Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Christine Gilroy Iversen

Elevers tallforståelse og bruk av representasjoner

En kvalitativ studie av 12 førsteklassinger sin tallforståelse i arbeid med telling og semiotiske representasjoner

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Solveig Voktor Svinvik
Mai 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Christine Gilroy Iversen

Elevers tallforståelse og bruk av representasjoner

En kvalitativ studie av 12 førsteklassinger sin tallforståelse i arbeid med telling og semiotiske representasjoner

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Solveig Voktor Svinvik
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne studien har jeg undersøkt førsteklasseelevers tallforståelse i møte med ulike representasjoner. Formålet er å få innsikt i hvordan deres tallforståelse påvirkes av representasjonene som blir brukt. Forskningsspørsmålet for denne oppgaven er *Hvilke aspekt for tallforståelse viser noen førsteklassinger i arbeid med telling, og hvordan påvirker bruken av representasjoner hvilke aspekt som kommer til syne?* Med utgangspunkt i dette forskningsspørsmålet har denne studien et kvalitativt forskningsdesign. Utvalget i denne studien er 12 elever fra en førsteklasse i Norge.

De kvalitative metodene som ble brukt for innsamling av data var deltakende observasjon og innsamlet elevarbeid. Triangulering av metoder kan styrke kvaliteten på studien. Elevene ble delt inn i tilfeldige grupper og bestod av tre elever i hver gruppe. Elevene arbeidet individuelt med tre telleaktiviteter jeg hadde utarbeidet. I oppgavene la jeg vekt på at elevene skulle telle ved å bruke ulike representasjoner. Elevene skulle telle både fysiske og abstrakte konkreter. Underveis var det også nødvendig å transformere mellom representasjonene for å gi mening til de matematiske objektene. Tanken med aktivitetene var at de skulle fremme aspekter innen tallforståelse. Underveis stilte jeg spørsmål og elevene kunne dele sine tanker og ideer. Datainnsamlingen ble filmet med videokamera. Disse videoopptakene ble transkribert i etterkant.

Med deduktiv tilnærming i analysemetoden, ble datamaterialet kategorisert og kodet med utgangspunkt i eksisterende teori. I denne studien benyttes Duvals (2006) semiotiske representasjonssystem og Andrews og Sayers (2015) aspekter ved grunnleggende tallforståelse. Disse rammeverkene ble kombinert.

Funnene fra denne studien viser blant annet at sju av de åtte aspektene ved grunnleggende tallforståelse kommer til syne i førsteklasseelevenes arbeid med telleaktivitetene. Aspektet om tallmønster kom ikke til syne, og årsaken kan være potensialet med telleaktivitetene. Systematisk telling var det eneste aspektet som kom til syne innenfor alle de semiotiske representasjonssystemene. Videre viser denne studien til at bruken av representasjoner påvirker hvordan elevene uttrykker seg om de matematiske objektene. Det ser ut til at elevene synes det er lettere å uttrykke mengdes kardinalitet i arbeid med fysiske konkreter sammenlignet med abstrakte konkreter. Studien viser også at transformasjon i form av omdannelse er utfordrende for elevene, da de må transformere mellom ulike representasjoner for å gi mening til de matematiske objektene.

Abstract

In this study I have examined first graders understanding of number sense while working with different representations. The purpose is to gain insight into how their number sense is affected by the representations that they use. The research question for this study is *Which aspects of number sense do some first graders show while working with counting, and how does the use of representations influence which aspects that appears?* Based on this research question, this study has a qualitative research design. The sample in this study is 12 students from a first class in Norway.

The qualitative methods used to collect data were participant observation and collected student work. Triangulation of methods strengthens can strengthen the quality of the study. The students were divided into random groups and consisted of three students in each group. The students worked individually with three counting activities that I had prepared. In this tasks, I emphasized that the students should count using different representations. The students had to count both physical and abstract manipulatives. Along the way, it was necessary with transformation between semiotic representations to give meaning to the mathematical objects. The idea behind the activities was that they should promote aspects of number sense. During the data collection I asked questions and the students could share their ideas and thoughts. The data collection was filmed with a video camera. These video recordings were transcribed afterwards.

With a deductive approach in the analysis method, the data was categorized and coded based on existing theory. In this study, Duval´s (2006) semiotic representation system and Andrews and Sayers (2015) aspects of foundational number sense were used. These frameworks were combined.

The results from this study show, that seven of the eight aspects of foundational number sense appears while the first graders work with the counting activities. The aspect "Awareness of number patterns" did not appear, and the reason may be the potential of the counting activities. Systematic counting was the only aspect that emerged within all of the semiotic representation systems. Furthermore, this study shows that the use of representations affects how students express themselves about the mathematical objects. It seems that the first graders think it is easier to express the cardinality of the quantity while working with phsyical manipulatives compared to abstract manipulatives. The study also shows that transformation as conversions is challenging for students, as they have to transform the mathematical object between different representations to give meaning to them.

Forord

Dette masterprosjektet markerer slutten på min tid som student. Fem år i Trondheim er nå over og en ny hverdag venter. Arbeidet med masteroppgaven har i bunn og grunn vært en lærerik prosess. Jeg har fått fordypet meg i et tema jeg synes er interessant. Likevel skal jeg ikke legge skjul på at prosessen også har vært omfattende og tidkrevende. I løpet av studietiden og ikke minst det siste halvåret, har andre også bidratt til at dette prosjektet nå er ferdig.

Først og fremst vil jeg takke min veileder Solveig Voktor Svinvik. Takk for alle konstruktive tilbakemeldinger, og veiledning jeg har fått underveis i prosessen. Dine tips og råd har vært betydningsfull når skrivesperren har oppstått. Jeg må også få takke de 12 prosjektdeltakerne for at dere ville delta i prosjektet. Ikke minst klassens lærer for at jeg fikk utføre datainnsamlingen i din klasse. Uten dere hadde det ikke vært mulig å gjennomføre denne studien.

Til slutt vil jeg takke familie og venner. Takk for alle støttende ord og gode råd i løpet av prosessen med oppgaven, spesielt det siste halvåret. Takk for hjelp med korrekturlesing og innspill når jeg har stått fast. Dere har motivert meg.

Christine Gilroy Iversen

Kristiansund, mai 2023

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser/symboler

FONS	Foundational Number Sense
LK20	Lærerplanverket for Kunnskapsløftet 2020
NSD	Norsk senter for forskningsdata

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Innenfor temaet tallforståelse vil jeg i denne studien se nærmere på førsteklasseelevers arbeid med telling og bruken av representasjoner. Årsaken er at man som matematikklærer er en sentral figur for elevenes utvikling i matematikkfaget. Det elevene lærer i løpet av de første årene på skolen, vil være grunnlaget for videre læring i matematikken. Deres kompetanse innenfor tall og tallforståelse er ikke bare essensiell i matematikkfaget på barneskolen, men like viktig for videre utdanning og yrkesliv. Ikke minst i dagliglivet. Det at elevene viser forståelse for hva tallord, mengder med objekter og tallsymboler representerer mener jeg er nødvendig kunnskap å ha. I arbeidet med å utforske tallene og betydningene, vil elevene trolig måtte veksle mellom representasjonene for å kunne gi mening til objekt i faget.

Tallforståelse er et fundament i læringen av matematikk (Ivrendi, 2011, s. 239). Ens tallforståelse knyttes til ens forståelse av tall og evnen til å benytte denne kunnskapen mens man tolker, behandler og kommuniserer i matematikkfaget (McIntosh et al., 1992, s. 3). For elevene vil det si hvordan de bruker deres forståelse av tallene i møte med matematiske problemstillinger. I denne studien er fokuset tallforståelse på småtrinnet og dermed vil Andrews og Sayers (2015, s. 257) grunnleggende tallforståelse være sentral. Det innebærer å kunne operere fleksibelt med mengder og tall. Forfatterne refererer til åtte kategorier innen FONS, Foundational Number Sense. Med utgangspunkt i disse kategoriene kan man forutsi elevenes senere suksess og prestasjoner i faget. Av den grunn kan man trolig si at tallforståelse utgjør en sentral del av begynneropplæringen i matematikk. Dessuten gjenspeiles viktigheten av tallforståelse i kompetansemålene etter 2. trinn, hvor målet for opplæringen beskrives (Kunnskapsdepartementet, 2019). I tillegg fremhever litteratur innen feltet hvor viktig tallforståelse er å få innsikt i (Jordan et al., 2010; Shumway, 2011; Yang & Li, 2008).

I samhandling med voksne stimuleres utviklingen av tallforståelsen (Johnsen-Høines, 2020, s. 15). Elevene bruker tallordene kontinuerlig i hverdagen, ikke bare i matematikken. Tallordene forekommer som en naturlig del av elevenes språk, uavhengig om de forstår innholdet og mengden tallordet representerer. De teller antall elever i klassen og ser på hvilken dato det er. Fingrene blir også brukt jevnt gjennom skoledagen som støtte og i kommunikasjon med andre, hvor antallet fingre viser det totale antallet. De benyttes til å for eksempel vise hvor mange år de er, hvor mange dager det er til bursdagen deres eller telle antall i en mengde. Fingrene representerer tallordene. Historisk betyr telling at man ved hjelp av symboler og ord kan representere ett og ett element i en mengde (Johnsen-Høines, 2020, s. 13). Telling involverer å få oversikt og ordne mengder. Tellesekvensene hjelper elevene med å koble tall til hverandre (Anghileri, 2006). Elevene teller ikke bare ett og ett tallord om gangen, men stegteller med hopp på to og to eller fem og fem. Etter hvert er elevene i stand til å telle fra hvilket som helst tall, telle forover og bakover. Videre kan elevenes kunnskaper om telling hjelpe med å løse aritmetiske operasjoner. Av den grunn vil deres tallforståelse utvikles kontinuerlig etter hvert som de lærer.

Levine et al. (2010) beskriver viktigheten av situasjoner hvor man utforsker og snakker om betydningen av tallene. Slike samtaler kan for eksempel være gruppe- eller stasjonsarbeid hvor elevene kommuniserer med hverandre. Elevene er ikke passive mottakere av matematisk kunnskap (Anghileri, 2006). De er aktive deltakere i konstruksjon av egen kunnskap ved å kommunisere om matematikken. Av den grunn er slike samtaler fundamentale for barnas tallforståelse, ettersom de uttrykker seg om matematiske begreper. Det er ikke bare elevene som skal delta i slike samtaler, men læreren har også en viktig rolle i kommunikasjonen. Björklund og Palmér (2022) fremhever at læreren må lytte til elevene slik at de blir oppmerksomme på deres forståelse av tall. Læreren kan fange opp utsagn, ideer og tanker som er betydningsfulle. Både for seg selv, men også de andre. Likevel er språket kun én måte å uttrykke seg på. Når elevene kommuniserer i matematikkfaget, benytter de seg av ulike representasjoner. Ofte er det nødvendig med flere representasjoner for å representere et matematisk objekt (Duval, 2006).

Forskning viser til at elevenes forståelse for tall og tallsymboler kan øke, ved at elevene arbeider med forskjellige former for representasjoner og sammenhengen mellom de (Gersten et al., 2009). Kilpatrick et al. (2001, s. 94) deler representasjoner inn i symbolske, verbale, visuelle, konkrete og kontekstuelle. Det å gi elevene muligheten til å benytte seg av ulike representasjoner vil over tid støtte elevenes forståelse for abstrakte symboler, slik som tallsymboler. For øvrig kan det være utfordrende for elevene å se sammenhengen mellom visuelle representasjoner og abstrakte symbol. Gersten et al. (2009) poengterer at konkrete representasjoner kan være nødvendig dersom de visuelle ikke er tilstrekkelig å bruke som støtte for abstrakte symboler. Dette kan styrke sammenhengen mellom representasjonen og det matematiske begrepet. Fingrene og ulike konkretiseringsmateriell er eksempler på representasjoner som tas i bruk i arbeid med telling og tallforståelse i begynneropplæringen. Konkreter gjør matematikken mer tilgjengelig og synlig for elevene, i og med at elevene fysisk modellerer med konkrete representasjoner (Fuchs et al., 2021). I kombinasjon med elevenes muntlige ferdigheter skaper de mening og er avgjørende i samtaler knyttet til matematiske tematikker (Anghileri, 2006, s. 3).

I artikkelen til Webb et al. (2008) stilles det spørsmål til hvordan lærerne kan øke elevenes tilgang til matematikken gjennom bruk av representasjoner. Bruken beskrives gjennom et isfjell. På toppen av isfjellet plasseres den symbolske representasjonen. Under tallene ligger konkreter, diagrammer, regnefortellinger og symboler. Alle uttrykksformene brukes ikke samtidig, men er utgangspunktet for abstrakt forståelse i matematikkfaget. Imidlertid kan variasjonen av representasjonene gjøre matematikken mer kompleks og krevende å forstå, siden det kan være vanskelig å forstå at representasjonene står for det samme matematiske objektet. Duval (2006) mener at det er sentralt å veksle mellom forskjellige representasjoner i matematikkundervisningen, ettersom overgangen mellom tegn og overgangen mellom semiotiske representasjoner er hovedpunktet i matematisk aktivitet.

Fagområdet tall, tallregning og tallforståelse utgjør grunnlaget for all læring og undervisning i matematikkfaget (Grønmo et al., 2017, s. 258). Skolen skal være en arena som tilrettelegger for at elevene får god kunnskap i disse områdene. Kompetanse innenfor tall og tallforståelse er essensiell med tanke på videre utdanning og yrkesliv, og i dagliglivet. Selv om tall og tallregning er grunnleggende i matematikkfaget på barnetrinnet, viser resultatene av TIMSS-studiene at elevene presterer svakt innenfor dette området (Bergem, 2016, s. 39). Derfor mener jeg at arbeid med tall og telling er svært sentralt i begynneropplæringen i faget. Det de lærer i løpet av de første årene på skolen, er grunnlaget for videre læring i matematikken.

1.2 Problemstilling og formål

Formålet med denne studien er å få bedre innsikt i noen førsteklasseelevers tallforståelse, og se hvordan bruken av representasjoner påvirker tallforståelsen som kommer til syne. Å få innsikt i elevenes tallforståelse er en del av matematikkfaget som er interessant, da elevenes forståelse av tall trolig er noe av det mest grunnleggende de lærer i løpet av de første årene på skolen. Videre vil dette danne grunnlaget for senere læring i matematikkfaget. I arbeid med telling, møter elevene i denne studien ulike representasjoner. Når elevene utforsker tall og deres betydning, tror jeg det vil være essensielt å veksle mellom representasjonene. Dette for å kunne gi mening til matematikken.
Forskningsspørsmålet for denne studien er:

Hvilke aspekt for tallforståelse viser noen førsteklassinger i arbeid med telling, og hvordan påvirker bruken av representasjoner hvilke aspekter som kommer til syne?

For å kunne besvare forskningsspørsmålet har elevene arbeidet med ulike telleaktiviteter i små grupper. Elevene arbeidet individuelt med både fysiske konkreter og mer abstrakte konkreter. Det jeg legger i fysiske konkreter er konkretiseringsmateriell man fysisk kan ta på, gruppere og skyve. Centikuber er fysiske konkreter elevene kan ta på og bruke direkte. I motsetning er abstrakte konkreter, for eksempel figurer på et bilde eller et ark, ikke fysisk tilgjengelig da man ikke kan skyve eller gruppere direkte. De er figurer som tjener i stedet for noe annet og i denne studien for tallsymbol. Clements og Sarama (2014) vektlegger behovet om at elevenes uttrykksmåter går fra konkret til abstrakt. Når elevene teller figurene, kan det være ett én – til – én forhold mellom tallordet og mengden figurer. Slik det også kan oppleves med fysiske konkreter. Når elevene uttrykker seg med ulike representasjoner i tellingen, kan aspekt for grunnleggende tallforståelse komme til syne. Studien baseres på kategoriene for grunnleggende tallforståelse utviklet av Andrews og Sayers (2015) og Duvals (2006) semiotiske representasjonssystem. Gjennom arbeid med å ta matematiske vurderinger samt utvikling av gunstige strategier i håndteringen av tall og operasjoner, vil en persons tallforståelse være essensiell (McIntosh et al., 1992, s. 3). Evnen til å håndtere tall og bruke informasjonen i kommunikasjon og bearbeiding i samhandling med andre kan støtte forventningen om at tall er nyttig.

1.3 Oppgavens oppbygging

Innledningsvis fremstilles relevant teori rundt tematikken tallforståelse og studiens teoretiske rammeverk. Hensikten med kapittel 2 er å belyse sentrale begrep og tidligere forskning som vil være relevant for studien. Tallforståelse defineres ytterligere med utgangspunkt i telling. Videre vil tegn og semiotiske representasjoner presenteres, da elevene transformerer mellom ulike representasjoner. Konkreter blir benyttet i transformasjonene og redegjøres for avslutningsvis. I kapittel 3 blir valgt metode beskrevet. Her vil det bli redegjort for kvalitativ forskningsdesign og observasjon og elevarbeid som metoder. Deretter vil gjennomføringen av datainnsamlingen bli forklart og begrunnet. I tillegg vil det være sentralt å nevne forskningsetiske betraktninger som er tatt i forbindelse med studien. Deretter presenteres analysemetode. Kapittel 4 viser funnene fra analysen. Relevante utdrag fra datamaterialet vil bli presentert og redegjort med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket for studien. I kapittel 5 vil funnene fra analysen bli drøftet og satt i sammenheng med teori og tidligere forskning innen feltet. Til slutt oppsummeres funn fra studien.

2 Teori

I teorikapittelet presenteres relevant teori for studien. Innledningsvis defineres tallforståelse ytterligere med utgangspunkt i McIntosh et al. (1992). Elevenes tallforståelse sier noe om deres forståelse av operasjoner og tall, og er dermed sentral for elevenes telling. Ettersom jeg ønsker å se hvilke aspekter for tallforståelse som kommer til syne i elevenes arbeid med telling, presenteres rammeverket til Andrews og Sayers (2015) om grunnleggende tallforståelse med relevante eksempler. Deretter introduseres bruken av tegn i matematikk med utgangspunkt i Steinbring (2006) og den epistemologiske trekanten. Teorien beskriver hvordan elevenes bruk av objekter og symboler kan gi mening til de matematiske begrepene. I telleaktiviteten arbeider elevene med centikuber og figurerer på ark, som matematisk objekt/referansekontekst for å representere tallene. I definisjonen gitt av McIntosh et al. (1992) beskrives de matematiske objektene som en representasjon av det gitte matematiske begrepet. Av den grunn vil det være hensiktsmessig å beskrive semiotiske representasjoner i henhold til Duval (2006). For å kunne se på elevenes overganger mellom representasjonene som benyttes i tellingen, presenteres også transformasjoner. Konkreter er én av representasjonene. Ifølge Duval (2006) er ikke konkreter en representasjon i det semiotiske systemet, men brukes som støtte for andre representasjoner. Likevel mener Kilpatrick et al. (2001) at tall kan representeres med fysiske konkreter. Dermed redegjøres bruk av konkreter i matematikkundervisning til slutt.

2.1 Tall og tallforståelse

Tallforståelse er et komplekst begrep som kan være enkel å kjenne igjen, men utfordrende å både definere og å lære bort (Andrews & Sayers, 2015; Griffin, 2004). Imidlertid vil det være fundamental kunnskap å ha knyttet til matematikkundervisning. Både for lærere, men også for andre ifølge Griffin (2004, s. 173). Likevel har jeg valgt å basere meg på definisjonen av McIntosh et al. (1992, s. 3). Den innebærer at tallforståelse er menneskers forståelse av operasjoner og tall. Videre beskrives evnen til å bruke forståelsen i utvikling av strategier i arbeidet med tallene og operasjoner, samt evne til å utføre matematiske vurderinger. Tallforståelse tyder på at elevene forstår tall, er kjent med ulike måter å representere tallene på og at tallene har relasjoner til hverandre (Shumway, 2011, s. 8). For eksempel kan tallet «5» representeres med fem klosser, fem fingre eller fem figurer i et bilde. Elevene forstår at fem er tallet som kommer etter fire og før seks i tallrekka. Videre kan elevene se at 2,2 og 1 er 5 til sammen. Etter hvert som elevene lærer om tallene, opplever de at tallene har relasjoner til hverandre. De vet at det ikke er nødvendig å telle en mengde med objekt på nytt igjen, dersom det legges til et objekt i mengden. I stedet uttrykkes neste tallord i tallrekka. For eksempel når elevene teller ti klosser og så får de to til. Her forstår elevene at de kan fortsette på tallrekka, i stedet for å telle alle klossene på nytt igjen. Elevene estimerer, beregner og bruker modeller for å løse matematiske problemer (Shumway, 2011). Med utgangspunkt i tallforståelsen kommuniserer, tolker og produserer elevene ny informasjon. Denne informasjonen knytter elevene til kunnskap de allerede har og er betydningsfull i utviklingen av tallforståelse (McIntosh et al., 1992). For eksempel når elevene skal utføre enkle addisjonsstykker og finne ut hvor mange klosser de har til sammen. Her får elevene arbeidet med operasjoner med tallene. I denne studien vil det være hensiktsmessig at elevene har noe kjennskap til tallordene og telling fra kjente kontekster, slik at de kan bruke tidligere erfaringer i telleaktivitetene. Fra barna er små møter de situasjoner hvor de viser antall fingre, sier tallord og prøver å forstå hva de innebærer. Selv om elevenes tallforståelse utvikles før de begynner i første klasse, utvides den videre i løpet av skolegangen (McIntosh et al., 1992, s. 5).

2.1.1 Telling

Elevens forståelse av tall kobles til deres telling (Kilpatrick et al., 2001, s. 159). Å telle antall i en mengde involverer bevegelse, tenking og oppfatning. I denne studien er telling sentralt, ettersom elevene arbeidet med telleaktiviteter. Ifølge Clements og Sarama (2014, s. 22) er telling en grunnleggende handling i matematikkfaget. Tellingen innebærer flere steg. Først er det nødvendig å identifisere elementene som telles og skille disse fra elementer som er telt eller som ikke er en del av tellingen. Elementer som telles kan for eksempel være fingre, kuler eller klosser. I telleaktivitetene elevene gjennomførte, telte elevene blant annet centikuber og ikoner på ark. Elevene brukte fingrene underveis i tellingen av fysiske og abstrakte konkreter.

Fingertelling er sentralt i utviklingen av tallforståelsen, ettersom aktiviteten innbefatter motorikk, berøring, verbalt og synet (Morrissey et al., 2018). Fingrene kan brukes som en representasjon for tall, som kan oppleves abstrakt for elevene (Björklund & Reis, 2020, s. 93). Videre kan tellingen innebære at mengden uttrykkes med et tallord, en verbal representasjon av objektene. Etter hvert utfører elevene tellerutiner på mengder som ikke er like visuelle. Da lager eleven en mental representasjon av elementet som telles. I tillegg har telling flere kjennetegn (Clements & Sarama, 2014; Kilpatrick et al., 2001). Først vil en-til-en-korrespondanse mellom objekt og ord være sentralt. Kjennetegnet innebærer for eksempel at ett og bare ett tallord kobles til én kloss i en mengde. For det andre vil ordinalitet være viktig. Ordinalitet innebærer at tallene i tallrekka har en fast rekkefølge. Videre er det sentralt at eleven skjønner at det siste tallordet som uttrykkes, står for antall element i mengden. Dette kalles kardinalitet. En annen komponent innebærer at objektene som telles kan samles sammen. I arbeidet med telling, er dette sentrale faktorer i utviklingen av tallforståelsen.

2.2 Grunnleggende tallforståelse

På grunn av at fokuset for denne studien er tallforståelse for elever i 1.trinn, vil Andrews og Sayers (2015) rammeverk for grunnleggende tallforståelse være sentralt. Formålet med rammeverket var å kunne identifisere muligheter for tilegnelse av grunnleggende tallforståelse for barn på småtrinnet. Til forskjell fra beskrivelsen av tallforståelse over, vil grunnleggende tallforståelse passe bedre med tanke på prosjektdeltakernes alder. De mener at en grunnleggende tallforståelse innebærer å kunne operere fleksibelt med mengder og tall (Andrews & Sayers, 2015, s. 257). Elevenes forståelse kan forutsi deres senere suksess og prestasjoner i matematikkfaget. Andrews og Sayers (2015) ville utvikle et rammeverk som kunne benyttes i analyse av klasseromssituasjoner, uavhengig av kulturell kontekst. I tillegg til å bidra i litteraturen innen matematikkundervisning for å informere lærerutdanninger. Rammeverket bunner i at grunnleggende tallforståelse har vært unnvikende. For øvrig har et verktøy som kan brukes til å identifisere mulighetene for FONS, foundational number sense, i klasserommet tidligere vært mangelfulle, adresserer Andrews og Sayers (2015).

Berch (2005) skisserer et rammeverk for tallforståelse bestående av 30 komponenter. Elementene inkluderer blant annet sammenligning av mengder, forstå betydning av tallene og utvikle strategier for problemløsning og numeriske operasjoner. Purpura og Lonigan (2013) illustrerer et rammeverk som inkluderer områdene relasjoner, aritmetiske operasjoner og nummerering, med 25 tilhørende underkategorier. Videre har Howell og Kemp (2006) utviklet et rammeverk med om lag 30 komponenter for tallforståelse, hvor en mengdes kardinalitet regnes som det viktigste aspektet. Ifølge Andrews og Sayers (2015) bestod rammeverkene nevnt over av for mange komponenter til at de var hensiktsmessige å bruke til sitt formål. De poengterte at mengden aspekt i eksisterende rammeverk, ville gjøre identifiseringen av grunnleggende tallforståelse utfordrende. Med utgangspunkt i forskningslitteratur knyttet til emneområdet, ble rammeverket til. Prosessen med å kategorisere og sammenligne litteraturen, ga åtte komponenter av FONS. Formålet er å kunne identifisere muligheter for tilegnelse av grunnleggende tallforståelse gjeldende elever i sitt første skoleår. Ifølge Andrews og Sayers (2015, s. 258) skilles tallforståelse inn i tre perspektiv. Henholdsvis den preverbale tallforståelsen, grunnleggende tallforståelse og anvendt tallforståelse. Perspektivene bygger på hverandre. Med dette menes at ens forståelse for tall bygger på erfaringer og kunnskapen man innehar. I denne studien er det den grunnleggende tallforståelsen som er vesentlig. Under vil jeg gå dypere inn på hvert av perspektivene.

2.2.1 Preverbal tallforståelse

Det preverbale perspektivet viser til den medfødte tallforståelsen alle mennesker har. Perspektivet innebærer at mennesker har en medfødt oppfatning av små mengder, da barn kan sammenligne to mengder. Forskning viser til at spedbarn har en medfødt numerisk kunnskap (Feigenson et al., 2004, s. 307). Spedbarn på seks måneder kan skille mellom to mengder de blir introdusert for. Barn kan for eksempel differensiere mengdene 8 og 16 prikker og 16 og 32 prikker. Mengdene viser til et én til to forhold mellom prikkene. Videre viser Feigenson et al. (2004) at spedbarn på ti måneder kan skille antall i mengde med forhold på to til tre. Nemlig å skille mellom 8 og 12 prikker og 16 og 24. Estimering av mengder opp til fem viser det seg også at små barn kan beherske. Andrews og Sayers (2015, s. 258) poengterer derimot at skillet mellom elementer i den medfødte tallforståelsen og deler som ikke er medfødt kan betegnes som uklar. Hvilke ferdigheter og kunnskaper som er lært og hvilke som er medfødt kan være utfordrende å skille mellom, da barnas forståelse utvikles tidlig gjennom interaksjon med andre (Ivrendi, 2011, s. 239). Deres oppfatning av elementer relatert til tall kan påvirkes av faktorer som familieforhold og veiledning gitt i løpet av de første leveårene. Berch (2005, s. 334) poengterer at skillet går mellom ferdigheter som er genetiske og tilegnede som utvikles gjennom erfaringer.

2.2.2 Grunnleggende tallforståelse

Dette skillet representerer overgangen fra preverbal til grunnleggende tallforståelse, FONS (Andrews & Sayers, 2015, s. 258). Foundational number sense bygger videre på den preverbale tallforståelsen. Det refereres til barns eksisterende forståelse som knyttes opp mot tall gjennom veiledning og støtte. Perspektivet blir til i løpet av de første skoleårene (Ivrendi, 2011, s. 239). Dermed er dette perspektivet mest relevant for denne studien. I motsetning til perspektivet om preverbal tallforståelse, utvikles elevenes ferdigheter og kunnskaper gjennom å knytte eksisterende tallforståelse til nye element de blir presentert for. Her oppfatter elevene for eksempel at et tall representerer en mengde (Griffin, 2004, s. 177). Dette perspektivet utgjør rammeverket for grunnleggende tallforståelse brukt i analysen. I kapittel 2.3 presenteres aspektene.

2.2.3 Anvendt tallforståelse

Anvendt tallforståelse bygger videre på den grunnleggende tallforståelsen som er nødvendig (Andrews & Sayers, 2015, s. 258). Til forskjell fra perspektivet over innebærer tallforståelsen at elevene ser på tallene og kunnskapen om de som en helhet og ikke aspekt for aspekt. McIntosh et al. (1992, s. 3) henviser til en elementær tallforståelse voksne burde mestre, uavhengig av yrke. Her mestrer en å se sammenhenger mellom operasjoner og tall, benytte strategier i problemløsning med utgangspunkt i egne forståelser og lete etter representasjoner som er mest hensiktsmessig for den gitte oppgaven (Andrews & Sayers, 2015, s. 258).

2.3 Aspekter ved tallforståelse

Andrews og Sayers (2015) rammeverk baseres på perspektivet om grunnleggende tallforståelse, FONS. I denne studien utgjør dette perspektivet en del av analysemetoden. Rammeverket FONS består av åtte aspekt som ligger til grunn for en grunnleggende tallforståelse. Alle aspektene er avhengige av hverandre. Nå introduseres hvert perspektiv med relevante eksempler fra datamaterialet.

2.3.1 Tallgjenkjennelse

Ifølge Andrews og Sayers (2015) omhandler aspektet at eleven gjenkjenner tallsymbol og tilhørende tallord. Eleven er kjent med tallsymbolets betydning. Videre kan eleven utpeke spesifikke tallsymbol i et sett med fler. Når eleven blir presentert for et tallsymbol, navngis tallordet symbolet representerer. Et eksempel på tallgjenkjennelse kan være at symbolet «5» betyr «fem».

2.3.2 Systematisk telling

Aspektet systematisk telling involverer ordinalitet og kardinalitet (Andrews & Sayers, 2015). Se kapittel 2.1.1 om telling for eksempler på hva begrepene innebærer. Elevene behersker å telle forover og bakover fra et gitt tall og vet at et hvert tall har en fast plass i tallrekka. For å kunne telle, er det hensiktsmessig at elevene er kjent med tallordene og dens betydning slik aspektet over presenterer. Elevene kan telle fra ti og oppover, samt ti og nedover i tallrekka. Elevene teller en mengde klosser og oppgir det siste tallet når læreren spør «Hvor mange klosser?».

2.3.3 Sammenheng mellom tall og mengde

Som et aspekt innen grunnleggende tallforståelse, mestrer elevene en – til – en – korrespondanse mellom tallordet og mengden som representeres (Andrews & Sayers, 2015). Det vil si at eleven knytter tallordet til ett og ett element (Solem et al., 2018, s. 23). I likhet med aspektet over om systematisk telling er kardinalitet også sentralt her. Forskjellen er at dette aspektet innebærer telling av mengder, mens systematisk telling omfatter telling av tallrekka. For eksempel når elevene skal telle antall klosser i en mengde. Med en-til-en-korrespondanse kobles ett og bare ett tallord til en kloss i mengden.

2.3.4 Sammenligning av mengder

Aspektet sammenligning av ulike mengder innebærer at uttrykk som «mindre enn» og «større enn» benyttes av elevene (Andrews & Sayers, 2015). For eksempel at elevene kan uttrykke at elleve klosser representerer en mengde større enn ti klosser, men mindre enn tolv klosser. Til forskjell fra systematisk telling, baseres tellingen seg på størrelsen av mengden og ikke en memorert liste.

2.3.5 Forståelse av ulike representasjoner av tall

Innen grunnleggende tallforståelse innebærer dette aspektet at tall kan representeres på ulike måter (Andrews & Sayers, 2015). Elevene forstår at tall kan deles opp i mengder, og dette er en representasjon av tallet. Eksempler på ulike representasjoner av tall er fingre og klosser. Med slike representasjoner kan elevene oppfatte feil lettere, samt effektivisere tellingen. For eksempel at en mengde med ti klosser er det samme som tallordet ti og kan uttrykkes med tallsymbolet «10». Her vil det være sentralt å ha forståelse av tallgjenkjennelse.

2.3.6 Estimering

Aspektet estimering omhandler at elevene evner å anslå størrelsen på en mengde eller objekt med bruk av tallord (Andrews & Sayers, 2015). I likhet med aspektet over er det nødvendig at elevene er kjent med ulike representasjoner av tall for å kunne estimere. For eksempel vurdere omtrent hvor mange klosser der er i en mengde eller streker på et ark. Her er klossene en representasjon for tallet og strekene en annen. Antallet behøver ikke være korrekt, da elevene skal anslå om lag antall.

2.3.7 Aritmetisk kompetanse

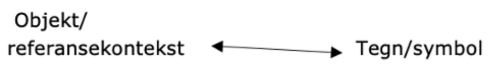
Dette aspektet innebærer at elevene utfører aritmetiske operasjoner, i hovedsak enkle addisjons- og subtraksjonsstykker (Andrews & Sayers, 2015). Først er elevene i stand til å løse aritmetiske problemer med fysiske objekt. Etter hvert evner de å løse aritmetiske operasjoner kun gitt med ord. Her vil det være sentralt at elevene forstår at en mengde med objekt kan deles opp i mindre mengder. Forskjellen fra aspektet om representasjoner er at elevene utfører enkle addisjonsstykker med utgangspunkt i mengdene med objekter. For eksempel at elevene blir tildelt to bunker med fem klosser i hver og de blir bedt om å finne ut hvor mange klosser de har til sammen. Det vil være det samme som å si «hva er 5+5?».

2.3.8 Bevissthet rundt tallmønster

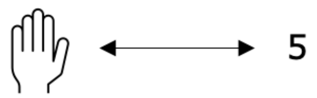
Ifølge Andrews og Sayers (2015) omhandler dette aspektet elevenes oppfatning av tallmønster. Aspektet omfatter elevenes evne til å kjenne igjen manglende tall i en tallrekke eller et mønster. Videre innebærer aspektet også at elevene kan utvide slike tallrekker eller mønster. Her vil det være nødvendig at elevene viser forståelse for tallgjenkjennelse ettersom tallsymbolene og tilhørende tallord er utgangspunktet for mønstrene. For eksempel at elevene blir presentert for en tallrekke, hvor noen tall mangler 2, _, 4, 5, _. Her må elevene kjenne til tallsymbolets mening for å kunne sett inn riktig tallsymbol.

2.4 Tegn i matematikk

Slik vi kan se over om aspektene ved tallforståelse har tallordene og tilhørende tallsymbol en vesentlig rolle for matematisk kunnskap. Læreren og elevene må kommunisere, kode og konstruere med de for at de skal gi mening (Steinbring, 2006, s. 133). Meningen i symbolene oppstår i samspillet mellom symboler/tegn og referansekontekst/objekter. I denne studien arbeider jeg med begynnereleven og derfor vil det være sentralt at eleven arbeider med å uttrykke relasjonen mellom objektene og symbolene. De matematiske tegnene kommer til syne skriftlig og muntlig. For øvrig har matematiske tegn to roller, en semiotisk funksjon og en epistemologisk funksjon (Steinbring, 2005; Steinbring, 2006). Den semiotiske funksjonen innebærer at tegn står for noe annet og her vektlegges tegnets representasjoner. Figur 1 illustrerer et gjensidig forhold mellom objekt eller referansekontekst og tegnet eller symbolet.



Figur 1 Relasjon mellom objekt og tegn (Steinbring, 2006, s. 134). Min oversettelse.

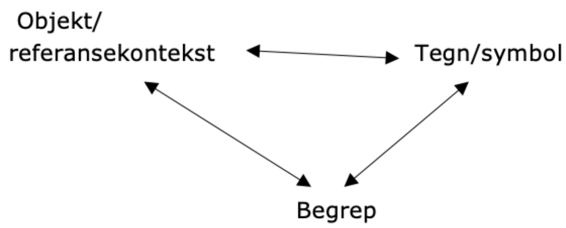


Figur 2 Eksempel på relasjon mellom objekt og tegn.

Figur 2 viser relasjonen mellom objektet fem fingre og tegnet 5. Her illustreres forholdet mellom mengden som representeres. Videre står den epistemologiske funksjonen for rollen til matematiske tegn på bakgrunn av matematisk kunnskap. Tegn i matematikken består av matematisk kunnskap om innholdet av tegnet. Det vil si at selv om eleven lærer at fem fingre er lik tallet 5, trenger ikke eleven å se sammenhengen. Eleven må selv gi mening til tegnet gjennom å se relasjonen. For denne studien arbeidet elevene med fysiske konkreter og abstrakte konkreter som objekt/referansekontekst. Både den semiotiske og den epistemologiske funksjonen omhandler det matematiske objektet og kunnskapen tilknyttet det matematiske tegnet (Steinbring, 2006, s. 134).

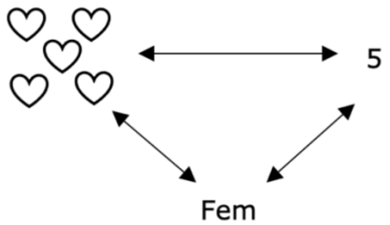
2.4.1 Den epistemologiske trekanten

Den epistemologiske trekanten illustrerer hvordan mening av matematisk kunnskap formes ved bruk av begrep, tegn og objekt (Steinbring, 2005; Steinbring, 2006). Ettersom de matematiske tegnene ikke gir mening alene, må elevene knytte tegnene til en referansekontekst og dermed tolke de. Elevene må selv produsere matematisk kunnskap aktivt i interaksjon med andre. Tegn og symbol i matematikken kobles til dens matematiske kunnskap. Figur 3 illustrerer den epistemologiske trekanten og hvordan en semiotisk mediering oppstår med påvirkning av den matematiske kunnskapen som forekommer mellom objekt/referansekontekst og tegn/symbol (Steinbring, 2006, s. 135).



Figur 3 Den epistemologiske trekanten (Steinbring, 1998, s. 174). Min oversettelse.

Ifølge Steinbring (2006, s. 136) danner hjørnene i trekanten en gjensidig prosess hvor begrepet gir mening til den matematiske kunnskapen, objektet tjener som utgangspunkt for å kunne kode kunnskap og tegn som står for et objekt. Ved at elevene tolker tegnene, objekt og begrep dannes matematisk kunnskap.



Figur 4 Eksempel på epistemologiske trekanten.

Figur 4 viser eksempel på innhold i en epistemologisk trekant. Her modelleres den semiotiske medieringen mellom objekt og tegn ved *begrepet* fem, *objektet* som mengden av fem hjerter og *tegnet* 5. Tidlig blir elevene kjent med gjenstander som klosser, epler eller drops som blir brukt til å representere tall og mengder (Steinbring, 2006, s. 141). Selv om gjenstandene i seg selv ikke er fokuset, benyttes konkrete objekter for å visualisere strukturer eller matematiske ideer. I denne studien arbeider elevene med centikuber. Elevene skaper mening i matematikken ved å mediere mellom objekt og tegn med utgangspunkt i relevante eksempler. De matematiske tegnene består av relasjoner, mønstre og strukturer, som elevene selv må konstruere (Steinbring, 2006, s. 142). De er ikke kun navn for et abstrakt objekt.

2.5 Representasjoner i matematikk

Når elevene kommuniserer i matematikkfaget, benytter de seg av ulike representasjoner. Matematikkfaget består av ulike representasjoner som bygger på hverandre, da matematiske ideer etter hvert blir mer abstrakt (Kilpatrick et al., 2001, s. 19). Duval (2006, s. 103) argumenterer for at en representasjon er «noe som står for noe annet», et objekt. En representasjon kan være verbal, symbolsk, konkret, kontekstuell og visuell. For å uttrykke ulike matematiske begrep er det essensielt at elevene skifter mellom forskjellige representasjoner (Duval, 2006; Kunnskapsdepartementet, 2019).

Sammenlignet med fag som naturfag, biologi og fysikk kan ikke objekter i matematikken studeres direkte (Duval, 2006, s. 107). For eksempel kan man studere planteceller med mikroskop i biologi eller se på blomster i naturfag. I motsetning er ikke objektene i matematikk tilgjengelige på lik måte, ettersom objektene skrives som en representasjon av det gitte matematiske begrepet. Både fingrene i figur 2 og hjertene i figur 4 er representasjoner av det matematiske begrepet fem. De matematiske objektene gir tilgang på matematiske objekt (Duval, 2006; Steinbring, 2006). Et annet eksempel på representasjoner er det matematiske begrepet «seks». Begrepet kan representeres ved å bruke naturlig språk, vise antallet med fingrene, skrive tallet eller bruke konkreter for å vise antall. Objektet seks viser til mengden seks og posisjonen i tallrekka. Ifølge Duval (2006, s. 107) er representasjoner nødvendig for å få tilgang til objektene i faget.

2.5.1 Semiotiske representasjoner

Matematikkfaget inneholder flest semiotiske representasjonssystem sammenlignet med andre fag (Duval, 2006, s. 108). I forhold til den epistemologiske trekanten tilhører de matematiske begrepene det nederste hjørnet, mens representasjonene og objektene/referansekonteksten tilhører de to øverste hjørnene (Duval. 2006; Steinbring, 2005). Utvalget representasjoner spenner fra naturlig språk, sentralt for ethvert fag, til algebraisk notasjon, spesielt i matematikk. Selv om alle representasjonssystemene er nyttige, har alle noen fordeler og ulemper. Hvilke representasjonssystemer som benyttes, avhenger av sammenhengen de brukes i. Likevel er det nødvendig med forskjellige semiotiske representasjonssystem slik at man får en god forståelse for et matematisk objekt. Grunntanken med semiotiske representasjonssystem og tegn i matematikk er å jobbe med matematiske objekt, ikke å betegne og kommunisere med dem (Duval, 2006, s. 107). Duval (2006, s. 107) påstår at all matematisk aktivitet forutsetter semiotiske representasjonssystem ettersom en representasjon erstatter en annen. Tegn skal erstattes med andre tegn (Duval, 2006; Steinbring, 2006). Videre kan det være nødvendig å kombinere to representasjoner. For eksempel geometriske figurer, hvor naturlig språk viser til dens egenskaper og geometriske former for å visualisere.

Mens elevene arbeider med matematiske aktiviteter, vil de bli kjent med de ulike representasjonene. Duval (2006, s. 108) problematiserer likevel bruken av flere semiotiske representasjoner for et matematisk objekt, da det kan være nødvendig å bruke flere semiotiske representasjoner samtidig. Hvordan skal elevene kjenne igjen objektet når det blir representert på ulike måter? For eksempel at tallet 10 kan representeres ved 10 fingre, si tallet 10 muntlig, 10 klosser, vise tallet på ei tallinje. Dette kan medføre at variasjonen gjør matematikken mer kompleks og krevende å forstå. I matematikkundervisningen vil det dermed være sentralt å veksle mellom forskjellige representasjoner, ettersom overgangen mellom tegn og overgangen mellom semiotiske representasjoner er hovedpunktet i matematisk aktivitet (Duval, 2006, s. 107).

	Diskursiv representasjon	**Ikke-diskursive representasjoner**
Multifunksjonelt register: prosessene kan ikke bli laget til en algoritme.	Naturlig språk ○ Muntlig: forklaringer ○ Skriftlig: visuelle teorem og bevis *Eksempel* «en, to, tre, fire» «Elleve er én mer enn ti» «Hvor mange klosser har dere til sammen?»	○ Ikonisk: tegning, skisse eller mønstre ○ Ikke-ikonisk: geometriske figurer som kan bli konstruert med hjelpemidler *Eksempel* 
Monofunksjonelt register:	Symbolsk	Todimensjonale figurer: en- og nulldimensjonale figurer. ○ Diagram og graf

de fleste prosessene er algoritmer.	○ Skrevne symboler: umulig å fortelle muntlig på annen måte enn ved staving. ○ Utregning og bevis *Eksempel* 1, 2, 3	*Eksempel* 

Tabell 1 Klassifisering av registrene som kan mobiliseres i matematiske prosesser (Duval, 2006, s. 110). Min oversettelse med tilknyttede eksempler.

Tabell 1 viser eksempler på matematiske prosesser i henhold til Duval (2006). Eksemplene er hentet fra datamaterialet. Representasjonene deles inn i ulike semiotiske system, også kalt register, med tanke på hvordan de matematiske prosessene foregår. Semiotiske system kalles register hvis representasjonene kan transformeres. Det vil si at elevene går fra å bruke en representasjon til en annen. Dersom det semiotiske representasjonssystemet er multifunksjonelt, er det ikke mulig at den matematiske prosessen konverteres til en algoritme. I motsetning er de matematiske prosessene i et monofunksjonelt representasjonssystem former for algoritmer. I matematiske aktiviteter kommer tankeprosesser til syne gjennom bruken av semiotiske representasjonssystem (Duval, 2006, s. 110). Det vil si at hvordan elevene velger å løse en oppgave speiler hvordan de tenker. Naturlig språk er det registeret som er vanligst i klasserommet (Steinbring, 2006, s. 145).

2.5.2 Transformasjoner

Matematisk aktivitet består av transformasjoner mellom semiotiske representasjoner, beskrevet som behandling og omdannelse. I denne studien kommer begge transformasjonene til syne. Behandling betegner transformasjon av en representasjon innen samme register (Duval, 2006, s. 111). I elevenes arbeid med telling kan en behandling foregå i arbeid med ikoner. Først telles ikonene som en helhet. Deretter benyttes fingrene til å vise hvor antall ikoner i mengden. Tallet «4» representeres med fire ikoner og fire fingre. Her foregår transformasjonen innenfor registeret ikonisk og ikke-ikonisk representasjonsregister, da behandlingen transformeres fra ikonene til fingrene. Det matematiske objektet fire representeres på ulike måter.

Omdannelse illustrerer transformasjon av representasjoner mellom ulike registre, uten at det matematiske objektet endres (Duval, 2006, s. 112). I arbeid med matematiske aktiviteter konverterer elevene mellom forskjellige representasjoner. Denne overgangen hevder Duval (2006, s. 112) gir en dypere forståelse på grunn av at elevene må gjenkjenne det matematiske objektet i en annen representasjon. I telling kan en omdannelse være at elevene først teller objektene ved å uttrykke seg verbalt med tallordene. Deretter skrive ned de tilhørende tallsymbolene som uttrykker mengden objekt som er telt. Her transformeres objektet fra naturlig, muntlig språk som representasjonsregister til symbolsk representasjonsregister. Det matematiske objektet er uendret. Selv om omdannelse av representasjoner gir dypere forståelse, har elevene vanskeligheter med å forstå konverteringen og skifte av representasjon.

I klasserommet benyttes ofte to registre parallelt. For eksempel at læreren transformerer mellom muntlige forklaringer av symbolske uttrykk skrevet på tavla. Her vil naturlig språk, konkreter, symboler og ikoner være representasjoner som vektlegges. Selv om konkreter ikke er en del av det semiotiske representasjonssystemet til Duval (2006, s. 110), vil konkreter være hensiktsmessig i forhold til denne studien. Med utgangspunkt i teori utdypes hvorfor konkreter er en semiotisk representasjon under.

2.6 Konkreter

For å kommunisere om matematiske problem, begrep og sammenhenger kan elevene benytte representasjoner i form av konkreter (Kilpatrick et al., 2001; Kunnskapsdepartementet, 2019). I begynneropplæringen er det vanlig at elevene benytter konkreter i undervisningen (Svingen, 2018). For eksempel brukes tre klosser for å vise tallet 3. Steinbring (2006, s. 141) betegner dette som objekt eller referansekontekst, hvor eleven medierer tallet 3 med gitte konkrete objekter. Selv om konkreter er en del av matematikkfaget, påpeker Duval (2006, s. 110) at konkreter ikke er en representasjon i et semiotisk system. Ettersom transformasjon fra en representasjon til en annen ikke er mulig, benyttes konkretene som manipulasjonsmateriale og støtte med andre representasjonsregister. Dersom konkretene benyttes alene, vil man ikke utvikle tallforståelse og forståelse av symboler. I denne studien arbeider elevene med centikuber og ikoner på ark (se vedlegg 3 og 4) som konkreter underveis i aktivitetene. Centikubene er fysiske konkreter elevene kan ta på og bruke direkte. I motsetning er ikonene på arket mer abstrakte ettersom de er figurer som tjener i stedet for noe annet. I dette tilfellet tallsymbol. Clements og Sarama (2014) belyser at det er nødvendig at elevenes uttrykksmåter går fra konkreter til mer abstrakte uttrykksmåter. Når elevene teller ikonene, kan det være ett én – til – én forhold mellom tallordet og mengden ikoner. Slik det også kan oppleves med fysiske konkreter. Forskjellen er at ikonene er mer abstrakt da man ikke fysisk kan ta på dem.

I likhet med Duval (2006) mener Kilpatrick et al. (2001, s. 7) at fysiske konkreter er effektive tilnærminger som kan brukes for å hjelpe elevene. De poengterer at fysiske materialer ikke gir mening før de kobles til situasjonen som modelleres. Derimot mener Kilpatrick et al. (2001, s. 95) at tall kan representeres med fysiske konkreter. Fysiske representasjoner for tall benyttes som verktøy for kommunikasjon i matematikken, hvor elevene kan dele egne tanker gjennom støtte av konkreter. Hvorvidt tegnene representerer konkretene, avhenger av hvordan barnet tolker og tar de i bruk (Kilpatrick et al., 2001, s. 96). Det matematiske tegnet og konkreten representerer likevel en matematisk idé, uavhengig av representasjonen som benyttes. Kilpatrick et al. (2001, s. 102) fremhever at flere representasjoner er nødvendig når elevene skal forstå en matematisk idé. For at elevene skal kunne transformere mellom representasjoner er det nødvendig at de er kjent med mange representasjoner.

Imidlertid er det essensielt at læreren tenker over bruken av konkreter (Kilpatrick et al., 2001, s. 353). Å gi elevene konkreter garanterer ikke at de forstår matematikken, da ikke alle elever ser konkretene på lik måte som læreren. Læreren må hjelpe elevene på veien slik at de ser sammenhengen mellom konkretene og relevante aspekt eller koble de til det matematiske konseptet som læres. For øvrig kan konkreter hjelpe elevene med å se og rette opp i egne feil (Kilpatrick et al., 2001, s. 354).

3 Metode

I metodekapittelet blir valgene gjort før, under og etter innsamling av datamateriale beskrevet og begrunnet med utgangspunkt i forskningsspørsmål for studien. Først presenterer jeg kvalitativ forskningsmetode og betydningen av det for min studie. Denne studien tar for seg en enkelcase, nemlig én første klasse. Jeg beskriver hvilke metoder jeg brukte i gjennomføringen av datainnsamlingen og videre utvalget av deltakere. Ettersom jeg kombinerte flere metoder, kalles dette triangulering. I tillegg forklarer jeg oppgavene elevene fikk og hvordan gjennomføringen av datainnsamlingen foregikk. For prosjektdeltakerne er det viktig at etiske betraktninger blir overholdt. Disse redegjøres ytterligere. Til slutt beskrives analysemetoden med kategorier og eksempler fra datamaterialet.

3.1 Kvalitativ forskningsmetode

I denne studien har jeg valgt kvalitativ metode for innsamlingen av datamateriale. Både for meg som forsker og prosjektdeltakerne vil det medføre fleksibilitet knyttet til datainnsamlingen. Som forsker får man skrevet såkalte «tykke beskrivelser» av hva deltakerne sier og gjør (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 86). Forskeren frembringer dypere innsikt knyttet til et bestemt emne ved å undersøke hvordan deltakerne tolker den sosiale verdenen (Clark et al., 2021, s. 350). I dette tilfellet forsøker jeg å få dypere innsikt i førsteklasseelevers tallforståelse og bruken av representasjoner gjennom deres arbeid med telling. På bakgrunn av forskningsspørsmål og valgte metoder er kvalitativ forskningsmetode best egnet med tanke på formålet med studien. Forskningsspørsmålet som skal besvares empirisk med kvalitativ metode er henholdsvis:

Hvilke aspekt for tallforståelse viser noen førsteklassinger i arbeid med telling, og hvordan påvirker bruken av representasjoner hvilke aspekter som kommer til syne?

Språket vil være en sentral faktor innenfor kvalitativ metode (Postholm & Jacobsen, 2018). Underveis i datainnsamlingen var jeg til stede, slik at jeg både kunne stille spørsmål og observere elevene. Jeg valgte å blant annet benytte meg av observasjon som metode, for å kunne fange opp handlinger eller utsagn som utspilte seg i naturlige settinger. Her vektlegger forskerne hvordan menneskers ord og språk beskriver deres meningsskaping og handlinger (Clark et al., 2021, s. 32; Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113). Med kvalitativ metode var det mulig at jeg selv kunne notere underveis i prosessen med innsamlingen av informasjon. Målet i kvalitativ forskning er å forstå deltakernes tolkninger knyttet til den spesifikke konteksten (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 95).

3.1.1 Forskningsdesign

For å finne svar på forskningsspørsmålet er det nødvendig med et best egnet forskningsdesign (Postholm & Jacobsen, 2018. s. 57). Med utgangspunkt i forskningsspørsmålet innebærer studien enkeltmenneskers forståelse av virkeligheten. Jeg som forsker, er dermed avhengig av deltakerne for å få innsikt i deres forståelse. I dette tilfellet er forskningsdeltakerne elever fra en førsteklasse. Ettersom elevenes perspektiv er fokuset, kan studien betegnes som en casestudie. Ifølge Postholm og Jacobsen (2018. s. 63) er en casestudie et forskningsdesign hvor «en case» studeres. Casestudier avgrenses i tid og sted, samt til et mindre antall deltakere. Av den grunn får forskeren innsikt i deltakernes konstruksjon av virkeligheten koblet mot én spesiell kontekst. I dette tilfellet er casen avgrenset til elevgruppen med 12 deltakere og tiden elevene fikk i gjennomføringen av oppgaver og instruksjoner gitt av meg. Casestudier kan gjennomføres med ulike metoder (Creswell, 2013; Postholm & Jacobsen, 2018). Ettersom hensikten med studien er å få dypere innsikt i en spesifikk kontekst, kan forskningsdesignet for denne studien karakteriseres som en enkelcasestudie (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 68). Jeg som forsker er interessert i å få innsikt i noen elevers tallforståelse gjennom telling og bruk av representasjoner. Under presenteres metodene som ble brukt i datainnsamlingen.

3.1.2 Observasjon som metode

Observasjon er en sentral datainnsamlingsmetode under kvalitativ forskning (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113). Ifølge Angrosino og Pérez (2000, s. 673) kalles observasjoner naturalistisk ettersom observasjoner utføres slik de forekommer i naturlige situasjoner. Når man observerer, benytter man alle sansene for å forstå situasjoner og hendelser som skjer (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 114). Som forsker kan man besitte ulike roller som observatør. I denne studien brukte jeg deltakende observasjon som metode. Her observeres deltakerne direkte i den gitte settingen som er relevant for sitt fokus. For denne studien foregikk observasjonene av elevenes telling gjennom ulik bruk av representasjoner. Deltakende observasjon regnes som en mindre strukturert form for observasjon, hvor forskeren er mer åpen under møtet med deltakerne for å fange opp hendelser og oppførsel som er relevante for studien (Clark et al., 2021, s. 258). I hvilken grad du som forsker er deltakende i observasjonen, varierer betraktelig ettersom hva fokuset for observasjonen er. Observatøren lytter til det som blir sagt, samtidig som man kan stille spørsmål underveis. Spørsmålene som stilles kan være tilfeller hvor observatøren er usikker på hva som menes eller uklarheter. Mens elevene fikk telleaktiviteter av meg, observerte og lyttet jeg underveis mens de arbeidet.

I motsetning kan min metode ligne noe på oppgavebasert intervju, ettersom jeg stiller spørsmål til elevene mens de løser oppgavene (Goldin, 1997). Likevel mener jeg at det er deltakende observasjon jeg gjennomfører i denne studien siden datainnsamlingen var en del av undervisningen til elevene. Prosessen og rammene for datainnsamlingen beskrives nærmere under kapittel 3.3 om datainnsamlingsprosessen. Fleksibiliteten med deltakende observasjon gjorde at jeg kunne stille oppfølgingsspørsmål til elevene underveis mens de arbeidet med telleaktivitetene. Jeg kunne oppklare eventuelle utsagn eller få de til å utdype hvordan de tenkte og hvorfor de gjorde som de gjorde. For eksempel skulle elevene estimere antallet klosser de hadde liggende foran seg. Etter at de hadde gitt et svar, stilte jeg spørsmål som «Hvordan kan vi se det?». Dette førte til at jeg gjennom samtale med elevene underveis fikk mer informasjon om deres forståelse av tall og bruk av representasjoner.

Ettersom datainnsamlingen foregikk av elever i en førsteklasse, hadde jeg ikke direkte tilgang til deltakerne. Observasjon i en lukket setting hvor forskeren åpenlyst observerer krever tillatelse for å gjennomføre (Clark et al., 2021, s. 393). Alle elevene fikk utdelt samtykkeerklæring i forkant av datainnsamlingen (se vedlegg 1). Videre ble også elevene informert før datainnsamlingen startet at det var frivillig og om de ikke hadde lyst å delta lengre, kunne de når som helst trekke seg (se kapittel 3.3). I forbindelse med observasjonen, samlet jeg også inn skriftlig elevarbeid. Dokument er en innsamlingsmetode som kan benyttes for ytterligere data (Clark et al., 2021, s. 393).

3.1.3 Elevarbeid som metode

Alle de 12 elevene som deltok, hadde samtykket både på forhånd gjennom samtykkeerklæringen og i etterkant da de hadde gjennomført aktivitetene, om at jeg kunne samle inn deres arbeid. Elevarbeidet som ble samlet inn gikk ut på at elevene skulle utføre telleaktiviteter av ikoner på A4 ark. Det ene arket de fikk utdelt inneholdt hjerter (se vedlegg 3), mens det andre arket inneholdt hjerter og stjerner (se vedlegg 4). Elevene fikk hvert sitt ark og hadde en blyant tilgjengelig. Noen av elevene brukte blyanten til å enten markere ikonet de hadde telt eller nummere ikonene med tall. I etterkant samlet jeg inn disse arkene og markerte med anonymiserte navn slik at jeg kunne koble arket med observasjon og transkripsjoner av videoopptakene. Innsamlet elevarbeid vil støtte og utfylle transkripsjonene av videoopptak og observasjonene gjort underveis i datainnsamlingen. Kombinasjonen av metoder kalles triangulering. I henhold til Postholm og Jacobsen (2018, s. 236) betraktes flere datainnsamlingsmetoder som en styrke for studien. Flere metoder vil gi meg et rikere datamateriale enn hvis jeg kun hadde brukt én av dem. Triangulering benyttes for å styrke gyldigheten og påliteligheten til studien.

3.1.4 Oppgaver brukt i datainnsamling

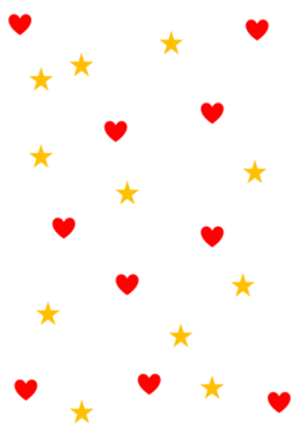
Jeg lagde tre aktiviteter med utgangspunkt i studiens forskningsspørsmål. I oppgavene la jeg vekt på at elevene skulle telle ved å bruke ulike representasjoner. Hensikten var å fremme elevenes tallforståelse gjennom bruk av representasjoner i arbeid med telling. For å videre se hvordan representasjonene påvirket tallforståelsen innenfor de nevnte aspektene. Etter 2. trinn skal elevene «utforske tall, mengder og telling i lek, natur, billedkunst, musikk og barnelitteratur, representere tallene på ulike måter og oversette de ulike representasjonene» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 5). I kompetansemålet kommer det tydelig fram at telling, representasjoner av tall og overganger mellom de er noe elevene skal kunne etter 2. trinn. Dermed er denne studien også aktuell for elevene i første klasse.

Den første aktiviteten går ut på at elevene får utdelt 20 centikuber hver, henholdsvis ti grønne og ti oransje. Tanken med denne aktiviteten var at den skulle fremme aspekter innen tallforståelse (Andrews & Sayers, 2015). Elevene fikk først spørsmål om å si hvor mange klosser de trodde mengden inneholdte. Dermed vil aktiviteten fremme aspektet estimering. Videre skal elevene telle klossene og derfor vil aspektet om systematisk telling være sentralt. Noen elever vil trolig bruke fingrene i tellingen. Da kan man få innsikt i elevenes en – til – en – korrespondanse. Det blir ikke gitt fremgangsmåte på hvordan de skal telle, slik at elevene selv får bestemme hvordan de vil løse oppgaven. Underveis blir det lagt opp til samtale rundt hva elevene tenker og for å se på medelevenes løsning. Årsaken til at jeg lagde denne oppgaven var at elevene her skal telle fysiske konkreter. Fuchs et al. (2021) skriver at centikuber er en type konkret som kan benyttes i aktiviteter med telling. De legger vekt på at konkretene som anvendes skal passe til aktiviteten. Oppgaven legger opp til at elevene bruker språket og konkretene aktivt for å representere det matematiske begrepet. Dermed vil transformasjoner mellom semiotiske representasjoner også være sentralt (Duval, 2006).

Figur 5 og 6 viser til den andre og tredje aktiviteten elevene skulle gjennomføre. Arket som tilhørte aktivitet 2 bestod av 20 hjerter, mens aktivitet 3 bestod av 10 hjerter og 11 stjerner. Dette er det som skiller aktivitet 2 (se Figur 5) fra 3 (se Figur 6). Elevene fikk utdelt en blyant i tillegg til arket. Hensikten er at noen elever kan skrive tallsymbol på arket mens de teller. Aspektet om tallgjenkjennelse vil være sentralt, hvis elevene velger å skrive tallsymbol underveis. Årsaken til at jeg lagde oppgaven var at elevene fysisk ikke kan løfte, skyve og sortere figurene på samme måte som centikubene over. Forskjellen mellom aktivitet 1 og aktivitet 2 og 3 er at elevene arbeider med og uten fysiske konkreter. Ikonene på arket er abstrakte konkreter, til forskjell fra centikubene som fysiske konkreter. Av den grunn kan det være mulig å sammenligne hvordan elevene teller i disse aktivitetene med aktiviteten over.

I likhet med aktivitet 1 skal elevene estimere antall hjerter på arket. Videre blir samme spørsmål stilt. Ettersom elevene også her skal telle, fremmes aspektet om systematisk telling, sammenheng mellom tall og mengde samt sammenligne mengder (Andrews & Sayers, 2015). Det legges også opp til at vi kan samtale rundt hva elevene tenker og se på medelevenes løsninger. Elevene kommuniserer, tolker og produserer ny informasjon med utgangspunkt i sin tallforståelse (McIntosh et al., 1992). Oppgavene legger opp til at elevene bruker ulike representasjoner, hvor det er nødvendig å transformere mellom dem. I matematiske aktiviteter kommer tankeprosesser til syne gjennom bruken av semiotiske representasjonssystem (Duval, 2006). Her fremmes Andrews og Sayers (2015) aspekt om ulike representasjoner av tall. Disse representasjonene betegnes av Duval (2006) som naturlig språk, symbolske representasjoner og ikonisk og ikke-ikoniske representasjoner.

Figur 5 Aktivitet 2.



Figur 6 Aktivitet 3.

3.2 Utvalg

Utvalget til min studie baseres på en elevgruppe på 12 elever fra en førsteklasse i Norge. På bakgrunn av forskningsspørsmål og formålet med studien, var jeg avhengig av at deltakerne var elever i førsteklasse. I henhold til kompetansemålene etter 2. trinn nevnes tall og telling i fire av kompetansemålene (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 5). Dermed ble telleaktiviteter brukt som en del av datainnsamlingen. Jeg spurte klassens lærer om det var mulig å foreta datainnsamling til min studie der. Læreren var positiv til gjennomføringen og dermed ble denne klassen valgt. I god tid i forkant av datainnsamlingen fikk elevene utdelt samtykkeerklæring (se vedlegg 1), hvor prosjektdeltakernes foresatt(e) skulle samtykke til at deres barn deltok i videoopptak som en del av prosjektet, samt at jeg kunne samle inn skriftlig elevarbeid. Resultatet av de returnerte samtykkeerklæringene var at 12 foresatte hadde gitt samtykke til at deres barn kunne delta i prosjektet. Alle elevene i klassen gjennomførte opplegget med meg, men det var kun de elevene som hadde gitt samtykke i samråd med foresatte til å være med i forskningsprosjektet mitt, som deltok i videoopptak og leverte skriftlig arbeid. Ettersom opplegget var en del av stasjonsarbeid i matematikkfaget denne dagen, gikk ingen elever glipp av ordinær undervisning til fordel for deltakelse i denne studien.

I og med at studien er av kvalitativ forskningsmetode er det ikke nødvendig med et stort antall enheter i utvalget. Dermed ser jeg ikke på 12 elever som en ulempe, men heller en fordel. I en kvalitativ studie samler man inn data om få caser slik at man får detaljerte beskrivelser mellom individet og konteksten det opereres i (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 86). I utgangspunktet kan man undersøke et større antall enheter, men for denne studien har jeg verken ressurser eller tid tilgjengelig for å gjennomføre dette. Utvalget av deltakerne er få og ikke tilfeldig, men de vil kunne gi relevant informasjon knyttet til studien (Clark et al., 2021). Forskningsspørsmålet og formålet med studien er med og veileder for hvilket utvalg en studie skal ha. Utvalget består av de forskeren har tilgjengelig (Clark et al., 2021, s. 176). Datainnsamlingen ble utført i grupper på tre og tre elever. Gruppeinndelingen ble tilfeldig, da jeg forhørte meg med læreren om det på forhånd. Disse elevene har fått pseudonym.

3.3 Datainnsamlingsprosessen

Som sagt var gjennomføringen av datainnsamlingen en del av stasjonsarbeid i matematikk denne dagen, hvor jeg hadde ansvar for én av stasjonene. Hver stasjon hadde varighet rundt 20 minutter. I og med at formålet med denne studien var å få innsikt i elevers tallforståelse med utgangspunkt i deres telling og bruk av ulike representasjoner, så jeg det nødvendig å ta videoopptak av datainnsamlingen. Dette kan være til god hjelp til forskeren, ettersom det er krevende å få med seg alt og samtidig notere underveis (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131). Videoopptaket gjør det mulig for en forsker å fange opp både nonverbale og verbale uttrykk gjort av deltakerne (Postholm & Jacobsen, 2018). I etterkant av datainnsamlingen er det mulig å fortsette observasjon og analyse. Videoopptaket gjør det mulig å se hendelsene på nytt og på nytt. Likevel kan et videokamera være et uromoment og være forstyrrende for deltakerne i studien (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131).

Jeg fikk tildelt et grupperom i nærheten av klasserommet og som var kjent for elevene. Ettersom jeg tok videoopptak av fire grupper, var jeg avhengig av å ha et grupperom som var lukket og hvor man ikke ble forstyrret av andre som ikke tok del i datainnsamlingen. En av mine medstudenter hjalp meg med filmingen av elevene slik at hun kunne zoome inn på elevenes arbeid på arkene og konkretene som lå på bordet. Elevene hadde som sagt blitt delt i grupper på tre og tre før datainnsamlingen startet. Før jeg startet videoopptakene informerte jeg på nytt om studien jeg skulle gjøre og hva aktivitetene gikk ut på. Deretter informerte jeg om at de når som helst kunne trekke seg og at det var frivillig å delta. Videre fortalte jeg at om hvorfor jeg tok videoopptak og at disse ble slettet etter endt studie. Elevene har rett til å trekke sitt samtykke, i henhold til sitt personvern og sine rettigheter (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 249).

Ettersom jeg hadde en deltakende rolle i datainnsamlingen satt jeg ved siden av elevene rundt bordet. Først fikk elevene utdelt centikuber og jeg presenterte oppgavene for dem. Jeg stilte spørsmål underveis mens elevene gjennomførte aktivitetene. I og med at jeg tok videoopptak var det ikke nødvendig for meg å skrive ned alt deltakerne sa og gjorde. Derfor skrev jeg kun ned observasjoner jeg fant relevant. Videre samlet jeg inn konkretene og delte ut arkene. Se kapittel 3.1.4 hvor jeg presenterer oppgavene, for å se hvordan aktivitetene ble lagt opp. Elevene gjennomførte de tilhørende aktivitetene og vi samtalte rundt dem. Til slutt takket jeg for at elevene ville delta i studien og avsluttet videoopptakene.

3.4 Etiske betraktninger

Før, under og etter datainnsamlingen har jeg gjort etiske betraktninger. Som forsker har man et overordnet etisk ansvar, ettersom man gjennomfører forskning på andre (Postholm & Jacobsen, 2018). I forkant av studien var det nødvendig å melde inn prosjektet til NSD (Norsk senter for forskningsdata, nå SIKT) ettersom jeg skulle behandle personopplysninger. Alle opplysninger som kan brukes til å identifisere en person betegnes som en personopplysning (Sikt, 2022). For denne studien behandlet jeg personopplysninger i form av elevenes navn på samtykkeerklæring. Deretter behandlet jeg personopplysninger ved å foreta videoopptak av datainnsamlingen. Det var derfor nødvendig å melde inn forskningsprosjektet ettersom jeg besitter slike data, til tross for at deltakerne ble anonymisert. Studiet ble godkjent av NSD/SIKT i god tid før datainnsamlingen.

I gjennomføringen av datainnsamlingen hadde jeg to roller. Jeg var både forsker og lærer. Fordelene var at jeg kunne stille elevene spørsmål eller oppklare situasjoner som var uklare for å få innblikk i elevenes tanker omkring gjennomføringen av oppgaven. Jeg var til stede slik at jeg kunne notere underveis dersom det var hensiktsmessig for datamaterialet. Likevel kan deltakende observasjon være problematisk da det kan være utfordrende å observere samtidig som man skal stille spørsmål og gi elevene oppgaver. Trolig kan det føre til at ikke går glipp av sentrale situasjoner for studien. Derfor var det sentralt at jeg tok videoopptak av datainnsamlingen, slik at det jeg ikke fikk med meg underveis ble fanget opp. I tillegg kan det oppstå et etisk dilemma i og med at jeg hadde rollen som forsker og rollen som lærer. Som prosjektdeltakere har elevene krav på at grunnleggende retningslinjer blir fulgt (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 247).

I tråd med De nasjonale forskningsetiske komiteene (2021) er informert samtykke, krav på privatliv og å bli riktig presentert grunnleggende i forskningsetikken sentrale retningslinjer (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 247). Først og fremst skal deltakerne i studien delta frivillig, basert på *informert samtykke*. Siden deltakerne i studien er barn, er det nødvendig at deres foresatte samtykker på vegne av barnet (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2021, s. 20). Derfor fikk alle elevene utdelt et informasjonsskriv med samtykkeerklæring om forskningsprosjektet i god tid før datainnsamlingen (se vedlegg 1). Her fikk prosjektdeltakernes foresatte og deres barn informasjon vedrørende forskningsprosjektet. Om formålet med prosjektet, hva gjennomføringen gikk ut på og hvordan opplysningene oppbevares og slettes ved forskningsprosjektets slutt. I tillegg ble det informert om at det er frivillig å delta og hvilke rettigheter man har som deltaker i prosjektet. Prosjektdeltakernes foresatte skulle samtykke til at deres barn deltok i videoopptak som en del av prosjektet, samt at jeg kunne samle inn skriftlig elevarbeid.

Det utvalget som utgjorde deltakerne, fikk ytterligere informasjon i forkant av videoopptakene og aktivitetene. Slik som tidligere nevnt snakket jeg om studien og hvorfor jeg filmet før selve datainnsamlingen startet. Her la jeg vekt på at dersom de ville trekke seg, kunne de gjøre dette når som helst uten å oppgi grunn. Elevene fikk selv velge fritt om de ville delta. Slik opprettholdt jeg den grunnleggende retningslinjen vedrørende informert samtykke.

Alle prosjektdeltakerne fikk hvert sitt pseudonym i transkripsjonene og opplysningene ble behandlet konfidensielt. Pseudonymet er nødvendig i både transkripsjoner og i selve teksten slik at det ikke er mulig å identifisere deltakerne (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 250). Med en kvalitativ tilnærming er utvalget mindre og dermed vil det være enda viktigere at opplysningene behandles konfidensielt. I informasjonsskrivet ble det oppgitt informasjon om hvordan personopplysningene ble oppbevart og behandlet for å sikre at ingen andre enn de ansvarlige hadde tilgang. Slik ble krav til *privatliv* holdt. Videre har prosjektdeltakerne krav på at dataen blir *riktig gjengitt* (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 251). Det vil si at forskerne skal gjengi resultat i riktig sammenheng og fullstendig. Selv om jeg underveis har foretatt reduksjoner med tanke på detaljer, er hensikten at dataen blir presentert fullstendig der det er nødvendig for å forstå resultatet. I analysen blir for eksempel relevante resultater presentert og analysert.

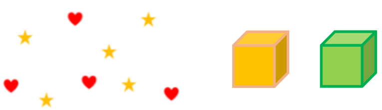
3.5 Analysemetode

I etterkant av gjennomføringen ble videoopptakene transkribert omgående. En transkripsjon er en nøyaktig gjengivelse av hva som blir sagt og gjort i et videoopptak (Clark et al., 2021, s. 441). I denne studien ble nonverbale uttrykk brukt aktivt, ettersom aktivitetene innebar telling av konkreter. Jeg omtaler meg selv som «Lærer» i transkripsjonen. Underveis i transkriberingsprosessen laget jeg transkripsjonskoder med tilhørende forklaringer (se vedlegg 2). Alle videoopptakene ble transkribert og analysert. Hensikten er å samle datamaterialet i kategorier slik at man får oversikt over materialet som er samlet inn (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 139).

I en kvalitativ dataanalyse innebærer analyseprosessen å redusere dataen, gi mening til dataen og tolke dataen (Clark et al., 2021, s. 12). Aspektet om å gi mening til dataen forutsetter at man bryter datamaterialet ned i mindre deler. Det vil si å kode, kategorisere og å finne mønster i datamaterialet (Clark et al., 2021; Larsen, 2020). Deretter tolker forskeren dataen gjennom å koble funnene til forskningsspørsmålet og relevant litteratur.

Etter transkripsjonene av datamaterialet, ble datamaterialet gjennomgått med utgangspunkt i forskningsspørsmålet «*Hvilke aspekt for tallforståelse viser noen førsteklassinger i arbeid med telling, og hvordan påvirker bruken av representasjoner hvilke aspekter som kommer til syne?*». Elevenes bruk av representasjoner kunne sees i sammenheng med teori knyttet til bruk av representasjoner i matematikk, utviklet av Duval (2006). Transkripsjonene fra videoopptak og skriftlig elevarbeid ble kategorisert med utgangspunkt i deres bruk av representasjoner. Ved å bruke det teoretiske rammeverket benyttes en deduktiv tilnærming i analysen. Det vil si at man tar i bruk eksisterende teori som kategorier i analysen (Clark et al., 2021; Postholm & Jacobsen, 2018). Utgangspunktet for deduktiv metode er at en hypotese oppstår og data samles inn på bakgrunn av teori. Her går man fra teori til empiri.

For å gi mening til dataen, ble ett og ett elevutsagn i transkripsjonen kodet. På denne måten fikk jeg lettere kategorisert elevenes utsagn og/eller handlinger opp mot relevant representasjon. Datamaterialet ble først kategorisert innenfor naturlig språk, ikonisk og ikke-ikonisk eller symbolsk. Jeg fikk satt såkalte «merkelapper» på verbale og non-verbale handlinger i transkripsjonene (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 145). Tabell 2 viser oversikten over representasjonene med tilhørende beskrivelser av kategoriene. I tillegg eksemplifiseres hver kategori med ytringer eller innhold fra datamaterialet. Disse har blitt identifisert med utgangspunkt i beskrivelsene av kategoriene. Alle verbale utsagn gjort av elevene ble identifisert til å tilhøre naturlig språk som representasjon. Elevene vurderte, estimerte og forklarte muntlig underveis mens de arbeidet med telleaktivitetene. Arbeid med centikubene og ikonene på arkene ble identifisert under ikonisk og ikke-ikonisk representasjon. Ettersom elevene her arbeidet med å representere det matematiske objektet ved hjelp av konkreter. Noen av elevene valgte å skrive tallsymbol underveis mens de telte, dette innholdet ble identifisert under symbolsk representasjon.

Kategori	**Beskrivelse**	**Eksempel fra datamaterialet**
Naturlig språk	○ Muntlig språk: Elevene og lærer uttrykker seg verbalt.	«Jeg tror tretti (0.5) Nei, jeg tror tjue» «en, to, tre, fire, fem, seks, syv, åtte, ni, ti»
Ikonisk og ikke-ikonisk	○ Konkreter, hjerter, stjerner	

Symbolsk	○ Elevene skriver tallsymbol skriftlig.	«Fjorten ((skriver 14 på et hjerte på arket))» 

Tabell 2 Semiotiske representasjoner med beskrivelse og eksempler fra datamaterialet.

Jeg mener at de semiotiske representasjonssystemene kan kobles sammen med aspekt for tallforståelse. En del av definisjonen til McIntosh et al. (1992) sier at elevenes tallforståelse innebærer forståelse for at tall kan representeres på ulike måter. For å kunne representere tall på forskjellige måter, vil det være sentralt at elevene bruker semiotiske representasjoner i arbeidet med telling. Derfor vil Duvals (2006) semiotiske representasjonssystem være sentrale for elevenes tallforståelse i arbeidet med telling.

Underveis i tellingen, representeres de matematiske begrepene ved bruk av forskjellige representasjoner. For å identifisere aspektene som kommer til syne i elevenes utsagn, benyttes Andrews og Sayers (2015) rammeverk for FONS. Se kapittel 2.3 om aspekter ved tallforståelse for utdypelse av rammeverket. Det predefinerte rammeverket ble brukt i kodingen av de samme utsagnene som over. Da kom det tydelig frem hvilke aspekt ved tallforståelse som kom til syne i bruken av representasjonene. Tabell 3 viser en oversikt over kategoriene ved tallforståelse med tilhørende beskrivelser. I løpet av kategoriseringen ble sju av åtte aspekter identifisert. Aspektet om tallmønster ble ikke identifisert i datamaterialet. Dette kan skyldes potensialet i aktivitetene og at dette aspektet ikke ble fremmet i like stor grad sammenlignet med de andre aspektene. De kategoriene som ble identifisert eksemplifiseres med eksempel fra datamaterialet.

Kategori	Beskrivelse	Eksempel fra datamaterialet
Tallgjenkjennelse	○ Gjenkjenne tallsymbol og tallord.	«Fjorten ((skriver 14 på et hjerte på arket))» 
Systematisk telling	○ Kan tallrekka og si hvor mange i mengde.	«en, to, tre, fire, fem, seks, syv, åtte, ni, ti»
Sammenheng mellom tall og mengde	○ En-til-en-korrespondanse.	«[((skyver oransje klosser, en for hvert tallord)) en, to, tre, (...) ti ((skyver grønne klosser, en for hvert tallord)) en, to, tre (...) ti]»
Sammenligning av mengder	○ Sammenligne mengder med «større enn» og «mindre enn».	«Er elleve større eller mindre enn ti?» «Større»
Representasjoner av tall	○ Tall kan representeres på ulike måter.	«Fjorten ((skriver 14 på et hjerte på arket))» 
Estimering	○ Anslå størrelsen på en mengde eller objekt.	«Jeg tror tretti (0.5) Nei, jeg tror tjue»
Aritmetisk kompetanse	○ Utføre aritmetiske operasjoner.	«Ti pluss ti er tjue»

Tabell 3 Aspekt for tallforståelse brukt i analyse med beskrivelser og eksempler.

Underveis i kategoriseringen kom sammenhenger mellom hvilke representasjoner som ble brukt og hvilke aspekter som kom til syne. Elevutsagnene som ble kategorisert under naturlig språk som representasjon viste enten forståelse for aspektene systematisk telling, sammenhengen mellom tall og mengde, estimering eller sammenligning av mengder. Aspektene kunne også bli identifisert samtidig. For eksempel at elevene brukte det naturlige språket til å peketelle centikubene høyt. Her identifiseres aspektene systematisk telling og sammenheng mellom tall og mengde mens elevene arbeidet med språket som representasjon. Da elevene skrev ned tallsymbol, ble representasjonen symbolsk koblet sammen med aspektene tallgjenkjennelse og representasjoner av tall. I analysen blir funnene analysert ytterligere. I kapittel 4.6 viser tabell 4 til en oversikt over hvilke aspekter som dukker opp under de ulike representasjonene.

3.5.1 Eksempel på analyse

Her presenteres et eksempel hentet fra datamaterialet. Dette brukes for å vise hvordan jeg kombinerte rammeverkene underveis i analysearbeidet.

23. Bård	[((sier tallordene høyt, mens han peketeller de oransje klossene)) en, to, tre, fire, fem, seks, sju, åtte, ni, ti. ((sier tallordene høyt, mens han peketeller de grønne klossene)) en, to, tre, fire, fem, seks, sju, åtte, ni, ti]
24. Ben	[Jeg skal telle hvor mange oransje det er ((løfter fire oransje klosser til siden. Sier tallordene høyt, mens han peketeller de oransje klossene)) en, to, tre, fire, fem, seks, sju, åtte, ni, ti]
25. Lærer	Hvor mange oransje har dere?
26. Bård	ti
27. Ben	Jeg har en, to, tre, fire, fem, seks, sju, åtte, ni, ti. Jeg har ti.

Først så jeg på ett og ett elevutsagn med utgangspunkt i de semiotiske representasjonssystemene utarbeidet av Duval (2006). Disse er naturlig språk, ikonisk og ikke-ikonisk og symbolsk. Utsagn 23 ble kategorisert under *naturlig, muntlig språk* som representasjon ettersom eleven her brukte språket for å telle mengden centikuber. Centikubene er ikoniske representasjoner, men representeres verbalt med tilhørende tallord. Måten språket blir brukt på er det interessante. Det at Bård uttrykker seg verbalt, ser ut til å hjelpe han med å uttrykke mengden centikuber.

23. Bård	[((sier tallordene høyt, mens han peketeller de oransje klossene)) en, to, tre, fire, fem, seks, sju, åtte, ni, ti. ((sier tallordene høyt, mens han peketeller de grønne klossene)) en, to, tre, fire, fem, seks, sju, åtte, ni, ti]

Ettersom Bård bruker naturlig, muntlig språk til å uttrykke seg i telleaktiviteten, er det mulig å identifisere aspekt ved tallforståelse utarbeidet av Andrews og Sayers (2015). Slik at man kan si noe om hvordan bruken av naturlig, muntlig språk som representasjon påvirker hvilke aspekter ved tallforståelse som kommer til syne. I utsagn 23 peker Bård på en og en centikube, mens han sier tallord fra en til ti høyt. Først de oransje klossene og deretter de grønne klossene. Aspektet om *systematisk telling* kommer dermed til syne ettersom eleven behersker å telle forover fra en og har kontroll på tallrekka opp til ti. Videre kan vi se at Bård svarer «ti» i utsagn 26, når han blir spurt hvor mange oransje klosser de har. Dette kan vise til en forståelse om at det siste uttrykte tallordet representerer den totale mengden som er telt. Nettopp mengdens kardinalitet. Bård behøver ikke å telle centikubene på nytt, i motsetning til Ben i utsagn 27.

I utsagn 23 viser Bård til at han teller ett og ett objekt. Dette viser til forståelse for en – til – en – korrespondanse da han kobler et tallord til kun en centikube i mengden. Av transkripsjonen framgår det at elevene viser forståelse for aspektet *sammenheng mellom tall og mengde*. Bård teller først de oransje klossene og deretter de grønne klossene. For å forhindre at centikubene blir telt flere ganger, peker Bård på centikubene en etter en etter hvert som ett og bare ett tallord blir koblet til en kloss i mengden. I analysen av utsagn 23 kan vi se at *naturlig, muntlig språk* som representasjon kobles til aspektene *systematisk telling* og *sammenheng mellom tall og mengde*.

4 Analyse

I analysen vil relevante funn gjort i studien presenteres og analyseres. Resultatene som presenteres er en følge av analysearbeidet foretatt i studien. Disse danner utgangspunktet for å kunne besvare forskningsspørsmålet. Funnene vil bli gjengitt med utdrag fra datamaterialet. Som nevnt tidligere består datamaterialet av transkripsjoner av fire videoopptak, observasjoner gjort underveis samt skriftlig elevarbeid. Ettersom forskningsspørsmålet omhandler å se på sammenhengen mellom representasjoner og aspekter for tallforståelse, struktureres analysen deretter. Først beskrives konteksten omkring den valgte episoden og deretter tolkes innholdet i utdraget. Til slutt trekkes relevante fagbegrep inn.

4.1 Naturlig språk som representasjon

Den representasjonen som ble brukt mest underveis i gjennomføringen av alle telleaktivitetene var det muntlige språket. Det er ikke det muntlige språket i seg selv som er interessant, men måten elevene bruker språket til å uttrykke seg på. I kombinasjon med konkreter eller symboler var elevene i dialog eller benyttet det naturlige språket som en sentral del i arbeidet med telleaktivitetene. Ifølge Duval (2006) benevnes denne representasjonen *naturlig språk*. Læreren introduserte aktivitetene og ga instruksjoner ved å bruke det naturlige språket. Videre benyttet elevene seg av språket sammen med den representasjonen som ble forespurt eller den representasjonen som var nødvendig i aktivitetene. Underveis stilte læreren spørsmål og elevene snakket med hverandre mens de løste oppgavene.

Før elevene fikk i oppgave å telle, enten centikube-klossene eller ikonene på utdelt ark, ga læreren instruksjoner om at elevene skulle si hvor mange klosser de trodde det lå på bordet foran dem. Tanken var å invitere til at elevene skulle estimere hvor mange objekt i mengden, uten å eksplisitt nevne ordet «estimere». Utdraget fra transkripsjonen presentert under viser elevene Ada, Alma og Are som arbeider med telleaktivitet 1 (se 3.1.4 Oppgaver brukt i datainnsamling) hvor de anslår mengden centikuber.

4.	Lærer	Det første jeg lurer på, uten å telle, hvor mange klosser tror dere det er på bordet? ((Ada bruker fingrene og teller klossene foran seg)) Hva tror dere, hvor mange ser det ut som?
5.	Ada	Femti
6.	Lærer	Okei, femti. ((ser på Alma)) Hva tror du da?
7.	Alma	Jeg tror kanskje ti, elleve eller tolv eller noe sånt.
8.	Lærer	Okei, elleve eller ti
9.	Alma	Nei, jeg tror tolv jeg
10.	Lærer	tolv ja
11.	Are	Jeg tror tretti (0.5 s) Nei, jeg tror tjue

I utsagn 4 gir læreren elevene instruksjoner om hva de skal gjøre. For øvrig la læreren vekt på at de ikke skulle telle. Av utsagn 4 framgår det at Ada peketeller klossene foran seg. Hun sier ingen tallord høyt mens hun rører klossene foran seg. Deretter spør læreren elevene hva de tror, og hvor mange klosser det ser ut til å være. Ada sier femti verbalt. I linje 6 svarer læreren på hva Ada tror. Svaret gitt av læreren kan tyde på at det ikke skal gis en bekreftelse på om antakelsen er rett eller galt. Alma uttrykker flere tallord verbalt, før hun fastslår antallet hun tror hun har foran seg i linje 9. Are uttrykker først et tallord, før han er stille. Den lille pausen markeres med (0,5 s) i transkripsjonen (se vedlegg 2 for transkripsjonskoder). Jeg mener at utdraget kan kategoriseres som *estimering* ettersom alle de tre elevene evner å anslå størrelsen på mengden centikuber. Av transkripsjonen kan det tyde på at elevene er i stand til å anslå om lag hvor mange centikuber det er i den totale mengden. Det at elevene benytter benevnelsen «jeg tror» kan vitne til at elevene vurderer antallet uten å faktisk telle alle klossene eller at det er en ren gjetning. Som er poenget. Til tross for at Ada begynner å telle klossene hun har foran seg i linje 4, er estimatet hun kommer med ulikt den totale mengden hun har foran seg.

Mengden elevene anslår er verken lik den totale mengden eller like hverandre. Selv om læreren ikke nevner ordet estimering eksplisitt, kan svarene elevene gir indikere at de kan ha en forståelse for hva det betyr å estimere. Når læreren spør «hvor mange» og sier i fra at de ikke skal telle, kan det tyde på at elevene har gjort en vurdering for å anslå omtrent hvor mange klosser de ser foran seg. Elevene estimerte henholdsvis 50, 12 og 20. Hvor en estimerte ganske høyt, en for lavt og en traff nøyaktig på antallet som var. Det kan tyde på at elevenes ulike utsagn kan fortelle noe om deres forståelse. Elevene som estimerte for høy og for lavt har kanskje ikke kjennskap til hvor mange objekt deres tallord representerer. De selv mente at tallordet var omtrent mengden med centikuber. Ettersom elevene angir såpass ulike estimat, kan man trolig si at trolig de har ulik forståelse når det kommer til å angi størrelsen på en mengde.

I estimeringen er det *naturlig, muntlig språk* som blir benyttet som representasjon. Måten språket blir brukt på er at elevene uttrykker seg verbalt for å estimere antall klosser i mengden. Det matematiske objektet med 20 centikuber, representert ved ikonisk representasjon, blir representert muntlig ved at elevene uttrykker tallord de selv tror passer. Læreren gir instruksjoner til elevene om hva telleaktiviteten går ut på. Når læreren gir instruksjoner, vil det trolig være nødvendig at elevene gir mening til det læreren spør om slik at de er i stand til å løse oppgaven. Det er ikke språket i seg selv om er interessant, men måten språket blir brukt på. I dette tilfellet kan det tyde på at bruken av det muntlige språket hjelper elevene med å uttrykke seg muntlig om mengden centikuber. Estimeringen blir brukt som en inngang til å telle centikubene de har estimert. Det at elevene sier tallordene høyt, kan gjøre at medelevene får innsikt i deres tanker og videre føre til at elevene må begrunne hvorfor de har forskjellig fra de andre.

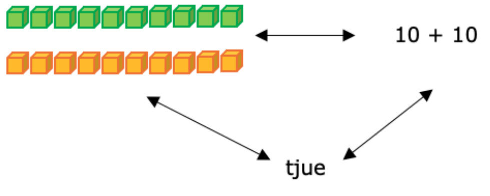
4.2 Fysiske konkreter som representasjon

Bakgrunnen for den valgte episoden er at elevene Dan, Dina og David arbeider med telleaktivitet 1 (se 3.1.4 Oppgaver brukt i datainnsamling). Elevene fikk utdelt 20 centikuber hver, henholdsvis ti grønne og ti oransje. Klossene ble brukt som representasjon for å illustrere tallet 20. Delen hvor utdraget er hentet fra er når elevene skal telle antall klosser og si hvor mange klosser det var til sammen. Før sitat 19 har elevene foretatt en estimering av klossene de hadde foran seg. Dette er utgangspunktet for samtalen og hendelsene under.

19. Lærer	Okei, spennende. Skal vi se om det stemmer? Ja, da kan dere telle klossene.
20. Dan	[((skyver oransje klosser, en for hvert tallord)) en, to, tre, (...) ti ((skyver grønne klosser, en for hvert tallord)) en, to, tre (...) ti]
21. Dina	[((skyver oransje klosser, en for hvert tallord)) en, to, tre, (...) ti ((skyver grønne klosser, en for hvert tallord)) en, to, tre (...) ti]
22. David	[((skyver to og to grønne klosser foran seg)) to, fire, seks, åtte, ti ((skyver to og to oransje klosser foran seg)) to, fire, seks, åtte, ti. Jeg hadde rett.]

I linje 20 viser eleven Dan at han kan telle ett og ett objekt. Elevene virker å ha god kontroll på tallrekka opp til ti. I tillegg viser eleven forståelse for en – til – en – korrespondanse ettersom eleven kobler et tallord til kun et objekt i mengden. Av transkripsjonen framgår det at elevene viser forståelse for *sammenheng mellom tall og mengde*. Dan betegner først at det er ti oransje klosser og deretter ti grønne klosser. For å forhindre at centikubene blir telt flere ganger, skyves klossene en etter en etter hvert som ett og bare ett tallord blir koblet til en kloss i mengden. I likhet med elev Dan, gjør Dina akkurat det samme. Jeg vil påstå at hun også mestrer en – til – en – korrespondanse i prosessen med tellingen, ved at hvert tallord knyttes med et objekt. David skyver derimot to klosser i gangen og stegteller med hopp med to. Selv om David ikke knytter tallordet til kun ett element, viser han forståelse for stegtelling hvor hoppene er to om gangen. Jeg vil påstå at eleven forstår at det elementet som ikke telles med eget tallord, representeres i den totale mengden som uttrykkes da to og to klosser skyves til side.

I utdraget over kommer også aspektet *systematisk telling* til uttrykk. Elevene behersker å telle forover og elevene virker å ha god kontroll på tallrekka opp til 10. På spørsmålet om hvor mange klosser de hadde senere i transkripsjonen, svarte elevene «tjue» i kor. Det kan tyde på at elevene er i stand til å uttrykke mengdens kardinalitet. Selv om det framgår i transkripsjonen at elevene kun teller opp til 10, kan det tyde på at elevene har lagt sammen antall oransje klosser med antall grønne klosser for å få den totale mengden. Dette kan karakteriseres som *aritmetisk kompetanse*. Elevene har utført et enkelt addisjonsstykke utgangspunkt i fysiske objekt, i form av konkreter. Dette kan kobles til Steinbrings (2006) epistemologiske trekant, hvor begrepet elevene arbeider med er det matematiske begrepet «tjue». Figur 7 illustrerer dette. Referansekonteksten er ti grønne centikuber og ti oransje centikuber for begrepet «tjue». I transkripsjonen over kommer ikke tallsymbolene 10 og 10 til syne. Bruken av klosser kan man tolke dit at de brukes for å representere tallene og mengden.



Figur 7 Den epistemologiske trekanten «tjue».

Av transkripsjonen og situasjonen over framgår det at det forekommer en omdannelse fra *ikonisk* representasjon til *naturlig, muntlig språk* som representasjon. Konkreter har jeg plassert innenfor representasjonsregisteret ikonisk og ikke – ikoniske representasjoner (se Tabell 1). Med utgangspunkt i centikubene uttrykker elevene seg med naturlig, muntlig språk om hvor mange klosser de har til sammen. Elevene skyver og teller klossene med samme farge hver for seg. Når de skal svare på hvor mange, virker det som om at elevene tar utgangspunkt i mengden ti og ti centikuber, for deretter å bruke muntlig språk til å uttrykke «tjue». Transformasjonen foregår mellom mengden de matematiske objektene representerer og det uttrykte tallordet. Det naturlige, muntlige språket brukes i tellingen, mens konkretene brukes til å visualisere. Omdannelsen er vellykket.

4.3 Ikoner som representasjon

Utgangspunktet for episoden under er at elevene Dan, David og Dina arbeider med aktivitet 3 (se 3.1.4 Oppgaver brukt i datainnsamling). Den delen av telleaktiviteten de jobbet med her var henholdsvis å telle antall stjerner og hjerter på arket. Før utdraget over hadde elevene benyttet det naturlige språket som representasjon i estimeringen av den totale mengden ikoner på arket. Her samtalte elevene om hvorvidt de trodde det var flest hjerter eller stjerner på arket. Senere i utdraget utspilles følgende utsagn:

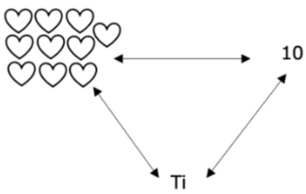
110.	Dan	[((peketeller stjernene og sier tilhørende tallord)) en, to, tre (...) tolv ((peketeller hjertene og sier tilhørende tallord)) en, to, tre (...) ti]
111.	David	[((peketeller hjertene først)) en, to, tre, fire ((starter på nytt igjen)) to, fire, seks, åtte, ti ((peketeller stjernene og teller høyt)) en, to, tre ((starter på nytt)) en, to, tre (...) elleve]
112.	Dina	[((peketeller stjernene og teller høyt)) en, to, tre (...) elleve ((peketeller hjertene og teller høyt)) en, to, tre (...) ti
113.	David	((teller hjertene på nytt)) en, to, tre (...) ti. Ti elleve
114.	Lærer	Ti og elleve?
115.	David	Ti på hjerter og elleve på stjerner

Utsagnene til elevene viser at alle peketeller hjertene og stjernene på arket. Vi kan se ut fra transkripsjonen at David må starte på nytt flere ganger. Fra egne observasjonssnotater og etter å ha sett på videoen, så det ut som at David lot seg forstyrre av at elevene Dan og Dina også teller høyt. Han blir avbrutt og klarer ikke å telle fra det gitte tallet. Dermed er han nødt til å starte tellingen på nytt igjen, mens Dan og Dina teller. En forskjell fra Dan og Dina er at David teller hjertene på arket først. Av den grunn kan det tyde på at det påvirker tellingen slik at han ikke klarer å holde styr på hvilke ikon som er telt og ikke. I linje 111 kan man se at David stegteller hjertene med to hopp av gangen. Alle elevene peketeller og teller ett og ett ikon om gangen. Utsagnene til elevene kan tyde på en – til – en – korrespondanse mellom tallord og hjertene og stjernene representert på arket. Aspektet *sammenheng mellom tall og mengde* kommer til uttrykk. Selv om David teller hjertene og stjernene på nytt flere ganger, viser transkripsjonen til at han har kontroll på tallrekka opp til elleve. Når læreren spør ti og elleve, svarer David ti hjerter og elleve stjerner. Til tross for at det tok noe lengre tid, er han i stand til å selv koble tallordet til riktig representerte ikon. Av transkripsjonen framgår det at elevene virker å ha kontroll på tallrekka opp til elleve. Utsagnene kan tolkes dit at elevene viser forståelse for *systematisk telling*.

Fra observasjonsnotatene og videoopptakene kommer aspektet *sammenligning av mengder* til syne. Som skrevet over i konteksten for den valgte episoden, samtalte elevene om hvorvidt de trodde det var flest hjerter eller stjerner på arket. Dette foregikk før elevene hadde telt ikonene. Elevene sa «Jeg tror det er flest», noe som indikere at elevene sammenligner mengdene opp mot hverandre. Etter episoden over uttrykker David at det var flest stjerner på arket og at det var én mer stjerne enn hjerte. Med det uttrykket kan det tyde på at David viser forståelse av at elleve eller større enn ti.

Hjertene og stjernene kunne kategoriseres som *ikonisk representasjon*. Elevene kombinerer det naturlige språket som semiotisk representasjon ved uttrykte tallord og de ikoniske representasjonene i telleaktiviteten. Ettersom elevene i denne delen av telleaktiviteten kun skulle telle antall hjerter og stjerner på illustrasjonen, benytter de seg av muntlig språk. De ikoniske representasjonene er allerede gitt, men knyttes tallord til. Ikonene på arket visualiserer mengden de representerer. Jeg tolker at transformasjonen som forekommer i transkripsjonen er behandling ettersom elevene kun benytter seg av deres naturlige språk. Dette kan ses i sammenheng med Duval (2006) da transformasjon av representasjoner i samme register betegnes som en behandling.

På det utdelte arket brukt i telleaktiviteten, blir kjente gjenstander som hjerter og stjerner brukt for å representere tallene og mengden 10 og 11. Dette kan ses i sammenheng med Steinbring (2006) som viser til at de gjenstandene som blir brukt ikke er fokuset, men det er den matematiske ideen eller strukturen som visualiseres gjennom objektene som skal stå i sentrum. Utsagnet til David, linje 115, kan ses i sammenheng med Steinbrings (2006) epistemologiske trekant, hvor begrepet eleven arbeider med er det matematiske begrepet «ti».



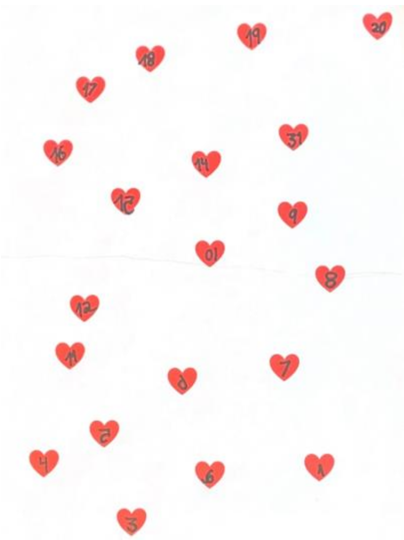
Figur 8 Den epistemologiske trekanten «ti».

Figur 8 viser innholdet i den epistemologiske trekanten. Den semiotiske medieringen foregår mellom begrepet ti, objektet som mengden av ti hjerter og tegnet 10. Selv om David ikke skriver det matematiske tegnet her, gjør han det senere i transkripsjonen. Utsagnene til David tyder på at det forekommer en semiotisk mediering. Videre kan utsagnene til David knyttes til aspektet om *forståelse av ulike representasjoner av tall* fordi eleven her gir mening til det matematiske begrepet «ti» gjennom tallordet ti og ti hjerter. I henhold til Duval (2006) tilhører disse semiotiske representasjonene naturlig, muntlig språk og ikonisk og ikke-ikonisk.

4.4 Tallsymboler som representasjon

I kombinasjon med det naturlige språket som representasjon benyttet noen av elevene seg av tallsymboler underveis i tellesekvensene. I utdraget presentert under arbeider elevene Alma, Are og Ada med telleaktivitet 2 (se 3.1.4 Oppgaver brukt i datainnsamling). Før transkripsjonen under skulle elevene estimere antall hjerter på et ark de hadde liggende foran seg. Her hadde elevene benyttet naturlig språk som representasjon for å anslå den totale mengden ikoner på arket. Deretter fikk elevene utdelt et ark med 20 hjerter og en blyant. Blyanten var tilgjengelig for elevene slik at de kunne benytte den underveis. Aktiviteten gikk ut på at elevene skulle telle antall hjerter på arket. Plasseringen av hjertene på arket er ustrukturert og var tilfeldig plassert på arket. Dette var utgangspunktet for utdraget av transkripsjonen presentert under.

65.	Lærer	((deler ut blyanter til hver)) Hvor mange hjerter er det?
66.	Ada	[((peketeller med blyanten og teller hvert hjerte, sier tallordene høy i kor med Are)) en, to, tre, (...) tjue]
67.	Are	[((peketeller med blyanten og teller hvert hjerte, sier tallordene høy i kor med Ada)) en, to, tre, (...) tjue]
68.	Alma	Jeg tegner opp tallene jeg ((skriver tall på hjertene))
69.	Are	Det skal jeg også ((skriver tall ved siden av hjertene))
-		
79.	Alma	Tretten ((skriver 31 på et hjerte på arket))
80.	Lærer	Hva kommer etter tretten?
81.	Alma	Fjorten ((skriver 14 på et hjerte på arket))
82.	Lærer	Hva kommer etter fjorten, Alma?
83.	Alma	Femten. ((skriver 15 på et hjerte på arket)) Seksten ((skriver 16 på arket et hjerte på arket)). Sytten ((skriver 17 på et hjerte på arket)). Atten. Ja det blir tjueen, nei tjue. ((skriver 18 på et hjerte på arket)). Sytten, atten ja.



Figur 9 Skriftlig elevarbeid Alma. (Jeg har ikke endret, men forsterket skriften med svart tusj for å gjøre elevarbeidet mer lesbart).

Figur 10 Skriftlig elevarbeid Are.

I linje 66 til 69 uttrykker elevene hvilken metode de skal benytte seg av for å finne mengdens kardinalitet. Først velger Ada og Are å peketelle hjertene med blyanten. Deretter sier Alma at hun vil skrive tallsymbolene på hjertene og telle samtidig. Are gjør det tilsvarende som Alma, men skriver tallene ved siden av hjertene. Fra observasjonene gjort underveis skriver Are ned tallene i eget tempo uforhindret av at læreren og Alma parallelt samtaler om tallene. Figur 10 viser et utdrag av nedskrivingen av tallene på arket gjort av Are. Her kan vi se nedskrivingen av tallene fra 9 til 18. Linje 79 til 83 i utdraget fra transkripsjonen viser til hvordan elev Alma uttrykker tallord og skriver ned tilhørende tallsymbol samtidig. Utdraget kan kategoriseres som aspektet *tallgjenkjennelse* (Andrews & Sayers, 2015). Alma uttrykker først tallordet for mengden hjerter. Videre skriver hun ned det tilhørende tallsymbolet. I tellingen uttrykkes mengden med en verbal representasjon av objektet, elevene viser forståelse for *systematisk telling*. Tallsymbolet uttrykket med en skriftlig representasjon for mengden. Dette tyder på at elevene arbeider med *forståelse av ulike representasjoner av tall*.

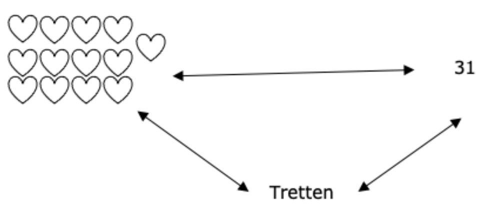
Figur 9 viser nedskrivingen på arket gjort av Alma som medfølger telleaktiviteten. Alma skrev ned tallene fra 1 til 12 på arket i eget tempo, uten å samtale med medelevene eller læreren. Av nedskrivingen vist i figur 9 kan man se at tallene kun er skrevet en gang på et hjerte hver. I transkripsjonen framgår det at Alma sier tretten, men skriver ned 31 på hjertet. Til nå har Alma skrevet ned tallene uforhindret av medelevene rundt. Dermed spør læreren om hvilket tall kommer etter tretten. Eleven skriver symbolet og læreren spør hvilket tall som kommer etter fjorten. Videre knytter Alma tallene fra 15 til 20 til ett og ett hjerte og skriver tallsymbolet på hjertet.

Av figur 9 og 10 fremgår det at noen av tallene er skrevet feil. For eksempel tallet 13 ble nedskrevet av Alma som 31. Ser man på det skriftlige arbeidet gjort av Are i figur 10 har han skrevet tallsymbolet 13 som 31, men med 3-tallet speilet. Av figurene 9 og 10 kan man også se at både Alma og Are har skrevet ti som 01. Dette er en tendens som går igjen hos flere av elevene i de andre gruppene. På tross av at tallene enten er speilvendt eller at tallet på enerplassen står på tierplassen og omvendt forstod Alma selv hvilket tallord tallsymbolet tilhørte. Av transkripsjonen framgår det at hun sa rett muntlig noe som tyder på at forståelsen er der selv om det skriftlige ikke er helt på plass enda. Skriveretningen på tallene er noe elevene jobber kontinuerlig med i undervisningen. Eleven kjenner igjen tallsymbolet hun har skrevet ned. For eksempel i linje 83 når eleven sier femten gjennom muntlig språk før hun skriver tallsymbolet 15 på et av hjertene på arket. Dette kan tyde på at eleven viser forståelse for tallsymbolets betydning.

Som poengtert over er ikke det skriftlige helt på plass. I utdraget fra transkripsjonen og tilhørende skriftlig elevarbeid kommer det frem at overgangen fra muntlig språk som representasjon til skriftlige symboler som representasjon kan være problematisk. Noe som medfører feil i nedskrivingen av symbolene. Først bruker elevene det naturlige språket til å telle antall ikoner på arket. Deretter bestemmer Alma seg for i linje 68 at hun vil tegne opp tallene ved siden av hjertene. Are gjør det tilsvarende. Alma og Are benyttet seg av blyanten underveis. Det er kun Alma som sier tallordene høyt samtidig som hun skriver de ned på arket. Hun sier tretten, men skriver «31» på arket. Her transformeres tallordet til tallsymbol. Tallsymbolene som blir nedskrevet på arket kan kategoriseres som *symbolsk representasjon.* Alma forflytter seg fra representasjonssystemet naturlig språk til symbolske system. Ettersom Alma skriver «31» i linje 79 kan det være at transformasjonen ikke er vellykket da tallsymbolet ikke stemmer overens med begrepet eller tallsymbolet. Det samme kan vi se av utklippet i figur 10 hvor det er feil i nedskrivingen. Elevene er trolig ikke klar over det selv ettersom nedskrivingen gir mening for elevene der og da. Selv om ikke det skriftlige er på plass, kan det tyde på at forståelsen er der siden Alma sa rett muntlig.

Jeg tolker at transformasjonen som forekommer i transkripsjonen av Alma er en omdannelse ettersom transformasjonen skjer fra ett representasjonsregister til et annet (Duval, 2006). I dette tilfellet skjer transformasjonen fra representasjonen *naturlig muntlig språk* til *symbolsk system* ved tallsymboler. Alma uttrykker tallordene muntlig og disse omdannes til nedskrevne tallsymbol. Eleven arbeider med samme objekt, men i ulike semiotiske representasjonssystem. Transformasjonen som finner sted, er vellykket. Sett bort fra at noen av tallene er skrevet feil. I motsetning skriver Are kun tallsymbolene på arkene. Han uttrykker ikke tallordene muntlig. Jeg tolker at transformasjonen som forekommer av Are kan karakteriseres som behandling (Duval, 2006). Han bruker kun symbolske system som representasjon for å finne antall ikoner. Han holder seg innenfor et og samme representasjonssystem.

I arbeidet med tellingen av de abstrakte konkretene, kan dette kobles til Steinbrings (2006) epistemologiske trekant, hvor begrepet Alma arbeider med er det matematiske begrepet «tretten». Figur 11 viser referansekonteksten med tretten hjerter.



Figur 11 Den epistemologiske trekanten «tretten».

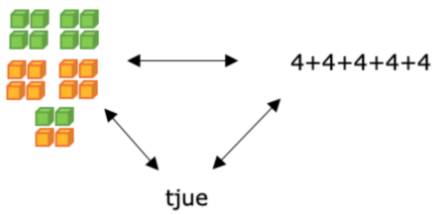
Forholdet mellom de tre hjørnene vil ikke stemme overens med hverandre. «31», tretten og tretten med hjerter viser ikke til den samme matematiske kunnskapen. For den matematiske kunnskapen i oppgaven er det nødvendig at elevene knytter tegnene, altså tallsymbolene, til en referansekontekst, ikonene på arket, for å deretter kunne tolke de (Steinbring, 2006). I dette tilfellet var referansekonteksten gitt som utgangspunktet for den semiotiske medieringen som finner sted. Oppgaven går ut på å telle antall ikon på arket. Av transkripsjonen framgår det at Alma gir mening til ikonene på arket ved å skrive ned tallene på hjertene, på tross av at Are og Ada først peketeller og sier tallordene høyt i kor med hverandre. Are velger også å gjøre det samme som Alma, selv om han allerede har telt alle hjertene og kommet fram til riktig antall. I likhet med Alma har også Are skrevet «31», men med 3 speilet. Den semiotiske medieringen skjer ved *begrepet* tretten, *objektet* som mengden av tretten hjerter og *tegnet* 31. Selv om det kan tyde på at det ikke forekommer en semiotisk mediering for denne spesifikke referansekonteksten, blir tallordene 14 til 20 koblet til riktig tallsymbol. Utsagnene til Alma tyder på at det forekommer en semiotisk mediering her.

4.5 Representasjoner

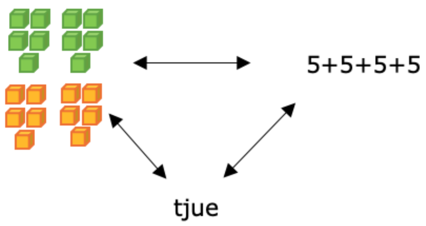
Utdraget fra transkripsjonen presentert under viser elevene Carl, Clas og Cora som arbeider med telleaktivitet 1 (se 3.1.4 oppgaver brukt i datainnsamling). Før utdraget samtalte elevene om hvor mange klosser de hadde til sammen og hvor mange klosser de hadde av hver farge. Læreren spurte elevene om de kunne dele de 20 klossene inn i mindre bunker. Hver bunke skulle inneholde like mange klosser. Denne aktiviteten inviterer til at elevene skal kunne se at et tall kan representeres på forskjellige måter ved å dele opp klossene i mindre mengder.

44. Carl	[((fordeler klossene i fire bunker ved å legge ut én og én kloss i hver bunke. Fire bunker med fem klosser i hver))]
45. Clas	[((lager bunker med fire klosser i hver. Fem bunker med fire klosser i hver))]
46. Cora	[((lager bunker med fire klosser i hver. Fem bunker))]
47. Lærer	Hvor mange har dere i hver bunke da? Carl, hvor mange har du i hver bunke?
48. Carl	((holder over den ene bunken)) fem.
49. Lærer	Du har fem. Clas, hvor mange har du i hver da?
50. Clas	Fire ((skyver en bunke med fire mot læreren))
-	
59. Lærer	Hvor mange samlinger har du?
60. Clas	((holder over en og en bunke mens han sier tallordet)) en, to, tre, fire, fem.
61. Lærer	Fem grupper med fire i hver. (0.5) Carl, hvor mange grupper har du da? (0.5)
62. Carl	((holder over to av bunkene)) (0.5) fire
63. Lærer	Fire grupper med hvor mange i hver?
64. Carl	Med fem

I linje 44 fordeler elev Carl én og én kloss i totalt fire bunker til alle klossene er fordelt. Den totale mengden centikuber deles inn i fire bunker med fem klosser i hver. I motsetning samler elev Clas fire og fire klosser i bunker slik at den totale mengden deles inn i fem bunker med fire klosser i hver. Cora gjorde tilsvarende Clas. Elevene fordelte klossene parallelt, men jobbet i eget tempo. I linje 47 spør læreren om hvor mange klosser de har i hver bunke. Tanken var at elevene skulle se at det matematiske begrepet tjue kunne deles opp i mindre mengder på ulike måter ved hjelp av konkretene som matematisk objekt. Jeg mener at utdraget kan kategoriseres som *forståelse av ulike representasjoner av tall* ettersom elevene jobber med naturlig, muntlig språk som representasjon i tillegg til ikonisk og ikke-ikonisk representasjon av det matematiske objektet «tjue». Likevel er det utfordrende å vite om elevene selv drar koblingen at fire bunker med fem centikuber i hver er en representasjon av tallet 20. Slik det kommer frem av transkripsjonen at Clas gjennomfører aktiviteten. I likhet med at fem bunker med fire centikuber i hver også er en representasjon av tallet 20, slik det kommer frem av transkripsjonen. Elevene uttrykker ikke eksplisitt at de forstår at grupperingene de gjør kan være alternative måter å uttrykke tallet og mengden 20 på. Ved å følge instruksjonen gitt av læreren, virker det som at elevene selv er i stand til å dele inn i mindre bunker basert på sin forståelse av instruksjonen som blir gitt. Dette kan kobles til Steinbrings (2006) epistemologiske trekant, hvor begrepet elevene arbeider med er det matematiske begrepet «tjue».



Figur 12 Den epistemologiske trekanten «tjue».



Figur 13 Den epistemologiske trekanten «tjue».

I figur 12 illustreres medieringen mellom forholdet av det matematiske begrepet «tjue», tegnene 4+4+4+4+4 og det matematiske objektet med en mengde som står for 20 element. Clas har selv delt den totale mengden inn i bunker med like mange i hver. Eleven skriver ikke ned tallsymbolene som er skrevet over, men uttrykker at han har fem bunker mens han teller. I figur 13 illustreres arbeidet gjort av Carl i transkripsjonen over. Han deler også inn den totale mengden med 20 element i bunker med like mange i hver. Han uttrykker at han har fire bunker med fem i hver.

Av transkripsjonen framgår det at elevene Carl og Clas benytter ulike representasjonsregister i arbeidet med å dele 20 klosser i mindre bunker med like mange i hver bunke. Representasjonsregistrene som benyttes er *ikonisk* representasjon og *naturlig, muntlig språk*. Omdannelsen som forekommer i elevenes arbeid, er omdannelse fra arbeidet med oppdeling av centikubene til muntlige beskrivelser gjennom det naturlige språket. Jeg mener at omdannelsen er vellykket ettersom det matematiske objektet har samme form på tross av at elevene jobber med samme objekt i to forskjellige representasjonsregister. Det virker som at Clas og Carl er i stand til å representere det matematiske begrepet 20 gjennom å bruke konkreter og det naturlige språket som representasjon. Cora lager kun bunker med centikubene. Her skjer det en behandling, da hun beholder seg innenfor ett representasjonsregister. Transformasjonen skjer med utdelte konkreter.

Utdraget fra transkripsjonen under viser en annen gruppe som arbeidet med samme oppgavene som elevene over. De fikk de samme instruksjonene, men løser det på en annen måte. Læreren ba de om å dele de 20 klossene inn i mindre bunker. Hver bunke skulle inneholde like mange klosser.

46. Dan [((Lager tre bunker med seks klosser i hver og en bunke med to klosser))]
47. Dina [((Setter sammen fire og fire klosser i fem bunker))]
48. David [((Lager bunker med fire klosser i fire bunker og to bunker med to klosser))]

Av transkripsjonen framgår det at elevene arbeider med aktiviteten samtidig og jobber parallelt med hverandre. Elevene jobber i eget tempo og det er stille i rommet mens de lager bunkene. Ingen deler inn bunkene på lik måte. Jeg mener at utdraget kan kategoriseres som *forståelse av ulike representasjoner av tall*. Dan lager tre bunker med seks klosser i hver og en bunke med to klosser. Dina setter sammen fire og fire klosser i fem bunker totalt. David lager fire bunker med fire klosser i hver og to bunker med to klosser. Alle elevene deler inn det matematiske objektet med 20 elementer. I transkripsjonen over benytter elevene seg av ikoniske systemet som representasjon. De anvender kun ett representasjonsregister i arbeidet med aktiviteten gitt av læreren. Jeg vil påstå at det forekommer en behandling i arbeidet med centikubene. Nemlig transformasjon i bruken av konkretene. Først representeres begrepet tjue med mengden av 20 klosser i en og samme mengde. Deretter deler elevene inn objektene i mindre bunker og begrepet tjue representeres ved å dele opp objektet i mindre mengder, men hos to av elevene inneholder ikke bunkene like mange klosser. Det virker som at elevene ikke har en forståelse for instruksjonene læreren gir.

4.6 Oppsummering av funn

Ut ifra analysene gjort over viser det seg at aspektene for tallforståelse kommer til syne litt ulikt under de semiotiske representasjonene.

Semiotiske representasjoner	**Aspekter ved tallforståelse**
Naturlig språk ○ Muntlig språk	Aspekt 2: Systematisk telling Aspekt 4: Sammenligning av mengder Aspekt 6: Estimering Aspekt 7: Aritmetisk kompetanse

Ikonisk og ikke-ikonisk representasjon o Centikuber som fysiske konkreter	Aspekt 2: Systematisk telling Aspekt 3: Sammenheng mellom tall og mengde Aspekt 7: Aritmetisk kompetanse
Ikonisk og ikke-ikonisk representasjon o Hjerter og stjerner som abstrakte konkreter	Aspekt 2: Systematisk telling Aspekt 3: Sammenheng mellom tall og mengde Aspekt 4: Sammenligning av mengder Aspekt 5: Forståelse av ulike representasjoner av tall Aspekt 7: Aritmetisk kompetanse
Symbolsk representasjon o Tallsymboler	Aspekt 1: Tallgjenkjennelse Aspekt 2: Systematisk telling Aspekt 5: Forståelse av ulike representasjoner av tall

Tabell 4 Oppsummering av funn

Tabell 4 oppsummerer funnene gjort i analysen. Den viser hvilke aspekt ved tallforståelse jeg har identifisert i sammenheng med de semiotiske representasjonene. I analysen av datamaterialet identifiserte jeg tre av de semiotiske representasjonene utarbeidet av Duval (2006). Disse var naturlig, muntlig språk, ikonisk og ikke-ikonisk og symbolsk. I tillegg ble sju av Andrews og Sayers (2015) aspekt ved tallforståelse funnet. Som tabellen viser var det litt ulikt hvilke aspekter som kom til syne når elevene arbeidet med de forskjellige representasjonene. Selv om centikubene og hjertene og stjernene begge var ikoniske representasjoner, påvirket bruken av representasjonene hvilke aspekter som kom til syne. I henhold til analysen og tabellen over kan vi se at det kom to flere aspekt til syne når elevene arbeidet med telleaktivitet 3 sammenlignet med telleaktivitet 1. På den andre siden kom aspektet om systematisk telling til syne innenfor alle de tre semiotiske representasjonene. Videre ble aspektet om tallgjenkjennelse kun identifisert i når elevene brukte naturlig språk og symboler som representasjon. I analysen kan man se at elevene benyttet seg av både én og flere semiotiske representasjoner. Transformasjonene mellom representasjonene ble både identifisert som behandling og omdannelse. Det vil si at elevene transformerte både innen samme register og mellom ulike register. Videre blir funnene diskutert med utgangspunkt i forskningsspørsmålet og relevant teori.

5 Diskusjon

Denne studien har undersøkt hvilke aspekt for tallforståelse noen førsteklassinger viser i arbeid med telling og hvordan bruken av representasjoner påvirker hvilke aspekter som kommer til syne. Resultatene fra analysen viser at sju av aspektene for grunnleggende tallforståelse kommer til syne i arbeidet med representasjonene. Samtidig er det noen av kategoriene som forekommer hyppigere enn andre. I tillegg viser resultatene at nøyaktigheten og effektiviteten i telleaktiviteten påvirkes av hvilken representasjon elevene benytter. Funnene gir vesentlig innsikt i sammenhengen mellom representasjoner og aspekter for tallforståelse med utgangspunkt i elevenes arbeid med telleaktiviteter. I denne diskusjonen vil resultatene fra analysen drøftes i lys av eksisterende forskning. Til slutt vurderes kvaliteten i studien ved å se på studien med et kritisk blikk basert på Gubas (1981) fire kriterier for kvalitet i kvalitativ forskning.

5.1 Telling

Elevenes forståelse av tall kobles til deres telling (Kilpatrick et al., 2001). Ifølge Clements og Sarama (2014) er telling en grunnleggende handling i matematikkfaget. Et kjennetegn ved tellingen er at elevene identifiserer elementene som telles og skiller disse fra elementene som er telt. I studien uttrykker de aller fleste elevene seg muntlig samtidig som de teller. Elevene Dan og Dina (se 4.2) skyver centikubene foran seg, en for hvert tallord som blir uttrykt høyt muntlig. Her viser elevene at de evner å telle et og et objekt og klarer å skille klossene som er telt fra de som ikke er telt. Fingeren som benyttes til å skyve klossene, flyttes systematisk mens elevene sier telleordene i tallrekka høyt. Resultatene fra analysen viser at elevene har forståelse for en – til – en – korrespondanse mellom objekt og tallord, lik Kilpatrick et al. (2001) beskriver som kjennetegn for telling.

Underveis i tellingen brukte elevene fingrene aktivt. Fingrene ble brukt som støtte til representasjonene, slik Duval (2006) beskriver funksjonen til konkreter i matematikkfaget. Elevene peketelte objektene i mengden, de skjøv og grupperte centikube-klossene, samt viste tallbegrepet ved at de holdt opp antall fingre. I lys av Morrissey et al. (2018) er fingertelling sentralt for forståelsen av tallbegrepet. Fingertelling innebærer bruk av motorikk, berøring, synet i kombinasjon med å uttrykke seg verbalt. En annen, mulig forklaring til at elevene bruker fingrene underveis i tellingen er at tall kan oppleves abstrakt (Björklund & Reis, 2020). Dermed kan fingrene brukes som en representasjon av tallordet eller objektet som skal representeres. Videre uttrykkes mengden med tallord, nemlig en verbal representasjon av objektene.

I denne studien starter alle, foruten én elev, med telling fra tallet en. David (se 4.2) stegteller centikubene med hopp på to og to av gangen, mens han skyver to og to klosser samtidig. Ifølge Jones et al. (1996) er det å telle i steg sentralt for tellingen. Eleven effektiviserer tellingen med at han teller to og to tallord, «to, fire, seks, åtte, ti». Anghileri (2006) skriver at stegtelling videre kan kobles til aritmetisk kompetanse. I tillegg evner David å telle en og en om gangen, lik Dan og Dina gjør. Når han skal telle ikon på arket (se 4.3), peketeller han hjertene og stjernene mens han uttrykker tallordene fra en til elleve muntlig. Selv om David må starte tellingen på nytt flere ganger, evner han å telle hjertene og stjernene for seg. I lys av Clements og Sarama (2014), strever eleven med å identifisere elementene som telles og skille de fra elementene som er telt. David, har i likhet med Dan og Dina, kontroll på tallrekka opp til 20 og evner å angi «hvor mange» når læreren spør om dette. Disse funnene samsvarer i stor grad med funnene til Andrews og Sayers (2015), henholdsvis begrepene ordinalitet og kardinalitet innenfor systematisk telling som et aspekt for den grunnleggende tallforståelsen.

I denne studien telte elevene klosser i form av centikuber i telleaktivitet 1. Denne typen konkret ble kategorisert under ikonisk og ikke-ikonisk representasjonssystem i tabell 1. På den ene siden mener Duval (2006) at konkreter ikke er en representasjon i et semiotisk system. Likevel beskriver Kilpatrick et al. (2001) at tall kan representeres med fysiske konkreter ettersom de hjelper elevene med å kommunisere i matematikken. I lys av Kilpatrick et al. (2001), avhenger bruken av konkretene hvordan elevene tolker og tar de i bruk, da konkretene uansett representerer en matematisk idé. Dermed har jeg valgt at konkreter er en del av det semiotiske systemet. I denne studien jobbet elevene fysisk med konkretene ved at de grupperte, skjøv og peketelte klossene underveis mens de telte hvor mange klosser de hadde foran seg. Ifølge Fuchs et al. (2021), viser elevene tegn til at konkretene gjør matematikken mer tilgjengelig og synlig ettersom de fysisk modellerer med klossene. Det ser ut til at det var enklere for elevene å oppgi mengdens kardinalitet uten å måtte telle mengden på nytt igjen, da elevene arbeidet med fysiske konkreter. Her innebar tellingen at de fikk oversikt og ordnet mengdene, slik Johnsen-Høines (2020) beskriver telleprosessen.

Imidlertid har det i denne studien vist seg at ikoner som representasjon også kan være en begrensning for tellingen. Hjertene og stjernene på arket i telleaktivitet 3 ble også kategorisert under ikonisk og ikke-ikonisk representasjonssystem. Da elevene skulle telle ikonene på arket de fikk utdelt, måtte de fleste elevene starte telleprosessen flere ganger før de ga et svar. Selv om elevene også peketelte ikonene her, var det ikke mulig å fysisk modellere med konkretene. Til tross for at ikonene var synlig på arket slik Fuchs et al. (2021) nevner, kunne ikke elevene flytte eller skyve ikonene rundt slik de gjorde med centikubene. Ikonene her ble mer abstrakte for elevene, da de ikke fikk skilt ikonene de hadde telt fra de som ikke var telt. For å få oversikt over mengden var det for noen av elevene nødvendig å sammenligne mengden hjerter med mengden stjerner. Da kom elevenes tallforståelse til syne. For David, i 4.3, var det nødvendig å telle mengden flere ganger før han kom fram til den totale mengden. En annen, mulig forklaring kan være at elevene ble forstyrret av hverandre. Det at elevene telte høyt muntlig og parallelt med hverandre kunne ha vært et forstyrrende element for noen elever. Tvert imot kunne jeg ikke bedt elevene om å være stille og telle «inni» seg. Da hadde jeg ikke fått innsikt i hvordan elevene uttrykte seg muntlig mens de arbeidet med aktivitetene. Elevenes muntlige ferdigheter er essensielle når de skaper mening til matematiske objekter gjennom samtaler (Anghileri, 2006).

5.2 Naturlig språk

Evnen til å håndtere tall og bruke informasjonen i kommunikasjon og samhandling med andre, er ifølge McIntosh et al. (1992) sentralt i arbeidet med tall. Alle aktivitetene ble introdusert verbalt overfor elevene. Læreren stilte spørsmål og tok utgangspunkt i elevenes utsagn og arbeid i samtalen underveis. I denne studien ble elevene delt i grupper på tre og tre. Hensikten var at de kunne samtale med hverandre og lytte til medelevenes tanker slik at de fikk sett andre løsninger på samme telleaktivitet. I henhold til Andrews og Sayers (2015) bygger elevenes grunnleggende tallforståelse videre på deres eksisterende tallforståelse gjennom støtte og veiledning. Ved at elevene uttrykte seg verbalt i store deler av gjennomføringen, kan det i lys av Andrews og Sayers (2015) over tid være med å utvikle elevenes evne til å uttrykke seg matematisk og formidle sine tanker med andre. Utvikling tar tid, dermed er det vanskelig å kommentere om det har skjedd en utvikling for akkurat denne studien.

Språk som representasjonssystem var den representasjonen som ble brukt mest underveis i gjennomføringen. Ifølge Duval (2006) tilhørte elevenes verbale utsagn, naturlig muntlig språk som representasjon. Dette representasjonsregisteret beskriver Steinbring (2006) som svært vanlig i klasserommet. Elevene uttrykte tallordene i tallrekka, knyttet matematiske begreper til tilhørende objekt eller symboler og kom med forklaringer. Lik Björklund og Reis (2020) skriver at en mengde uttrykkes med et tallord, nemlig en verbal representasjon av objektene. Elevene i denne studien viser tegn til dette da de for eksempel telte tallordene i tallrekka opp til 20 verbalt eller estimerte antall objekt i mengden. En del av telleaktivitetene omhandlet som nevnt at elevene skulle anslå hvor mange klosser de trodde var plassert foran dem (se 4.1). Da læreren spurte elevene om de kunne si hvor mange klosser de trodde det var, evnet elevene å anslå omtrent hvor mange centikuber det var i den totale mengden. Elevene benyttet benevnelsen «jeg tror» noe som kan vitne til at elevene vurderte antallet uten å telle. Mengden elevene anslår er verken lik den faktiske totale mengden eller like hverandre ettersom antallet ikke behøver å være korrekt. Disse funnene samsvarer i stor grad med funnene til Andrews og Sayers (2015), angående estimering som et aspekt for den grunnleggende tallforståelsen. Elevene representerer henholdsvis de matematiske begrepene femti, tolv og tjue ved naturlig, muntlig språk. I og med at tallordene forekommer som en naturlig del av elevenes språk, mener Johnsen-Høines (2020) likevel at elevene uttrykker tallordene uavhengig om de forstår innholdet eller mengden de representerer. I denne studien kan det se ut til at elevene under estimeringen ikke forstod hensikten og ga et helt tilfeldig svar. En annen, mulig forklaring kan være at når elevene er kjent med tallene og at tallene har relasjoner til hverandre kan elevene estimere og kommunisere med andre om sine tanker (Shumway, 2011). I motsetning til tidligere studier, kan det se ut til at elevene i første klasse behersker å estimere mengder som inneholder mer enn fem objekt. Da det er tjue objekt i deres mengde.

I denne studien kommuniserte elevene verbalt og telte. Når elevene telte høyt, kom det tydelig frem for meg at elevene for eksempel hadde kontroll på tallrekka, kunne addere mengden med klossene. Videre var det enklere å oppfatte om elevene måtte telle på nytt flere ganger. Språket som representasjon under tellingen var essensiell slik at elevene fikk uttrykt seg og formidlet sine tanker til de rundt. Til tross for at ikke alt som ble uttrykt var korrekt, var ikke det fokuset. I studien til Levine et al. (2010) vektlegges samtaler der man snakker om og utforsker tallene. For barnas tallforståelse er slike samtaler fundamentale. Björklund og Palmér (2022) fremhever at læreren må lytte til elevene slik at de blir oppmerksomme på deres forståelse av tall. Likevel er det muntlige språket bare én type representasjon. Ofte er det nødvendig med flere representasjoner for å representere et matematisk objekt (Duval, 2006).

5.3 Skriftlig symbol

Ovenfor har jeg drøftet viktigheten av at elevene uttrykker seg muntlig i arbeidet med telleaktivitetene. I tillegg vil språket være essensielt når elevene skal gi mening og få tilgang til symbolske representasjoner, i form av tallsymbol (Duval, 2006). Skrevne tallsymboler ble kategorisert innenfor representasjonsregisteret symbolsk representasjon. Et nedskrevet «5» er et eksempel på en symbolsk representasjon. På den ene siden mener Duval (2006) at tall er tilgjengelig gjennom representasjoner som ikoner, språket og grafiske uttrykk. Som oftest er ikke symbolsk representasjon kjent for elevene, men læres i kommunikasjon med andre og seg selv (Van Oers, 2010). Dermed er samtale med andre grunnleggende i aktiviteter hvor elevene skal gi mening til matematiske objekt som tall og relasjoner. På den andre siden kan symbolske representasjoner oppleves abstrakte for elevene og dermed medføre at de er vanskelig å forstå.

I datamaterialet oppstår en omdannelse mellom to ulike representasjoner. Mens elevene teller ikoner på arket og uttrykker tallordene muntlig (se 4.4), velger noen av elevene å skrive ned tallene ved siden av ikonene. Her gir elevene mening til de matematiske objektene ved at de blir nummerert parallelt med at elevene teller. Transformasjonen som forekommer, er en omdannelse fra naturlig, muntlig språk som representasjon til symbolske representasjoner (Duval, 2006). Elevene viser forståelse for de matematiske begrepene da de er i stand til å skrive symbolene i takt med tellingen. Det å være kjent med flere representasjoner støtter elevene i transformasjonen (Kilpatrick et al., 2001). Alma gjenkjenner tallsymbol og tilhørende tallord i tellingen. Dette funnet samsvarer i stor grad med funnene til Andrews og Sayers (2015), om aspektet tallgjenkjennelse som en del av grunnleggende tallforståelse. Det tyder på at eleven er kjent med tallsymbolets betydning ettersom for eksempel begrepet seks uttrykkes når eleven har telt 6 element av objektet og skrives med symbolet «6». Transformasjonen er til dels vellykket da de fleste tallsymbolene skrives ned riktig.

Også for Are er noen av tallsymbolene skrevet speilvendt eller ved at tallet på enerplassen står på tierplassen. Er det så farlig at elevene på 1. trinn ikke har det skriftlige helt på plass? Jeg tenker at dette er noe som kommer etter hvert som elevene arbeider med de skriftlige tallsymbolene. Det er mer essensielt at man får jobbet med tallforståelsen. På den andre siden vil det være sentralt at man som lærer har fokus på med det skriftlige, da elevenes tallforståelse bygger å deres forståelse av tall og operasjoner (McIntosh et al., 1992). Det skriftlige er nettopp en del av ens tallforståelse. Med tanke på Are (se 4.4) er det vanskelig å si noe om han forstår hvilket begrep tallsymbolet representerer, ettersom han ikke uttrykker seg muntlig mens han skriver ned symbolene. Siden det framgår av transkripsjonen at Alma sier rett muntlig tyder det på at forståelsen for de matematiske objektene og symbolene er der, til tross for at det skriftlige ikke er på plass enda. I lys av Duval (2006), kan det se ut til at transformasjon som omdannelse var utfordrende for elevene. Omdannelse er mer kompleks og gir dypere forståelse enn behandling, ettersom elevene gjenkjenner det matematiske objektet i en annen representasjon. For øvrig er dette også årsaken til at omdannelse kan være utfordrende overfor elevene. Når elevene står fast, er det essensielt at de finner måter å transformere informasjonen slik at de forstår (Lesh & Doerr, 2003). I gjennomføringen av denne telleaktiviteten observerte jeg at Alma stoppet opp etter at hun hadde skrevet ned symbolet for begrepet «tretten». For å støtte hun på veien videre, stilte jeg spørsmål. Dette medførte at hun fikk skrevet ned tallsymbol på alle ikonene.

Forskning viser at elevenes forståelse for tall og symboler øker, ved at elevene arbeider med forskjellige representasjoner og sammenhengen mellom de (Gersten et al., 2009). I denne studien arbeidet elevene med telling gjennom språket, ikoner og tallsymboler som representasjoner. Over tid vil bruken av ulike representasjoner støtte elevenes forståelse for abstrakte symboler, slik som tallsymboler. For noen kan det derimot være utfordrende å forstå sammenhengen mellom abstrakte symboler, objektet og begrepet det representerer. Likevel problematiserer Duval (2006) det å benytte flere semiotiske representasjoner for et matematisk objekt. Han stiller spørsmål til hvordan elevene skal klare å kjenne igjen objektet når det blir representert på ulike måter? I denne studien representeres objektene ved ikonene på arket og centikubene. Videre bruker elevene muntlig språk, konkreter og symboler som representasjoner. Elevenes måte å telle på påvirkes av hvilken representasjon de velger å benytte. For noen elever kan kanskje en type representasjon oppleves abstrakt som for noen andre oppleves forståelig. Derfor tror jeg det er essensielt at elevene møter ulike representasjoner slik at de får innsikt i at et begrep eller et tallsymbol kan representeres på ulike måter. Dersom elevene synes en representasjonsmåte er utfordrende, vil det være elementært at de mestrer å oversette den informasjonen de besitter til en annen representasjon slik at de klarer å løse det matematiske problemet for eksempel. I lys av Lesh og Doerr (2003), er det som sagt nødvendig at elevene finner alternative måter å konvertere opplysningene slik at de får til å løse det gitte matematiske problemet med en kjent representasjon.

5.4 Konkreter

I kapittel 4.5 fikk elevene i oppgave å dele inn de 20 centikubene i mindre bunker, hvor hver bunke skulle inneholde like mange klosser. Elevene arbeidet med kjente konkreter i form av centikuber. Ifølge Gersten et al. (2009) kan konkreter være til hjelp for å forstå sammenhengen mellom representasjonen og det matematiske begrepet. Elevene flyttet og grupperte klossene. I den første transkripsjonen kommer det tydeligere frem at elevene forstod instruksjonene som ble gitt av meg, ettersom elevene klarte å telle og flytte klossene slik at de ble fordelt i bunker med like mange i hver. Dette funnet samsvarer i stor grad med funnene til Andrews og Sayers (2015), om aspektet forståelse av ulike representasjoner av tall som en del av grunnleggende tallforståelse. Forfatterne legger vekt på elevenes forståelse av at tall kan deles opp i mengder, nemlig en representasjon av tallet. I denne studien ble den totale mengden delt inn i 4 bunker med 5 klosser i hver eller 5 bunker med 4 klosser i hver. Gjennom å telle uttrykker elevene hvor mange bunker de har og hvor mange de består av. I lys av Griffin (2004), kan det være at elevene her har oppfattet at tallene representerer en mengde.

Selv om noen av elevene forstod meg, viste denne studien også til det motsatte. Det andre utdraget under 4.5 viser at elevene deler inn klossene i mindre bunker. Derimot inneholdt ikke bunkene like mange klosser, slik jeg la vekt på i instruksjonene som ble gitt. Elevene lager for eksempel tre bunker med seks klosser i hver og en bunke med de to resterende. En mulig forklaring til det som oppstår er at elevene ikke forstod instruksjonene jeg ga og hvordan de skulle bruke konkretene for å løse situasjonen. Det kommer tydelig fram av transkripsjonen at ikke alle elevene forstår poenget med å dele inn bunken med klosser i like store deler. Kanskje forstår de ikke begrepsbruken eller er kjent med den måten å jobbe med konkretene på. Det er essensielt at elevene er kjent med bruken av konkretiseringsmaterialet slik at de har et forhold til dem. Elevene var kjent med centikuber og jeg visste at de hadde arbeidet med de før. Derimot er det vesentlig at jeg som lærer må tenke over hvordan elevene bruker konkretene. Kilpatrick et al. (2001) skriver at konkretene kan støtte elevene når de kommuniserer med andre. I denne studien har det vist seg at noen brukte centikubene som støtte, samtidig som at konkretene heller ble en begrensning for andre. Før elevene tar i bruk konkretene er det essensielt at læreren tenker over hvordan elevene kan bruke de (Kilpatrick et al., 2001). Selv om jeg hadde tenkt at centikubene skulle hjelpe elevene med å se at begrepet «tjue» kunne deles inn på ulike måter, er man ikke garantert at elevene forstår det jeg prøvde å kommunisere. Utdraget viser tydelig at konkretene gjenspeiler matematikken. Derfor er det vesentlig å tenke over at det ikke er gjenstandene i seg selv som er hovedpoenget, men den matematiske ideen konkretene representerer som skal være i fokus (Steinbring, 2006).

5.5 Perspektivering

Formålet med denne studien har vært å få innsikt i noen førsteklasseelevers tallforståelse og se hvordan bruken av representasjoner påvirker tallforståelsen som kommer til syne. Ved å arbeide med telleaktiviteter har ulike aspekt ved tallforståelse kommet til syne. Denne studien kan bidra i forskningsfeltet samt for andre lærere. Jeg mener at tallforståelse vil utgjøre en sentral del av matematikkfaget ettersom tall og tallenes betydning vil være viktig for elevene både i skolen og i det daglige. Resultatene i denne studien gir indikasjoner på viktigheten av elevenes tallforståelse og at elevene har kjennskap til forskjellige representasjoner slik at de mestrer å transformere mellom dem. Det at elevene, i denne studien, er mest trygge på behandlinger innen samme representasjon kan vise til en manglende dyp forståelse av det matematiske objektet. Innenfor forskningsfeltet og for andre lærere vil resultatene gi indikasjoner på viktigheten av situasjoner hvor elevene får utforske og samtale om betydningen av tallene i arbeid med ulike representasjoner. Poenget med å jobbe med tallforståelsen gjennom ulike representasjoner er at språket kun er én måte elevene uttrykker seg på. Når elevene kommuniserer i matematikkfaget, benytter de seg av ulike representasjoner. Ofte er det nødvendig med flere representasjoner for å representere et matematisk objekt (Duval, 2006). Slik at elevene kan se sammenhengen mellom dem. Ifølge Duval (2006) er det nødvendig at transformasjonene også forekommer som omdannelser, for at de skal få en dypere forståelse av det matematiske objektet. Årsaken er at i omdannelser må det matematiske objektet gjenkjennes i en annen representasjon. Det å gi elevene muligheten til å benytte seg av ulike representasjoner vil trolig over tid støtte elevenes forståelse for abstrakte symboler, slik som tallsymboler. Her kan fysiske konkreter og abstrakte konkreter være en inngang. Bruken av konkreter kan være essensiell, da det viser seg at elevene letter uttrykker seg med hjelp av dem.

5.6 Vurdering av studiens kvalitet

Her vil jeg vurdere kvaliteten av studien som er gjennomført. For denne studien bruker jeg Gubas (1981) fire kriterier for å vurdere kvaliteten av kvalitative studier. Disse er troverdighet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet.

Troverdighet er det første kriteriet, og styrkes ved at forskningen foregår på situasjoner som er naturalistiske. I denne studien forsøkte jeg etter beste evne at datainnsamlingen skulle oppleves naturlig. Som sagt var gjennomføringen av datainnsamlingen en del av stasjonsarbeid. Noe elevene er vant til. I gjennomføringen av datainnsamlingen var både jeg og medstudenten som hjalp med filmingen kjent for elevene. For noen opplevdes dette trolig ikke naturlig, i og med at det er deres kontaktlærer som til vanlig har ansvar. Dette er en svakhet ved studien. Til tross for at vi var kjent for elevene, kan en løsning ha vært at en kjent lærer gjennomførte aktivitetene og jeg som forsker ikke hadde hatt en like deltakende rolle. Det å gjennomføre deltakende observasjon gjorde at jeg hadde to roller underveis i datainnsamlingen. Jeg var både forsker og lærer, noe som kan være utfordrende med tanke på at jeg observerte og noterte samtidig som jeg stilte spørsmål og kom med instruksjonene i forbindelse med telleaktivitetene elevene skulle gjennomføre.

Videre ble elevene delt inn i grupper og stasjonen ble holdt på et grupperom de ellers bruker i undervisningssammenheng. I tillegg gjennomførte alle elevene i klassen telleaktivitetene. De som ikke samtykket, var ikke en del av datamaterialet. Årsaken var at elevene ikke gikk glipp av undervisning eller ble tatt ut av den ordinære undervisningen. Det at alle skulle gjennomføre var et valg slik at situasjonen skulle oppleves naturalistisk. Videokameraet medførte derimot at situasjonen føltes mindre naturlig. Noen av elevene ble veldig opphengt i videokameraet og forstyrret underveis. Selv om jeg forsøkte å ufarliggjøre kameraet og fortalte om hensikten med bruken før vi startet, forstår jeg at videokameraet kan ha påvirket elevene. Ettersom oppgavene gikk ut på at elevene skulle telle i ulike aktiviteter så jeg det som hensiktsmessig å foreta videoopptak av gjennomføringen. Dersom jeg kun skulle hatt observasjonssnotater eller lydopptak av elevene hadde datamaterialet trolig ikke vært like detaljert og interessant nok å analysere. Hadde jeg tatt vekk videoopptak måtte jeg ha endret formålet med studien og omformet aktivitetene elevene gjennomførte.

Metodetriangulering er også en sentral faktor for troverdigheten (Guba, 1981; Postholm & Jacobsen, 2018). Se kapittel 3.1.3 hvor jeg beskriver styrken ved triangulering. For denne studien ga triangulering et rikere datamateriale, da observasjonssnotater, skriftlig elevarbeid og transkripsjoner støttet hverandre. Med et dekkende bilde av sammenhengen mellom representasjoner og telling, gir triangulering større sannsynlighet for at analysen og funnene stemmer. Gjennom analysen har jeg fått resultat som stemmer overens med teori og forskning jeg har presentert. Noe som styrker troverdigheten til studien.

For *overførbarheten* i studien er det nødvendig med tykke beskrivelser slik at leserne kan vurdere om det er sannsynlig at funnene kan forekomme på andre situasjoner. I dette tilfellet har jeg gitt grundige beskrivelser av konteksten rundt studien. Telleaktivitetene som ble gjennomført og datainnsamlingsprosessen ble presentert, slik at andre forskere kan vurdere om funnene kan overføres til andre kontekster. Selv om studien baseres på generaliseringer gjort av meg som forsker av innsamlet datamateriale, er det mulig at det kan være vanskelig å anvende forskningen på andre situasjoner. Likevel baseres funnene på min forståelse av situasjonen med utgangspunkt i relevant teori. Ettersom vurderingene tar utgangspunkt i teori mener jeg at studien er overførbar til andre kontekster. Ettersom denne studien baseres på generaliseringer jeg har gjort av innsamlet datamateriale, kan det være utfordrende å si at resultatene er gjeldende for alle førsteklassinger i matematikkfaget. Dette er en begrensning for studien. Likevel kan andre lærere eller forskere bruke funnene med tanke på sin egen klasse eller lignende. For noen kan resultatene i studien være representativt for noen av elevene i sin klasse. Hensikten med studien gikk ikke ut på å si om sammenhengen mellom representasjoner og tallforståelse var gjeldende for alle, men innsikt i noens. Det kan bety at funnene i denne studien kan være en indikator på betydningen av representasjoner i arbeid med telling.

Underveis i studien har jeg gjort vurderinger for å styrke *påliteligheten.* I analysen presenteres utdrag fra datamaterialet som illustrer funnene jeg har gjort. Både funn fra transkripsjoner, observasjonssnotater og utdrag fra det skriftlige elevarbeidet ble tatt med for å eksemplifisere tolkningene som ble gjort. For øvrig har jeg presentert både analysemetode og datainnsamlingsmetodene detaljert for å gjøre det mulig at andre forskere kan gjennomføre den samme studien på deltakerne. Likevel kan det være at resultatene blir noe annerledes, ettersom det kan være utfordrende å gi en såpass detaljert beskrivelse av gjennomføringen slik at forskere gjør akkurat likt. Trolig kan andre forskere tenke annerledes enn meg.

For *bekreftbarheten* i denne studien har det vært sentralt at resultatene har kommet fra deltakerne og konteksten rundt, og ikke kun fra mine subjektive meninger. På den ene siden kan dette være utfordrende ettersom møtet mellom meg som forsker, deltakere og forskningsfeltet utartes forskjellig sammenlignet med en annen forsker innen feltet. På den andre siden har det vært viktig å være nøytral slik at mine tolkninger av funnene baseres på teorien. I likhet med troverdigheten, kan triangulering også medføre at samme studie ville gitt like resultater på nytt igjen.

6 Avslutning

Elevene har i denne studien arbeidet med ulike representasjoner for tall i arbeidet med forskjellige telleaktiviteter. Med utgangspunkt i centikubene og arkene med hjerter og stjerner har elevene uttrykt seg om de matematiske objektene i samhandling med andre. Slik har elevene fått innblikk i medelevenes telleprosesser og deres forståelser av tallene. Med det naturlig, muntlige språket som representasjon har elevene kommunisert og utforsket tallordenes betydning. I arbeidet med tellingen er det sentralt at elevene viser forståelse for å telle et objekt. Det vil si at for hvert objekt som telles, blir tilhørende tallord gitt i riktig rekkefølge. I denne studien har dette kommet til syne ved at elevene har vist forståelse for systematisk telling, ved å telle med tallrekka opp til 20 og angi hvor mange objekt i en mengde. For å kunne si hvor mange klosser eller figurer, har de fleste av elevene brukt konkretene aktivt med en – til – en – korrespondanse. Her har elevene identifisert og telt hvert objekt og tildelt det matematiske objektet riktig verdi.

Ifølge Gersten et al. (2009) kan elevenes forståelse for tall og tallsymboler øke, når elevene arbeider med ulike representasjoner og sammenhengen mellom dem. For å gi mening til de matematiske objektene, ble ikonisk og ikke-ikonisk, symbolsk og naturlig språk som representasjonssystem kategorisert i analyseprosessen. Bruk av semiotiske representasjoner gir tilgang på matematiske objekt (Duval, 2006). Når elevene bruker ulike representasjoner, tror jeg at tellingen kan føles mer meningsfull og konkret. Videre ser det ut til at tellingen ved forskjellige representasjoner hjelper elevene med å visualisere tallene og tallrekka. Elevene var mer nøyaktig i tellingen. Fuchs et al. (2021) viser til at konkretene gjør matematikken mer tilgjengelig og synlig i og med at elevene fysisk modellerer med klossene. I motsetning kom det også til syne i denne studien at bruk av representasjoner kan være en begrensning for tellingen. Om man sammenligner tellingen av centikubene som representasjon for det matematiske objektet med ikonene på arket som representasjon ser det ut til at elevene lettere er i stand til å ha oversikt og telle centikubene. Her kunne elevene skyve, peke og systematisere konkretene underveis mens de telte mengden. På den andre siden var elevene nødt til å starte telleprosessen flere ganger da de telte ikonene. Her var det ikke mulig å flytte og skyve slik som de gjorde med centikubene. Det kan også være at elevene ikke forstod sammenhengen mellom tallordene og objektene de telte.

Med andre ord er det vesentlig at man som lærer er kjent med og tenker over hvordan elevene bruker representasjonene. Slik at de nettopp «noe som står for noe annet», i dette tilfellet det matematiske objektet slik Duval (2006) beskriver. I all matematisk aktivitet er det nødvendig med semiotiske representasjonssystem ettersom en representasjon erstatter en annen (Duval, 2006). Dette betyr at det er essensielt at elevene er kjent med ulike representasjoner slik at de kan brukes for å styrke deres tallforståelse. Tallforståelse utgjør tross alt en vesentlig del av undervisningen i matematikkfaget i barneskolen. I likhet med telling som er en grunnleggende handling barna lærer før de begynner på skolen.

Underveis i arbeidet med studien har jeg fått innsikt i viktigheten av tallforståelse som en del av undervisningen for elevene, allerede fra det første skoleåret. Denne studien viste mest transformasjoner innad i et representasjonssystem, altså i form av behandlinger. Ifølge Duval (2006) er det nødvendig at transformasjonene forekommer som omdannelser, for at de skal få en dypere forståelse av det matematiske objektet. Årsaken er at i omdannelser må det matematiske objektet gjenkjennes i en annen representasjon. Jeg tror at læreren bør være bevisst på dette slik at elevene får kjennskap til matematiske objekt gjennom ulike representasjoner. Selv om elever synes at transformasjoner som omdannelse kan være utfordrende er dette noe man likevel bør arbeide mer med. Imidlertid viser analysen at det forekom flere omdannelser fra et representasjonssystem til et annet. For eksempel da Alma telte ikonene på arket ved å telle de muntlig og skrive ned tallsymbolet som representerte tallordet. Sett bort i fra at ett av tallsymbolene ble nedskrevet feil, var transformasjonen vellykket. Totalt sett forekom det derimot flest behandlinger.

Selv om resultatene fra min studie kun gjenspeiler 12 elevers arbeid med telling, kan mine funn være til hjelp og inspirasjon for videre forskning innenfor tematikkene semiotiske representasjoner og tallforståelse. Funnene kan være relevante for andre matematikklærere eller andre innen feltet som også er interesserte i å få innsikt i elevers tallforståelse og bruk av representasjoner. Triangulering ga et rikere datamateriale og dermed et dekkende bilde av sammenhengen mellom representasjoner og telling. For videre forskning kunne det derfor ha vært interessant at læreren har lagt opp til andre aktiviteter med utgangspunkt i tall og telling, hvor elevene i enda større grad er avhengig av å transformere mellom ulike semiotiske representasjonssystem. Slik at de får en dypere forståelse for det gitte matematiske objektet og hvor de blir utfordret til å være oppmerksomme på sammenhengen mellom representasjonene. Til tross for at tall og tallforståelse er det mest grunnleggende i undervisningen i barnetrinnet, viser TIMSS-studiene som sagt at elever presterer svakt innenfor området (Bergem, 2016, s. 39). Med andre ord er arbeid med tall og telling dermed særdeles viktig i begynneropplæringen i faget.

Referanser

Andrews, P. & Sayers, J. (2015). Identifying Opportunities for Grade One Children to Acquire Foundational Number Sense: Developing a Framework for Cross Cultural Classroom Analyses. *Early Childhood Education Journal*, *43*(4), 257-267. https://doi.org/10.1007/s10643-014-0653-6

Anghileri, J. (2006). *Teaching Number Sense* (2. utg.). Continuum.

Angrosino, M. V. & Pérez, K. A. M. (2000). Rethinking Observation: From Method to Context. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *Handbook of Qualitative Research* (2. utg., s. 673-702). Sage.

Berch, D. (2005). Making sense of number sense. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333–339.

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultat i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 22-43). Universitetsforlaget.

Björklund, C. & Palmér, H. (2022). Teaching toddlers the meaning of numbers – connecting modes of mathematical representations in book reading. *Educational Studies in Mathematics, 110*(3), 525-544. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10147-3

Björklund, C. & Reis, M. (2020). Preschoolers´ Ways of Using Fingers in Numerical Reasoning. I M. Carlsen, I. Erfjord & P. S. Hundeland (Red.), *Mathematics Education in Early Years: Results from the P0EM4 Conference, 2018* (s. 93-108). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5

Clark, T., Foster, L., Bryman, A., & Sloan, L. (2021). *Bryman's social research methods* (6. utg.). Oxford University Press.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2. utg.). Routledge.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitive inquiry & research design: Choosing among five approaches* (3. utg.). Sage.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* (5. utg.). NESH.

Duval, R. A. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educ Stud Math, 61*, 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in cognitive sciences, 8*(7), 307-314. https://doi.org/10.10.16/j.tics.2004.05.002

Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B.

& Morgan, S. (2021). *Assisting Students Struggling with Mathematics:Intervention in the Elementary Grades* (WWC 2021006). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance (NCEE), Institute of Education Sciences, U.S. Departement of Education.

Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R. & Witzel, B. (2009). *Assisting Students Struggling with Mathematics: Response to Intervention (RtI) for Elementary and Middle Schools.* (NCEE 2009-4060). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Departement of Education.

Goldin, G. (1997). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*, 40-62. https://doi.org/10.2307/749946

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational communication and technology journal, 29*(2), 75-91.

Griffin, S. (2004). Building number sense with Number Worlds: a mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly, 19*(1), 173-180. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.012

Grønmo, L. S., Hole, A. & Borge, I. C. (2017). Oppsummering og drøfting av hovedfunn. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken: En nøkkel til å lykkes i realfag: Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier* (s. 257-269). Cappelen Damm Akademisk.

Howell, S., & Kemp, C. (2006). An international perspective of early number sense: Identifying components predictive of difficulties in early mathematics achievement. *Australian Journal of Learning Disabilities, 11*(4), 197–207.

Ivrendi, A. (2011). Influence of Self-Regulation on the Development of Children´s Number Sense. *Early Childhood Education Journal, 39*, 239-247. https://doi.org/10.1007/s10643-011-0462-0

Johnsen-Høines, M. (2020). *Begynneropplæringen: Matematikkdidaktikk – barnetrinnet.* Caspar Forlag.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Putt, I. J., Hill, K. M., Mogill, A. T., Rich, B. S. & van Zoest, L. R. (1996). Multidigit Number Sense: A Framework for Instruction and Assessment. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 310-336

Jordan, N. C. Glutting, J. & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grade. *Learning and individual differences, 20*(2), 82-88. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.07.004

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Adademy Press.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1. – 10. trinn (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Larsen, A. K. (2020). *En enklere metode. Veiledning i samfunnsvitenskapelig forskningsmetode* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. I R. Lesh & H. M. Doerr (Red.), *Beyond Constructivism: Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (s. 3-33). Routledge.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*, 457-467. https://doi.org/10.1007.BF02655854

Levine, S, C., Suriyakham, L. W., Rowe, M. L., Huttenlocher, J., & Gunderson, E. A. (2010). What counts in the development of young children´s number knowledge? *Developmental Psychology, 46*(5), 1309-1319.

McIntosh, A., Reys, B. & Reys, R. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8.

Morrissey, K., Hallett, D., Wynes, R., Kang, J. & Han, M. (2018). Finger-counting habits, not finger movements, predict simple aritmetic problem solving. *Psychological research, 84*(1), 140-151.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm Akademisk.

Purpura, D., & Lonigan, C. (2013). Informal numeracy skills: The structure and relations among numbering, relations, and arithmetic operations in preschool. *American Educational Research Journal, 50*(1), 178–209.

Shumway, J. F. (2011). *Number sense routines: Building Numerical Literacy Every Day in Grades K-3.* Stenhouse Publishers.

SIKT. (2022). *Hva er en personopplysning?* Hentet 8. mars 2023 fra https://sikt.no/hva-er-personopplysninger

Solem, I. H., Alseth, B. & Nordberg, G. (2018). *Tall og tanke 1: Matematikkundervisning på 1. til 4. trinn.* Gyldendal.

Steinbring, H. (1998). Elements of Epistemological Knowledge for Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*, 157-189. https://doi.org/10.1023/A:1009984621792

Steinbring, H. (2005). Do mathematical symbols serve to describe or construct «reality»?. I M. H. Hoffmann, J. Lenhard & Seeger, F. (Red.), *Activity and Sign* (s. 91-104). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24270-8_9

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological Perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 133-162. DOI: 10.1007/s10649-006-5892-z

Svingen, O. E. L. (2018). *Representasjoner i matematikk*. NTNU Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/publikasjoner/representasjoner-i-matematikk

Van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educ Stud Math, 74*, 23-37. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9225-x

Webb, D. C., Boswinkel, N. & Dekker, T. (2008). Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. *Mathematical Teaching in the Middle School, 14*(2), 110-113

Yang, D. C. & Li, M. N. (2008). An investigation of 3rd grade Taiwanese students' performance in number sense. *Educational Studies*, *34*(5), 443-455. https://doi.org/10.1080/03055690802288494

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv med samtykkeerklæring

Vedlegg 2: Transkripsjonskoder

Vedlegg 3: Aktivitet 2

Vedlegg 4: Aktivitet 3

Vedlegg 1: Informasjonsskriv

Vil du delta i forskningsprosjektet

Begynneropplæring i matematikk?

Dette er et spørsmål til deg og ditt barn om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på elevers tellestrategier. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg og ditt barn.

Formål
I forbindelse med mine studier ved NTNU, Institutt for lærerutdanning, skal jeg skrive en masteroppgave i matematikkdidaktikk. Formålet med prosjektet er å få en bedre forståelse for hvordan elever på 1.trinn uttrykker seg og arbeider med telling. Telling er en del av elevenes tallforståelse og gjennom dette prosjektet vil elevenes fremgangsmåter ved telling komme til syne. Den foreløpige problemstilling er «Hvilke tellestrategier bruker noen elever på 1. trinn i arbeid med addisjon?».

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, Institutt for lærerutdanning ved veileder Solveig Voktor Svinvik og student Christine Gilroy Iversen er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Jeg spør ditt barn om å være med [redacted]

Hva innebærer det for deg å delta?
Dersom du velger at ditt barn skal delta i prosjektet, innebærer det at eleven arbeider i grupper på 3 med aktiviteter knyttet til telling, rundt 15 minutter per gruppe. Underveis vil det bli naturlig å snakke med elevene om deres tellestrategier som «Hvordan telte du?». Det vil bli tatt videoopptak med lyd av elevene mens de arbeider og i samtalen underveis. Skriftlig arbeid i forbindelse med aktiviteten vil også bli samlet inn.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis dere velger å delta, kan dere når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger og innsamlede data vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke dere.

Arbeidet med oppgavene vil foregå i undervisningen til elevene. Dersom det ikke er ønskelig at barnet ditt skal delta, vil barnet få tilsvarende undervisning. De vil ikke involveres i datainnsamlingen eller i prosjektet på noen måte. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for eleven å ikke delta i prosjektet.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene fra ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Christine Gilroy Iversen med veileder ved NTNU vil ha tilgang til det anonymiserte og krypterte datamaterialet som blir innsamlet i denne studien.
- Videoopptakene vil bli transkribert rett etter datainnsamling og slettet etterpå.
- Jeg, Christine Gilroy Iversen, vil sikre at ingen uvedkommende får tilgang til personopplysningene ved at de anonymiseres og datamaterialet lagres innelåst og kryptert på NTNU sitt område.

Deltakerne i prosjektet vil bli anonymisert og vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon. Det er kun elevenes faglige besvarelser som vil publiseres. Ingen personopplysninger vil bli inkludert.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes innen desember 2023, når oppgaven er avsluttet/oppgaven blir godkjent. Alle personversopplysninger vil da bli slettet.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om barnet ditt basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for Lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS - vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om barnet, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om barnet som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om barnet
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av barnets personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- *NTNU, Institutt for Lærerutdanning* ved veileder Solveig Voktor Svinvik på e-post solveig.v.svinvik@ntnu.no eller student Christine Gilroy Iversen på e-post: chrisgiv@ntnu.no
- Vårt personvernombud: NTNU Trondheim ved personvernombud Thomas Helgesen, på e-post thomas.helgesen@ntnu.no eller på telefon: 93 07 90 38.

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Solveig Voktor Svinvik (Veileder) Christine Gilroy Iversen (Student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Begynneropplæring i matematikk*, og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til at:

- ☐ barnet deltar i videoopptak om en del av prosjektet.
- ☐ det samles inn skriftlig elevarbeid fra barnet som en del av prosjektet.

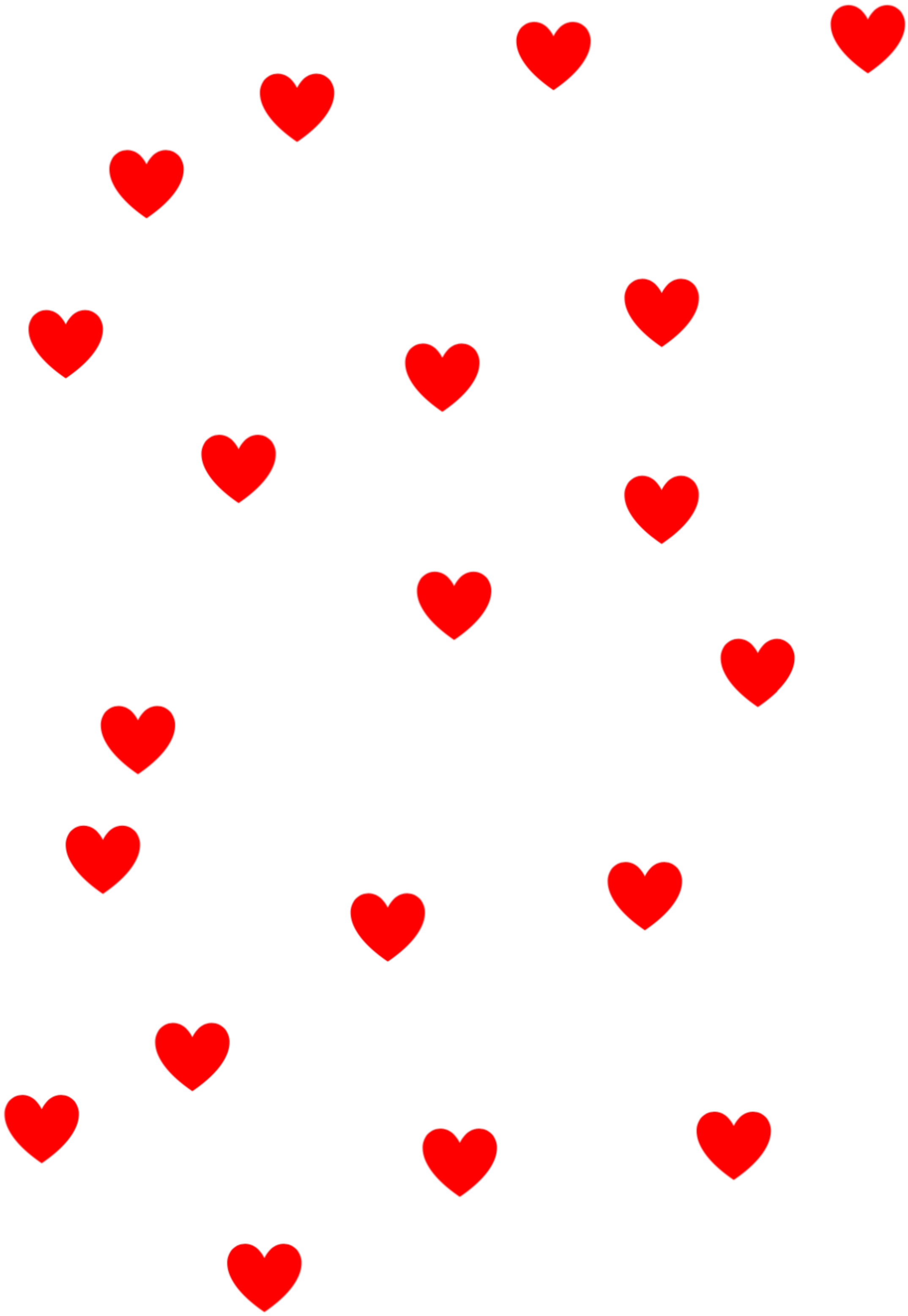
Jeg samtykker til at __________________________ (barnets fulle navn) deltar i prosjektet slik den er beskrevet over, og at barnets opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av prosjektdeltakers foresatt(e), dato)

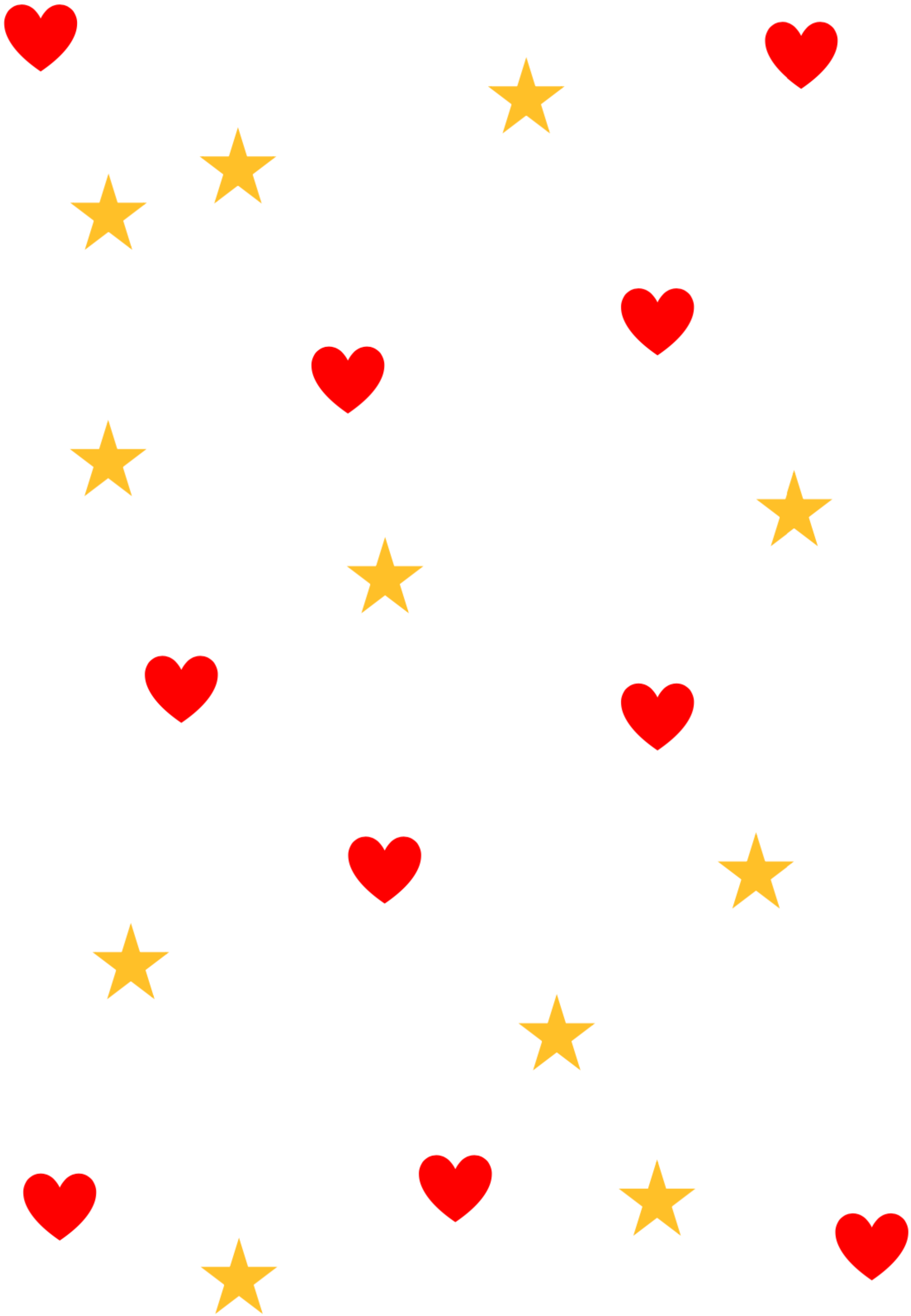
Vedlegg 2: Transkripsjonskoder

(())	markerer kroppsspråk og ikke-verbal handling
(stille i x sekund)	markerer lengre pause
(0,5 s)	liten pause
(.)	mikropause, liten pause
[]	samtidig tale
(...)	hopper over deler av ytringen når de teller tallrekka i riktig rekkefølge

Vedlegg 3: Aktivitet 2



Vedlegg 4: Aktivitet 3



NTNU

Kunnskap for en bedre verden