringsstrategiene.

Hovedrammeverket som er brukt for å analysere hvilke generaliseringsstrategier gruppene brukte på plakatene, er Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier. Men, generaliseringsstrategiene som det fra Lannin (2005) sitt rammeverk er identifisert at gruppene tar i bruk, er også blitt diskutert i lys av hva andre forskere som Becker og Rivera (2006), Radford (2003; 2010) og English og Warren (1998) sier om forskjellige måter å generalisere på.

Resultatene i denne studien forteller at gruppene tok i bruk mange forskjellige generaliseringsstrategier for å løse oppgavene til det gitte bordmønsteret. Resultatene viser at alle generaliseringsstrategiene fra Lannin (2005) sitt rammeverk ble tatt i bruk. Tre av fire grupper bruker *ikke-eksplisitte* strategier på de første og enkleste oppgavene, men etter hvert som oppgavene spør om figurer som ligger langt ut i figurrekka, kan det se ut som at gruppene ser behovet for mer effektive strategier. Gruppene går da over til *eksplisitte* generaliseringsstrategier. I resultatene kommer det også frem at det bare er en av fire gruppene som bruker kontekstuell generaliseringsstrategi for å finne den generelle formelen. De tre andre gruppene bruker *gjett-og-sjekk*. I følge Radford (2010) vil gjett-og-sjekk ikke kunne sees på som en algebraisk måte å generalisere på. Noe som igjen kan tyde på at selv om alle gruppene kom frem til rett generell formel, så trenger ikke dette å være en indikator på at elevene har god algebraisk forståelse. I resultatene som sier noe om tankegangen bak strategibruken til elevene, kommer det frem at alle gruppene var opptatt av å forenkle, visualisere og å finne formel for den gitte problemkonteksten. Men, resultatene viser at gruppene vektlegger dette på ulike måter. Et viktig trekk som kommer frem hos alle gruppene er at det å finne et system er viktig, for å kunne løse oppgavene.

6.2 Videre forskning

I denne studien har jeg belyst hvilke generaliseringsstrategier et lite utvalg elever på 9.trinn tok i bruk i arbeid med et lineært figurmønster. Sentrale funn i tankegangen bak strategibruken er også blitt belyst. Som lagt frem tidligere i studien, finnes det mye forskning som forteller noe om hvilke typer generaliseringsstrategier elever i skolen ofte tar i bruk i arbeid med generalisering av mønster. Derimot er det gjort mindre forskning som forteller noe om bakgrunnen for hva som påvirker elevene sine valg av generaliseringsstrategier (Lannin et al., 2006, s.3). I videre forskning på dette feltet, kan det derfor være interessant å gå enda mer i dybden på hva som påvirker ungdomsskoleelever og elever generelt sin strategibruk, i arbeid med generalisering av figurmønster. Nærmere bestemt kan det vært interessant og undersøke mer om tankegangen og bakgrunnen for valg av generaliseringsstrategier. Det kan være interessant å undersøke dette med et større utvalg elever, fra flere ungdomsskoler i Norge. Med et større utvalg kan en med større sikkerhet peke på årsaker til elevene sine valg av generaliseringsstrategier. Mer kunnskap om årsakene bak valget av generaliseringsstrategier, kan være med på å gi matematikklærere et bedre grunnlag for å lage oppgaver og å gi veiledning til elvene som støtter opp om det som er målet med denne type oppgaver, nemlig å utvikle elevene sin forståelse for algebraisk generalisering.

Videre forskning på dette feltet er både viktig og interessant for at matematikklærere skal kunne utvikle en god undervisningspraksis, som kan hjelpe elevene til å utvikle sin forståelse for algebraisk generalisering. Som beskrevet i innledningen peker blant annet Mason (1996) på at matematisk tenkning ikke vil finne sted, dersom matematikklærere ikke er bevisste på elevene sine generaliseringer (s.65). Det vil derfor være viktig med mer forskning og kunnskap som går i dybden på tankegangen bak strategibruken til elevene, slik at for eksempel matematikklærere kan opparbeide seg en enda større forståelse for hva som påvirker elevene sin strategibruk. Denne kunnskapen kan videre bli brukt til å designe gode undervisningsøkter, der læreren er bevisst på fordeler og ulemper ved de ulike generaliseringsstrategiene. Det kan være interessant å undersøke dette videre gjennom å ta i bruk flere forskjellige typer figurmønster, altså å undersøke dette i lys av både lineære og ikke-lineære figurmønster. I tillegg kan det i videre forskning være interessant å se på hvordan matematikklærere legger opp sin undervisning når de jobber med generalisering av mønster, samt å gå i dybden på og undersøke hva matematikklærere tenker at elevene skal oppnå og lære i arbeid med generalisering av figurmønster.

Litteraturliste

Becker, J. R. & Rivera, F. (2006). Sixth Graders´ Figural and Numerical Strategies for Generalizing Patterns in Algebra (1). *Algebraic Thinking. I S. Alatorre, J. L. Saiz & A. Mendez (Red.). Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 2, s. 95-101). Mexico: Universidad pedagógica nacional.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology,* 3(2), 77-101.

Bryman, A. (2021). *Social research methods* (6.utg.). Oxford University Press.

Creswell, J. W. (2014). *Research Design. Qualitative and Mixed Methodes Approaches* (4.utg). Thousand Oaks, CA: Sage.

Creswell J, W., & Poth, C. N. (2018). Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches (4th edition). Sage publications.

Dalen, M. (2004). *Intervju som forskningsmetode: En kvalitativ tilnærming* (1.utg.). Universitetsforlaget.

Driscoll, M. (1999). *Fostering* Algebraic *Thinking. A guide for Teachers, Grades 6-10.* Heinemann Portsmouth, NH.

English, L., D. & Warren, E., A (1998). Introducing the Variable through Pattern Exloration. *Mathematics Teacher*, 91(2), 166-170.

Kaarstein, H., Radisic, J., Lehre, A.C., Nilsen, T. & Bergem, O.K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport.* Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning?. *I Algebra in the early grades* (s. 5-17). Routledge.

Kieran, C. (2014). Algebra Teaching and Learning. I *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 27-32). Springer Netherlands.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_6

Kilpatrick, J. (2011). Commentary on Part I. I Cai, J. & Knuth, E. (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 125-130). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Kennedy., B. L. & Thornberg, R. (2018). Deduction, Induction, and Abduction. I Flick, U. (Red.). *The SAGE Handbook of Qualitative Data Collection* (s. 49-64). SAGE Publications Ltd.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through pattering activities. *Mathematical Thinking and learning,* 7(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies : factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3–28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Lee, L. (1996). An Initiation Into Algebraic Culture Through Generalization Activities. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Red.), *Approaches to Algebra:* Perspectives for Research and Teaching. (Vol. 18, s. 87-106). Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Red.), *Approaches to Algebra:* Perspectives for Research and Teaching. (Vol. 18, s. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

NESH. (2021). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. https://www.forskningsetikk.no/om-oss/komiteer-og-utvalg/nesh/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Postholm, M., B. (2020). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstuider* (2.utg.). Universitetsforlaget.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students´ Types of Generalization. I *Mathematical Thinking and Learning,* 5(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. I S. Alatorre, J. L. Saiz & A. Mendez (Red.), *Proceedings of the 28th conference* *of the international Group of the Psycology of Mathematics Education* (Vol. 1, s. 2-21). Mexico: Universidad pedagógica nacional.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4(2), 37-62.* DOI:10.30827/pna.v4i2.6169

Røsseland, M. (2007). *Matematisk samtale og undersøkelseslandskap i matematikk.* Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. [PowerPoint-lysbilder]. Hentet fra: https://www.fiboline.no/presentasjoner/20070417_3g.mate.samtale.pdf

SIKT. (2022). *Meldeskjema for personopplysninger i forskning. Hentet fra:* https://sikt.no/fylle-ut-meldeskjema-personopplysninger

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn (MAT01-05).* Kompetansemål og vurdering. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv14?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1-10. (MAT01-05).* Kjerneelementer. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2016, 29. november). *Hovedresultater fra TIMSS 2015.* https://www.udir.no/contentassets/7b41d7e958ad41cc8596f58dfd4838d1/timss_2015_hovedresultater.pdf

Vaismoradi, M. (2013). Content analysis and thematic analysis: Implications for conducting a qualitative descriptive study. *Nursing and Health Sciences, 15,* 398-405.

Vedlegg

Vedlegg 1 – Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

Kan arbeid med generalisering av mønster støtte den algebraiske resonneringen til elever?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på om arbeid mønsteroppgaver kan være med på å støtte den algebraiske resonneringen og forståelsen i algebra hos elever på ungdomsskolen. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med prosjektet er å utforske hvordan arbeid med mønsteroppgaver i tilknytning til algebra, kan være med på å støtte den algebraiske resonneringen hos elever på 9.trinn. Prosjektet blir utført i forbindelse med min masterskriving i matematikkdidaktikk, på lærerutdanningen ved NTNU. Datainnsamlingen vil foregå i løpet av 2-3 undervisningsøkter. 12 elever i klassen vil bli spurt om å delta, der elevene skal arbeide sammen i grupper om å løse en figurmønsteroppgave. Gruppene vil også bli spurt om å bli intervjuet i etterkant av gruppeoppgaven. Målet mitt med prosjektet er å komme i dybden på om elevene føler at arbeid med mønsteroppgaver er til hjelp og støtte for å forstå algebra bedre.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Institutt for lærerutdanningen ved NTNU er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Jeg ønsker å bruke elever på 9.trinn, ved [redacted] ungdomsskole som mitt utvalg, fordi det er denne skolen jeg har praksis på. Jeg ønsker også et utvalg fra ungdomsskolen, da det i hovedsak er ungdomsskole jeg ønsker å jobbe på ved fullført utdanning. 12 elever på 9.trinn, i klassen jeg har praksis vil bli spurt om å delta. Hvor gruppene også vil få spørsmål om å bli intervjuet videre. Foresatte til alle elever i praksisklassen vil få spørsmål om deres barn kan delta i prosjektet, hvor 12 elever vil bli trukket ut av de som samtykker til å delta.

Hva innebærer det for deg å delta?

Forskningen vil foregå over 2-3 undervisningsøkter i uke 2, 2023. Hvis du som foresatt samtykker til at ditt barn kan delta i forskningen, og at ditt barn selv samtykker til dette, så innebærer dette at barnet ditt skal jobbe med en gruppeoppgave. De 12 elevene som ønsker å delta, vil igjen bli delt inn i 4 grupper. Elevene som er på gruppe sammen skal samarbeide om å løse en mønsterkoppgave gitt av meg som forsker. Elevene får bruke de strategiene og metodene de selv ønsker, og skal presentere dette på en plakat. Plakaten vil bli samlet inn av meg i etterkant av økta de jobber med dette.

I etterkant av gruppearbeidet, vil gruppene bli spurt om intervjues videre. Grunnen til dette er at jeg som forsker skal komme dypere inn i tankegangen deres, og få innblikk i hva de tenker om å jobbe med mønsteroppgaver for å forstå algebra på en bedre måte. Jeg vil sette av 15-20 min per intervju. Intervjuene vil bli tatt opp på lydopptak. Lydopptakene vil i kort tid etter gjennomføring bli transkribert (skrevet ned), for deretter å bli slettet.

Dersom ditt barn ønsker å delta i forskningen, kan du som foresatt få se intervjuguiden på forhånd ved å ta kontakt med meg.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

I dette prosjektet er det kun meg som forsker, samt veileder av prosjektet, Ole Enge, som vil ha tilgang til innsamlede data. Som nevnt vil intervjuene bli transkribert etter gjennomføring, og lydopptakene slettet. Transkripsjonene vil bli anonymisert, slik at hverken navn eller kjønnet til elevene som samtykker til å bli intervjuet vil være synlig. Det vil heller ikke komme frem av transkripsjonene hvilken skole dataene er hentet fra, eller hvor i landet vi befinner oss. Denne informasjonen vil heller ikke komme frem i sluttrapporten.

Datamaterialet vil bli kryptert og lagret sikkert og forsvarlig på NTNU sine datasystemer. Dette er for å sikre at ingen andre enn meg som forsker og veileder av prosjektet skal få tilgang til datamaterialet.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes etter at masteroppgaven er blitt vurdert og godkjent. Masteroppgaven har leveringsfrist 25. mai 2023, og sensurfrist vil være senest i september 2023. Lydopptakene, samt transkripsjonene og plakatene med løsningene av mønsteroppgaven vil da slettes.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Institutt for lærerutdanningen ved NTNU har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
å få slettet personopplysninger om deg
å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

• • • •

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

Institutt for lærerutdanningen ved NTNU. Du kan ta kontakt med veileder for prosjektet, Ole Enge eller Mathilde Holm (student). Du kan ta kontakt med veileder på mail: ole.enge@ntnu.no. Eller du kan ta kontant med meg på mail: mathildeholm_99@hotmail.com, eller på telefon: [redacted]

Vårt personvernombud: Thomas Helgesen er personvernombud ved NTNU. Mail:

thomas.helgesen@ntnu.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00. Med vennlig hilsen

Mathilde Eidem Holm og Ole Enge (veileder) (Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Kan arbeid med generalisering av mønster støtte den algebraiske resonneringen til elever?*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn (navn):

□ å delta i *gruppearbeid om generalisering av mønster*

□ å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

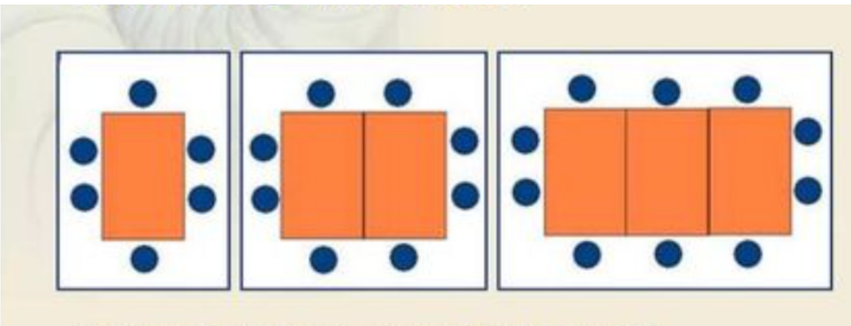
Vedlegg 2 – Intervjuguiden

Intervjuguide:

1. Hva tenker dere om å jobbe med oppgaver der dere skal generalisere mønster?
2. Hvordan tenkte dere for å finne antallet stoler i de neste figurene i mønsterrekka?
3. Hvordan tenkte dere for å komme frem til den generelle formelen?
4. Hva tenker dere om at mønsteret knyttet til en virkelig og praktisk situasjon?

OPPGAVE OM MØNSTER:

Klasse 10.1 skal møblere til foreldremøte. De trenger derfor å sette ut nok bord og stoler til alle foreldrene som kan komme. De foresatte skal sitte sammen på et langbord.



Diskuter oppgavene under. Beskriv og forklar tankegangen deres så detaljert som mulig! Ta notater underveis på hva dere tenker og hvordan dere går frem for å løse oppgavene. Oppgavene og tankegangen deres skal presenteres nøye på en plakat.

Oppgave a)
Dersom elevene setter sammen 4 bord, hvor mange foresatte blir det plass til da?

Oppgave b)
Finn antall foresatte det er plass til ved 5, 6 og 7 bord.

Oppgave c)
Hvor mange stoler er det i figur nummer 10?

Oppgave d)
Ser dere et mønster? Beskriv dette mønsteret så detaljert som mulig.

Oppgave e)
Hvor mange stoler trenger dere til 20 bord?

Oppgave f)
Finner dere en formel for å finne ut hvor mange stoler man trenger til n-antall bord?

Vedlegg 4- kategorisering av intervjuene

Tabell 4: Oversikt over de 21 kategoriene som ble funnet som sentrale gjennom analyse og koding av de tre intervjutranskripsjonene. Feltene markert med farge er felles for alle de tre intervjuene. Feltene med uthevet skrift er hovedkategoriene i min studie.

Kategorier som ble funnet gjennom analyse og kodning av intervjuene		
Intervju 1 (gruppe 1)	*Intervju 2 (gruppe 2)*	*Intervju 3 (gruppe 4)*
Visualisering	**Formel**	(Læring)
(Læring)	**Forenkling**	**Visualisering**
Regler	Gruppearbeid	**Forenkling**
Forenkling	Bokstaver	Prøve seg frem
System	**Visualisering**	**Formel**
Utfordrende	Løsning	**System**
Formel	**System**	
	(Læring)	