Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Emil Dalen Taraldsen

Et dypdykk i Riemann zetafunksjonens maksimum på 1-linjen

Innsikter fra Winston Heaps artikkel

Masteroppgave i Matematikk
Veileder: Kristian Seip
Juni 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Emil Dalen Taraldsen

Et dypdykk i Riemann zetafunksjonens maksimum på 1-linjen

Innsikter fra Winston Heaps artikkel

Masteroppgave i Matematikk
Veileder: Kristian Seip
Juni 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Et dypdykk i Riemann zetafunksjonens maksimum på 1-linjen: Innsikter fra Winston Heaps artikkel

Emil Taraldsen

1 Abstract

I denne oppgaven skal jeg se på Winston Heaps artikkel "A note on the maximum of the Riemann zeta function on the 1-line". Jeg skal forsøksvis gi en dypere og mer detaljert forklaring på hva som kobler maksimumet av Riemann zeta-funksjonen på 1-linjen sammen med antall nullpunkter i den samme funksjonen opp til en høyde t. I begynnelsen av oppgaven vil jeg gå over relevant notasjon, deretter noen grunnleggende definisjoner og teoremer innen tallteori og kompleks analyse som er nødvendig for å forstå Heaps artikkel. Videre vil jeg gå grundig gjennom Heaps artikkel og forsøke fylle inn der jeg mener det finnes mangler. Avslutningsvis vil jeg reflektere over hva Heaps artikkel egentlig forteller oss, samt gi forslag til videre arbeid innen temaet.

2 Notasjon

Bounds, sets og shifting: Jeg kommer til å konsekvent bruke uttrykkene én bound, flere bounds og at noe er bounded til fordel for de norske uttrykkene øvre- og nedre skranke. Jeg kommer også til å bruke sets og subsets i stedet for henholdsvis mengder og delmengder. Jeg kommer til å bruke det å shifte konturer om å endre den vertikale konturen av et integral i horisontal retning, da den direkte oversettelsen 'skifting' ikke er dekkende for det man egentlig gjør. Shifting er en kjent teknikk for å evaluere komplekse integral ved bruk av residy-teoremet. Bruken av disse engelske begrepene er kun en vanesak, og jeg håper ikke dette påvirker flyten i teksten.

Logaritmer: $\log x$ vil i denne oppgaven utelukkende bety den naturlige logaritmen av x i denne oppgaven. Det vil si logaritmen med grunntall e. Om jeg for eksempel skulle brukt grunntall 2 ville det blitt skrevet som $\log_2 x$. Hvis jeg skriver $\log \log x$ vil det naturligvis bety $\log(\log x)$.

Stor O- og liten o-notasjon: For en gitt funksjon $g(x)$ er $O(g(x))$ definert som

$$O(g(x)) = \{f(x) : \exists c > 0, x_0 > 0 \text{ slik at } 0 \leq f(x) \leq cg(x)\, \forall x \geq x_0\}$$

Så $O(g(x))$ er et sett med funksjoner som etter x_0 er mindre eller lik $cg(x)$.

For en gitt funksjon $g(x)$ er $o(g(x))$ definert som

$$o(g(x)) = \{f(x) : \text{ for enhver } c > 0,\ \exists x_0 > 0 \text{ slik at } 0 \leq f(x) < cg(x)\, \forall x \geq x_0\}$$

Så i motsetning til O vil dette settet med funksjoner $f(x)$ være strengt mindre enn $cg(x)$ for enhver positive c. I denne oppgaven kommer error-ledd til å brukes som et begrep om ledd med stor O- og liten o-notasjon.

En lignende sammenheng er til stede når jeg skriver

$$f(x) \ll g(x),$$

som i denne oppgaven er ekvivalent med stor O-notasjon.

Asymptotisk ekvivalens: For to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ sier vi at de er asymptotiske ekvivalente hvis $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$. Hvis $f(x)$ og $g(x)$ har denne sammenhengen skriver vi

$$f(x) \sim g(x)$$

Det er her viktig å notere seg at denne notasjonen ikke sier noe om grenseverdien til differansen mellom de to funksjonene når x går mot uendelig. Notasjonen betyr derimot at $f(x)$ approksimerer $g(x)$ i den forstand at den relative erroren går mot 0 når x går mot uendelig.

Asymptotisk ekvivalens kan også uttrykkes ved hjelp av liten o-notasjon. Dette siden $f(x) \sim g(x)$ hvis og bare hvis $f(x) = g(x)(1 + o(1))$

3 Definisjoner og teoremer

Riemann zetafunksjonen: er en funksjon som er definert ved

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

der p er alle primtallene. Det som er spesielt med zetafunksjonen er at den både er lik en Dirichlet-rekke og et uendelig produkt. Denne ekvivalensen kan bevises ganske trivielt. Vanligvis er denne funksjonen kun definert for verdier med reell del større enn 1 (da Dirichlet-rekken divergerer for $\sigma \leq 1$), men Riemann fant ut at man utføre en analytisk kontinuasjon av funksjonen slik at den kan være definert på hele det komplekse planet bortsett fra i $s = 1$. Riemann zetafunksjonen er tilknyttet mye innenfor tallteori, men det mest kjente problemet er nok Riemann-hypotesen.

Riemann-hypotesen (RH): denne hypotesen går ut på at i tillegg til de såkalte trivielle nullpunktene til zetafunksjonen som ligger på de negative partallene $s = -2, -4, -6\ldots$, så ligger alle de resterende nullpunktene på $\zeta(1/2 + it)$, altså der den reelle delen er lik $1/2$. Denne linjen kalles den kritiske linjen. Om denne hypotesen stemmer vil det ha utallige implikasjoner innen mange av matematikkens felter. For eksempel vil Riemann-hypotesen implisere et mer presist estimat av error-leddet i primtallteoremet (jeg kommer tilbake til primtallteoremet). Hvis man antar RH så får man

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x}\log x)$$

hvor $\pi(x)$ er tellefunksjonen for primtall, og $\mathrm{Li}(x)$ er det logaritmiske integralet

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log x}dx$$

Når vi ser på Heaps artikkel kommer vi til å anta at Riemann-hypotesen stemmer.

Gammafunksjonen: er en funksjon som er definert for komplekse tall ved

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

som har mange anvendelser innen tallteori.

von Mangoldt-funksjonen: er en aritmetisk funksjon, det vil altså si en funksjon med definisjonsmengde lik de positive heltallene, og verdimengde lik de komplekse tallene, som er definert som

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{hvis } n = p^k \text{ for et primtall } p \text{ og heltall } k \geq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

von Mangoldt-funksjonen har mange anvendelser innen tallteori på grunn av dens egenskaper (for eksempel at $\log n = \sum_{d|n}\Lambda(d)$), men i denne oppgaven er funksjonen mest relevant med tanke på dens relasjon til den logaritmiske deriverte av zetafunksjonen.

Primtallteoremet: La $\pi(x)$ være tellefunksjonen for primtall definert til å være antall primtall mindre eller lik x, for ethvert reelt tall x. Da er $x/\log x$ en god approksimasjon av $\pi(x)$ i den forstand at grenseverdien til forholdet mellom de to funksjonene går mot 1 når x går mot uendelig:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$$

Hvis vi bruker asymptotisk notasjon kan resultatet skrives som

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Jeg akter ikke å bevise primtallteoremet i denne oppgaven, men det kan bevises ved å reformulere problemet til et der vi har en tellefunksjon med glattere asymptotisk oppførsel, nærmere bestemt Chebyshev-funksjonen $\psi(x)$ som er definert som

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p$$

eller

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

hvor $\Lambda(n)$ er den ovenfor nevnte von Mangoldt-funksjonen. Primtallteoremet sin påstand er ekvivalent med påstanden om at $\lim_{x\to\infty} \psi(x)/x = 1$. Videre i beviset finner man en mer håndgripelig representasjon av Chebyshev-funksjonen ved hjelp av sammenhengen mellom den logaritmisk deriverte av Riemann zeta-funksjonen og von Mangoldt-funksjonen:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Videre kan man bruke en Mellin-transform for å komme nærmere resultatet.

Mellin-transform: En Mellin-transform er en integral-transform som på mange måter ligner på Laplace- og Fourier-transformer. Mellin-transformen av en funksjon f er

$$\varphi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx$$

og den inverse transformen er

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \varphi(s) ds$$

Denne transformen er nyttig innen tallteori av flere årsaker, men i denne oppgaven vil jeg vise at Heap bruker det faktum at Mellin-transformen av $f(x) = e^{-x}$ er Gamma-funksjonen $\Gamma(s)$, som kommer av definisjonen til $\Gamma(s)$.

Argumentprinsippet: Et kjent prinsipp innen kompleks analyse som kobler kontur-integralet av den logaritmiske deriverte av en funksjon med differansen mellom funksjonens nullpunkter og poler.

<u>Meromorfisme:</u> En meromorf funksjon er en funksjon på enten det komplekse planet $\mathbb{C}$ eller et åpent subset D av $\mathbb{C}$ som er holomorf (analytisk) på hele D med unntak av enkeltstående punkter som er funksjonens poler.

Argumentprinsippet sier at hvis $f(s)$ er en meromorf funksjon på innsiden av- og på en lukket kontur C, og $f(s)$ ikke har hverken poler eller nullpunkter på selve C så har vi at

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(s)}{f(s)}ds = N - P$$

der N er funksjonens nullpunkter inne i C, og P er dens poler inne i C. Jeg kommer ikke til å bevise argument-prinsippet i denne oppgaven, men jeg kan si at beviset er knyttet til residyer innen kompleks analyse.

Riemann-von Mangoldt-formelen: Riemann-von Mangoldt-formelen er formelen for antall nullpunkter til Riemann-zeta-funksjonen $\zeta(\sigma + it) = 0$ på den kritiske stripen i zeta-funksjonen $(0 < \sigma < 1)$ for $0 < t \leq T$. For å bevise det følgende teoremet kommer jeg til å bruke samme framgangsmåte som Kobayashi [3].

Teorem: Antall nullpunkter på den kritiske stripen i zeta-funksjonen mellom 0 og T er asymptotisk gitt ved:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e} + \frac{7}{8} + S(T) + O(\frac{1}{T})$$

Bevis: La oss se på noen identiteter tilknyttet zetafunksjonen og gammafunksjonen før vi går i gang med beviset. Funksjonen $\xi(s)$ er definert som

$$\xi(s) = g(s)\zeta(s)$$

hvor

$$g(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$$

$$g(s) = g_1(s)g_2(s), \quad g_1(s) = \frac{s(s-1)}{2}, \quad g_2(s) = \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$$

La $\eta(s) = g_2(s)\zeta(s)$. Denne er naturligvis refleksiv på samme måte som $\xi(s)$ og $g_1(s)$, så

$$\eta(1-s) = \eta(s)$$

Nå som vi har definert $\eta(s)$ kan vi gå videre med å la en rektangulær region R være slik at

$$R = \{s = \sigma + it : -\epsilon \leq \sigma \leq 1 + \epsilon, -T \leq t \leq T\}$$

hvor ϵ er et positivt tall. Dette rektangelet er grunnlaget for konturen vi nå skal bruke i argumentprinsippet for funksjonen $\eta(s)$.

$\eta(s)$ kan skrives som $\eta(s) = \xi(s)/g_1(s)$, den har 2 poler (siden konturen omslutter både $\Gamma(0)$ og $\zeta(1)$) og $2N(T)$ nullpunkter (siden vi omslutter den kritiske stripen mellom $-T$ og T i konturen vår) inne i R. Så ved argumentprinsippet har vi

$$\oint_{\partial R} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds = 4\pi i(N(T) - 1) \tag{1}$$

hvor ∂R er konturen bestående av omkretsen av R orientert mot klokken. For å forenkle ting kan vi dele opp ∂R i fire L-formede delkonturer

$$L_1 = 1+\epsilon \to 1+\epsilon+iT \to \frac{1}{2}+iT$$

$$L_2 = \frac{1}{2}+iT \to -\epsilon+iT \to -\epsilon$$

$$L_3 = -\epsilon \to -\epsilon-iT \to \frac{1}{2}-iT$$

$$L_4 = \frac{1}{2}-iT \to 1+\epsilon-iT \to 1+\epsilon$$

Siden $\eta(s)$ er refleksiv har vi at

$$\frac{\eta'(s)}{\eta(s)} = -\frac{\eta'(1-s)}{\eta(1-s)}$$

så

$$\int_{L_2} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds = -\int_{-L_1} \frac{\eta'(1-s)}{\eta(1-s)}d(1-s) = \int_{L_1} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds$$

på lignende vis får vi

$$\int_{L_3} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds = \int_{L_4} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds,$$

og derfor ender vi til slutt opp med at

$$\oint_{\partial R} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds = 2\left(\int_{L_1} + \int_{L_4}\right)\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds \tag{2}$$

Delkonturen L_4 er den samme som den reverserte delkonturen til den komplekse konjugaten til L_1, altså $L_4 = -\overline{L_1}$. Dermed har vi

$$2\left(\int_{L_1} + \int_{L_4}\right)\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds = 2\left(\int_{L_1} - \int_{\overline{L_1}}\right)\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds = 4i\Im\left\{\int_{L_1} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds\right\}$$

den siste likheten kommer av at bidraget fra de reelle delen av delkonturene vil kansellere hverandre. Så, fra 2 og 1, får vi at

$$4i\Im\left\{\int_{L_1} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}ds\right\} = 4\pi i(N(T)-1)$$

så

$$N(T) = 1 + \pi^{-1}\Im\left\{\int\limits_{L_1} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} ds\right\} \tag{3}$$

Vi kan skrive

$$\frac{\eta'(s)}{\eta(s)} = \frac{g_2'(s)}{g_2(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{\log \pi}{2} + \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{2\Gamma(\frac{s}{2})} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

ved bruk av standard derivasjonsregler. Videre kan vi derfor skrive om 3 til

$$N(T) = 1+\pi^{-1}\Im\left\{\int\limits_{L_1}\left(-\frac{\log \pi}{2}+\frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{2\Gamma(\frac{s}{2})}+\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds\right\} = 1-\frac{T}{2\pi}\log \pi+G(T)+S(T) \tag{4}$$

hvor det andre leddet kommer fra det faktum at

$$\Im\left\{\int\limits_{L_1} 1 ds\right\} = \Im\{\frac{1}{2} + iT - (1+\epsilon)\} = T,$$

det tredje leddet $G(T)$ er

$$G(T) = \pi^{-1}\Im\left\{\int\limits_{L_1} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{2\Gamma(\frac{s}{2})} ds\right\},$$

og det siste leddet $S(T)$ er

$$S(T) = \pi^{-1}\Im\left\{\int\limits_{L_1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds\right\}$$

Før vi ser på $G(T)$ mer grundig definerer vi en funksjon $\nu(t)$ til å være

$$\begin{aligned}\nu(t) &= \Im\left\{\log\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{iT}{2}\right)\right\} - \frac{t\log \pi}{2} \\ &= \frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t} + \frac{7}{5760t^3} + O(t^{-5})\end{aligned} \tag{5}$$

hvor andre linje kommer av Stirling's series-utvidelsen av logaritmen av gammafunksjonen. Størrelsesordenen av errorleddet avhenger av hvor mange ledd i rekken man velger å inkludere.

Ved hjelp av $\nu(t)$ kan vi nå evaluere det tredje leddet $G(T)$ i 4 til å være

$$\begin{aligned}G(T) &= \pi^{-1}\Im\left\{\int\limits_{L_1} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{2\Gamma(\frac{s}{2})}ds\right\} = \pi^{-1}\Im\left\{\int\limits_{L_1} \frac{d}{ds}\log\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)ds\right\} \\ &= \pi^{-1}\Im\left\{\log\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big|_{\frac{1}{2}+iT} - \log\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big|_{1+\epsilon}\right\} \\ &= \pi^{-1}\Im\{\log\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{iT}{2}\Big) - \log\Gamma\Big(\frac{1+\epsilon}{2}\Big)\} \\ &= \pi^{-1}\big(\nu(T) + \frac{T}{2}\log\pi\big)\end{aligned} \tag{6}$$

hvor den siste likheten ovenfor kommer av 5 samt det faktum at $\Gamma\Big(\frac{1+\epsilon}{2}\Big)$ er reell. Til slutt får vi at

$$\begin{aligned}N(T) &= 1 - \frac{T}{2\pi}\log\pi + \frac{1}{\pi}(\nu(T) + \frac{T}{2}\log\pi) + S(T) \\ &= 1 + \frac{1}{\pi}\nu(T) + S(T) \\ &= 1 + \frac{1}{\pi}\Big(\frac{T}{2}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}\Big) - \frac{1}{8} + S(T) + O\Big(\frac{1}{T}\Big) \\ &= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e} + \frac{7}{8} + S(T) + O\Big(\frac{1}{T}\Big)\end{aligned}$$

□

Stirlings formel: Heap bruker Stirlings formel som bounds på henholdsvis gammafunksjonen og den logaritmiske deriverte av gammafunksjonen i sin artikkel. Dette gjøres for å oppnå en mer håndterbar integrand ved et par anledninger. Beviset for Stirlings formel vi skal føre er inspirert av et notat på gammafunksjonen som Winston Heap faktisk selv skrev da han jobbet for NTNU våren 2019 i emnet Analytisk Tallteori.

Før vi ser på Stirlings formel er vi nødt til å se på et teorem som sier at en funksjon med en slags fakultet-egenskap er nødt til å være gammafunksjonen selv.

Unikhetsteorem: La F være analytisk på det høyre halvplanet $A = \{s \in \mathbb{C}\, \sigma > 0\}$. Anta $F(s+1) = sF(s)$ og at F er bounded av den kritiske stripen $1 \leq \sigma < 2$. Da er $F(s) = a\Gamma$ i A med $a = F(1)$. Altså, en slik funksjon F er nødt til å være en konstant ganger Gamma-funksjonen.

Bevis: La $f(s) = F(s) - a\Gamma(s)$. Likningen $f(s+1) = sf(s)$ Holder i A (F er slik ved antagelse, og Γ er som kjent slik, så en lineærkombinasjon vil også være slik). Dermed kan vi utvide f mesomorfisk til hele planet slik man kan gjøre for Γ. Hvis noen poler oppstår er de nødt til å ligge på de negative heltallene, som for gammafunksjonen. Siden $f(1) = 0$ ($F(0+1) = 0F(0) = 0$ ved antagelse, og $a\Gamma(0+1) = a0\Gamma(0) = 0$) har vi $\lim_{s\to 0} sf(s) = 0$, dermed har ikke f en pol ved $s = 0$ og vi kan kontinuere f analytisk til 0. Dette gir en analytisk koninuasjon av f til de negative heltallene siden $f(s+1) = sf(s)$.

$|\Gamma(s)| \leq \Gamma(\sigma)$ og dette er bounded for $1 \leq \sigma < 2$. Siden F er bounded her ved antagelse er f også det. La oss nå se på området der $0 \leq \sigma \leq 1$. Hvis $t \leq 1$ er f bounded siden den er analytisk der. Hvis $t > 1$ er f bounded der siden $f(s) = f(s+1)/s$ og f er bounded for $1 \leq \sigma < 2$. Siden $f(s)$ og $f(1-s)$ gir de samme verdiene for $0 \leq \sigma \leq 1$ har vi at $g(s) = f(s)f(1-s)$ er bounded og analytisk. Ved Liouvilles teorem (som sier at enhver bounded funksjon som er holomorf på hele det komplekse planet er nødt til å være konstant) har vi at $g(s) \equiv g(1) = 0$ og dermed $f \equiv 0$, så $F(s) = a\Gamma$. $\square$

Stirlings formel: Nå som vi har unikhetsteoremet på plass, kan vi anvende dette til å vise at

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} e^{\mu(s)}$$

for $s \in \mathbb{C}^- = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$ hvor

$$\mu(s) := -\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{s+x} dx$$

og $P_1(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$. Vi er nødt til å vise at μ er analytisk og at den innehar en passende funksjonalligning (slik at representasjonen av Γ ovenfor tilfredsstiller $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$). For å oppnå dette trenger vi et lemma som er en variant av trekantulikheten.

Lemma ('Vridd' $\triangle$-ulikhet)**:** For $s = re^{i\theta}$ og $x \geq 0$ har vi

$$|s+x| \geq (|s|+x)\cos(\theta/2) \tag{7}$$

Dette gir

$$|s+x| \geq (|s|+x)\sin(\delta/2) \tag{8}$$

når $|\theta| \leq \pi - \delta$, $0 < \delta \leq \pi$ (siden $\cos(\theta/2) \geq \sin(\delta/2)$)

Bevis: Ved å bruke at $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ og $(r+x)^2 \geq 4rx$ får vi $|s+x|^2 = r^2 + 2rx\cos\theta + x^2 = (r+x)^2 - 4rx\sin(\theta/2) \geq (r+x)^2\cos^2(\theta/2)$. $\square$

Proposisjon 1 (i Stirling): $\mu(s)$ er analytisk i $\mathbb{C}^-$.
Bevis: La $Q(x) = \frac{1}{2}(x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2)$. $Q(t)$ er den antideriverte av $-P_1(x)$ (og dermed kontinuerlig) og $0 \leq Q(x) \leq 1/8$ (dette er trivielt). Vi har

$$-\int_\alpha^\beta \frac{P_1(x)}{s+x} dx = \left.\frac{Q(x)}{s+x}\right|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \frac{Q(x)}{(s+x)^2} dx \tag{9}$$

ved delvis integrasjon for $0 < \alpha < \beta < \infty$. La nå $0 < \delta \leq \pi$ og $\epsilon > 0$. Da har vi for $x \geq 0$, $s = re^{i\theta}$ med $r > \epsilon$ og $|\theta| \leq \pi - \delta$ (ved trekantulikhets-lemmaet ovenfor) at

$$\left|\frac{Q(x)}{(s+x)^2}\right| \leq \frac{|Q(t)|}{\sin^2(\delta/2)(\epsilon+x)^2} \leq \frac{1}{8\sin^2(\delta/2)(\epsilon+x)^2}$$

Dermed er integralet

$$\int_0^\infty \frac{Q(x)}{(s+x)^2}dx \tag{10}$$

uniformt konvergent i kompakte subsets av $\mathbb{C}^-$ og definerer derfor en analytisk funksjon. Men fra 9 har vi at

$$\mu(s) = \int_0^\infty \frac{Q(x)}{(s+x)^2}dx \tag{11}$$

□

Legg merke til at ved 11 og 7, 8 har vi at

$$|\mu(s)| \leq \frac{1}{8\cos^2(\theta/2)|s|} \tag{12}$$

$$|\mu(s)| \leq \frac{1}{8\sin^2(\delta/2)|s|}$$

for $s = re^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi - \delta$, $0 < \delta \leq \pi$.

Proposisjon 2 (i Stirling): For $s \in \mathbb{C}^-$ har vi

$$\mu(s) - \mu(s+1) = \left(s + \frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{s+1}{s}\right) - 1$$

Bevis: Siden $P_1(x+1) = P_1(x)$ har vi

$$\begin{aligned}
\mu(s+1) &= -\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{(s+1)+x}dx = -\int_0^\infty \frac{P_1(x+1)}{s+x+1}dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{s+x}dx = \mu(s) - \left(-\int_0^1 \frac{x-\lfloor x\rfloor - 1/2}{s+x}dx\right) \\
&= \mu(s) + \int_0^1 \frac{x-1/2}{s+x}dx \\
&= \mu(s) + \int_0^1 \left(1 - \frac{s+1/2}{s+x}\right)dx
\end{aligned}$$

□

Teorem (Kompleks Stirlings formel): For $s \in \mathbb{C}^-$ har vi

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}s^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}e^{\mu(s)} \tag{13}$$

Bevis: Ved Proposisjon 1 (i Stirling) er funksjonen

$$F(s) = s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} e^{\mu(s)}$$

analytisk i $\mathbb{C}^-$. Dette vet vi fordi vi kan definere $s^{s-\frac{1}{2}} = e^{(s-\frac{1}{2})\log s}$, og dermed står vi igjen med produktet av tre eksponentialfunksjoner der eksponenten i samtlige er analytiske i $\mathbb{C}^-$. Ved Proposisjon 2 (i Stirling) har vi

$$F(s+1) = (s+1)^{s+1/2} e^{-s-1} e^{\mu(s)-(s+\frac{1}{2})\log(\frac{s+1}{s})+1} = s^{s+1/2} e^{-s} e^{\mu(s)} = sF(s)$$

I tillegg er $F(s)$ bounded i regionen $A = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$: $\mu(s)$ er åpenbart bounded ved 12. Ved å skrive $s = \sigma + it = |s|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ ser vi at $|s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s}| = |s|^{\sigma-1/2} e^{-\theta t} e^{-\sigma}$. Dermed, for $s \in A$ med $t \geq 2$, har vi $\sigma - 1/2 \leq 2$, $|s| \leq 2t$ og $-t\theta \leq -\pi|t|/2$. Dermed har vi i denne regionen at $|s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s}| \leq 4t^2 e^{-\pi|t|/2} e^{-1} \to 0$ når $|t| \to \infty$. Dermed er F bounded i A. Ved unikhetsteoremet må vi derfor ha

$$\Gamma(s) = a s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} e^{\mu(s)}$$

for en eller annen a. Ved å substituere denne ligningen inn i duplikasjonsformelen til gammafunksjonen $\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2^{1-2s}\pi^{1/2}\Gamma(2s)$, samt å la s være reell og å gå mot uendelig finner vi at $a = \sqrt{2\pi}$. $\square$

Korollar (Rapid decay i vertikale strips): La σ være fiksert. Da vil vi når $|t| \to \infty$ få at

$$|\Gamma(\sigma + it)| \sim \sqrt{2\pi}|t|^{\sigma-1/2} e^{-\pi|t|/2}$$

Bevis: Anta $t \geq 0$. Ved 13 og 12 har vi

$$\begin{aligned}
\log|\Gamma(\sigma+it)| &= \Re(\log(\Gamma(\sigma+it))) \\
&= \Re((\sigma+it-1/2)\log(\sigma+it) - \sigma - it) + \frac{1}{2}\log 2\pi + O(1/t) \\
&= \Re((\sigma+it-1/2)(\log(\sigma^2+t^2)/2 + i\arg(\sigma+it))) - \sigma + \frac{1}{2}\log 2\pi + O(1/t) \\
&= (\sigma-1/2)\Big(\log\Big(|t|\sqrt{1+\sigma^2/t^2}\Big)\Big) - t\arg(\sigma+it) - \sigma + \frac{1}{2}\log 2\pi + O(1/t) \\
&= (\sigma-1/2)(\log|t| + o(1)) - t(\pi/2 - \tan^{-1}(\sigma/t)) - \sigma + \frac{1}{2}\log 2\pi + o(1) \\
&= (\sigma-1/2)\log|t| - \pi t/2 + \frac{1}{2}\log 2\pi + o(1)
\end{aligned}$$

Ved en lignende framgangsmåte for $t \leq 0$ oppnår man resultatet. $\square$

Teoremet om den komplekse Stirlings formel og det ovenforliggende korollaret er det Heap bruker i artikkelen for å sette bounds på $\Gamma(\frac{1}{2}-\sigma+iy)$ og $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2}-\sigma+iy)$

4 Winston Heaps artikkel

I denne delen av oppgaven skal jeg gå gjennom Heaps artikkel steg for steg, og forsøke å klargjøre ting der jeg mener det er rom for det. Heap skal med sin artikkel som sagt vise sammenhengen mellom maksimumet av Riemann zetafunksjonen på 1-linjen ($\zeta(1+it)$) og antall nullpunkter opp til høyden t. Aller først i artikkelen tar Heap opp historien til oppførselen til zetafunksjonen på 1-linjen. Han nevner at etter gjentatt forbedring opp gjennom årene har man kommet fram til en nedre bound

$$|\zeta(1+it)| \geq e^{\gamma}(\log\log t + \log\log\log t) + O(1)$$

Når det gjelder en øvre bound kan man ved å anta Riemannhypotesen vise at man for store t har

$$\zeta(1+it) \sim \prod_{p \leq \log^2 t} \left(1 - \frac{1}{p^{1+it}}\right)^{-1} \tag{14}$$

som ved Mertens tredje teorem viser seg å bety at

$$|\zeta(1+it)| \leq 2e^{\gamma}(1+o(1))\log\log t \tag{15}$$

Mertens tredje teorem er noe jeg kommer tilbake til.

Heap sier videre at man sannsynligvis kan redusere lengden av Eulerproduktet i 14 til $\log t$ og at man som følge av det får en Konjektur (formodning) A som sier

$$\max_{t\in[1,T]} |\zeta(1+it)| \sim e^{\gamma}\log\log T$$

Videre kommer Heap inn på Riemann-von Mangoldt-formelen som jeg beviste tidligere i oppgaven. Heap går ikke selv inn på hvorfor formelen er som den er, men han fokuserer på bounds av dette error-leddet $S(t)$ i formelen. I denne forbindelse kommer han med en Konjektur B som sier at

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|S(t)|}{\log\log t} = 1/2$$

Etter Konjektur B kommer Teorem 1 i artikkelen. Dette er selve essensen i artikkelen og viser sammenhengen mellom error-leddet $S(t)$ i Riemann-von Mangoldt-formelen $N(t)$ og maksimumet av zetafunksjonen. Som en følge av dette teoremet viser det seg at Konjektur B i kombinasjon med Riemann-hypotesen impliserer at Konjektur A stemmer.

Teorem 1: Anta Riemann-hypotesen og la

$$L(t) = \max_{|u-t|\leq C\log\log t} |S(u)| \tag{16}$$

for $C > 1/\pi$. Da har vi for X som tilfredsstiller $\max(L(t)^2, \log t) = o(X)$ og for store t

$$\zeta(1+it) = (1+o(1)) \prod_{p\leq X} \left(1 - \frac{1}{p^{1+it}}\right)^{-1}$$

og mer spesifikt

$$|\zeta(1+it)| \leq e^{\gamma}(1+o(1))\log(L(t)^2+\log t)$$

hvor γ er Euler-Mascheroni-konstanten. Heap går ikke inn på det, men Euler-Mascheroni-konstanten (eller bare Euler-konstanten) er grenseverdien av differansen mellom den harmoniske rekken og $\log n$. Ved Mertens tredje Teorem kan man definere konstanten ved ligningen

$$e^{-\gamma} = \lim_{n\to\infty} \log n \prod_{p\leq n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

eller

$$e^{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \prod_{p\leq n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

Jeg kommer ikke til å gå inn på beviset for dette, men man kan anvende Stirlings formel, von Mangoldt-funksjonen og Chebyshev-funksjonen for å oppnå det ønskede resultatet. I hvert fall kan den siste ulikheten i Teorem 1 utledes slik:

$$\begin{aligned}
|\zeta(1+it)| &= (1+o(1))\prod_{p\leq X}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
&= (1+o(1))\frac{\log X}{\log X}\prod_{p\leq X}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
&\leq (1+o(1))\lim_{X\to\infty}\frac{\log X}{\log X}\prod_{p\leq X}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
&\leq (1+o(1))\lim_{X\to\infty}\frac{\log(L(t)^2+\log t)}{\log X}\prod_{p\leq X}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\
&= e^{\gamma}(1+o(1))\log(L(t)^2+\log t)
\end{aligned}$$

Før vi kan bevise Teorem 1 er Heap nødt til å ta i bruk en proposisjon, som i all hovedsak er en likning der zetafunksjonen $\zeta(s)$, error-leddet $S(t)$ i Riemann-von Mangoldt-formelen $N(t)$ og primtallene inngår.

Proposisjon 1: Anta Riemann-hypotesen. Da, uniformt for $1/2+\delta \leq \sigma \leq 9/8$ med fiksert $\delta > 0$, og $1 \leq X \leq e^{\sqrt{t}}$ for store t, har vi

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}e^{-n/X} + J_\sigma(t,X) + O(X^{-1}\log t) + O(X^{1/2-\sigma}) \qquad (17)$$

hvor

$$J_\sigma(t,X) = -iX^{1/2-\sigma}\int_{-t/2}^{t/2} X^{iy}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+iy)\Big(\log X + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}-\sigma+iy)\Big)S(t+y)dy$$

For å bevise dette anvender Heap et par lemmaer.

Lemma 1: Anta Riemann-hypotesen. For store t ikke lik ordinaten til et ikke-trivielt nullpunkt, som vil si at $\zeta(1/2+it)\neq 0$, har vi at

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}e^{-n/X} + \sum_\rho X^{\rho-s}\Gamma(\rho-s) + O(X^{-1}\log t) \tag{18}$$

uniformt for $1/2 \leq \sigma \leq 9/8$ og $1 \leq X \leq e^{\sqrt{t}}$ hvor summen $\sum_\rho$ er over alle de ikke-trivielle nullpunktene, og Von Mangoldt-funksjonen som sagt er $\Lambda(n) = \log p$ når $n = p^k$ for et primtall p og et heltall $k \geq 1$, og 0 ellers. De ikke-trivielle nullpunktene vil altså si alle $\zeta(s)$ der s er negative partall. Grunnen til at de negative partallene er nullpunkt i zeta-funksjonen er fordi at i Riemanns analytiske kontinuasjon av zetafunksjonen for $\sigma < 0$ får vi en funksjonalligning med en faktor $\sin(\frac{\pi s}{2})$ som åpenbart er lik null for alle partall. Disse ikke-trivielle nullpunktene er irrelevant i denne sammenhengen fordi, som vi snart skal se, skal vi integrere over en kontur som ikke omslutter de negative partallene, og dermed vil ikke residy-teoremet påvirkes av dem.

<u>Bevis:</u> På den ene siden har vi

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}e^{-n/X} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Gamma(z-s)\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}X^{z-s}dz \tag{19}$$

som følger fra identiteten $e^{-Y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(z)Y^{-z}dz$, $c > 0$. Denne identiteten kommer fra Mellin-transformen

$$\varphi(s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx \tag{20}$$

samt den inverse Mellin-transformen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\varphi(s)ds \tag{21}$$

Som nevnt tidligere i oppgaven kan man enkelt se ut fra definisjonen av gammafunksjonen at $\Gamma(s)$ er Mellin-transformen av funksjonen $f(x) = e^{-x}$, så identiteten følger.

For å oppnå 19 må man ta i bruk Mellin-transformen som vist ovenfor samt identiteten mellom den logaritmiske deriverte av zetafunksjonen samt Dirichletrekken som generer $\Lambda(n)$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_1^\infty\frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{22}$$

På den annen side, ved å skifte konturen til venstre på høyresiden i 19 vil vi gå over noen poler For både Γ og ζ. Heap nevner det ikke eksplisitt, men ved å bruke residy-teoremet kan vi derfor vurdere integralet, og vi finner ut at

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Gamma(z-s)\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}X^{z-s}dz \\
&= -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{\rho} X^{\rho-s}\Gamma(\rho-s) + \Gamma(1-s)X^{1-s} \\
&+ \frac{\zeta'(s-1)}{\zeta(s-1)}X^{-1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\Gamma(z-s)\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}X^{z-s}dz
\end{aligned}$$

hvor $-2+\sigma < \kappa < -1+\sigma$. Det første leddet på høyresiden kommer fra polen i $z = s$, $\Gamma(s-s) = \Gamma(0)$ som ikke er definert. Det andre leddet kommer fra alle polene i $z = \rho$, $\zeta(\rho) = 0$ der ρ som sagt er alle ikke-trivielle nullpunkter for zetafunksjonen (som vil ha reell del $1/2$ når RH antas). Det tredje leddet kommer fra polen i $z = 1$, $\zeta(1)$ som er den divergente harmoniske rekken som ikke er definert. Det fjerde leddet kommer fra polen $z = s-1$, $\Gamma(s-1-s) = \Gamma(-1)$ som ikke er definert.

Nå fra Stirlings formel har vi,

$$\Gamma(1-s)X^{1-s} \ll e^{-A|t|}X^{1/2} \leq e^{-B|t|} \tag{23}$$

vi har også

$$\frac{\zeta'(s-1)}{\zeta(s-1)}X^{-1} \ll \frac{\log t}{X} \tag{24}$$

siden $\zeta'(s)/\zeta(s) \ll \log t$ for $-1 \leq \sigma \leq 2$ gitt at $\sigma \neq 1/2$ (siden vi antar RH må vi unngå nullpunkter for å ikke dele på null). Integralet på den siste linjen i ligningen for kontur-skiftet er

$$\begin{aligned}
\ll X^{\kappa-\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|\Gamma(\kappa+iy-s)|\left|\frac{\zeta'(\kappa+iy)}{\zeta(\kappa+iy)}\right|dy &\ll X^{\kappa-\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-A|y-t|}\log(|y|+2)dy \\
&\ll X^{\kappa-\sigma}\log t
\end{aligned}$$

Bounden på Γ i integranden kommer igjen fra Stirlings formel, og bounden på den logaritmiske deriverte av zetafunksjonen kommer igjen fra $\zeta'(s)/\zeta(s) \ll \log t$. $X^{\kappa-\sigma}\log t$ er åpenbart mindre enn det forrige error-leddet (dette siden vi har at $\kappa-\sigma \in (-2,-1)$ for alle verdier av σ), så $X^{-1}\log t$ vil stå igjen som gjeldende error-ledd. □

Lemma 2: Anta Riemannhypotesen og la t være stor. Da har vi, uniformt for $1/2+\delta \leq \sigma \leq 9/8$ med fiksert $\delta > 0$, og $1 \leq X \leq e^{\sqrt{t}}$, at

$$\sum_{\rho} X^{\rho-s}\Gamma(\rho-s) = -\frac{\log(t/2\pi)}{X} + J_\sigma(t,X) + O(X^{-2}\log t) + O(X^{1/2-\sigma}),$$

hvor

$$J_\sigma(t, X) = -iX^{1/2-\sigma} \int_{-t/2}^{t/2} X^{iy}\Gamma(\tfrac{1}{2} - \sigma + iy)\Big(\log X + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2} - \sigma + iy)\Big)S(t + y)dy$$

Her vil altså Heap forenkle leddet der vi summerer over de ikke-trivielle nullpunktene til zetafunksjonen.

Bevis: Heap påpeker at man kan først se at man kan begrense summen til de ordinatene der $t/2 \leq \gamma \leq 3t/2$. Fordi halen tilfredsstiller bounden

$$\sum_{\gamma<t/2} X^{\rho-s}\Gamma(\rho - s) \ll X^{1/2-\sigma} \sum_{\gamma<t/2} e^{-A|\gamma-t|} \ll X^{1/2-\sigma}e^{-At/4} \sum_{\gamma<t/2} e^{-A|\gamma|/2} \ll X^{1/2-\sigma}e^{-At/4}$$

etter man skriver denne siste summen som et Stieltjesintegral og bruker passende bounds på $N(t)$. En lignende bound holder for summen over $\gamma > 3t/2$.

Heap skriver den gjenværende summen på formen

$$\begin{aligned}\sum_{t/2\leq\gamma\leq 3t/2} X^{\rho-s}\Gamma(\rho - s) &= X^{1/2-\sigma} \sum_{t/2\leq\gamma\leq 3t/2} X^{i(\gamma-t)}\Gamma(\tfrac{1}{2} - \sigma + i(\gamma - t)) \\ &= X^{1/2-\sigma} \int_{t/2}^{3t/2} X^{i(y-t)}\Gamma(\tfrac{1}{2} - \sigma + i(y - t))dN(y)\end{aligned}$$

På den første linjen her har Heap tatt i bruk det faktum at alle ikke-trivielle nullpunkt har reell del $\sigma = 1/2$, så vi kan skrive $X^{(1/2+i\gamma)-(\sigma+it)} = X^{1/2-\sigma}X^{i(\gamma-t)}$, og dermed sette $X^{1/2-\sigma}$ utenfor summen da den ikke avhenger av γ. Når det gjelder siste linjen her har han brukt at kan skrive summer som Stieltesintegral, det vil si at en sum over $t/2 \leq \gamma \leq 3t/2$ i dette tilfellet er ekvivalent med et integral med integrasjonsrekkevidde lik rekkevidden av summen, og i stedet for at vi integrerer over en variabel, integrerer vi over en trappefunksjon som teller antall steg i summen. Så en passende trappefunksjonen vil i dette tilfellet være Riemann-von Mangoldt-formelen $N(y)$ da den teller antall nullpunkter av zetafunksjonen opp til y. Heap fortsetter med å dekomponere $N(y)$ til en sum av dens glatte del og $S(y)$; han skriver altså $N(y) = N^*(y) + S(y)$ hvor

$$\begin{aligned}N^*(y) &= \frac{1}{\pi}\Delta \arg s(s - 1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2) \\ &= \frac{y}{2\pi} \log(y/2\pi e) + \frac{7}{8} + \frac{c}{y} + O(1/y^2), \quad y \to \infty\end{aligned}$$

og $S(y) = \frac{1}{\pi}\Delta \arg \zeta(s)$. $\Delta \arg$ betyr her endringen i argumentet langs de rette linjene fra 2 til $2 + iy$, og deretter til $1/2 + iy$. Ligningen ovenfor er egentlig den samme vi kom fram til tidligere i notatet angående Riemann-von Mangoldt-formelen. Heap har her brukt en Stirlingrekke-utvidelse på samme måte som vi gjorde for å evaluere $N^*(y)$. Heap påpeker, som oss, at $N^*(y)$ er en glatt funksjon og dens ovenforliggende asymptotiske utvidelse kan bli gitt til enhver grad av nøyaktighet med tanke på negative potenser av y.

Siden vi nå har en glatt del av funksjonen $N(y)$ betyr det at $N^*(y)$ er deriverbar og det har seg slik at hvis funksjonen vi integrerer med hensyn på i et Stieltjes-integral er deriverbar kan vi gange integranden med den deriverte av funksjonen og integrere med hensyn på variabelen av funksjonen i stedet. Altså, for deriverbare $g(x)$ har vi at

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Vi ender altså opp med et vanlig Riemann-integral, og vi kan dermed evaluere integralet til å være

$$\begin{aligned}
&X^{1/2-\sigma}\int_{t/2}^{3t/2} X^{i(y-t)}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+i(y-t))[dN^*(y)+dS(y)] \\
&= X^{1/2-\sigma}\int_{t/2}^{3t/2} X^{i(y-t)}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+i(y-t))\Big(\frac{1}{2\pi}\log(y/2\pi)+O(1/y^2)\Big)dy \\
&-X^{1/2-\sigma}\int_{t/2}^{3t/2} \frac{d}{dy}\Big(X^{i(y-t)}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+i(y-t))\Big)S(y)dy + O(X^{1/2-\sigma}e^{-Bt})
\end{aligned}$$

ved å bruke delvis integrasjon og implementering av de tidligere nevnte boundene $\Gamma(\frac{1}{2}-\sigma+iy) \ll e^{-A|y|}$ (Stirling) og $S(y) \ll \log y$. Heap betegner videre det første av disse integralene som $\mathcal{I}$ og det andre som $\mathcal{J}$. Nå,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= X^{1/2-\sigma}\int_{t/2}^{3t/2} X^{i(y-t)}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+i(y-t))\Big(\frac{1}{2\pi}\log(y/2\pi)+O(1/y^2)\Big)dy \\
&= X^{1/2-\sigma}\int_{-t/2}^{t/2} X^{iy}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+iy)\frac{1}{2\pi}\log((y+t)/2\pi)dy + O(X^{1/2-\sigma}/t^2) \\
&= \log\left(\frac{t}{2\pi}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-t/2}^{t/2} X^{1/2-\sigma+iy}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+iy)dy \\
&+ X^{1/2-\sigma}\int_{-t/2}^{t/2} X^{iy}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+iy)\frac{1}{2\pi}\log(1+y/t)dy + O(X^{1/2-\sigma}/t^2)
\end{aligned}$$

På den andre linjen her er det en substitusjon av y for $y+t$, i tillegg til at han ganger ut error-leddet og setter det utenfor integranden. Den tredje og fjerde linjen kommer av at $\log((y+t)/2\pi) = \log(\frac{t}{2\pi}(1+y/t)) = \log(\frac{t}{2\pi}) + \log(1+y/t)$. Det andre integralet her er bounded og resulterer dermed i et bidrag av $O(X^{1/2-\sigma})$, siden det er det som står foran integralet $X^{1/2-\sigma}$ som multipliseres med integralet som er bounded. Dette error-leddet dominerer forøvrig det siste errorleddet ovenfor. Ved å utvide halene til det første integralet, som kun påfører en liten error, ender Heap opp med

$$\mathcal{I} = \log\left(\frac{t}{2\pi}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{1/2-\sigma-i\infty}^{1/2-\sigma+i\infty}\Gamma(s)X^s ds + O(X^{1/2-\sigma})$$

På den vanlige måten kan vi, som Heap, shifte denne konturen langt til venstre og støte på poler ved $s = -n$ med $n \in \mathbb{N}$ da gammafunksjonen som kjent har enkle poler ved de negative heltallene. Man kan regne seg fram til residyene ved disse polene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{-n}(\Gamma) &= \lim_{z\to -n}(z-(-n))\Gamma(z) \\
&= \lim_{z\to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \\
&= \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \\
&= \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\cdots(-1)} \\
&= \frac{1}{(-1)^n(n(n-1)\cdots(1))} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

så vi ender opp med residyene $(-1)^n/n!$. Siden $\sigma > 1/2$ er det intet bidrag fra polen ved null. Videre regner Heap seg fram til at dette integralet er gitt ved $e^{-1/X} - 1$ så

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= (e^{-1/X}-1)\log(t/2\pi) + O(X^{1/2-\sigma}) \\
&= -\frac{\log(t/2\pi)}{X} + O(X^{-2}\log t) + O(X^{1/2-\sigma})
\end{aligned}$$

siden funksjonen $c(1/X^2 - 1/X)$ vil overskride $(e^{-1/X}-1)$, for en $c > 0$.

Ved å utføre logaritmisk derivasjon i $\mathcal{J}$, samt å sette i utenfor integralet ved kjerneregelen, ender Heap opp med

$$\mathcal{J} = -iX^{1/2-\sigma}\int_{t/2}^{3t/2} X^{i(y-t)}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+i(y-t))\left(\log X + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}-\sigma+i(y-t))\right)S(y)dy$$

og ved å substituere $y \mapsto y+t$ finner han at $\mathcal{J} = J_\sigma(t, X)$ og resultatet følger. $\square$

Ved å kombinere disse to lemmaene beviser altså Heap Proposisjon 1.

Nå som vi har vist hvordan Heap beviste Proposisjon 1, kan vi bruke ligningen i beviset for Teorem 1

Bevis for Teorem 1: Ved Stirlings formel som vi har vist tidligere har vi at $\Gamma(\frac{1}{2}-\sigma+iy) \ll y^{-\sigma}e^{-\frac{\pi}{2}|y|}$ og $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2}-\sigma+iy) \ll \log(2+|y|)$. Ved å anvende disse sammen med den tidligere nevnte bounden $S(t) \ll \log t$ finner Heap at

$$\begin{aligned} X^{1/2-\sigma} &\int_{C\log\log t}^{t/2} |\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma+iy)|\bigg(\log X + \bigg|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}-\sigma+iy)\bigg|\bigg)|S(t+y)|dy \\ &\ll X^{1/2-\sigma}\int_{C\log\log t}^{t/2} y^{-\sigma}e^{-\frac{\pi}{2}y}\bigg(\log X + \log(2+y)\bigg)\log t dy \\ &\ll X^{1/2-\sigma}(\log X)(\log t)\int_{C\log\log t}^{t/2} e^{-\frac{\pi}{2}y}\log(2+y)dy \\ &\ll X^{1/2-\sigma}(\log X)(\log t)^{1-\frac{\pi}{2}C}(\log\log\log t) \end{aligned}$$

Vi observerer at $y^{-\sigma} \leq 1$ i integranden, så den kan vi se bort fra. $\log X + \log(2+y)$ er mindre enn $\log X \log(2+y)$, så både $\log X$ og $\log t$ kan settes utenfor integranden da disse ikke avhenger av y. De impliserte konstantene avhenger av C. Dermed, for $C > 1/\pi$ (altså slik at den øvre bounden på $(\log t)^{1-\frac{\pi}{2}C}$ blir $\sqrt{\log t}$) og store nok t, begrenser Heap integrasjonsrekkevidden i $J_\sigma(t,X)$ til $|y| \leq C\log\log t$ på bekostning av en error av størrelsen $O(X^{1/2-\sigma}(\log X)\sqrt{\log t})$ ($\log\log\log t$ er mindre enn $\sqrt{\log t}$ for alle t så den forsvinner). Dermed får han, ved å bruke lignende bounds for å estimere dette gjenværende integralet at

$$\begin{aligned} J_\sigma(t,X) &\ll X^{1/2-\sigma}(\log X)\int_{-C\log\log t}^{C\log\log t} e^{-\frac{\pi}{2}y}\log(2+y)|S(t+y)|dy \\ &+ X^{1/2-\sigma}(\log X)\sqrt{\log t} \\ &\ll X^{1/2-\sigma}(\log X)\max_{|u-t|\leq C\log\log t}|S(u)| \\ &+ X^{1/2-\sigma}(\log X)\sqrt{\log t} \end{aligned}$$

eller

$$J_\sigma(t,X) \ll X^{1/2-\sigma}(\log X)L(t) + X^{1/2-\sigma}(\log X)\sqrt{\log t}$$

Ved å anvende dette i

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}e^{-n/X} + J_\sigma(t,X) + O(X^{-1}\log t) + O(X^{1/2-\sigma})$$

og å integrere fra $\sigma = 1$ til $\sigma = 9/8$ ender heap opp med

$$\begin{aligned} \log\zeta(1+it) = &\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+it}\log n}e^{-n/X} + O\Bigg(\Bigg|\log\zeta(9/8+it) - \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{9/8+it}\log n}e^{-n/X}\Bigg|\Bigg) \\ &+ O\bigg(\frac{L(t)}{X^{1/2}}\bigg) + O\bigg(\frac{\sqrt{\log t}}{X^{1/2}}\bigg) + O\bigg(\frac{\log t}{X}\bigg) \end{aligned} \tag{25}$$

Den antideriverte av den logaritmiske deriverte av zeta-funksjonen er åpenbart logaritmen av zeta-funksjonen. De to første errorleddene i andre rekke kommer fra bounden til $J_\sigma(t, X)$ evaluert ved $\sigma = 1$, og errorleddene evaluert ved $\sigma = 9/8$ forsvinner da de er mindre. $\log X$-faktorene i de to første errorleddene i andre rekke kan man se bort fra da $X^{1/2}$ vil være større enn $\log X$ for enhver X. $O(X^{1/2-\sigma})$ forsvinner også da det åpenbart er mindre enn de to andre errorleddene. Nå vil det vise seg hvorfor Teorem 1 legger nedre restriksjoner på X, og det er fordi hvis vi velger X slik at $\max(L(t)^2, \log t) = o(X)$ ser vi at alle errorleddene på den andre linjen ovenfor er $o(1)$.

Videre tar Heap for seg summen over primtallene. Ved å splitte summen ved $n = X$ og å anvende utvidelsen $e^{-n/X} = 1 + O(n/X)$ (som stemmer trivielt) i summen over $n \leq X$ finner han, for $\sigma \geq 1$ at

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n} e^{-n/X} = \sum_{n\leq X} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n} + O\left(\frac{1}{\log X}\right)$$

ved at han har estimert summen over $n > X$ ved hjelp av primtall-teoremet som sier at det n-te primtallet p_n tilfredsstiller $p_n \sim n \log n$. For $\sigma \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq X} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n} &= \sum_{\substack{k\geq 1, p\leq X\\ p^k\leq X}} \frac{1}{kp^{k(\sigma+it)}} = -\sum_{p\leq X} \log\left(1 - \frac{1}{p^{\sigma+it}}\right) + O\left(\sum_{\substack{k\geq 1, p\leq X\\ p^k > X}} \frac{1}{kp^{k\sigma}}\right)\\ &= -\sum_{p\leq X} \log\left(1 - \frac{1}{p^{\sigma+it}}\right) + O\left(\frac{1}{\log X}\right).\end{aligned}$$

hvor den andre likheten kommer av at $\log(p^k) = k \log p$

Fra dette og det faktum at

$$\log \zeta(9/8 + it) = -\sum_{p} \log\left(1 - \frac{1}{p^{9/8+it}}\right)$$

konkluderer Heap med at det første error-leddet i 25 er

$$\left|\sum_{p>X} \log\left(1 - \frac{1}{p^{9/8+it}}\right)\right| + O\left(\frac{1}{\log X}\right) \ll \sum_{n>X} \frac{1}{n^{9/8}} + O\left(\frac{1}{\log X}\right) = o(1)$$

når $X \to \infty$. Dem faktiske zetafunksjonen er åpenbart større enn logaritmen av zetafunksjonen, og $\zeta(9/8)$ gir en sum som konvergerer mot en konstant, så vi ender derfor opp med $o(1)$. Fra alt dette ender vi opp med

$$\log \zeta(1 + it) = -\sum_{p\leq X} \log\left(1 - \frac{1}{p^{\sigma+it}}\right) + o(1)$$

Så vi ender til slutt opp med den asymptotiske

$$\zeta(1+it) = (1+o(1)) \prod_{p \le X} \left(1 - \frac{1}{p^{1+it}}\right)^{-1}$$

gitt at $\max(L(t)^2, \log t) = o(X)$. Teorem 1 følger $\square$

Teorem 2 i Heaps artikkel ser på en bound for zetafunksjonen når $1/2 < \sigma < 1$, altså ikke på 1-linjen. Teoremet bevises på lignende vis som Teorem 1, og jeg kommer ikke til å gå inn på det.

Teorem 2: Anta Riemann-hypotesen og la $L(t)$ være gitt som tidligere. Da har vi for en fiksert $1/2 < \sigma < 1$,

$$\zeta(\sigma + it) \ll \exp(c \max(L(t)^{2-2\sigma}, (\log t)^{1-\sigma})(\log\log t)^{1-2\sigma})$$

5 Refleksjoner

Det Teorem 1 i Winston Heaps artikkel egentlig sier er at på 1-linjen, selv om man ignorerer alle primtallene som er større enn en stor X når man multipliserer sammen Euler-produktet, så vil man fortsatt oppnå en asymptotisk ekvivalens med zetafunksjonen $\zeta(1+it)$ for store t. Denne asymptotiske ekvivalensen impliserer at maksimumet av absoluttverdien av zetafunksjonen er avhengig av en faktor $\log(L(t)^2 + \log t)$. Og det utrolige er at denne funksjonen $L(t)$ er avhengig av error-leddet $S(t)$ i formelen for antall nullpunkter i zetafunksjonen $N(t)$ som er mindre eller lik t. Det jeg håper denne oppgaven oppnår er å gjøre Heaps artikkel mer fordøyelig og forståelig ved å dekonstruere artikkelen på detaljnivå.

Med tanke på videre arbeid innen dette temaet vil jeg følge opp de tingene Heap nevnte i sin artikkel. I forbindelse med beviset for Lemma 2 påpeker heap at integralet $\mathcal{I}$ er trivielt mye mindre enn $X^{1/2-\sigma} \log t$, siden $-\frac{\log(t/2\pi)}{X}$ er negativt, og vi ved antagelse har at $\sigma \le 9/8$. Hele $\mathcal{I}$ forsvinner altså til fordel for leddet $O(X^{1/2-\sigma} \log t)$. Hvis man skulle oppnådd noe kansellering for å redusert bounden kunne man evaluert integralet eksplisitt, men som Heap sier så ville det krevd gode bounds på $S(t)$, men vi har per dags dato for lite kunnskap om $S(t)$ til å gjøre dette. Det er også en mulighet for at en strengere bounding av $J_\sigma(t, X)$ ville ført til et enda mer presist maximum på 1-linjen. Et naturlig sted å gå videre ville vært å sett direkte på den øvre bounden på $S(t)$ som for eksempel Carneiro et al. [4] gjorde i 2013 da de presenterte beviser for bounden

$$|S(t)| \le (1/4 + o(1)) \frac{\log t}{\log\log t}$$

som bevises blant annet ved hjelp av den odde funksjonen $f(x) = \arctan(1/x) - x/(1+x^2)$.

6 Anerkjennelser

Jeg vil gjerne uttrykke en stor takk til min veileder, Kristian Seip, for hans uvurderlige veiledning og støtte. Jeg er også takknemlig overfor min søster og romkamerat, Aurora Dalen Taraldsen, for hennes konstante oppmuntring. Jeg vil også takke resten av min familie og mine venner.

References

[1] W. Heap (2020) *A note on the maximum of the Riemann Zeta function on the 1-line*, Bull. London Mat. Soc. 52 (2020) 1064-1071

[2] E. C. Titchmarsh (1986) *The Theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon press, Oxford, 2nd edition

[3] H. Kobayashi (2016) *No. 7: The Z(t) function, Gram's law, Riemann-von Mangoldt Formula, and Lehmer's Phenomenon*

[4] E. Carneiro, V. Chandee og M. B. Milinovich (2013) *Bounding $S(t)$ and $S_1(t)$ on the Riemann Hypothesis*, Math. Ann., Vol. 356, 3 (2013) 939-968

NTNU

Kunnskap for en bedre verden