

Maja Grostad

# Generalisering som tilnærming til algebraisk tenkning

En kvalitativ studie av seks elevers arbeid med generalisering på barnetrinnet

Masteroppgave i matematikdidaktikk, grunnskolelærerutdanning  
1.-7. trinn

Veileder: Heidi Dahl

Mai 2023



Maja Grostad

# **Generalisering som tilnærming til algebraisk tenkning**

En kvalitativ studie av seks elevers arbeid med  
generalisering på barnetrinnet

Masteroppgave i matematikdidaktikk, grunnskolelærerutdanning  
1.-7. trinn  
Veileder: Heidi Dahl  
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap  
Institutt for lærerutdanning



Kunnskap for en bedre verden



# Sammendrag

I denne kvalitative enkeltcasestudien har jeg studert hvordan elever på 5.trinn arbeider med generaliseringer i arbeid med funksjoner gjennom problemløsningsoppgaver. For å undersøke elevenes arbeid med generaliseringer formulerte jeg problemstillingen; «*Hva kjennetegner 5.trinns elevers arbeid med generalisering i møte med en problemløsningsoppgave?*». For å undersøke denne problemstillingen formulerte jeg videre to forskningsspørsmål;

1. Hvilke generaliserende handlinger kan identifiseres i elevenes arbeid?
2. Hvordan uttrykker elevene generaliseringer i sitt arbeid?

Bakgrunnen for at jeg ønsket å undersøke nettopp generalisering på barneskolen er fordi elever vil få utfordringer med utvikling av algebraiske tenkemåter senere i skoleløpet om de ikke har fått tilstrekkelig erfaring med dette på barneskolen (Carpenter et al., 2003, s. 3). Generalisering kan fungere som en tilnærming til innføring av algebra, og beskrives som veldig sentral innen algebra (Lee, 1996, s. 103), og har derfor blitt valgt som fokus i denne studien.

For å undersøke elevenes arbeid med generalisering gjennomførte jeg to oppgavebaserte gruppeintervju med tre femteklasseelever i hvert intervju. Hovedfokus for intervjuene var elevenes muntlige utsagn, og det ble derfor tatt lydopptak av intervjuene som videre ble transkribert, samt innhenting av skriftlig arbeid som kunne støtte opp elevenes forklaringer i presentasjon av datamateriale. For å analysere datamaterialet tok jeg utgangspunkt i tematisk analyse, og gjennomførte med dette systematisk koding og kategorisering av funn. I analyse av det første forskningsspørsmålet ble det tatt utgangspunkt i rammeverk av Ellis (2007, s. 235) for å undersøke elevenes generaliserende arbeidsmåter, mens det for forskningsspørsmål 2 ble tatt utgangspunkt i rammeverk over språklige former for generalisering av Steinweg et al. (2018, s. 297).

Av funnene utledet av analysen knyttet til forskningsspørsmål 1 kommer det frem at elevene blant annet tar i bruk flere generaliserende handlinger som arbeidsmåter, men at de ved flere tilfeller søker bekreftelse fra voksen, i dette tilfellet meg, og er forsiktige med å ta initiativ selv. Elevene mestrer også å uttrykke flere former for språklige generaliseringer, hvor funnene peker mot at elevene kan ha hatt varierende erfaring med å generalisere. Av funnene kan det se ut til at enkeltstående eksempler er akseptert som generalisering av fellesskapet i denne klassen, og at dette kan være årsaken til at elevene i liten grad tar initiativ til andre former for generalisering selv, men at de likevel behersker flere former for generalisering når de blir utfordret til det. Dette gir en indikasjon på at generalisering og tidlig algebra fortsatt er tema som behøver mer oppmerksomhet og prioritering i barneskolen.

# Abstract

In this qualitative single case study, I have studied how students in the 5th grade work with generalizations while working with functions through problem-solving tasks. In order to investigate the students' work with generalizations, I formulated the problem; "What characterizes 5th grade students' work with generalization in the face of a problem-solving task?". In order to investigate this issue, I further formulated two research questions;

1. Which generalizing actions can be identified in the students' work?
2. How do the students express generalizations in their work?

The reason why I wanted to investigate generalization in primary school is because pupils will have challenges with developing algebraic ways of thinking later in their schooling if they have not had sufficient experience with this in primary school (Carpenter et al., 2003, p. 3). Generalization can function as an approach to the introduction of algebra, and is described as very central within algebra (Lee, 1996, p. 103), and has therefore been chosen as the focus of this study.

In order to investigate the students' work with generalization, I conducted two task-based group interviews with three fifth-graders in each interview. The main focus of the interviews was the students' oral statements, and audio recordings were therefore made of the interviews which were further transcribed, as well as the collection of written work that could support the students' explanations in the presentation of data material. To analyze the data material, I started with thematic analysis, and with this I carried out systematic coding and categorization of findings. In the analysis of the first research question, the framework by Ellis (2007, p. 235) was used to examine the students' generalizing working methods, while for research question 2, the framework on linguistic forms of generalization by Steinweg et al. was used (2018, p. 297).

From the findings derived from the analysis related to research question 1, it emerges that the students, among other things, use several generalizing actions as ways of working, but that in several cases they seek confirmation from the adult, in this case me, and are careful about taking the initiative themselves. The pupils also manage to express several forms of linguistic generalizations, where the findings point towards the pupils may have had varying experience in generalizing. From the findings, it may appear that individual examples are accepted as generalizations by the community in this class, and that this may be the reason that the students take little initiative in other forms of generalization themselves, but that they nevertheless master several forms of generalization when they are challenged to do so. This gives an indication that generalization and early algebra are still topics that need more attention and prioritization in primary school.

# Forord

Denne studien markerer slutten på min utdanning ved institutt for lærerutdanning ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet. Årene jeg har studert ved NTNU har vært enormt lærerike og givende, og interessen for matematikdidaktikk har virkelig vokst i løpet av disse årene. Det har ført til at jeg nå i innspurten av utdanningsløpet har skrevet en masteroppgave innen matematikdidaktikk, med et tema jeg brenner for. Jeg har selv alltid vært en elev som har spurt «hvorfør» i undervisningstimene, spesielt i faget matematikk. Ordet «hvorfør» er særlig viktig i forbindelse med generalisering, som undersøkes i denne studien. Man kan på mange måter derfor si at tema for studien også gjenspeiler karaktertrekk ved meg som person.

Opgaven har også vært krevende å skrive. Det har ikke vært bare lett å sjonglere småbarnsliv, en 70% stilling som kontaktlærer og skriving av masteroppgave. Jeg ønsker derfor å takke alle som har hjulpet meg og bidratt til at denne oppgaven nå er fullført.

Takk til min veileder Heidi Dahl som har kommet med gode og konstruktive tilbakemeldinger underveis i masterskrivingen. Det har vært til stor hjelp og veldig nyttig.

Jeg ønsker også å takke venner og familie for all hjelp og støtte jeg har fått i løpet av disse 5 årene ved lærerutdanningen. En spesiell takk ønsker jeg å gi til min mamma som har hjulpet til med guttene mine, slik at det har vært mulig å kombinere barn med studier. Du har både hentet barn fra barnehage og skole når jeg har hatt lange studiedager, og hatt guttene på overnatting slik at jeg har fått ekstra tid til studiene. Det tar jeg ikke for gitt, tusen takk!

Jeg ønsker også å takke min kjære samboer og kjæreste, Anders, for all støtte og for at du har vært så tålmodig med meg i denne perioden. Takk for at du har vært min synonymordbok og for at du har hjulpet meg med formuleringer når hodet mitt har stått stille. Du har både pushet meg og inspirert meg til å gjennomføre denne oppgaven. Rett og slett, tusen takk for at du har vært her for meg!

Nå venter yrkeslivet som ferdigutdannet grunnskolelærer, noe jeg ser frem til!

Trondheim, mai 2023

Maja Grostad





# Innhold

Figurer .....	xi
Tabeller .....	xi
Forkortelser/symboler .....	xi
1 Innledning .....	1
1.1 Bakgrunn for studien og tidligere forskning .....	1
1.2 Formål med studien og forskningsspørsmål .....	2
1.3 Strukturering av oppgaven .....	3
2 Teori.....	4
2.1 Algebra.....	4
2.2 Problemløsning i algebra .....	5
2.3 Funksjoner .....	6
2.3.1 Funksjonsforhold .....	7
2.4 Generalisering .....	8
2.4.1 Generalisering og spesialisering .....	9
2.4.2 Generalisering i tidlig alder .....	10
2.5 Rammeverk over generaliserende handlinger .....	10
2.6 Rammeverk over språklige former for generalisering.....	12
3 Metode.....	14
3.1 Metodologi .....	14
3.1.1 Kvalitativ forskningsdesign.....	14
3.1.2 Enkeltcasestudie .....	15
3.2 Utvalg .....	15
3.3 Datainnsamlingsmetode .....	16
3.3.1 Intervju.....	16
3.3.2 Oppgave til datainnsamling .....	18
3.4 Analysemetode .....	20
3.4.1 Transkribering .....	20
3.4.2 Tematisk analyse .....	21
3.4.3 Tematisk analyse i min studie.....	22
3.5 Studiens troverdighet.....	24
3.5.1 Reliabilitet.....	25
3.5.2 Validitet.....	25
3.6 Etske overveielser.....	26
4 Resultat .....	28
4.1 Generaliserende handlinger .....	28

4.1.1	Relatere .....	28
4.1.2	Søke .....	30
4.1.3	Utvide .....	32
4.2	Språklige former for generalisering .....	33
4.2.1	Et eksempel .....	34
4.2.2	Flere eksempler .....	35
4.2.3	Generaliserende uttrykk med konkrete tall.....	36
4.2.4	Betingende utsagn.....	37
4.2.5	Utsagn med variabel karakter.....	37
4.2.5.1	Rekursive mønstre .....	38
4.2.5.2	Samvarierende forhold.....	39
5	Diskusjon .....	42
5.1	Elevenes generaliserende handlinger.....	42
5.2	Elevenes generaliseringer i arbeid med funksjoner .....	43
5.3	Sammenhengen mellom rammeverk benyttet i studien .....	45
5.4	Elevers generaliseringer i arbeid med problemløsningsoppgaver og implikasjoner for undervisning .....	46
6	Avsluttende ord .....	48
	Referanser .....	50
	Vedlegg .....	52

## Figurer

Figur 2.1: Eksempler på ulike måter å representere samme funksjon. ....	7
Figur 2.2: Eksempler på rekursive, korresponderende og samvarierende funksjonsforhold, inspirert av Pinto et al. (2022, s. 1186).....	8
Figur 2.3: Figurmønster basert på uttrykket $2n+1$ .....	9
Figur 3.1: Visualisering av dyrene inkludert i oppgavene .....	18
Figur 3.2: Oversikt over de ulike stegene i tematisk analyse, basert på beskrivelse tematiske analyse av Terry et al. (2017). ....	21
Figur 3.3: Visuelt bilde av hvordan analyseprosessen foregikk .....	22
Figur 4.1: Skriftlig arbeid hentet fra gruppeintervju 1, fra arbeid med oppgave 1.....	36
Figur 4.2: Visuelt eksempel på rekursivt mønster i oppgave 1 i denne studien.....	38
Figur 4.3: Skriftlig arbeid hentet fra gruppeintervju 1, fra arbeid med oppgave 1.....	39
Figur 4.4: Skriftlig arbeid hentet fra gruppeintervju 2, fra arbeid med oppgave 1.....	40

## Tabeller

Tabell 2.1: Oversikt over kjerneområder innen algebraisk tenkning, videre formulert i grener for hvordan de kommer til uttrykk, hentet fra Kaput (2008, s. 11), direkte oversettelse. ....	4
Tabell 2.2: Rammeverk over generaliserende handlinger, hentet og oversatt fra Ellis (2007, s. 235) .....	11
Tabell 2.3: Elevenes språklige former for generalisering, inspirert av Steinweg et al. (2018, s. 297). ....	12
Tabell 3.1: Mulige løsninger innenfor kontekst, oppgave 1. ....	19
Tabell 3.2: Transkripsjonskoder med beskrivelser .....	20
Tabell 3.3: Kategorier utarbeidet gjennom analyse av datamaterialet .....	23
Tabell 3.4: Visuell tabell av prosessen fra kategorier til kjerne-kategorier og videre oppdeling i underkategorier.....	24
Tabell 4.1: Funn knyttet til generaliserende handlinger .....	28
Tabell 4.2: Funn knyttet til språklige former for generalisering. ....	34

## Forkortelser/symboler

LK20	Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020
NSD	Norsk senter for forskningsdata
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study

# 1 Innledning

## 1.1 Bakgrunn for studien og tidligere forskning

Jeg har i denne studien valgt elevers arbeid med generalisering i algebra som tema, innenfor begynneropplæring. I en studie gjort for å undersøke elevers prestasjoner i fagene naturfag og matematikk, TIMSS-studien, kom det frem at elever i norsk skole har betydelige lave prestasjoner i algebra (Bergem et al., 2016, s. 41). Sammenligner man prestasjonene hos ungdomsskoleelever i Norge innenfor de ulike emneområdene, med prestasjoner fra Sverige, USA og England, så ser man at Norge er det landet som presterer dårligst i emneområdet algebra. Dette til tross for at Norge presterer jevnt i andre emneområder i forhold til noen av de andre landene som det er gjort sammenligninger med (Bergem et al., 2016, s. 36). Disse resultatene kan fortelle oss at algebra prioriteres forskjellig i de to landene, og at det sammenlignet med de andre referanselandene kan tyde på at Norsk skole ikke prioriterer algebra godt nok (Bergem et al., 2016, s. 36). Når elever på ungdomsskolen ikke har ønsket prestasjoner innen algebra, vil det være mye å forvente at elever på barneskolen har utviklet en algebraisk tenkemåte. Det vil være viktig at fokuset på algebraisk tenkning får større plass også i barneskolen.

En av utfordringene knyttet til læring og undervisning av algebra er at læring av algebra starter for sent, slik at aritmetiske tenkemåter allerede har fått for stor plass når elevene begynner å lære formell algebra (Welder, 2012, s. 262). Welder (2012, s. 262) hevder at en del konsepter fra aritmetikk kan være internalisert i elevene, og at overgangen fra aritmetikk til algebra derfor kan bli for stor. Elevene lærer å stole på strategier og regnemåter innen aritmetikk om dette er det eneste de blir introdusert for, og det er dette som altså kan gjøre overgangen til algebra utfordrende. Dette kan for eksempel være regler som at utregning skal gå fra venstre til høyre i aritmetikk, slik at det blir vanskelig å forholde seg til at parenteser skal regnes ut først til tross for at de befinner seg midt i et regnestykke, når en blir introdusert for dette gjennom algebra. Welder (2012, s. 262) foreslår at lærere på barneskolen må være mer fleksible i undervisning av matematikk, slik at de kan benytte muligheter for å eksponere elevene for algebraiske tenkemåter i arbeid med aritmetikk.

Carpenter et al. (2003, s. 3) hevder også at aritmetikken som elever arbeider med på barneskolen bør kobles opp mot algebra. Elevene vil ha utfordringer ved å lære algebra når de blir eldre hvis de ikke har blitt introdusert for algebraisk tenkning tidligere i utdanningsløpet sitt (Carpenter et al., 2003, s. 3). De understreker også at å lære seg å tenke algebraisk krever utvikling over lengre tid, og at det derfor kan være for sent å begynne å introdusere algebra når elevene allerede går på ungdomsskolen. Det betyr derimot ikke at elevene skal lære avansert algebra på barneskolen, men at de heller skal bli eksponert for en algebraisk tenkemåte om ulike matematiske objekter (Carpenter et al., 2003, s. 3). Generalisering er et kjerneelement innenfor algebra (Kaput, 2008, s. 11), og arbeid med dette kan derfor bidra til elevenes algebraiske tenkning. Jeg ønsker derfor å undersøke arbeid med generalisering hos yngre elever. Jeg vil derimot ikke legge vekt på undersøkelse av formell og gyldig generalisering hos elevene, men heller fokusere på elementer i elevenes utsagn som kan kobles opp mot kjennetegn på

generalisering. Dette for å fange opp alle deltakernes forsøk på å generalisere, og da også de som ikke har utviklet et godt matematisk språk for å kunne generalisere formelt.

## 1.2 Formål med studien og forskningsspørsmål

I etterkant av TIMSS-studien fra 2015 (Bergem et al., 2016) har det kommet et nytt kunnskapsløfte, og en kan se at det er et stort fokus på algebra og generalisering på barneskolen i kunnskapsløftet av 2020, også omtalt som LK20. Algebra er nevnt som kunnskapsområde både i den forrige læreplanen, kunnskapsløftet av 2006, og i LK20, men er i den nye læreplanen også nevnt i forbindelse med kjerneelementet generalisering. I LK20 beskrives algebra som kunnskapsområde slik; «Algebra handler om å utforske strukturer, mønstre og relasjoner og er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Generalisering var i den forrige læreplanen ikke omtalt som et eget kjerneelement, men har altså i LK20 fått større vektlegging. Generalisering som kjerneelement i LK20 beskrives slik:

Generalisering i matematikk handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer og ikke blir presentert for en ferdig løsning. Det vil si at elevene kan utforske tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved å bruke algebra og hensiktsmessige representasjoner. (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3)

Det er derfor grunnlag for å kunne tro at elever på barneskolen har fått gode muligheter for å kunne arbeide med generalisering og utvikle en algebraisk tenkemåte siden TIMSS-studien (Bergem et al., 2016). Det kan også hende at det har tatt tid for lærerne i norsk skole å sette seg inn i den nye læreplanen, og at dette skiftet i skolen ikke kan vise effekter så kort tid etter at den nye læreplanen trådte i kraft. På bakgrunn av dette skiftet og at det kan være ulikt hvor stor plass LK20 har rukket å få i de ulike skolene, vil det være interessant å undersøke hvordan elever på barneskolen arbeider med generalisering. Generalisering er som sagt et av kjerneelementene i LK20, og har med det fått stor betydning i matematikkfaget. Generalisering defineres av flere kjente teoretikere, blant annet Mason et al. (1985, s. 24) og Radford (2010, s. 42), som det å kunne oppdage sammenhenger og mønstre, utvide disse sammenhengene og mønstrene til å gjelde for flere situasjoner enn de spesifikke situasjonene de ble oppdaget i, og i noen situasjoner kunne lage generelle uttrykk for de oppdagede fenomenene.

Formålet med denne studien er altså å undersøke hvordan elever på barneskolen generaliserer, og dette ønsker jeg å undersøke gjennom elevenes arbeid med funksjoner i problemløsningsoppgaver. Dette for å se om elever på barneskolen har begynt å utvikle en algebraisk tenkemåte. Det kan igjen gi informasjon om algebra i barneskolen bør få et tydeligere fokus enn det har i dag eller om LK20 har mestret å styrke dette emneområdet. For å kunne undersøke dette har jeg valgt problemstillingen; «*Hva kjennetegner 5.trinns elevers arbeid med generalisering i møte med en problemløsningsoppgave?*». Gjennom å ha gjort meg kjent med tema og gjeldene litteratur innen området, har jeg videre formulert to forskningsspørsmål for å kunne gi et svar på denne problemstillingen;

1. Hvilke generaliserende handlinger kan identifiseres i elevenes arbeid?
2. Hvordan uttrykker elevene generaliseringer i sitt arbeid?

For å gi et svar på problemstillingen og forskningsspørsmålet har jeg benyttet gruppeintervju som metode i denne studien. I gruppeintervjuene, som vil bestå av tre

5.trinns elever i hver gruppe, har elevene fått to problemløsningsoppgaver som de skal samarbeide om. Den første oppgaven er en flersvarsoppgave med fire mulige løsninger innenfor konteksten, og lyder slik; «Martin samler på øgler (4 bein) og biller (6 bein). Til sammen har dyrene 50 bein. Hvor mange har Martin av hvert dyr?». Oppgave nummer 2 ligner litt på den første, og lyder slik; «Eva samler på øgler, biller og larver. Hun har flere larver enn øgler og biller til sammen. Totalt i samlingen er det 15 hoder og 38 bein. Hvor mange har Eva av hvert dyr?». På grunn av flere begrensninger i konteksten i oppgave nummer 2 har den i motsetning til den første oppgaven bare en mulig løsning. Under gruppeintervjuet skal elevene generalisere og forklare sine fremgangsmåter høyt for hverandre. Når elevene uttrykker generaliseringer kan en få et innblikk i hvordan de tenker, noe man ellers vil ha begrenset mulighet til (Yackel & Cobb, 1996, s. 467). For å kunne analysere disse intervjuene, med fokus på elevenes generaliserende handlinger og hvordan de uttrykker generaliseringer, har jeg tatt utgangspunkt i rammeverk av Steinweg et al. (2018, s. 297) og Ellis (2007, s. 235), og videre analysert ved hjelp av tematisk analyse.

### 1.3 Strukturering av oppgaven

I teoridelen ønsker jeg å presentere ulike begreper og rammeverk som senere vil bli brukt i analyse av datamaterialet, samt for å kunne drøfte disse funnene videre i diskusjonsdelen. I dette kapitlet er begrepet generalisering særlig relevant, ettersom generalisering er hovedfokuset for denne oppgaven.

Jeg vil også i metodekapitlet gjøre rede for forskningsdesignet som er valgt for studien, og videre begrunne metodiske valg som intervju, lydopptak, valg av oppgaver og analysemetode, som er gjort underveis i arbeidet. Hvordan analysen ble gjennomført blir også tatt opp i denne delen. Jeg vil til slutt i dette kapitlet vurdere oppgavens troverdighet og peke på etiske overveielser som er gjort.

I resultatdelen vil jeg ta for meg hvilke funn som ble utledet av den tematiske analysen, hvor funnene presenteres med utgangspunkt i de to sentrale rammeverkene som blir presentert i teoridelen. Det første forskningsspørsmålet vil bli besvart gjennom å se på elevenes generaliserende handlinger (Ellis, 2007, s. 235), og det andre forskningsspørsmål besvares gjennom å se på elevenes språklige former for generalisering (Steinweg et al., 2018, s. 297).

Diskusjonkapitlet vil ta for seg drøftinger av de ulike funnene som ble gjort knyttet til problemstillingen for studien, og hvilken betydning de har for elevenes generaliseringer og algebraiske tenkning. Videre vil jeg drøfte sammenhengen mellom de ulike rammeverkene benyttet i studien, før jeg til slutt i diskusjonsdelen ønsker jeg å drøfte gyldigheten av elevenes generaliseringer, og implikasjoner dette har for undervisning.

Avslutningsvis vil jeg oppsummere studiens resultater og hvilken betydning de har for elevenes generaliseringer og algebraiske tenkning. På grunn av studiens begrensede omfang både i tid og størrelse på oppgaven, har prioriteringer blitt gjort. Dette kan igjen føre til at oppgaven har noen begrensninger, som det vil være relevant å diskutere. Arbeid med denne oppgaven har også ført til at det har dukket opp nye spørsmål innenfor temaet, og jeg ønsker derfor å peke på ulike retninger for videre forskning på området.

## 2 Teori

I dette kapitlet vil jeg først presentere generell teori om hva algebraisk tenkning er, ettersom tidlig algebra fungerer som motivasjon for hvorfor en ønsker å undersøke elevenes generalisering i denne oppgaven. Generalisering skal undersøkes gjennom elevens arbeid med funksjoner i problemløsningsoppgaver, og jeg vil derfor også redegjøre for hvilken rolle problemløsning har i denne oppgaven. Deretter vil jeg gå nærmere inn på sentrale begrep som generalisering og funksjoner, og hvilken rolle disse begrepene har i forhold til algebraisk tenkning. Til slutt vil jeg presentere relevante rammeverk av Ellis (2007, s. 235) og Steinweg et al. (2018, s. 297), som kan bidra til å bedre forstå elevenes generaliserende handlinger og hvordan de uttrykker generaliseringer.

### 2.1 Algebra

Det finnes mange måter å definere algebra på, og en anerkjent definisjon av algebra kommer fra Kaput (2008, s. 11). Han har kommet frem til at algebraisk tenkning består av to kjerneområder. Beskrivelse av disse kjerneområdene kommer frem av tabell 2.1 nedenfor. Kaput (2008, s. 11) har videre formulert 3 nye grener for hvordan algebraisk tenkning kommer til uttrykk i klasserommet, hvor en kan finne igjen trekk fra de to kjerneområdene, og disse er også beskrevet i tabell 2.1.

<b>To kjerneområder innen algebraisk tenkning</b>		
1. Algebra som systematisk symboliserer generaliseringer av regelmessigheter og begrensninger.	2. Algebra som syntaktisk veiledet resonnement og handlinger på generaliseringer uttrykt i konvensjonelle symbolsystemer.	
<b>Tre grener hvor hvordan algebraisk tenkning kommer til uttrykk</b>		
1. Algebra som studiet av strukturer og systemer abstrahert fra beregninger og relasjoner, inkludert de som oppstår i aritmetikk (algebra som generalisert aritmetikk) og i kvantitativ resonnement.	2. Algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og leddvariasjon.	3. Algebra som anvendelse av en klynge av modelleringspråk både innenfor og utenfor matematikk.

**Tabell 2.1: Oversikt over kjerneområder innen algebraisk tenkning, videre formulert i grener for hvordan de kommer til uttrykk, hentet fra Kaput (2008, s. 11), direkte oversettelse.**

Jeg vil videre gi eksempler innenfor hver av disse grenene, slik at de enklere kan forstås. Et eksempel innen den første grenen kan være regelen for hva et partall er eller den distributive lov innenfor multiplikasjon, som for eksempel gir at  $4 \times 19 = 4 \times 10 + 4 \times 9$ . Dette kan være nokså abstrakt for yngre elever. Eksempler i den andre grenen kan bestå av beskrivelse av endring i et figurmønster eller andre oppgaver som inneholder noe form

for mønster og sammenhenger. I den siste grenen kan man finne eksempler som blant annet bruken av regnefortellinger for å generalisere et matematisk objekt, eller arbeid med problemløsningsoppgaver.

Forståelsen for algebra fra den tredje grenen kan få betydning i denne studien med tanke på at oppgavene som benyttes i datainnsamlingen er problemløsningsoppgaver. I denne definisjonen kan modellering og situasjonsbeskrivelser bli brukt for å uttrykke og lage generaliseringer (Kaput, 2008, s. 11). Det kan også være den modellerte situasjonen som blir generalisert. Det som da vektlegges er informasjonen man får gjennom situasjonene og det generelle i de betingelser som ligger i oppgaven (Kaput & Blanton, 2001, s. 347). I den andre problemløsningsoppgaven elevene skal arbeide med i denne studien kan generaliseringer for eksempel komme til syne gjennom elevenes forklaringer på hvorfor det bare vil finnes en løsning, med forbehold om at elevene faktisk oppdager at det er begrensningene i oppgaven som fører til at det kun er en løsning.

Kaput (2008, s. 11) sin definisjon av algebra i den andre grenen vil være særlig relevant når en skal se på generaliseringer knyttet til de problemløsningsoppgavene elevene skal arbeide med under datainnsamlingen. Oppgavene elevene skal arbeide med inneholder funksjonsforhold og kan blant annet løses som en likning, noe som forklares grundigere i kapittel 3.3.2. Med tanke på at tidligere forskning peker mot at elever har liten erfaring med algebra, vil det være liten sannsynlighet for at de kan mestre å løse oppgaven som en likning, men funksjoner kan også analyseres og løses ved hjelp av språket, i følge Blanton (2008, s. 31). Generalisering innenfor denne grenen kan komme til syne gjennom å på ulike vis beskrive systematiske variasjoner i sammenheng med funksjoner (Kaput, 2008, s. 13). Det kan for eksempel være hvordan det neste tallet eller en eventuell form vil være basert på systematiske variasjoner man har oppdaget (Kaput & Blanton, 2001, s. 346-347). Det ser man gjerne i arbeid med figurtall, hvor en kan bruke mønsteret i de figurene man allerede vet til å beskrive de neste figurene. Slike funksjonsbeskrivelser kan også benyttes i oppgavene elevene i denne studien skal arbeide med. Elevene skal i denne studien arbeide med ulike kombinasjoner av dyr og dyrebein, og hvis de oppdager en mulig kombinasjon kan denne benyttes til å oppdage andre kombinasjoner. Kaput & Blanton (2001, s. 347) hevder at slike beskrivelser er svært viktig for utvikling av funksjonstenkningen, som igjen vil ha stor betydning for den algebraiske forståelsen.

## 2.2 Problemløsning i algebra

En av flere tilnærminger til algebra man kan finne er blant annet problemløsningstilnærmingen (Radford, 1996, s. 110). Matematisk problemløsning innebærer en situasjon hvor eleven får mulighet til å utforske nye metoder og ideer, og hvor deres kommunikasjon, tolkning, representasjoner, kreativitet og refleksjoner har stor betydning (Palmér & Bommel, 2018, s. 1778). Begrepet problem omhandler noe som krever at en må utvikle sin kunnskap for å kunne løse problemet. Det betyr at noe som kan være et problem for en person ikke trenger å være det for noen andre, og det handler om hvilken kunnskap man allerede besitter (Hana, 2014, s. 205). I følge Radford (1996, s. 110-111) så vil en problemløsningstilnærming sammen med en generaliseringstilnærming bidra til å styrke den algebraiske forståelsen. Gjennom et epistemologisk syn på generalisering så vil ikke det kunne fungere alene innenfor algebraisk tenkning, men vil være avhengig av problemløsning. Det er behov for problemløsningstilnærmingen som et utgangspunkt for kunnskap, men også et behov for å kunne generalisere og gi en konklusjon på problemet (Radford, 1996, s. 108).



Bednarz & Janvier (1996, s. 118) hevder at problemløsningsoppgaver i algebra skiller seg fra problemløsningsoppgaver i aritmetikk ved at oppgavene fungerer som likninger gjennom ordproblem hvor man skal finne ukjente. For eksempel kan en problemløsningsoppgave i algebra se slik ut: «Petra hadde samlet 47 frukt fra sin frukthage. I hagen hadde hun epler, plommer og pærer. Petra samlet 4 ganger så mange epler som plommer, og hadde samlet 7 pærer mindre enn antall epler. Hvor mange hadde Petra av hver frukt?». I slike oppgaver vet man for eksempel hele mengden, men de ulike delene som utgjør denne mengden kan være ukjent. Det kjente i disse oppgavene er ofte informasjon om hvilken relasjon de ulike delene har til hverandre. Et eksempel på hvordan en lignende oppgave innenfor aritmetikk ville sett ut er: «Petra hadde samlet 47 frukt fra sin frukthage. I hagen hadde hun epler, plommer og pærer. Petra hadde samlet 6 plommer. Hun samlet 4 ganger så mange epler som plommer, og hadde samlet 7 pærer mindre enn antall epler. Hvor mange hadde Petra av hver frukt?». Forskjellen mellom disse eksemplene ligger i at den ene delen av det hele i det siste eksempelet er kjent, som gjør fremgangsmåten for hvordan en kan komme frem til konklusjonen mye mer synlig. Relasjonene mellom delene fungerer som gitte prosesser i det aritmetiske eksempelet, fremfor at de faktisk fungerer som relasjoner slik som i det algebraiske eksempelet.

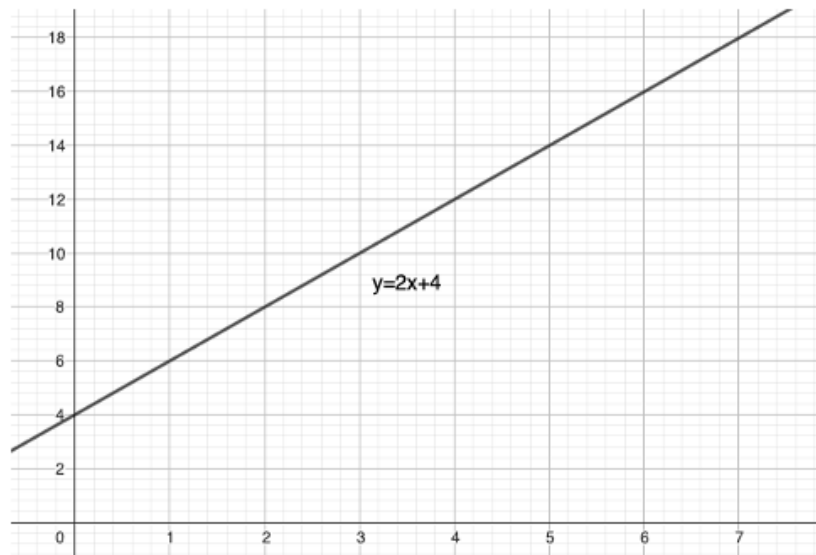
Det kan være forskjellig hva formålet med problemløsningen er. Hensikten med problemløsningen kan enten være at den benyttes for å nå andre mål, eller så er problemløsning som aktivitet og ferdighet målet i seg selv. I denne studien vil problemløsningen fungere som fartøy (Hana, 2014, s. 206) for å nå andre mål. I dette tilfellet som en måte for deltakerne i studien å arbeide med algebra og generalisering. Hvis deltakerne allerede innehar den matematiske kunnskapen som ligger i problemløsningsoppgaven vil problemløsningen derimot ikke fungere som fartøy, men heller som øvelse (Hana, 2014, s. 206).

## 2.3 Funksjoner

Oppgavene elevene blir satt til å arbeide med i min studie legger opp til blant annet funksjonstenkning, og det er derfor nødvendig å si noe om hva funksjoner er, og beskrive ulike måter elevene kan betrakte funksjonsforhold. Blanton (2008, s. 31) definerer funksjoner til å omhandle to eller flere mengder som varierer i relasjon med hverandre, og som kan representeres på flere forskjellige måter. Carraher et al. (2008, s. 265) hevder at elever i veldig tidlig alder kan arbeide med, og samtidig forstå funksjoner. De hevder også at funksjoner kan by på mange muligheter, og benyttes innenfor mange områder i matematikken. Flere har en forståelse av at funksjoner innebærer et formelt uttrykk, og det gjør det også, men funksjoner kan som sagt representeres på mange måter. Om man kun holder seg til forståelsen av at funksjoner må inneholde formelle uttrykk, vil man i følge Carraher et al. (2008, s. 266) gå glipp av elevenes forsøk på å arbeide med, og uttrykke sin forståelse for funksjoner. Arbeid med funksjoner kan nemlig komme til syne både gjennom tegninger, språk, formelle uttrykk, grafer eller tabeller. I figur 2.1 nedenfor kan en blant annet se eksempler av hvordan samme funksjon kan representeres både gjennom et formelt uttrykk, en tabell og en graf.

$$y=2x+4$$

x-verdi	y-verdi
1	6
3	10
5	14
7	18



**Figur 2.1: Eksempler på ulike måter å representere samme funksjon.**

Dette med ulike representasjoner er også noe Blanton (2008, s. 31) tar opp som muligheter for hvordan elever kan arbeide med funksjoner. Hun hevder også at elevene gjennom algebra bør arbeide med komponenter innenfor funksjonstenkning som generalisering av mønster, sette inn symboler for ukjente variabler, utforske hvordan en endring i en variabel fører til endring i andre variabler og undersøke sammenhenger i variabler og basert på det lage hypoteser (Blanton, 2008, s. 31). I denne studien ligger fokuset på elevenes generaliseringer, og det er derfor naturlig at elevenes funksjonsarbeid vil komme til syne gjennom språket, men elevene kan også benytte ark til skriving og tegning under datainnsamlingen. Når det gjelder hvordan elevene vil komme til å arbeide med funksjoner i datainnsamlingen, kommer hovedvekten til å ligge på å utforske hvordan endring i en variabel vil føre til endring i andre variabler. Blanton (2008, s. 31) påpeker at det i matematikk finnes mange relasjoner og sammenhenger mellom tall, men at relasjonene ved funksjoner er helt spesielle med tanke på hvordan mengdene korresponderer med hverandre. Hvilke funksjonsforhold en kan finne i oppgavene som er gitt i datainnsamlingen vil derfor også være av betydning.

### 2.3.1 Funksjonsforhold

Arbeid med funksjoner i tidlig algebra skjer ofte i form av at det gis kontekstuelle oppgaver hvor elevene skal undersøke forholdet og sammenhengene mellom de ulike variablene i oppgaven (Pinto et al., 2022, s. 1185). Når elevene oppdager at det finnes forhold mellom de ulike variablene, kan det være ulikt på hvilken måte elevene betrakter disse forholdene. Pinto et al. (2022, s. 1185) beskriver tre ulike kategorier innenfor funksjonsforhold, som omhandler hvilken måte elevene ser forholdet mellom variablene på. Disse kategoriene er rekursive mønstre, korrespondanse og samvariasjon. I figur 2.2 kan man se visuelle eksempler på de ulike kategoriene innenfor funksjonsforhold og hvordan en kan se ulike mønstre i samme funksjon.

x-verdi		y-verdi
1	+2	6
3	+2	10
5	+2	14
7		18

x-verdi		y-verdi
1	$2x + 4$	6
3		10
5		14
7		18

x-verdi		y-verdi
1	+2	+4
3		
5		
7		

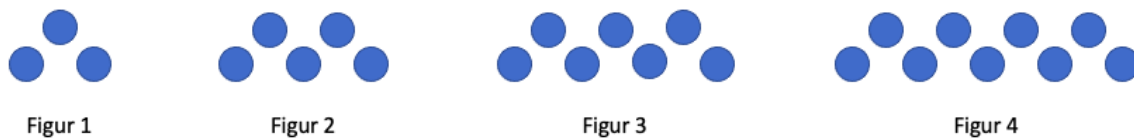
**Figur 2.2: Eksempler på rekursive, korresponderende og samvarierende funksjonsforhold, inspirert av Pinto et al. (2022, s. 1186).**

Rekursive mønstre blir ofte forbundet med at man benytter en løsning man allerede har for å finne neste løsning. Rekursive mønstre i forbindelse med funksjonsforhold handler i midlertid om at elevene fokuserer på mønstret en kan finne i en av variablene i funksjonen, uten å se på sammenhengen mellom to eller flere variabler (Pinto et al., 2022, s. 1185). Om man forestiller seg en funksjon med x- og y-verdier, kan det bety at man kun fokuserer på endringene som skjer i x-verdien i funksjonen, uten å vurdere hvilken betydning sammenhengen mellom x-verdien og y-verdien har for funksjonen. I figur 2.1 kommer dette til syne i tabell 1 ved at man for eksempel kun tar hensyn til x-verdien i tabellen og ser at den øker med 2 for hver nye løsning, uten å ta i betraktning at dette påvirker y-verdien på den måten at den øker med 4 for hver gang x-verdien øker med 2. I kategorien korrespondanse er det endringene som skjer mellom x-verdien og y-verdien for hvert spesielle tilfelle som får betydning, og ikke hvordan x-verdien og y-verdien i et samspill endrer seg for hvert nye tilfelle (Pinto et al., 2022, s. 1185). For eksempel vil man i en slik situasjon kanskje se på hva forskjellen mellom x-verdien og y-verdien er, og vurdere om en kan lage et uttrykk som beskriver denne forskjellen for hvert tilfelle. Et eksempel på dette kan vi se av figur 2.1, i tabell 2 i figuren, hvor man ikke ser på hvordan x-verdien øker med 2 og y-verdien øker med 4 for hver nye løsning, men der en heller ser på forholdet mellom variablene. I dette tilfellet kan forholdet mellom x-verdien og y-verdien beskrives med uttrykket  $2x + 4$ , og dette uttrykket vil gjelde for alle løsninger. Samvariasjon er den siste kategorien i funksjonsforhold, og om elevene ser samvarierende mønstre vil de se på hvordan hver verdi endrer seg for hvert nye tilfelle, og at det også er en sammenheng mellom dem i hvordan de endrer seg (Pinto et al., 2022, s. 1185). Som et eksempel vil en se at om x-verdien endrer seg med 2, ser en av figur 2.2 over at y-verdien alltid vil endre seg med 4, i den siste tabellen i figuren. I oppgavene som blir gitt i denne studien vil det derimot ikke være slik at både x- og y-verdi øker jevnt, fordi oppgavene ber om en kombinasjon av variablene som skal gi et bestemt resultat. Av løsningene på disse oppgavene vil man derfor se at hvis en av variablene øker, vil den andre minske, slik at resultatet holder seg stabilt. Det vil likevel være et samvarierende mønster i hvor mye den ene variabelen vil øke i forhold til hvor mye den andre vil minske.

## 2.4 Generalisering

I denne studien skal jeg undersøke hvordan elever på barnetrinnet arbeider med generalisering, og jeg ønsker derfor å redegjøre for begrepet generalisering, samt beskrive hvordan generalisering vil kunne komme til uttrykk i denne studien. Generalisering ligger i hjertet av matematikk og vi kan uttrykke generaliseringer på mange måter. Uten generalisering vil det heller ikke foreligge noen matematisk tenkning, i følge Mason (1996, s. 65). Mason (1996, s. 69) definerer generalisering som det å kunne se forbi spesifikke løsninger for å oppdage større sammenhenger og fjerne informasjon fra den spesielle situasjonen slik at den kan gjelde generelt også i andre situasjoner. Generalisering kan også være å benytte de spesielle fenomener til å se på

andre sammenhenger som kan være relatert til det spesielle. Disse sammenhengene til de spesielle fenomenene kan både være matematiske prosesser og objekter. Radford (2010, s. 42) har formulert en algebraisk definisjon av generalisering, og definerer da algebraisk generalisering som å kunne legge merke til et mønster med noen fellestrekk for en spesifikk matematisk situasjon, for deretter å legge merke til at disse fellestrekkene vil gjelde uansett i lignende matematiske situasjoner og at man kan bruke denne forståelsen til å lage et uttrykk som vil gjelde generelt for slike matematiske situasjoner.



**Figur 2.3: Figurmønster basert på uttrykket  $2n+1$ .**

Et eksempel på dette kan for eksempel være elevers arbeid med figurmønster hvor de etterhvert mestrer å lage et generelt uttrykk for mønsteret, slik som i figur 2.3. Hvis man følger Radford (2010, s. 42) sin definisjon for algebraisk generalisering kan dette bety at mønsteret for figurene kan ses som figurnummeret ganget med 2 pluss 1, for deretter å forstå at dette vil gjelde alle figurene i mønsteret og at dette kan uttrykkes som  $2n + 1$ . I både definisjonen av Mason (1996) og Radford (2010) betyr generalisering at en ser på større sammenhenger og mønster i matematiske fenomener som kan kobles til det generelle, og at det i den algebraiske definisjonen i tillegg er et krav om at generaliseringen må inneholde en formulering av et generelt uttrykk. Jeg ønsker å inkludere begge disse definisjonene når deltakernes generaliseringer skal bli analysert.

#### 2.4.1 Generalisering og spesialisering

Et begrep som har stor tilknytning til begrepet generalisering er spesialisering (Mason et al., 1985, s. 24). Også Lee (1996, s. 105) hevder at generalisering og spesialisering har stor sammenheng. I problemløsningsoppgaver fungerer prosessene spesialisering og generalisering om hverandre, hvor spesialisering er en prosess hvor man blir kjent med problemet og prøver eksempler, for deretter å teste det som kan være mulige generaliseringer. Generalisering er prosessen der noe ser ut til å fungere generelt, og man også ser hvorfor det kan fungere generelt og i hvilke tilfeller dette kan fungere generelt (Mason et al., 1985, s. 24). Disse prosessene fungerer i et samspill på den måten at spesialisering benyttes når man står fast i et problem, og generalisering som prosess er vendepunktet man opplever når problemet gir mening og man klarer å se større sammenhenger som kan kobles til tilfeller utenfor det spesifikke problemet man benyttet for å oppdage disse sammenhengene (Mason et al., 1985, s. 24). Det kan virke som spesialisering er prosessen som må skje først, og at generalisering kommer av spesialiseringsprosessen, men slik er det ikke. Disse prosessene er uavhengige av hverandre, men kan bidra til å styrke hverandre om man ser de i sammenheng. En abstrakt generalisering kan altså styrkes gjennom spesialisering, som kan gi mening til det generelle med et gjenkjennelig språk, letthåndterlige eksempler og konkrete tall (Mason, 2008, s. 63).

For at elever skal kunne uttrykke generalisering trenger de øving i å kunne se det generelle gjennom spesifikke eksempler (Mason, 2008, s. 63). Elevene må få erfaring med, og øvelse i å lage eksempler og moteksempler knyttet til det generelle, og de

trenger noen som kan modellere for dem. På den måten kan de bruke fantasien sin til å sakte men sikkert utvikle ferdigheten i å både spesialisere og generalisere. Det som derimot ofte skjer i skolene er at lærere gjør mye av jobben for elevene, hvor de både lager et problem, beskriver hvordan problemet kan løses og kommer med eksempler på spesielle løsninger til problemet, for deretter å gi muligheten til elevene å generalisere. Da har ikke elevene selv vært med i prosessen frem til en generalisering, og vil være i mye mindre stand til å kunne uttrykke en generalisering. En er derfor nødt til å se at generalisering som prosess alene ikke er nok, men at en er nødt til å se på hele prosessen fram til et fenomen for å kunne undersøke elevenes generaliseringer (Mason, 2008, s. 64). Man må også akseptere et stort spekter av generaliseringer for å kunne undersøke hvordan elevene faktisk generaliserer. Det er mange matematiske regler, sammenhenger og egenskaper som allerede er akseptert av forskere, og når man skal undersøke elevers generaliseringer er det ofte disse man ser etter, og studier gjort av elevers generaliseringer antyder derfor ofte at dette er noe elever kan streve med. For å få et helhetlig og korrekt bilde av hvordan elevene generaliserer er det derfor viktig å være bevisst egen oppfatning av hva generalisering kan være. Det kan da være enklere å oppfatte når elever gjør forsøk på å uttrykke sammenhenger, mønster, at et fenomen i en spesiell situasjon kan gjelde flere situasjoner og at de kan lage regler og formler selv om de kan være mangelfulle (Ellis, 2007, s. 223).

#### 2.4.2 Generalisering i tidlig alder

Steinweg et al. (2018, s. 292-293) beskriver hvordan elever generaliserer, før de har tegn og symboler for å kunne gjøre det formelt. Når elever løser matematiske problem, oppdager sammenhenger og ser strukturer dukker det opp et behov for å kunne generalisere. Mange unge elever har derimot ikke et godt nok utviklet matematisk språk til å kunne generalisere formelt. Det er likevel flere måter elever kan uttrykke sine generaliseringer ved bruk av naturlig språk (Steinweg et al., 2018, s. 293). Elever kan lage sine egne symboler og tegn for å uttrykke det generelle, og det kommer til syne gjennom det språket barna er kjent med. Det er derfor viktig at man som lærer er bevisst at elevene kan benytte andre måter å generalisere på enn det man ser i formelle generaliseringer om det samme fenomenet, slik at man kan fange opp elevenes forsøk på å generalisere (Steinweg et al., 2018, s. 297-298).

### 2.5 Rammeverk over generaliserende handlinger

For å kunne undersøke hvordan elevene går frem for å generalisere, har jeg i denne studien tatt utgangspunkt i et rammeverk utviklet av Ellis (2007, s. 235). Dette rammeverket handler om elevenes generaliserende handlinger og hvilken atferd de har i arbeid med problemløsning. Når man studerer elevenes handlinger og hvordan de snakker, kan det hjelpe oss å si noe om hvilken mental aktivitet som benyttes når de skal generalisere. De generaliserende handlingene som kan komme til syne er av Ellis (2007, s. 235) oppdelt i tre forskjellige kategorier; relatere, søke og utvide. En redegjørelse for hva de tre kategoriene innebærer kan man se av tabell 2.2.

Kategorier innenfor generaliserende handlinger	Beskrivelse av hva kategorier innenfor generaliserende handlinger	
	Relatere situasjoner der en ser en sammenheng mellom to	Relatere nåværende situasjon til en tidligere situasjon

<b>Relatere</b>	eller flere situasjoner	Relatere nåværende situasjon til en ny situasjon som man skaper
	Relatere objekter der en ser en sammenheng og noen likheter mellom to eller flere objekter	Relatere objekter basert på sammenhenger og likheter i egenskaper mellom dem.
		Relatere objekter basert på deres lignende form
<b>Søke</b>	Søke etter samme forhold ved å gjenta samme handling for å se om forholdet holder seg stabilt mellom to eller flere objekter	
	Søke etter samme fremgangsmåte ved å gjenta den flere ganger for å se om den stemmer for alle situasjoner	
	Søke etter samme mønster ved å gjenta samme handling for å se om det oppdagede mønsteret holder seg stabilt i alle situasjoner	
	Søke etter samme resultat ved å gjenta samme handling for å se om resultatet av handlingen vil være likt hver gang	
<b>Utvide</b>	Utvide et fenomen til å gjelde i flere situasjoner enn den spesifikke situasjonen det ble oppdaget i	
	Utvide ved å ta bort kontekstuell informasjon slik at situasjonen kan gjelde generelt	
	Utvide ved å operere på et objekt for å benytte forhold og relasjoner mellom tall for å skape nye situasjoner	
	Utvide ved å fortsette et gjeldende mønster for å skape nye situasjoner	

**Tabell 2.2: Rammeverk over generaliserende handlinger, hentet og oversatt fra Ellis (2007, s. 235)**

Når en elev relaterer begynner han eller hun å se noen sammenhenger mellom noen situasjoner, ideer, objekter eller problemer, uten å helt klare å sette ord på hvilke sammenhenger dette er (Ellis, 2007, s. 235-236). En elev kan for eksempel se at et figurmønster ligner på et tidligere figurmønster de har arbeidet med, og relaterer dermed figurmønstrene basert på likhet i form.

Den generaliserende handlingen søke går ut på at elevene blir engasjerte i å undersøke om en gjentatt handling vil bidra til å finne noe former for likheter og sammenhenger i det man undersøker (Ellis, 2007, s. 238). Innenfor eksempelet med figurmønster som kom fram av figur 2.3, kan denne handlingen for eksempel vise seg ved at elevene undersøker om forholdene mellom figurnummer og figurmønster vil holde seg stabile ved å gjenta utvidelse av figurmønsteret. I figur 2.3 betyr det at elevene kan oppdage at for hver nye figur de lager så vil man alltid legge til to nye prikker.

Utvide er den siste kategorien i rammeverket over generaliserende handlinger, og ved å benytte denne handlingen vil man kunne utvide de oppdagede sammenhengene og forholdene slik at de gjelder mer generelt enn de spesifikke situasjonene de ble oppdaget i (Ellis, 2007, s. 241). Å utvide et figurmønster til å gjelde mer generelt kan for eksempel komme til syne gjennom å lage et generelt uttrykk for figurmønsteret. En kan da finne hvilken som helst figur i mønsteret uavhengig av å ta utgangspunkt i forrige figur. Ellis (2007, s. 257) hevder at arbeid med de generaliserende handlingene kan bidra til å utvikle elevenes generaliseringer slik at de etterhvert kan bli anerkjent som formelle generaliseringer.

## 2.6 Rammeverk over språklige former for generaliseringer

Det andre forskningsspørsmålet for denne studien har som hensikt å undersøke hvordan elever uttrykker generaliseringer i arbeid med problemløsningsoppgaver. På bakgrunn av dette ønsker jeg derfor å benytte rammeverket av Steinweg et al. (2018, s. 297) som presenterer ulike former for hvordan generaliseringer kan uttrykkes. Barn ønsker stort sett å uttrykke det generelle i matematisk aktivitet hvor de oppdager strukturer og sammenhenger. De har i midlertid ikke like stor sannsynlighet for å inneha nødvendige matematiske begreper for å kunne uttrykke sine generaliseringer, og elever på barneskolen vil derfor gjøre forsøk på å generalisere gjennom bruk av eget språk (Steinweg et al., 2018, s. 292-293). Steinweg et al. (2018, s. 297) formulerer i sitt rammeverk 5 ulike former for generalisering som kan komme til uttrykk når barn forsøker å generalisere. I dette rammeverket ser vi en utvikling av hvor gjeldene generaliseringene virker å være, der den første formen for generalisering ikke evner å beskrive noe generelt, mens den siste formen for generalisering inneholder utsagn som fungerer mer generelt ved at det som skal generaliseres blir uttrykt som variabler. Dette rammeverket er sentralt for å kunne analysere elevenes forsøk på å generalisere, fordi det inneholder hele spekteret av mulige generaliseringer, så fremt elevene har kommet frem til en løsning på problemet de skal generalisere. I tabell 2.3 kan vi se en oversikt over de ulike formene for generaliseringer som Steinweg et al. (2018, s. 297) presenterer, hvor jeg har inkludert eksempler på de ulike generaliseringene basert på figurmønsteret som kommer frem av figur 2.3.

<b>Former for generalisering</b>	<b>Beskrivelse av formene for generalisering</b>	<b>Eksempel på generalisering av figurmønster</b>
<b>Et eksempel</b>	Elevene formulerer et eksempel som de eksplisitt sier at er et eksempel	«Figur 2 har for eksempel 5 prikker»
<b>Flere eksempler</b>	Elevene lister opp flere eksempler, samt at de i noen tilfeller vil sikte til at det også finnes flere.	«Fra figur 1 til figur 2 øker det med 2 prikker. Fra figur 2 til figur 3 øker det også med 2 prikker»
<b>Generaliserende uttrykk med konkrete tall</b>	Elevene benytter konkrete tall i kombinasjon med et generaliserende utsagn	«Figuren vil alltid øke med 2 for hver nye figur»
<b>Betingende utsagn</b>	Elevene formulerer betingende utsagn	«Hvis vi har 5 prikker i figuren, legger vi til 2 til»
<b>Variabler</b>	Elevenes generaliseringer har en variabel karakter	«Vi kan multiplisere figurnummeret med 2 og plusse på 1»

**Tabell 2.3: Elevenes språklige former for generalisering, inspirert av Steinweg et al. (2018, s. 297).**

I beskrivelsen av rammeverket ønsker jeg også å inkludere fiktive eksempler på hvordan generaliseringer kan komme til uttrykk i oppgavene benyttet i denne studien. Disse oppgavene har jeg tidligere presentert i innledningen, og de kommer også frem av vedlegg 3 og 4. I rammeverket over generaliseringsformer karakteriseres den første formen for generalisering som elevene kan komme til å uttrykke, av at de eksplisitt beskriver at sin løsning er et eksempel på hvordan oppgaven kan løses (Steinweg et al.,

2018, s. 297). Hvis vi tar utgangspunkt i oppgave 1 benyttet i denne studien kan dette for eksempel komme til uttrykk ved «For eksempel kan vi ha 5 biller og 5 øgler slik at vi til sammen får 50 bein». Dette er et forsøk på å generalisere som ikke når helt frem ettersom man mangler å si noe om hvorfor dette er en mulig løsning, men som det likevel er sentralt å inkludere for å få et helhetlig bilde på elevenes erfaringer med å generalisere. Den andre formen for generalisering i rammeverket er å liste opp flere eksempler, samt antyde at det også finnes flere løsninger (Steinweg et al., 2018, s. 297). Med utgangspunkt i oppgave 1 i denne studien kan et eksempel på denne formen se slik ut: «Vi kan for eksempel ha 5 øgler og 5 biller, 2 øgler og 7 biller eller 8 øgler og 3 biller, og det finnes også flere løsninger». Dette er også en generalisering som ikke vil gjelde generelt, men der vi ser at elevene kan ha en forståelse av at fenomenet er større enn kun akkurat denne spesifikke situasjonen. Den tredje formen for generalisering kjennetegnes ved at man benytter et spesifikt tall for deretter å komme med et generaliserende utsagn (Steinweg et al., 2018, s. 297). Et eksempel på den tredje formen for generalisering kan være; «5 øgler og 5 biller, og 2 øgler og 7 biller er begge løsninger som alltid vil gi oss 50 bein til sammen, det er bare tatt bort noen øgler og lagt på noen biller i den siste av de løsningene slik at vi uansett har 50 bein». Dette eksempelet bærer preg av at en forstår at fenomenet skal gjelde generelt basert på at man forsøker å generalisere ved å bruke ord som «alltid» og «uansett» i kombinasjon med spesifikke tall. Man mestrer likevel ikke å uttrykke det fullt og helt på en generell måte ettersom man ikke sier noe om hvorfor det vil fungere å ta bort noen øgler og legge til noen biller. Den fjerde formen for generalisering kan komme til uttrykk gjennom at deres utsagn virker å være regelbasert (Steinweg et al., 2018, s. 297). Et eksempel på at en generalisering kan være regelbasert er; «Hvis den ene løsningen består av 8 øgler og 3 biller, må vi ta bort noen øgler og legge til noen biller for å finne flere løsninger». Det er fortsatt benyttet spesifikke tall i den fjerde formen for generalisering, og selv om generaliseringen beskriver hva som må skje med regnestykket, er det fortsatt ikke klart hva som må til for at fenomenet skal gjelde flere situasjoner eller hvorfor en kan ta bort noen øgler og legge til biller. Den siste formen for generalisering er at man bruker ord eller symboler som fungerer som en form for variabel (Steinweg et al., 2018, s. 297). Denne formen kan for eksempel uttrykkes slik; «Vi kan finne alle løsninger på problemet ved å veksle 3 øgler med 2 biller så langt det går innenfor konteksten, ettersom både 3 øgler og 2 biller utgjør 12 bein, og at man derfor alltid vil ta bort samme mengde bein som man vil legge til. Dette gjør at vi alltid vil ende opp med 50 bein». I dette eksempelet kan det være varierende hvor mange dyr man skal ha av hver sort, og utsagnet gjelder generelt ved å si at mengden vil bli den samme til slutt uansett ettersom man kan veksle. Det er denne formen for generalisering vi ønsker at elevene skal komme frem til. Det krever i midlertid tid og øvelse for å mestre å generalisere på en slik måte, og det er derfor nødvendig med innsikt i alle former for generalisering i analysen av hvordan elever på barneskolen generaliserer, ettersom det ikke er en selvfølge at alle har nok erfaring med generalisering (Mason, 2008, s. 64). I redegjørelsen for rammeverket har jeg beskrevet hvilke former for generaliseringer som fungerer for å si noe generelt om et fenomen, og hvilke som ikke gjør det. Dette kommer av Radford (1996, s. 111) sin beskrivelse av hva hensikten med generalisering er. Generalisering skal i følge han begrunne konklusjonen man kommer frem til i spesielle situasjoner. Kunnskapen skal gå fra empirisk kunnskap til abstrakt kunnskap, det vil si fra de tall og fakta rundt situasjonen som vi allerede vet, til å finne en løsning som kan benyttes til å si noe om det som er abstrakt og ukjent for oss (Radford, 1996, s. 111).



## 3 Metode

I metodekapitlet vil jeg først redegjøre for forskningsdesignet som er valgt for denne studien. Dette inkluderer blant annet at dette er en kvalitativ studie hvor det gjennomføres en enkeltcasestudie. Dette betyr at de undersøkelser man gjør, gjelder for nettopp det området man undersøker, i dette tilfellet to utvalgte grupper med 3 elever i hver gruppe fra 5.trinn (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). Jeg vil derfor komme inn på hvordan dette utvalget ble gjort. Videre vil jeg redegjøre for hvordan datainnsamlingen foregikk, altså at det ble gjennomført semistrukturerte gruppeintervju, hvor elevene skulle samarbeide om 2 problemløsningsoppgaver. Analysemetoden vil også bli beskrevet i dette kapitlet, og her vil jeg blant annet beskrive hvordan transkribering ble gjort, redegjørelse for tematisk analyse som metode for å analysere datamateriale og hvordan den tematiske analysen faktisk ble gjennomført. Til slutt vil jeg diskutere studiens pålitelighet og gyldighet, samt etiske overveielser som ble gjort.

### 3.1 Metodologi

#### 3.1.1 Kvalitativ forskningsdesign

Med problemstillingen jeg har formulert ønsker jeg å undersøke hvordan elever generaliserer, og da vil det være betydningsfullt at elevene kan gi grundige svar, fortelle hvordan de tenker og at jeg som forsker kan stille oppfølgende spørsmål som kan bidra til større innsikt i deltakernes forståelse. Jeg har i mitt prosjekt valgt å benytte kvalitativ datainnsamling for å kunne gi svar på min problemstilling. I følge Postholm & Jacobsen (2018, s. 165) er kvalitativ datainnsamling en åpen form for datainnsamling. Denne datainnsamlingsmetoden gir rom for flere mulige svar fra deltaker, og ved å benytte slike datainnsamlingsmetoder vil man få utdypende informasjon som vil hjelpe en å forstå deltakerne bedre, både i form av deres handlinger og deres tanker og meninger (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113).

Denne studien tar utgangspunkt i at kunnskap blir til gjennom et konstruktivistisk perspektiv, der virkeligheten beskrives gjennom menneskers tolkning av den (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 45). Som forsker innenfor et konstruktivistisk perspektiv ønsker man at kunnskap skal bli til ved at man først innhenter data uten noen form for påvirkning av teori, for å kunne ha en åpen innstilling til hva man skal se etter i datamaterialet. Senere understøttes denne empirien av teorier som kan bidra til å forklare de fenomenene som er oppdaget. Dette kaller man en induktiv tilnærming til forskning (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 101). Det er imidlertid utfordrende å ha en fullstendig induktiv tilnærming ettersom man sannsynligvis har lest mye forskning og teori tidligere før man selv skal forske på noe eget. Den empirien som da blir samlet i en induktiv tilnærming kan det derfor bli vanskelig å forstå og tolke helt objektivt (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 102). Jeg har derfor inntatt en abduktiv tilnærming til forskning i denne studien, som vil si at arbeid med teori og empiri har vært en vekslende prosess hvor egne antakelser basert på teori har formet hvilke fenomener som er blitt undersøkt, og der funnene har resultert i videre arbeid med teori. Det er varierende hvor stor grad forskeren avgrensar fenomenet som skal studeres, og forskeren kan enten ha planlagt nøyte hva som skal undersøkes eller være åpen for flere mulige fenomener (Postholm & Jacobsen (2018, s. 102). I denne studien er fenomenene som studeres avgrenset til å

omhandle deltakernes forsøk på generaliseringer. Postholm & Jacobsen (2018, s. 99) har beskrevet noen forskningsmetoder som egner seg godt for å samle datamateriale innenfor den konstruktivistiske tilnærmingen, og nevner metoder som intervju og observasjon. Ved å bruke disse metodene kan man innhente god informasjon om hvordan deltakerne opplever virkeligheten (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 99).

### 3.1.2 Enkeltcasestudie

Casestudier kjennetegnes ved at det som studeres tar plass i en bestemt kontekst hvor man får detaljert og rik informasjon om det fenomenet som undersøkes, og at konteksten er relevant for hvilke resultater som utledes av studien. Det man undersøker vil derfor ikke nødvendigvis gjelde generelt for lignende situasjoner (Creswell, 1998, s. 61-62). I casestudier kan man undersøke en eller flere caser, og kontekstene som casene er knyttet til kan variere i omfang ved at konteksten både kan være en hel by, en skole, en klasse eller kun en skoletime (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). Creswell (1998, s. 63) løfter frem viktigheten av å avgrense casen man skal undersøke, og med dette reflektere over hva man ønsker å undersøke og innenfor hvilken kontekst det på best mulig måte kan gjøres. I denne studien har jeg valgt å betrakte elevenes arbeid med generalisering som en case. Det vil si at selv om jeg har gjennomført to separate intervju med totalt seks individer, er det deres samlede arbeid med generalisering jeg anser som casen for denne studien. Jeg kommer derfor ikke til å se på likheter og forskjeller mellom de to intervjuene eller gjøre sammenligninger av de involverte enkeltpersonene.

Hvordan man undersøker en case er også av betydning, og her trekker Creswell (1998, s. 63) frem observasjon, intervju, lydopptak og innhenting av dokumenter og rapporter som gunstige datainnsamlingsmetoder når man gjennomfører casestudier. I min studie har jeg valgt å gjennomføre en enkeltcasestudie i en 5. klasse hvor jeg ønsker å undersøke hvordan elevene i denne klassen generaliserer, dette ved hjelp av datainnsamlingsmetoder som intervju med lydopptak og skriftlige dokumenter innhentet gjennom intervjuet. I utgangspunktet var planen også å benytte videoopptak som innsamlingsmetode, og under ett av intervjuene ble det også tatt videoopptak. På grunn av tekniske problemer hadde jeg ikke mulighet til å ta videoopptak i det andre intervjuet. Jeg måtte derfor vurdere relevansen av å bruke videoopptak i analysen før jeg fortsatte datainnsamlingen, og tok da en avgjørelse om å ikke benytte dette. Jeg endte altså opp med å kun ta lydopptak av det andre intervjuet. Dette valget ble gjort på bakgrunn av at problemstillingen blant annet fokuserer på elevenes språklige former for å uttrykke generaliseringer, og at da eventuelle transkripsjoner på hva som visuelt foregikk under intervjuene kunne ta bort noe av fokus fra det problemstillingen har som formål å konsentrere seg om. Elevene hadde heller ikke noe former for konkrete under intervjuene, men hadde tilgang på ark og skrivesaker. Om de ønsket å vise sine ideer visuelt kunne de derfor benytte seg av skiving og tegning, som jeg videre kunne samle inn og presentere i analysen for å styrke forståelsen av deres språklige generaliseringer. Det var derfor ikke et stort behov for å benytte andre innsamlingsmetoder enn lydopptak og skriftlig arbeid.

## 3.2 Utvalg

Motivasjonen for denne studien er som beskrevet tidligere at norske elever på ungdomsskolen har lave prestasjoner i algebra (Bergem et al., 2016, s. 2), og at en tidligere innføring i algebra kan være hensiktsmessig fordi det tar tid å utvikle en algebraisk tenkemåte (Carpenter et al., 2003, s. 3). Utvalget til datainnsamlingen er

derfor basert på når det kan tenkes at elever har begynt å få en introduksjon til algebra, nærmere bestemt generalisering. Samtidig ønsker jeg ikke at generalisering som vei til algebra skal være helt nytt for deltakerne. Allerede fra 2. trinn skal elevene arbeide med kompetansemål knyttet til generalisering og abstraksjon som kjerneelement i kunnskapsløftet av 2020. Etter 3. trinn skal elevene kunne arbeide med generalisering og abstraksjon knyttet til problemløsning (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 6). Jeg har med bakgrunn i dette valgt å gjennomføre datainnsamlingen på 5. trinn, ettersom elevene skal ha hatt mulighet til å opparbeide seg erfaringer med generalisering.

Jeg ønsket å gjennomføre datainnsamlingen i en 5. klasse jeg hadde kjennskap til fordi den relasjonen jeg har til elevene både kunne gjøre det enklere for meg å ta hensyn til elevene, og at det skulle være tryggere rammer for deltakerne når forskeren var noen som var kjent for dem. Dette er en klasse jeg har hatt mange timer med i andre fag, og jeg hadde derfor ikke noe spesielt god kunnskap om deres faglige ståsted i akkurat matematikk, noe som kan være en fordel for å kunne forske så objektivt som mulig. Når jeg hadde bestemt meg for hvilken klasse jeg ønsket å gjennomføre datainnsamlingen i, kontaktet jeg rektor på skolen for å undersøke om skolen var fortrolig med at jeg gjennomførte datainnsamling hos dem, noe de var. Å velge ut en skoleklasse på den måten jeg har gjort i denne studien kan kalles et bekvemmelighetsutvalg. Deltakerne til prosjektet er ikke valgt helt tilfeldig, men er valgt fordi klassen er et passende utvalg med tanke på hva jeg ønsket å undersøke, og var et tilgjengelig utvalg til riktig tid (Schweigert, 2006, s. 47-48).

Jeg hadde på forhånd bestemt meg for å kun inkludere et lite utvalg av klassen til prosjektet, på grunn av begrensinger i omfang. Alle elevene i klassen fikk likevel informasjonsskriv med samtykkeskjema med seg hjem, som en kan se av vedlegg 1. Utvalget kunne da gjøres basert på hvilke elever som ga samtykke. Informasjonsskriv med samtykkeskjema ble levert ut fysisk tre uker i forkant av datainnsamlingen. Det ble innhentet til sammen sytten samtykker, hvor elevene med deres foresatte samtykket til deltakelse i gruppeintervju, videoopptak, lydopptak og innsamling av skriftlig arbeid fra gruppeintervjuet. Av elevene som ga samtykke ble det satt sammen grupper bestående av både jenter og gutter, og med elever som jeg visste kunne fungere til å arbeide sammen i en slik kontekst. Jeg endte til slutt opp med to grupper med tre elever i hver gruppe. Alle elevene i klassen fikk imidlertid tilbudet om å delta i oppgaveløsningen med forbehold om at det ikke ville bli innsamlet datamateriale hvis det ikke var gitt samtykke, dette for at ingen skulle havne utenfor felleskapet.

## 3.3 Datainnsamlingsmetode

### 3.3.1 Intervju

Jeg har benyttet et oppgavebasert gruppeintervju som metode for å kunne svare på forskningsspørsmålene; «Hvilke generaliserende handlinger kan identifiseres i elevenes arbeid?» og «Hvordan uttrykker elevene generaliseringer i sitt arbeid?». Intervju er en datainnsamlingsmetode innenfor kvalitativ forskning hvor hensikten er å få dypere forståelse om et tema gjennom samtale med mennesker som har relevant erfaring og kunnskap om temaet, og som derfor kan gi sitt perspektiv på dette området (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 117). Observasjon som datainnsamlingsmetode har ikke den samme fordelene med å kunne utlede deltakernes meninger, og ved en slik metode er resultatene svært avhengige av forskerens tolkninger og subjektivitet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 114). Alene ville derfor observasjon som metode gitt noe mangelfull informasjon for å

kunne svare på denne studiens problemstilling. Likevel kan observasjon i kombinasjon med intervju være svært fordelaktig med tanke på kvaliteten av data, og observasjon kunne eventuelt gi verdifull informasjon om hvordan elever arbeider med generalisering i forkant av intervjuet, som igjen ville vært til hjelp i forberedelsene av intervjuet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 114-115). Dessverre samsvarte ikke temaene elevene arbeidet med i matematikk i det aktuelle tidsrommet for datainnsamling med temaet for denne studien, og det ble derfor kun gjennomført et oppgavebasert gruppeintervju.

Når intervjuet er oppgavebasert kan en undersøke deltakernes strategier og deres kompetanse, samt få en forståelse av utviklingsprosesser og innsikt i hvordan de håndterer problemløsning (Goldin, 1997, s. 54). Goldin (1997, s. 54) beskriver også at man kan undersøke disse elementene for å se på effektiviteten av undervisning, men det vil ikke være relevant for denne studien da deltakernes tidligere undervisning ikke er kartlagt og undersøkt.

Samtalen som finner sted i intervju kan opptre på forskjellige måter, og Clark et al. (2021, s. 425) trekker frem tre former for intervju; strukturerte intervju, ustrukturerte intervju og semi-strukturerte intervju. I det strukturerte intervjuet er samtalen som skal finne sted planlagt på forhånd med gjennomtenkte spørsmål angående temaet for undersøkelsen, og forsker viker ikke fra denne planen (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 120). Ved ustrukturerte intervjuer kan samtalen minne om en hverdagslig dialog ettersom det ikke er planlagt spørsmål på forhånd. Likevel dreier samtalen seg om det spesifikke temaet som man ønsker å undersøke. Hvis man tenker på strukturerte og ustrukturerte intervju som ytterpunkt på en skala, finner man det semi-strukturerte intervjuet som en middelvei mellom disse formene for intervju. Det betyr at det semi-strukturerte delvis er planlagt, men likevel har en mer åpen form.

Det er vanlig å lage en intervjuguide når man skal gjennomføre et semi-strukturert intervju, og den inneholder spørsmål en kan tenke seg at man ønsker å stille om det tema som studeres. En intervjuguide ble også lagd i forkant av intervjuene i min studie, og denne kommer frem av vedlegg 5. Som forsker vurderer man samtalen underveis, og på den måten fungerer intervjuguiden kun som en ramme for hvordan man ønsker at samtalen skal utvikle seg. Man kan i tillegg legge til nye spørsmål som man spontant ser at kan fungere for å få mer klarhet underveis i samtalen, eller ekskludere spørsmål som det viser seg at det ikke vil være noen hensikt med. I kvalitativ forskning benyttes vanligvis det semi-strukturerte eller det ustrukturerte intervjuet som intervjuform, da disse formene i større grad egner seg til å gi detaljerte beskrivelser om det tema som undersøkes (Clark et al., 2021, s. 425-427). I min studie valgte jeg å gjennomføre et semi-strukturert gruppeintervju.

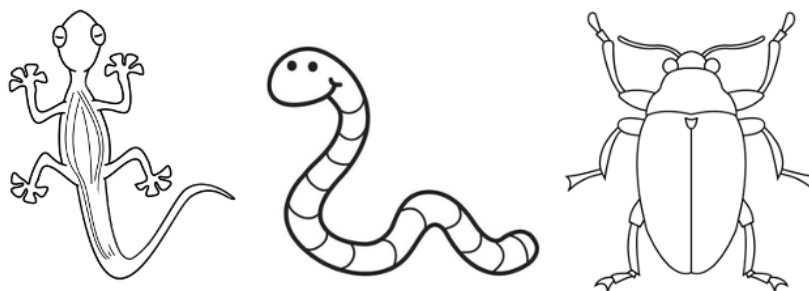
Gruppeintervju er en ledet form for intervju hvor flere mennesker samtaler om et spesifikt tema (Carson, 2007, s. 220). Flick (2022, s. 239) beskriver at problemløsning i gruppeintervju kan være gunstig, og at deltakerne sammen kan diskutere for å finne den beste strategien for å løse problemet. I forkant av gruppeintervjuet i denne studien ble det altså laget en intervjuguide med utgangspunkt i problemløsningsoppgaven som deltakerne i dette prosjektet skulle løse. Intervjuguiden ble laget med inngående spørsmål, som vil si at spørsmålene skal holde samtalen i gang og bidra til mer utfyllende og forståelige refleksjoner om temaet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 123). Jeg formulerte da spørsmål som blant annet; «kan dere forklare hvordan dere tenker?», «hvordan kom dere frem til denne løsningen?» og «finnes det flere mulige løsninger?». I tillegg testet jeg ut oppgaven på flere forskjellige måter selv for å være forberedt på

hvilke løsninger og forklaringer elevene eventuelt ville komme med, for å deretter kunne planlegge noen spesifikke spørsmål.

I gjennomførelsen av intervjuene ble gruppene tatt med på et grupperom på skolen, samtidig som resten av klassen hadde vanlig undervisning. Under intervjuene ble det tatt lydopptak slik at jeg kunne konsentrere meg om deltakerne og deres forklaringer, noe også Postholm & Jacobsen (2018, s. 133) trekker frem som en fordel sammenlignet ved å notere for hånd. Dette fordi håndnotater underveis kan forstyrre deltakerne på den måten at det kan gi indikasjoner på hva som er av betydning og ikke. Likevel kan en intervjusituasjon føles unaturlig og spesiell ut. Postholm & Jacobsen (2018, s. 108) beskriver viktigheten å være bevisst hvilken virkelighet man faktisk undersøker i egen studie, og hvilken kunnskap en kan utlede fra den virkeligheten. Ettersom en intervjusetting i seg selv er unaturlig for elever i barneskolealder, spesielt med tanke på at det også ble gjennomført på et annet rom enn klasserommet, var det derfor viktig å gjøre settingen så naturlig som mulig ved at intervjuene ble gjennomført i grupper med andre deltakere fra klassen. De to intervjuene som er inkludert i dette prosjektet hadde en varighet på omtrent 30-45 minutter hver, der deltakerne på hver grupper diskuterte to problemløsningsoppgaver. Jeg hadde i forkant av intervjuet lagt frem blanke ark og skrivesaker, og deltakerne kunne benytte dette fritt under intervjuet for å lette sine tankeprosesser og som hjelp til å forklare hva de tenkte. Det skriftlige arbeidet fra deltakerne under intervjuet er tatt med som datamateriale og koblet til hver enkelt elev slik at det kan benyttes til å styrke forståelsen av deres utsagn.

### 3.3.2 Oppgave til datainnsamling

Oppgavene som elevene fikk utdelt er inspirert av en oppgave hentet fra Mason et al. (2010, s. 40). Den opprinnelige oppgaven lød slik; «Ross collects lizards, beetles and worms. He has more worms than lizards and beetles together. Altogether in the collection there are 12 heads and 26 legs. How many lizards does Ross have?» (Mason et al., 2010, s. 40). Generalisering i denne oppgaven slik som den er formulert opprinnelig kan uttrykkes ved å kunne overføre denne situasjonen til lignende situasjoner, samt forklare hvilken informasjon fra oppgaven som legger føringer for at det bare kan finnes en mulig løsning på problemet, i følge Mason et al. (2010, s. 42). Jeg har derimot tilpasset oppgaven slik at den også kunne løses på andre måter, blant annet ved at det finnes flere løsninger på problemet, og dermed ble mulighetene for generalisering noe større. Oppgavene slik de ble gitt til elevene i denne studien kan man se av vedlegg 3 og 4.



**Figur 3.1: Visualisering av dyrene inkludert i oppgavene**

Den første oppgaven elevene fikk utdelt var en problemløsningsoppgave med flere mulige løsninger; «Martin samler på øgler (4 bein) og biller (6 bein). Til sammen har dyrene 50 bein. Hvor mange har Martin av hvert dyr?». Jeg valgte å presisere i oppgaven hvilke dyr som hadde hvilke antall bein, samt inkludere bilder av dyrene for deltakerne slik at det skulle være enklere for dem å visualisere seg situasjonen. Dette ble også gjort i oppgave nummer 2. Med denne oppgaven ønsket jeg at deltakerne skulle komme frem til en vekslingsenhet i sine generaliseringer, og benytte den til å forklare hvordan man kunne finne alle løsninger på problemet. Denne oppgaven tar form som en likning representert i en problemløsningsoppgave, og de ukjente variablene i oppgaven er antallet av hvert dyr, mens det som er kjent er antall bein totalt, samt på hvert dyr. De fire mulige løsningene er presentert i tabell 3.1 nedenfor, og dette er de eneste mulige løsningene innenfor konteksten. Man kan ikke veksle ytterligere når man kun har igjen 1 bille eller 2 øgler ettersom man hele tiden må veksle med 2 biller og 3 øgler om gangen for å benytte den minste vekslingsenheten, altså 12.

Antall øgler	11 (44 bein)	8 (32 bein)	5 (20 bein)	2 (8 bein)
Antall biller	1 (6 bein)	3 (18 bein)	5 (30 bein)	7 (42 bein)
<b>Antall bein</b>	<b>50 bein</b>	<b>50 bein</b>	<b>50 bein</b>	<b>50 bein</b>

**Tabell 3.1: Mulige løsninger innenfor kontekst, oppgave 1.**

Om man tar bort kontekstuell informasjon, kan man også inkludere negative tall og veksle i det uendelige. Om man utvider oppgaven på den måten kan man lage et generelt uttrykk for alle mulige løsninger. Jeg valgte blant annet selv å løse oppgaven som en diofantisk likning,  $6x + 4y = 50$ , hvor jeg benyttet den spesielle løsningen 8 øgler og 3 biller i likningen for å lage et generelt uttrykk. Det jeg først gjorde var å finne største felles divisor,  $\text{gcd}(6,4)=2$ , og benytte den for å finne minste felles multiplum, altså den minste vekslingsenheten. 12 er den minste vekslingsenheten for tallene 6 og 4, men for å sette det inn i den generelle likningen må man finne ut hvilke tall som går opp i vekslingsenheten 12 når man ganger de med 6 og 4. For tallet 6 må man multiplisere med 2 for at det skal gå opp i vekslingsenheten 12, og for tallet 4 må man multiplisere med 3. Når man vet hva man må veksle hvert av tallene i likningen med, kan man lage et generelt uttrykk. Et generelt uttrykk for likningen blir da  $6(3-2t)+4(8+3t)=50$ , hvor  $t$  i likningen står for antall ganger man veksler. Det er ikke forventet at elever i 5. klasse skal kunne løse oppgaven gjennom en diofantisk likning slik som beskrevet her. Likevel vil det være mulig for dem å bruke språket til å si noe om at konteksten kan tas bort og at man kan veksle i det uendelige om man inkluderer negative tall.

Oppgave nummer to ligner noe mer på den opprinnelige oppgaven og har kun en mulig løsning, og lyder slik; «Eva samler på øgler, biller og larver. Hun har flere larver enn øgler og biller til sammen. Totalt i samlingen er det 15 hoder og 38 ben. Hvor mange har Eva av hvert dyr?». Løsningen på denne oppgaven er at man ender opp med 8 larver, 5 biller og 2 øgler, og med den løsningen oppfyller man kravene som ligger i oppgaven. Kravene er at det skal være 15 hoder, det skal være flere larver enn biller og øgler til sammen, og 5 biller og 2 øgler utgjør til sammen 38 bein. Dette er den eneste mulige løsningen fordi vekslingsenheten når det gjelder antall ben også er 12 i denne oppgaven, og innenfor konteksten kan man derfor ikke veksle bort 3 øgler mot 2 biller når man kun har 2 øgler tilgjengelig. Det er mulig å veksle bort 2 biller mot 3 øgler, og det oppfyller også kravet til antall bein, men da vil det til sammen bli flere biller og øgler til sammen enn larver, og det vil derfor ikke være en mulig løsning uansett. Derfor vet vi at det kun finnes en løsning, siden man ikke kan veksle bein i noen retninger. Generaliseringen som ligger i denne oppgaven er å kunne identifisere hvilken informasjon som legger

begrensninger på mulige løsninger som finnes i oppgaven. Elevene kan også uttrykke generaliseringer knyttet til om de kan forestille seg lignende matematiske situasjoner som den de er blitt presentert.

### 3.4 Analysemetode

Analysen starter allerede når datainnsamlingen trer i kraft (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 139). I denne studien hvor det benyttes intervju som metode vil det si at analysen er i gang allerede fra intervjuet starter og der analysen skjer kontinuerlig slik at man kan stille de riktige spørsmålene underveis i intervjuet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 140). Det er imidlertid når man arbeider med datamaterialet i ettertid at det systematiske arbeidet med analyse starter.

#### 3.4.1 Transkribering

Clark et al. (2021, s. 441) fremmer bruken av opptak og transkribering når en skal gjennomføre gruppeintervju, og hevder at det er betydningsfullt å kunne ha tilgang på samtalene som fant sted under intervjuene for å kunne gi en nøyaktig beskrivelse av hva som ble sagt og hvordan det ble sagt. I min studie benyttet jeg en diktafon for å ta lydopptak av intervjuene, som jeg senere kunne benytte i transkribering og analyse av datamaterialet. Etter datainnsamlingen var gjennomført ble innsamlede lydfiler fra intervjuene overført til mitt hjemmeområde på NTNU hvor filene videre ble kryptert. Før jeg begynte prosessen med å transkribere, utarbeidet jeg transkripsjonskoder som jeg benyttet for å effektivisere transkriberingen og for å kunne gi bedre forståelse av dialogene som fant sted i intervjuene. I tabellen under kan en se hvilke koder som ble benyttet under transkriberingen.

Transkripsjonskoder	Beskrivelse av transkripsjonskoder
Nummer langs venstre marg	Linjene er nummerert for å kunne henvises til
Benevning langs nummer	Henviing til hvem som snakker
[ ]	Forklaring av kontekst
(0.0)	Pauser mellom snakking
(.)	Mikropauser
, og .	Komma og punktum blir brukt hvor det er naturlig å bruke komma og punktum i talen. Komma indikerer små pauser i talen, og punktum indikerer når en setning er ferdig.
/0.0/	Uhørbar stemme oppgitt med tid
CAPSLOCK	Høy stemme
<i>Kursiv</i>	Lav stemme
<u>Understreking</u>	Stemme med trykk eller entusiasme
*tale*	Overlapping, flere snakker samtidig
<b>Anonymiserte detaljer i fet skrift</b>	Deler av data som det er nødvendig å anonymisere med hjelp av andre ord som gir samme betydning for å ikke utgi identifiserende opplysninger.

**Tabell 3.2: Transkripsjonskoder med beskrivelser**

Jeg valgte å transkribere på bokmål fremfor å transkribere helt nøyaktig med elevenes dialekter, dette for sikre elevenes personvern i større grad. I de tilfellene hvor jeg har benyttet personlige pronomen som blant annet «han» eller «hun» i transkripsjonene, er ikke dette en indikasjon på hvilket kjønn deltakerne hadde. I likhet med at jeg har

anonymisert elevenes navn, er også elevenes kjønn anonymisert på den måten at det er tilfeldig hvilket personlig pronomen jeg benyttet for hver elev. Jeg har likevel vært konsekvent med at elevene omtales med de samme personlige pronomenene gjennom hele transkripsjonen.

### 3.4.2 Tematisk analyse

I analyseprosessen har jeg benyttet meg av tematisk analyse. I følge Braun & Clarke (2006, s. 79) er tematiske analyse en metode som betyr at man ser sammenhenger i empiri og sorterer datamaterialet systematisk i kategorier. I motsetning til flere komplekse analysemetoder, er tematisk analyse en brukervennlig og allsidig analysemetode. Det er derfor en god metode for uerfarne forskere, og kan brukes til å analysere et vidt spekter av data innhentet gjennom flere ulike forskningsmetoder (Braun & Clarke, 2006, s. 81). Tematisk analyse er nyttig både for å analysere data som inneholder deltakernes direkte meninger og erfaringer, data som undersøker hvilken påvirkning et felleskap har på deltakernes meninger og erfaringer eller data hvor deltakernes individuelle opplevelse av et fenomen skal vurderes opp mot en kollektiv opplevelse av et fenomen (Braun & Clarke, 2006, s. 81). Basert på denne analysemetodens mangfoldighet vil det trolig kunne utledes en god analyse ved hjelp av denne metoden.



**Figur 3.2: Oversikt over de ulike stegene i tematisk analyse, basert på beskrivelse tematiske analyse av Terry et al. (2017).**

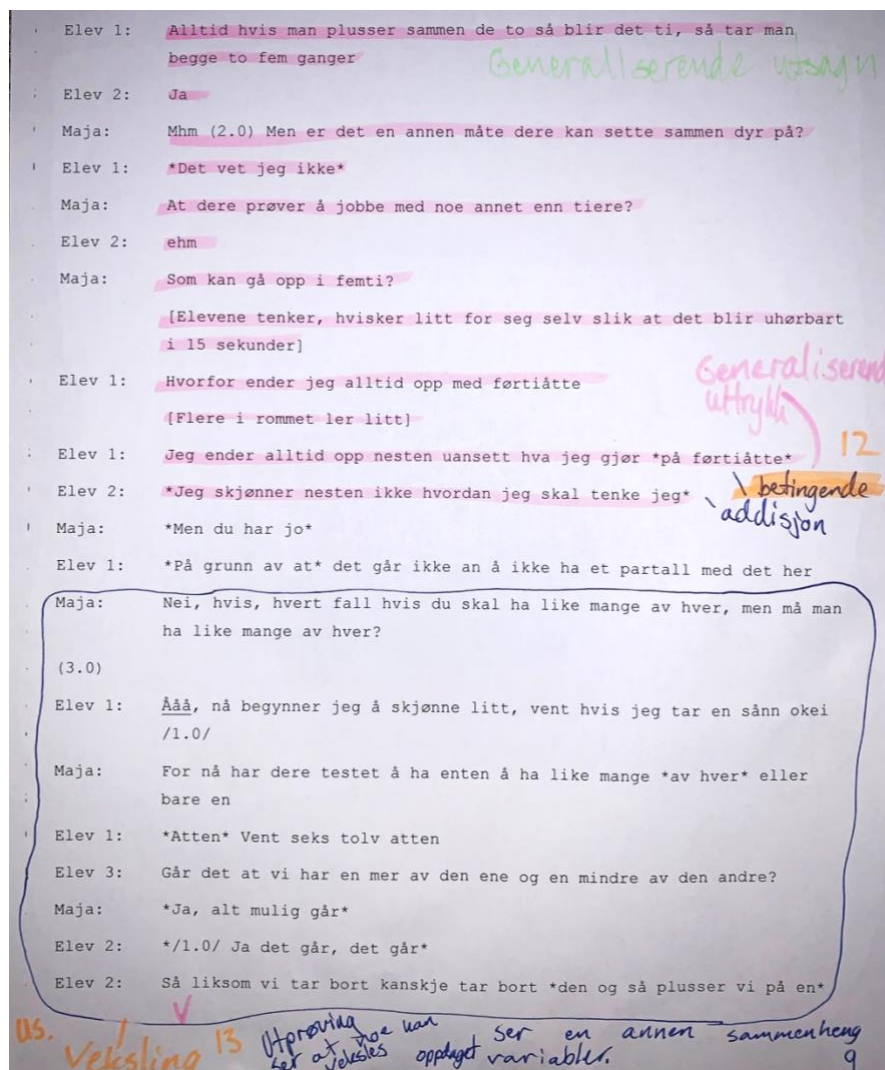
Terry et al. (2017, s. 23) beskriver at analyseprosessen i tematisk analyse består av seks ulike steg, illustrert i figur 3.2. Det første steget går ut på å gjøre seg kjent med dataene, og dette gjøres ved å gå over dataene gjentatte ganger, notere analytiske ideer og tanker som dukker opp, og stille spørsmål til dataene (Terry et al., 2017, s. 23-24). Å konstruere koder er steg nummer to i den tematiske analyseprosessen, og i denne fasen kan man begynne å sette noen merkelapper på notatene man allerede har. Noen notater kan i tillegg passe flere koder. Å ha forskningsspørsmålene i bakhodet i denne fasen kan være en fordel, slik at man kun lager koder til det som er relevant i datamaterialet (Terry et al., 2017, s. 26). I det tredje steget i analyseprosessen begynner man å identifisere mønster og sammenhenger i disse kodene slik at man kan koble flere koder sammen til ulike tema. Et godt hjelpemiddel i denne prosessen er å lage et visuelt bilde på hvilke temaer som er dannet, og hvilke koder som hører under. Dette kan gjøre det lettere å se hvilke rammer hver av temaene har, slik at de blir tydelige avgrenset (Terry et al., 2017, s. 27-28). Temaene i steg tre kan ses på som midlertidige temaer, og steg fire skal derfor bidra til å videreutvikle disse temaene. Det krever at man vurderer de temaene som allerede er laget, for å enten utelukke noen av dem eller gjøre dem enda tydeligere. Vurderingen kan også føre til at man ser at det må lages helt nye tema. Denne vurderingen må baseres på om temaene fungerer til å kunne besvare forskningsspørsmålene (Terry et al., 2017, s. 29-30). For å gjøre temaene enda tydeligere bør videre arbeid gå på definering av temaene man har endt opp med i steg fem. Definisjonsarbeidet kan avdekke om temaene er holdbare eller ikke, og hvis det viser seg at de fungerer kan en begynne å navngi hvert tema. Underveis har man kanskje benyttet midlertidige navn, men etterhvert som temaene har blitt revidert kan det lønne seg og formulere navn som passer bedre til de ferdige temaene (Terry et al.,



2017, s. 30-31). Til slutt i det sjette steget skal man rapportere resultatene fra analysen. Rapporten skal inneholde data og analyse med kobling opp mot teori, som til sammen skal kunne besvare forskningsspørsmålene (Terry et al., 2017, s. 32).

### 3.4.3 Tematisk analyse i min studie

Første steg i analyseprosessen var å bli kjent med datamaterialet. Jeg begynte allerede under transkripsjonene å notere tanker om datamaterialet i en notatbok. Når transkripsjonen var ferdig leste jeg over datamaterialet flere ganger, og det systematiske arbeidet med analysen begynte for alvor. I figur 3.3 nedenfor kan en se et eksempel på hvordan analysearbeidet ble gjennomført. Videre i beskrivelsen av hvordan jeg gjennomførte hvert steg av den tematiske analysen vil jeg komme inn på hvordan jeg noterte og markerte i transkripsjonene, blant annet hvilke steg av analyseprosessen de forskjellige fargene benyttet i notatene i eksempelet under skal representere.



**Figur 3.3: Visuelt bilde av hvordan analyseprosessen foregikk**

Som sagt benytte jeg farger i transkripsjonene, og først ble farger benyttet for å markere interessante deler av datamaterialet. Når jeg hadde blitt bedre kjent med dataene og skulle begynne å kode datamaterialet, steg to i tematisk analyse, noterte jeg små beskrivelser knyttet til ulike funn som virket å være relevante for forskningsspørsmålene. I denne delen av koding endte jeg opp med lignende beskrivelser flere steder i

datamaterialet, og jeg gikk derfor over til steg tre i tematisk analyse og kunne begynne å kategorisere funnene innenfor mer overordnede tema. Dette gjorde jeg ved å i transkripsjonene ringe rundt funnene og notere og markere med oransje tusj hvilken kategori hvert funn tilhørte, og også markere med nummer for å hele tiden ha oversikt over hvor mange funn jeg hadde. Jeg lagde også en tabell over kategoriene som ble laget, og hvor mange funn hver kategori inneholdt. I steg fire i den tematiske analysen gikk jeg gjennom kategoriene enda en gang for å vurdere om hvert funn passet innenfor de kategoriene jeg hadde plassert dem i. Noen av funnene ble også delt opp i mindre deler og plassert i ulike kategorier, slik at antall funn økte. Jeg vurderte videre om kategoriene fungerte, og det ble da laget to nye kategorier, samt at noen av kategoriene fikk nye navn som beskrev funnene tydeligere. For eksempel ble en kategori reformulert fra «veksling» til «veksling usystematisk». I transkripsjonene ble endringene av steg fire notert med rosa tusj for å holde oversikt over hvilke kategorier som ble endret etter vurderingen som ble gjort. Der hvor jeg ikke gjorde endringer fra kategoriseringen jeg hadde gjort under steg tre, markerte jeg kategorien med en rosa «hake», slik at jeg opprettholdt oversikten over hvilke kategorier som hadde blitt gjennomgått. Etter å ha gjennomgått transkripsjonene med rosa markering, gikk jeg på nytt over transkripsjonene en siste gang, og det ble igjen gjort noen få endringer som ble markert med grønn tusj. I tabell 3.3 kan man se den ferdige gjennomgangen av kategoriene etter steg fire.

<b>Kategorier fra analysen</b>	<b>Antall funn i hver kategori</b>
Prosess	8
Eksempel	19
Flere eksempler	1
Betingende	3
En variabel	4
Relatere	11
Søke	5
Utvide	4
Veksling usystematisk	6
Veksling systematisk	6
Identifisere informasjon/kontekst	8
Variabler	8
Hypoteser	6
Begrensninger i kontekst	3
Generaliserende uttrykk med konkrete tall/eksempel	4
<b>ANTALL I BRUK AV KODER</b>	<b>95</b>

**Tabell 3.3: Kategorier utarbeidet gjennom analyse av datamaterialet**

Etter jeg hadde gjennomgått alle funn og kategorier var det likevel noen av kategoriene jeg var usikre på om ville fungere for å besvare mine forskningsspørsmål, selv om funnene var interessante. Jeg begynte derfor arbeidet med å definere kategoriene, steg fem i den tematiske analysen. Jeg laget derfor nye kjerne-kategorier som jeg kunne plassere kategoriene under, for å danne meg oversikt over hvilke kategorier som kunne kobles til forskningsspørsmålene. Noen av kategoriene passet ikke under kjerne-kategoriene som var basert på forskningsspørsmål, og jeg lagde derfor egne kjerne-kategorier som fungerte for disse kategoriene. I tabell 3.4 under kan man se hvilke

kategorier som havnet under hver kjernekategori, og videre hvilke underkategorier de ble delt inn i.

KATEGORIER	KJERNEKATEGORI	UNDERKATEGORI
Identifisere informasjon	Spesialisering (ikke inkludert)	
Prosess		
Relatere	Generaliserende handlinger	Relatere
Søke		Søke
Utvide		Utvide
Begrensninger		
Eksempel	Språklige former for generalisering	Et eksempel
Flere eksempler		Flere eksempler
Generaliserende uttrykk		Generaliserende uttrykk
Betingende utsagn		Betingende utsagn
Variabler		Variabel-karakter
En variabel		- Rekursive mønstre
Ikke-systematisert veksling		- Samvarierende
Systematisert veksling		
Hypoteser	(Ikke inkludert)	

**Tabell 3.4: Visuell tabell av prosessen fra kategorier til kjerne kategorier og videre oppdeling i underkategorier.**

Ettersom noen av kategoriene ikke passet innunder kjernekategoriene som belyser forskningsspørsmålene, måtte jeg ta et valg om å enten ikke inkludere funnene i disse kategoriene i resultatdelen, eller revidere forskningsspørsmål for å også kunne benytte disse funnene for å si noe om elevenes generalisering. På grunn av oppgavens begrensninger i omfang havnet valget på å ikke inkludere disse kategoriene i videre arbeid med å rapportere funn. Det vil si at i resultatdelen, hvor steg seks i tematisk analyse og rapportering av funn kommer frem, ble kun kjernekategoriene «generaliserende handlinger» og «språklige former for generalisering» inkludert. Med tanke på at forskningsspørsmålene skal belyse hvordan elevene generaliserer og hvordan de bruker språket sitt i sine generaliseringer, ønsket jeg å ta med konkrete eksempler på elevenes utsagn i rapportering av resultatene. En kan med det si at resultatdelen ble skrevet illustrativt, fordi dataene ble brukt som eksempler underveis, blant annet med utdrag fra transkripsjoner. På bakgrunn av antall funn i hver kategori ble det umulig å presentere alle eksempler fra hver kategori i resultatdelen, og jeg måtte derfor gjøre en avgrensning av hvilke utdrag fra transkripsjonen som ble inkludert. I denne utvelgelsen av eksempler var det viktig å inkludere utdrag fra begge intervjuene, selv om det var flere tilfeller hvor det ene av intervjuene viste et «fenomen» tydeligere. Dette for å gi et så riktig bilde som over hodet mulig på variasjonene i hvordan elevene uttrykte seg.

### 3.5 Studiens troverdighet

Troverdighet er et sentralt begrep i forskning, og refererer til kvaliteten i studiene basert på metodiske valg, hvilken informasjon de metodiske valgene har ført til og hvordan forskeren har trukket konklusjoner av denne informasjonen. Studiens troverdighet er avhengig av reliabilitet som vi også kan kalle pålitelighet, samt validitet som består av indre og ytre gyldighet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222-223).

### 3.5.1 Reliabilitet

Om en studie er pålitelig skal en annen forsker kunne gjøre de samme metodiske valg for å undersøke de samme fenomenene og samtidig oppnå de samme resultatene (Schweigert, 2006, s. 45). Postholm & Jacobsen (2018, s. 223-224) hevder at pålitelighet i kvalitativ studie kan være utfordrende å vurdere med tanke på at møtet mellom forsker og deltakere er spesielt i form av at det dannes et samspill i akkurat den situasjonen. Det kan derfor være mer fornuftig å vurdere hvilken påvirkning man som forsker har på deltakerne og hvordan en tilgjengeliggjør sine metodiske valg åpen for refleksjon, i vurderingen av studiens pålitelighet.

Om man kan vise til flere konkrete eksempler fra datamaterialet er det noe som kan øke påliteligheten i en studie. Med det kan leser benytte eksemplene fra datamaterialet i egne refleksjoner over metodiske valg og hvilke funn som ble gjort som resultat av den bestemte datainnsamlingen. I datainnsamlingsprosessen var det viktig å anerkjenne flere av løsningene som deltakerne kom frem til, og forsøke å samtale med dem på en slik måte at det forhindre deltakerne å gi svar basert på hva de trodde jeg ønsket å høre. Dette ble også understreket for dem i forkant, at det ikke er mulig å svare feil ettersom alle deres tanker var ønskelige.

Alle metodiske valg som er gjort er i tillegg beskrevet tidligere i metodedelen, inkludert begrunnelser og refleksjoner til hvorfor akkurat disse valg ble gjort. Konkrete eksempler på elevenes utsagn er videre presentert i resultatdelen for å bidra til bedre forståelse for de funnene som er gjort. Valg som vi mennesker gjør kommer av vårt epistemologiske ståsted, og når det gjelder vårt epistemologiske ståsted kommer det av hvordan vi mener at kunnskap blir ervervet (Birks, 2014, s. 24). Det er derfor viktig å være bevisst, og reflektere over at andre kan mene at kunnskap dannes på andre måter, men at denne studien tar utgangspunkt i mitt epistemologiske ståsted støttet av teori som deler samme syn, og som har utfordret mitt syn på hvordan kunnskap blir ervervet.

### 3.5.2 Validitet

Å diskutere om studien er pålitelig er som beskrevet ikke nok for å vurdere dens troverdighet, en må også vurdere gyldigheten i studien. Når en skal vurdere gyldighet i en studie vurderer man i hovedsak om man har benyttet metoder som egner seg til å undersøke det man ønsker, altså at det er en sammenheng mellom metode og fenomen (Schweigert, 2006, s. 45). Gyldighet deles igjen inn i indre og ytre gyldighet.

Når en studie er godt designet uten faktorer som forstyrrer resultatene som er presentert, kan man si at studien bærer preg av indre gyldighet. Da er det viktig å være bevisst på hva som er vanlige forstyrrelser i den type design man selv har valgt, slik at man kan unngå disse (Schweigert, 2006, s. 45). I denne studien kan vi basert på beskrivelsen av indre gyldighet diskutere om valget med å gjennomføre gruppeintervju, hvor elevene måtte dele sine løsninger og ideer med flere enn meg, kan ha påvirket funnene som ble gjort i analysen. Vurderingen om hvorvidt individuelle intervju fremfor gruppeintervju ville gitt større grad av gyldighet ble gjort i forkant av datainnsamlingen, hvor jeg konkluderte med at individuelle intervju kunne ha følt mer konfronterende og utrygt ut for deltakerne, enn gruppeintervju hvor elevene hadde flere trygge mennesker rundt seg. Valget med å gjennomføre gruppeintervju er altså et nøye overveid valg, men som likevel kan ha gått på bekostning av studiens indre gyldighet i noe grad. Valg av oppgaver er også noe som kan påvirke studiens indre gyldighet. En må da vurdere om oppgavene som er valgt egner seg for å undersøke fenomenet som skal studeres. I denne studien er formålet å undersøke elevenes generaliserende handlinger og hvordan

elevene formulerer generaliseringer, og det var derfor behov for å bruke oppgaver knyttet til dette i datainnsamlingen. Etter jeg hadde valgt tema for studien, leste jeg blant annet om generalisering beskrevet av Mason et al. (2010, s. 22), og oppdaget at han presenterte en rekke oppgaver som kunne benyttes i arbeid med generalisering. Jeg valgte derfor en oppgave fra kapittel 2 kalt «creepy crawlies» (Mason et al., 2010, s. 40). Denne oppgaven egnert seg derimot ikke helt til å undersøke ønskede fenomen fullstendig, slik den opprinnelig var formulert, og jeg omformulerte derfor oppgaven slik at den ble bedre egnet, men valgte i tillegg å også bruke den opprinnelige oppgaven. Valget med å omformulere oppgaven kan derfor ha bidratt til å øke den indre gyldigheten i denne studien, ved at oppgavene som ble gitt bidro til at elevene kunne benytte generaliserende handlinger og formulere generaliseringer basert på sine løsninger av oppgavene.

En studie med høy grad av ytre gyldighet karakteriseres ved at resultatene kan overføres til andre lignende situasjoner og med andre deltakere (Schweigert, 2006, s. 46). Generalisering er ikke et matematisk tema i seg selv i skolen som man går gjennom, men noe man får erfaring med å gjøre gjennom arbeid med andre matematiske tema. Det kan derfor være større variasjoner i hvordan elever generaliserer enn det for eksempel kan være i elevenes kunnskap i multiplikasjon. På grunn av at utvalget i denne studien i tillegg er lite, vil det være vanskeligere å kunne overføre resultatene til andre studier. Det kan derfor i denne studien være vanskelig å oppnå ønsket ytre gyldighet, og en må derfor akseptere resultatene som noen av veldig mange muligheter for hvordan elever i 5.trinn uttrykker sine generaliseringer.

### 3.6 Etiske overveielser

Et viktig etisk prinsipp innenfor forskning er informert samtykke. Dette går ut på at deltakerne har fått nødvendig informasjon om hva det innebærer å delta i studien, at de har forstått informasjonen, og at deltakelsen er frivillig. En må også vurdere om deltakerne er i stand til å gi samtykke, eventuelt deres foresatte om deltakerne er barn og unge under 15 år (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 247-249). I forkant av studien fikk elevene i den aktuelle klassen muntlig informasjon om prosjektet gjentatte ganger, både i forbindelse med utlevering av samtykkeskjema og innsamling av skjemaene. Elevene hadde også mulighet til å lese mer nøyaktig informasjon om prosjektet i det kombinerte samtykke- og informasjonsskrivet, som også deres foresatte kunne lese før de ga samtykke på elevenes vegne. Når samtykker var innhentet og datainnsamlingen skulle gjennomføres, var det likevel noen av elevene som hadde gitt samtykke som ikke ønsket å delta i datainnsamlingen, og dette ble tatt hensyn til.

En sentral etisk overveielse i forskning som man bør ta hensyn til er hvordan innsamlet datamateriale kommer frem i studien. En bør da passe på at dataene i studien skal presenteres korrekt slik de ble innhentet og på en slik måte at innholdet får samme betydning til tross for at det kan være utfordrende å gjengi den fullstendige konteksten som hører til. Dette prinsippet handler også at data ikke skal forfalskes eller at sentral data blir utelatt fra studien. I tillegg må man sørge for at deltakerne i studien ikke blir fremstilt på en negativ måte gjennom den dataen som er presentert, og data som kan gi negativ fremstilling av deltakere bør derfor bli ekskludert fra studien (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 251-252). I resultatdelen har jeg derfor presentert funn på en illustrativ måte med konkrete eksempler fra datamaterialet, fremfor en ren analytisk presentasjon av funn hvor dataene forklares med forskerens egne ord (Terry et al., 2017, s. 32-33). Dette fordi elevenes egen stemme kommer bedre frem gjennom en

illustrativ presentasjon, samt at man er sikret at dataene er presentert korrekt. Likevel har jeg i resultatdelen beskrevet og forklart utdragene fra datamaterialet med egne ord, for å kunne forklare konteksten rundt utsagnene slik at de får samme betydning som i den konteksten de ble til i.

I en del studier kreves det at personlige opplysninger blir samlet inn, blant annet i form av underskrifter for å gi samtykke eller så kan selve datainnsamlingen innebære personopplysninger. Om en studie er utformet slik at personopplysninger blir innhentet, skal studien meldes til NSD – Norsk senter for forskningsdata. Personopplysninger er all type informasjon som kan bidra til at man kan bli identifisert i studien (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 252). I min studie var det behov for å beholde personlige opplysninger lagret i form av samtykke, slik at det også var mulig å trekke dette samtykket. I tillegg ble lydfiler og videofiler beholdt gjennom prosjektperioden. Prosjektet ble derfor meldt til NSD før samtykker ble innhentet, og prosjektet ble godkjent til å kunne gjennomføres slik det var tenkt.

Selv om et prosjekt er godkjent av NSD, er det likevel viktig at personlige opplysninger innhentes og behandles på en god måte. Dette går ut på om det som skal undersøkes kan være sensitiv informasjon for deltakerne, om kravet til hvilken informasjon som skal innhentes blir en for stor byrde for deltakerne eller om det er mulig å gjenkjenne deltakerne ut i fra empirien som blir presentert i studien (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 249-250). Det er vanskelig som forsker å avgjøre hva som er for sensitivt eller for stor byrde for en deltaker, da det er individuelt hvordan det oppleves. Likevel krever denne studien lite utlevering av personlige opplysninger, og fokuset holdes til matematiske ideer og tanker. Deltakerne i prosjektet viste engasjement og glede for å kunne delta i prosjektet, og det er derfor liten grunn til å tro at dette etiske prinsippet ikke blir overholdt. All personlig informasjon blir i tillegg anonymisert i presentasjonen av data, og det er derfor minimal sjanse for å kunne identifiseres i datamaterialet. Transkripsjonene ble også skrevet på bokmål for å anonymisere deltakerne ytterligere. For å i tillegg sikre deltakernes personvern underveis i prosjektet ligger alt datamaterialet i et arkiv på mitt hjemmeområde på NTNU med AES-256 kryptering. I det krypterte arkivet er i tillegg dokumenter som inneholder personlige opplysninger om deltakerne beskyttet med passord.

## 4 Resultat

I resultatdelen vil jeg først presentere funn knyttet til det første forskningsspørsmålet; «Hvilke generaliserende handlinger kan identifiseres i elevenes arbeid?». Dette kommer frem i delkapittel 4.1, generaliserende handlinger. Videre i delkapittel 4.2, språklige former for generalisering, vil jeg presentere funn knyttet til forskningsspørsmål 2; «Hvordan uttrykker elevene generaliseringer i sitt arbeid?». Både i delkapittel 4.1 og 4.2 presenterer jeg først tabeller som viser forekomsten av både generaliserende handlinger og hvilke former for generaliseringer som kom til uttrykk, før jeg videre går inn på eksempler på hvordan disse funnene kom til syne i mitt datamateriale. Som beskrevet i metoddelen av hvordan resultatene ble rapportert, er eksemplene valgt med tanke på å gi et så korrekt bilde som mulig av hvordan elevene faktisk uttrykte seg. Dette innebærer å gi eksempler fra begge intervjuene hvor jeg har forsøkt å representere de deltakende elevene så jevnt som mulig. Videre vil det i fremstillingen av funnene ikke være et skille mellom oppgave 1 og 2, ettersom oppgavene har flere likhetstrekk og er bygd opp med flere av de samme ideene knyttet til funksjonsforhold.

### 4.1 Generaliserende handlinger

Det kommer frem av analysen at elevene benytter flere generaliserende handlinger, og de er beskrevet videre i underkapitlene; relatere, søke og utvide. I tabell 4.1 kan man se en oversikt over antall funn gjort knyttet til elevenes generaliserende handlinger.

Kategorier fra analysen		Antall funn i hver kategori
Relatere		11
Søke		5
Utvide	Utvide	4
	Anerkjennelse av begrensninger i kontekst	3

**Tabell 4.1: Funn knyttet til generaliserende handlinger**

Som en kan se av tabellen ble det gjort flest funn av handlingen relatere, som viser at elevene i stor grad forsøker å se sammenhenger i de oppgavene de møter. I tabellen er anerkjennelse av begrensninger i kontekst inkludert, og denne kategorien betegnes i utgangspunktet ikke som en generaliserende handling, men er inkludert i funnene av elevenes generaliserende handlinger innunder handlingen utvide. Dette fordi en oppgave kan utvides til å gjelde generelt om man for eksempel fjerner begrensninger i kontekst.

#### 4.1.1 Relatere

Å relatere handler i følge Ellis (2007, s. 235-236) om at en begynner å oppdage sammenhenger i de oppgaver man arbeider med, uten at man helt klarer å peke på hvilke sammenhenger dette er. Innenfor denne generaliserende handlingen kan man enten relatere til situasjoner eller objekter. Den generaliserende handlingen «relatere» ble identifisert flere steder i datamaterialet, og det første eksempelet jeg vil trekke fram viser hvordan en elev relaterer nåværende situasjon til en ny situasjon som hun skaper selv. I dette eksempelet arbeider elevene med oppgave 1, vedlegg 3.

82. Elev 2: Jeg hadde litt sånn tanke jeg også men jeg begynte å tenke på sånn gangegreier men det blir litt sånn eh.
83. Maja: Jo men det er ikke feil det heller
84. Elev 2: For da kunne jeg ka, da begynte jeg å tenke på fire gange seks begynte jeg å tenke på det /0.5/ litt sånn rart. Og så telle liksom hvor mange ganger det ble, til det ble femti begynte jeg å tenke på.

I dette utdraget svarer elev 2 på et tidligere spørsmål fra meg, hvor jeg hadde spurt om de kunne forklare hvordan de tenkte. De hadde da på forhånd kommet frem til kun en løsning så langt i intervjuet, hvor løsningen var fem av hvert dyr. Elev 1 hadde forklart sin løsning før elev 2, hvor han blant annet hadde forklart at en øgle med fire bein og en bille med seks bein til sammen utgjorde ti bein til sammen. Da elev 2 først begynte å forklare at hun relaterte situasjonen til multiplikasjon, trodde jeg først at hun ville bygge videre på at ett av hvert dyr til sammen ble ti bein, og multiplisere dette med fem for å oppnå målet om femti bein. Elev 2 skapte derimot en ny situasjon som var annerledes fra den eksisterende situasjonen, med tanke på hvilken betydning tallene hadde benyttet i utregning hadde. I den nye situasjonen ville hun multiplisere tallene fire og seks istedenfor å addere slik som klassevennen gjorde. I fortsettelsen virker prosessen å ikke være spesielt rettet mot hvor mange det skal være av hvert dyr, men å komme frem til tallet femti. Hva tallene som brukes i denne utregningen står for ser ikke ut å være i fokus, og når jeg senere spør om hva de representerer, svarer elev 2 at hun tenker at de kanskje representerer beinene. Dette viser at eleven trolig ser noen sammenhenger mellom tallene fire og seks uten å helt ha grep om hvilken sammenheng det her, og forsøker dermed å lage en situasjon ved å relatere til noe nytt, muligens for å se om det kan fungere for å se sammenhengen tydeligere.

I datamaterialet kunne jeg også finne utsagn hvor elevene relaterte til tidligere oppgaver. I utdraget under hadde elevene nettopp fått oppgave 2, og relaterte den nye situasjonen til den forrige situasjonen med oppgave 1 som de allerede hadde kjennskap til.

271. Elev 4: Har den her noe med den?
272. Maja: Eh, du kan jo teste det da, føler du at det har det?
273. Elev 4: Nei men det er sånn, det kan jo ha noe med det

Begge oppgavene hadde samme kontekst selv om oppgavene også var forskjellig i form av at oppgave 2 hadde flere kriterier og inneholdt informasjon om et ekstra dyr. Uten at det kommer eksplisitt frem gjennom datamaterialet, kommer denne relateringen til tidligere oppgave sannsynligvis av at to av dyrene i oppgave 2 var like som i oppgave 1, og at elevene måtte gjennomføre samme prosess med å addere sammen bein i forhold til gitte kriterier for å finne løsninger. Eleven ser derfor en sammenheng mellom oppgavene, og kan benytte samme tenkemåte fra forrige oppgave, som han vet fungerer.

Når elevene hadde arbeidet en liten stund med oppgave 2 og hadde kommet frem til den eneste løsningen som var mulig i den oppgaven, ville jeg undersøke om elevene hadde



en formening om denne oppgaven hadde flere løsninger eller ikke. På mitt spørsmål om hvordan vi kan vite om det finnes flere løsninger relaterte elevene igjen til en tidligere oppgave. I denne situasjonen kom det tydelig frem at det var egenskapene til de involverte tallene og forholdene mellom dem i prosessene i disse oppgavene som elevene relaterte til for å kunne svare på spørsmål fra meg.

313. Maja: Og hvordan vet vi om det finnes flere løsninger på det her?
314. (2.0)
315. Elev 4: Det, du kan jo sikkert ta sånn, to, tre ned to opp eller noe?

Oppgave 2 bygget på de samme tallene som oppgave 1, og elevene kunne gjøre samme veksling som i oppgave 1. Det er denne egenskapen med at dyrene kan veksles som elevene relaterer til i akkurat denne situasjonen, og som de har erfart at fungerte i den første oppgaven. Elevene viser at de ser sammenhenger og relaterer disse sammenhengene til nye lignende oppgaver som de møter på.

#### 4.1.2 Søke

Søke som generaliserende handling innebærer at elevene vil undersøke om ulike sammenhenger som de har kommet frem til faktisk stemmer ved å gjenta bestemte handlinger flere ganger for å teste det de har oppdaget, og dette kan gjøres både ved å søke etter forhold, fremgangsmåte, mønster eller resultat (Ellis, 2007, s. 238). I datamaterialet viste elevene at de brukte den generaliserende handlingen søke gjentatte ganger, for å søke om de kunne finne noen sammenhenger i det de undersøkte. Blant annet søkte de etter om samme fremgangsmåte ville fungere gjentatte ganger, og dette kommer frem i utdraget under. I dette utdraget arbeider elevene fra intervju 1 med oppgave 1, og har begynt å få en forståelse for at det finnes flere løsninger som kan avdekkes ved å bruke samme fremgangsmåte som tidligere.

246. Elev 2: Men skal vi prøve, skal vi prøve å se om vi får til, vi får vell til å gjøre \*akkurat samme hvis dem ligger der og de blir\*
247. Elev 1: \*Kanskje, kanskje vi får til\*, ja kanskje vi får til å gjøre akkurat samme med de her
248. Elev 2: Men vi snur de, skal vi prøve det?
249. Elev 1: Ja vi kan sjekke det, okei jeg må sette på hodet mitt, okei. Fire åtte tolv seksten tjue, åja, fire åtte tolv, nei, fire åtte tolv seksten tjue, det er fire, ehm og så blir det tjuetjue tjue \*åtte trettito\*
250. Elev 2: \*Og så åtte trettito\*
251. Elev 1: Og hvis vi kommer på f, og så, ja etter trettito så kommer vi opp på trettiseks, og så kommer vi, kommer vi på førti, og hvis vi kommer på førti så kan vi ta enda en sånn, og så tar vi bare en bille
252. Elev 2: Ja (2.0) \*det går\*

Her hadde elevene akkurat kommet frem til en løsning ved å addere sammen det maksimale antallet biller som var mulig for å også få plass til et minimumsantall av øgler. Da denne metoden fungerte ønsket elevene å sjekke om det også ville fungere å addere sammen et maksimum av øgler med et minimum av biller, altså søke etter om en fremgangsmåte som fungerte tidligere vil fungere på nytt for å finne en ny løsning. Dette viser at elevene har oppdaget at det vil være mulig å kombinere de to dyrene på forskjellige måter, samt at de har funnet en fremgangsmåte for dette som de gjerne ønsker å søke om vil fungere i flere tilfeller. Søkingen kan også kanskje bidra til at elevene vil være i stand til å forklare hvorfor fremgangsmåten vil fungere, etterhvert.

Å søke etter om samme fremgangsmåte ville fungere var ikke den eneste varianten av søking elevene tok i bruk som en generaliserende handling. Elevene søkte også etter om forhold ville holde seg stabilt, og gjorde dette ved å se på om vekslingen av dyr holdt seg stabile. I forkant av samtalen som befinner seg i utdraget under hadde elevene oppdaget at de kunne bruke tolv som vekslingsenhet når de gikk fra en løsning som hadde elleve øgler og en bille til en løsning som hadde åtte øgler og tre biller.

402. Maja: \*Har du funnet en ny løsning?\*
403. Elev 3: Blir det ikke det svaret der hvis vi tar en gang til?
404. Maja: Mhm, for nå, hvor mang bein endte du opp med til sammen nå?
405. Elev 3: Eh, femti
406. Maja: Femti? Og hva måtte du gjøre for å få til det den her runden?
407. Elev 3: Ehm, tok bort, jeg tok bort tre øgler fra den der
408. Maja: Mhm
409. Elev 3: \*Og to\*

Det som kommer frem i utdraget er at elev 3 har kommet frem til en løsning som er lik en tidligere løsning, og dette er altså samme løsning som den første løsningen de hadde kommet frem til i starten av intervjuet, fem av hvert dyr. På spørsmål fra meg om hvordan hun kom frem til denne løsningen kommer det frem at elev 3 har benyttet samme handling som ved forrige løsning ved å veksle tre øgler og to biller. Det er denne testingen av forhold, i form av veksling, og om det fungerer for å finne nye løsninger som viser at elev 3 benytter denne varianten av den generaliserende handlingen «søke».

Elevene i begge intervjuene var nok gjennomgående opptatt av å komme frem til riktig resultat. Flere ganger i løpet av intervjuene hendte det seg at de var så ivrige på å komme frem til riktig resultat ved addere sammen tallene fire og seks på ulike vis, at de ikke en gang tenkte over hvor mange de hadde av hvert dyr, så lenge de kom frem til femti bein til slutt. Når elevene oppdaget at de kunne benytte veksling av dyr som metode for å finne flere løsninger, viste det seg at det å komme frem til resultatet fortsatt var viktig når elevene begrunnet hvorfor de gjennomførte akkurat den handlingen.

172. Maja: Ja, men her også, har, veldig godt tenkt da, det var en veldig god strategi. Og din strategi, hva er den? [Henviser til elev 4]

173. Elev 4: Det er å ta minus tre her og to mer her
174. Maja: Mhm, og hvorfor gjør du det?
175. Elev 4: Hvorfor? Fordi jeg tenkte meg frem til at det gikk
176. Maja: At det gikk? Og hvorfor går det?
177. Elev 4: Eh, fordi det, hvorfor?
178. Maja: Hvorfor akkurat to og hvorfor akkurat tre?
179. Elev 4: Eh, vet ikke helt hvorfor da, men
180. Maja: For her går det jo tre ned for hver gang, og her går det to opp
181. Elev 4: Det blir til sammen et svar
182. Maja: Mhm
183. Elev 4: Det blir det samme, hele tiden

Den generaliserende handlingen «søke» kommer til syne gjennom at elevene utfører samme handling gjentatte ganger for å komme frem til samme resultat, og dette viser seg ved at elev 4 i utdraget over svarer at «det blir det samme, hele tiden» på spørsmål om hvorfor han benyttet strategien med veksling.

#### 4.1.3 Utvide

Utvide som generaliserende handling går ut på at de sammenhenger og forhold som man oppdager i en spesifikk situasjon gjøres generelt ved å utvide på ulike måter (Ellis, 2007, s. 241). Ellis (2007, s. 241) beskriver at en både kan utvide et fenomen til å gjelde flere situasjoner enn den opprinnelige situasjonen, utvide ved å ta bort kontekstuell informasjon, utvide ved å operere på objekt for å benytte forhold eller utvide ved å fortsette gjeldene mønster. Å utvide et fenomen til å gjelde for flere situasjoner enn den spesifikke situasjonen man befinner seg i er en generaliserende handling som ble identifisert to steder i datamaterialet. I begge tilfellene kom denne handlingen til syne etter at elevene hadde blitt spurt om det finnes andre situasjoner som en kan lage slike oppgaver av, og dette var derfor ikke en generaliserende handling som elevene tok initiativ til selv. En kan likevel se av utdraget under at elev 1 ikke hadde problemer med å tenke seg til lignende situasjoner når han først ble bedt om å tenke utenfor den gjeldende situasjonen.

683. Maja: \*Finnes det andre slike ting som man kan telle\* på en måte slik at man har \*så mange av hver\*
684. Elev 1: \*hvis man jobber\* hvis man jobber i dyrehage for eksempel, og man har så så mye plass til i hvert dyr, så kan jo slike her type oppgaver være ganske
685. Maja: Mhm
686. Elev 1: Bra til å bruke
687. Maja: At det er plass til så så mange dyr i
688. Elev 1: I et habitat på en måte
689. Maja: Okei

690. Elev 1: Så da, hvis det er plass til så så mange dyr og, da kan man jo regne likt i forhold til hvor mye mat de trenger, og sånne ting

Elev 1 forklarer ikke i dette utdraget eksplisitt hvordan en oppgave innenfor denne konteksten ville sett ut, men av forklaringen er det mulig å tenke seg til flere oppgaver basert på denne konteksten. Blant annet kunne oppgaven tatt utgangspunkt i at man har et bestemt antall dyr som en kan plassere fritt i forskjellige habitat. Med informasjonen om mat kan det tenkes at en slik oppgave kan begrenses til å kun ha et lite antall løsninger om det kun er nok mat til et bestemt antall dyr i hvert habitat. Det som utdraget viser er at eleven har en forståelse for at matematisk arbeid med veksling og kombinasjoner kan gjelde flere situasjoner enn akkurat den spesifikke oppgaven de fikk arbeide med under intervjuet, og at ideene og strategiene knyttet til en oppgave kan overføres til andre situasjoner.

En annen variant av den generaliserende handlingen «utvide» som er verdt å se på er handlingen hvor en utvider ved å ta bort informasjon i en spesifikk situasjon slik at man kan lage en generell situasjon. En slik måte å utvide på kunne ha kommet til syne gjennom at elevene anerkjente at den første oppgaven som ble gitt hadde kontekstuelle begrensninger, og at disse begrensningene kunne blitt fjernet for å lage en generell situasjon som også inkluderte negative tall.

118. Elev 4: Men, vi har ganske lite biller, så da er det vanskelig å ta minus, siden da, da blir

119. Maja: Mhm

120. Elev 4: Når vi har en bille, så går det ikke å ta to minus

I utdraget over kan det tenkes at elev 4 anerkjenner at oppgaven har kontekstuelle begrensninger når han viser til at det ikke er mulig å veksle enda en gang i retningen med å ta bort to biller når man kun har en bille igjen. Han sier derimot ikke eksplisitt at det ville fungert å veksle enda en gang om man tok bort begrensningene og inkluderte negative tall. Vi kan derfor ikke si om eleven er i stand til å utvide situasjonen til å gjelde generelt, annet enn at det kommer frem at han har en forståelse for at det finnes begrensninger i oppgaven.

## 4.2 Språklige former for generalisering

Etter at analysearbeidet var gjennomført hadde jeg gjort funn av alle formene for generalisering presentert i rammeverket av Steinweg et al. (2018, s. 297), og eksempler på disse funnene er videre presentert i kapitlene; et eksempel, flere eksempler, generaliserende uttrykk med konkrete tall, betingende utsagn og utsagn med variabel karakter, hvor sistnevnte inneholder beskrivelser av rekursive mønster og samvarierende forhold. En oversikt over antall funn gjort i forbindelse med de ulike formene for generalisering kommer frem av tabell 4.2 nedenfor.

Kategorier fra analysen		Antall funn i hver kategori
Et eksempel		19
Flere eksempler		1
Generaliserende uttrykk med konkrete tall		4
Betingende utsagn		3
Variabel karakter	Rekursive variabler	4

	Samvarierende forhold	6
--	-----------------------	---

**Tabell 4.2: Funn knyttet til språklige former for generalisering.**

Som en kan se av tabellen 4.2 er det absolutt flest funn knyttet til at elevene generaliserer ved hjelp av enkeltstående eksempler. Denne generaliseringsformen ble identifisert hele 19 ganger. En kan også se at det er et høyt antall funn knyttet til at elevene uttrykker generaliseringer med variabelkarakter, hvor de ser at det er en sammenheng mellom variablene i funksjonen. Likevel er det bare ved 6 tilfeller at de mestrer å beskrive hvordan variablene faktisk samvarierer.

#### 4.2.1 Et eksempel

I datamaterialet ble ulike eksempler fra elevene på hvordan oppgaven kunne løses identifisert flere steder. I følge Steinweg et al. (2018, s. 297) skal en ved denne formen for generalisering uttrykke eksplisitt at dette er et eksempel. I analysen av datamaterialet ble det ikke funnet noen tilfeller hvor elevene som deltok i denne datainnsamlingen hadde uttrykt eksplisitt at noen av sine løsninger var et eksempel. I oppgaveløsingen brukte elevene blant annet formuleringer som «vi har», «ble det», «da ender vi opp med» «det er», «hva med» og «da får vi» når de skulle presentere sine løsninger, og selv om disse formuleringene ikke eksplisitt beskriver at dette er eksempler, vil jeg likevel påstå at noen av disse formuleringene indikerer at løsningene kan være det. Et eksempel på dette kan vi se under, der to elever samtaler rundt oppgave 1.

- 66. Elev 1: A okei, ehm, først to øgler
- 67. Elev 2: To øgler
- 68. Elev 1: Ehm en bille
- 69. Elev 2: En bille
- 70. Elev 1: Og en til bille
- 71. Elev 2: Hvor mye er vi på nå da?
- 72. Elev 1: Vi er på tjue
- 73. Elev 2: Vi er på tjue okei
- 74. Elev 1: Okei så tar vi det samme en gang til så pluss to på /1.0/
- 75. Elev 2: Da er vi på førti
- 76. Elev 1: Og så tar vi på en til øgle
- 77. Elev 2: En til øgle
- 78. Elev 1: Å så tar vi på en til bille
- 79. Elev 2: Okei da har vi fem øgler og fem biller

Når elevene i utdraget over hadde kommet frem til at det kunne være fem av hvert dyr, begynte de ikke automatisk å lete etter flere løsninger på egenhånd. Dette kan også indikere at elevene hadde slått seg til ro med at dette ene eksempelet var nok til å kunne besvare oppgaven, og at de ikke ville generalisert ytterligere på eget initiativ. Et eksempel er heller ikke en generalisering i seg selv, noe som også påpekes av Steinweg et al. (2018, s. 297). De beskriver at denne formen for generalisering ikke er fullstendig,

men at man heller fokuserer på at den kan inneholde viktige elementer når det gjelder sammenhenger og mønster, som igjen er betydningsfullt i generaliseringer. Dette er altså et eksempel på at det er mulig å kombinere dyrene, og at det er en noen begrensninger i hvor mange man kan ha av hvert dyr og at det er et forhold mellom variablene, selv om det ikke kommer eksplisitt frem.

I intervju 2 generaliserte elevene også med atskilte eksempler til å begynne med. I motsetning til elevene i intervju 1 ble elev 4 i dette intervjuet raskt oppmerksom på at det muligens kunne finnes flere løsninger til problemet. Til tross for denne oppdagelsen slår elevene seg til ro med å gi ett og ett eksempel på ulike løsninger.

48. Elev 4: Hva med elleve øgler og ei bille?
49. Maja: Ja, for da, hvor mange bein får du av hver da?
50. (3.0)
51. Elev 4: Da blir det førti, blir det førtifire øglebein og så, eh, seks, eh, billebein

I forkant av utdraget over hadde elevene allerede kommet frem til løsningen med fem av hvert dyr, og også her måtte jeg spørre om det kunne finnes flere løsninger på problemet. Denne løsningen ble altså ikke funnet ved at elevene selv tok initiativ til å lete etter flere løsninger på egenhånd, men ble funnet som et resultat av at jeg ønsket at elevene skulle arbeide videre med oppgaven. Dette er heller ingen komplett generalisering, men med viten om at elevene allerede hadde funnet en løsning tidligere, viser eksempelet at elevene har skjønnet at det finnes flere løsninger. Det er en viktig oppdagelse for å kunne gå videre i generaliseringen, og for å kunne få en forståelse for hvorfor bare noen kombinasjoner av dyr fungerer, og hvilken sammenheng det er mellom antall bein for hvert dyr og det endelige antallet man skal ende opp med.

#### 4.2.2 Flere eksempler

Å ramse opp flere eksempler som en form for å uttrykke generaliseringer ble identifisert bare en gang i datamaterialet, og dette skjedde i intervju 2. Innen dette ble gjort hadde elevene allerede kommet frem til flere løsninger, og de hadde også kommet frem til at de kunne veksle tre øgler med to biller for å finne flere løsninger.

128. Elev 4: Blir det åtte, øgler, og, tre biller?
129. Maja: Mhm
130. Elev 4: Og så, fem øgler, to biller, nei, nei, fem, går det med fem fem? Ja det går

Elev 4 hadde i forkant av episoden dette utdraget er hentet fra funnet ulike løsninger ved hjelp av veksling, og i utdraget kan vi se at han begynner å ramse opp ulike løsninger. Dette gjorde han også både før og etter episoden som utdraget er hentet fra, men noe usammenhengende da også de andre elevene ønsket å fortelle hva de hadde kommet frem til og hvordan de tenkte. Det kan derfor hende at denne eleven ville ha ramset opp alle løsningene sammenhengende om de andre i intervjuet ikke hadde pratet samtidig eller om han hadde vært alene. Denne noe usammenhengende forklaringen ble gitt i tillegg til at han skrev opp løsningene, som man kan se av illustrasjon 4.3 lenger ned. Generaliseringen viser at eleven har oppdaget at det finnes flere løsninger på problemet de arbeider med. Selv om eleven mangler å forklare hvorfor det er mulig med flere løsninger og hvorfor en kan veksle, tyder dette eksempelet likevel på at han har

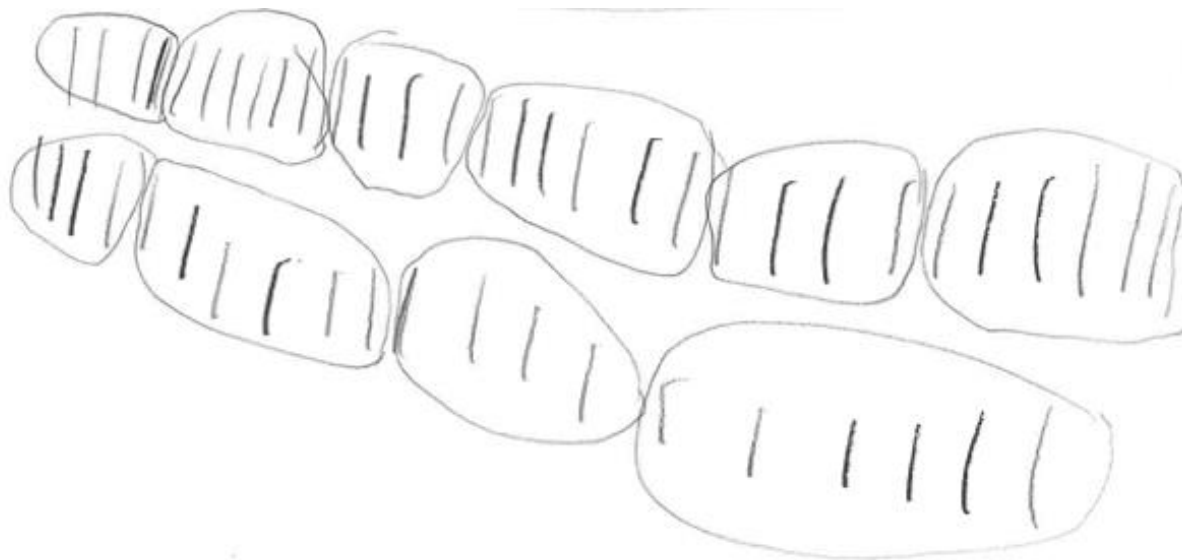
oppdaget betydningen av å beholde forholdet mellom variablene gjennom veksling. I dette tilfellet kan det hende at eleven ikke har et godt nok utviklet matematisk språk for å kunne forklare det.

#### 4.2.3 Generaliserende uttrykk med konkrete tall

At elevene benyttet generaliserende uttrykk i sammenheng med konkrete tall ble identifisert flere steder i datamaterialet. I de delene av datamaterialet hvor denne formen ble funnet, ble det i derimot ikke benyttet konkrete tall eksplisitt. Istedenfor siktet elevene til bestemte løsninger som de hadde kommet frem til, som igjen er løsninger som de har presentert med konkrete tall tidligere. I utdraget under kan vi se et eksempel på denne formen for generalisering i en samtale jeg hadde med elevene i intervju 1 hvor vi diskuterte løsninger knyttet til oppgave 1.

197. Maja: Og det er det dere har gjort her egentlig, for dere har tatt ett av hvert dyr
198. Elev 2: Mhm
199. Elev 1: Så man kommer jo på en måte frem til samme svaret uansett hva man gjør da, synes jeg egentlig.

I utdraget begynte elevene å beskrive en måte å komme frem til en løsning på som de allerede hadde kommet frem flere ganger i løpet av intervjuet, og også samme metode for å komme frem til denne løsningen hadde blitt benyttet gjentatte ganger, ved å tilfeldig addere sammen bein fra hvert dyr. Fremgangsmåten elevene hadde benyttet i forkant av generaliseringen over kan man se i figur 4.1 nedenfor som er hentet fra datainnsamlingen, og den viser at elevene adderte sammen et av hvert dyr annenhver gang.



**Figur 4.1: Skriftlig arbeid hentet fra gruppeintervju 1, fra arbeid med oppgave 1.**

Da jeg påpekte for elevene at den siste løsningen de hadde kommet frem til var samme som en tidligere løsning, kom elev 1 med en replikk som inneholdt et generaliserende uttrykk, altså «samme svaret uansett». Det eleven sikter til med «svaret» er at svaret uansett blir fem av hvert dyr. En kan derfor si at dette er et generaliserende uttrykk i kombinasjon med konkrete tall. Elevene prøver i dette eksempelet å generalisere at det vil kun finnes en løsning, og forsøker å generalisere dette på bakgrunn av at de har

prøvd forskjellige fremgangsmåter som alle leder frem til samme løsning. Ettersom oppgaven hadde flere løsninger vil ikke denne generaliseringen gjelde, og om det faktisk bare hadde vært en løsning i denne oppgaven hadde det likevel vært behov for andre forklaringer enn konkrete eksempler for at generaliseringen kunne ha gjeldt generelt. Likevel viser utdraget at elevene har en forståelse for at man gjennom generaliseringer bør uttrykke at noe alltid vil fungere, selv om de mangler en forklaring på hvorfor det alltid vil fungere.

Elevene i intervju 2 benyttet også denne formen for å uttrykke generaliseringer. Da de hadde arbeidet en stund med oppgave 1 og gjentatte ganger kommet frem til samme løsning spurte jeg elevene om hvordan vi kunne vite at vi hadde funnet alle løsningene, hvor deres svar kommer frem gjennom et generaliserende uttrykk.

228. Maja: Og hvordan kan vi vite at vi har funnet alle løsningene liksom?

229. Elev 5: Når vi tar noe, når noen finner ut noe så er det samme som vi allerede har funnet, \*nesten hele tiden\*

I utdraget over kan vi se at elev 5 beskriver at løsningene de kommer frem til, er løsninger de i følge henne kommer frem til «nesten hele tiden». Også disse løsningene som elev 5 sikter til har blitt presentert med konkrete tall tidligere, og i kombinasjon med at hun uttrykker «nesten hele tiden», kan vi si at dette er et generaliserende uttrykk som kommer i sammenheng med konkrete tall.

#### 4.2.4 Betingende utsagn

Betingede utsagn som en måte å uttrykke generaliseringer på ble kun funnet et fåtall ganger i datamaterialet. De tilfellene som ble funnet ble identifisert i det elevene skulle forklare hvordan de kom frem til fem av hvert dyr. Dette kom de altså frem til ved å legge sammen et av hvert dyr for å lage en tier, for deretter å addere dette fem ganger.

140. Elev 2: Ja og så kanskje litt (.) vi kunne også tenkt fire pluss seks da som er ti fem ganger

I utdraget over fra intervju 1 kommer det betingede utsagnet til uttrykk gjennom at det er betinget at fire pluss seks er ti som man skal ha fem ganger. Det virker å være selvsagt i dette utsagnet hvilken prosess en skal gjennom for å finne en løsning.

24. Elev 5: Eh, jeg tenker at det er fem av hvert da, fordi at, eh, hvis at vi tar fire, f (3.0) Fire pluss seks det blir jo ti, så tar vi det fem ganger, så da, jeg tenker det at det går bra

Det samme kan vi se i utdraget over fra intervju 2. Elev 5 betinger også tieren som kommer av fire og seks bein til en prosess hvor denne tieren skal adderes fem ganger. Elevene har i utdragene oppdaget et mønster fra en spesiell løsning, og generaliseringen kommer i form av at elevene ser på dette mønsteret som en slags regel for hvordan oppgaven skal løses. Dette viser at elevene jo gjerne ønsker å lete etter sammenhenger og mønster, slik som Steinweg et al. (2018, s. 292-293) beskriver, som er et viktig element i generaliseringer.

#### 4.2.5 Utsagn med variabel karakter

Underveis i begge intervjuene kom elevene frem til strategier hvor de kunne veksle dyr for å finne flere løsninger. Akkurat denne vekslingen og elevenes forklaringer på hvordan de kunne veksle handler om at antallet en kunne ha av hvert dyr fungerer som variabler.



Denne formen for å uttrykke generaliseringer ble identifisert gjentatte ganger i datamaterialet, men av ulik grad hvor spesifikt elevene kunne forklare denne vekslingen, og hvilke sammenhenger de faktisk oppdaget. Jeg har derfor valgt å presentere funn innenfor denne kategorien av hvordan elevene uttrykker generaliseringer, ved hjelp av å se på funksjonsforhold i deres forklaringer. De ulike typene funksjonsforhold som ble identifisert i datamaterialet var rekursive mønstre og samvarierende forhold.

#### 4.2.5.1 Rekursive mønstre

Når elevene skulle uttrykke generaliseringer basert på å se på variabler, ble det identifisert utsagn i datamaterialet hvor de forsøkte å kun ta utgangspunkt i en av variablene. Dette skjedde både i intervju 1 og intervju 2. I disse oppgavene var det derimot ikke mulig å bruke kun en av variablene for å finne en løsning som stemte med kriteriene som var gitt i oppgaveteksten.

130. Elev 1: Siden jeg kom bare frem til førtiåtte hvis jeg bare skulle brukt de her, så kom jeg bare frem til førtiåtte.
131. Maja: Jah
132. Elev 1: Ehm, men hvis jeg har sånn der fire fire \*åtte tolv (2.0) tolv\*
133. Elev 2: \*Jeg vil ha på en fugl jeg nå siden de har to bein\*

I utdraget ser vi at elev 2 likevel forsøker å se hvordan en kunne løst problemet en møter på ved å benytte seg av kun en av variablene, ved å foreslå at en fugl med to bein ville fungert med tanke på de kriteriene som er gitt. I figur 4.2 har jeg laget et eksempel på hvordan rekursivt mønster i oppgave 1 visuelt kan komme til syne, hvor en ser at bruk av kun en av variablene ikke vil fungere fordi det ikke går opp i 50, som er det totale antall bein oppgaven etterspør. Kolonnen for biller er altså tom fordi man ikke tar hensyn til mer enn en variabel om man fokuserer på rekursive funksjonsforhold.

Øgler	Biller
1 = 4 bein	
2 = 8 bein	
3 = 12 bein	
4 = 16 bein	
5 = 20 bein	
6 = 24 bein	
7 = 28 bein	
8 = 32 bein	
9 = 36 bein	
10 = 40 bein	
11 = 44 bein	
12 = 48 bein	

**Figur 4.2: Visuelt eksempel på rekursivt mønster i oppgave 1 i denne studien.**

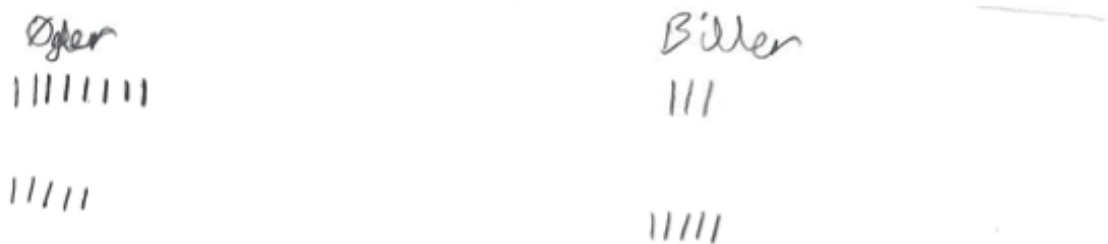
Utdraget viser altså at elevene ikke tar hensyn til at begge variablene må benyttes, samtidig som de ser at en variabel heller ikke vil fungere. I etterkant av dette utdraget ender de derfor opp med å argumentere for at begge variablene er nødvendige i løsningene av problemet.

#### 4.2.5.2 Samvarierende forhold

Generalisering av samvarierende forhold ble identifisert flere steder i datamaterialet, med noe forskjell i hvor nøyaktig elevene mestret å beskrive funksjonsforholdene. Elevene i intervju 1 hadde blant annet behov for en del støtte for å kunne se sammenhengene som befant seg mellom variablene i oppgave 1.

369. Maja: Ja, \*ja\*, tre biller, eller, ja. (3.0) Hva er forskjellen i de løsningene her nå? (2.0) Hva skjedde med antallet der, og der, i forhold til det og det? Hvis dere ser på antall streker, hvor mange dere har av hvert dyr
370. Elev 2: Vi prøver kanskje å ta bort noen av øglene kanskje, litt større av billene, tar bort litt av billene, litt større av øglene kanskje
371. Elev 1: Enten \*så tar vi større av\* øglene
372. Maja: \*Og hvor mye tok dere bort da?\* Hvor mange bein av hvert tok dere bort? Og hvor mange bein la dere på?
373. Elev 1: Altså jeg tipper jo sikkert at, jeg føler at jeg tok bort veldig mange sånne biller, og så tok jeg på eks, ganske mange øgler

I forkant av dette utdraget hadde elevene arbeidet en god stund med oppgave 1, og hadde ved flere tilfeller fått spørsmål om hvordan man kunne finne alle løsningene og hvordan man kunne vite om man faktisk hadde funnet alle løsningene. Istedenfor å svare på spørsmålene i utgangspunkt i de løsningene de allerede hadde funnet, fortsatte de å lete etter nye løsninger. Jeg forsøkte derfor i utdraget å støtte elevene ved å stille spørsmål knyttet til de løsningene de allerede hadde oppdaget. Som man ser av linje 369 i utdraget over har jeg flere pauser i løpet av replikken hvor jeg venter på at elevene skal oppdage noen sammenhenger. Etter at de har blitt bedt om å se på hva som har skjedd med antallet fra det ene tilfellet til det andre i løsningene sine, oppdager elev 2 at en kan legge til flere av et dyr og ta bort noen fra det andre dyret.



**Figur 4.3: Skriftlig arbeid hentet fra gruppeintervju 1, fra arbeid med oppgave 1.**

De noe uspesifikke samvarierende forholdene ble oppdaget av elevene ved å se på de visuelle illustrasjonene som de selv hadde tegnet opp under oppgaveløsningen, som kommer frem av figur 4.3. Det bestemte antallet som kunne veksles var fortsatt ukjent for elevene, men ved hjelp av illustrasjonen ble det tydeligere for elevene at en av variablene ble større og en av variablene ble mindre i de løsningene de hadde funnet. Dette var også tilfellet for elevene i intervju 2 når de først oppdaget sammenhengene mellom variablene, ettersom de også i starten hadde en forståelse for at det var noe man kunne veksle, uten at de helt kunne se hva som var vekslingsenheten. Utdraget under

viser likevel at elevene har en begynnende forståelse for at det befinner seg samvarierende forhold mellom de to variablene i oppgaven.

Etterhvert som elevene bygget videre på tanken om at man kan legge til noen av det ene dyret og ta bort noen fra det andre dyret, fant de ut at en måtte operere med en sum på tolv ben for å kunne veksle, og at dette utgjorde at en måtte veksle med 3 når det gjaldt øgler og 2 når det gjaldt biller.

188. Maja: Men, hvorfor kan du ta bort liksom tre her, men bare pluss på to her?
189. Elev 4: Fordi biller har flere føtter enn øgler
190. Maja: Mhm
191. Elev 4: Så da må du ta bort tre fordi det blir tolv
192. Maja: Mhm
193. Elev 4: Og så da, du trenger bare å ta bort to, fordi det blir tolv
194. Maja: Ja

I utdraget over ser vi at elev 4 forklarer hvorfor antallet man veksler av hvert dyr ikke er symmetrisk. Denne forklaringen viser at elev 4 har forstått at det er et samvarierende forhold mellom de to variablene, og at den totale vekslingsenheten må holdes konstant til tolv ben, og at dette fører til at det er et større antall av øgler som må veksles enn biller.

44 = 11 øgler 1 biller

8	3
5	5
2	7

**Figur 4.4: Skriftlig arbeid hentet fra gruppeintervju 2, fra arbeid med oppgave 1.**

Generaliseringen av samvarierende forhold ble gitt i forbindelse med at eleven også hadde tegnet en tabell som han benyttet som hjelp til å forklare hvorfor det vil fungere å veksle med tolv ben. Denne tabellen kommer til syne i figur 4.4. Illustrasjonen sier ikke noe om den mentale aktiviteten som foregikk hos elev 4 i seg selv, men den bidrar til å styrke vår forståelse av hva eleven uttrykker muntlig og at eleven har oppdaget viktige sammenhenger når det gjelder funksjonsforhold. I illustrasjonen viser eleven at begge variablene vil endres jevnt, og at de er avhengige av hverandre. Denne forståelsen for at

det er samvarierende forhold mellom variablene i oppgaven kunne også identifiseres hos flere av elevene, både i intervju 1 og 2.

## 5 Diskusjon

I dette kapitlet vil jeg diskutere funnene fra resultatdelen opp mot relevant teori. I lys av definisjonen av generalisering ville nok muligens ikke alle forskere og lærere som har en del erfaring og kunnskap om matematisk generalisering, kategorisert elevenes utsagn som generaliseringer. Flere vil nok tenke at de elementene som beskrives i definisjonen må komme tydelig frem av generaliseringen. Jeg ønsker derfor å benytte teorien til å peke på og diskutere «generaliseringspotensialet» i elevenes handlinger og uttrykksmåter. Jeg vil videre drøfte sammenhengen mellom generaliserende handlinger, former for å uttrykke generaliseringer og spesialisering og hvordan denne sammenhengen kan benyttes i arbeid med elevers generaliseringer. Til slutt vil jeg bringe frem hvilke implikasjoner for undervisning denne studien bidrar til.

### 5.1 Elevenes generaliserende handlinger

Mason (2008, s. 64) beskriver viktigheten av at elevene er med i hele prosessen i arbeid med oppgaver og ikke bare generaliseringsprosessen. Han hevder at elevene vil være i mye mindre stand til å kunne generalisere om de ikke får utforske og prøve seg frem selv på å formulere generaliseringer. Spesielt de generaliserende handlingene relatere, søke og utvide som Ellis (2007, s. 235) fremmer i sitt rammeverk kan knyttes opp mot prosesser som vil være svært fordelaktige når elevene skal generalisere. Alle de tre generaliserende handlingene gjorde jeg funn av i mitt datamateriale.

Som Ellis (2007, s. 235-236) beskriver kommer den generaliserende handlingen relatere til syne gjennom at elever ser sammenhenger mellom noen situasjoner, ideer, problemer eller objekter, men at de ikke helt mestrer å se på hvilken måte det finnes en sammenheng mellom dem. Det betyr at elevene ikke helt har kommet til det punktet hvor de kan generalisere, men for å kunne generalisere så må de gjennom prosessen med å se sammenhenger, noe som gjerne starter når elevene begynner å relatere. Som beskrevet i resultatkapittelet relaterte elevene både til nye og tidligere situasjoner, selv om hovedvekten lå på å relatere til tidligere situasjoner. En kunne se at elevene ønsket å finne sammenhenger, og det er også noe Steinweg et al. (2018, s. 292-293) tar opp som noe barn gjerne streber mot. Det vil igjen være helt avgjørende for hvorvidt elevene vil kunne generalisere, ettersom det å uttrykke sammenhenger er et viktig element i generalisering. En kan med dette si at handlingen «relatere» har et stort potensial når det gjelder å utvikle mer formelle generaliseringer. At elevene setter i gang handlinger som å relatere vil kunne føre til at de oppdager sammenhenger som bidrar til bruken av handlingen søke, slik at de kan sjekke om sine oppdagelser vil fungere. Og som Steinweg et al. (2018, s. 292) beskriver, føler barn ofte på et behov for å generalisere sammenhenger, strukturer og forhold som de oppdager. Ved jevnlig eksponering for oppgaver hvor elevene kan ta i bruk de generaliserende handlingene, vil de derfor også få øvelse i å generalisere, noe Ellis (2007, s. 257) beskriver som fordelaktig for utviklingen av elevenes formelle generaliseringer.

Når elever oppdager noen sammenhenger, vil de gjerne også benytte den generaliserende handlingen søke for å sjekke om disse sammenhengene stemmer, det kan blant annet være om resultatet stemmer eller om fremgangsmåten alltid vil fungere. Som uttrykt tidligere vil elevene gjerne gjenta bestemte handlinger for å undersøke dette

(Ellis, 2007, s. 238). I utdraget fra intervju 2 i underkapitlet «søke» i resultatdelen, linje 172-183, begrunnet elevene blant annet hvorfor de benyttet en spesifikk handling gjentatte ganger for å komme frem til det riktige resultatet. Gjennom å bruke handlingen søke har elevene i dette eksempelet kommet frem til hva det generelle vekslingsforholdet mellom løsningene er, som i dette tilfellet har ført til at elevene kan finne alle løsninger på problemet og har mulighet til å uttrykke mer eksplisitte generaliseringer. Også i dette eksempelet mangler elevene å forklare hvorfor resultatet vil bli det samme hele tiden, men det er likevel tydelig at handlingen søke bidrar til at elevene ser større sammenhenger. I dette utdraget gjelder dette sammenhengen mellom variablene.

Når det gjelder den generaliserende handlingen utvide vil denne ha større sammenheng med begrepet generalisering enn spesialisering, da det å kunne utvide spesifikke situasjoner til å gjelde mer generelt inngår i flere definisjoner av generalisering, blant annet definisjoner formulert av Mason et al. (2010) og Radford (2010). Denne handlingen ble også identifisert flere steder i datamaterialet, men med få tilfeller hvor det ble gjort på eget initiativ. Igjen kan også dette tyde på at elevene har behov for større grad av modellering og gjentakelse av å øve på dette for å utvikle ferdigheten (Mason, 2008, s. 63-64). Det ble imidlertid gjort funn i datamaterialet som hadde stort potensial til å kunne betegnes som utvide. En av elevene påpekte implisitt i flere tilfeller at konteksten hadde begrensninger som gjorde at han ikke kunne veksle videre. Han mestrer altså å gjenkjenne at det er noen begrensninger der som gir et bestemt antall løsninger. Potensialet i denne oppdagelsen ligger i at de kontekstuelle begrensningene kan fjernes for å utvide problemet slik at det vil finnes uendelig antall løsninger og videre lage et generelt uttrykk som gjelder for alle løsninger. Mason et al. (2010, s. 40) hevder at matematisk tenkning ikke begynner før man er engasjert av et matematisk spørsmål, å spesielt egne matematiske spørsmål. Å kunne utvide en situasjon dreier seg i bunn og grunn om å stille spørsmål om problemet man står ovenfor kan gjelde flere situasjoner enn den spesifikke situasjonen man befinner seg i. Det vil si at den generaliserende handlingen å utvide kan gi større rom for matematisk tenkning. At funnene viser at elevene i liten grad tar initiativ til denne handlingen selv, gir oss en forståelse for at de ved mange anledninger kan gå glipp av muligheten for å fremme egen matematisk tenkning.

Generalisering omtales som et av kjerneelementene i den nye læreplanen, LK20. I dens definisjon av generalisering beskrives det blant annet at elevene skal få muligheter til å oppdage sammenhenger på egenhånd, og ikke bli presentert ferdige løsninger. Dette innebærer at elevene får utforske selv i matematisk arbeid, og at de videre kan benytte algebra for å formalisere sine oppdagelser (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Fokus på de generaliserende handlingene vil kunne bidra til nettopp dette, fordi en gjennom arbeid med disse handlingene anerkjenner de viktige prosessene som bør finne sted for at elevene skal tilegne seg kunnskap om hvordan de kan uttrykke formelle generaliseringer.

## 5.2 Elevenes generaliseringer i arbeid med funksjoner

I dette delkapitlet ønsker jeg å drøfte elevenes generaliseringer i denne studien opp mot blant annet rammeverket over ulike uttrykksmåter av generaliseringer beskrevet av Steinweg et al. (2018, s. 297). I følge Mason (2008, s. 64) er det nødvendig å gi elevene god tid på arbeid og erfaring med generalisering, slik at de etterhvert kan lære å uttrykke formelle og gyldige generaliseringer. Av resultatdelen har det kommet frem at elevene i denne studien på forskjellige måter evner å uttrykke generaliseringer i arbeid med funksjoner i problemløsningsoppgaver. I intervjuene benyttet elevene sitt naturlige

språk, samt utregninger og tegninger på papir for å uttrykke sine generaliseringer. De noe varierende funnene kan tyde på at det ikke har vært stort fokus på generalisering i denne klassen, men med hjelp og støtte i intervjuene mestrer elevene likevel å generalisere de samvarierende funksjonsforholdene. Dette er den formen for generalisering som ligger tettest opp mot å kunne defineres som gyldige.

Definisjonen som er benyttet for å avklare begrepet generalisering i denne studien går på det å kunne oppdage sammenhenger som gjelder generelt og det å kunne se forbi spesifikke løsninger (Mason, 1996, s. 69). Steinweg et al. (2018, s. 297) beskriver at de fire første kategoriene i rammeverket for hvordan elevene generaliserer ikke nødvendigvis vil være gyldige generelle utsagn, men legger til at de likevel inneholder viktige elementer når det gjelder de generelle sammenhengene og mønstrene. Av de fire første kategoriene i rammeverket ble det gjort flest funn av «et eksempel». I disse generaliseringene manglet det forklaringer og beskrivelser på hvilke sammenhenger eller mønster elevene hadde oppdaget i de forskjellige eksemplene, og med tanke på antall funn gjort av denne formen for generalisering er det tydelig at elevene ikke har god erfaring med å generalisere. Disse funnene ble i tillegg stort sett gjort tidlig i intervjuene, noe som bidrar til å forsterke inntrykket av at elevene ikke er vant med å selv ta initiativ til å forsøke å generalisere når de møter nye oppgaver. Dette kan for eksempel komme av de sosiomatematiske normene som befinner seg i denne klassen (Yackel & Cobb, 1996, s. 460), noe jeg vil komme tilbake til senere i diskusjonsdelen.

Elevene formulerte også betingende utsagn og generaliserende uttrykk med konkrete eksempler som forsøk på å generalisere, og gjennom disse eksemplene kan man likevel se at elevene har forståelse for viktige elementer innenfor generalisering, så fremt at de blir utfordret til å si noe mer enn å kun gi enkeltstående eksempler. På linje 199 i utdraget som presenteres i underkapitlet «generaliserende uttrykk med konkrete tall» sier blant annet elev 1 at: «Så man kommer jo på en måte frem til samme svaret uansett hva man gjør da, synes jeg egentlig». Ordet «uansett» i dette utdraget er et eksempel på et element elevene gjerne benytter i generaliseringer i et forsøk på å kunne si noe om hvorfor et fenomen vil fungere generelt og at man gjennom generaliseringer setter ord på sammenhenger og mønster hos et fenomen (Radford, 2010, s. 42). Å generalisere virker derfor ikke å være helt nytt for elevene, men en kan likevel se at de har behov for mer erfaring innenfor dette området.

Å generalisere ved å gi flere eksempler på et fenomen ble som sagt kun identifisert en gang i datamaterialet. Dette ble gjort etter at elevene hadde oppdaget de samvarierende funksjonsforholdene, for å vise alle tilfellene hvor en kunne veksle i variablene for å finne alle løsningene på problemet. Dette viser igjen at det er mest naturlig for elevene å eksemplifisere når de skal generalisere hvorfor noe alltid vil fungere, i dette tilfellet generalisering av funksjonsforhold. Elevenes generaliseringer av funksjonsforhold bar også preg av at de hadde variabelkarakter. Blant annet forsøkte de å fokusere på rekursive mønster i sine generaliseringer, men dette uten hell ettersom det ikke var mulig å ta utgangspunkt i kun en variabel. Elever som er vant med å fokusere på rekursive forhold kan få problemer med å ta hensyn til to variabler (Pinto et al., 2022, s. 1185). Dette kan derfor forklare hvorfor elevene gjerne ønsket å fokusere på en av variablene selv om det ikke var mulig. Etterhvert mestret de likevel å fokusere på begge variablene slik at de oppdaget de samvarierende funksjonsforholdene, samt at de mestret å beskrive dem til tross for at det hos flere av elevene krevde en god del støtte fra meg. Pinto et al. (2022, s. 1186) hevder at elevenes evne til å oppdage funksjonsforhold vil øke etterhvert som de får mulighet til å arbeide med forskjellige

funksjoner med ulike variabler. Elevene vil i midlertid ha større problemer med å faktisk representere disse forholdene enn å oppdage dem. Dette kan gi oss en forståelse for at elevene i denne studien også kunne oppdage noen sammenhenger som de hadde vanskeligheter med å kommunisere. Funnene som er blitt presentert har likevel bare tatt utgangspunkt i de oppdagelsene som kommer frem av datamaterialet. Det kan derfor bety at resultatene kan være noe avvikende, uten at man vet det helt sikkert.

### 5.3 Sammenhengen mellom rammeverk benyttet i studien

Ellis (2007, s. 255-256) hevder at man kan finne mange likhetstrekk blant forskjellige rammeverk som har som formål å undersøke generalisering på ulike måter, enten det er prosessen mot generalisering eller hvordan elever uttrykker generalisering, og at noen av rammeverkene vil fungere overlappende. Ellis (2007, s. 256) beskriver videre at i egen studie kunne hun finne sammenhenger mellom generaliserende handlinger og hvilke generaliserende utsagn elevene formulerte, og at rammeverkene hun presenterer lar forsker undersøke prosessene elevene går gjennom fra start til slutt. Med tanke på at rammeverk innenfor dette området har så mange likhetstrekk og er overlappende kan man derfor tenke seg til at det samme gjelder for denne studien, selv om ikke samme rammeverk er benyttet for å undersøke elevenes formuleringer av generaliseringer.

En av sammenhengene en kan finne i rammeverkene i denne studien er blant annet likhetene mellom begrepene spesialisering og generaliserende handlinger, samt likheten mellom generalisering og elevenes former for å uttrykke generaliseringer. Om man definerer spesialisering så vil man finne igjen mange av de samme trekkene som befinner seg i definisjonen av generaliserende handlinger, og dette går blant annet på at man i begge tilfellene først blir kjent med et problem, før man oppdager sammenhenger, mønster eller forhold, og at man undersøker sine oppdagelser mer nøyaktig (Ellis, 2007, s. 235; Mason et al., 2010, s. 21-22). Det samme gjelder for generalisering og elevenes former for å uttrykke generaliseringer, at en altså vil finne mange kjennetegn mellom dem om man forsøker å gi en definisjon av hva de ulike begrepene går ut på. Forskjellen i disse definisjonene ligger nok likevel i at det er større takhøyde for hva som kan kalles en generalisering i definisjonen av de ulike formene for generalisering. I begge tilfellene er det likevel et krav om at generaliseringen skal gi uttrykk for en generell struktur (Mason et al., 2010, s. 22; Steinweg et al., 2018, s. 297).

Mason et al. (2010, s. 21) trekker også frem at det finnes en sammenheng mellom spesialisering og generalisering, som går ut på at disse prosessene vil fungere styrkende sammen og legge til rette for matematisk tenkning. Dette fordi vår matematiske tenkning kan dra fordeler av at man bruker tid på å bli kjent med og forstå et problem, og at man reflekterer over det man kommer frem til (Mason et al., 2010, s. 22). Uten spesialisering vil man ikke gjøre nye oppdagelser og finne løsninger som kan generaliseres, og uten generalisering vil man være i mindre stand til å bedømme om sine fremgangsmåter og resultater faktisk fungerer. Basert på likhetene mellom forskjellige begrep påpekt i avsnittet ovenfor, er det av dette liten tvil om at det også vil være stor sammenheng mellom generaliserende handlinger og hvordan elever uttrykker generaliseringer. Både teori og funn fra denne studien peker mot at elevenes generaliseringer blir styrket av hvordan de møter det aktuelle problemet. Om en utnytter fordelene generaliserende handlinger kan ha for elevenes generaliseringer, er det godt mulig at elevene over tid vil bli i stand til å kunne uttrykke formelle og gyldige generaliseringer. Med tanke på betydningen generalisering har i definisjonen av algebra (Kaput, 2008, s. 11), er det ikke utenkelig at anerkjennelsen av sammenhengen mellom



generaliserende handlinger og hvordan elevene uttrykker generaliseringer vil påvirke elevenes algebraiske forståelse.

## 5.4 Elevers generaliseringer i arbeid med problemløsningsoppgaver og implikasjoner for undervisning

I de fleste av funnene som er gjort av elevenes generaliseringer i denne studien kan en se at det ikke er veldig tydelig hva som generaliseres og om det kan betegnes som en generalisering i det heletatt. Som beskrevet av Steinweg et al. (2018, s. 293) har ikke barn nødvendigvis utviklet et godt nok matematisk språk for å kunne generalisere formelt, og dette kan være årsaken til at de generaliseringene som har kommet frem av datamaterialet ikke har en tydelig formell karakter. For å oppdage elevenes generaliseringer hevder de derfor at en er nødt til å godta barnas naturlige språk og andre former for å uttrykke generaliseringer på.

Ellis (2007, s. 223) deler også synet på at elevenes generaliseringer i mange tilfeller blir oversett fordi elevene ofte ikke uttrykker formelle generaliseringer og at de derfor ikke aksepteres som gyldige. Dette fører igjen til at undersøkelser gjort for å avdekke elevenes generaliseringer gir dårlige resultater. Som beskrevet tidligere vil heller ikke alle kategoriene i rammeverket av Steinweg et al. (2018, s. 297) kategoriseres som gyldige generaliseringer, men de vil likevel inneholde viktige bestanddeler av det en kan kalle gyldige generaliseringer. Disse utsagnene vil derfor være av stor betydning når en skal avdekke elevenes generaliseringer, og for hvilke resultater en får når man undersøker generaliseringer. Av denne studien kan en se at elevene jo mestrer å generalisere i ulik grad. Noen elever gjør det på eget initiativ uten støtte, mens andre trenger å oppfordres og eventuelt med behov for litt støtte. Til tross for at det ble gjort funn av at elevene mestrer å generalisere, uavhengig om de er gyldige eller ikke, vil fortsatt målet være å utvikle denne ferdigheten for å i større grad kunne generalisere formelt.

At elevene må oppfordres til å generalisere kan ha en sammenheng med de vanene elevene har fra klasserommet når det gjelder muntlig aktivitet i matematikk. Det kan bety at de sosiale normene i klassen er lagt slik at elevene ikke behøver eller ikke er vant med å måtte forklare hva de tenker i klasserommet. Om det er tilfellet, gjelder likevel ikke dette matematikk alene, men vil være en sosial norm som gjelder flere fag (Yackel & Cobb, 1996, s. 460). Tilfellet kan også være at elevene anser enkle tallsvar uten videre forklaring som matematisk akseptert i sitt felleskap, og dette vil gjelde kun i matematikk (Yackel & Cobb, 1996, s. 460). Om felleskapet har etablert en sosiomatematisk norm som tilsier at utdypende generalisering ikke er nødvendig, og at enkle tallsvar er nok til å telles som et matematisk gyldig svar, så kan det forklare hvorfor elevene i flere tilfeller ikke tok initiativ til generalisering.

Lærerens rolle har stor betydning i dannelsen av sosiomatematisk normer i klassen (Yackel & Cobb, 1996, s. 462). Når læreren stiller klassen et matematisk spørsmål hvor det for eksempel blir spurt om hvorfor noe alltid vil gjelde, tolker elevene reaksjonene læreren har på deres respons på spørsmålet, og vil etterhvert tilpasse seg det som virker å være matematisk aksepterte ytringer (Yackel & Cobb, 1996, s. 462). I klassen hvor datainnsamlingen ble gjennomført har det i midlertid vært flere forskjellige matematikklærere de siste årene, og det er derfor vanskelig å fastslå om dette har hatt noen påvirkning på hvordan elevene generaliserer og hvilke vaner som er blitt dannet i klasserommet når det gjelder generalisering. Kanskje finnes det ikke tydelige

sosiomatematiske normer for hva som er akseptert i dette felleskapet ettersom flere matematikklærere har vært med å forme elevene gjennom sine reaksjoner på deres bidrag i klassen. Det er derfor ikke utenkelig at elevene også kan være noe forvirret og usikker når det kommer til generalisering. I følge Pinto et al. (2022, s. 1200) kan elevene imidlertid i noen tilfeller mestre å generalisere selv om de ikke har en vane med å gjøre det i sine matematikktimer. Dette kan kanskje forklare variasjonene blant deltakerne på hvorvidt de mestret å generalisere og ikke.

## 6 Avsluttende ord

Denne studien bidrar til en dypere forståelse for behovet for mer arbeid med tidlig algebra på barneskolen. Generaliseringstilnærmingen innenfor tidlig algebra bidrar til bare en av flere muligheter for å utvikle den algebraiske tenkemåten (Kendal & Stacey, 2004, s. 73). I studien påpekes det hvordan hele prosessen frem mot uttrykking av generaliseringer vil ha stor betydning for elevenes forståelse av fenomenet generalisering. Studiens funn viser store variasjoner i hvordan elevene mestrer å generalisere, noe som ikke er overraskende med tanke på hva tidligere forskning tilsier. Som sagt kan dette forklares gjennom at klassens vaner med å generalisere kan ha vært varierende, og at den sosiomatematiske normen i klasserommet ikke har krevd gyldige og formelle generaliseringer av elevene. Om man likevel aksepterer flere former for generalisering, og ikke bare de formene for generalisering som defineres av blant annet Mason et al. (1985, s. 24) og (Radford, 2010, s. 42), vil man likevel kunne se at elevene evner å oppdage viktige mønster og sammenhenger, og at de i noen grad også klarer å uttrykke dette. Av funn gjort i forbindelse med elevenes generaliserende handlinger, kan man også se at elevene gjerne ønsker å oppdage sammenhenger, noe som også samsvarer med hva Steinweg et al. (2018, s. 292-293) påpeker. Samtidig kan det av resultatene tyde på at elevene har liten erfaring med dette. Av denne studien kan man derfor si at elevene vil ha forutsetninger for å kunne generalisere og utvikle sin algebraiske tenkning, men at det krever mer arbeid innenfor temaet med generaliserende handlinger og mulighet til å være med i prosessen med både spesialisering og generalisering (Mason, 2008, s. 64).

Jeg ønsker også å påpeke noen av denne studiens begrensninger. Selv om denne studien i noen grad samsvarer med tidligere forskning og en derfor skulle tro at funnene representerer normalen for arbeid med generaliseringer hos 5. klasseelever, så er ikke dette tilfellet. Denne studien er gjort i to små grupper på tre elever i hver gruppe, hvor settingen også var noe uvanlig i forhold til at disse elevene ble tatt ut av vanlig klasseromssituasjon. Denne studiens resultater vil derfor kun gjelde for disse elevene, og kan i beste fall representere et gjennomsnitt for akkurat denne klassen, ettersom alle i klassen vil ha vært påvirket av de samme sosiomatematiske normene i løpet av 5 år i samme matematikkklasse. Selv om resultatene bare vil gjelde for disse elevene, er det ikke utenkelig at situasjonen rundt elevenes erfaringer med generalisering og tidlig algebra vil være lik andre steder. Denne studien representerer derfor bare en av mange muligheter for hvilken forståelse elever på 5. trinn har for algebra og generalisering. Videre kan en også si at studiens resultater også vil være påvirket av metodiske valg jeg har gjort og hvilken teori jeg har inkludert for å drøfte disse resultatene. Oppgavene som er valgt i denne studien har blant annet bidratt til å påvirke resultatene som er utledet av den, og en kan her vurdere om andre oppgaver ville ha egnet seg bedre til å undersøke gjeldene problemstilling. Her er nok svaret at det vil finnes flere oppgaver som hadde egnet seg bedre, og det at jeg likevel valgte å benytte de oppgavene som er presentert i denne studien kan begrense denne studien i noe grad. Valg av rammeverk har også betydning for hvilke resultater jeg har endt opp med, og også her vil det nok trolig finnes rammeverk som er bedre egnet for å diskutere hvordan elevene arbeider med generalisering, og som kunne gjort funnene enda tydeligere. Det er derfor flere valg som jeg har gjort i denne studien som andre forskere sannsynligvis ville ha gjort annerledes,

hvor de trolig ville ha kommet frem til andre resultater enn de som er presentert i denne studien, til tross for at samme tema hadde vært studert. En må derfor ta i betraktning at denne studien vil være noe påvirket av min subjektivitet, selv om jeg gjennom hele studien har forsøkt å holde meg så nøytral som over hodet mulig.

Avslutningsvis vil jeg trekke frem nye spørsmål som har dukket opp underveis i arbeidet med denne oppgaven, som jeg mener det hadde vært interessant å undersøke videre, og som videre forskning innen temaet kunne tatt utgangspunkt i. Som det er kommet frem av diskusjonsdelen, kan de sosiomatematiske normene i denne klassen være en mulig forklaring av de resultatene som ble utledet av analysen. Ettersom læreren er en stor bidragsyter til hvordan sosiomatematiske normer blir dannet (Yackel & Cobb, 1996, s. 462), kunne det vært interessant å undersøke hva læreren kan gjøre for å fremme elevenes algebraiske tenkemåte gjennom arbeid med generalisering. En kunne da undersøkt hvilken verdi lærerne tillegger prosesser som spesialisering og generalisering, og hva de faktisk legger i begrepene. Med tanke på at det krever arbeid over en lengre periode for å fremme algebraiske tenkemåter gjennom arbeid med spesialisering og generalisering, ville en undersøkelse over tid med observasjoner og intervju vært bedre egnet til å kunne si noe om dette. En kunne med en slik undersøkelse dermed fått et lærerperspektiv på hvordan tidlig algebra og generalisering prioriteres på barneskolen.

# Referanser

- Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 115-136). Springer Netherlands.
- Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag : resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Universitetsforlag.
- Birks, M. (2014). Practical philosophy. *Qualitative methodology: A practical guide*, 17-29.
- Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom : transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.
- Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, 3(2), 77-101.  
<https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Bass, H. & Ball, D. L. (2003). *Thinking mathematically : integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. L. (2008). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 235-272). Routledge.
- Carson, N. (2007). Erfaringer og refleksjoner ved bruk av gruppeintervju i kvalitativ forskning. *Norsk pedagogisk tidskrift*, 91(3), 220-231.  
<https://doi.org/10.18261/ISSN1504-2987-2007-03-04>
- Clark, T., Foster, L., Sloan, L. & Bryman, A. (2021). *Bryman's social research methods* (Sixth edition. utg.). Oxford University Press.
- Creswell, J. W. (1998). *Qualitative inquiry and research design: choosing among five traditions*. SAGE publications.
- Ellis, A. B. (2007). A Taxonomy for Categorizing Generalizations: Generalizing Actions and Reflection Generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221-262. <https://doi.org/10.1080/10508400701193705>
- Flick, U. (2022). *An introduction to qualitative research* (Seventh edition. utg.). SAGE.
- Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for research in mathematics education. Monograph*, 9, 40-177. <https://doi.org/10.2307/749946>
- Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter*. Caspar forlag.
- Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (s. 344-352). The University of Melbourne.
- Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 5-17). Routledge.
- Kendal, M. & Stacey, K. (2004). Algebra: A World of Difference. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (s. 329-346). Kluwer Academic Publishers.
- Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 87-106). Springer Netherlands.  
[https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3\\_6](https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_6)
- Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 65-86). Springer Netherlands. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3\\_5](https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5)

- Mason, J. (2008). Making use of children's powers. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 57-94). Routledge.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically* (Rev. utg.). Addison-Wesley.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd. utg.). Prentice Hall.
- Palmér, H. & Bommel, J. v. (2018). Problem Solving in Early Mathematics Teaching—A Way to Promote Creativity? *Creative education*, 9(12), 1775-1793. <https://doi.org/10.4236/ce.2018.912129>
- Pinto, E., Cañadas, M. C. & Moreno, A. (2022). Functional Relationships Evidenced and Representations Used by Third Graders Within a Functional Approach to Early Algebra. *International journal of science and mathematics education*, 20(6), 1183-1202. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0>
- Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.
- Radford, L. (1996). Some Reflections on Teaching Algebra through Generalization. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 107-111). Springer Netherlands. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_7)
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169>
- Schweigert, W. A. (2006). *Research methods in psychology : a handbook* (2nd. utg.). Waveland.
- Steinweg, A. S., Akinwunmi, K. & Lenz, D. (2018). Making implicit algebraic thinking explicit: Exploiting national characteristics of German approaches. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 283-307). Springer International Publishing.
- Terry, G., Hayfield, N., Clarke, V. & Braun, V. (2017). Thematic analysis. I W. Carla & R. Wendy Stainton (Red.), *The SAGE handbook of qualitative research in psychology* (s. 17-37). SAGE Publications.
- Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn* (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05>
- Welder, R. M. (2012). Improving Algebra Preparation: Implications From Research on Student Misconceptions and Difficulties. *School Science and Mathematics*, 112(4), 255-264. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00136.x>
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 27(4), 458-477. <https://doi.org/10.2307/749877>

# Vedlegg

**Vedlegg 1:** Samtykkeskjema

**Vedlegg 2:** Godkjenning fra NSD

**Vedlegg 3:** Oppgave 1

**Vedlegg 4:** Oppgave 2

**Vedlegg 5:** Intervjuguide

## **Vil du delta i forskningsprosjektet**

### ***”Resonnering og argumentasjon i problemløsningsoppgaver”?***

Dette er et spørsmål til ditt barn om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke elevers resonnering og argumentasjon i arbeid med problemløsningsoppgaver. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

#### **Formål**

Formålet med dette prosjektet er å undersøke hvordan elever på barneskolen resonnerer og argumenterer i arbeid med problemløsningsoppgaver. Bakgrunnen for dette prosjektet kommer av at elever vil få en dypere forståelse i matematikk, hvis de får erfaring med å argumentere for sine matematiske ideer. Da er det interessant å undersøke hvordan elever resonnerer og argumenterer i arbeid med oppgaver for å få en innsikt i om dette er et område som bør få ytterligere fokus. Foreløpig er forskningsspørsmålet i prosjektet slik; «Hvordan resonnerer og argumenterer elever på barnetrinnet i arbeid med problemløsningsoppgaver?». Det vil sannsynlig bli endret til et smalere problem, men hovedvekten på det som skal utforskes vil ligge på resonnering og argumentasjon.

Prosjektet om resonnering og argumentasjon som er skissert, inngår i en masteroppgave i matematikdidaktikk, med overordnet tema begynneropplæring. Alt som blir innhentet av opplysninger og datamateriale vil kun brukes til dette formålet, og deretter slettes ved prosjektslutt.

#### **Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**

I dette prosjektet er det jeg, Maja Grostad, som skal skrive prosjektet, veileder Heidi Dahl og NTNU - institutt for lærerutdanning som er ansvarlig for prosjektet.

#### **Hvorfor får du spørsmål om å delta?**

Ditt barn får mulighet til å delta i dette prosjektet ettersom jeg har jobbet på skolen han/hun går på, og derfor er det større sannsynlighet for å føle seg trygg under datainnsamlingen og bedre muligheter for å tilpasse oppgavene for de som ønsker å delta. Datainnsamlingen vil kun skje med denne klassen, og ditt barn får derfor delta sammen med noen han/hun kjenner.

#### **Hva innebærer det for deg å delta?**

Hvis ditt barn ønsker å delta i dette masterprosjektet, innebærer det at det i datainnsamlingen vil benyttes små gruppeintervju som metode, med 2-3 elever per gruppe. Deltakelsen vil innebære å arbeide med en problemløsningsoppgave, og med mulighet for tilpasninger i oppgaven for å enten gjør den enklere eller utvide den. Elevene vil bli bedt om å tenke høyt sammen med medelever under sin resonnering, og argumentere for det de finner ut. Under intervjuet kan elevene få spørsmål om hvordan de har tenkt eller hvorfor man kan vite om noe stemmer, dette for å undersøke hvordan elever i denne alderen argumenterer. Dette gruppeintervjuet vil bli filmet og videre transkribert. Frivillig fysisk elevarbeid som blir gjort under gruppeintervjuet vil bli samlet inn som datamateriale. Gruppeintervjuet med



oppgaveløsning vil ta omtrentlig 15-30 minutter. Datainnsamlingen vil skje i elevenes skoletid, i januar/februar 2023. Ønsker foresatte å få et innblikk i hvilke oppgaver elevene skal arbeide med under gruppeintervjuet, kan dere kontakte meg, Maja Grostad, som er ansvarlig for dette masterprosjektet.

### **Det er frivillig å delta**

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle deres personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis han/hun ikke vil delta eller senere velger å trekke seg.

Alle elevene vil få samme muligheter til å delta i oppgaveløsningen, uavhengig om man deltar i prosjektet eller ikke, og på denne måten vil ingen bli utenfor felleskapet. De elevene som ikke vil delta i prosjektet vil derimot ikke bli filmet.

### **Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er kun meg, Maja Grostad, som skriver denne oppgaven og veileder som vil ha tilgang til personvernopplysningene som samles inn i datainnhenting
- Navnet og kontaktopplysningene deres vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Datamaterialet vil bli innhentet ved hjelp av utstyr lånt fra NTNU, og videre bli lagret på en kryptert og passordbeskyttet mappe.

Deltakerne i dette prosjektet vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen av masteroppgaven. Transkripsjoner og svar på oppgaver kan bli inkludert i publiseringen av masteroppgaven, men vil ikke bli tilknyttet informasjon om deltakerne.

### **Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?**

Opplysninger som er innhentet gjennom datainnsamling vil anonymiseres og slettes ved prosjektslutt, når oppgaven er godkjent. Prosjektet vil etter planen leveres 25. mai 2023, og kan forventes avsluttet innen sensurfrist, som er inntil 3 måneder. Alle opplysninger tilknyttet deltakerne, samt innhentet datamateriale gjennom fysisk elevarbeid, video- og lydopptak vil bli slettet ved prosjektslutt.

### **Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

### **Dine rettigheter**

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende (Welder, 2012)
- å få slettet personopplysninger om ditt barn
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU ved Maja Grostad (student), [majagro@stud.ntnu.no](mailto:majagro@stud.ntnu.no) eller Heidi Dahl (Førsteamanuensis i matematikdidaktikk), [heidi.dahl@ntnu.no](mailto:heidi.dahl@ntnu.no)
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen, [thomas.helgesen@ntnu.no](mailto:thomas.helgesen@ntnu.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD- Norsk senter for forskningsdata sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata på epost ([personverntjenester@sikt.no](mailto:personverntjenester@sikt.no)) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Maja Grostad  
*Student*

Heidi Dahl  
*Veileder*

---

## Samtykkeerklæring

Barnets navn: \_\_\_\_\_

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet ”Resonnering og argumentasjon i problemløsningsoppgaver”, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- At mitt barn deltar i gruppeintervju med medelever
- At det tas videoopptak av barnet under intervjuet
- at det tas lydopptak av barnet under intervjuet
- at det samles skriftlig arbeid fra barnet under gruppeintervjuet

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

-----  
(Signert av prosjektdeltakers foresatt(e), dato)

Leveres tilbake på skolen med underskrift fortløpende.

## **Vedlegg 2:** Godkjenning fra NSD

**Referansenummer**

234249

**Vurderingstype**

Standard

**Dato**

29.12.2022

**Prosjekttittel**

Resonnering og argumentasjon i problemløsningsoppgaver

**Behandlingsansvarlig institusjon**

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

**Prosjektansvarlig**

Heidi Dahl

**Student**

Maja Grostad

**Prosjektperiode**

03.01.2023 - 25.08.2023

**Kategorier personopplysninger**

Alminnelige

**Lovlig grunnlag**

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 25.08.2023.

**Kommentar**

OM VURDERINGEN

Sikt har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

**TYPE PERSONOPPLYSNINGER**

Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger.

**UTDYPENDE OM LOVLIG UTVALG**

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

**FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER**

Vi har vurdert at du har lovlig grunnlag til å behandle personopplysningene, men husk at det er institusjonen du er ansatt/student ved som avgjør hvilke databehandlere du kan bruke og hvordan du må lagre og sikre data i ditt prosjekt. Husk å bruke leverandører som din

institusjon har avtale med (f.eks. ved skylagring, nettspørreskjema, videosamtale el. )  
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i  
personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og  
sikkerhet (art. 32).

#### MELD VESENTLIGE ENDRINGER

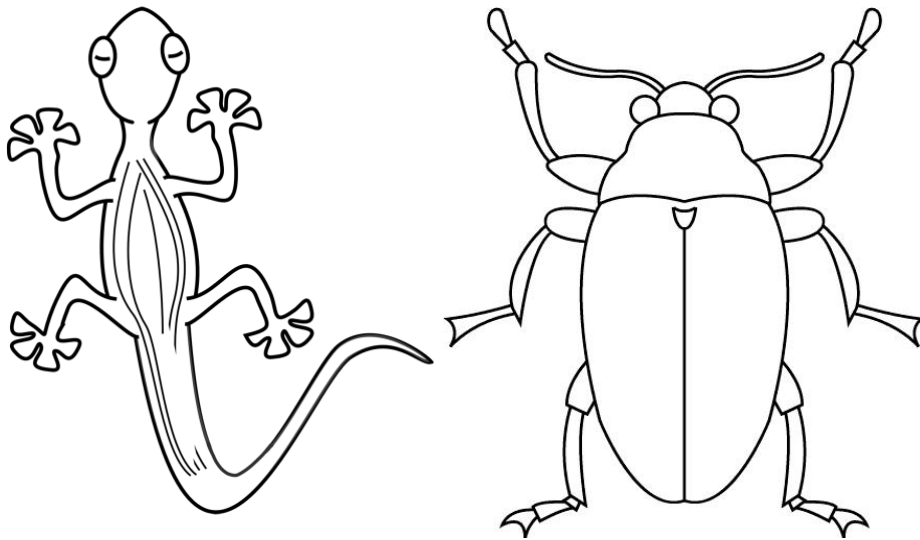
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være  
nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Se våre nettsider om hvilke  
endringer du må melde: <https://sikt.no/melde-endringar-i-meldeskjema>

#### OPPFØLGING AV PROSJEKTET

Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av  
personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

**Vedlegg 3:** Oppgave 1



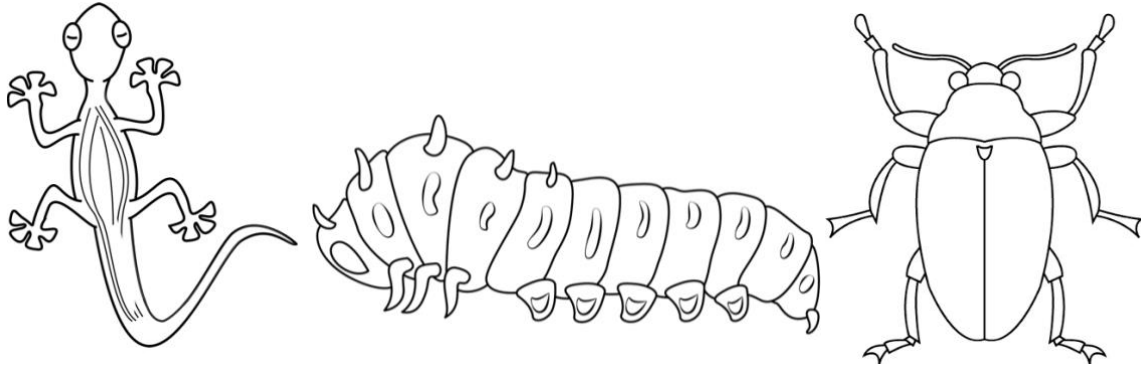
Martin samler på øgler (4 bein) og biller (6 bein). Til sammen har dyrene 50 bein. Hvor mange har Martin av hvert dyr?

**Vedlegg 4:** Oppgave 2



Eva samler på øgler, biller og larver. Hun har flere larver enn øgler og biller til sammen. Totalt i samlingen er det 15 hoder og 38 ben. Hvor mange har Eva av hvert dyr?

## INTERVJUGUIDE



**Martin samler på øgler (4 bein) og biller (6 bein). Til sammen har dyrene 50 bein. Hvor mange har Martin av hvert dyr?**

- Forklar hvordan dere tenker?
- Hvorfor løste dere oppgaven på denne måten?
- Veit vi om det er et antall av noen av disse dyrene vi helt sikkert har?
- Hvordan vet dere at dette er riktig? Hvordan kom dere frem til disse tallene?
- Er det flere mulige løsninger?
- Hvordan fikk dere disse tallene i de nye løsningene?
- Hvordan kan man finne alle løsningene? Hva må man gjøre?
- Hvordan visste dere dette?
- Hva skjer for med tallene (antall dyr av hver sort) for hver nye løsning dere finner?
- Har dere funnet den beste strategien for å finne alle løsningene?
- Hvordan vet dere at dere har funnet alle løsningene?
- Tror dere man finne andre situasjoner i verden man kan lage en slik oppgave av?
- Kan dere tegne det dere har tenkt?
- Hva betyr tegningen?

**Eva samler på øgler, biller og larver. Hun har flere larver enn øgler og biller til sammen. Totalt i samlingen er det 15 hoder og 38 ben. Hvor mange har Eva av hvert dyr?**

- Hvilken informasjon er det vi faktisk veit?
- Forklar hvordan dere tenker?
- Hvordan vet dere at dette er riktig? Hvordan kom dere frem til disse tallene?
- Er det flere mulige løsninger? Hvorfor/hvorfor ikke?
- Hvordan vet dere at dere har funnet alle løsningene?
- Hva er det man trenger å vite for å lage en oppgave hvor det bare er 1 mulig løsning? Hva må oppgaven da inneholde? Er det nok å bare vite antall bein? Hvorfor/hvorfor ikke?

