

Anne Katrine Tønset og Ingrid Nordlund

Lærerstudenters oppfatninger og kunnskaper i resonnering og bevis

En kvalitativ studie av matematikklærerstudenters spesialiserte kunnskap i resonnering og bevis

Masteroppgave i Matematikdidaktikk 5.-10. trinn

Veileder: Iveta Kohanová

Mai 2023



NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Anne Katrine Tønset og Ingrid Nordlund

Lærerstudenters oppfatninger og kunnskaper i resonnering og bevis

En kvalitativ studie av matematikklærerstudenters spesialiserte kunnskap i resonnering og bevis

Masteroppgave i Matematikdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Iveta Kohanová
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning



Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne masteroppgaven har vi undersøkt lærerstudenters utviklingsprosess av å tilegne seg kunnskap innen matematikkundervisning i resonnering og bevis. Hensikten med dette prosjektet er å få innsikt i hvordan lærerstudenter gjennom dagens lærerstudiet tilegner seg den kunnskapen som trengs for å møte krav, utfordringer og forventninger som eksisterer for dagens undervisningspraksis innen resonnering og bevis. Noe som er en sentral del av matematikkfaget. Forskningsspørsmålet i denne masteroppgaven er: *Hva karakteriserer endringene i matematikklærerstudenters spesialiserte kunnskap for å undervise i resonnering og bevis gjennom deltakelse i MaTeK-prosjektet?*

I metoden for denne masteroppgaven, har vi benyttet kvalitative metoder gjennom en casestudie. Gjennom casestudien har lærerstudentene deltatt i MaTeK-prosjektet, som er en del av det internasjonale prosjektet MaTeK. I denne masteroppgaven har vi analysert innsamlete data fra fire utvalgte lærerstudenter fra en fokusgruppe på 21 studenter. Gjennom MaTeK-prosjektet har lærerstudentene deltatt i et semistrukturert gruppeintervju i før- og etterkant av MaTeK-modul. MaTeK-modul innebar fire undervisningsøkter, en observasjon i et fysisk klasserom, i tillegg til innleveringer av arbeidskrav og en oppsummerende refleksjonstekst. Gjennom deltakelse i MaTeK-prosjektet har studentene gjennomgått temaene: ulike typer av resonnering, læreplanen LK20, sosiomatematiske normer, lærergrep i klasserommet, planlegging av undervisning og oppgaveformulering, alt med fokus på temaet resonnering og bevis. Det overordnede rammeverket for analyse av datamaterialet er en egenutviklet modell med kategoriene matematisk- og pedagogisk kunnskap, læreplankunnskap, oppfatninger og kontekst basert på to eksisterende modeller for matematikklærerens spesialiserte kunnskap i matematikk.

Med utgangspunktet i rammene for denne masteroppgaven, ser vi at lærerstudentene hovedsakelig gjennom utviklingsprosessen har tilegnet seg mest kunnskap innen pedagogisk kunnskap med fokus på resonnering og bevis. Studentene vektlegger og viser til et sterkt fokus og forståelse for lærergrep, oppgaveformulering, sosiomatematiske normer og undervisningsplanlegging for å fremme resonnering hos elevene. Studentene viser også resultater for å ha tilegnet seg ny kunnskap innen matematisk kunnskap. Der de ytrer at de har fått en ny forståelse for begrepene resonnering og bevis, og har blitt bevisst over de ulike typene for resonnering elevene kan bruke i undervisningen. Studentene ytrer likevel at de har vanskeligheter med å skille de ulike typene av resonnering, og at de i etterkant kunne ønsket seg mer fokus på dette i MaTeK-modul. Dette for å kunne implementere denne kunnskapen i praksis. Studentene har i etterkant av prosjektet utviklet en felles oppfatning om at resonnering og bevis spiller en viktig rolle i matematikkfaget, og at de videre ønsker å ta det i bruk som et sentralt verktøy i matematikkfaget.

Nøkkelord: Matematisk resonnering og bevis, matematikklærerens spesialiserte kunnskap.

Abstract

In this master's thesis, we have investigated pre-service teachers' development process of acquiring knowledge in reasoning and proof for teaching mathematics. The purpose of this project is to gain insight into how pre-service teachers through today's teacher education acquire the knowledge they need to meet the demands, challenges and expectations that exist for today's teaching practice within reasoning and proof. Something that is a central part of the mathematics subject. The research question in this master's thesis is: What characterizes the changes mathematics pre-service teachers' specialized knowledge for teaching reasoning and proof through participation in the MaTeK project?

In the method for this master's thesis, we have used qualitative methods through a case study. Through the case study, the pre-service teachers have participated in the MaTeK project, which is part of the international project MaTeK. In this master's thesis, we have analyzed collected data from four selected pre-service teachers from a focus group of 21 students. Through the MaTeK project, the pre-service teachers have participated in a semi-structured group interview before and after the MaTeK module. The MaTeK module involved fire education sessions, an observation in a physical classroom, in addition to submissions of work requirements and a summarizing reflection text. Through participation in the MaTeK project, the students have gone through the topics: different types of reasoning, the curriculum LK20, socio-mathematical norms, teacher tactics in the classroom, teaching planning and task formulation, all with a focus on the topic of reasoning and proof. The overall framework for analysis of the data material is a self-developed model with the category of mathematical and pedagogical knowledge, curriculum knowledge, beliefs and context based on existing models for mathematics teachers' specialist knowledge in mathematics.

As a starting point for this master's thesis, we see that mainly through this development process, the pre-service teachers acquired the most knowledge within pedagogical knowledge with a focus on reasoning and proof. The students emphasize and refer to a strong focus and understanding of teaching moves, task formulation, socio-mathematical norms and teaching planning in order to promote reasoning in the students. The students also show results for having acquired new knowledge within mathematical knowledge. Where they state that they have gained a new understanding of the concepts of reasoning and proof, and have become aware of the different types of reasoning that can be used. The students nevertheless state that they have difficulties in distinguishing the different types of reasoning, and that afterwards they would have liked more focus on this in teaching. This is to be able to implement this knowledge in practice. Following the project, the students have developed a shared belief that reasoning and proof play an important role in the mathematics subject, and that they further wish to use it as a central tool in the mathematics subject.

Keywords: Mathematical reasoning and proof, mathematics teacher's specialized knowledge.

Forord

Dette prosjektet er gjennomført gjennom skoleåret 2022/2023, og markerer avslutningen på vårt utdanningsløp. Fem år som lærerstudent ved NTNU i Trondheim har vært en svært lærerik og spennende periode. Vi har gjennom vår master i matematikdidaktikk fått bidratt med nye kunnskaper i resonnering og bevis, som vi ser på som et veldig viktig og relevant tema for dagens matematikklærere. Vi ønsker å gi en takk til alle som har gitt oss støtte og inspirasjon i arbeidet med denne masteroppgaven.

Vi vil gi en spesiell takk til vår veileder, Iveta Kohanová. Som fra start til slutt har bidratt med verdifulle kunnskaper og motiverende engasjement. Vi takker for tilliten du ga oss for å kunne bidra i ditt/ deres MateK- prosjekt, det har vært spennende å delta i en større og internasjonal studie. Vi har satt stor pris på dine grundige og konstruktive tilbakemeldinger, og alt det tidkrevende arbeidet du har gjort for å hjelpe oss på veien.

Vi vil også gi en takk til alle lærerstudentene som tok seg tid til å delta på prosjektet, og for alt det arbeidet dere har gjort. Uten dere hadde vi ikke hatt en masteroppgave, og vi takker for en svært morsom og lærerik periode, hvor vi har fått delt nyttige kunnskaper og erfaringer med hverandre.

Til sist vil vi gi en takk til alle medstudenter og masterpartner for drøftinger, samtaler og kritiske øyne som har bidratt til utvikling og innsikt i ulike aspekter ved denne masteroppgaven.

Trondheim, mai 2023

Anne Katrine Tønset og Ingrid Nordlund

Innholdsfortegnelse

Sammendrag	V
Abstract	VI
Forord	VII
Figurer	X
Tabeller	X
Forkortelser	X
Innledning	1
Teori	4
2.1 Avklaring av begreper	4
2.2 Teori rammeverk → Lærerstudenter	6
2.3 Resonnering i skolen	11
2.4 Bevis i undervisning	14
2.5 Tidligere relevant forskning for problemstilling	15
Metode	18
3.1 Bakgrunnen for studien	18
3.2 Konstruktivismen	18
3.3 Case studie	19
3.4 Rammene for masteroppgaven	19
3.5 Deltakerne i studien	22
3.6 Datainnsamling	22
3.7 Metode for analyse	26
3.8 Forskningsetikk	31
3.9 Troverdighet	32
Resultat	34
4.1 Resultater	34
4.2 Hovedfunnene i MaTek-modul	34
4.3 Karakteristisk utvikling innenfor matematisk kunnskap	35
4.4 Karakteristisk utvikling innenfor pedagogisk kunnskap	39
4.5 Karakteristisk utvikling innenfor læreplan kunnskap	43
4.6 Karakteristisk utvikling innenfor koblingene mellom kunnskapene	46
Diskusjon	49
5.2 Lærerstudentenes karakteristiske utvikling i MaTeK-modul	49
5.2 Påvirkningsfaktorer i MaTeK-prosjektet	52
5.3 Videre forskning	56

Konklusjon	58
Referanseliste	60
Vedlegg.....	65

Figurer

Figur 1: Matematikklærerens spesialiserte kunnskap (MTSK)	7
Figur 2: Syntesemodellen	9
Figur 3: To hovedprosesser i matematisk resonnering	12
Figur 4: Sju typer av matematisk resonnering	13
Figur 5: MaTeK-modul	20
Figur 6: Modell for analytisk rammeverk	27

Tabeller

Tabell 1: Nivåer for resonnering og bevis	6
Tabell 2: Læreres oppfatninger av matematisk resonnering	13
Tabell 3: Studieløpet for grunnskolelærerutdanningen 5.-10.trinn	28
Tabell 4: Oversikt over forkortelser knyttet til analysen	30

Forkortelser

R&B	Resonnering og bevis
LK20	Den norske læreplanen for 2020
NCTM	National council of Teachers of Mathematics
MTSK	Matematikklærerens spesialiserte kunnskap
MK	Matematisk kunnskap
PCK	Pedagogisk innholdskunnskap
MKT	Matematisk kunnskap for undervisning
KoT	Kunnskaper om emner
KSM	Kunnskap om strukturen i matematikk
KPM	Kunnskapen om matematisk praksis
KFLM	Kunnskaper om funksjoner ved å lære matematikk
KMT	Kunnskapen om matematikkundervisning
KMLS	Kunnskapen om standarder i matematikkundervisningen
SMK	Emne kunnskap
KCS	Kunnskapen om innhold og studenter
KCT	Kunnskapen om innhold og undervisning
KCC	Kunnskapen om innhold og læreplan
MaTeK	Enhancement of Research Excellence in Mathematics Teacher Knowledge
O	Oppfatning
PK	Pedagogisk kunnskap
MK	Matematisk kunnskap
LK	Læreplankunnskap
K	kontekst
MK-PK	Matematisk kunnskap og pedagogisk kunnskap
PK-LK	Pedagogisk kunnskap og læreplankunnskap
MK-LK	Matematisk kunnskap og læreplankunnskap
O-MK	Oppfatninger og matematisk kunnskap
O-PK	Oppfatninger og pedagogiske kunnskap
O-LK	Oppfatninger og læreplankunnskap

I Intervju
E Exit-lapper
R Refleksjonstekst

Innledning

I denne masteroppgaven har vi undersøkt hvordan lærerstudenter utviklet sine kunnskaper og oppfatninger i å undervise i temaet resonnering og bevis (R&B). Denne kunnskapen kaller vi matematikklærerens spesialiserte kunnskap, som i denne masteroppgaven innebærer pedagogisk kunnskap, læreplankunnskap og spesialisert matematisk kunnskap som trengs for å effektivt kunne undervise i R&B. I dag blir det lagt et stort fokus på R&B i matematikkundervisningen. En sentral faktor for dette, er det økende fokuset den nye læreplanen (LK20) i matematikk har på temaet. R&B blir i LK20 både vektlagt i kjerneelementene, fagets relevans og undervisvurdering i den generelle delen av læreplanen for matematikk. Samtidig blir R&B vektlagt i en stor andel av kompetansemålene (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.3). Den nasjonale læreplanen setter rammer og forventninger for matematikkdiraktikken, som lærere og lærerstudenter må forberede seg på å kunne møte og håndtere (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dermed blir R&B et sentralt element som lærere og lærerstudenter trenger omfattende kunnskap om. Denne kunnskapen trengs for at lærere og fremtidige lærere skal kunne undervise i matematikkfaget på en måte som gjør at målene som er satt på et nasjonalt plan, møtes. R&B skal gi elevene muligheten til å forstå matematiske prosesser, og det er på bakgrunn av dette at implementeringen av de er viktig i ulike typer undervisningstemaer og undervisningssituasjoner (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Vi kan si at R&B skal være døråpneren for å skape matematisk forståelse hos elevene. Kommende læreres kompetanse innen å undervise i R&B vil derfor være sentral for å sette den nye standarden som trengs innen undervisning av temaet, som kan fremme denne forståelsen hos elevene. R&B er på verdensbasis sett på som viktige komponenter for å drive matematikkundervisning. For eksempel ser *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* på R&B som to av ti standarder for matematikkundervisning, som påpeker viktigheten av å inkludere temaene inn i undervisning for dagens lærere (Bell, 2011). Dette synet deles av flere. Ifølge Skott og Valenta (2022), er resonnering sentralt for elevenes utvikling av matematisk forståelse uansett trinn. R&B blir ikke i undervisningssammenheng sett på som et eget tema som for eksempel geometri (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, s.56). Derimot er målet med R&B at elevene skal utvikle egenskaper som skal hjelpe de å forstå ulike situasjoner knyttet til ulike matematiske temaer i alle alderstrinn (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Med egenskaper mener vi for eksempel å forklare tankeganger, beskrive observasjoner og vise til hvorfor prosesser stemmer.

Til tross for viktigheten R&B har for matematisk forståelse, og for å oppnå relevante mål i dagens læreplan i matematikk, viser forskning at flere elever på alle skoletrinn møter vanskeligheter med å resonnerere og bevise. Videre viser forskningen at disse vanskelighetene kan relateres til at mye av klasseromsundervisningen legger lite vekt på R&B (A.J. Stylianides, 2011). Lite vektlegging på R&B, spesielt på lavere trinn, kan være en følge av at mange lærere ser på bevis som en formell og vanskelig måte å argumentere på i matematikk (G. J. Stylianides et al., 2013), dermed blir bevisføring som aktivitet ofte ikke implementert i faget før på videregående (A. J. Stylianides, 2007). Her kan mange elever få en brå overgang til videregående, når mer kompliserte bevis plutselig blir implementert i undervisningen. Dermed tar bevis som aktivitet mindre plass i matematikkfaget enn ønsket, spesielt på lavere klassetrinn, og hvor det generelt på alle klassetrinn fokuseres på R&B i bare få, bestemte tema slik som geometri. I stedet

burde bevisføring blitt lært bort som en generell evne til å skape mening i matematikken (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Ifølge G.J. Stylianides et. al. (2013) og store internasjonale studier som TIMSS Video Studies (*TIMSS - Video Studies*, u.å.), kan mangler på inkludering av R&B i matematikkundervisningen, også skyldes at lærere har begrenset kunnskap om R&B som fagstoff. Denne mangelfulle kunnskapen kan som vist til over, gi lærere et typisk syn om at bevis blir for vanskelig, og at det ligger utenfor elevenes evner. I forhold til R&B sin betydning i matematikkundervisning, som det har blitt forsket mye på, har det blitt mindre forsket på hvilke kunnskaper og egenskaper læreren må ha for å lede undervisningssituasjoner med fokus på R&B i klasserommet. A.J. Stylianides (2007) sier at dette kan skyldes den uklare betydningen av hva et bevis er (s.289). Ifølge Stylianides og Ball (2008) trenger lærere kunnskap om de logisk- lingvistiske aspektene ved bevis. Denne kunnskapen kan da deles inn i kunnskap om situasjoner for bevis som igjen innebærer kunnskap om ulike type bevisoppgaver, og kunnskap om sammenhengen mellom bevisoppgaver og bevisaktivitet. Videre refererer Stylianides og Ball (2008) til at hovedtyngden av eksisterende forskning viser til at lærere på alle nivå, har tendens til svak kunnskap om den logisk- lingvistiske strukturen til bevis.

Ifølge Petrou og Goulding (2011) blir elevenes prestasjoner og forståelse i matematikk påvirket av hvilke matematiske kunnskaper og synspunkter læreren sitter med. Mangelen på disse nødvendige kunnskapene om bevis gjenspeiles i klasserommet, for eksempel gjennom misoppfatninger elevene har om bevis. Med bakgrunn i dette ser vi at lærerens potensielle mangler på kunnskaper om R&B videre kan skape utfordringer hos elevene i utviklingen av ferdighetene som behøves i matematiske situasjoner.

Tidligere forskning som viser til mangelfull kunnskap om R&B hos matematikklærere og lærerstudenter, kommer hovedsakelig fra andre land enn Norge. Det har også i tidligere forskning vært lite fokus på lærerstudenters syn på viktigheten av R&B, og hvilke kunnskaper de tilegner seg på lærerstudiet, spesifikt i Norge. Ifølge A.J. Stylianides (2011), har lærere behov for støtte til å kunne utvikle sine undervisningskunnskaper for temaet bevis. En måte en kan gi denne støtten på, er blant annet å fokusere på lærerstudentenes utvikling av den nødvendige kunnskapen som trengs. Det er også sentralt å se på lærerstudenters oppfatninger av undervisning i bevis og veilede kommende lærere fram til oppfatninger rundt dette som støtter en ønsket måte å undervise i matematikk på, som vi har vist til tidligere (A.J. Stylianides, 2011). Dermed ønsker vi i vår oppgave å fokusere på lærerstudenter, for å få et dypere og nødvendig innblikk i hvilke kunnskaper og oppfatninger lærerstudenter tilegner seg gjennom den norske lærerutdanningen. Her ønsker vi å undersøke om kunnskapen og oppfatningene lærerstudenter utvikler gjennom dagens lærerstudiet, møter de kravene, behovene og utfordringene som nå har blitt presentert for undervisning i R&B.

Denne masteroppgaven er også en del av det internasjonale prosjektet MaTeK <https://www.projectmatek.eu/>¹, som ser på hvordan leksjon design kapasitet (*lesson design capacity*) hos lærerstudenter i fem europeiske land kan være med å forbedre undervisningspraksisen i R&B. Dette er knyttet til å forstå hvordan lærere bruker sin kompetanse i undervisningen for å utvikle elevers kompetanse i R&B. På bakgrunn av dette er det verdifullt å se på kompetansen lærerstudenter utvikler i sin utdanning.

¹ MaTeK-prosjektet sin nettside. Her beskrives det internasjonale prosjektet og dens retningslinjer.

Dagens lærerstudenter er med på å sette standard for undervisningspraksisen for kommende profesjonelle lærere. Derfor mener vi det er viktig å lære mer om, og undersøke nåværende lærerstudenters oppfatninger og kunnskaper innen resonnering, bevis og undervisning. Dette vil vi undersøke ved å se på de norske studentene, og spesifikk undervisning innenfor gitte temaer, som er med på å utvikle dem gjennom lærerstudiet. På bakgrunn av dette er forskningsspørsmålet for denne oppgaven: *Hva karakteriserer endringene i matematikklærerstudenters spesialiserte kunnskap for å undervise i resonnering og bevis gjennom deltakelse i MaTeK-prosjektet?*

Teori

2.1 Avklaring av begreper

2.1.1. Resonnering i matematikk

Resonnering kan i en bred forståelse forstås som rettferdiggjøringen av matematiske påstander (Kollosche, 2021). Matematisk resonnering knyttes i den norske læreplanen til det å kunne bruke, følge og vurdere gitte matematiske objekter, og kunne formidle disse objektene og handlingene gjennom kommunikasjon (Kunnskapsdepartementet, 2019; Skott & Valenta, 2022). Disse faktorene er med på å drive matematikkundervisningen fremover, og er ikke bare tilfeldige regler eller handlingsmønstre som elevene følger etter (Stacey & Vincent, 2008).

I denne masteroppgaven blir resonnering forstått og beskrevet etter definisjonen av matematisk resonnering gitt av Jeannotte og Kieran (2017). Matematisk resonnering blir her beskrevet som en "prosess for kommunikasjon med andre eller seg selv, som gjør det mulig å utlede matematiske ytringer fra andre matematiske ytringer" (Jeanette & Kieran, 2017). Matematisk resonnering blir i blant annet læreplanverket beskrevet vagt (Jeannotte & Kieran, 2017), og den universelle antagelsen om av hva matematisk resonnering er, skaper også utfordringer i implementeringen av det i matematikkundervisningen (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Jeannotte og Kieran (2017) beskriver matematisk resonnering gjennom forståelsen av diskursiv aktivitet, som er sentralt i matematikkundervisningen (Kollosche, 2021). Diskursiv aktivitet bygger på forståelsen til Sfard (2008) sin beskrivelser av kognisjon og perspektiver på læring (Skott & Valenta, 2022). Kognisjon blir beskrevet av Sfard (2008) som individuell tenkning og kommunikasjon i undervisningen av matematikk, altså det som defineres som diskursiv aktivitet (Jeannotte & Kieran, 2017). Ved å vektlegge diskursiv aktivitet, altså prosessen ved kommunikasjon med seg selv og andre, skal matematisk resonnering gi elevene en dypere forståelse for begrepene og sammenhengene i matematikken (Kilpatrick et al., 2011; A. J. Stylianides & Ball, 2008). Likevel finnes det flere beskrivelser av matematisk resonnering, men disse tar ikke for seg alle aspektene i matematisk resonnering, slik som Jeannotte og Kieran (2017) gjør.

Matematisk resonnering blir i den norske læreplanen for matematikk beskrevet under kjerneelementene for matematikkundervisning (Kunnskapsdepartementet, 2019). Beskrivelsene av matematisk resonnering blir her knyttet opp mot hvordan elevene tar i bruk, forstår og begrunner deres resonnementer knyttet til matematikkens regler og fremgangsmåter (Kunnskapsdepartementet, 2019). Mens Jeannotte og Kieran (2017) beskriver matematisk resonnering ved to hovedaspekter: det strukturelle aspekt og det prosessorienterte aspekt. Det strukturelle aspektet ved resonnering består av deduktiv, induktiv og abduktiv resonnering. Det prosessorienterte aspektet ved resonnering er knyttet til de kognitive aspektene i kommunikasjon (Jeannotte & Kieran, 2017). Disse aspektene blir beskrevet mer detaljert i kap. 2.3.

2.1.2. Bevis i matematikk

Bevis kan være en utfordring å definere som konsept og aktivitet, noe som vi også har nevnt at er et problem i skolen (A. J. Stylianides, 2007). I denne oppgaven beskrives

bevis ut fra definisjonen til A. J. Stylianides (2007). Bevis defineres derfor her som en matematisk aktivitet i klasserommet. Ifølge Stylianides er et bevis et matematisk argument gitt ved tre kjennetegn.

1. Det brukes utsagn som er akseptert av elevene og lærer i klasserommet, som er sanne og tilgjengelige uten ytterligere begrunnelse.
2. De bruker former for resonnement som er gyldige og kjente for, eller innenfor den konseptuelle rekkevidden av klasseromsmiljøet.
3. Det kommuniseres med uttryksformer som er passende og kjente for, eller innenfor den konseptuelle rekkevidden av klasseromsmiljøet.

(A. J. Stylianides, 2007)

Her er lærerens rolle å koble elevene til en bredere matematisk kunnskap. A. J. Stylianides (2007) påpeker at det utenom disse tre kjennetegnene finnes flere metoder for å komme frem til en valid konklusjon, som kan være nyttige for elever å bruke, men som ikke møter standarden for det som her blir definert som et bevis. Klasseromsmiljøet innebærer i denne definisjonen hovedsakelig elevene, hvor læreren har en egen plass i klasserommet som representant for disiplinert matematikk (A. J. Stylianides, 2007).

Eksempler på hva et gyldig matematisk bevis kan være i et klasserom, kan vi koble til G. J. Stylianides (2008) sine nivå for matematisk argumentasjon (Se tabell 1). G.J. Stylianides (2008) ser på R&B gitt av tre komponenter: matematisk, psykologisk og pedagogisk. Den matematiske komponenten inkluderer det som blir sett på som aktivitetene som danner R&B, som for eksempel kan være å identifisere mønstre. Den psykologiske komponenten ser på elevens oppfatninger knyttet til den matematiske naturen til et matematisk objekt, som for eksempel hvordan eleven løser en oppgave. Den pedagogiske komponenten ser på de andre komponentene sammen, som for eksempel vil være naturen til et matematisk objekt sammenlignet med elevens oppfatning av denne naturen (G. J. Stylianides, 2008). Ved å følge tabell 1 kan et eksempel på et bevis være et generisk eksempel. I et generisk eksempel tar man i bruk et eksempel for å vise til noe generelt. Skal du for eksempel bevise at alle tall som er delelig med 10 også er delelig med 5, kan du ta i bruk et spesifikt eksempel som for eksempel at 40 er delelig med både 10 og 5, hvor du viser til en illustrasjon eller utregning som får fram det generelle med eksempelet. Et matematisk bevis kan også være bygd opp av en generell logisk slutning. Har for eksempel eleven funnet et moteksempel som viser at en matematisk påstand ikke stemmer i alle tilfeller, regnes dette som et bevis.

	Resonnering og bevis			
Matematisk komponent	Lage matematiske generaliseringer		Gi støtte til matematiske påstander	
	Identifisere et mønster	Gjøre en antakelse	Gi et bevis	Gi et ikke- bevis argument
	<ul style="list-style-type: none"> • Plausibelt mønster • Bestemt mønster 	<ul style="list-style-type: none"> • Antakelse 	<ul style="list-style-type: none"> • Generisk eksempel • Demonstrasjon 	<ul style="list-style-type: none"> • Empirisk argument • Begrunnel se
Psykologisk komponent	Hva er problemløserens oppfatning av den matematiske naturen til et mønster/ antakelse/ bevis/ ikke- bevis argument?			
Pedagogisk komponent	<p>Hvordan er den matematiske naturen til et mønster/ formodning/ bevis/ ikke- bevis argument sammenlignet med problemløserens oppfatning av denne naturen?</p> <p>Hvordan kan den matematiske naturen av et mønster/ antakelse/ bevis/ ikke- bevis argument bli klart for problemløseren?</p>			

Tabell 1: Skisse av G.J. Stylianides (2008) nivåer for resonnering og bevis. Skissen inneholder beskrivelser av ulike tre komponenter: matematisk, psykologisk og pedagogisk. Disse komponentene danner naturen for resonneringen og bevisføringen hos elevene i klasserommet.

2.1.3 Lærerstudenters matematiske kunnskap

I denne masteroppgaven fokuseres det på kunnskapen lærerstudenter har i matematikk, mer spesifikt i temaet R&B. Vi har tatt i bruk to typer modeller som beskriver lærerens kunnskaper i matematikk, Contreras-González et al.(2013) sin modell for matematikklæreres spesialiserte kunnskap (*mathematics teachers specialised knowledge*) (MTSK) (Se figur 1), samt Petrou og Goulding (2011) sin foreslåtte syntese av modell for læreres matematiske kunnskap (Se figur 2). Hovedelementene som inngår i begrepet matematikklæreres spesialiserte kunnskap i denne oppgaven, er matematisk kunnskap, pedagogisk kunnskap, læreplankunnskap og oppfatning om undervisning i matematikk.

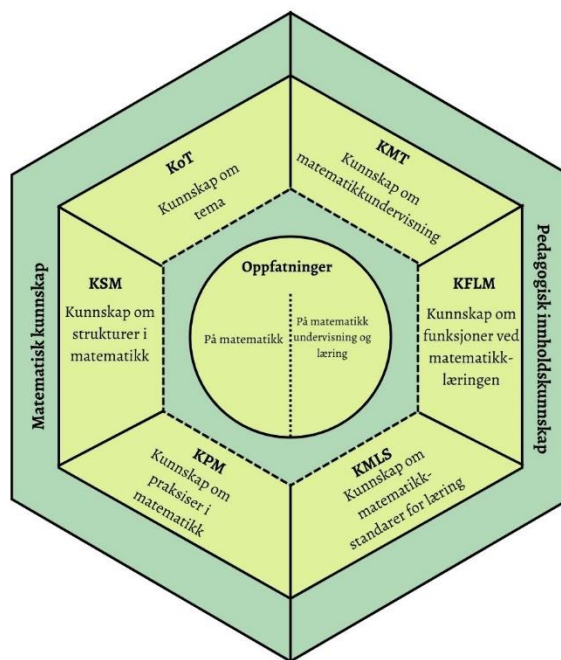
2.2 Teori rammeverk → Lærerstudenter

2.2.1 Matematikklæreres spesialiserte kunnskap (MTSK)

I det teoretiske rammeverket for denne masteroppgaven har vi utviklet en modell (Figur 6) som er videreutviklet fra to tidligere rammeverk (Figur 1 og 2), som beskriver læreres kunnskaper i matematikkundervisning. Den første modellen vi har tatt utgangspunkt i for å kunne undersøke våre deltakers kunnskaper og oppfatninger innen R&B, er Contreras-González et al. (2013) sin modell for MTSK², *mathematics teachers specialised*

² I denne masteroppgaven blir det bruk forkortelser i henhold til to modeller av matematikklæreres spesialiserte kunnskap. Disse forkortelsene er basert på engelske uttrykk ut fra rammeverket de er hentet fra. Bakgrunnen for at disse ikke er oversatt til norske forkortelser, er koblingene til annen forskning. Da de engelske forkortelsene er mer kjente forkortelser av begrepene det er snakk om, og vil derfor skaper derfor mindre misoppfatninger for leseren.

knowledge (Figur 1). Denne modellen er spesielt laget for å analysere og definere kunnskaper hos matematikklærere ved å se på hvilke ulike måter læreren kan se og bruke matematikken, og refleksjoner rundt den matematikken som læreren etablerer i sin daglige praksis. Modellen skiller først og fremst mellom matematisk kunnskap (MK) og pedagogisk innholdskunnskap (PCK).



Figur 1: Skisse av Contreras-González et al. (2013) sin forståelse av matematikklærers spesialiserte kunnskap i undervisningen i matematikk. Modellen vektlegger matematisk kunnskap og pedagogisk innholdskunnskap opp mot oppfatninger på matematikk, undervisning og læring. Denne modellen er spesielt laget for å analysere og definere kunnskaper hos matematikklærere ved å se på hvilke ulike måter læreren kan se og bruke matematikken, og refleksjoner rundt den matematikken som læreren etablerer i sin daglige praksis.

Modellen (Figur 1) til Contreras-González et al.(2013) er videreutviklet og basert på Ball et al.(2008) sin modell for MKT, Mathematical Knowledge for Teaching, som deler lærerens matematiske kunnskaper inn i undervisningskunnskap i matematikk og pedagogisk innholdskunnskap. Forskjellen fra MKT til MTSK er hovedsakelig at i stedet for å skille mellom generell matematisk innholdskunnskap og spesiell matematisk innholdskunnskap som bare gjelder for lærere, blir alt av matematisk kunnskap hos lærere i modellen for MTSK sett på som spesialisert kunnskap for lærere. Underkategoriene hos Contreras-González et al. (2013) sin modell er mer direkte spesialisert mot undervisning i matematikk, og blir dermed enklere å skille fra generell pedagogisk kunnskap og andre spesialiserte kunnskaper som for eksempel gjelder for profesjonelle matematikere. Modellen for MTSK (Figur 1) drar også inn refleksjon av læreres egne oppfatninger om undervisning og læring i matematikk, som midtpunktet av modellen. Dette viser at lærerens egne oppfatninger påvirker og henger sammen med matematisk kunnskap og pedagogisk innholdskunnskap (Contreras-González et al., 2013).

I modellen (Figur 1) til Contreras-González et al. (2013) deles matematisk kunnskap inn i tre underkategorier. Alle disse tre kategoriene gjelder eksklusivt for lærere. Disse tre kategoriene kalles for kunnskap om emner (KoT), kunnskap om strukturen av

matematikk (KSM) og kunnskap om matematisk praksis (KPM) (Contreras-González et al., 2013).

Kunnskap om emner (KoT) omhandler viktig kunnskap for eleven, som da også læreren burde ha. Dette innebærer kunnskaper om matematiske konsepter og prosedyrer og deres tilsvarende teoretiske grunnlag. I tillegg skal lærerens kunnskap gå utover elevenes, hvor læreren ser matematikken fra et høyere nivå (Contreras-González et al., 2013). For eksempel har læreren kunnskap om kommutativitet, som er en teknisk forklaring på at rekkefølgen i adderingen av flere tall ikke spiller noen rolle.

Neste underkategori er kunnskap om strukturen av matematikk (KSM). Kategorien innebærer kunnskaper om hovedideer og strukturer i matematikk. Dette inkluderer å ha kunnskap om størrelser og egenskaper relatert til spesifikke objekter, eller forbindelser mellom nåværende emner og tidligere eller kommende objekter (Contreras-González et al., 2013). Altså handler denne typen kunnskap om å se det matematiske innholdet i perspektiv, for eksempel å kunne se enkel matematikk fra et avansert perspektiv.

Siste underkategori for matematisk kunnskap i denne modellen (Figur 1) er kunnskap om matematisk praksis (KPM). Denne kategorien handler om å ha en fremgang i matematikk. Dette inkluderer måter å vite, skape, eller produsere i matematikk. Det handler om å kunne definere eller bruke definisjoner, og etablere relasjoner mellom konsepter og størrelser, ta i bruk representasjoner, argumentere og generalisere (Contreras-González et al., 2013).

Pedagogisk innholdskunnskap er den andre hoveddelen av modellen (Figur 1). Denne delen er inkludert i modellen fordi læreren trenger å vite hvordan elevene tenker når de gjør matematiske aktiviteter og oppgaver, og hvilke potensielle problemer elevene kan møte på basert på temaet de skal lære om. Pedagogisk innholdskunnskap deles inn i kunnskap om funksjoner ved å lære matematikk (KFLM), kunnskap om matematikkundervisning (KMT) og kunnskap om standarder i matematikkundervisning (KMLS) (Contreras-González et al., 2013).

Kunnskap om funksjoner ved å lære matematikk (KFLM) handler om lærerens kjennskap til teori om modeller av hvordan elever lærer matematikk. Læreren burde vite disse teoriens betydning, altså hva disse modellene bidrar med for å beskrive prosessen for å lære matematikk. Altså handler KMLS om hvordan man lærer matematikk. Her trenger læreren å ha en bakgrunn i matematikk for å forstå denne kunnskapen og bruke den, men kunnskapen i denne kategorien defineres ikke som matematisk kunnskap (Contreras-González et al., 2013).

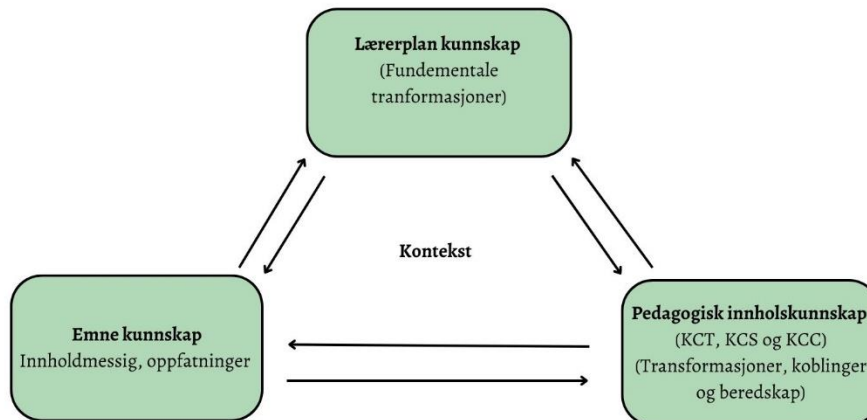
Kunnskap om matematikkundervisning (KMT), er den typen kunnskap en matematikklærer trenger for å velge ut spesifikke representasjoner og materiell for å lære bort et konsept eller en matematisk prosedyre. Dette kan for eksempel være å bruke relevante eksempler i klasserommet, eller velge ut og ta i bruk riktig lærebok. Altså handler denne kategorien om kunnskap om ressurser ut fra hvilket matematisk innhold de har, eller kunnskap om å ta i bruk strukturerte eksempler for å hjelpe elever med å forstå betydningen av et matematisk begrep (Contreras-González et al., 2013).

Standarder i matematikkundervisning (KMLS) handler om å ha grundige og spesifikke kunnskaper om læreplanen, kunnskap til materiale til bruk for støtte og former for evaluering og progresjon fra et år til det neste. Denne kunnskapen tilsvarer Balls KCC kategori i sin MKT modell (Ball et al., 2008). I tillegg innebærer denne kategorien for

modellen MTSK, kunnskap om mål av prestasjon som er utviklet av eksterne organ, for eksempel utviklet av fagforeninger eller forskere. Dermed legges det også til et element for vurdering som er hentet fra aktuelle utdanningsbyråd.

2.2.2 Syntese av Petrou og Goulding

Modellen MTSK (Figur 1) gir en detaljert beskrivelse av pedagogisk innholdskunnskap og matematisk kunnskap, samt å koble disse kunnskapene opp mot oppfatninger innen matematikkundervisning. I tillegg til å ta med disse elementene fra MTSK-modellen, har vi også tatt utgangspunkt i noen elementer fra syntesen presentert av Petrou og Goulding (2011). Denne syntesemodellen (Figur 2) er utviklet fra en vurdering av ulemper og fordeler med flere allerede eksisterende analytiske modeller for lærerens kunnskap i matematikkundervisning. Syntesen bygger på utdypningene tidligere modeller har gjort for kategoriene emnekunnskap (SMK) og pedagogisk innholdskunnskap (PCK). I likhet med kategoriene matematisk kunnskap og pedagogisk kunnskap i MTSK-modellen, skiller disse to kategoriene samtidig som at samspillet mellom dem også vises. Her skiller syntesemodellen (Figur 2) til Petrou og Goulding seg fra rammeverket MTSK (Figur 1) ved at den har en tredje hovedkategori om læreplankunnskap. Rammeverket implementerer også kontekst som en viktig faktor, som er med på å påvirke de tre kunnskapskategoriene. Elementene læreplankunnskap og kontekst som vi nå har påpekt ved Petrou og Gouldings modell (Figur 2), er elementer som vi også har fokus på i denne masteroppgaven. Disse elementene er sentrale for å kunne analysere og vurdere datainnsamlingen.



Figur 2: Skisse av Petrou og Goulding (2011) sin forståelse av lærerens matematiske kunnskap. Hovedelementene i denne syntesemodellen er fagkunnskap i matematikk (emnekunnskap), pedagogisk innholdskunnskap, læreplankunnskap og kontekst. Syntesemodellen bygger på at disse tre kategoriene for kunnskap, må forstås ut fra den konteksten som lærere arbeider i.

Syntesemodellen (Figur 2) bygger på at lærerkunnskapen må forstås ut fra den konteksten som lærere arbeider i. Konteksten i modellen bygger på Fennema og Frankes (1992) syn på at kunnskapen som trengs i undervisningen, er dynamisk og interaktiv. Deres modell fokuserer derfor på at kunnskap utvikles i en bestemt kontekst, og i interaksjon med elever i klasserommet og fagstoffet (Fennema & Franke, 1992; Petrou & Goulding, 2011). Petrou og Goulding (2011) inkluderer også i denne konteksten utdanningssystemet, læreplan og annet materiell som for eksempel lærebøker, målet for

matematikkundervisningen og vurderingssystemet. Konteksten er også lokal. Dette vil si at kontekst også inkluderer hvilke ressurser, både menneskelige og materielle, som lærerne har tilgjengelig på hver enkelt skole.

Det er tre kategorier som deles inn i denne modellen (Figur 2). Kategoriene SMK og PCK bygger på Ball et al. (2008) sin modell for mathematical knowledge for teaching (MKT). Balls modell mener at Shulmans kategori SMK (1986) kan deles inn i felles innholdskunnskap, spesialisert innholdskunnskap og horisontkunnskap. Felles innholdskunnskap er matematisk kunnskap som handler om å ha en evne til å beregne og løse matematiske problemer riktig. Dette gjelder i enhver setting og er ikke spesifikt for undervisning i matematikk (Petrou og Goulding, 2011). Spesialisert innholdskunnskap brukes i et klasseromsmiljø, og er kunnskap som lærere trenger for å kunne undervise effektivt. Denne kunnskapen som gjelder spesielt for lærere, er en sentral ide for Balls modell. (Ball et al., 2008; Petrou og Goulding). Den siste kategorien horisontkunnskap omhandler lærerens bevissthet om hvordan tidligere matematiske emner fra tidligere skoleår henger sammen med de påfølgende årenes læreplanemner (Petrou og Goulding, 2011).

PCK kategorien deles inn i kunnskap om innhold og studenter (KCS), kunnskap om innhold og undervisning (KCT) og kunnskap om innhold og læreplan (KCC). Kunnskap om innhold og studenter handler om at læreren klarer å forutse elevenes vanskeligheter, kan respondere og lytte til elevene og velge gode eksempler og representasjoner i undervisningen. Lærer må her være bevisst på elevenes forestillinger og misoppfatninger om matematikkemner underveis i både planlegging og undervisning. Her kobles kunnskap om elevene med kunnskap om matematikk. Undervisning om innhold og undervisning omhandler at læreren avgjør aktiviteter og rekkefølgen på dem, lærerens vurdering av ulemper og fordeler med ulike representasjoner og hvordan læreren styrer klasseromsdiskusjoner. Her kobles kunnskap i matematikk med kunnskap om undervisning (Ball et al., 2008; Petrou & Goulding, 2011).

Den tredje kategorien hos Petrou og Goulding (2011) er læreplankunnskap. Denne kategorien baserer seg på Shulmans (1986) definisjon av læreplankunnskap (*curriculum knowledge*). Denne definisjonen sier at læreplankunnskap er kunnskap om undervisningsmateriale som man har tilgjengelig, for eksempel læreplanen og læreplanbøker. Dette kalles lateral læreplankunnskap. Læreplankunnskap omhandler også kunnskap om de ulike temaene, og hvordan disse temaene har blitt og skal bli tatt opp i de tidligere og påfølgende årene på skolene. Dette kalles for vertikal læreplankunnskap (Shulman, 1986). Petrou og Goulding (2011) mener denne kunnskapen er sentral for å forstå hva lærere trenger å vite for å undervise effektivt i matematikk. Modellen viser at læreplankunnskap har sammenheng med SMK og PCK, som vil si at lærerens emnekunnskap og pedagogiske innholdskunnskap påvirker hvordan lærere bruker, forstår og tolker matematikkpensum og læreplanmaterialer som lærebøker (Shulman, 1986). Dette vil si at forskjellige lærere på bakgrunn av deres kunnskaper i matematikkfaget og pedagogisk innholdskunnskap, vil tolke og bruke lærebøker forskjellig i undervisningen. For eksempel kan læreren se på læreboka som alt fra en autoritet til en viktig ressurs til å ha et kritisk blikk med fokus på potensial og begrensninger boka gir.

2.3 Resonnering i skolen

Ifølge Jeannotte og Kieran (2017) består matematisk resonnering av to hovedaspekter: det strukturelle og det prosessorienterte aspektet. I det strukturelle aspektet ser de på tre av de vanligste formene for resonnering som er deduktiv, induktiv og abduktiv resonnering:

I sammenheng med matematisk resonnering blir deduktiv resonnering gitt ved at et matematisk objekt følger en rekke logiske resonnementer som følger teori (Kimmig, 2013). Ifølge Jeannotte og Kieran (2017) er det kun det deduktive aspektet som kan endre statusen til et resonnement fra å være sannsynlig til å være sant. Dette gjør at vi kan kalle et deduktivt resonnement for et bevis for det matematiske objektet. Deduktiv resonnering spiller derfor en viktig rolle i bevisføring og bevis (Jeannotte & Kieran, 2017). Som et eksempel på deduktiv resonnering i skolematematikken, vil det å argumentere med å vise til egenskapene av parallelle linjer og vinkler i en trekant, bevise at de innvendige vinklene i en trekant til sammen er 180 grader.

Induktiv resonnering er beskrevet som generalisering av et sett med bestemte objekter. Induktiv resonnering trenger ikke å ha en sterk logisk slutningsrekke (Keet, 2013). På bakgrunn av dette blir induktiv resonnering knyttet til prosessen med generalisering (Jeannotte & Kieran, 2017). Som eksempel på induktiv resonnering i skolematematikken er for eksempel når elever får i oppgave å finne en eksplisitt formel som er relatert til figurtall, altså at elevene ut fra konkrete eksempler på figurtall prøver å finne en generell formel.

Abduktiv resonnering er beskrevet som det underbyggende trinnet, eller det trinnet som viser tilbake (Jeannotte & Kieran, 2017). Dette trinnet kan fremmes i alle typer matematisk resonnering, og trekkes ut fra elementer som forklarer påstanden (Jeannotte & Kieran, 2017). Abduktiv resonnering kan kobles til enhver prosess av matematisk resonnering på bakgrunn av dens evne til å generere data for å kunne for eksempel validere eller generalisere (Jeannotte & Kieran, 2017). Altså er abduktiv resonnering en prosess som med å legge til elementer i argumentasjonen, kan støtte en induktiv eller deduktiv resonnering. Et eksempel på abduktiv resonnering i skolematematikken kan være at elevene blir bedt om å vise at en firkant er et kvadrat, hvor de allerede har vist at firkanten er en rombe, fordi den har fire like sider. Elevene kjenner til en regel som sier at hvis en rombe har en rett vinkel, så er det et kvadrat. Basert på dette antar elevene, som også er veldig sannsynlig, at romben har en rett vinkel, og dermed er en firkant (Reid, 2003).

Ifølge Jeannotte og Kieran (2017) handler det andre hovedaspektet om prosessen i matematisk resonnering. Jeannotte og Kieran (2017) beskriver prosessaspektet ved matematisk resonnering som: "Matematisk resonnering er kognitiv prosesser som er meta-diskursive, det vil si som utleder narrativer om objekter eller relasjoner, ved å utforske relasjonene mellom objekter." (Jeannotte & Kieran, 2017). Jeannotte & Kieran (2017) tar i bruk Sfard (2008) forklaring av narrativer knyttet til kognisjon. Narrativer beskrives her som all type tekst, både skriftlig og muntlig som beskriver relasjonen mellom objekter eller aktiviteter for eller med objekter (s.572). Ved å ta i bruk forståelsen av prosessene i matematisk resonnering, viser Jeannotte og Kieran (2017) til to kategorier for prosesser i matematisk resonnering: likheter og ulikheter, og validering (Figur 3).



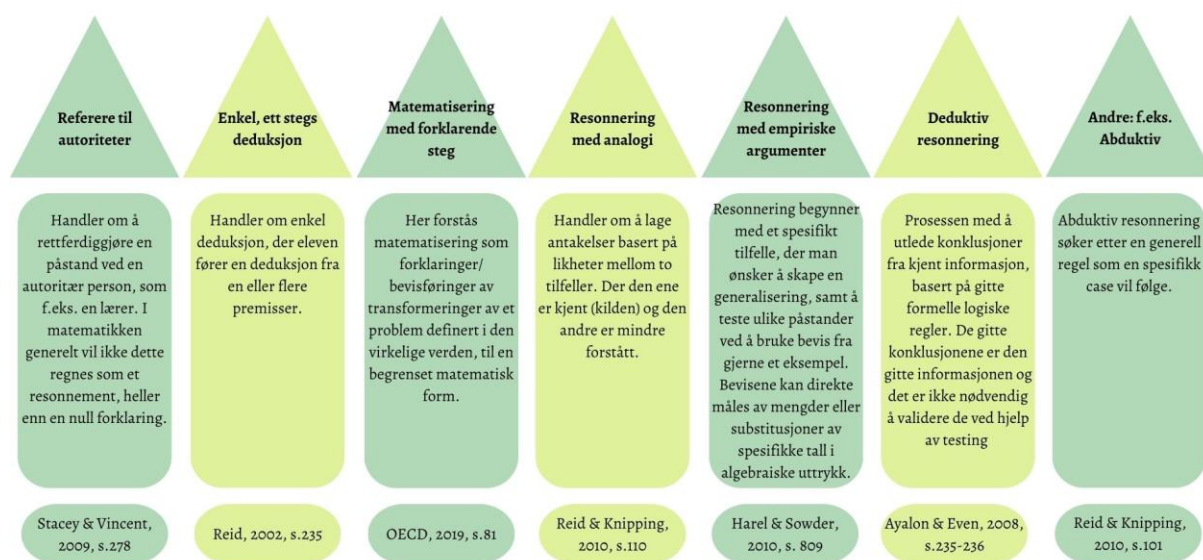
Figur 3: Skisse av to beskrevne hovedprosesser i prosessorientert resonnering, beskrevet av Jeannotte og Kieran (2017), innenfor matematisk resonnering. Disse prosessene knyttes til meta-diskursive prosesser som å søke etter likheter og forskjeller og å validere.

I matematikken handler resonnering om å trekke logiske konklusjoner, som baseres på bevis eller uttalte antakelser (National council of teachers of mathematics, u.å.). Ifølge National Council of Teachers of Mathematics er R&B en av fem hovedprosesser som burde gjelde alle trinn i skolen (Kilpatrick et al., 2011). Glasersfeld (Kilpatrick et al., 2011) ser på resonnering som prosessen en elev gjør for å forstå i matematikken. Altså handler resonnering om selve prosessen om å skape matematisk forståelse blant elever i alle trinn i utdanningsløpet, både gjennom skriftlig og muntlig kommunikasjon med seg selv og andre (Skott & Valenta, 2022).

De uklare skillene i beskrivelsene av matematisk resonnering skaper utfordringer knyttet til hvordan læreren skal drive aktiviteter med resonnering i klasserommet.

Undervisningen vil formes basert på lærerens forståelse av resonnering, noe som vil påvirke både elevene og samfunnet (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). For å skape et tydeligere bilde av hva lærerne må legge til rette for i undervisningen av matematikk, med fokus på å utvikle ferdigheter i resonnering hos elevene, ser vi på rammeverket som ble utviklet i MaTeK- prosjektet. Dette rammeverket bygger på en analyse av utvalgte lærebøker i matematikk, hvor det ses etter ulike typer av resonnering som er tilstede i oppgaver og løsningsforslag i bøkene (Sevinc et al., 2022). Ved å ha en grunnleggende forståelse av hva matematisk resonnering er, vil det hjelpe læreren å fremme ferdigheter i resonnering hos elevene i matematikkundervisningen (G. J. Stylianides et al., 2013). Som nevnt tidligere henger læreres lærerplankunnskap, matematisk kunnskap og pedagogisk innholdskunnskap sammen, da de kan påvirke hvordan en lærer tolker og arbeider med en lærebok. I tillegg viser forskning at lærebøker og pensumveiledning anses som de vanligste ressursene som støtter matematikkundervisningen over hele verden (Remillard & Heck, 2014). Dermed ble ulike typer av resonnering (Sevinc et al., 2022), som ble hentet ut fra lærebøker i fem land (inkludert Norge) som er involvert i MaTeK- prosjektet, presentert for lærerstudentene i MaTeK- prosjektet. Typene av resonnering ble utviklet

ut fra lærebokanalysen, og danner et rammeverk med syv ulike typer av resonnering (Figur 4):



Figur 4: Skisse av ulike typer av matematisk resonnering beskrevet av Sevinc og kollegaer (2022). De ulike typene resonnering er basert på og utviklet gjennom lærebokanalyser av lærebøker fra de ulike landene som deltar i MaTeK. Her har vi oversatt de sju typene matematisk resonnering som i MaTeK- prosjektet ble utviklet ut fra disse lærebokanalysene.

Det er kjent i tidligere studier at lærere oppfatter resonnering forskjellig. Herbert et al. (2015) viser til et rammeverk som er konstruert gjennom en fenomenologisk analyse av intervju, der lærere uttrykker sine oppfatninger av hva et matematisk resonnement innebærer. Resultatet ble syv kategorier av oppfatninger av matematisk resonnement som lærerne uttrykte i studien (Tabell 2). Disse kategoriene viser fra kategori A til G en økende bevissthet om flere verdier innen matematisk resonnering, altså forståelsen for kompleksiteten til et matematisk resonnement:

Kategori	Oppfatning av matematisk resonnering
Kategori A	Resonnering oppfattes å være tenkning.
Kategori B	Resonnering oppfattes å være kommuniserende tenkning
Kategori C	Resonnering oppfattes som problemløsning
Kategori D	Resonnering oppfattes å være validerende tenkning
Kategori E	Resonnering oppfattes å være å forme antakelser
Kategori F	Resonnering oppfattes som å bruke logiske argumenter for å validere antakelser
Kategori G	Resonnering oppfattes å være koblende aspekter ved matematikk

Tabell 2: Skisse av Herbert et al.(2015) sitt rammeverk om læreres oppfatninger om hva et matematisk resonnement innebærer. Denne tabellen er konstruert gjennom en fenomenologisk analyse av intervjuer med lærere.

Herbert et al. (2015) forklarer videre mer detaljert hva lærerne i hver kategori assosierer med matematisk resonnering hos elevene. **I kategori A** koblet lærerne resonnering til generell tenkning, en personlig refleksjon, en privat handling som ikke innebærer å dele resonnementer med andre mennesker. **I kategori B** derimot assosierer lærerne resonnering med elevenes delinger av tanker med andre mennesker. Altså skiller denne kategorien seg fra kategori A gjennom at den fokuserer på å dele tenkningen med andre mennesker, som læreren eller medelever. **I kategori C** oppfattes resonnering som tenkning til å kunne løse problemer, ikke bare å kommunisere tenkning, slik som kategori B. Denne oppfatningen kan hindre at lærere ser resonnering i andre sammenhenger i matematikken. **I kategori D** viser til en ny ide innen resonnering, hvor lærerne assosierer resonnering med å forklare og rettfærdiggjøre tanker. Denne kategorien skiller seg fra C ved at fokuset ligger på å overbevise andre om at et resonnement er riktig. **I kategori E** begynner det å ligne på en mer formell definisjon av resonnement. Å forme antakelser som resonnering viser at lærerne her assosierer resonnering med hypoteser, og kunne komme med grunner til at en antakelse er sann. Denne kategorien ligner på kategori D, men fokuserer mer på å danne antakelser. **I kategori F** assosierer lærerne resonnering med elevenes logiske trinn- for trinn argumentasjon, og legger til bevis som et formål for resonnering. Altså ligger denne kategorien på linje med matematiske definisjoner av resonnement angående logisk argumentasjon og deduktiv tenkning. **I kategori G** vises det til resonnering som at elevene samler ulike deler fra tidligere matematisk kunnskap for å løse problemer og gi mening i matematikk. Denne kategorien viser til lærernes fokus på at matematisk resonnering gir potensial til å kunne se sammenhenger mellom ulike matematiske begreper og tema. Altså er lærere i denne kategorien bevisst over viktigheten resonnering spiller for elevenes matematiske læring (Herbert et al., 2015).

2.4 Bevis i undervisning

Ifølge A.J. Stylianides (2007) anbefaler mange forskere og læreplanverk at bevis burde være en del av elevenes erfaringer utover i klassene. Utfordringen her er at definisjonen av bevis som konsept og aktivitet er uklar, spesielt i grunnskolen og lærers rolle i å dyrke bevis som aktivitet hos elevene. Dermed lagde Stylianides en definisjon av bevis for å sette ord på begrepet slik at bevis som en tenkemåte og aktivitet i klasserommet kan gi mening, ikke bare på høyere trinn og spesifikt i geometri, men også på lavere klassetrinn og i alle mulige tema i matematikk (A.J. Stylianides, 2007, s. 289).

A.J. Stylianides (2007) mener kunnskapen og definisjonen av bevis som vist til tidligere, er noe matematikklærerutdannere kan ta i bruk til å hjelpe lærere med å utvikle en oppfatning av bevis som passer for elever på alle klassetrinn, og som kan hjelpe lærerne med å legge til rette for bevis som tenkemåte og aktivitet i matematikk hos elevene. Det har blitt bevist at læreres forestilling om meningen eller definisjonen av bevis, påvirker hvordan de tolker politiske anbefalinger for bevis, og hvordan disse anbefalingene blir knyttet opp mot deres praksis (A. J. Stylianides, 2007). For eksempel kan en lærer som har en forestilling om definisjonen av bevis som et formelt og strengt argument, tenke at anbefalingene fra prinsipper og standarder (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), om en bred tilstedeværelse av bevis i matematikkfaget på skolen, bare er passende for viderekommende elever på ungdomsskolen eller videregående.

2.5 Tidligere relevant forskning for problemstilling

I siste del av dette kapittelet har vi tatt opp relevant forskning som støtter opp under vår problemstilling og for videre analyse av datainnsamling fra prosjektet. Dette innebærer studier som bekrefter og viser til elevers vanskeligheter med R&B, og mangel på fokus rundt R&B som undervisningstema i lavere klassetrinn. Videre viser vi til forskning som bekrefter lærerens og lærerstudenters manglende kunnskaper om R&B og undervisning i temaet, og mulige fokusområder som kan motvirke denne problematikken. Til slutt tar vi opp forskning som er relevant for, og underbygger utviklingen av vårt analytiske verktøy.

2.5.1 Elevers utfordringer innen R&B

En av grunnene til at man ønsker at elevene skal utvikle egenskaper innenfor R&B, er at dette styrker elevens analytiske egenskaper, noe som er viktig i arbeid med å finne mønstre, likheter og strukturer (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Selv med forskningslitteraturens presisjoner om viktigheten av R&B i matematikkundervisningen, sliter elevene på flere områder knyttet til R&B (G. J. Stylianides et al., 2013). En av grunnene til dette er at elevene ikke møter bevisføring før de får introduksjoner i Euklidsk geometri, og dette skjer gjerne ikke før på videregående (A. J. Stylianides, 2007). En av følge av dette er at elevene da plutselig møter kompliserte former for bevis og vil møte utfordringer knyttet til dette (A. J. Stylianides & G.J. Stylianides, 2009). Dette kan sammenlignes med å starte matematikkundervisningen i 1.klasse med algebra for så å lære om aritmetikk i 8. klasse.

2.5.2 Læreres mangelfulle kompetanse innen R&B

R&B er temaer som forskningen jobber stadig mer med, og skiftet i måten vi ser på matematikkundervisningen er med på å bidra til dette (Kilpatrick et al., 2011). En av grunnene til denne endringen er at man vektlegger et større fokus i undervisningen, på prosesser knyttet til matematikken som studenten kan få bruk for (Kilpatrick et al., 2011). Likevel ser vi at lærers kunnskaper om å kunne støtte slike prosesser, som for eksempel utviklingen av ferdigheter i resonnering, er tatt opp i flere artikler som mangelfulle (Buchbinder & McCrone, 2020; G. J. Stylianides et al., 2013). Ifølge G.J. Stylianides et al. (2013), kan elever ved hjelp av lærerens vektleggelse av utforskning og bevisføring få en dypere forståelse av matematikk i alle nivåer i skolen, istedenfor kun å kunne referere til lærerens ord eller læreboka (Kilpatrick et al., 2011). En av grunnene til at vi møter problemer med implementeringen av R&B i skolen i dag, er at begrepene ikke har fått en tydelig ramme, slik at lærere på ulike klassetrinn kan ta den inn og implementere dens betydning i matematikkundervisningen (A. J. Stylianides, 2007). Ifølge (Buchbinder og McCrone, 2020) krever undervisning av R&B en spesifikk type kunnskap hos læreren. Denne type profesjonell kunnskap er nevnt tidligere i oppgaven som matematisk kunnskap for undervisning. Lærerens manglende kunnskap knyttet til implementeringen av R&B i matematikkundervisningen skyldes hovedsakelig to faktorer:

1. Lærerens manglende matematisk kunnskap om resonnering og bevis.
2. Læreres tro på at bevis er over elevers læringskapasitet i matematikk.

(G. J. Stylianides et al., 2013).

R&B som aktivitet er kjernen i matematisk meningsskaping og er sentralt for elevers læring i matematikk (Hanna & Jahnke, 1996; Skott & Valenta, 2022; G. J. Stylianides et al., 2013). Tross dette, tar R&B liten plass i klasserommet på barneskolen (G. J. Stylianides et al., 2013). Dette kan delvis skyldes at mange kommende grunnskolelærere har svake matematiske fagkunnskaper om R&B, og kontraproduktive oppfatninger om undervisningen (G. J. Stylianides et al., 2013). Etter en intervensjonsstudie av G. J. Stylianides og hans kollegaer (2013), gjorde de fremskritt i å finne ut av hvilke utfordringer lærere har med resonnering. De tre utfordringene som det ble relatert til var:

1. Praksislæreres klasserom i forhold til klasserommets normer og elevenes vaner.
2. Lærerstudenters planlegging og gjennomføring av timer, oppgaver på høyt nivå, og følelse av effektivitet.
3. Lærerstudenters kunnskaper om matematikk, elever og læreplan.

(G. J. Stylianides et al., 2013).

I oppsummeringen av intervensjonsstudien var det tre utfordringer som gikk igjen mest hos lærerstudentene; lærerstudenters implementering av oppgaver med høyt nivå, elevenes vaner i praksislærers klasserom og lærerstudenters kunnskap om elevene (G.J. Stylianides et al., 2013). MaTeK- prosjektet adresserer alle tre av disse utfordringene. Disse funnene fremhever områder lærerutdanningen må være oppmerksomme på, for å støtte lærerstudenter i undervisning av R&B. Disse områdene handler om utfordringer knyttet til implementering av oppgaver på høyt nivå som er relatert til R&B, og hvordan lærerstudentene skal håndtere elevers eksisterende vaner i klasserommet (G.J. Stylianides et al., 2013, s.1484).

2.5.3 Kunnskap innen R&B som fremmer elevenes resonnering

Likevel presiserer G.J. Stylianides et al. (2013) at selv om lærerne hadde hatt mer teoretisk kunnskap på området, viser forskning til at det er vanskelig å avgjøre hvor hovedproblemene ligger i undervisningen av R&B. Et mulig fokusområde for å løse denne problematikken er ifølge National Council of Teachers of Mathematics (2000) at lærerens måte å stille spørsmål på, kan hjelpe elevene til å lage antakelser, eller teste disse. Et eksempel på spørsmål læreren kan stille er "Hva tror du skjer videre? Stemmer det alltid?". Dette implementerer at læreren kan ta grep i undervisning som støtter opp og legger til rette for elevens resonnering. Disse grepene kan vi se på som lærergrep (Ellis et al., 2018). Lærergrep ses for eksempel på som å fremkalle elevers resonnering, respondere til elevers resonnering, tilrettelegge og forbedre elevers resonnering gjennom spesifikke tiltak som oppmuntrer til flere løsningsstrategier og refleksjon (Ellis et al., 2018). Lærergrep er noen av egenskapene som lærer burde ha kunnskaper om for å kunne forbedre resonneringsegenskapene hos elevene. Dette er med på å fortelle oss hvilke kunnskaper lærere burde ha for at elevene skal kunne drive hensiktsmessig matematisk resonnering (A. J. Stylianides & Ball, 2008).

Ifølge Fosse et al. (2015) er det bevisste valget og bruken av fagbegreper noe som påvirker utviklingen av R&B. Dette ser vi også blant lærere og lærerstudenter. Viktigheten av å kunne kommunisere ved hjelp av et fagspråk, gjør at man sammen kan

snakke mer presist om de opplevde undervisningssituasjonene (Fosse et al., 2015). Samtidig som at hindringene elevene møter i matematikken med fokus på R&B, viser til viktigheten av lærerens kunnskaper om elementene ved undervisningen (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Forskning viser at undervisningen i løpet av lærerutdanningen burde vektlegge praksisnær undervisning med fokus på elevene, som gir lærerstudentene konkrete kunnskaper om viktige komponenter om matematikkundervisningen i klasserommet (Ojo et al., 2017). En grunn for at dette er viktig å vektlegge, er at disse aspektene i utdanningen for lærerstudenter kan gi grunnlag for å kjenne igjen elevenes utvikling av resonnering (Livy & Downton, 2018).

2.5.4 Tidligere forskning relevant for analytisk verktøy

Leisseig (2016) har tatt i bruk MKT modellen av Ball et al. (2008) og vurdert hvordan denne modellen kan brukes og være nyttig som et analytisk verktøy for å tolke blant annet læreres arbeid med en matematisk oppgave, og videre kommet fram til en konklusjon om deres matematiske kunnskap om undervisning i bevis. Ifølge Leisseig (2016) inneholder MKT for denne undersøkelsen tilstrekkelig med detaljer til å svare på spørsmål som omhandler læreres erfaringer innenfor bevis. Videre påpeker hun at denne modellen kan støtte praksisen hos de som legger til rette for lærerens læring. Denne modellen trekker en oppmerksomhet mot både matematisk og pedagogisk kunnskap, som vil støtte læreren i sitt forsøk på å fremme bevis i klasserommet. Denne studien viser oss at MKT modellen kan tas i bruk til å kjenne igjen når en diskusjon blant lærerne omhandler en bestemt kunnskapskategori, eller om flere kunnskapskategorier er inkludert (Lesseig, 2016).

I A.J. Stylianides (2011) sin studie om lærerens kunnskapspakke for å undervise bevis, beskriver han hvordan lærere har et behov for matematisk kunnskap om bevis, kunnskap om elevene og deres forestillinger om bevis, i tillegg til pedagogisk kunnskap slik som å ta i bruk riktige strategier og skape et aktivt og utforskende klasserommiljø. Lærere trenger støtte til å tilegne seg riktig kunnskap for å undervise i temaet bevis. Dette gjelder blant annet å kunne forberede kommende lærere gjennom å gi de læringserfaringer som innebærer en omfattende kunnskapspakke for å undervise i bevis. I denne studien ser man at de ulike elementene av kunnskaper i denne kunnskapspakken er koblet til hverandre, dermed må alle type kunnskap vurderes for å tilstrekkelig kunne forberede lærere. Det er også sentralt å vurdere kommende læreres oppfatninger om bevis og hva det innebærer, da det er avgjørende at disse oppfatningene er i samsvar med den undervisningspraksisen som er ønskelig (A. J. Stylianides, 2011).

Metode

3.1 Bakgrunnen for studien

Metoden vi har valgt for datainnsamling i denne masteroppgaven, baserer seg på kvalitativ forskning. Problemstillingen vi ønsket å belyse, ser på utviklingen innad i MaTeK- modul (Figur 5), der lærerstudenter fra et norsk universitet utviklet spesifikk kompetanse innenfor undervisning av R&B. Gjennom fokusgruppeintervju, observasjon og skriftlige innleveringer har vi observert den karakteristiske utviklingen lærerstudentene har hatt gjennom MaTeK-prosjektet. Studentene har gjennom MaTeK-modulens fem undervisningsøkter (Figur 5) hatt interaksjoner med medstudenter, masterstudenter, lærer og forskere. Disse medmenneskelige interaksjonene påvirker konstruksjonen og oppfattelsen av konseptene R&B hos lærerstudentene (Creswell, 2014). Bakgrunnen for valget av metoden er egenskapene kvalitativ forskning har til å se på sosiale fenomener (Creswell, 2014), som i dette prosjektet blir å se på kulturen for utvikling av matematikklæreres spesifikke kompetanse for R&B, ved et norsk universitet.

3.2 Konstruktivismen

Innenfor kvalitativ forskning er det den konstruktivistiske tilnærmingen som ligger til grunn for forskningen, og dermed også for denne masteroppgaven. Denne tilnærmingen sier at sosiale fenomener, blant annet kulturen som er innad i en gruppe, og kan ses på som en konstruksjon av virkeligheten, som kan konstrueres og rekonstrueres (Clark et al., 2021). Gjennom denne forståelsen, analyserer vi lærerstudentenes konstruksjon og rekonstruksjon av sin forståelse av R&B. Denne konstruksjonen skjer gjennom de sosiale interaksjonene, og deltakelse i fokusgruppeintervjuene og undervisningen. Målet med denne masteroppgaven er å se hvordan lærerstudenter utvikler kompetanse innenfor R&B i rammene gitt av MaTeK-modul (Figur 5). Interaksjonene i MaTeK-prosjektet legger grunnlaget for vår analyse av lærerstudentenes opplevde versjon av virkeligheten som blir presentert (Clark et al., 2021). Creswell (2014) presiserer at konstruktivistene prøver å søke svar i verdenen man lever i, som for dette prosjektet vil innebære hva som karakteriserer lærerstudentenes utvikling innenfor MaTeK-modul i norsk kontekst.

Basert på oppfattelsen av hvordan menneskelig aktivitet konstruerer verden, er rollen som observatører/forskere i dette prosjektet aktiv gjennom dialoger og passiv i deltakelse sammen med deltakerne gjennom MaTeK-modul. I innsamlingen av data ble lærerstudentene sine oppfatninger vektlagt sammen med deres spesifikke kunnskaper i temaene R&B. På bakgrunn av dette ble lærerstudentene spurt åpne spørsmål i intervjuene og i klasseromsundervisning. Det ble stilt åpne spørsmål for å gi lærerstudentene rom for drøftinger som enkeltindivid, men også i interaksjon med medstudentene, som for eksempel i arbeidet med oppgaver i undervisningen. Målet med datainnsamlingen var at lærerstudentenes kunnskap og oppfatninger skulle komme frem. Dette er grunnlaget for analysen og resultatene videre. Likevel påvirkes vår analyse av lærerstudentenes tolkninger av kunnskapen som blir formidlet i undervisning, samt interaksjonen mellom underviser og innad i grupperingene, noe som vil bli tydeligere presentert videre i dette kapitlet.

3.3 Case studie

Metoden i denne masteroppgaven er en case studie, som typisk involverer en intensiv analyse av et tilfelle eller en case (Clark et.al., 2021). Prosjektets case er en gruppe med lærerstudenter fra et norsk universitet. Rammene for casen er satt av et internasjonalt prosjekt (MaTeK-prosjektet) og de delene av dette prosjektet som er relevante for problemstillingen i denne masteroppgaven, som her blir kalt MaTeK-modul. MaTeK-modul vil bli beskrevet i detalj senere i teksten (kap.3.4), men omhandlet i korte trekk fem undervisningsøkter. MaTeK-modul sammen med to fokusgruppeintervjuer før og etter modulen danner MaTeK-prosjektet. Fra disse fokusgruppene, har vi valgt å analysere fire lærerstudenters utvikling gjennom MaTeK-modul, som har fokus på R&B. For å belyse denne utviklingen har vi som presisert, valgt å bruke kvalitativ metode for å samle inn data gjennom intervju, observasjon og dokumentanalyse. Datainnsamlingen er gjort på denne måten for å kunne skape et mest mulig detaljert og dyptgående innblikk i den karakteristiske utviklingen. Det vil si at casen, altså det vi har undersøkt, er lærerstudentens utvikling i en kontekst gitt av rammene av MaTeK-modul knyttet opp mot temaet R&B. Modulen er også laget for å kunne sammenligne ulike internasjonale universiteters utvikling innenfor R&B (MaTeK-prosjektet). På bakgrunn av dette er ikke datainnsamlingen og innholdet i undervisningsøktene spesifikt rettet mot å besvare masteroppgavens problemstilling, men gir et godt datagrunnlag for å kunne gjøre det. Casen gir oss mulighet til å eksemplifisere kunnskapen dagens lærerstudenter har om R&B før, under og etter endt undervisning. Noe som kan skape et bilde av norske lærerstudenters forståelse av R&B og hvordan denne utvikler seg i disse gitte rammene.

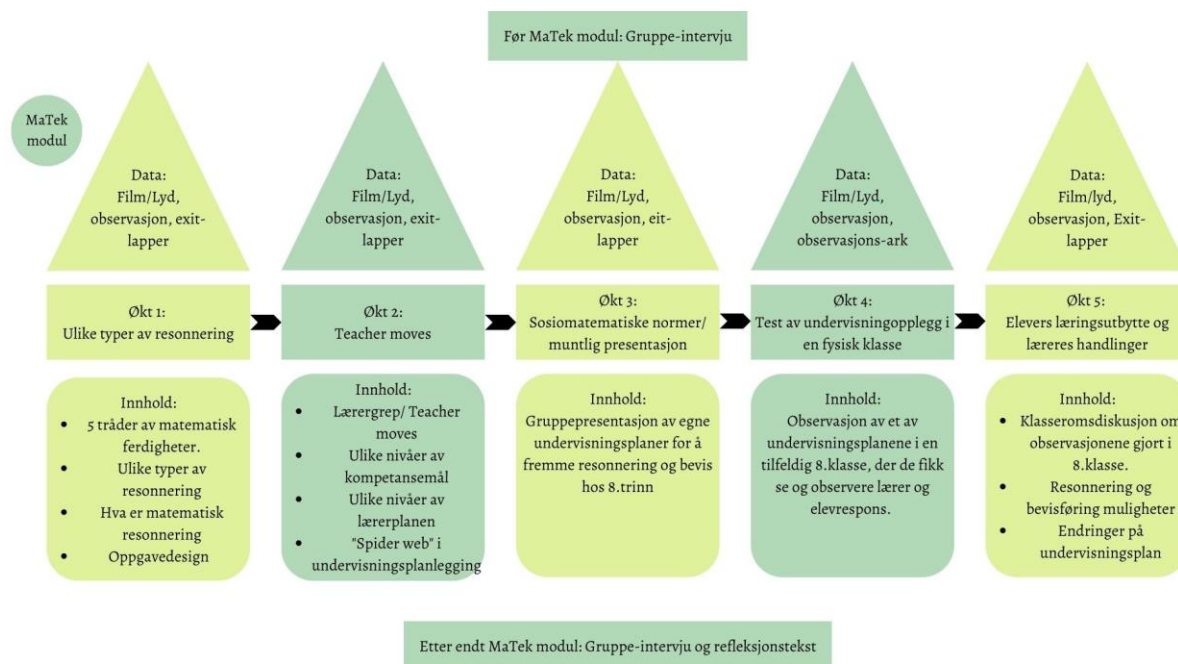
Datainnsamlingen som har blitt gjennomført, avgrenses av tidsperioden og aktualiteten i resultatene (Clark et al.,2021). Dette påvirker også materialet som er analysert i form av hvor dyptgående informasjon og dens relevans opp mot dagens læreplan, og det kommende yrket som lærer. Bakgrunnen for masteroppgaven og casen er nettopp knyttet til læreplanutvikling som nevnt tidligere, og dens nå sterkere fokus på R&B i forskningsfeltet. Dette gjør at prosjektet som gjennomføres er relevant for forskningsfeltet, lærerstudenter og lærere. Prosjektet er også relevant for lærerutdanningen i Norge. Dette er fordi det i prosjektet undersøkes hvordan lærerstudentene utvikler matematisk undervisningskunnskap i R&B. Denne utviklingen gir en indikator på hva som er viktig å vektlegge i undervisningen for lærerstudentene, for å best mulig fremme denne kunnskapen.

3.4 Rammene for masteroppgaven

Rammene for denne masteroppgaven er gitt av det internasjonale prosjektet MaTeK (MaTeK-prosjektet). MaTeK-prosjektet er et internasjonalt prosjekt i fem europeiske land, som ønsker å forbedre leksjon design kapasitet (*lesson design capacity*) hos lærerstudenter i undervisningspraksisen for R&B. MaTeK-prosjektet inneholder et før og etter intervju, samt undervisningsøkter om ulike aspekter ved R&B. Disse undervisningsøktene blir i denne masteroppgaven beskrevet som MaTeK-modul (Figur 5).

MaTeK-modul er en undervisningsbasert intervensjon som ble utformet for å forbedre lærerstudenters leksjons design kapasitet innenfor temaene R&B. Intervensjonen som har blitt gjennomført foregikk over fem undervisningsøkter, fordelt over et undervisningssemester ved et norsk universitet. Gjennom denne perioden gjennomførte

lærerstudentene tre undervisningsøkter, en muntlig presentasjon og en økt med feltarbeid i en 8.klasse (Figur 5).



Figur 5: Skisse over innholdet i MaTeK-modul. Denne figuren viser datainnsamlingsmetoder for MaTeK-modul i trekantformen. De firkantede boksene er MaTeK-modul, der man får innsikt i hver enkelt økt og tema for undervisningen. Hva undervisningsøktene inneholdt står i tekstboksen. Figuren viser også til datainnsamlingen både før og etter endt MaTeK-modul, som inngår i denne masteroppgaven.

I løpet av perioden har vi samlet inn data gjennom observasjon, lydopptak, filmopptak og skriftlige innleveringer. De skriftlige innleveringene er i denne masteroppgaven er exit-card som ble levert etter endt undervisning, refleksjonstekst som lærerstudentene leverte i etterkant av modulen, samt arbeidskrav som studentene leverte underveis. Hovedtemaene i intervensjonen var ulike typer av resonnering, lærergrep, sosiomatematiske normer, undervisningsplanlegging og hvordan dette har sammenheng med læring hos eleven og rollen som lærer i undervisningen av matematikk. I forkant og etterkant av MaTeK-modulen ble det gjennomført fokusgruppeintervjuer, samt at det også i etterkant ble levert en individuell refleksjonstekst. Dette vil bli beskrevet mer i detalj i kap 3.6.

Første undervisningsøkt for lærerstudentene i MaTeK-modul var en innføring i ulike typer av resonnering. Her gikk foreleser gjennom begreper som matematisk ferdighet og matematisk resonnering, i tillegg til ulike måter man kan resonnerer på, basert på Silverman og Even sin artikkel (Silverman & Even, 2015). Disse temaene ble knyttet opp mot å kunne designe gode oppgaver knyttet til R&B, hvor studentene også ble gitt eksempler på hva en god oppgave kan være. Underveis i forelesningen stoppet undervisningen opp for at studentene skulle diskutere sammen i grupper og felles i klasserommet, knyttet til spesifikke oppgaver gitt i timen. Den første oppgaven lærerstudentene fikk i denne undervisningen, omhandlet oppgaver de hadde fått på forhånd. Disse oppgavene var knyttet opp mot innføringen av R&B, der lærerstudentene for eksempel skulle velge en oppgave som støtter elevs R&B, og hvorfor den støtter dette.

I andre undervisningsøkt var temaene for timen lærergrep, nivåer av læreplanen og ulike typer av kompetansemål. Lærergrep omhandler hva læreren kan gjøre for å støtte elevene i undervisningen og implementeringen av R&B (Ellis et al., 2018). Det andre temaet i undervisningstimen var ulike nivåer av læreplanen, og ulike typer av en læreplan. Den første typen som ble nevnt er læreplanen slik den er tiltenkt (van den Akker, 2003). Den andre typen er hvordan læreplanen blir implementert av lærere og hvordan den brukes i undervisningen. Den tredje typen læreplan er hvordan læreplanen er i forhold til hva som oppnås for elevers læringserfaringer og resultert læring ut av dette (van den Akker, 2003). Til slutt hadde studentene en aktivitet, der de tok i bruk spiderweb-modellen (Vedlegg 2) for å lage et undervisningsopplegg som støttet elevers utvikling i R&B, med tiltenkt målgruppe 8. trinn.

I de to første undervisningsøktene var det totalt 36 lærerstudentene som deltok i fellesundervisningene. Før tredje undervisningsøkt, ble klassen delt i to, der lærerstudentene som deltok på MaTeK-prosjektet ble plassert i samme gruppe, mens de andre ble plassert i den andre. Dette vil si at for den tredje undervisningsøkta hadde alle studentene (delt i fokusgruppene) som deltok i MaTeK-prosjektet, presentasjoner sammen. Det vil si de fastsatte gruppene som ble intervjuet før modulen, altså 21 av de 36 lærerstudentene.

I tredje undervisningsøkt hadde de fem fastsatte studentgruppene presentasjoner, hvor hver gruppe hadde forberedt et undervisningsopplegg som de startet å jobbe med i den andre undervisningsøkten. Alle fokusgruppene presenterte undervisningsopplegget de hadde laget for hverandre, hvor hver fokusgruppe fikk tilbakemeldinger fra en annen fokusgruppe. Her fikk alle fokusgruppene kritiske tilbakemeldinger i form av hva som kunne ha fungert bra i praksis og hva som burde forbedres eller endres. Gruppen som presenterte, fikk i tillegg til andre kommentarer fra resten av klassen og foreleserne, også en skriftlig tilbakemelding fra en annen gruppe. Fokuset på denne tilbakemeldingen var sosiomatematiske normer (Hiebert et al., 1997; Stephan, 2020), som studentene leste om før økta. Sosiomatematiske normer ble ikke diskutert som et eget tema i selve undervisningsøkten på grunn av tid.

I fjerde undervisningsøkt av MaTeK- modul, fikk en av gruppene som deltok i MaTeK-prosjektet, mulighet til å teste sitt undervisningsopplegg i et tilfeldig utvalgt 8.trinn ved en norsk skole. Her hadde lærerstudentene etter tilbakemeldinger fra medstudenter og samtaler med matematikklæreren for 8.trinn gjort endringer på undervisningsopplegget som ble presentert i tredje undervisningsøkt. Dette for at undervisningsopplegget skulle være detaljert og presist. Under denne økta var vi (masterstudentene), foreleser og den utvalgte gruppa med lærerstudenter observatører. Matematikklæreren for 8. trinn sto for undervisningen, etter detaljerte beskrivelser gitt i undervisningsplanen fra den valgte gruppen lærerstudenter. Matematikklæreren hadde som mål å gjengi planen som lærerstudentene hadde laget, så nøyaktig som mulig. Derfor ble det også gjennomført en samtale i forkant, for å diskutere opplegget med lærerstudentene. Undervisningssekvensen som ble holdt av matematikklæreren, ble filmet og publisert til de andre gruppene i prosjektet. Etter endt undervisning fikk elevene mulighet til å gi tilbakemeldinger på undervisningsøkten, samt at både matematikklæreren og lærerstudenter fikk komme med innspill på hvordan de syntes økten gikk.

Før femte undervisningsøkt hadde alle studentene fått sett en video av undervisningsøkten som ble gjennomført i 8.trinn, og levert inn en skriftlig oppgave knyttet til dette undervisningsopplegget (Vedlegg 2).

I femte undervisningsøkt fikk lærerstudentene som deltok i MaTeK-prosjektet, mulighet til å i fellesskap diskutere det som de hadde observert fra videoen, i tillegg til det noen av studentene hadde observert da de var til stede i klasserommet. Diskusjonen i denne økten omhandlet hva lærerstudentene hadde lagt merke til i forhold til elevenes læring, elevenes drøftinger og matematikklærerens lærergrep. Her fikk lærerstudentene også mulighet til å trekke frem drøftinger de hadde gjort på egen hånd, tilknyttet den skriftlige innleveringen før timen (Vedlegg 2). Tilknyttet denne diskusjonen ble det også diskutert nye forbedringer av undervisningsopplegget, som ikke bare kunne forbedre økten, men også heve resonneringen hos elevene.

3.5 Deltakerne i studien

Deltakerne i prosjektet er lærerstudenter ved utdanningen for grunnskolelærere 5.-10. trinn ved et norsk universitet. Deltakerne har frivillig deltatt i MaTeK-prosjektet, som var implementert i undervisningen ved universitetet. Gruppen av deltakere var 21 stykker, men deltakelsen i alle delene av prosjektene var varierende. På bakgrunn av dette, falt valget på å kun se på en mindre gruppe studenter som deltok på hele prosjektet, bestående av fire utvalgte studenter. Dette var for å sikre at vi fikk resultater som viser det utviklingsarbeidet som representerte hele MaTeK-modulen. Utvalget av lærerstudentene ble hovedsakelig basert på to kriterier: 1. Deltatt på alle undervisningsøktene gjennom hele modulen, 2. Deltatt aktivt i undervisning og skriftlige tilbakemeldinger gjennom hele modulen. De andre faktorene som gjorde at valget falt på fire studenter, er avgrensningen til problemstillingen, samt kompleksiteten i alle dataene som har kommet fra alle de 21 deltakerne i prosjektet. Noe som gjorde at en mindre gruppe av lærerstudenter er mer hensiktsmessig for å kunne besvare problemstillingen.

Gruppen av lærerstudenter består av en homogen gruppe. Alle har gjennomført samme undervisningsløp i matematikk ved universitetet samtidig som at alle deltakerne har valgt fordypning i matematikkfaget. Faget som prosjektet var implementert i, var innføring og første semesteret i denne fordypningen. Forkunnskapene lærerstudentene hadde før de deltok i prosjektet, var at alle hadde 60 studiepoeng i matematikk. Fokuset i denne undervisningen har vært en innføring i matematikkdiraktiske og matematikkfaglige temaer (Kunnskapsdepartementet, 2010). Dette vil si at alle lærerstudentene hadde gode forkunnskaper i generell matematikkdiraktikk og fagkunnskaper. Samtlige av studentene har gjennomgått praksis i skolen (Kunnskapsdepartementet, 2010), der alle også har gjennomført undervisning i matematikk. Gruppen av lærerstudenter består av tre jenter og en gutt.

3.6 Datainnsamling

Data i denne masteroppgaven er samlet inn med bruk av kvalitative metoder. Dette har vi gjort gjennom å ta i bruk intervju, observasjon og dokumentanalyse for å se på den karakteristiske utviklingen hos lærerstudentene gjennom MaTeK-modul. Utvikling av intervjuguide for før- og etter- intervjuet, MaTeK-modul og skriftlige innleveringer, ble gjort i forbindelse med rammeverket som ble gitt av det internasjonale prosjektet MaTeK. I denne masteroppgaven ble det likevel kun fokusert på de norske lærerstudentene sine besvarelser. Altså de fire utvalgte lærerstudentene fra prosjektgruppen.

Innad i MateK- prosjektet har fem land samarbeidet og utviklet felles rammer for datainnsamling. Dette vil si at intervjuguide, plan for gjennomføring av MaTeK-modul og arbeidskrav som deltakerne har gjennomført har vært felles for hele prosjektet. Det samme har blitt gjort i flere land, der det også har blitt samlet inn data gjennom filmopptak, refleksjonsnotater og andre observatører. I denne masteroppgaven vil det kun bli brukt de selekterte lærerstudentene sine besvarelser, som er relevant for besvarelsen av problemstillingen. Likevel har metoden for datainnsamlingen blitt utviklet gjennom et større samarbeid, som skal settes i kontekst, i et større bilde, der dataene fra alle de fem landene blir samlet.

I datainnsamlingen for denne masteroppgaven, har vi som nevnt tatt i bruk gruppeintervju, både før og etter MaTeK-modul, samt exit-lapper, arbeidskrav og refleksjonstekster. Videre skal vi presentere de ulike metodene for innsamlingen av data.

3.6.1 Før MaTek- modul

Før gjennomføringen av MaTeK-modul gjennomførte vi et fokusgruppeintervju. Målet med intervjuet var å samle inn kunnskaper og oppfatninger deltakerne hadde om R&B i matematikkundervisning. Intervjuet ble gjennomført før lærerstudentene fikk utdypende kunnskaper, så dette intervjuet ble et nullpunkt for analysen. Intervjuet var et semi-strukturert intervju, som vil si at hovedfokuset var å kunne forstå deltakernes perspektiver. På forhånd ble det laget en intervjuguide av det internasjonale MaTeK-prosjektet, som ble oversatt fra engelsk til norsk av oss (Vedlegg 3). Under intervjuet ble det også stilt oppfølgingsspørsmål løpende underveis. Dette var for å kunne komme mer i dybden av oppfatningene lærerstudentene hadde, samt å finne begrunnelsen for disse. Bakgrunnen for at det ble brukt et semistrukturert intervju, var for at både deltakere og forskere skulle få forståelse for, og oppleve en mening med alt som ble sagt (Clark et al., 2021). Intervjuet ble gjennomført i fem fastsatte grupper på fire til fem lærerstudenter i hver gruppe. Disse gruppene besto alle av de 21 lærerstudentene, som frivillig hadde godtatt å være med i MaTeK-prosjektet. Inndelingen av disse gruppene ble satt av lærerstudentene selv på forhånd. Lærerstudentene fikk også opplyst både før og underveis i intervjuet at man kunne få spørsmål om å gi en dypere beskrivelse, og dette var for å kunne gi en bedre forståelse for den fortellingen lærerstudenten ga i intervjuet (Clark et al., 2021). En annen faktor for å bruke semistrukturert intervju, var at målet for intervjuet var å få frem oppfatningene til lærerstudentene med minst mulig påvirkning og avgrensning fra forskeren og intervjuguide (Clark et al., 2021).

Bakgrunnen for at intervjuet ble gjennomført i fokusgrupper, er dens evne til å avsløre den forståelsen som lærerstudentene har av den sosiale verden de opplever, eller de ulikhetene de opplever (Clark et al., 2021). Noe som er kjernen av det prosjektet ønsker å avdekke, med tanke på at målet er å finne hva som karakteriserer utviklingen innenfor den avgrensede casen. Forskning viser også at fokusgruppeintervjuer frigjør et bredere spekter av synspunkter og meninger hos deltakerne, enn ved et individuelt intervju (Clark et al., 2021). Disse faktorene er viktige med tanke på å beskrive karakteristikken i en utvikling i en gruppe, og ligger til grunn for hvorfor intervjuene ble gjennomført i fokusgrupper. Samtidig ble rollen vår som intervjuere frigitt med tanke på at intervjuene ble tatt opp for så å bli transkribert i etterkant. Dette gjør at rollen som intervjuer handlet om å få frem og bruke dynamikken i gruppen til å få frem de ulike oppfatningene lærerstudentene satt inne med. Under disse intervjuene var det masterstudentene som styrte intervjuene. Den ene hadde som rolle å styre intervjuet og stille spørsmålene i

intervjuguiden, mens den andre hadde et overordnet blikk og stilte eventuelle oppfølgingsspørsmål for å få en dypere dybdeforståelse. Noe som var en fordel, med tanke på at fokusgruppeintervjuer gir intervjuer mindre kontroll og er vanskeligere å organisere (Clark et al., 2021). Ved å være to, blir det også lettere å ha kontroll over både hva som blir sagt av deltakerne, men også organiseringen av spørsmål og av selve intervjuene.

Hovedtemaene i intervjuet før MaTeK-modul var knyttet til erfaringer lærerstudentene hadde med undervisning av matematikk, hvordan de selv ville beskrevet sin undervisningsstil i matematikk, kunnskaper knyttet til læreplanen 2020, hvordan lærerstudenten ville lagt opp undervisningen i matematikk, ressurser de bruker i undervisning og hvordan de samarbeider i ulike situasjoner på studiet og i skolen som lærer. Alle hovedtemaene i intervjuet ble knyttet opp mot R&B i skolen. Alle lærerstudentene i grupperinger på fire og fem deltok i gruppediskusjonen og delte sine oppfatninger og kunnskaper på de ulike områdene. I intervjuprosessen ble lærerstudentene stilt spørsmål fra intervjuguiden (Vedlegg 3), der studentene på tur tok ordet og beskrev sine oppfatninger og kunnskaper om temaene. Deltakerne deltok i intervjuet på ulike måter. Noen var veldig opptatt av sine egne kunnskaper og oppfatninger, mens andre spilte mer videre på det som allerede hadde blitt delt. Intervjuene ga grunnlaget for gode samtaler og diskusjoner mellom lærerstudentene, og rollen som intervjuer ble hovedsakelig å ha kontroll og styre ordet.

3.6.2 Underveis i MaTeK-modul

Gjennom MaTeK-modul har lærerstudentene levert inn flere skriftlige innleveringer som henger sammen med forelesningene studentene hadde i perioden. Innleveringene fungerte derfor som forberedelser til en forelesning eller som en refleksjon i etterkant av en forelesning. Den skriftlige dokumentasjonen som deltakerne har produsert i perioden, er med på å gi oss ytterligere detaljert og dyptgående informasjon om utvikling i kunnskap og oppfatningene deres om R&B. I denne masteroppgaven har det på bakgrunn av mengden data kun blitt analysert deler av de skriftlige dokumentene. Dette på bakgrunn av at flere av arbeidskravene som er levert inn av studentene er gjort i grupper, og ikke individuelt av deltakerne i MaTeK-prosjektet. Likevel er det blitt analysert deler av arbeidskravene, men disse ble ikke vektlagt i stor grad i resultatene, på bakgrunn av at de fleste var gruppearbeid. Den skriftlige dokumentasjonen kan vi fordele inn i arbeidskrav 1.1 og 1.2, arbeidskrav 2.1 og 2.2, og arbeidskrav 3, samt exit-lapper (Vedlegg 4) etter hver undervisningsøkt. Nå vil vi kort gjøre rede for hva disse oppgavene har omhandlet.

Arbeidskrav 1.1 og 1.2 var en forberedende oppgave før undervisningsøkt en i MaTeK-modul. I arbeidskrav 1.1 fikk studentene individuelt i oppgave å lese relevant pensum om ulike typer resonnering, knyttet til artikkelen Silverman & Even (2015). I dette arbeidskravet velger studentene oppgaver som legger spesielt til rette for resonnering, og de undersøker hvor i den norske læreplanen resonnering er nevnt. Til slutt i arbeidskrav 1.1 skulle de argumentere for en matematisk påstand på to ulike måter. En slik de selv ville gjort det, og en slik de tror eleven ville argumentert for påstanden. I arbeidskrav 1.2 jobbet studentene i de fastsatte gruppene fra intervjuet. Dette arbeidskravet var også en forberedelse til neste forelesning om lærergrep (Ellis et al., 2019). Her leste studentene relevant litteratur om lærergrep knyttet til Ellis et al. (2019) sin artikkel. I denne delen lagde fokusgruppene egne oppgaver til 8.trinn og koblet disse

oppgavene opp mot mulige lærergrep. Her kunne de ta i bruk tidligere lagde oppgaver og modifisere dem. De leste i tillegg om læreplanen som design for læring (Pepin, 2022), og reflekterte rundt bruken av spider web (van den Akker, 2003) som modell for undervisningsplanlegging.

Arbeidskrav 2.1 og 2.2 var forberedende oppgaver til muntlig presentasjon i tredje undervisningsøkt i MaTeK- modul. Begge delene var gruppearbeid i de samme gruppene. Arbeidskrav 2.1 besto av å designe et undervisningsopplegg laget for 8.trinn, basert på oppgaven de tidligere har laget. I tillegg skulle de lage en skisse av de to til tre følgende timene som kommer i etterkant. Målet var her å ta i bruk den kunnskapen de nå har fått fra de to første forelesningene. Ut fra dette skulle de koble undervisningsopplegget sitt opp mot sosiomatematiske normer fra relevant pensum som Hiebert et al.(1997) og Stephan (2020). Disse artiklene tar opp temaene for den kommende undervisningsøkten (Hiebert et al., 1997). Arbeidskrav 2.2 besto av at gruppene skulle vurdere undervisningsopplegget til en annen gruppe, denne vurderingen skulle hver gruppe presentere i den tredje forelesningen.

Arbeidskrav 3 var en oppsummerende oppgave som var forberedelse til den siste forelesningen. Her fikk studentene i oppgave å se video fra undervisningstimen som ble gjennomført på et 8.trinn, hvor de skulle skrive ned sine individuelle observasjoner i et observasjonsskjema, reflektere over oppnåelse av mål og vurdering av lærerens handlinger og muligheter timen ga for læring i R&B. Til slutt fikk studentene i oppgave å skrive en refleksjonstekst om hva de har lært i løpet av denne perioden med MaTeK forelesninger.

Exit-lapper ble etter hver undervisningsøkt i MaTeK-modul brukt som evaluering av hva lærerstudentene følte om hvordan undervisningen hadde vært. Lærerstudentene fikk utdelt individuelle exit-lapper (Vedlegg 4 og 5), med fem spørsmål som tillot lærerstudentene å evaluere undervisningen og deres utbytte av den. Exit-lappene ble kun hentet inn fra de lærerstudentene som deltok i prosjektet og den aktuelle undervisningsøkten. Dette ga foreleser mulighet til å gjenta eventuelle hindringer for utviklingen av forståelsen av matematisk resonnering. Exit-lappene ga et innblikk i hva lærerstudentene syntes var det viktigste de hadde lært i løpet av undervisningsøkten, samt hva de syntes var vanskelig. Exit-lappene ble hentet inn etter økt 1,2,3 og 5 i MaTeK-modul. Spørsmålene i Exit-lappene var lik i økt 1,2 og 3, mens etter økt 5 fikk lærerstudentene endret det siste spørsmålet, hvor de skulle skrive en beskrivelse av deres egen utvikling/progresjon i MaTeK-modul. Exit-lappene ble også utarbeidet i samarbeidet i MaTeK-prosjektet, der Exit-lappene i utgangspunktet var på engelsk, men ble oversatt til norsk av oss.

3.6.3 Etter endt MaTeK modul

Etter endt MaTeK-modul leverte lærerstudentene inn individuelle refleksjonstekster. I forkant av denne innleveringen fikk lærerstudentene sju spørsmål knyttet til refleksjoner rundt MaTeK-modul, som skulle gi dem et grunnlag for refleksjon. Disse spørsmålene stilte spørsmål rundt ulike aspekter ved MaTeK-modul, som hva lærerstudentene følte de hadde lært, hva overrasket dem, eller hva fant de mest nyttig. Denne skriftlige innleveringen var individuell for studentene som deltok i MaTeK-prosjektet, og ga et bilde på hva enkeltstudenter tar med seg videre fra MaTeK-modul.

I etterkant av MaTeK-modul ble det også gjennomført tre nye fokusgruppeintervju. I disse intervjuene deltok sju utvalgte lærerstudenter. Totalt var det åtte deltakere som hadde fullført alle stadiene i MaTeK-modul, og disse ble derfor spurt om å delta på intervju. En av kriteriene for å delta på intervjuet var derfor en fullstendig deltakelse i prosjektet, samt at de frivillig ville delta på intervjuet. Utfra disse sju lærerstudentene ble fire studenter utvalgt til analysen av dataene i denne masteroppgaven.

Semi-strukturert intervju ble holdt av foreleseren av MaTeK-modul og handlet om hva de husket fra prosjektet, hvordan deres syn på R&B ble endret eller utviklet, hvordan observasjonen av klasseromssituasjonen følte og hva lærerstudentene følte var det viktigste de hadde lært gjennom modulen. Her var det foreleser som var intervjuer og holdt diskusjonen mellom to til tre lærerstudenter. Intervjuet ble tatt opp og transkribert av masterstudentene. Spørsmålene som lærerstudentene fikk var på engelsk, mens responsen som lærerstudentene ga var på norsk.

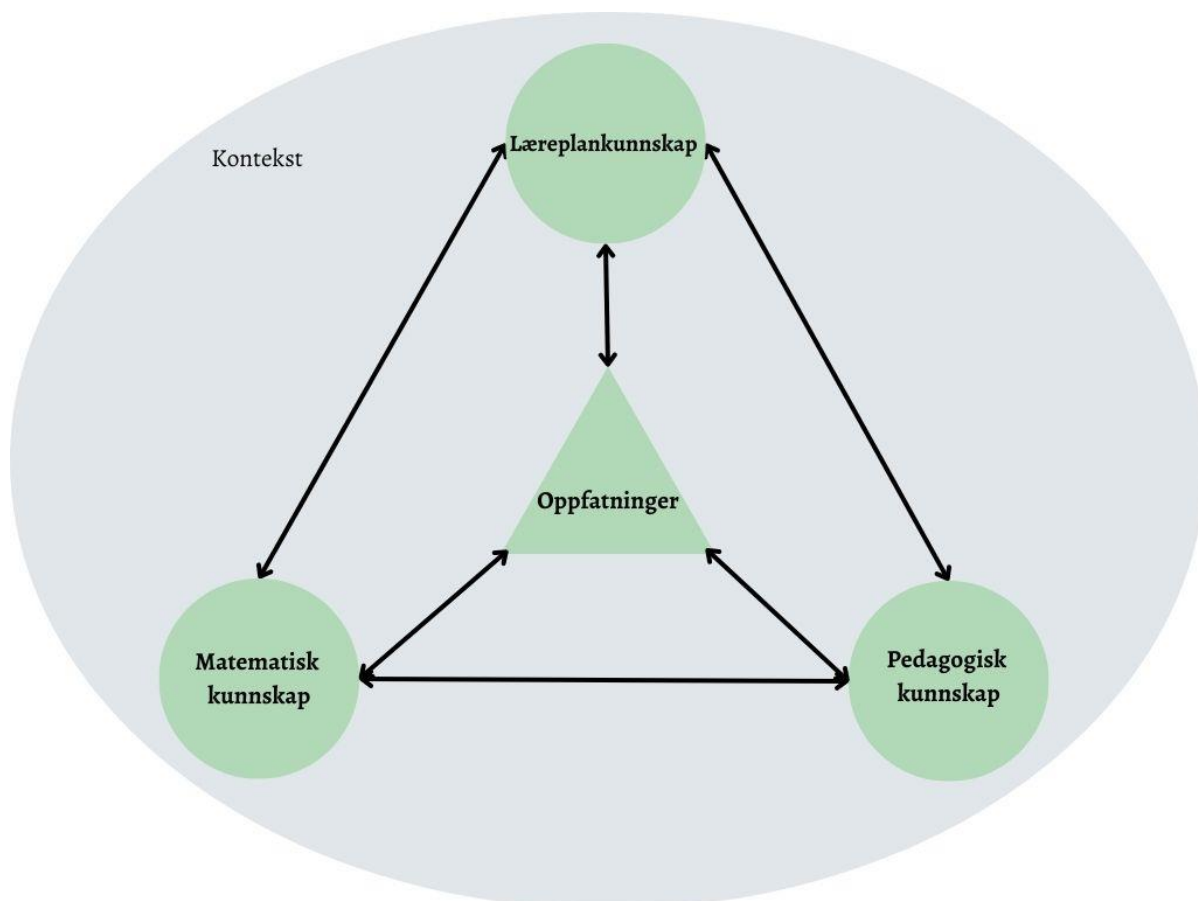
3.7 Metode for analyse

I prosessen med å analysere datamaterialet valgte vi en deduktiv analyse av de kvalitative dataene. Dette innebærer at vi har analysert dataene etter et allerede eksisterende og utviklet rammeverk (Clark et al., 2021). Bakgrunnen for en deduktiv analyse i dette prosjektet er å bruke den teorien som ligger til grunn som et analytisk verktøy for å se detaljer og nyanser som ligger i datagrunnlaget (Clark et al., 2021). I denne masteroppgaven bruker vi teoriene om matematikklæreres spesialiserte kunnskap (Ball et al., 2008; Contreras-González et al., 2013; Fennema & Franke, 1992; Petrou & Goulding, 2011; Shulman, 1986) som rammer for analysen. Disse artiklene ser på den spesialiserte kunnskapen som en lærer trenger for å undervise i matematikk. Dette er relevant for problemstillingen i denne masteroppgaven fordi disse artiklene beskriver karakteristiske trekk i kompetansen som trengs. Dermed er karakteristiske trekk innen lærerstudentenes læreplankunnskap, pedagogisk kunnskap, matematiske kunnskap, oppfatninger og kontekst, med på å belyse målet med masteroppgaven. Ved å se på disse kategoriseringene av kunnskaper og oppfatninger, kan vi si noe om den karakteristiske utviklingen hos lærerstudentene som deltar i MaTeK-prosjektet og hvordan de utvikler sine kunnskaper og oppfatninger knyttet til R&B.

3.7.1 Analytisk rammeverk

I denne masteroppgaven bruker vi en videreutviklet modell (Figur 6) for matematikklæreres spesialiserte kunnskap for matematikkundervisning, som rammene for analysen. Modellen er en videreutvikling av det Shulman (1986) for første gang beskrev som pedagogisk innholdskunnskap, som i ettertid har blitt beskrevet og utviklet til matematikklæreres spesialiserte kunnskap (MTSK) (Ball et al., 2008; Contreras-González et al., 2013; Fennema & Franke, 1992; Petrou & Goulding, 2011). Modellen som ble brukt i analysen av data er en videreutvikling av modellene (Figur 1 og 2) som er beskrevet i kap.2.2.1 i teoridel. Vi har vurdert egenskapene og deretter valgt ut ulike elementer fra modellene, og implementert dette inn i vår tolkning. For eksempel har vi sett på syntesemodellen som viser de dynamiske overgangene mellom de ulike kunnskapene (Petrou & Goulding, 2011). Denne egenskapen ble implementert i syntesemodellen på bakgrunn av kritikken gitt av Ball et al. (2008) sin modell av MKT, som sier at kunnskapene ikke er dynamiske. Videre har vi sett fordelene med Contreras-González et al. (2013) sin modell av MTSK, som ser på oppfatninger (beliefs) om

matematikk, matematikkundervisning og læring. I denne modellen er oppfatninger en sentral faktor som påvirker matematisk kunnskap (MK) og pedagogisk kunnskap (PK). På bakgrunn av disse faktorene har vi videreutviklet og dannet en ny modell for matematisk undervisningskunnskap (Figur 6). Videre har vi beskrevet hva vi definerer som læreplankunnskap, pedagogisk kunnskap, matematisk kunnskap, oppfatninger og kontekst:



Figur 6: Skisse av analytisk rammeverk for masteroppgaven. Figuren viser matematikklærerens spesialiserte kunnskap, som matematisk kunnskap, pedagogisk kunnskap og læreplankunnskap, opp mot oppfatninger. Samtidig ser vi disse kunnskapene og oppfatninger i koblinger med hverandre. Det analytiske rammeverket blir sett i en kontekst som avgrenses av den norske utdanningsmodellen og dens innhold. Rundingene i figuren viser til kunnskaper som er forventet at læreren skal ha i matematikkundervisningen. Trekanten viser til oppfatningene lærerstudentene har. Pilene mellom viser til koblingene mellom de ulike kunnskapene og oppfatningene.

Kontekst (K) defineres i denne modellen som erfaringer og opplevelser lærerstudentene har hatt før og underveis i MaTeK- prosjektet. Erfaringer lærerstudentene har fra tidligere innebærer emner de har hatt i studiet så langt, praksis og erfaringer som lærervikar. Erfaringer underveis innebærer fellesskapet de har vært en del av, hvor studentene har tatt i bruk hverandre som ressurser for læring og til å tilegne seg kunnskap om temaene de har hatt om underveis i prosjektet. Disse erfaringene kan påvirke hvilke kunnskaper studentene tilegner seg. Ut fra konteksten vil vi som Petrou og Goulding (2011) beskriver i deres syntesemodell, se utviklingen lærerstudentenes undervisningskunnskap innen R&B. Konteksten er sentralt i dette rammeverket for å kunne begrunne og se på årsaker til studiens resultater av studentenes utvikling av kunnskap i matematikkundervisning.

Rammene for konteksten som lærerstudentene oppholder seg i, er satt av det norske kunnskapsdepartementet som sier noe om oppbygningen av studieløpet til grunnskolelærerutdanningen 5.-10. Ifølge retningslinjer gitt av Kunnskapsdepartementet (2010), skal innføringen i matematikk på dette studieløpet innebære matematikdidaktiske og matematikkfaglige temaer. Studiets oppbygning frem til deltakelse på MaTeK-prosjektet, er beskrevet i tabell 3:

1.år	Høst	PEL	Matte 1	Praksis 1: 30 dager
	Vår	Fag A	Matte 1	
2.år	Høst	Fag A	Matte 2	Praksis 2: 30 dager
	Vår	PEL	Matte 2	
3.år	Høst	Fag B		Praksis 3: 25 dager
	Vår	Fordypning		
4.år	Høst	PEL	Matte 3	Praksis 4: 15 dager
	Vår	PEL	Matte 3	

Tabell 3: Skisse for studieløpet til deltakerne i MaTeK-prosjektet. Tabellen er en skisse av de retningslinjene som er gitt av Kunnskapsdepartementet (2010). Tabellen viser fordelingen av fag og praksis som lærerstudentene gjennomgår i studieløpet.

Oppfatning (O) er et sentralt element i modellen for å reflektere rundt lærerstudentenes oppfatninger rundt R&B i matematikk, og rundt undervisning og læring i dette temaet (Contreras-González et al., 2013). Oppfatninger kan for eksempel være hvor stort fokus studentene har på R&B i sin egen matematikkundervisning, og hva studentene mener R&B er relevant for i matematikk og læreplanen. Oppfatninger som et element i denne modellen virker interaktivt med de andre elementene. Altså kan spesifikke oppfatninger som studentene har, påvirke resten av modellen i form av hvilke ulike kunnskaper studentene tilegner seg og fokuserer på. Samtidig kan den kunnskapen studentene tilegner seg underveis i prosjektet påvirke deres oppfatninger.

Pedagogisk kunnskap (PK) baserer seg på kategorien pedagogisk innholdskunnskap fra Contreras-González et al.(2013). Her har vi tatt i bruk underkategoriene KFLM, KMT og KMLS for å definere hvilken type pedagogisk innholdskunnskap studentene tilegner seg iløpet av prosjektet. Dette innebærer at studentene har kjennskap til hvordan man lærer matematikk, for eksempel hvilke arbeidsmetoder man kan bruke og hvordan elevene lærer om R&B. I dette prosjektet har vi hatt mest fokus kunnskap i undervisning innen R&B i matematikk, som for eksempel er å ta i bruk og formulere relevante representasjoner, eksempler og oppgaver i undervisningen for å fremme resonnering hos elevene. Studentene har blant annet i løpet av prosjektet vært gjennom læregrep og undervisningsplanlegging i form av å designe oppgaver som fremmer resonnering hos elevene.

Matematisk kunnskap (MK) baserer seg på kategorien matematisk kunnskap fra Contreras-González et al. (2013). I likhet med kategorien for PK, har vi tatt i bruk underkategoriene KoT, KSM og KPM for å definere hvilken type matematisk kunnskap studentene tilegner seg i løpet av prosjektet. Disse kunnskapene innebærer å ha et høyere nivå av kunnskap om konsepter og prosedyrer enn eleven har, for eksempel at studentene i tillegg til å ha den kunnskapen innen resonnering som eleven skal ha, også har kunnskap innen teori om ulike typer av resonnering, som de har gjennomgått i løpet av dette prosjektet. Det innebærer også kunnskap om matematisk praksis, altså måter å argumentere, bruke representasjoner og generalisere. Dette forbinder vi blant annet med sosiomatematiske normer som studentene vil bruke i sin matematikkundervisning, og hvordan de bruker sin MK til å argumentere og representere innen R&B. I tillegg vil vi se etter kunnskap om egenskaper til objekter, strukturer og hovedideer i matematikk.

Læreplankunnskap (LK) baserer seg på kategorien LK i modellen fra Petrou & Goulding (2011). LK blir ifølge denne modellen definert som kunnskap lærerstudentene har om tilgjengelig undervisningsmateriale, spesielt da kunnskap om innhold av R&B i læreplanen for matematikk, og hvilken rolle den har. Studentene har under prosjektet hatt arbeidskrav om R&B i læreplanen, og vi ser etter hvordan studentene kobler sin kunnskap om R&B i læreplanen til mål, planlegging og gjennomføring av undervisning.

På bakgrunn av at responsen fra deltakerne ikke kun kan kategoriseres innenfor en kunnskapskategori eller oppfatning eller kontekst, er det blitt dannet kategorier for koblingene mellom dem (Tabell 4). Datasettene ble kategorisert i analysen etter de ulike fasene i MaTek-prosjektet og ut fra hvilken kategori svarene kobles til:

Kategorier i analysen	Forkortelser
Matematisk kunnskap	MK
Pedagogisk kunnskap	PK
Læreplankunnskap	LK
Oppfatninger	O
Kontekst	K
Matematisk kunnskap og pedagogisk kunnskap	MK-PK
Pedagogisk kunnskap og læreplankunnskap	PK-LK
Matematisk kunnskap og læreplankunnskap	MK-LK
Oppfatninger og matematisk kunnskap	O-MK
Oppfatninger og pedagogisk kunnskap	O-PK
Oppfatninger og læreplankunnskap	O-LK

Tabell 4: Skisse over koder for de ulike kunnskapene og oppfatninger, samt koblingene mellom de ulike i rammeverket for analysen.

3.7.2 Analyse av data

Modellen for matematikklærerens spesialiserte kunnskap (Figur 6), ble satt som rammeverk for denne deduktive analysen. Fordelen med en deduktiv analyse, er at den gir forskeren et mer nyansert synsfelt av datamaterialet som ble undersøkt (Clark et al., 2021), men så avgrenses den også av de teoretiske rammene i modellen. I denne masteroppgaven vil derfor analysen belyse nyanser og utvikling innenfor rammene for matematikklæreres spesialiserte kunnskap, og den norske konteksten ved universitet.

I analysen av datamaterialet skiller vi mellom tre ulike faser i MaTeK-prosjektet, de ulike kunnskapene, oppfatninger, kontekst og koblinger mellom disse ulike elementene. De tre ulike fasene i analysen er før MaTeK-modul, underveis i MaTeK-modul og etter endt MaTeK-modul.

Det vi beskriver som *før MaTeK-modul* (fase 1) er alt som skjedde før lærerstudentene ble påvirket av ny teori. Data fra fase 1 innebærer altså transkripsjon fra fokusgruppeintervjuene før MaTeK-modul.

Det vi beskriver som *underveis i MaTeK-modul* (fase 2) er alt som skjedde mellom første undervisningsøkt og siste undervisningsøkt. Data fra fase 2 innebærer datasett fra exit-lapper og arbeidskrav som studentene leverte underveis i MaTeK-modul.

Det vi beskriver som *etter endt MaTeK-modul* (fase 3), er alt etter den femte undervisningsøkten. Data fra fase 3 innebærer en individuell refleksjonstekst og transkripsjon fra fokusgruppeintervjuene etter endt MaTeK-modul.

I analyseprosessen ble alt av datamaterialet fra de fire lærerstudentene i fase 1,2 og 3 av MaTeK-prosjektet nøye transkribert, analysert og kategorisert. I analysen delte vi (masterstudentene) de fire lærerstudentene mellom oss. Det vil si at lærerstudentene har blitt nøye analysert av en masterstudent, før den andre masterstudenten gikk over kodene. Dette for å sikre at lærerstudentene sine responser ble tolket på likt grunnlag. Ved eventuelle uklare responser og ulike tolkninger på lærerstudentene sine responser, ble responsen diskutert muntlig mellom oss (masterstudentene) før den ble plassert i tilhørende kategori. I analysen av datamaterialet ble det brukt en tabell (Vedlegg 6) med de ulike kategoriene fra modellen for analyse (Figur 6). I analyseprosessen ble transkripsjonene fra fase 1, 2 og 3 fordelt mellom oss (masterstudentene).

I transkripsjoner der lærerstudentene deltok i grupper, ble responsen gitt av de valgte lærerstudentene plukket ut av datamaterialet. Dette innebærer datamateriale fra før og etter intervjuene i MaTeK-prosjektet og analysen begrenses av kriteriene for deltakerne i denne masteroppgaven. Etter at de relevante dataene fra datasettene ble plukket ut, ble responsen til hver lærerstudent tolket og kategorisert ut fra modellen for analyse (Figur 6) og plassert i en tabell for en samlet analyse (Vedlegg 6). Lengden på responsene fra lærerstudentene var ulik, men responsen gitt i et svar ble kategorisert i en kategori, uavhengig av lengden.

De individuelle responsene som exit-lapper, arbeidskrav og refleksjonstekst ble analysert og kategorisert etter innholdet i den skriftlige responsen. Denne responsen ble analysert i sin helhet for hver lærerstudent i MaTeK-prosjektet. I den skriftlige responsen ble en respons satt av lengden på avsnittet i teksten. All respons gitt av lærerstudentene ble her også kategorisert etter innholdet og hvilken fase i MaTeK-prosjektet datamaterialet tilhørte.

Når alt av datamaterialet fra de ulike fasene av MaTeK-prosjektet hadde blitt analysert og kategorisert, ble responsen i de ulike kategoriene satt inn i en oppsummerende oversikt. Dette for å finne felles karakteristikk for de ulike fasene. Målet var å kunne si noe om den felles utviklingen lærerstudentene hadde hatt gjennom MaTeK-prosjektet. For å kunne gjøre dette ble responsen fra studentene forkortet og oppsummert som hva det kjennetegner. Dette kunne være at lærerstudenten snakket om formuleringer av oppgaver og koden for responsen ble da "fokus på formuleringer i oppgaver".

3.8 Forskningsetikk

I prosessen med datainnsamling, har vi tatt hensyn til forskningsetikk og hvordan ta vare på deltakernes personvern. Alle deltakerne fra datainnsamlingen er over 18 år og har frivillig skrevet under på et samtykkeskjema (Vedlegg 7), hvor de har godtatt å være med på intervju med lydopptak, og deltakelse i MaTeK-modul med lydopptak og filmopptak. Det har også blitt godkjent at vi kan bruke skriftlige innleveringer som deltakerne har jobbet med i dette semesteret.

I prosessen med å ta vare på innsamlet data som lydopptak og filmopptak, har alle filer blitt lagret på godkjente servere, hvor vi har tatt i bruk universitets servere for oppbevaring av filer. Intervjuene og lydopptak som vi tar i bruk har blitt transkribert,

hvor alle deltakerne har blitt pseudonymisert ved at vi har kodet hver enkelt deltaker slik at de ikke kan bli kjent igjen på navn. De fikk hvert sitt studentnummer i transkripsjonen. Dette studentnummeret sier noe om hvilken fokusgruppe deltakerne deltok i, samt et eget tall for å skille deltakerne innad i gruppen. Kodene for lærerstudenten ble dermed student 3.2, altså lærerstudenter fra fokusgruppeintervju 3 og vilkårlig nummer 2. Selv om deltakerne har fått pseudonymer, vet likevel masterstudentene hvem deltakerne er, og deltakerne vet også om hverandre og kan derfor potensielt kjenne igjen hverandre i resultatet. Dermed kan vi ikke si at deltakerne er anonymisert. Både film og lydopptak blir slettet i ettertid.

3.9 Troverdighet

Vår oppgave baserer seg på en kvalitativ studie, som vil si at forskeren er involvert i interaksjoner, og er en del av prosessen i innsamlingen av data. Dermed har vi som forskere kommet tett på deltakerne og på denne måten fått inn mye nyttig informasjon. Samtidig kan vår tolkning av data, og vår involvering i innsamlingen av data, være med på påvirke resultatet. Dette vil vi nå reflektere over, for å vurdere troverdigheten av vår datainnsamling og funnene som kommer i oppgaven.

I vår studie har vi brukt flere ulike typer kilder for innsamling av data. Vi har både tatt i bruk intervju, observasjon og skriftlige innleveringer fra deltakerne for å samle informasjon om deres kunnskaper og synspunkter om undervisning i R&B, og hvordan disse elementene utvikler seg hos studentene gjennom emnet og intervensjonen. Dermed har vi triangulert ulike datakilder. Med støtte fra flere ulike typer kilder, har vi dermed et godt utgangspunkt for å kunne bygge en sammenhengende begrunnelse for våre resultater.

Gjennom studien har vi som forskere tilbragt mye tid med deltakerne. Dette fra første møte for å bli kjent med deltakerne før intervensjonene startet, til å ha vært med å observert og kommunisert med deltakerne gjennom flere dager med intervensjoner, hatt intervjuer og i helhet fulgt deltakerne i en flere ukers lang periode. Dermed har vi blitt godt kjent med deltakernes læringsprosess. Vi (masterstudentene) har vært en del av læringsprosessen, hvor vi hele tiden har kommunisert med studentene. Vi som forskere har fått en dyptgående forståelse av denne casen og et helhetlig bilde av studentenes utvikling.

Datainnsamlingen har gjennom hele prosessen vært i samarbeid med MaTeK-prosjektet. Gjennom dette samarbeidet har forskere fra samtlige land som deltar i prosjektet, blitt enig om metode for datainnsamling. Dermed har den samme prosessen med datainnsamling og intervensjoner blitt gjennomført i flere land. På denne måten har flere vurdert og godkjent metoden for denne datainnsamlingen. Vi har også gjennom datainnsamlingen kommunisert med veileder som også leder dette prosjektet i Norge, og fått tilbakemeldinger og et kritisk blick på våre funn.

I det gjennomførte intervjuet er det flere faktorer som påvirker resultatet, dette på bakgrunn av hva som blir sagt og hvordan samtalen utvikler seg innad i gruppen. For deltakerne i intervjuet er det flere faktorer som har blitt tatt hensyn til før gjennomførelsen. Den første faktoren er at det er likevekt mellom forskere og deltakere, der vi som forskere ikke ser ned på deltakerne. Dette kan vi argumentere for gjennom at det er lærerstudenter som intervjuer lærerstudenter. Dette kan være med på å danne en balanse og trygghet mellom deltakerne og intervjuere, da det faglige nivået var ganske

likt hos begge. Fordelen med dette er at nivået for samtalen kan senkes hos lærerstudentene, og dette kan føre til at de lettere kan fortelle om oppfatninger eller erfaringer de har hatt underveis i utdanningsløpet. En annen faktor som kan ha spilt en rolle for hvilke data vi fikk inn, er at intervjuene ble gjennomført i grupper. Dette kan innvirke på resultatene alt etter som hvem som startet å si noe, og hvor komfortabel gruppemedlemmene er med hverandre. Et eksempel kan være at student 1 kom med påstand 1, mens student 2 egentlig hadde en annen påstand, men likte påstand 1 hos student 1, og sa seg derfor enig. Denne situasjonen prøvde vi å unngå ved to tilrettelegginger: valgfrie grupper slik at studentene kan være komfortable med hverandre, og en understrekelse før intervjuet om at det er lov å være uenig med hverandre, og at variasjon i synspunkter var ønskelig.

Underveis i prosessen med innsamling av data har vi forskere som nevnt hatt en aktiv rolle. Som intervjuere og observatører har målet vært å være så nøytral og åpen mot deltakerne som mulig, men vår deltakelse og tette interaksjon med deltakerne kan likevel ha hatt påvirkning på datainnsamlingen, som vi nå vil vurdere. Her kan påvirkning ha skjedd spesielt i forhold til observasjon av forelesning, feltarbeid og intervju. Under intervjuene gikk vi flere ganger bort fra fastsatte spørsmål for å stille oppfølgings spørsmål. Dermed kan vi under intervjuene ha påvirket samtalen i en annen retning enn hvis studentene selv hadde tatt samtalen. Ved observasjon i forelesninger, filmet vi som observatører de gangene vi mente det var nødvendig. Dermed har datainnsamlingen blitt påvirket av våre valg av filming, hvor vi potensielt kan ha mistet nyttig informasjon basert på dette.

Resultat

4.1 Resultater

Ved å se på forskningsspørsmålet for denne oppgaven: Hva karakteriserer endringene i matematikklærerstudenters spesialiserte kunnskap for å undervise i resonnering og bevis gjennom deltakelse i MaTeK-prosjektet? Bli det i denne delen av masteroppgaven presentert analyse av studentenes utvikling delt inn i før, underveis og etter MaTek-modul, og hvilke trekk som er felles for alle studentene.

For å analysere det utvalgte datamaterialet som består av før- og etter intervju (I), exit-lapper (E) og refleksjonstekst (R) og arbeidskrav (AK), tar vi i bruk en egenutviklet modell som bygger på syntesemodellen av Petrou & Goulding (2011) og modellen for matematikklærerens spesialiserte kunnskap av Contreras-González et al. (2013). Nå vil vi vise resultatene ved å presentere kategoriene matematisk kunnskap (MK), pedagogisk kunnskap (PK) og læreplankunnskap (LK) i modellen en og en. Dette vil vi gjøre ved å vise frem utviklingen studentene har hatt innen disse tre type kunnskaper, og hvordan denne utviklingen også påvirker studentenes oppfatninger (O) i matematikkundervisning og hvordan studentenes oppfatninger også påvirker deres kunnskaper tilbake. Deretter vil vi i analysedel også se på utviklingen av koblingene mellom de tre ulike kunnskapene, hvor alle tre kunnskaper virker inn på hverandre. Til slutt vil vi oppsummere analysen med bruk av denne modellen i et helhetlig bilde.

4.2 Hovedfunnene i MaTek-modul

Oppsummert har lærerstudentene i løpet av MaTeK- modulen, hele veien hatt mest fokus på å reflektere rundt og formidle kunnskap som omhandler PK, der det har skjedd en økning hele veien. Etter PK fokuserer studentene mest på MK, som også har endret seg gjennom prosjektet. Derimot ser vi at studentene har hatt minst fokus på LK, hvor mengden fokus på LK også synker gjennom prosjektet. Vi ser også at kategoriene som viser koblingen mellom MK-PK også øker underveis i prosessen, dette vil vi beskrive mer detaljert senere i resultatdelen.

Videre i analysen vil vi gå mer detaljert inn på innholdet i de ulike kategoriene, og hvordan kunnskapen og oppfatninger rundt PK, MK og LK har utviklet seg eller endret seg i løpet av prosjektet i form av hva studentene legger i disse kategoriene. Altså hva karakteriserer utviklingen hos lærerstudentene innen R&B gjennom prosjektet. Nå vil vi først presentere hovedfunnene for dette. Lærerstudentene har gjennom prosjektet vært gjennom arbeidskrav og forelesninger som omhandler alle de tre hovedkategoriene PK, MK og LK fra vår modell. Det helhetlige bildet av utviklingen studentene har hatt innen R&B, er at studentene hovedsakelig har tilegnet seg nye kunnskaper innen PK. Alle studentene har i ettertid av prosjektet et stort fokus på hvordan de skal lage oppgaver og stille spørsmål til elevene med mål om å fremme deres resonnering i hele prosessen i løpet av en undervisningstime. Når det gjelder studentenes karakteristiske utvikling innen MK, uttrykker mange av studentene at de har fått et nytt fokus på bevissthet på muligheter for å resonnerer på ulike måter, på ulike nivåer. Her er de også enige om at de har vanskeligheter med å teoretisk kunne skille ulike typer av resonnering, og at dette er noe de burde jobbe videre med. Samtidig har studentene i større grad i ettertid av prosjektet gitt oss svar som viser at de kobler sin MK opp mot PK. Lærerstudentene

knytter ulike metoder for å resonnerer opp mot hvordan de vil legge til rette for å fremme resonnering hos elevene i en matematikktime.

4.3 Karakteristisk utvikling innenfor matematisk kunnskap

4.3.1 Eksempler innenfor matematisk kunnskap

Første hovedelement fra modellen (Figur 6), vi vil presentere er MK. Ifølge Contreras-González et al. (2013) gjelder denne kunnskapen eksklusivt for lærere. MK handler her om lærerstudenters kunnskap om matematiske emner. Studentene skal ha kunnskaper som ligger på et høyere nivå enn det elevene selv har. De skal ha kunnskap om strukturer i matematikk, hvor læreren blant annet ser forbindelser mellom tidligere og videre emner i matematikken, og hvordan matematisk praksis handler om å se relasjoner mellom ulike konsepter, generalisere og argumentere. I denne analysen fokuserer vi på å se etter disse kunnskapene spesifikt innen R&B.

I den første fasen av MaTeK- prosjektet ble studentene spurt om deres kunnskaper om R&B. De ble også spurt om hvilken rolle R&B har, eller som lærerstudentene ser for seg vil ha i deres undervisning. Svarene studentene ga på dette intervjuet viste fram flere fellestrekk for hva lærerstudentene legger vekt på, har kunnskap om og forbinder med R&B før MaTeK- modul. Når det gjelder hva studentene forbinder med undervisning i R&B, kommer flere studenter med eksempler på ulike typer av formelle bevis for matematiske formler. Her nevner for eksempel noen av studentene en formel for å finne løsninger på andregradslikninger, og noen nevner Pythagoras teorem. Når det gjelder type R&B studentene er kjent med fra før, nevner flere av studentene å referere til autoritet som en type resonnering de har hørt om før.

Intervjuer (I): *Hva hvis dere liksom tenker tidligere i studie, eller kanskje sånn tilbake til egen skolegang og hvilke type resonnering og bevis har dere vært gjennom? Føler dere?*

Student 2.2 (I): Og så stol blindt på autoriteter. Ja, du sa at det var sånn ja da er det sånn, uansett?

Student 2.1 (I): Ja og i boka så sto det at man skulle gjøre på den måten, så da byttet jeg de tallene som står i boka med de jeg fant nå, så det da har det blitt sånn, og det er derfor det er riktig fordi det var sånn enten boka gjorde det sist. Ellers så var det sånn du regnet det på tavla i stad.

Dette er også en type resonnering flere kobler til egen skolegang. Ellers uttrykker flere av studentene at de husker lite om typer av R&B.

I den andre fasen av MaTeK- prosjektet går studentene gjennom definisjoner og ulike typer av R&B. I tillegg ser de på ulike videoer og elevsvar, hvor de analyserer hvilken type av resonnering elevene tar i bruk. Gjennom exit-lapper har studentene reflektert over hva de lærer underveis, og vanskeligheter de møter på. Her uttrykker samtlige av studentene vanskeligheter med å skille ulike typer resonnering, og det å få en god forståelse for definisjonen av begrepene R&B.

Student 4.3 (E): Synes kategoriseringen av resonneringsmetoder kan være vanskelig å skille. Flyter litt inn i hverandre.

Student 5.3 (E): Å definere begrepet resonnering og få en konkret forståelse for det (...) sliter litt med å skille ulike [typer av resonnering] og se når jeg selv bruker det.

I den tredje fasen av MaTeK- prosjektet samlet vi informasjon for å oppsummere studentenes utvikling gjennom refleksjonstekst og post- intervju. Alle studentene gir uttrykk for at typer av R&B er noe de selv burde jobbe videre med, og flere mener at de fortsatt kan ha vanskeligheter med å skille spesifikke typer av resonnering i ulike situasjoner.

Student 4.3 (I): Jeg synes det er vanskelig å skille de [typer av resonnering], men også den her, jeg husker ikke navnet på artikkelen, men da fikk vi liksom de forskjellige typene, måtene reasoning.

Student 2.2 (I): Jeg har blitt mer bevisst på det [typer resonnering], men for min del så tror jeg det å skille det [typer resonnering] også kommer med øvelse, og at det på en måte må prøve å gjøre det mer.

Student 2.1 (I): Kjenner at jeg sliter litt med å tydelig separere det med resonnering og begrunnelse.

Selv om studentene viser til at de synes det å skille mellom måter å resonnerer på er vanskelig, opplever studentene som student 2.2 sier over, at de har blitt mer bevisst på hva resonnering innebærer.

Student 2.1 (I): At det er ulike måter da, mange forskjellige, flere enn det jeg har tenkt på før av ja. (...) Jeg følte at nå fikk jeg på en måte litt mer sånn annet syn på hva det [resonnering] er da, (...) det er ikke bare å skrive oppskriften på hvordan du regner ut en oppgave, men at det er mange andre måter også da.

Student 5.3 (I): Det som jeg ble mest overrasket over, eller det som jeg har tenkt mest over i ettertid, er at når man blir spurt om å begrunne og si hva du har tenkt, så sier man ofte hva man har gjort, i stedet for hvorfor man har gjort det.

Student 4.3 (R): Jeg tror jeg nå kan ganske greit i mange tilfeller kategorisere og identifisere de forskjellige måtene elevene resonnerer på.

Her har det skjedd en endring i hva studentene definerer resonnering som, altså deres oppfattelse av hva resonnering innebærer. Student 4.3 påpeker at han nå er klar over de ulike måtene elevene kan resonnerer på, og at han klarer å identifisere dem. Både student 2.1 og 5.3 sier her at de har gått fra å definere resonnering som å forklare hva du har gjort, som en oppskrift, til å se nye måter å resonnerer på som innebærer en forklaring som begrunner at det du gjør stemmer. Hvis vi tar i bruk Herbert et al. (2015) sine kategorier for læreres oppfatninger av resonnering, ser vi at student 2.1 og 5.3 sin oppfatning av resonnering før MaTeK- modul gikk under kategori B, hvor studentene assosierte resonnering med å kommunisere sine tanker gjennom å vise hva du har gjort for å komme fram til svaret. Videre ser vi at begge studentene i etterkant av MaTeK- modul ser andre måter å resonnerer på, og mer kompleksiteten av hva resonnering innebærer. Her går for eksempel student 5.3 sin nye oppfatning om hva resonnering innebærer, under kategori F, som sier at resonnering oppfattes som å ta i bruk logiske

argument for å validere antakelser. Student 5.3 sin oppfattelse av resonnering passer inn i denne kategorien fordi studenten assosierer resonnering med å ikke bare forklare hva du har gjort, men gi begrunnelse for dine tanker, og hvorfor dette er korrekt.

Det har derfor skjedd en endring av studentenes forståelse av hva definisjonen av resonnering inneholder, altså en endring i deres MK. Studentene ser også på grunn av dette nye metoder for argumentasjon som er ønskelig å ta i bruk i matematikken, slik som student 4.3 og 5.3 påpeker i etter- intervjuet:

Student 4.3 (I): Man tenker liksom ikke over så mye hva som er gyldig begrunnelse eller hva begrunnelse vil si eller hva resonnering vil si ut fra hva eleven kan. For eksempel det her med å ja kunne skille ut eksperimentell demonstrasjon da, som i øyeblikket kan virke som det er rettferdig. (...) Jeg tenker at det egentlig bare er empirisk (...), og det er jo ikke noe deduktiv bak det som bli sagt så.

Student 5.3 (I): Det er jo en stigning i hvordan du gjør det [resonnerer], men at du begynner med å referere til autoritet eller til boken fordi du har sett det sånn og så etter hvert så, skjønner du jo faktisk hva det er du har gjort.

Her tolker vi at student 4.3 og 5.3 har fått et større fokus på å gå fra en induktiv til en deduktiv metode for resonnering som et form for bevis, altså en type argumentasjon som bekrefter at det man gjør i matematikk stemmer. Her sier for eksempel student 5.3 at det er en stigning i hvordan du resonnerer, hvor man starter med å referere til autoritet og dermed utvikler argumentasjonen sin stigende, altså en mer optimal argumentasjon. Student 4.3 trekker fram eksperimentell demonstrasjon som bare en empirisk metode, og at det ikke er noe deduktivt bak det. Altså ser student 4.3 et potensial til å ytterligere ta i bruk en rekke logiske resonnementer som gjør et resonnement sant (Jeannotte & Kieran, 2017; Kimming, 2013).

Når studentene i etterkant av prosjektet skal komme med eksempler på en måte å resonnerer på, er det i likhet med tidligere i prosjektet at studentene bruker eksempelet å referere til autoritet.

4.3.2 Matematisk kunnskap knyttet mot oppfatninger

I denne analysen vil vi koble alle tre kunnskaper PK, MK og LK opp mot studentenes oppfatninger rundt matematikkundervisning. Derfor har vi en egen kode for MK koblet opp mot oppfatninger. Før oppstarten av prosjektet varierer det i denne koden hva lærerstudentene har av oppfatninger som er koblet til deres MK. På to av studentene finner vi ikke noen sitater som går innenfor denne kategorien. En student nevner at R&B er relevant spesielt innen geometri og formler, og at studenten forbinder resonnering med at en typisk metode elever tar i bruk for å argumentere i matematikk er en prøve og feile metode. En annen student har en oppfatning om at det er vanlig å referere til autoritet som en metode for argumentasjon, gjennom å se tilbake på egen skolegang.

I etterkant av MaTeK- prosjektet har studentene et stort fokus på prosessen i matematikk, og hvor viktig det er. Med prosessen mener studentene fokuset på hvorfor et svar i matematikken stemmer og metoder du tar i bruk for å argumentere for dette. Flere av studentene påpeker at R&B som en aktivitet i matematikk er en viktig del av matematikkfaget, og at dette er noe de selv ønsker å fokusere på i sin fremtidige undervisning. Studentene har også selv påpekt at de har blitt mer bevisst på at det

finnes ulike metoder for å argumentere, og de ser nytteverdien av å kunne argumentere for et svar på forskjellige måter. Her uttrykker student 5.3 og 2.1 i etter- intervjuet at deres oppfatninger om hva resonnering innebærer, har forandret seg:

Student 5.3 (I): Ja for jeg føler jo at man ble mye mer bevisst på det med at du må faktisk argumentere for hvorfor det du gjør er en riktig måte å gjøre det på. Du må på en måte argumentere for at det du har gjort, gjort gir riktig svar.

Student 2.1 (I): Jeg føler det har endret seg veldig. Fordi som sagt, så synes jeg, jeg har vært vant til at hvis du bare sier hva du har gjort bare gjør det samme som du har gjort matematisk. Bare beskriver det med ord, så har det ofte vært litt sånn nok. Mens nå så ser jeg jo at det er så mye mer, og at det faktisk er veldig. Jeg synes det er veldig fint overfor meg selv å tenke over hvorfor gjorde jeg sånn som jeg gjorde nå og veldig sånn hvorfor kan det her stemme?

Som vist i under 4.3.1 eksempler innen MK, har det skjedd en tydelig endring i studentenes forståelse av hva resonnering er. Slik som student 2.1 også svarer her, så handler ikke resonnering bare om hva du har gjort og hvordan du går fram. Det handler også om argumentasjon for hvorfor det du gjør i matematikken stemmer. Denne endringen i MK hos studentene, har virket inn på deres oppfatninger innen undervisning i matematikk, slik som for eksempel Student 2.1 og 5.3 viser her:

Student 2.1 (I): Jeg ser jo at det [resonnering] egentlig er veldig viktig del av matematikken. Fordi jeg synes det [resonnering] hjelper mye til problemløsningen når de skal løse lignende oppgaver og hva er mest effektivt her? Og du tenker mye mer gjennom hva du gjør da synes jeg.

Student 5.3 (I): Jeg føler jo at man skjønner mer og mer at det er forståelsen du er ute etter, det er ikke nødvendigvis det riktige svaret. (...) Jeg har alltid som elev, så har jeg alltid syntes at det er så unødvendig tidsbruk å bruke så mye tid på å liksom forklare, sette prøve på svaret og utredninger og alt det.

Her ser student 2.1 og 5.3 viktigheten av å ta i bruk resonnering i matematikk. Student 2.1 ser nytten i resonnering og hvordan bruk av resonnering kan virke positivt for problemløsning i matematikk. Student 5.3 ser nå på prosessen i seg selv som et mål i matematikken, og har en annen opplevelse av viktigheten av resonnering nå enn når student 5.3 selv var elev. Studentene viser her at de ser hva resonnering kan være nyttig for i matematikken, og at resonneringer underveis i en matematisk prosess burde være et mål i seg selv.

4.3.3 Hovedfunn innenfor matematisk kunnskap knyttet opp mot problemstillingen

Underveis og i etterkant av prosjektet har vi sett noen tendenser til utvikling som gjelder felles for studentene. Studentene har etter dette prosjektet blitt mer bevisst på potensialet som ligger i argumentasjon og typer resonnering som en aktivitet i matematikk, og hvordan denne måten å jobbe på i matematikk kan fremme matematisk forståelse. Studentene legger også mer vekt på viktigheten av prosessen i matematikk, og kobler fokus på prosessen i matematikk videre opp mot sin egen måte å undervise på. I tillegg til dette er det gjennomgående at studentene synes teori om R&B, spesielt å

skille ulike typer av resonnering kan være vanskelig, og at de selv kunne trenge mer øvelse på dette.

I refleksjonstekst og etter-intervju har studentene oppsummert hva de nå har lært og hva de ønsker å ta med seg videre inn i læreryrket og i sin undervisning i matematikk. Det lærerstudentene legger mest vekt på innen MK er resonnering i form av å forstå hvorfor det du gjør i matematikken stemmer og videre argumentasjon for dette, og viktigheten og relevansen av R&B inn i matematikkundervisningen.

4.4 Karakteristisk utvikling innenfor pedagogisk kunnskap

Et annet hovedelement i analysen (Figur 6) er PK. Noe som blir beskrevet av Contreras-González et al. (2013) som kompetanser hos matematikklærere, som knyttes opp mot de kognitive tankeprosessene elevene har i løpet av en oppgave. Dette i tillegg til hvilke vansker elevene kan møte underveis, og hvilke kunnskaper læreren burde ha knyttet til matematikkundervisningen. I løpet av MaTeK-prosjektet har vi sett på hva som karakteriserer utviklingen lærerstudentene har i R&B gjennom denne kunnskapen ved deres deltakelse i MaTeK- prosjektet.

4.4.1 Eksempler og sammenligninger innenfor pedagogisk kunnskap

I den første fasen i MaTeK- prosjektet, altså fasen før MaTeK- modul, kjennetegnes lærerstudentenes vektlegging av R&B opp mot PK, ved at lærerstudentene ikke trekker disse linjene. Fokuset innenfor PK hos lærerstudentene i denne delen av prosjektet var rettet mot lærerens bruk av materiale, valg av undervisningsmetode og hvordan sikre fagkompetanse hos elevene. Dette kan vi se ved utsagn som:

Intervjuer (I): *Hvilke metoder ville du brukt da i oppgavejobbingen?*

Student 2.1(I): Nei, for eksempel at jeg hadde funnet noen oppgaver hvis de har bok [Matematikkbok]. Da kan de [elevene] jobbe med den. Det er mange [skoler] som har digitale bøker, og det er masse nettsider med utallige oppgaver. Å prøve å finne forskjellige oppgaver, som kan utfordre de ulike elevene fordi, tviler på at alle er på samme nivå i en klasse. Så det er mulighet for at de [elevene] som synes det er kjempelett, kan utfordre seg litt på at det er litt enklere oppgaver også for de [elevene] som bare trenger å få mestret litt og da. Så funnet litt sånn varierte oppgaver der de [elevene] kan styre litt selv, og hvilket nivå de etter hva de [elevene] vil jobbe med.

Student 2.1 vil nå sine mål for undervisningen av matematikk gjennom å vektlegge bruken av ressurser for å fremme kunnskaper, som studenten nevner som fysiske matematikkbøker, nettbøker eller nettressurser for å finne oppgaver til ulike kompetansenivå hos elevene. Dette knytter vi opp mot Contreras-González et al. (2013) sine rammer for PK, gjennom hvordan elever lærer matematikk, samt hvordan progresjonene er hos elevene og hva som kan forventes av de. I denne prosessen tolker vi student 2.1 sin respons som vektlegging av ulike ressurser slik at elevene kan utvikle seg etter sitt eget nivå, og jobbe med oppgaver knyttet til sin egen utviklingszone.

I den andre fasen av MaTeK- prosjektet trekker studenten frem nye trekk ved PK. Fra tiden underveis i MaTeK-modul ser vi at studentene trekker flere koblinger til blant annet lærergrepene, og viktigheten av å formulere matematikkoppgaver slik at de fremmer

resonneringen hos elevene. I denne fasen kjennetegnes endringer av et større fokus på lærerens rolle i undervisningen. Dette ser vi for eksempel ved:

Student 2.1 (E): Hvordan man [lærer] kan ordlegge seg for å påvirke elevens læring og utvikling innenfor resonnering.

Student 4.3 (E): Hvor viktig formulering av oppgaver er for hva du [lærer] ønsker elevene skal oppnå og ta med seg fra timen [matematikk].

Student 2.1 viser til at valgene læreren tar knyttet til ord og begreper, vil påvirke elevens læring. Dette viser til lærergrepene som læreren kan gjøre for å fremme resonnering hos elevene, og går inn under lærerens PK. Dette på bakgrunn av lærerens kunnskap for eventuelle problemer elevene møter på ved å ordlegge seg slik at de kan utvikle sine kunnskaper og eventuelle misoppfatninger. Vi tolker lærerstudentens respons som at den vektlegger PK i undervisning av R&B.

Samtidig forteller student 4.3 i sin respons om viktigheten av formuleringen av oppgaven for elevene. Dette knyttes til lærerens PK på bakgrunn av viktigheten av å velge ut spesifikke materialer for å for eksempel fremme et konsept (Contreras-González et al., 2013). Dette knyttes til matematisk resonnering, ved at lærer tilrettelegger for at elevene skal kunne drive aktiviteter som fremmer resonnering i undervisningen.

I den tredje fasen av MaTeK- prosjektet reflekterer lærerstudentene over hva de har tatt med seg videre fra MaTeK-modul. I spørsmål knyttet til hva som er det viktigste de har lært gjennom modulen, trekker studenten frem viktigheten av hvordan formuleringer og endringer av oppgaver gjøres for at elevene skal drive resonnering.

Student 2.2 (I): Ja, mye av det føler jeg [lærerstudenten], eller for meg handler om det å være mer reflektert rundt, blant annet i oppgavene man lager, og at formuleringer bare enkelte ord har veldig mye å si for hva du vil få ut av oppgaven,(...), det er flere sånne tips og triks man kan bruke da for å få fram resonnering hos elevene, at det på en måte både kommer gjennom dialog i klasserommet og de oppgavene man lager. Og kulturen at det har at det har veldig mye å si da. Fordi jeg føler at før så tenkte jeg ikke over det så mye.(...)

Student 2.1 (R): Tidligere i praksis har jeg heller tatt oppgaver jeg har funnet i bøker eller på nett når jeg skal lage et opplegg i timene. Jeg likte derfor å få kjenne på hvor mye små endringer på oppgaver faktisk kan bety for elevenes læring. Dette var også veldig fint å få testet ut i øktplanen vi lagde som ble prøvd ut i klassen til xx [læreren]. Her fikk jeg også kjenne på hvordan man kan faktisk tenke enda mer enn man tror over oppgaver når man lager de da vi opplevde at det var mange spørsmål som ble hoppet over hvis ikke xx [læreren] kommenterte på det.

Her tolker vi både responsen fra lærerstudentene 2.2 og 2.1 som at de har et økt fokus på lærerens bevissthet på hvordan elevene lærer matematikk, og hvordan læreren kan bidra til å fremme resonnering hos elevene i matematikkundervisningen. Både student 2.1 og 2.1 påpeker at lærerens planlegging kan være med på å fremme resonnering og læring hos elevene. Her snakker studentene om planlegging i form av å gå mer detaljert inn på oppgaveformulering, og grep for å fremme kommunikasjon i klasserommet. Studentene sine refleksjoner om kommunikasjonen mellom lærer og elev, viser oss at studentene har fått et økt fokus på resonnering i klasserommet. Dette inngår i lærerens

PK, med tanke på at dette innebærer spesifikke kunnskaper om undervisningsmetoder, mål for undervisning og progresjon.

Fokuset på lærergrepene som vi tolker at lærerstudentene har i denne delen av prosjektet, viser til utviklingen av studentenes kunnskap innenfor PK. Inne i denne prosessen trekker lærerstudentene inn elementer som å stille spørsmål som kan fremme resonnering, men også hvilke lærergrep lærerstudentene kunne brukt til å fremme resonnering i undervisningen. Her forteller også lærerstudentene om en endring av måten man ser på matematikkundervisningen. Tidligere har studentene vektlagt sin rolle i tavleundervisningen, men nå vektlegger de sin rolle i hele undervisningsprosessen for å fremme resonnering hos elevene. Dette spesielt på bakgrunn av studentenes erfaringer knyttet til den resultatorienterte retningen som elevene i klasserommet hadde i oppgaveløsning.

Student 5.3 (I): Jeg føler veldig(...) tenker du [lærer] mye mer over hvilke svar du [lærer] kan forvente, og hvis du [lærer] stiller spørsmål, så er det typisk at noen elever bare kan si ja eller nei (...) På en måte så må du [lærer], tenke over hvilke svar du kan forvente og hvordan du legger spørsmålet til rette. Ja, at det har mye å si da for hvordan elevene kommer til å svare, og det så vi jo også spesielt i den siste økten når vi skulle se hvordan vi kunne gjøre om på spørsmålene. (...) det er jo en hel prosess å gå igjennom, men at det er lærerikt fordi at da får du mye mer av den forståelsen du faktisk er ute etter, hos elevene

Her tolker vi student 5.3 sin respons som et økt fokus på R&B, ved at studenten vektlegger lærergrepene i kommunikasjon med elevene. Studenten påpeker også at lærerens kunnskaper om hva de kan forvente av elevsvar til en oppgave, er nyttig for å formulere spørsmålene slik at det fremmer elevenes resonnering. Flere av studentene viser også en refleksjon over utfordringer man kan forvente å møte på i en undervisningssituasjon:

Student 2.2 (R): Jeg har også blitt mer reflektert over sammenheng og tenkning hos elevene. Et eksempel på dette er til undervisningsøkten vi lagde hvor vi tenkte at figurmønster er figurmønster. Men at det ikke nødvendigvis er sånn. Noen figurer figurmønstre kan representere en geometrisk tenkemåte mens andre figurer kan fremme en annen inngang til løsningen av dem. Dette var jeg ikke bevisst på før, men det gir veldig mening at overgangen mellom figurer kan være utfordrende når de representerer forskjellige innganger til temaer.

Student 2.2 viser til i sin refleksjonstekst hvordan små endringer i et undervisningsopplegg, som å velge mellom ulike type figurmønstre som oppgave, eller representasjon som skal vises til klassen, kan hjelpe elevene. Student 2.2 reflekterer her over hvordan elevene lærer på best mulig måte, og mulige utfordringer som elevene kan møte på i temaet R&B.

4.4.2 Pedagogisk kunnskap knyttet mot oppfatninger

I den første fasen av MaTeK- prosjektet, er det ulikt hvordan lærerstudentene vektlegger PK som læreren har opp mot sine oppfatninger av dette knyttet til R&B. Likevel er det noen fellestrekk som at lærerstudenten forbinder undervisningen av matematikk med forskjellige verdier, som at elevene skal oppnå mestringfølelse eller trives med faget, samt det å drive elevaktivitet og utforskning i klasserommet.

Lærerstudentene hadde sammen med disse faktorene også fokus på nytteverdien av selve matematikkfaget, som å koble faget opp mot noe praktisk eller ta i bruk sansene. Lærerstudentens svar trekker ingen direkte koblinger mellom hva de som lærere vektlegger i undervisningen av matematikk og R&B. Det vil si at slik som vi tolker studentsvarene, så trekkes det ingen linjer mellom studentens PK og oppfatninger opp mot R&B i denne delen.

Student 2.2 (I): Emm, Jeg er litt fan all holdt på å si litt sånn utforskende arbeid, spesielt sånn type geometri når vi har om Pi. Å på en måte er veldig glad i, når elevene fysisk kan ta på ting, for jeg synes det er viktig å aktivisere sansene, om det er mulig. Så liker jeg veldig godt å bruke konkreter. Samtidig som jeg også er fan av i teorien, så skal de [elevene] på en måte finne ut av denne fantastiske formelen på egenhånd, men noen ganger så må de [elevene] bare pugge det.

Her knytter student 2.2 sine oppfatninger opp mot PK med hva studenten vektlegger i sin egen matematikkundervisning. Dette er for eksempel i form av "...*jeg liker godt å bruke konkreter*" eller "...*veldig glad i når elevene kan fysisk ta på ting,...*" Dette er en oppfatning lærerstudenten har på det å undervise matematikk. På bakgrunn av dette tolker vi lærerstudentens svar som en oppfatning, men samtidig er ikke dette et ren oppfatning. Vi tolker også responsen som PK, fordi responsen handler om valg av undervisningsmetoder som kan støtte elevens læring. Dette er for eksempel i form av "...*litt sånn utforskende arbeid, spesielt sånn type geometri når vi har om Pi.*" I responsen til student 2.2 trekker lærerstudenten koblinger mellom PK opp mot dens egne oppfattelser om undervisning av matematikk. Selv om lærerstudenten viser til koblinger mellom PK og O i denne fasen, trekker de ingen linjer mellom dette og R&B.

I den andre fasen av MaTeK- prosjektet, som innebærer data fra MaTeK-modul, ser vi at ingen av lærerstudentene har trukket noen linjer mellom PK og oppfatninger.

I den siste fasen av MaTeK- prosjektet har studentene vist til flere koblinger mellom oppfatninger koblet opp mot PK, og R&B. I denne delen av prosjektet vektlegger samtlige av studentene viktigheten av forberedelser en lærer gjør i forkant av en matematikktime for å i selve timen kunne fremme elevenes resonnering mest mulig.

I denne planleggingsprosessen vektlegger studentene utvelging og formulering av arbeidsoppgaver, og hvordan man kommuniserer i klasserommet, hvor studentene nevner formulering av spørsmål som sentralt.

Student 4.3 (I): Noe som har overrasket meg er dybden, og tankene bak [undervisningsplanlegging], ikke bare hva en gjør som lærer, men også oppgavene man presenterer for elevene. Jeg har sett hvor viktig formuleringen av oppgaver kan være, med tanke på å fremme student resonnement. Jeg har vel kanskje tidligere tenkt at det viktigste er hvordan man som lærer støtter elevene i sitt arbeid med oppgavene, og ikke nødvendigvis oppgaven i seg selv.

Her tolker vi responsen til student 4.3 som at studenten først kommer med en oppfatning på undervisning av matematikk. Denne oppfatningen handler om hva som faktisk ligger bak undervisningsplanleggingen, i en kontekst der R&B skal utvikles hos elevene. Ut fra sin oppfatning om undervisning i R&B, trekker studenten inn sin PK for å fremme argumentet med baktanken med undervisningsplanleggingen. Vi tolker lærerstudentens svar som PK, på bakgrunn av at studenten her fokuserer på hvordan

man som lærer kan fremme læring i R&B hos elevene, som *„tidligere tenkt at det viktigste er hvordan man som lærer støtter elevene i sitt arbeid med oppgavene, og ikke nødvendigvis oppgaven i seg selv.“* Student 4.3 har her under MaTeK- modul utviklet en oppfatning om at oppgaveformulering også er en viktig del av undervisningsplanleggingen, og at det kan være et viktig verktøy for å støtte elevene.

4.4.3 Hovedfunn innenfor pedagogisk kunnskap opp mot problemstilling

Det som karakteriserer lærerstudentene sin utvikling innenfor rammene til MaTek modul, er en større vektlegging av PK. Dette ses gjennom en tydeligere bevissthet og fokus på hva som er viktig for lærerstudentene sin undervisning av R&B, da i form av formuleringer av oppgaver og i samtaler med elevene. Etter endt MaTek-modul ser vi at studentene trekker hyppigere frem nøkkelbegreper som lærergrep, formuleringer av oppgaver og viktigheten av å stille de riktige spørsmålene i deres kommunikasjon med elevene.

I den første fasen i MaTeK- prosjektet tolker vi svarene som lærerstudentene gir som enten pedagogiske eller koblinger mellom PK og oppfatninger, men disse svarene er ikke rettet mot synet om å fremme resonnering hos elevene. Det vil si at denne fasen karakteriseres av at studentene har stort fokus på PK, men lærerstudentene trekker likevel ingen linjer mellom dette og R&B. Slik som vi tolker studentene, vektlegger de ikke aspekter ved den PK for å fremme R&B.

I den andre fasen i MaTeK- prosjektet tolker vi svarene som lærerstudentene gir som koblinger mellom PK og R&B. Dette ser vi ved at responsen fra lærerstudentene vektlegger PK inn mot å fremme resonnering hos elevene, som f.eks. lærergrep og formuleringer av oppgaver. Denne fasen karakteriseres ved at studenten begynner å trekke linjer mellom PK og R&B.

I den siste fasen i MaTeK- prosjektet ser vi at lærerstudentene trekker flere koblinger mellom PK og R&B, og responsen de gir har et større fokus på dette. Dette ser vi blant annet ved at de oppgir at det viktigste de har lært er knyttet opp mot formulering av oppgaver og spørsmål for å fremme resonneringen hos elevene. Dette tolkes som lærergrep og knyttes opp mot PK. Vi tolker lærerstudentens svar i denne delen som at de nå er mer bevisst over linjene mellom R&B i matematikkundervisning og hvordan deres PK kan støtte opp under elevens utvikling av dette.

4.5 Karakteristisk utvikling innenfor læreplan kunnskap

4.5.1 Eksempler og sammenligninger innenfor læreplan kunnskap

I den første fasen av MaTeK- prosjektet ble studentene spurt om deres kunnskaper om hvilken rolle R&B spiller i læreplanen for matematikk. Altså går dette inn under LK i vår modell (Figur 6). Denne kunnskapen har vi definert som kunnskap lærerstudentene har om læreplanen og annet undervisningsmateriale slik som lærebøker (Shulmann, 1986), som i denne masteroppgaven knyttes opp mot R&B. Studentene ble i før- intervjuet spurt om i hvilke tema i matematikken de mener at R&B er relevant for i en kompetanseplan. Her forbinder studentene R&B med kompetansemål innen geometri i læreplanen:

Student 5.1 (I): Figurer, geometri

Student 5.3 (I): Geometri tenkte jeg og.

I før- intervjuet kommer det også fram at R&B har fått har en stor rolle i læreplanen generelt ved at det i den nye læreplanen er mye fokus på argumentasjon, slik som student 2.1 viser til:

Student 2.1 (I): Men det med resonnerer føler jeg har blitt fått en veldig stor del av læreplan sånn generelt å da, men fordi det er jo ikke alle fag som har du sånn veldig sånn bevis sånn som i samfunnsfag (...) der er det jo nesten alle kompetansemål reflekterer over drøft også. Det er veldig mye sånn at de må tenke gjennom og forklare med egne ord, da er jo en stor del av læreplanen, føler jeg.

Altså mener noen av studentene at resonnering spiller en viktig rolle i flere fag. Samtidig viser studentene under før- intervjuet kunnskaper om rollen som R&B har spesifikt for læreplanen i matematikk:

Intervjuer 1 (I): Hvilken rolle eller viktighet spiller resonnering og bevisføring i den her planen da [læreplanen i matematikk]?

Student 5.1 (I): Det [R&B] er jo et eget avsnitt.

Student 5.3 (I): Kjerneelementene.

Student 2.1 (I): Jeg føler den [R&B] har en veldig stor rolle da når du både i fag- relevansen delen og kjerneelementer og. (...) Også så jeg en del av kompetansemålene nå, og der er det noe noen av de [kompetansemålene] som fysisk står lese om med begrunnelse (...) og under sluttvurdering, underveisvurdering da for 10.trinn så står du også har utviklet dette [resonnering], så det står jo som et veldig viktig punkt da, som skal være med i vurdering av elevene.

Her viser studentene sine kunnskaper om at R&B har en sentral rolle i den generelle delen av læreplanen for matematikk, fordi de her er klar over at R&B blir nevnt både under kjerneelementer og fagets relevans i læreplanen. Student 2.1 viser et eksempel på at kompetansemål som inneholder krav om begrunnelse er relevant for R&B, og at R&B også spiller en viktig rolle i vurdering av elevene, fordi å resonnerer og bevise er noe som elevene skal utvikle seg i.

I den andre fasen av MaTeK- prosjektet, jobbet studentene med læreplanen i matematikk, hvor de undersøkte fagrelevanse, kompetansemål og kjerneelement, og hvordan de kan implementere dette inn i sin egen undervisningsplanlegging i matematikk. Underveis i prosjektet ytrer studentene at de har blitt mer bevisst på viktigheten av R&B i læreplanen. De ser også nytten av å ta i bruk R&B i undervisning for å oppnå flere kompetansemål, som omhandler flere ulike tema. Dette har vi sett gjennom observasjon av klasseromsdiskusjoner blant studentene i flere forelesninger underveis i prosjektet, og også gjennom arbeidskrav 1.1. I arbeidskrav 1.1 viser for eksempel student 2.2 til at hun velger ut oppgaver for R&B med et mål om å trekke inn relevante kompetansemål fra læreplanen:

Student 2.2 (AK 1.1): Jeg valgte denne oppgaven fordi den passer godt til kompetansemålet: "beskrive og generalisere mønstre med egne ord og algebraisk" (...) I oppgave d skal elevene lage generaliseringer og begrunne for hvorfor disse stemmer. Her vil de i stor grad måtte resonnerer og bevise at uttrykket eller generaliseringen deres stemmer.

Her ser vi at student 2.2. tar i bruk R&B i undervisningen ved å lage oppgaver som skal løses gjennom begrunnelse og generalisering, og at denne planleggingen er gjort med hensyn til å treffe et bestemt kompetansemål i læreplanen. På bakgrunn av dette har studentene underveis i MaTeK- modul, i større grad satt seg inn i kompetansemål, og viser en forståelse for at R&B er viktig både innen læreplanenes kjerneelementer, vurdering og fagrelevans innen matematikkfaget.

I den tredje fasen av MaTeK- prosjektet viser noen av studentene til at de har blitt mer bevisst over at R&B er noe elevene skal lære om, og ta i bruk for å oppnå relevante mål som er satt i læreplanen. Dette er noe student 2.2 blant annet reflekterer over i sin refleksjonstekst:

Student 2.2 (R): Gjennom undervisningen om dette [resonnering hos elever] har jeg blitt mer bevisst på at dette er både noe elevene fra læreplanen sin side skal gjennom (...).

Studentene har ellers i liten grad vektlagt å diskutere sine nye erfaringer innen LK både i Exit lapper, refleksjonstekst og etter- intervju. Dermed har vi begrenset data på dette.

4.5.2 Læreplan kunnskap knyttet til oppfatninger

Det meste av informasjonen vi har om lærerstudentenes LK opp mot oppfatninger kommer fra tidlig i prosjektet hvor studentene nylig hadde gjort et arbeidskrav om læreplanen i matematikk knyttet opp mot R&B. Flere av lærerstudentene hadde en oppfatning etter dette arbeidskravet om at R&B har en stor rolle i læreplanen.

4.5.3 Hovedfunn innenfor læreplan kunnskap knytt opp mot problemstillingen

Ut fra våre innsamlede data, gir flertallet av studentene uttrykk for at de før MateK prosjektet hadde tenkt lite over rollen og viktigheten av R&B i den nye læreplanen. Før MateK koblet studentene også hovedsakelig R&B med kompetansemål innenfor geometri. Underveis i MateK prosessen ytrer flertallet av studentene en større bevissthet over at R&B har en sentral rolle i læreplanen både i form av vurdering, kjerneelement, fagets relevans og kompetansemål. Studentene poengterer også etter oppstarten av prosjektet at R&B kan være relevant for flere temaer i matematikk. I arbeidskrav 2.1 underveis i prosjektet fikk studentene i oppgave å planlegge en undervisningsøkt med fokus på R&B. Her viste studentene hva de ønsker å vektlegge av læringsmål i timen, som de igjen har koblet opp mot kompetansemål i læreplanen.

Gruppe 3 (AK 2.1): Oppgaven vi benytter i denne undervisningsøkten er utformet for å fremme elevens arbeid med matematiske representasjoner, fremgangsmåter og løsninger. Det matematiske temaet i oppgaven, altså kubikktall, er ikke det vi ønsker å sette i søkelys, men heller elevenes evne til problemløsning, representasjoner og evne til å utvikle egne fremgangsmåter. (...) Dette vil være viktig i videre matematisk arbeid fordi elevene ikke bare skal

utvikle kunnskap om forskjellige matematiske områder, men også metoder, fremgangsmåter og matematisk tenkning.

Her har denne gruppen studenter koblet målet med timen opp mot at elevene skal utvikle seg innen ulike matematiske tema, men også at R&B er viktig for en utvikling av grunnleggende ferdigheter i faget. Videre refererer gruppe 3 til tre ulike kompetansemål som blant annet innebærer matematiske temaer som potenser, kvadratrøtter, matematiske mønstre og algebra. Samtlige av studentene har i likhet med denne gruppen studenter koblet sine planlagte undervisningsøkter med kompetansemål som omhandler algebra, men også i tillegg andre tema som partall og oddetall. Altså forbinder studentene nå R&B med flere matematiske temaer i læreplanen.

4.6 Karakteristisk utvikling innenfor koblingene mellom kunnskapene

I analysen av dataene var det ikke alle responsene lærerstudentene hadde som bare var matematiske (MK) eller bare pedagogiske (PK). En respons fra en av lærerstudentene kunne både knyttes til en eller flere kategorier. Noe som førte til at det ble dannet kategorier, der responsen fra lærerstudentene både kunne være PK og MK (MK-PK). Når en respons ikke kun passet til en kategori, ble det knyttet opp mot kategoriene som hadde flere kunnskaper eller oppfatninger (Tabell 3), dette ble gjort for å danne et mer nyansert bilde av utviklingen hos lærerstudentene. I MaTek- modul ser vi at det er hovedsakelig koblingene mellom MK og PK, samt koblingene mellom oppfatninger (O) og MK og oppfatninger knyttet til PK som trekkes frem av lærerstudentene. Siden koblingene mellom O og MK og PK allerede er vist til, vil vi i denne delen vise koblingene mellom MK-PK.

4.6.1 Eksempler og sammenligninger på koblingene mellom MK og PK

I den første fasen av MaTek- prosjektet trekker lærerstudentene koblinger mellom MK og PK. Dette tolker vi ved at lærerstudentene i mange tilfeller bruker PK til å begrunne deres MK. For eksempel kobles strukturer av matematikk eller matematisk praksis opp mot potensielle utfordringer elevene vil møte i undervisningen av matematikk. I denne fasen trekker ikke lærerstudentene koblingene mellom MK- PK opp mot R&B.

Intervjuer (I): Ja, hvis vi kan dra litt videre da. Til hvilken av disse typene av resonnering og bevis ville dere ha lært bort til 5. og 10. klasse eller 5. til 10. klasse?

Student 2.1(I): (...)Det er jo utallige mange lover i matematikk, for eksempel og regler og sånn som man [eleven] skal lære seg å bruke til å begrunne(resonnering), at for eksempel, man kan at 3×4 er det samme som 4×3 , fordi den loven om kommutativitet eller et eller annet(...), men hvert fall at jeg [lærer] kjenner til den da, og at de skal på en måte utviklet litt mer sånn faglig språk da, og kunne bruke det til å forklare hvorfor de kom frem til svaret. Tror jeg, at jeg vil lært dem, og så bruker jeg også eksempler og ikke bare si at det var det som står i boka.

Her tolker vi student 2.1 respons som MK på bakgrunn av studentens vektlegging av fagkunnskap om å skape, vite eller produsere matematikk gjennom regler, som elevene trenger for å begrunne sine resonnementer. For eksempel ser vi dette gjennom "...man

skal lære seg å bruke til å begrunne, at for eksempel, man kan at 3×4 er det samme som 4×3 ..." For å begrunne dette utsagnet bruker lærerstudenten PK til å vise til at man som lærer skal kunne regelen om kommutativitet og hjelpe elevene å utvikle et mer spesifikt faglig språk.

I den andre fasen av MaTeK- prosjektet trekker lærerstudentene koblinger mellom O og PK, samt O og MK. Disse koblingene er allerede blitt presentert. Kjennetegnene mellom disse koblingene ligger i kapittel 4.3.2 og 4.4.2.

I den tredje fasen av MaTeK- prosjektet trekker lærerstudentene koblinger mellom MK- PK. Dette tolker vi ved at lærerstudentene trekker frem elementer som kobles opp mot skille mellom nivået de kan forvente av elevene opp mot den spesifikke typen resonnering. Samtidig som de ser hvordan de lærergrepene man gjør påvirker nivået av resonnering, samt hvilken rolle læreren har for å fremme elevenes resonnering.

Student 4.3 (R): Jeg tror jeg nå kan ganske greit i mange tilfeller kategorisere og identifisere de forskjellige måtene elevene resonnerer på. Det jeg gjerne vil jobbe mer med er hvordan jeg kan bidra til å hjelpe elevene å utvikle dette enda mer. For eksempel hvordan kan jeg hjelpe elevene fra empirisk resonnering til deduktiv resonnering? Vi har snakket mye om det, og jeg føler jeg kan litt, men vil gjerne jobbe mer med hvordan jeg kan gjøre dette, ikke bare i grepene jeg gjør i timen, men også i hvordan jeg legger opp øktene og hva slags oppgaver jeg presenterer for elevene.

Her tolker vi student 4.3 sin respons som at studenten først trekker frem MK, ved å kategorisere og identifisere forskjellige måter å resonnere på, som vi her kategoriserer som strukturer i matematikk og blir derfor kategorisert som MK. Likevel er ikke hele svaret basert på MK. Studenten knytter også kunnskapen om strukturer i matematikk, ulike typer resonnering, opp mot hvordan man som lærer kan legge opp økten eller oppgavene for å fremme resonnering. Som i dette tilfellet, er det å se på hvordan man lærer matematikk det vi definerer som PK. På bakgrunn av dette begrunner lærerstudenten sin MK med PK, ved at de ulike typene av resonnering kan fremmes med å ta i bruk ulike typer oppgaver i undervisningen.

4.6.2 Hovedfunn innenfor de ulike koblingene mellom MK-PK opp mot problemstillingen

Det som karakteriserer lærerstudentene sin utvikling innenfor koblingene mellom MK-PK, er at lærerstudentene bruker PK til å begrunne sin MK. Likevel ser vi at det er først i den tredje fasen av MaTeK-prosjektet at lærerstudentene trekker inn R&B i disse koblingene.

I første fase av MaTeK- prosjektet karakteriserer koblingene mellom MK-PK det å bruke fagkunnskap knyttet til et emne i matematikken, for så å begrunne dette med PK, der studentene ser at læreren må ha et høyere kompetansenivå enn elevene.

I den andre fasen av MaTeK- prosjektet karakteriseres koblingene mellom MK-PK ved at de ikke blir trukket frem gjennom MaTeK-modul.

I den tredje fasen av MaTeK- prosjektet karakteriseres koblingene mellom MK- PK ved at lærerstudenten begrunner det å ta i bruk ulike typer av resonnering gjennom å tilpasse oppgavene til elevene. Noe som vil si at de bruker PK til å begrunne MK.

Det som karakteriserer koblingene mellom MK-PK i prosjektet er et økt fokus på R&B i den tredje fasen i prosjektet. Samt at lærerstudentene bruker PK til å forklare og begrunne sin MK.

Diskusjon

I denne masteroppgaven har vi sett på hva som karakteriserer lærerstudenters utvikling i løpet av MaTeK- modul, med fokus på undervisning i R&B. Med utgangspunkt i prosjektets problemstilling, har vi sett utviklingen i sammenheng med modellen (Figur 6) som illustrerer kunnskaper som lærer bruker i undervisningen av matematikk. Modellen som blir brukt i analysen er videreutviklet fra tidligere modeller (Figur 1 og 2) til den modellen (Figur 6) som brukes i denne masteroppgaven (Ball et al., 2008; Contreras-González et al., 2013; Petrou & Goulding, 2011). Modellen (Figur 6) som ble dannet er blitt brukt til analyse av studentbesvarelser fra før, underveis og etter MaTeK-modul, ved å kategorisere svarene inn i de ulike kunnskapene eller koblinger mellom dem. Gjennom analysen ser vi nå flere tendenser som er karakteristiske for studentenes utvikling innenfor R&B. Studentene har utviklet og endret deres PK og oppfatninger knyttet til R&B. PK var også den kategorien studentene vektla før MaTeK-modul, men fokuset i PK har blitt endret. Samtidig har studentene utviklet sin MK og oppfatninger rundt dette. Ikke minst har studentene en tydelig sterkere kobling mellom MK, PK og oppfatninger, enn det de hadde før MaTeK-modul, når det gjelder undervisning i R&B. I denne delen av masteroppgaven vil vi se på våre hovedfunn opp mot annen relevant litteratur og mot konteksten studentene har vært i før og underveis i MaTeK-prosjektet. I tillegg vil vi vurdere denne masteroppgavens metode og analyse opp mot resultater, og bruken av egenutviklet modell til å analysere data.

5.2 Lærerstudentenes karakteristiske utvikling i MaTeK-modul

5.1.1 Forventinger til matematikklæreren i undervisningen av matematikk

Som matematikklærer er det forventet at man har en bred og dyp forståelse av hva elevene og lærerne selv trenger for å lære og undervise i matematikk (Steele & Rogers, 2012). Dette er på bakgrunn av rollen som læreren har i klasserommet, og den forventede forståelsen og kompetansen læreren må ha i undervisningen av matematikk (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Her ser vi at lærerstudentene oppgir både i intervjuet etter modulen og i refleksjonsteksten at kunnskapen de tilegnet seg i løpet av MaTeK-modul, har gitt dem nye innsikter i lærers rolle i undervisningen. Dette handlet blant annet om lærerens rolle i forhold til planlegging av matematikkundervisning. Studentene påpeker her hvordan små endringer i form av oppgaveformulering eller måten man som lærer stiller spørsmål på i undervisningen, kan endre utbyttet og resonneringen hos elevene. Denne nye innsikten er grunnlaget for enhver god matematikkundervisning, dette på bakgrunn av viktigheten av å implementere resonnering (Stacey & Vincent, 2008). Dette viser viktigheten av utviklingen studentene har hatt innenfor de ulike kunnskapene, og innsikten de har implementert, og hvordan det vil gi uttrykk i klasseromsundervisningen (Ojo et al., 2017), noe som både student 2.2 og 2.1 viser i resultatene (Student 2.2 (I) og student 2.1 (R): Kap.4.4.1), men også Student 4.3 her:

Student 4.3 (I): Jeg vil si måten man snakker med elevene når de jobber, hvordan man forholder seg til dem da. Jeg føler vi har, eller jeg føler jeg har hatt mest fokus på hva jeg gjør når jeg er på tavla, men at vi har fått mye mer innsikt i hva man faktisk skal gjøre. Ja, og det blir jo hele prosessen med oppgaver, men også snakke med elevene og sånt og det. Føler jeg kanskje er det viktigste jeg har fått med meg det semesteret, og at det også er mye man må tenke på der.

Lærerstudentenes kunnskap etter MaTeK-modul reflekterer i større grad den kritiske rollen læreren har i å støtte elevenes matematiske engasjement (Ellis et al., 2018). Dette kan ses på ved det endrede fokuset på studentene har hatt i PK angående samtaler, både i klasserommet, men også sammen med enkeltelever. Lærerstudentenes refleksjoner rundt læregrep, for å fremme resonnering hos elevene, er mer fremtredende etter MaTeK-modul enn før. Vektleggingen av samtale for å fremme elevenes forståelse er en viktig faktor i matematikkundervisningen (Ellis et al., 2018). Ved å vektlegge viktigheten av måter man stiller spørsmål på, kan man se en større forståelse og kunnskap om hvordan elevene kan lære matematikk, og hvilke faktorer som spiller inn for å fremme R&B (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Målet med å fremme egenskaper knyttet til R&B hos elevene, handler om å styrke elevens analytiske egenskap, som brukes i ulike sammenhenger knyttet til mønstre, likheter og strukturer i matematikk (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Samtidig trekkes lærerens MK frem i forskning, som en viktig faktor for å undervise bevisføring. Der det trekkes frem den manglende kunnskapen læreren har i møte med å lære bort temaet. Dette på bakgrunn av den manglende kunnskapen om ulike nivåer av bevis og hva man som lærer kan forvente og godta som bevis på ulike trinn og miljøer (Buchbinder et al., 2022).

5.1.2 Oppfatninger av resonnering og bevis

I tillegg til utvikling av PK som nevnt over, oppgir studentene at forståelsen og oppfatningen deres om hva resonnering innebærer, har blitt endret gjennom MaTeK-prosjektet. Dette kan ses i sammenheng med gjennomføringen av MaTeK-modul, som har ført til en større vektlegging av implementeringen av resonnering i matematikkundervisningen. National Council of teachers of mathematics (NCTM) presiserer at beskrivelsene av resonnering er vag og universell (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), men at læreren likevel må ha en god forståelse av hva resonnering er (G. J. Stylianides et al., 2013).

Student 2.1 (I): Jeg føler det har endret seg veldig. Fordi som sagt, så har jeg vært vant til at hvis du bare sier hva du har gjort, bare gjør det samme som du har gjort matematisk. Bare beskriver det med ord, så har det ofte vært litt sånn nok. Men nå så ser jeg jo at det er så mye mer, og at det faktisk er veldig. Jeg synes det er veldig fint ovenfor meg selv å tenke over hvorfor jeg gjorde sånn som jeg gjorde nå og veldig sånn hvorfor kan det her stemme? Så jeg føler at jeg har kjent veldig selv, og at jeg ser jo at det egentlig er en veldig viktig del av matematikken. Fordi jeg synes det hjelper mye til problemløsningen når de skal løse lignende oppgaver og hva er mest effektivt her? Og du tenker mye mer gjennom hva du gjør da synes jeg.

Denne studenten ser viktigheten ved resonnering, og hvordan resonnering også kan fremme kunnskap og læring i andre deler av matematikken. Studentene hadde før oppstarten av MaTeK-prosjektet lite oppfatninger om hvilke områder av matematikken R&B er relevant og aktuelt for. Der de fleste studentene assosierte R&B med formelle bevis i algebra og geometri, for eksempel å bevise Pythagoras teorem. Ifølge A. J. Stylianides (2007) møter mange elever utfordringer med en brå overgang til videregående med bevisføring innen geometri, fordi R&B blir lite fokusert på i lavere klassetrinn og generelt innen andre temaer i faget. Noe som ser ut til å være lik konteksten til de fire lærerstudentene vi (masterstudenter) studerte i denne

masteroppgaven. Dette kan blant annet skyldes at mange kommende grunnskolelærere mangler nok MK om R&B, som igjen påvirker oppfatninger rundt undervisning i faget (G. J. Stylianides et al., 2013). Som vist til tidligere vil en lærers oppfatninger om hvordan man definerer bevis, påvirke hvordan læreren tolker læreplanen, og dermed også videre til hvordan dette påvirker lærerens undervisning i praksis (A. J. Stylianides, 2007). I etterkant av MaTeK-modul ser vi nå at lærerstudentene har en oppfatning om at spesielt resonnering er en viktig del av matematikken uansett tema, og som nevnt mener studentene selv at de har endret oppfatning av hva R&B innebærer. Dermed har lærerstudentenes utvikling innen MK påvirket deres oppfatninger om hvor stort fokus de ønsker å legge på R&B som matematisk aktivitet i klasserommet.

5.1.3 Hva karakteriseres lærerstudentens utvikling i matematisk kunnskap

Et av hovedfunnene i denne masteroppgaven er knyttet til matematikklæreres spesialiserte kunnskaper med fokus på R&B i matematikkundervisning, er at lærerstudentene trekker koblinger mellom MK-PK. Mer spesifikt gjelder det å koble ny kunnskap fra MK til PK. I resultat kap. 4.6.1, viser vi til student 4.3(R) sin respons i fasen etter MaTeK-modul i MaTeK-prosjektet knyttet til koblingene mellom MK-PK. Vi ser også lignende respons i refleksjonen som student 5.3(R) gir her:

Student 5.3 (R):(...) analyserte en episode ved hjelp av rammeverket til Ellis fikk jeg en ordentlig forståelse for hvordan læreren kan stille spørsmål for å utvide elevenes resonnement. Etter dette merker jeg at dette går mer på automatikk, og når vi f.eks. så gjennom videoen fra timen som ble holdt via dette prosjektet [MaTeK-prosjektet], legger jeg automatisk merke til hvilket nivå spørsmålene som blir stilt ligger på ift. Potensialet for resonnering.

Disse eksemplene viser til hvordan lærerstudentene gjennom å ha gjennomført MaTeK-prosjektet bruker koblingene mellom MK-PK til å støtte opp under deres forståelse av R&B. Studentene har gjennom MaTeK-modul fått nye kunnskaper og endrede oppfatninger av hva R&B kan innebære også i form av ulike typer av resonnering. Samtlige av studentene ytrer at de har behov for å jobbe mer med å eksemplifisere og forstå de ulike typer av resonnering, noe de har sett på under MaTeK-modul. Dette viser for vårt utvalg av lærerstudenter, at det krever mye arbeid med begrepene for å få en tydelig nok ramme til at studentene klarer å overføre begrepenes betydning inn i sin egen undervisning (A. J. Stylianides, 2007). Noe som også er en grunn til at læreres kunnskap til å støtte en utvikling av resonnering hos elevene er begrenset (Buchbinder & McCrone, 2020; G. J. Stylianides et al., 2013). At studentene fortsatt etter MaTeK-modul føler seg litt usikre på resonnering, og hvordan de skal skille de ulike måtene å resonnerer på, bekrefter for oss det som også tidligere forskning har vist. Lærerstudenter har utfordringer knyttet opp mot kunnskaper innen R&B i matematikk. De trenger støtte for å utvikle sin undervisningspraksis i R&B og dette er noe lærerutdanningen må ha et fokus på (G. J. Stylianides et al., 2013).

Denne nye kunnskapen innen MK har ført til at studentene vurderer sine metoder for å undervise i matematikk. Hovedfokuset til samtlige studenter er altså å koble begrepet resonnering inn i praktiske klasseromssituasjoner, som vi kan kjenne igjen i eksempelet over. De ser nå på resonnering som en måte kommunisere, vurdere og gjøre matematikk, og kobler kunnskapen i MK blant annet opp mot elevenes matematiske forståelse (PK). Dermed ser vi etter MaTeK-modul at studentene ofte ser en kobling

mellom sin MK til sin PK, som er den kategoriske kunnskapen samtlige av studentene har mest fokus på. Senere i kapittelet vil vi diskutere mulige faktorer som har vært med på å påvirke utfallet av studentenes utvikling gjennom MaTeK- prosjektet, og hvorfor det har skjedd en sterk kobling akkurat fra MK til PK som kobling mellom kunnskapene.

5.2 Påvirkningsfaktorer i MaTeK-prosjektet

5.2.1 Utdanningsløpet ved norske universiteter

Det som karakteriserer studentens utvikling innenfor rammene av MaTeK-modul er hovedsakelig knyttet til PK, der vi ser endringer innenfor hva lærerstudentene vektlegger som viktige elementer i undervisningen av matematikk. En av grunnene til dette resultatet, kan være studieløpet (Tabell 3) studentene har gjennomført, som med andre ord vil si konteksten av deres studie. Ifølge retningslinjene som er gitt av Kunnskapsdepartementet (2010) skal lærerstudenter i Norge gjennom matematikk 1 og 2 få en innføring i matematikdidaktiske og matematikfaglige temaer, samt mer forskningsrettet inngang på matematikken. Oppbyggingen av utdanningsløpet (Tabell 3) ved den norske lærerutdanningen kan være en påvirkningsfaktor til at lærerstudentene i MaTeK-prosjektet trekker flere koblinger og responser til PK, enn noen av de andre kunnskapene. Dette på bakgrunn av vektleggingen av matematikdidaktiske tilnærmingen i undervisningen tidlig i studieløpet.

En annen påvirkningsfaktor for lærerstudentene som er knyttet til utdanningen, er erfaringene de har gjort i praksis. I etter- intervjuet oppgir studentene at de ikke har fått observert eksempler på flinke matematikklærere og deres undervisningsmetoder, og at erfaringene fra praksis er knyttet til lite undervisningstid eller lite oppfølging. Lærerstudentene som deltok på MaTeK-prosjektet har totalt gjennomført 100 dager i praksis etter normen for endt 4.klasse. Gjennom denne praksisen følger de en lærer gjennom hans/hennes jobbhverdag. Antall dager, størrelse på gruppen, praksislærer og praksislærers undervisningsfag har påvirkning for utbytte lærerstudentene sitter igjen med. Dette kan vi se i disse to responsene fra studentene, der det første er en respons fra før MaTeK- modul:

Student 2.2 (I):Det synes jeg kan være litt sånn ja.. Også at du må på en måte bare finne ut av det selv, og så i hvert fall de senere praksisene, så vi har jo ikke hatt noen praksislærere som følger opp, og så er det på en måte. Nå snakker jeg kun fra praksisperspektiv når du er 4 studenter som bare kjemper om å ha sånn 2 timer i uka og så er det litt sånn. Det er vanskelig å komme inn på elevene og komme inn i rutinene da. Fordi ja, praksisen er veldig kort.

eller samtale i intervjuet etter endt MaTeK-modul:

Intervjuer (I): Så du husker ikke en time, der du observert flinke lærere og lærte matematikk

Studentene (I): Nei

Student 2.1 (I): Nei, jeg husker, eller det eneste jeg husker, er en time med en lærer som var veldig flink til å gi beskjeder. Å det er det eneste jeg klarer å huske at jeg observert, altså lærere.

eller i refleksjonsteksten som lærerstudentene levert inn etter endt MaTeK-modul:

Student 2.1(R): Jeg synes også det hadde vært veldig spennende å ha sett hvordan ulike lærere jobber i klasserommet for å fremme resonnering hos elevene og utfordre dem. Jeg tror det hadde vært fint å sett på slik at man kunne ha sett litt hva som kanskje funker ekstra godt og hva som kanskje ikke funket så bra. Samtidig vet jeg jo at alle klasser er annerledes så jeg føler ikke at det kan være et 100% riktig svar på hva man akkurat skal gjøre slik at man klarer å fremme resonnering hos absolutt alle elevene samtidig.

Profesjonsutdanning handler om å kvalifisere lærerstudentene til det arbeidet de skal gjøre i yrkesfeltet, men på bakgrunn av den ulike veiledningen de får, blir utbyttet av praksis ulikt (Kvam, 2019). Lærerstudentene oppgir at observasjonene de gjorde i fjerde økt (Figur 5) i MaTeK-modul ga de innsikt som de tidligere på studiet ikke hadde fått. Denne innsikten kan være med å danne et grunnlag for at lærerstudenten skal kunne ta relevante valg i undervisningssituasjonen (Kvam, 2019). Begrensningen av utvalget av deltakerne for denne masteroppgaven kan være med å påvirke erfaringene som kom til syne under analysen. På bakgrunn av utvalget i denne masteroppgaven kun er fire lærerstudenter fra et gitt område, kan vi ikke generalisere disse tankene til alle lærerstudenter og er kun en observasjon av den gitte casen. Likevel kan vi basert på observasjoner fra MaTeK-modul og intervjuene før denne, se at de andre lærerstudentene delte samme tanke, som deltakerne i masteroppgaven.

5.2.2 Rammeverket til masteroppgaven

Gjennom MaTeK-prosjektet har innsamlingen av data, primært vært i form av intervju og av exit-lapper. Samt observasjon i klasserommet, der lærerstudentene fikk følge det gitte opplegget til MaTeK-modul (Figur 5). En påvirkningsfaktor for denne masteroppgaven er at det er en del av et større internasjonalt prosjekt. R&B er temaer som internasjonalt knyttes til vage definisjoner og læreres ufullstendige forståelse for hvordan drive aktiviteter i klasserommet for å fremme resonnering (Buchbinder & McCrone, 2020; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; G. J. Stylianides et al., 2013). Samt at R&B er en av fem hovedprosesser i matematikk, som burde implementeres i alle trinn (Kilpatrick et al., 2011). Disse faktorene sier noe om hvilken forståelse læreren burde ha innenfor resonnering, og ligger som en underliggende faktor for gjennomførelsen av undersøkelsene. Rammene for disse undersøkelsene er lik for alle i det internasjonale prosjektet (MaTeK) og er ikke tilpasset for å besvare problemstillingen i denne masteroppgaven. Noe som har ført til at datainnsamlingen hovedsakelig er rettet mot å belyse "hvordan design kapasitet i forhold til R&B kan bli utviklet". På bakgrunn av at datainnsamlingen er rettet mot MaTeK-prosjektet, er også intervjuguider og undervisningsinnhold rettet mot å belyse dette. Disse to faktorene kan være med å påvirke resultatene med tanke på at spørsmålene i intervjuene ikke er direkte rettet mot å svare på alle aspektene ved matematikklæreres spesifikke kunnskap om undervisning i matematikk, som også kan ha ført til at lærerstudentene trekker flere koblinger til PK.

Rammene for undervisningen som lærerstudentene har gjennomgått (Ellis et al., 2018; Sevinc et al., 2022; Stephan, 2020), har blitt dannet spesifikt til MaTeK-prosjektet. Noe som gjør at utformingen av fellesundervisningen ikke har blitt utviklet for å være tilpasset den norske konteksten med tanke på hva de tidligere hadde fokus på i studieløpet, samt hvordan matematikkundervisning drives på norske skoler. Det vil si at en annen påvirkningsfaktor for resultatene i denne masteroppgaven, kan være at

undervisningen i MaTeK-modul ikke har tatt hensyn til hvordan studentenes studieløp er oppbygd. Universelt er aktiviteter knyttet til R&B i sentrum for forståelsen av matematikk og er viktig for elevene fra tidlig alder av (G. J. Stylianides et al., 2013). Knyttet til læreres svake fagkunnskaper knyttet til R&B (G. J. Stylianides et al., 2013), kunne man i MaTeK-modul vektlagt mer tid på MK. Lærerstudentene oppgir også i intervjuet etter endt MaTeK-modul at MK knyttet til de spesifikke typene innenfor resonnering, er et utfordrende område.

Student 4.3 (I): Så tror jeg kanskje jeg på en måte at vi har blitt mer bevisst på det, men for min del så tror jeg det å skille det kommer også med øvelse, og at det på en måte må prøve å gjøre det mer, for jeg føler meg på en måte noe skikkelig trygg i å kunne skille de forskjellige måtene å resonnerer på.

Eller

Intervjuer (I): Men føler du nå at du kan skille mellom empiriske argumenter og deduktive argumenter? Føler du at du vet hva forskjellen er og eller er det fortsatt, det er verdifull informasjon for oss, for kanskje vi må arbeide mer med dette.

Student 2.1 (I): Jeg føler at jeg til en viss grad klarer det, men jeg samtidig så tror jeg at jeg hadde likt å bare hatt de notatene mine sånn enkle foran meg for å bare sånn. Ja, det var akkurat det som skilte igjen og se på. Fordi jeg føler jeg har tatt litt mer sånn. Enklere notater med litt mer slike stikkord, så jeg tror jeg hadde likt å hatt det foran meg hvis jeg skulle ha sett på ulike typer bevis.

Likevel har studentenes MK gjennom MaTeK-prosjektet endret seg, men studentene har i mange sammenheng brukt PK til å begrunne MK. Som nevnt tidligere kan en grunn til dette være fokuset som undervisningen i matematikk 1 og 2 har hatt tidligere i studieløpet (Kunnskapsdepartementet, 2010). Samtidig trekker Buchbinder & McCrone (2020) frem at det er lærerens manglende kunnskap i MK og troen på elevers læringskapasitet som gjør at implementeringen av R&B er vanskelig i matematikkundervisningen. MK er dermed et område som er vanskelig for lærere, og G. J. Stylianides et al., (2013) presiserer at selv om MK er viktig, så er det vanskelig å avgjøre hvor hovedproblemene knyttet til undervisningen ligger i MK. På bakgrunn av dette er koblingene lærerstudentene trekker mellom MK og PK viktig for undervisningen av R&B, med tanke på deres bevissthet knyttet til det matematiske og hvordan de kan knytte dette inn i undervisningen (Ellis et al., 2018).

5.2.3 Rammeverket for analyse

Valget av modell for å analysere dataene i denne masteroppgaven, kan også være en påvirkningsfaktor på resultatet. I denne delen vil vi diskutere nytten av å ta i bruk denne modellen og hvorfor vi har valgt å implementere koblinger mellom de ulike kunnskapskategoriene, oppfatninger og kontekst, og hva som har vært styrker og begrensninger med bruk av denne modellen.

Under analysen av den innsamlede dataen, oppdaget vi at det kan være vanskelig å bestemme hvilken type kunnskap studentene tar i bruk i diskusjoner og responser i en bestemt kategori. En av grunnene til dette er at studentene kommer med refleksjoner og ytringer som er sammensatte, og spesielt etter MaTeK-modul var studentene hyppige til å koble sammen ulike tema de har lært iløpet av MaTeK-modul, oppfatninger de har

utviklet og tidligere erfaringer. Dermed har valget vårt av å gjøre modellen dynamisk i form av koblinger mellom PK, LK, MK og oppfatninger vært nyttig, da dette gir en mer praksisnær og dyptgående tolkning av studentenes svar. Valget om å ta i bruk en dynamisk modell er som nevnt basert på to tidligere utviklede rammeverk. Contreras-González et al.(2013) sin modell for matematikklæreres spesialisert kunnskap (MTSK), en dynamisk modell som viser sammenheng mellom oppfatninger, PK og MK. Petrou og Goulding (2011) sin syntesemodell viser også sammenheng mellom MK, LK, PK og kontekst. Disse modellene er videreutviklet blant annet fra Ball et al.(2008) sin modell MKT. Tidligere bruk av MKT modellen har vist at dette rammeverket kan brukes i lærerdiskusjoner til å gjenkjenne om diskusjonene er fokusert på en kunnskapskategori, eller om det er flere type kunnskaper som er integrert (Lesseig, 2016). Annen forskning påpeker også at for å kunne støtte lærere i å tilegne seg viktig kunnskap for å kunne undervise i bevis, må man se de ulike kunnskapselementene sammenkoblet for å forberede lærere tilstrekkelig nok (A.J. Stylianides, 2011). Dermed har bruken av dette rammeverket vist oss nødvendigheten av å se sammenhenger mellom de ulike kunnskapene, og hvordan de påvirker hverandre hos lærerstudentene.

Den nye kunnskapen lærerstudentene tilegnet seg i løpet av MaTeK-modul, har som tidligere nevnt gitt en tydelig påvirkning på deres oppfatninger rundt undervisning i matematikk, spesifikt innen R&B. Studentene har i etterkant av MaTeK-modul uttrykt at de nå ser annerledes på resonnering i matematikk, og at de ønsker i større grad ha fokus på å fremme resonnering hos elevene i undervisningen, og planlegge matematikktimen med hensyn til dette. Vi ser at studentene underveis og etter MaTeK-modul har tydeligere oppfatninger omkring R&B sin plass i matematikkundervisningen, og at disse oppfatningene utviklet seg etterhvert som studentene tilegnet seg nye kunnskaper innenfor MK, PK og LK. A.J. Stylianides (2011) reflekterer rundt hvilke kunnskaper lærere trenger for å støtte elevene i deres forståelse av konseptet bevis, her nevner han blant annet at lærere kan støttes gjennom at man i lærerforbedrende programmer har fokus på å utvikle oppfatninger om bevis som er i samsvar med en undervisningspraksis som er ønskelig i skolen. Det er nødvendig med en forenelig oppfatning rundt bevis for å fremme dette (A. J. Stylianides, 2011). På bakgrunn av dette har vi valgt å ta med oppfatninger innen matematikkundervisning som et sentralt element i vårt rammeverk. Fordelen med å implementere oppfatninger i vår modell har vært at vi tydelig underveis i analysen av datamaterialet har sett en sammenheng mellom at studentene tilegner seg nye kunnskaper innen MK, PK og LK, og at dette endrer studentenes syn på egen undervisningspraksis med tanke på R&B. Inkludering av lærerstudenters oppfatning som et eget element, har gitt oss nyttig informasjon om lærerstudenters individuelle refleksjoner og tanker, og hvordan disse oppfatningene kan påvirke deres undervisningspraksis i matematikk.

Videre har vi valgt å ha med kontekst i modellen basert på syntesen av Petrou og Goulding (2011), som viser sammenhenger mellom kontekst, PK, MK og LK. Dette er igjen på bakgrunn av at kunnskapen lærerstudenter og lærere tar i bruk i undervisning, som i MaTeK-prosjektet blir sett på som dynamisk og interaktiv (Fennema & Franke, 1992; Petrou & Goulding, 2011). Kontekst har på bakgrunn av dette vært en viktig og nyttig del av rammeverket i denne masteroppgaven, for å kunne se på og vurdere faktorer som kan ha påvirket resultatet. Samtidig har modellen for analysen (Figur 6) gitt oss (masterstudentene) mulighet til å se på koblingene mellom de ulike kunnskapene og oppfatninger, som har gitt oss en mulighet til å nyansere responsen fra lærerstudentene gjennom MaTeK-prosjektet. Dette har gitt et mer detaljert bilde på hva

som karakteriserer lærerstudentenes spesialiserte kunnskap i å undervise i resonnering og bevis. Ved å ikke se på kunnskapene som dynamisk, slik som i modellen av MTSK (Figur 1) til Contreras-González et al. (2013) hadde vi ikke fått sett på lærerstudentene sin bruk av PK til å begrunne sin MK, opp mot R&B. Dette er noe som sier noe om hvordan lærerstudentene bruker den spesialiserte kunnskapen opp mot R&B og er derfor med på å belyse problemstillingen. Noe som er bakgrunnen for vårt valg av kategoriseringen av kunnskapene slik som i modellen (Figur 2) til Petrou og Goulding (2011).

Valget av elementer som vi har inkludert inn i vår modell, har også vært med på å sette begrensninger i analysen. Kategoriene har ikke alltid vært optimale for de ulike elementene i datainnsamlingen, og det er ikke alltid at MK, PK, LK, oppfatninger og kontekst har vært optimale elementer for å beskrive studentenes utvikling gjennom prosjektet. Noen sitater har vært vanskelig å kategorisere i form av at de ikke direkte passer inn i noen av elementene, eller at kategoriene har vært så åpne at sitatene fra lærerstudentene kunne ha passet godt inn i flere av kategoriene samtidig. Her kunne mindre underkategorier innenfor MK, PK og LK ha dannet rammer for tydeligere skiller, slik som i Contreras-González et al. (2013) sin modell av MTSK (Figur 1). Disse tydelige skillene kan også ha bidratt til begrensninger i resultatet i masteroppgaven, da noen responser ikke hadde passet inn i de tydelige rammene for de ulike aspektene ved MTSK (Contreras-González et al., 2013; Petrou & Goulding, 2011)

5.3 Videre forskning

I denne masteroppgaven ser vi at lærerstudentene har hatt utvikling innenfor både PK og MK. Likevel er det PK lærerstudentene vektlegger og trekker frem som viktige aspekter når man underviser i resonnering. Som diskutert over så kan det være ulike årsaker til dette, men vektleggingen av den norske utdanningen av lærerstudenter kan være en hovedfaktor for funnene. I videre forskning hadde det på bakgrunn av dette vært interessant å vektlegge den MK enda mer. Altså at man tilrettelegger for den norske konteksten, med at man trekker frem aspekter som både litteraturen sier at lærer sliter med, MK i resonnering, men også de områdene i studieløpet som det har vært mindre i fokus, altså LK og MK (G. J. Stylianides et al., 2013).

Forskning viser til at det er krevende for lærere å tilrettelegge for resonnering i klasserommet på bakgrunn av deres MK innenfor R&B (G. J. Stylianides et al., 2013). Dette for å kunne se om denne faktoren er avgjørende for implementeringen og forståelsen av R&B i matematikkundervisningen (G. J. Stylianides et al., 2013). Resonneringen er et viktig aspekt i matematikkundervisningen, og på bakgrunn av dette er det viktig å finne påvirkningsfaktorene for at lærere skal kunne drive god undervisning i matematikk.

Lærerstudentene nevnte også i intervjuet etter endt MaTeK-modul, at de gjennom lærerstudiet har hatt begrenset mulighet til å observere gode undervisere i matematikk. Det å få muligheten til dette kan være med på å støtte lærerstudentens kunnskaper om resonnering. Forskingen viser at slike eksempler på god matematikkundervisning i R&B blir vanskelig å finne, da R&B ofte ikke blir implementert i matematikkundervisning før på videregående (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). I tillegg til dette, har lærere i dag mangelfull kunnskap om hvordan de skal implementere resonneringen i tidlige alderstrinn (Buchbinder & McCrone, 2020; G. J. Stylianides et al., 2013). Læreres problemer med implementeringen av R&B i skolen i dag, kan påvirke lærerstudentenes

syn på hva temaet innebærer (Petrou & Goulding, 2011), gjennom den observasjonen og veiledningen lærerstudenter mottar i praksis (Tabell 3). Basert på dette kan vi si at lærerne i skolen i dag ikke har de kunnskapene om R&B, som man optimalt ønsker å videreføre til lærerstudenter gjennom praksis (A. J. Stylianides, 2011). Dette viser også til behovet for den faglige utviklingen av norske matematikklærere innenfor R&B, eller i det minste for praksislærere.

Konklusjon

I denne masteroppgaven har vi sett på hva som er de karakteristiske trekkene av endringen i matematikklærerstudenters spesialiserte kunnskap for å undervise i resonnering og bevis (R&B) gjennom deltakelse i MaTeK-prosjektet. Hovedkonklusjonen er at lærerstudentene ved et norsk universitet har utviklet den pedagogiske kunnskapen og bruker denne kunnskapen til å begrunne de andre kunnskapene og sine egne oppfatninger. Selv om den pedagogiske kunnskapen har vært i fokus gjennom hele MaTeK-prosjektet, har lærerstudentene hatt en endring i hva de vektlegger som viktige aspekter ved undervisningen av matematikk gjennom MaTeK-prosjekt. Lærerstudentenes fokus på pedagogisk kunnskap kan være på bakgrunn av den konteksten som studentene har vært en del av gjennom lærerstudiet. Dette omhandler for eksempel lærerstudiets oppbygning, samt praksislæreres faglige kompetanse innenfor resonnering og bevis, i veiledningssituasjoner i praksis. Før MaTeK-modul vektla lærerstudentene pedagogisk kunnskap i som bruk av ressurser for å fremme læring eller hvordan elevene lærer matematikk, der de ikke trakk denne kunnskapen opp mot det å fremme eller utvikle elevens resonnering. I fasen etter MaTeK-modul ser vi at dette har endret seg og studentene trekker nå sammenhenger mellom lærergrep for å fremme resonnering og hvordan ordlegge seg som underviser i matematikkundervisningen. Dette viser at lærerstudentene har fått en økt bevissthet rundt hvordan resonnering og bevis kan tas i bruk som en ressurs eller aktivitet for å skape matematisk mening og forståelse. Dette gjenspeiler også fokuset som resonnering og bevis er gitt i den norske læreplanen i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019), hvor resonnering blir vektlagt som et kjerneelement i faget. National Council of Teachers of Mathematics (2000) ser også på R&B som viktige komponenter for å drive matematikkundervisningen. Noe som viser til at kunnskapene lærerstudentene har tilegnet seg gjennom MaTeK-prosjektet, er viktig for å i større grad fremme R&B sin posisjon i matematikkundervisningen.

Selv om det er den pedagogiske kunnskapen som lærerstudentene vektlegger mest i sine refleksjoner, reflekterer også studentene sin egen utvikling av matematisk kunnskap. Her trekker lærerstudentene frem i den tredje fasen i MaTeK-prosjektet, at den matematiske kunnskapen er noe de enda føler seg litt utrygg på og som er utfordrende i forhold til R&B i matematikkundervisningen. Dette viser potensialet dette MaTeK-prosjektet har, med tanke på de tilpasningene som kan gjøres for å ytterligere støtte studentenes utvikling av matematiske kunnskaper i resonnering og bevis via lærerstudiet i Norge. Som nevnt har studentene gjennom studiets oppbygning tidligere hatt mye fokus på pedagogiske kunnskaper og metoder i matematikkfaget. Denne kunnskapen er viktig å vektlegge fordi tidligere forskning viser til viktigheten av at lærere har en god begrepsforståelse av resonnering og bevis. Dette for at implementeringen av resonnering skal være hensiktsmessig for elevene og deres nivå. Tilpasningene i henhold til den norske konteksten kan bidra til at lærerstudentene øker fokuset på den matematiske kunnskapen, som ifølge tidligere forskning er et problemområde (G. J. Stylianides et al., 2013). Dette vil påvirke undervisningspraksisen i resonnering og bevis hos kommende lærere og sier noe om hva forskningsfeltet må vektlegge i ny forskning for videre utvikling av lærerstudentens kompetanse innenfor resonnering og bevis.

Et siste komponent som sier noe om den karakteristiske utviklingen som lærerstudentene hadde gjennom MaTeK-modul, er studentenes oppfatning av

resonnering og bevis, og hvilken rolle den har i matematikkundervisningen. Før MaTeK-modul hadde lærerstudentene en begrenset oppfatning om resonnering og bevis, hvor de i liten grad vekta resonnering i sin planlegging av matematikkundervisning. I etterkant av MaTeK-modul ser vi derimot at lærerstudentene har fått en mer kompleks og sammensatt oppfattelse av resonnering og bevis. De ser nytten i å ta i bruk resonnering og bevis som en ressurs generelt for alle matematiske tema, og som en viktig matematisk aktivitet for elevers forståelse og fremgang i faget. Dette viser viktigheten av MaTeK-modul og påvirkning dens innhold har hatt på lærerstudentens utvikling og oppfattelse av resonnering og bevis. Deres oppfattelse av å fremme resonnering i undervisningen etter endt MaTeK-modul er fremtredende, og henger sammen med både deres pedagogiske og matematiske kunnskap. Funnene i denne masteroppgaven viser til viktigheten av å støtte lærerstudentene i deres utvikling av undervisningskunnskaper for resonnering og bevis. Der man i den norske universitetsutdanningen, burde vektlegge den matematiske kunnskapen. Denne støtten kan føre til at lærere i skolen kan drive hensiktsmessige aktiviteter for resonnering i alle klassetrinn. Noe som vil hjelpe elevene i skolen i dag til å forstå matematiske prosesser bedre, og møte mindre vansker med å implementere prosessen i sin egen utvikling.

Referanseliste

- Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bell, C. J. (2011). Proofs without Words: A Visual Application of Reasoning and Proof. *The Mathematics Teacher*, 104(9), 690–695.
<https://doi.org/10.5951/MT.104.9.0690>
- Buchbinder, O., & McCrone, S. (2020). Preservice teachers learning to teach proof through classroom implementation: Successes and challenges. *The Journal of Mathematical Behavior*, 58, 100779.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100779>
- Buchbinder, O., McCrone, S., Capozzoli, M., & Butler, R. (2022). Mathematical Knowledge for Teaching Proof: Comparing Secondary Teachers, Pre-Service Secondary Teachers, and Undergraduate Majors. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*.
<https://doi.org/10.1007/s40753-022-00187-8>
- Clark, T., Foster, L., Sloan, L., Bryman, A., & Bryman, A. (2021). *Bryman's social research methods* (Sixth edition). Oxford University Press.
- Contreras-González, L., Climent, N., Carrillo, J., & Catalán, M. C. (2013, februar 6). *Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching*.
- Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed). SAGE Publications.
- Ellis, A., Özgür, Z., & Reiten, L. (2018). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 31.
<https://doi.org/10.1007/s13394-018-0246-6>
- Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. I *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 147–164). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Fosse, B., Rødnes, K. A., & Brevik, L. (2015). Betydningen av å bruke fagbegreper for

- elever, lærerstudenter og lærere. *Bedre Skole*, 2.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. I A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Red.), *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (s. 877–908). Springer Netherlands.
https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_24
- Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E., & Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, 74, 26–37. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2015.09.005>
- Hiebert et al. (1997). The social culture of the classroom. I *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. ME:Heinemann.
- Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16.
<https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Keet, C. M. (2013). Induction. I W. Dubitzky, O. Wolkenhauer, K.-H. Cho, & H. Yokota (Red.), *Encyclopedia of Systems Biology* (s. 1017–1018). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9863-7_733
- Kilpatrick, J., Martin, W. G., Schifter, D., & National Council of Teachers of Mathematics (Red.). (2011). Reasoning and proof. I *A research companion to Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Kimmig, A. (2013). Deductive Reasoning. I W. Dubitzky, O. Wolkenhauer, K.-H. Cho, & H. Yokota (Red.), *Encyclopedia of Systems Biology* (s. 557–558). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9863-7_594
- Kollosche, D. (2021). Styles of reasoning for mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 107(3), 471–486. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10046-z>
- Kunnskapsdepartementet. (2019). Læreplan i matematikk 1.–10. Trinn. 2019, 15.
- Kunnskapsdepartementet. (2010). *Nasjonale retningslinjer for grunnskoleutdanningen 5.-10.trinn*.
https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/rundskriv/2010/retningslinjer_grunnskolelaererutdanningen_5_10_trinn.pdf

- Kvam, E. K. (2019). Praksisveiledning og lærerstudenters profesjonelle utvikling. Om utviklende kunnskapsprosesser i lærerutdanningens praksisveiledning. *Acta Didactica Norge*, 13(1), Artikkel 1. <https://doi.org/10.5617/adno.6628>
- Lesseig, K. (2016). Investigating Mathematical Knowledge for Teaching Proof in Professional Development. *International Journal of Research in Education and Science*, 2(2), 253. <https://doi.org/10.21890/ijres.13913>
- Livy, S., & Downton, A. (2018). Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 150–160. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.004>
- National council of teachers of mathematics. (u.å.). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and sense Making questions and Answers*. Hentet 6. mai 2023, fra https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Focus_in_High_School_Mathematics/FHSM_FAQs.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (Red.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Ojo, O. A., Adu, K. O., & Adu, E. O. (2017). School Experience: Institutions' Expectations from Pre-service Teachers. *The Anthropologist*, 29(1), 19–26. <https://doi.org/10.1080/09720073.2017.1335825>
- Pepin, B. (2022, oktober). *Curriculum as Design for Learning* [Studiemateriell].
- Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. I T. Rowland & K. Ruthven (Red.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (s. 9–25). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_2
- Reid, D. (2003). *FORMS AND USES OF ABDUCTION*.
- Remillard, J., & Heck, D. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM*, 46, 705–718. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4>
- Sevinc, S., Kohanová, I., Isiksal-Bostan, M., Kubáček, Z., Isler-Baykal, I., Lada, M., Cakiroglu, E., & Paola, B. D. (2022). DEVELOPING AN INTEGRATED FRAMEWORK

- FOR ANALYZING WAYS OF REASONING IN MATHEMATICS. *ICERI2022 Proceedings*, 2082–2089. <https://doi.org/10.21125/iceri.2022.0529>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944>
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Silverman, B., & Even, R. (2015). *Textbook explanations: Modes of reasoning in 7th grade Israeli mathematics textbooks*.
- Skott, E. L. B., & Valenta, A. (2022). Kommunikasjonsmønster under arbeid med matematisk resonnering. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis*, 16(2), Artikkel 2. <https://doi.org/10.23865/up.v16.3518>
- Stacey, K., & Vincent, J. (2008). *Modes of reasoning in explanations in Year 8 textbooks*.
- Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: The case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 159–180. <https://doi.org/10.1007/s10857-012-9204-5>
- Stephan, M. (2020). Sociomathematical Norms in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 802–805). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_143
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.
- Stylianides, A. J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs : original research. *Pythagoras*, 32(1), 1–10. <https://doi.org/10.10520/EJC20939>
- Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 307–332. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9>

- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 237–253.
<https://doi.org/10.1007/s10649-009-9191-3>
- Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9–16.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). PROSPECTIVE TEACHERS' CHALLENGES IN TEACHING REASONING-AND-PROVING. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1463–1490.
<https://doi.org/10.1007/s10763-013-9409-9>
- TIMSS - Video Studies. (u.å.). Hentet 23. mai 2023, fra
<https://nces.ed.gov/timss/video.asp?fbclid=IwAR1p-twnwZNtHuZUak960JcgwaqWHVM7M1uGGOoumHbbxPsFr9oUxbpWffA>
- van den Akker, J. (2003). Curriculum Perspectives: An Introduction. I J. van den Akker, W. Kuiper, & U. Hameyer (Red.), *Curriculum Landscapes and Trends* (s. 1–10). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1205-7_1

Vedlegg

Vedlegg 1: Refleksjoner av samarbeidet i masteroppgaven

Vedlegg 2: Mal for undervisningsplan i MaTeK-prosjektet

Vedlegg 3: Intervjuguide for fokusgruppeintervjuet før MaTeK-modul

Vedlegg 4: Mal Exit-lapper for undervisningsøkt 1,2 og 3 i MaTeK-modul

Vedlegg 5: Mal Exit-lapper for undervisningsøkt 5 i MaTeK-modul

Vedlegg 6: Tabell for analyse av datamaterialet

Vedlegg 7: Samtykkeskjema for deltakelse i MaTeK-prosjektet

Vedlegg 1 Refleksjon av over samarbeid i masteroppgaven

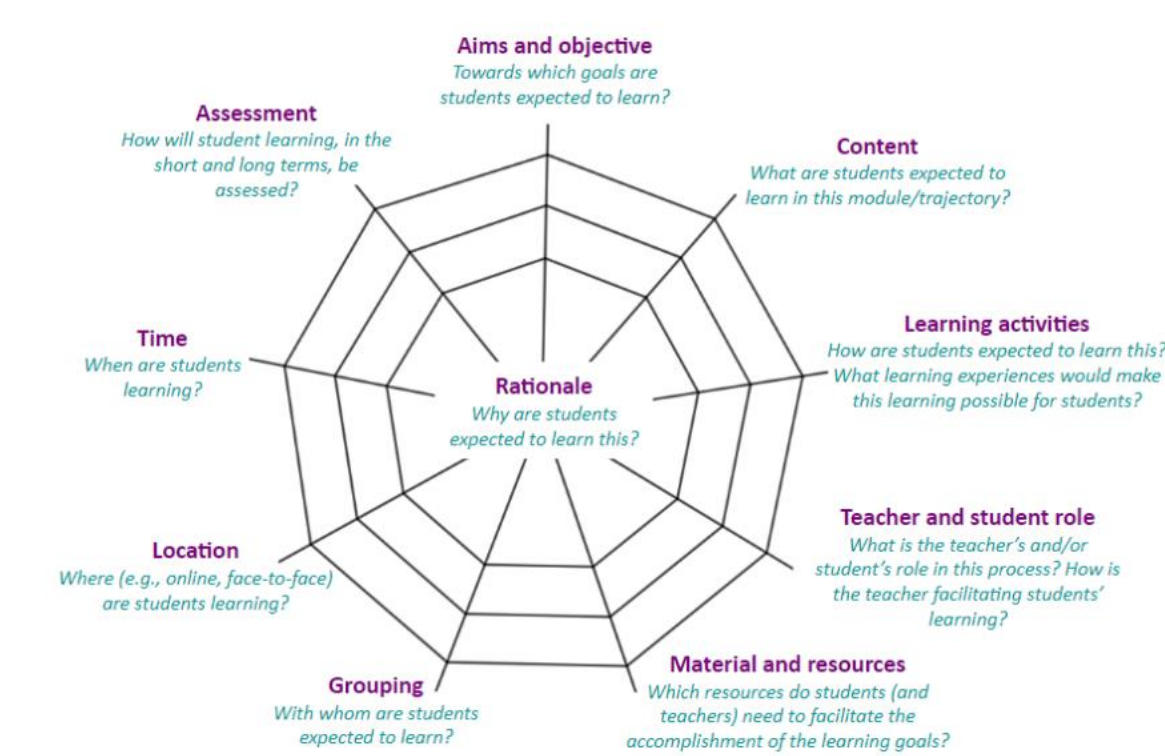
I denne delen vil vi reflektere over vårt samarbeid som masterpartnere under prosessen med å skrive denne masteroppgaven. Vi har derfor her reflektert over hvorfor vi valgte å skrive sammen, hvilke forventninger vi har satt til hverandre, og tilslutt hvordan vi har lagt opp samarbeidet i denne perioden.

Grunnen til at vi valgte å skrive master sammen, var først og fremst på grunn av at vi har vært gode venner gjennom hele studieløpet, og derfor kjenner vi hverandre godt. I tillegg har vi jobbet sammen på flere større fagtekster, hvor samarbeidet fungerte godt, der vi utfylte hverandre og fikk brukt hverandres styrker i prosessen med å skrive akademiske tekster. En annen viktig begrunnelse for at vi tok avgjørelsen om å skrive sammen, var at vi begge var interessert i å skrive om samme tema, hvor vi da fikk muligheten til å bli med på vår veileder, Iveta Kohanová, sitt prosjekt. Dette prosjektet var vi begge veldig interessert i og motivert for å være med på.

I startprosessen diskuterte vi sammen hvilke forventninger vi hadde til masteroppgaven i forhold til hva vi ville oppnå, og hvordan vi ønsket å jobbe sammen. Vi ble sammen enig om å få en god oversikt over hverandres kalender, noe som var veldig enkelt med tanke på at vi gjennom hele studiet allerede er vant til å vite mye om hverandres hverdag og hendelser i løpet av uken. Vi ble enige om hvilke dager vi skulle møte opp på lesesal og tidspunkt for oppmøte, og hvilke dager som kunne brukes til annet som jobb og fritid. Vi har også gjennom hele prosessen vært åpne for at uventede hendelser dukker opp, og at vi da likevel har kommunisert godt i arbeidet med masteren.

Gjennom prosessen med å samle inn data og skrive selve oppgaven, har vi hele tiden vært enig om å gjøre dette i et tett samarbeid. Vi har begge deltatt på alle intervjuene som vi har hatt ansvar for, og begge har vært observatører i alle forelesningene gjennom prosjektet. Dermed fikk vi begge tilegnet oss de samme erfaringene og observasjonene underveis i datainnsamlingen. Når det kommer til selve skriveprosessen har vi også hatt et tett samarbeid. Vi har begge lest alle relevante artikler slik at vi begge har den samme kunnskapen og oversikt over relevant litteratur, og begge har bidratt tilnærmet likt i alle delkapitler av oppgaven. Styrken ved dette samarbeidet har spesielt vært at vi har kunnet gi hverandre konstruktive tilbakemeldinger, og at vi utfylte hverandres arbeid i alle deler av oppgaven. Dermed har begge tatt et likt ansvar for alle prosesser, som å samle inn data, finne teori, utvikle metoder og rammeverk, analysere data og reflektere av resultater til slutt. Samarbeidet har gitt oss muligheten til å vurdere hverandres arbeid, dele ideer, refleksjoner og kunnskap som har vært med på å styrke innholdet i denne oppgaven.

Vedlegg 2 Mal for undervisningsplan i MaTeK-prosjektet (Spiderweb)



MaTeK undervisningsplan mal:

Begrunnelse:	Årstrinn:
Mål (knyttet til kompetansemål, hvis det er mulig):	Tid:
Innhold/tema:	Oppgaver:
Læringsaktiviteter:	Elever:
Gruppe og sted:	
Tilrettelegging av læreren:	
Materialer og ressurser:	
Lekser- tillegg utfordringer:	

Vedlegg 3 Intervjuguide for fokusgruppeintervjuet før MaTeK-modul.

The suggested questions for the initial interview are:

(0) Kan du fortelle oss noe om dine egne erfaringer fra undervisning så langt?

a) *Hvilke emner/fag har du tatt som er relatert til R&P (resonnering og proof?) så langt?*

(1) Se for deg at du er matematikklærer for trinnene 5.-10. (både i og etter lærerutdanningen)

- Hvordan ville du ha beskrevet din egen undervisningstil i matematikk?
- Hvilke metoder/arbeidsmåter bruker du eller ville du ha brukt i undervisningen av matematikk? (*gruppearbeid, individuelle oppgaver, forelesning*)
- Hva vil du oppnå som lærer (i matematikk): i henhold til elevers læring.
- Hvordan ville du personlig lagt opp en matematikktime (bruk 10-15 verb som beskriver hvordan du ville ha gjort dette)
- Hvilken rolle/ viktighet har resonnering og bevis i din undervisning?

(2)

- Hvor godt kjent er du med den norske læreplanen spesifikt i matematikk for 5- 10 klasse og hvilken rolle/ viktighet spiller resonnering og bevisføring i denne planen?
- Hvilke typer av resonnering og bevis er du kjent med? (*Her kan lærerstudentene gi korte eksempler*).
- Hvilken av de mener du burde vært lært i 5.-10.klasse?

(3)

- Hvis du skulle ha skrevet en undervisningsplan i matematikk, hva ville den ha inneholdt, hvilke deler ville den ha inneholdt?
- Hvilke deler av undervisningsplanen er essensiell og hvorfor?
(*Få lærerstudentene til å gi konkrete eksempler*)

(4)

- Hvilke ressurser er tilgjengelige for undervisningsplanlegging?
- Hvilke ville du brukt mest (eks. tekstbøker, digitale ressurser)?
- Hvilke ressurser er tilgjengelige for resonnering og bevis? (*be lærerstudentene å gi konkrete eksempler*)

(5)

- Arbeider du med kollegaer (klassekamerater, samarbeidspartnere) (ofte/ noen ganger), og i så fall i hvilke oppgaver? (Undervisningsplanlegging, andre oppgaver?)
- Hvilke muligheter er det for (lærere, lærerstudenter) til å arbeide i grupper (profesjonelle utviklingsmiljøer)? (be lærerstudentene om å gi konkrete eksempler)

Vedlegg 4Mal Exit-lapper for undervisningsøkt 1,2 og 3 i MaTeK-modul
MaTeK prosjektet intervensjon (lærerstudenter)

Dato:

Studentens navn:

1. Velg det smilefjeset som beskriver helhetsinntrykket/følelsen av arbeidet vi gjorde i dag.



Forklar for hvorfor du valgte akkurat dette smilefjes:

2. Beskriv den viktigste tingen (ene) du lærte i dag?

3. Hvilken del av økten i dag likte du best i dag? (Forklar hvorfor/ beskriv aktiviteten du likte best og forklar hvorfor?).

4. Beskriv hva du fant vanskelig i dag, og forklar hvorfor?

5. Velg det smilefjeset som beskriver hvor selvsikker du følte deg i utviklingen av undervisningsplanen med fokus på resonnering og bevis?



Forklar hvorfor du valgte akkurat dette smilefjeset:

Vedlegg 5 Mal Exit-lapp for undervisningsøkt 5 i MaTeK-modul
MaTeK prosjektet, intervensjon Exit-lapper økt 5 (lærerstudenter)

Dato:

Studentens navn:

1. Velg det smilefjeset som beskriver helhetsinntrykket/følelsen av arbeidet vi gjorde i dag.



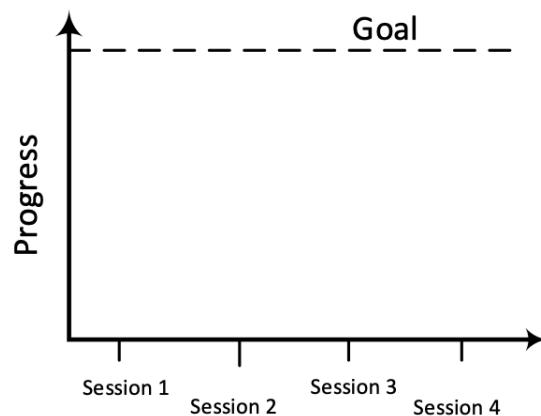
Forklar for hvorfor du valgte akkurat dette smilefjes:

2. Beskriv den viktigste tingen (ene) du lærte i dag?

3. Hvilken del av økten i dag likte du best i dag? (Forklar hvorfor/ beskriv aktiviteten du likte best og forklar hvorfor?).

4. Beskriv hva du fant vanskelig i dag, og forklar hvorfor?

5. Med tanke på arbeidet ditt på R&B på leksjonsdesign, hvordan ville du skissert fremgangen/utviklingen din i løpet av øktene mot målet å "designe gode undervisningsøkter i resonnering og bevis"? Bruk noen få ord til å forklare



Vedlegg 6 Tabell for analyse av datamateriale

Student:

Kontekst		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Matematisk kunnskap		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Både matematisk kunnskap og pedagogisk kunnskap		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Både matematisk kunnskap og læreplan kompetanse		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Pedagogisk innholdskunnskap		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Både pedagogisk kunnskap og læreplan kompetanse		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Læreplan kompetanse		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Oppfatninger		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Matematisk kunnskap og oppfatninger		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Pedagogisk innholdskunnskap og oppfatninger		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Læreplan kompetanse og oppfatninger		
Før MaTek modul	Underveis i MaTek modul	Etter endt MaTek modul

Vedlegg 7 Samtykkeskjema for deltakelse i MaTeK-prosjektet

Are you interested in taking part in the research project

“ Pre-service mathematics teachers lesson design capacity”?

This is an inquiry about participation in a research project where the main purpose is to study preservice mathematics teachers' development of lesson design capacity in terms of reasoning and proof. In this letter we will give you information about the purpose of the project and what your participation will involve.

Purpose of the project

XXX conducts international research related to pre-service teachers' lesson design capacity in terms of reasoning and proof. This study is part of an EU Horizon 2020 project called "Enhancement of Research Excellence in Mathematics Teacher Knowledge" (acronym MaTeK, <https://www.projectmatek.eu/>) in which five European universities from Slovakia, Czech Republic, Italy, Norway and Turkey are cooperating. The main research question of the MaTeK project is "How can pre-service mathematics teachers' design capacity in terms of reasoning and proof be enhanced?". Reasoning skills help children make rational decisions based on evidence rather than prejudice; they are essential if children are to think deeply about societal and ethical issues. Thus, we consider pertinent to better prepare future mathematics teachers regarding their abilities to plan lessons where reasoning and/or proving skills of pupils are on focus. The data collected in this research project will be used in an international study and results of this study will be used in preparation of future mathematics teachers at five European universities who are partners in the MaTeK project. The collected data will be also used in a master thesis of two Norwegian students (preservice mathematics teachers), who will only focus on data from Norway. Answering the research question will help to improve the teacher training at involved institutions and consequently also reasoning and proving skills of pupils in five mentioned countries.

Who is responsible for the research project?

Department of Teacher Education, project in Norway.

Other partners of the project are:

Comenius University in Bratislava,

Slovakia Charles University in Prague,

Czech Republic University of Palermo,

Italy Middle East Technical University in Ankara, Turkey

Why are you being asked to participate?

To better understand pre-service mathematics teachers' development of lesson design capacity in terms of reasoning and proof, mathematics students of the course XXX at XX, XXX are invited to participate in this study. The sample of this study is small, so we hope that most students are willing to join this study. The diversity of empirical data from students is important to help us to better understand the enhancement of lesson design capacity, as well as to better prepare future mathematics teachers for their teaching career.

What does participation involve for you?

The data is collected by the following methods

- Pre- and post- group audio recorded interviews. Students will be asked questions related to their experiences with reasoning, lesson planning, group work, learning during the intervention, etc.
- Individual exit cards after each session of the Intervention.
- Mandatory homework of the course submitted to Blackboard.
- Video-recorded sessions of the Intervention (4 in total). The focus of the camera will be on the whole class (without zooming on faces) or on group work (without filming students' faces), so we can capture the dynamics of the class/groups, questions being asked, critical moments of the sessions in terms of enhancement of students' lesson design capacity.

Participation is voluntary

Participation in this research project is voluntary. If you chose to participate, you can withdraw your consent at any time without giving a reason. It is enough to inform the project leader to withdraw from the study by sending her an email. All your personal information will then be deleted. After the XXX course, all data will be used and stored in anonymized forms. There will be no negative consequences for you if you choose not to participate or later decide to withdraw. It will not affect your grades, nor your relationship with the course teachers, nor the institution. The information the project will gather about you and other students for research purposes cannot be and will not be used for assessing your coursework or participation during the lectures. Your personal privacy – how we will store and use your personal data We will only use your personal data for the purpose(s) specified in this information letter. We will process your personal data confidentially and in accordance with data protection legislation (the General Data Protection Regulation and Personal Data Act).

- The project leader (XXX) and her colleagues XXX and XXX and two master students XXX and XXX will have access to personal data (if this should be the case).
- We (the five people mentioned above) will replace your name with a code and anonymize all personal information which might appear in the collected data. We will store the data on a research server, locked away/encrypted, etc.

Participants will not be recognizable in publications, as we only provide general information of the participants such as gender and/or teaching experiences.

What will happen to your personal data at the end of the research project?

The project is scheduled to end on 31. December 2023. Latest by the end of the project, all collected data will be made anonymous and will be stored and used in anonymized form and maybe used in the future academic research reports and journal articles.

Your rights

So long as you can be identified in the collected data, you have the right to: - access the personal data that is being processed about you

- request that your personal data is deleted
- request that incorrect personal data about you is corrected/rectified
- receive a copy of your personal data (data portability), and
- send a complaint to the Data Protection Officer or The Norwegian Data Protection Authority regarding the processing of your personal data

What gives us the right to process your personal data?

We will process your personal data based on your consent. Based on an agreement with XXX, *Department of Teacher Education*, Data Protection Services has assessed that the

processing of personal data in this project is in accordance with data protection legislation.

Where can I find out more?

If you have questions about the project, or want to exercise your rights, contact:

- Department of Teacher Education
- Our Data Protection Officer
- Data Protection Services, by email

Consent form

I have received and understood information about the project Pre-service mathematics teachers lesson design capacity and have been given the opportunity to ask questions. I give consent:

- to participate in the project and to permit the use of my written work in all assignments in the “XXX” course related to the project,
- to participate in the project and to permit the use of my written reflections that I provide in the exit cards after the four intervention sessions,
- to participate in the project and to permit the use of my thoughts that I provide in an audio recorded pre- and post- group interviews,
- to participate in the project and to permit the use of my thoughts that I provide in a video recorded teaching sessions of the project Intervention.

I give consent for my personal data to be processed until the end date of the project, which is 31.12.2023.

(Signed by participant, date

