Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Eline Aanensen

Fra figurmønster til funksjoner

En kvalitativ studie av elevers generaliseringsstrategier og samvariasjonelle tilnærming til funksjoner i arbeid med figurmønster

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 5.-10. trinn
Veileder: Arne Kristian Amdal

Mai 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Eline Aanensen

Fra figurmønster til funksjoner

En kvalitativ studie av elevers generaliseringsstrategier og samvariasjonelle tilnærming til funksjoner i arbeid med figurmønster

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 5.-10. trinn
Veileder: Arne Kristian Amdal
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne masteroppgaven er skrevet i studieåret 2022/2023, og er knyttet til matematikkfaget ved grunnskolelærerutdanningen 5-10, ved NTNU i Trondheim. Formålet med studien er å undersøke hvilke generaliseringsstrategier elever benytter seg av i arbeid med figurmønster, hvilke nivåer av samvariasjonell tilnærming til funksjoner elevene har, samt undersøke sammenhengen mellom strategiene og nivåene. En samvariasjonell tilnærming til funksjoner handler om hvordan endringer i en variabel påvirker en annen variabel.

Det er mangel på litteratur som knytter generalisering av figurmønster opp mot funksjoner og skissering av grafer. Denne studien gir derfor et bidrag til litteraturen innenfor dette området. Dette, sammen med egen interesse og erfaringer rundt figurmønster, motiverte meg for å skrive denne masteroppgaven.

Forskningsspørsmålene for studien er:

1. Hvilke generaliseringsstrategier bruker elever på 10. trinn i arbeid med figurmønster?
2. Hvilke nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner viser elevene når de beskriver grafene de har skissert av figurmønstrene de har generalisert?
3. Hvilken sammenheng er det mellom elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner og deres generaliseringsstrategier?

Studien er en kvalitativ studie. Datainnsamlingen er gjort gjennom fem oppgavebaserte intervju, innsamling av elevers skriftlige arbeid med oppgavene og egne feltnotater gjort under intervjuene. Elevene arbeidet i grupper med to oppgaver i én time. Det var en figurmønsteroppgave med lineær vekst, og en med kvadratisk vekst. Datamaterialet er analysert ved å bruke et rammeverk for generaliseringsstrategier utviklet av Lannin (2005) og et rammeverk for elevers nivå i beskrivelser av samvariasjonell tilnærming til funksjoner utviklet av Carlson et al. (2002).

Resultatene viser at elevene bruker en kombinasjon av ulike strategier for å komme frem til generelle formler. Elevene evner i stor grad å finne en generell formel for figurmønstrene. Det var flere elever som fant en generell formel til det lineære figurmønsteret enn til det kvadratiske figurmønsteret. Videre viser resultatene at elevenes beskrivelser av samvariasjonell tilnærming til funksjoner varierer i de to oppgavene. Elevene gav bedre beskrivelser av den lineære grafen enn den kvadratiske grafen. Elevene evnet i stor grad å koble utviklingen av ulike figurmønstre opp mot et koordinatsystem, hvor det ble funnet en korrelasjon mellom gruppene som hadde skissert en riktig graf og gruppene som hadde et høyt nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner.

Funnene i studien indikerer likevel at elevene hadde utfordringer med å oppdage sammenhengen mellom et generelt uttrykk og grafen til dette uttrykket. Spesielt gjaldt dette det kvadratiske uttrykket. Ingen av elevene begrunner grafenes vekst med komponentene i det generelle uttrykket.

Mine funn og tidligere forskning viser muligheten figurmønster har for å utvikle forståelse for generalisering og en samvariasjonell tilnærming til funksjoner. Denne koblingen kan gi et ekstra bidrag til den tradisjonelle undervisningen med algebra og funksjoner hver for seg.

Abstract

This master's thesis is written during the academic year 2022/2023 and is related to the subject of mathematics at the department of teacher education at NTNU in Trondheim. The purpose of the study is to examine which generalization strategies students use when working with figure patterns, which levels of covariational approach to functions the students have, as well as to examine the connection between the strategies and levels. A covariational approach to functions is about how values of variables change in relation to each other.

There is a lack of literature linking generalization of figure patterns to functions and constructing graphs. Therefore, this study contributes to the literature at this area. This, together with own interest and experiences around figure patterns, is the motivation behind this thesis.

The research questions of the study are the following:

1. What generalization strategies do the 10th grade students use when working with figure pattern?
2. What level of covariational approach to functions do the student show when they are asked to describe the graphs they have constructed of the figure patterns they have generalized?
3. What connection is there between the students' covariational approached to functions and their generalization strategies?

This study is a qualitative study. The data collection has been done through five task-based interviews, collection of students' written work with the assignments and field notes made during the interviews. The students worked together in groups with two tasks for one hour. There was a figure pattern task with linear growth and one with quadratic growth. The data has been analyzed using a framework for generalization strategies developed by Lannin (2005) and a framework for students' level in descriptions of a covariational approach to functions developed by Carlson et al. (2002).

The results show that the students use a combination of different strategies to construct an equation. They are mostly able to find a general equation for the figure patterns. There were more students who found a general equation for the linear figure pattern than for the square figure pattern. Furthermore, the results show that the students' descriptions of the covariational approach to functions vary in the two tasks. The students gave better descriptions of the linear graph than the quadratic graph. The students were mostly able to connect the development of different figure patterns to a coordinate system, where a correlation was found between the groups that had drawn a correct graph and the groups that had a high level of co-variational approach to functions.

Nevertheless, the findings in the study indicate that the students had challenges in discovering the connection between a general expression and the graph of this expression. In particular, this applied to the quadratic expression. None of the students where able to explain the graph's growth with the components of the general expression.

The findings, together with previous research, show the possibility figure patterns have for developing an understanding of generalization and a covariational approach to functions. This link can make an additional contribution to the traditional teaching of algebra and functions separately.

Forord

Denne masteroppgaven er avslutningen på mine fem år som student ved grunnskolelærerutdanningen 5-10 ved NTNU i Trondheim. Det har vært noen lærerike og fine år som er verdifulle for mitt fremtidige virke i læreryrket. Arbeidet med masteroppgaven har vært spennende, tidvis krevende og ikke minst læringsrikt. Det er mange som fortjener en takk for søtten og hjelpen jeg har fått i prosessen med å skrive oppgaven.

Jeg vil først rette en takk til min veileder Arne Amdal. Jeg setter stor pris på veiledningen og de konstruktive tilbakemeldingene jeg har fått gjennom hele prosessen.

Jeg vil også rekke en takk til ungdomsskolen, elevene i utvalget og elevenes lærer som stilte opp i min studie og gjorde gjennomføringen av forskningsprosjektet mulig.

Videre vil jeg takke familie og venner som har hjulpet meg med gjennomlesing av oppgaven og kommet med oppmuntrende ord.

En stor takk rettes også til studiegjengen som har fylt mastertiden med felles lunsjer, fine minner og gode samtaler.

Nå gleder jeg meg til å starte i læreryrket!

Trondheim, mai 2022.

Eline Aanensen

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser/symboler

NSD	Norsk senter for forskningsdata
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

1 Innledning

I dette kapittelet presenteres først bakgrunnen og aktualiteten for studien. Deretter presenteres formålet med studien og forskningsspørsmålene for studien. Teoretiske rammeverk for studien legges frem før jeg avslutningsvis beskriver studiens oppbygning.

1.1 Bakgrunn og aktualitet

I løpet av lærerutdanningen har vi arbeidet med figurmønster i algebra. For meg var dette en ny og spennende måte å jobbe med algebra på. Figurmønsteroppgaver kan varieres på mange måter. Jeg har selv erfart at denne typen oppgaver bringer frem fruktbare diskusjoner blant elevene. Figurmønster består vanligvis av tallfølger som er representert gjennom figurer, og gir en visuell kontekst for en figur som utvikler seg på en bestemt måte. Gjennom figurmønsteroppgaver blir elever ofte bedt om å generere en regel, eller regler, som kan brukes til å avgjøre andre forekomster av mønsteret (Lannin, 2005). Når man generaliserer et figurmønster, ender man opp med et generelt uttrykk, som også kan knyttes til en funksjon.

I Norge er det forsket lite på hvilke sammenhenger det er mellom figurmønster og funksjoner. Denne studien undersøker disse sammenhengene og gir dermed et nytt bidrag til forskningsfeltet i Norge. Mangelen på forskning, erfaringene jeg har gjort meg, og min egen interesse for feltet er det som har motivert meg til å skrive denne masteroppgaven.

Algebra er et felt innenfor matematikken som kan være utfordrende for mange elever. I en undersøkelse fra TIMMS i 2015, kom det frem at elever på 8. trinn scorer dårlig innen algebra, men gjør det bra i hverdagsmatematikk (Bergem et al., 2016). Algebra er et av de matematiske kunnskapsområdene elevene trenger for å utvikle en matematisk forståelse. Algebra handler om at elever skal få utforske strukturer, mønstre og relasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Wilkie (2019) hevder at et viktig mål i skolealgebraen er å hjelpe elevene med å legge merke til den samvariasjonelle karakteren til funksjonelle relasjoner, altså hvordan endringer i en variabel påvirker en annen variabel. Et eksempel er at ettersom tiden går, så vokser et tre høyere. Et slik syn på funksjoner er grunnleggende for flere matematiske ideer, slik som proporsjon, endringshastighet, linearitet, trigonometri og eksponentiell vekst. Dermed hevder Wilkie (2019) at det er viktig for elever å virkelig forstå grafiske representasjoner av funksjoner, og å utvikle elevers samvariasjonsresonnement. Forskning viser at det å lære om funksjonelle relasjoner i kjente kontekster støtter elevenes intuitive forståelse av variabler (Bieda & Nathan, 2009; Thompson & Carlson, 2017). Figurmønsteroppgaver er en kjent kontekst for utvalget av elever i denne studien, og tidligere funn har antydet figurmønsteroppgaver er nyttig for den symbolske representasjonen av ulike typer variabler i en funksjonell sammenheng (Radford, 2010).

Det å koble mønster sammen med tall, geometri og beregninger kan hjelpe elever til å forstå sammenhengen mellom matematiske tema, samtidig som det oppfordrer til generalisering (Hargreaves et al., 1998). I denne studien kobler jeg generalisering av figurmønster sammen med funksjoner. Jeg utforsker hvilke sammenhenger det er mellom elevers generaliseringsstrategier og deres samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner. I denne studien skal elevene generalisere to ulike figurmønstre og lage en graf ut fra et generelt uttrykk.

Tidligere forskning har vist at elevenes generaliseringsevner er assosiert med evnen til å utforske funksjonelle sammenhenger (Wilkie, 2016). Likevel finnes det lite litteratur som knytter figurmønster og funksjoner sammen, og da spesielt kvadratiske funksjoner. Forskningen som finnes på området studerer mønstre av lineær vekst, men uten å ta for seg det funksjonelle aspektet ved generalisering av figurmønster. Forskning på figurmønster inkluderer oppgaver med ulike representasjoner, men det finnes få studier som involverer å skissere grafer av figurmønstre.

1.2 Formålet med studien og forskningsspørsmål

Kjerneelementene i matematikkfaget viser hva elevene skal arbeide med i opplæringen. Kjerneelementet *Utforsking og problemløsning* handler blant annet om at elever skal lete etter mønstre og finne sammenhenger, hvor vektleggingen ligger på strategiene og fremgangsmåtene, snarere enn løsningene. *Abstraksjon og generalisering* handler om at elever skal få mulighet til å utforske utregninger, tall og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved bruk av algebra. Elevene skal selv oppdage sammenhenger og ikke bli presentert for en ferdig løsning (Kunnskapsdepartementet, 2019). I denne studien blir elevene introdusert for to figurmønsteroppgaver der de skal arbeide med generalisering og skissering av grafer knyttet til figurmønstrene. Oppgavene støtter opp om kjerne-elementene. Det er lite kjent hvordan elevers generalisering av figurmønster kan bidra til forståelse av samvariasjonelle tilnærming til funksjoner. Det er også lite kjent om hvordan skissering av grafer fra figurmønstre kan hjelpe elever å utvikle konseptuelle koblinger mellom grafer og generelle uttrykk. Hvilket leder meg til følgende forskningsspørsmål for studien:

1. Hvilke generaliseringsstrategier bruker elever på 10.trinn i arbeid med figurmønster?
2. Hvilke nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner viser elevene når de beskriver grafene de har skissert av figurmønstrene de har generalisert?
3. Hvilken sammenheng er det mellom elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner og deres generaliseringsstrategier?

Formålet med studien er å undersøke hvilke generaliseringsstrategier elever benytter seg av i arbeid med figurmønster, hvilke nivåer av samvariasjonell tilnærming til funksjoner elevene har samt å undersøke sammenhengen mellom strategiene og nivåene.

Studien er gjennomført med 14 elever på 10. trinn som arbeidet med to figurmønster-oppgaver. Masteroppgaven er i tråd med kjerneelementene, noe som kan være et bidrag til å beskrive statusen i norsk skole i dag. Alle elever i Norge skal ha arbeidet læreplanens kjerneelementer og kompetansemål. Det kan dermed tenkes at dersom studien ble utført på en annen skole ville resultatene vært relativt like.

Det er utformet tre forskningsspørsmål til denne studien. Analysekapittelet og diskusjons-kapittelet viser at det er mer data som omhandler det første forskningsspørsmålet. Dette er en naturlig konsekvens av hvordan oppgavene er utformet der flertallet av deloppgavene omhandler generalisering.

1.3 Teoretisk rammeverk

For å studere det første forskningsspørsmålet benytter jeg meg av et rammeverk utviklet av Lannin (2005). Rammeverket inneholder fem generaliseringsstrategier som er delt opp i ikke-eksplisitte og eksplisitte strategier. Rammeverket til Lannin (2005) er utarbeidet etter inspirasjon fra andre matematikere (English & Warren, 1998; Hoyles & Healy, 1999; Stacey, 1989), og kan likne på andre typer rammeverk for generaliseringsstrategier. Jeg har valgt å bruke dette rammeverket da jeg opplever at Lannin (2005) fanger opp de fleste strategiene som blir omtalt i litteraturen. Rammeverket er oversiktlig og gir et godt grunnlag til å analysere prosessen og progresjoner elever kan ha i arbeid med figurmønster.

For å studere det andre forskningsspørsmålet benytter jeg meg av et rammeverk utviklet av Carlson et al. (2002). Jeg har gjort egne tilpasninger, og tilpasninger inspirert fra Wilkie (2020). Rammeverket beskriver fem utviklingsnivå i elevers samvariasjonelle tilnærming til funksjoner. Jeg har sløyfet de to siste nivåene som ikke er relevante for studiens oppgaver og forskningsspørsmål. Med inspirasjon fra Wilkie (2019) har jeg delt opp Carlson et al. (2002) sine tre første kategorier, til fire kategorier. I tillegg har jeg lagt til en kategori. Elevers forståelse av samvariasjon mellom variabler synliggjøres på en oversiktlig måte ved å bruke rammeverket. Med grunnlag i dette har jeg valgt å benytte meg av Carlson et al. (2002) sitt rammeverk for å studere det andre forskningsspørsmålet. Rammeverket beskriver utviklingsnivå i elevers samvariasjonelle beskrivelser og med bruk av rammeverket tydeliggjøres elevers forståelse ut fra hvilket nivå eleven er på.

1.4 Oppbygning av studien

Studien er delt inn i seks hovedkapitler: innledning, teori, forskningsdesign, funn og analyse, diskusjon og avslutning. I kapittel 2 presenteres relevant teori jeg benytter for å svare på forskningsspørsmålene. Her presenteres også en litteraturgjennomgang fra tidligere forskning på området. Det teoretiske bakteppet som er relevant for undersøkelsen inkluderer teori om algebra, figurmønster, generalisering, funksjoner, lineære og kvadratiske mønstre og analyseverktøyene. I kapittel 3 presenteres forskningsdesginet for oppgaven. Dette innebærer valg knyttet til forskningsdesign og metode, utvalget av elever, datainnsamlingsmetode, utforming av oppgaver, analyseprosess og refleksjoner rundt etiske betraktninger. Funn og analyse presenteres i kapittel 4. I kapittel 5 legger jeg frem funnene for studien og diskuterer dem i lys av relevant teori og tidligere forskning. Studiens begrensninger presenteres avslutningsvis i kapittel 5. I kapittel 6 oppsummerer jeg studien og viser til didaktiske implikasjoner av studien før jeg til slutt legger frem refleksjoner rundt videre forskning.

2 Teori

I dette kapittelet presenteres relevant teori som danner grunnlaget for diskusjonskapittelet. Først legger jeg frem teori og definisjoner som er sentralt for det første forskningsspørsmålet. Her ser vi på teori knyttet til algebra, figurmønster og generalisering. Deretter presenteres rammeverket jeg bruker for å analysere elevenes generaliseringsstrategier. Videre legger jeg frem teori knyttet til funksjoner og lineære og kvadratiske mønster. Denne teorien er sentral for det andre forskningsspørsmålet. Her gis det konkrete eksempler på en samvariasjonell tilnærming til funksjoner. Deretter presenteres rammeverket jeg bruker for å analysere det andre forskningsspørsmålet. Til slutt presenteres tidligere forskning omkring figurmønster og sammenhengen mellom figurmønster og funksjoner.

2.1 Algebra

Algebra kan være vanskelig å definere, og det finnes flere ulike perspektiv på hva algebra er. Blanton og Kaput (2011) fremhever at algebra er en aktivitet hvor du bruker bokstaver, som står for tall, for å generalisere matematiske ideer og representere funksjonelle relasjoner. Et tradisjonelt bilde av skolealgebra sentrerer seg ofte om å løse ulike typer likninger og ulikheter gjennom symbolmanipulasjon (Watanabe, 2011), mens de siste tiårene har skolealgebraen blitt gitt en bredere tolkning. Kaput og Blanton (2001) ser på algebra som et kompleks sammensatt system som består av fem tråder som er knyttet sammen med hverandre. Deres fjerde tråd handler om at algebra er en studie av funksjoner, relasjoner og avhengig variasjon. Arbeid med figurmønster knyttet opp mot funksjoner ligger under denne tråden. Den fjerde tråden beskrives som generalisering fra numeriske og geometriske mønstre. Dette innebærer å beskrive hvordan den neste figuren i mønsteret kan beskrives utfra den nåværende figuren, altså en beskrivelse av rekursive relasjoner.

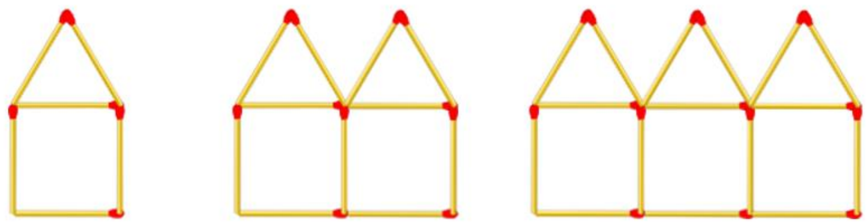
2.2 Figurmønster

«Patterns are the heart and soul of mathematics» (Zazkis & Liljedahl, 2002, s. 379). En typisk mønsteraktivitet gir en kontekst, og ber elever om å generere en regel, eller regler, som kan brukes til å bestemme andre spesielle forekomster av mønsteret (Lannin, 2005). For å beskrive objekter i en figur brukes begrepet *figurtall.* Figurmønsteroppgaver inkluderer en varierende variabel som gir elever muligheter til å observere og verbalisere generaliseringene, og registrere variablene symbolsk (Zazkis & Liljedahl, 2002). English og Warren (1998) argumenterer for at elever bør arbeide med figurmønster da det gir elever muligheten til å se relasjoner og mønstre samtidig som det oppfordrer elever til å finne en generell regel for å beskrive en følge.

Lannin (2005) fremhever at elever, i arbeid med figurmønster, får en visuell oppfatning slik at de kan beskrive og forklare en regelmessighet som er lik for alle figurer i mønsteret. Det visuelle aspektet kan gjøre det enklere for elever å forstå hvordan komponentene i et algebraisk uttrykk representerer elementene i et figurmønster.

2.2.1 Eksempel på et figurmønster

Figur 2.A nedenfor viser et figurmønster med fyrstikker. Det algebraiske uttrykket, $a_n = 5n + 1$, forteller hvor mange fyrstikker det er i hvilken som helst figur i mønsteret. Dette mønsteret har en struktur der det legges til fem fyrstikker hver gang figurnummeret øker med én. Variabelen i mønsteret er n, som viser til hvilket figurnummer vi arbeider med. Figur 1 i mønsteret har seks fyrstikker. Når figurnummeret øker med én, og legges til ett hus, deler husene en sidevegg. Dermed får vi konstanten 1. Den numeriske verdien for figur 2.A blir dermed $5n + 1$.



Figur 2.A: Eksempel på et figurmønster

2.3 Generalisering

Blanton og Kaput (2011) hevder at hjertet i algebra er å bygge, uttrykke og rettferdiggjøre matematiske generaliseringer. Generalisering referer til å koble løsninger til spesifikke oppgaver, for å forstå hvordan relasjonene i disse oppgavene representerer ideer som har en større klasse eller relasjon. Gjennom å generalisere kan elever bringe med seg viktige forståelser om forhold i virkelige kontekster som kan bygges på for å hjelpe dem å forstå generaliserende matematiske sammenhenger (Smith, 2008). Forskere har vist at mønsteraktiviteter oppmuntrer elever til å komme frem til generaliseringer (Stacey, 1989; Swafford & Langrall, 2000). Studien til Küchemann (2010) viser at elever har vanskeligheter med å bestemme verdier for store figurtall ved å generalisere, for eksempel for en figur langt ut i rekken.

Lee (1996) påpeker at det å se og uttrykke generalitet ikke alltid er en enkel sak. Mange elever opplever det som vanskelig å se et tiltenkt mønster, uttrykke et mønster klart og bruke symboler flytende og fleksibelt.

2.3.1 Rammeverk for å analysere generaliseringsstrategier

Lannin (2005) har forsket på elevers arbeid med generalisering i mønsteroppgaver. I arbeid med å undersøke hvordan elevene generaliserte utviklet Lannin (2005) et rammeverk. I denne studien har jeg benyttet meg av Lannins (2005) rammeverk for å besvare det første forskningsspørsmålet. Rammeverket i sin helhet er vist i tabell 2.A nedenfor.

Lannins (2005) rammeverk er utviklet med bakgrunn i hva andre forskere har funnet når de har studert generaliseringsstrategier (English & Warren, 1998; Stacey, 1989; Swafford & Langrall, 2000). Lannins (2005) rammeverk gir et godt grunnlag for å analysere prosessen og progresjonen elever kan ha i arbeid med figurmønster. Ved å bruke dette rammeverket kan man lære noe om hvordan elever argumenterer for strategier og hvilke strategier de synes er hensiktsmessige i ulike kontekster. I dette kapittelet beskrives rammeverket. Mangler i rammeverket kommenteres og andre generaliseringsstrategier belyses.

Rammeverket deles inn i to deler: ikke-eksplisitte strategier og eksplisitte strategier. Det er kun de eksplisitte strategiene som tillater direkte beregning av en bestemt verdi av den avhengige variabelen, gitt en verdi av den uavhengige variabelen (Lannin, 2005). De ikke-eksplisitte strategiene fører ikke til et generelt uttrykk alene, mens de eksplisitte kan føre til et generelt uttrykk. Et generelt uttrykk innebærer at elevene evner å finne en generell formel for en hvilken som helst figur i figurmønsteret. Tabell 2.A viser min tolkning av Lannin (2005) sine fem generaliseringsstrategier.

Tabell 2.A: Rammeverk for generaliseringsstrategier

Strategi		**Beskrivelse**
Ikke-eksplisitt	Telling	Eleven tegner et bilde eller lager en modell for å representere situasjonen. Eleven bruker for eksempel dette til å telle de ønskede egenskapene.
	Rekursiv	Eleven bygger på forrige figur(er) for å bestemme etterfølgende figurer.
Eksplisitt	Helhet-objekt	Eleven bruker en del som enhet for å danne en større enhet ved å multiplisere. Det kan være en passende justering for over- eller undertelling.
	Prøve og feile	Eleven forsøker seg frem til en regel uten å ta hensyn til hvorfor denne regelen kan fungere. Dette kan innebære å eksperimentere med ulike operasjoner og tall gitt i problemsituasjonen, for å tilpasse disse til mønsteret.
	Kontekstuell	Eleven lager en regel som er basert på informasjon gitt i situasjonen. Eleven ser en sammenheng mellom figurmønsteret og det algebraiske uttrykket.

Den ikke-eksplisitte strategien *telling* bruker elever gjerne når de skal telle ønskende egenskaper. Da kan en elev for eksempel tegne neste figur i mønsterrekken og telle antall fyrstikker som er i denne figuren. En del av strategien telling er å benytte seg av de egenskapene elevene har telt seg frem til, for senere å lage en formel (Lannin, 2005).

Dersom en elev bruker den *rekursive* strategien, bruker eleven kjennetegn fra tidligere figurer for å bestemme den neste figuren. Dersom figur 1 har ett kvadrat og figur 2 har to kvadrater, kan eleven se at figur 4 har fire kvadrater.

Strategien *helhet-objekt* tar utgangpunkt i at man bruker en del som en enhet for å danne en større enhet ved multiplikasjon. Strategien handler om å multiplisere eller dividere kjente verdier i mønster for å finne en verdi for et større eller mindre antall elementer. Første figur i et mønster kan for eksempel bestå av seks fyrstikker. Figur 2 består av elleve fyrstikker og figur 3 består av 16 fyrstikker. Eleven tar utgangspunkt i denne informasjonen og finner da at figur 10 består av $(10 \cdot 5) + 1$ fyrstikker. Denne strategien knyttes til konteksten av oppgaven, og elevene kan ved bruk av denne strategien knytte en rekursiv regel til et geometrisk skjema (Lannin, 2005). Lannin (2005) fant i sin studie at elever ofte bruker helhet-objekt-strategien feil.

Prøve og feile-strategien går ut på at elever prøver seg frem ved gjetting. En elev kan for eksempel se at det algebraiske uttrykket må inneholde et ledd n, men gjetter seg så frem til selve uttrykket. Dette kan være en tidkrevende prosess, og eleven vil antageligvis forsøke å gjette seg frem ved å bruke ulike verdier frem til eleven har funnet en formel som kan gjelde en hvilken som helst figur n. Når elever bruker prøve og feile-strategien eksperimenterer de gjerne med ulike regneoperasjoner og tall som er gitt i problemsituasjonen, men dette gjelder ikke alltid. Elevene kan også gjette seg frem ved tilfeldige tall og regneoperasjoner. Prøve og feile-strategien kan føre til bruk av det Mason (1996) beskrev som lokal taktikk, der eleven forsøker å finne en regel som passer til en bestemt forekomst av mønsteret i stedet for å forstå en generell relasjon i problemsituasjonen.

Lannin (2005) fant i sin studie at elever ikke reflekterte over prosessen sin når de brukte en strategi basert på prøving og feiling. Elevene reflekterte heller ikke over hvorfor en bestemt generalisering var gyldig.

Dersom en elev bruker en kontekstuell strategi har eleven lagd en generell formel basert på informasjonen gitt i oppgaven. Eleven ser en sammenheng mellom figurmønsteret og den generelle formelen.

Et av hovedfunnene fra Lannins (2005) studie var at elevene ofte sa seg fornøyde når de hadde funnet en generell formel som etter flere forsøk fungerte for mønsteret. Han fant også at elevene ofte brukte ulike strategier og begrunnelser for å komme frem til og rettferdiggjøre den samme generaliseringen. Avslutningsvis skriver han at elevene i hans studie viste en bemerkelsesverdig evne til å generalisere.

2.3.2 Generaliseringsstrategier i litteraturen

Lannin (2005) har utviklet sitt rammeverk basert på andre forskeres funn. Gjennom litteratursøk har jeg funnet at hans generaliseringsstrategier i stor grad samsvarer med andre forskeres strategier (Radford, 2010; Rivera & Becker, 2005; Stacey, 1989). Jeg valgte å bruke Lannins (2005) rammeverk da dette samler opp forskjellige generaliseringsstrategier på en oversiktlig og forklarende måte. I dette kapittelet presenteres generaliseringsstrategier som blir omtalt i litteraturen.

Gjennom litteratursøk har jeg funnet flere eksempler på generaliseringsstrategier som likner dem Lannin (2005) har utarbeidet. Ett eksempel er prøve og feile-strategien. Denne kommer blant annet frem i Radford (2010) og Rivera og Becker (2005) sine studier. Radford (2010) belyser at prøve og feile-strategien er en av hovedstrategiene elever benytter seg av i arbeid med lineære figurmønster. Rivera og Becker (2005) mener prøve og feile-strategien er en god problemløsningsstrategi, men at den raskt kan føre til konklusjoner som er feil. Videre skriver de at elever som benytter seg av denne strategien ofte har problemer med å arbeide videre med formelen når formelen blir feil. Healy og Hoyles (1999) viser i sin studie at elever ofte bruker en strategi basert på prøving og feiling for å komme frem til en generalisering.

Til tross for at Lannin (2005) sine generaliseringsstrategier har mange fellestrekk uavhengig av teoretikerne som omtaler dem, finnes det også strategier som Lannin (2005) ikke har kommentert direkte. Et eksempel som er relevant for denne studien er en av Mason (1996) sine strategier som handler om å manipulere figurene i figurmønstrene for å gjøre telling enklere. Det kan for eksempel være dekomponering av en figur i mindre, mer logiske deler slik at sammenhenger enklere kan oppdages.

2.4 Funksjoner

Funksjoner handler om hvordan verdier endres eller kartlegges til andre størrelser (Warren, 2005). Hver x-verdi er relatert til en unik y-verdi. Funksjoner kan sees på som funksjonelle sammenhenger i en verditabell, som en graf av et forhold eller som en formel uttrykt i algebraiske funksjoner (Mason & Sutherland, 2002).

Smith (2008) beskriver arbeid med å knytte to (eller flere) varierende størrelser (variabler) til funksjoner som representasjonstenkning. Blanton og Kaput (2005) beskriver det som en prosess der aritmetiske oppgaver gir muligheter til å generalisere matematiske mønstre og sammenhenger ved å variere en parameter i oppgaven. Oppgaver som knyttes opp til funksjoner kan hjelpe elever med å forstå hvordan tall og bokstaver kan brukes til å representere variabler. Representasjoner kan i tillegg brukes for å uttrykke forskjellige typer relasjoner, for eksempel lineære, kvadratiske og eksponentielle funksjoner (Smith, 2008).

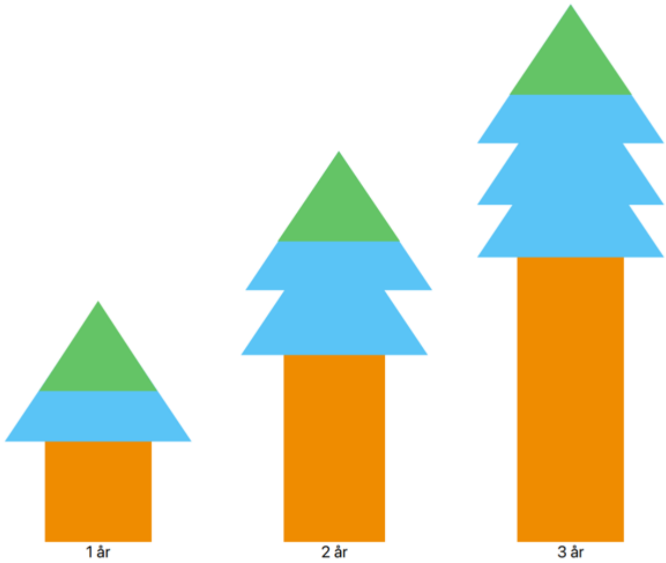
2.4.1 Tilnærminger til funksjoner

En funksjon kan sees på som en samvariasjon mellom to variabler eller som en korrespondanse mellom to mengder. Disse tilnærmingene til funksjoner er grunnleggende for å generalisere voksende figurmønstre (Smith, 2008).

En samvariasjonell tilnærming til funksjoner handler om hvordan endringer i en variabel påvirker en annen variabel. En samvariasjonstilnærming til funksjoner støtter elevenes læring om konstante og ikke-konstante endringshastigheter. Elevene lærer å resonnere om endringsretningen, mengden endring, gjennomsnittlig endringshastighet og øyeblikkelig endringshastighet (Thompson & Carlson, 2017). Carlson et al. (2002) hevder at grafer egner seg til å utvikle et samvariasjonssyn gjennom å vise visuelt hvordan endringer i en variabel påvirker en annen variabel.

En korrespondansetilnærming til funksjoner vurderer forholdet mellom to variabler beskrevet med en regel, slik at en bestemt forekomst av en variabel kan brukes til å beregne den samsvarende forekomsten av den andre variabelen. Regelen kan være beskrivende eller symbolsk. En korrespondansetilnærming til funksjoner kan hjelpe elever til å forstå funksjon som en prosess, til å forstå hvor algebraiske likninger kommer fra og hvordan de kan brukes til å uttrykke generalitet (Mason, 2017).

Figur 2.B nedenfor er et eksempel på de to ulike tilnærmingene til funksjoner. Treet som er ett år gammelt har tre figurer. For hvert av de påfølgende treene øker antall figurer med to. I en samvariasjonell tilnærming til funksjoner trenger to elementer oppmerksomhet, ett element for antall år og ett element for antall figurer. Det vises ved at når antall år øker med én, øker antall figurer med to. I et korrespondanseforhold har hvert tre samme antall ruter (stammen) som det er antall år, og samme antall trapeser (greiner) som det er antall år. Høyden på treet kan da beskrives som to ganger antall år pluss 1 (en beskrivende regel). Dette kan representeres symbolsk med $a_n = 2n + 1$, der a_n står for høyden på treet og n er antall år til treet (en symbolsk regel) (Syawahid, 2022).



Antall år	Antall figurer
1	3
2	5
3	7
4	9

Figur 2.B: Tre som vokser

Ifølge Wilkie (2020) egner utforskning av figurmønster seg til å utvikle samvariasjon- og korrespondanseforståelse. Med figurmønstre kan elevene lære visuelt hvordan variabler er relatert til hverandre.

2.4.2 Rammeverk for å analyse samvariasjonell tilnærming til funksjoner

For å analysere elevenes samvariasjonelle tilnærming til funksjoner tar jeg utgangspunkt i Carlson et al. (2002) sitt rammeverk og tilpasningene Wilkie (2020) har gjort til dette rammeverket. Samvariasjonsrammeverket ble laget for å analysere grafer og en beskrivelse av dem. Rammeverket beskriver fem utviklingsnivå i elevers samvariasjonelle tilnærming til funksjoner. De tre første nivåene er relevante for denne studien hvor jeg ser på lineære og kvadratiske funksjoner knyttet opp mot figurmønstre. Jeg har sløyfet de to siste kategoriene i rammeverket som leder opp til at elevene skal forstå begrepet momentan vekst.

I det første nivået til Carlson et al. (2002) er det å koordinere endring av én variabel med endringer i den andre en egen kategori., Her har jeg brukt Wilkie (2020) sin tilpasning til dette nivået og dannet to nivå: nivå 1.1 og nivå 1.2., se tabell 2.B nedenfor. Det andre nivået (2.1), til Carlson et al. (2002), ser på koordinering av endringsretningen til en variabel med endringer i den andre. I det tredje nivået (3.1) til Carlson et al. (2002) sees det på koordinering av endringsmengden til en variabel med endringer i den andre variabelen. Nivåene i dette rammeverket er utviklingsnivå, hvilket betyr at dersom en elevs handling er på nivå 3.1 så støtter disse handlingene knyttet til handlinger på lavere nivå. Jeg har lagt et eget nivå, kalt for nivå før 1, etter inspirasjon fra Wilkie (2020). Dette nivået er ikke inkludert det originale rammeverket.

Tabell 2.B viser samvariasjonsrammeverket tilpasset fra Carlson et al. (2002) og Wilkie (2020).

Tabell 2.B: Rammeverk for samvariasjonell tilnærming til funksjoner

Nivå	Kategori	Beskrivelse	Illustrerende eksempler
Før 1	Bilde	Beskriver grafen i billedlige termer	«Det ser ut som en trapp»
1.1	Variasjon	Beskriver endringsretning i en variabel	«Den går opp» «Den går i en diagonal linje»
1.2	Variasjon	Beskriver retning og mengde endring i en variabel	«Antall fyrstikker går opp i en rett linje. Antall fyrstikker øker med 5»
2.1	Kovariasjon	Koordinerende endringsretning i en variabel med endringer i den andre variabelen	«Den går opp omtrent like mye hver gang» «Når antallet hus blir større, blir antallet fyrstikker større»
3.1	Kovariasjon	Koordinerende retning og endringsmengde i en variabel med endringer i den andre variabelen	«Tallene går opp med 5 hver gang. Det er en rett linje fordi hver gang går den like mye opp». «Totalt antall fyrstikker øker med 5 for hvert hus. Denne grafen øker. Linjen er rett»

I studien til Carlson et al. (2002) blir det konkludert med at elever, som var på universitetsnivå, varierte evnen til å anvende en samvariasjonell tilnærming til funksjoner når de beskrev grafer. De fleste elevene er innenfor hans nivå L2 og L3 som tilsvarer til nivå 2.1 og 3.1 i tabell 2.B.

2.5 Lineære og kvadratiske figurmønstre

I et lineært figurmønster kan det n-te elementet uttrykkes som $an + b$ (Zazkis & Liljedahl, 2002), hvor a og b er konstante tall, mens n er variabelen. Figur 2.A er et eksempel på et lineært mønster.

Et kvadratisk mønster kan uttrykkes på formen $an^2 + bn + c$, hvor b og c er konstante tall mens n er en variabel (Wilkie, 2021). I et koordinatsystem tar denne funksjonen form som en parabel med et toppunkt eler bunnpunkt.

Arbeid med kvadratiske mønstre gir en grunnleggende kontekst som gir mening til mange viktige algebraiske konsepter, slik som variabler og parametere, ikke-lineære endringshastigheter og synet på funksjoner (Wilkie, 2022). En sentral betydning for et mønster av kvadratisk vekst er at endringshastigheter er i konstant endring (Lobato et al., 2012). Kvadratisk vekst kan utforskes med forskjellige representasjoner. Den kan fremheves med den stadig skiftende helningen til en kvadratisk graf. Det kan også vises i en verditabell eller ivaretas visuelt i et voksende figurmønster med lineært økende mengder i figurene (Wilkie, 2021).

Tradisjonelt introduseres kvadratiske funksjoner etter lineære funksjoner via algebraisk manipulering av likninger og grafisk representasjon (Wilkie, 2019). Ifølge Moss et al. (2008) gir mønstre et kraftig redskap for å forstå de avhengige relasjonene mellom mengder som ligger til grunn for matematiske funksjoner.

2.6 Tidligere forskning

Det er forsket mye på figurmønster, og spesielt figurmønster som introduksjon til algebra. Tidligere forskning studerer gjerne figurmønster av lineær vekst, uten å legge vekt på det funksjonelle med denne veksten. I litteraturen er det svært lite å finne om figurmønstre av kvadratisk vekst knyttet opp mot funksjoner. I dette kapittelet diskuteres tidligere funn opp mot hverandre og jeg viser til mangler i litteraturen.

2.6.1 Figurmønster

I studien til English og Warren (1998) ble det forsket på figurmønster. De fant at elever hadde vanskeligheter med å formalisere et generelt uttrykk til figurmønstre. Det samme vises i studien til Rivera og Becker (2005), hvor det ble funnet at elever klarte å utvide figurmønster, men hadde problemer med å generalisere ved å bruke et algebraisk uttrykk. Selv om flere studier viser at elever har problemer med å lage generelle uttrykk, finnes det også eksempler på det motsatte. Cooper og Warren (2011) fant at elever kan identifisere hvordan gjentakende mønstrer utvikler seg, og finne et generelt uttrykk ut fra det voksende mønstret.

I studien til Stacey (1989) ble det vist at de fleste elevene kombinerer ulike strategier når de arbeider med generalisering. Funnet til Stacey (1989) samsvarer med Lannins (2005) studie, som viser at elever bruker ulike strategier i arbeid med en generalisering.

2.6.2 Funksjonelle relasjoner i figurmønster

Gjennom litteratursøk fant jeg få studier som relaterte generalisering av figurmønster med tegning av grafer. Representasjonene i studier av elevers mønstergeneralisering inkluderer gjerne selve figurmønstrene med konkrete materialer eller tegninger og figurtall, verditabeller og algebraiske likninger, men ikke grafer (Wilkie, 2020). Wilkie (2016) relaterer figurmønster og skissering av grafer i sin studie, og fant at flertallet av elevene ikke kunne skissere en riktig graf til et figurmønster. I en senere studie diskuterer Wilkie (2019) om dette kan være grunnet i at grafisk kunnskap ses på som et isolert felt innenfor matematikk, og at elevene sliter med å knytte det sammen med andre matematiske tema.

Stacey og Macgregor (2002) har forsket på funksjonelle relasjoner i mønsteroppgaver. De rapporterer at mer enn en tredjedel av de som oppfattet funksjonelle relasjoner i oppgavene som ble gitt, beskrev dem på umodne måter som ikke støttet opp om en algebraisk oversettelse. Tidligere forskning indikerer at mange elever opplever vanskeligheter med overgangen til mønstre som funksjoner (MacGregor & Stacey, 1995; Warren, 2000). Vanskene inkluderer mangelen på passende språk som trengs for å beskrive forholdet, og tilbøyeligheten til å bruke en additiv strategi for å beskrive generaliseringer. Warren (1996) peker på at konvertering av figurmønster til en verditabell, og å søke etter sammenhenger i denne tabellen, kan resultere i økt kognitiv belastning for elevene.

Wilkie (2020) har gjennomført en studie hvor hensikten var å undersøke elevers samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner med grafer i en kontekst med generalisering av figurmønster. Elevene arbeidet med generaliseringsoppgaver i starten av året, samtidig som de lærte om lineære likninger. På slutten av året fikk elevene nye oppgaver med generalisering. Wilkie (2020) fant at det var en liten endring i den totale andelen elever som viste et bestemt nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner av grafene de skisserte med bakgrunn i figurmønstrene. I studien til Wilkie (2020) gikk 35% av elevene ned i nivå fra det første til det andre oppgavesettet med generaliseringsoppgaver. Wilkie

(2020) antyder at denne nedgangen kan begrunnes med at det siste oppgavesettet hadde vanskeligere mønstre. Dette bidro til at elevene ikke skisserte riktige grafer, eller ikke skisserte grafer i det hele tatt. Studien viste at elever som kunne utvide mønstrene eller tenke rekursivt om mønstrene, men ikke klarte å generalisere mønstrene, likevel viste en beskrivelse av samvariasjonell tilnærming til funksjoner som tilsvarte nivå 3.1. Elevene som viste det høyeste generaliseringsnivået i studien hadde alle skissert grafer. Videre fant Wilkie (2020) at elevene som hadde riktig generell formel for figurmønstrene kunne plotte koordinater galt, til tross for at formelen var korrekt. Wilkie (2020) peker på at dette kan være relatert til mangelen på rutenett i oppgavene som ble gitt, eller vanskeligheter med skalaen på aksene som var uten verdier.

I Wilkie (2020) sin studie var det kun to elever som beskrev sammenhengen mellom grafen de hadde skissert og generalisering de hadde gjort, og ingen elever som kommenterte at grafens stigning samsvarte med den generelle formelen. Wilkie (2020) diskuterer at en mulig årsak til mangelen på beskrivelser av sammenhenger kunne skyldes at oppgaveteksten hennes var for åpen, og at hun måtte ha spesifisert disse sammenhengene dersom flere elever skulle ha beskrevet dem. Avslutningsvis konkluderer Wilkie (2020) med at et høyere generaliseringsnivå ikke er assosiert med et høyere nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner.

2.6.3 Figurmønster av lineær og kvadratisk vekst

Forskning på figurmønster baserer seg gjerne på mønster av lineær vekst. Det er mangler i litteraturen av forskning på figurmønster av kvadratisk vekst. Studier som undersøker kvadratiske funksjoner viser at elever sliter med etablering av sammenhengen mellom formelen som definerer en funksjon algebraisk og dens grafiske representasjon (Dreyfus & Halevi, 1991; Leinhardt et al., 1990).

Litteraturen har fremhevet at elever har problemer med å forstå og koble sammen kvadratiske begreper og representasjoner som likninger, tabeller og grafer (Lobato, 2012). Wilkie (2022) poengterer at figurmønster ikke er en typisk representasjon som brukes til å undervise i kvadratiske funksjoner, og det er lite kjent hvordan det kan bidra til å løse problemene elevene har med å forstå og koble sammen kvadratiske begreper. Med utgangspunkt i dette har Wilkie (2019, 2021, 2022) forsket på figurmønster av kvadratisk vekst i nyere tid. Wilkie (2019) undersøkte elevers arbeid med lineære og kvadratiske generaliseringer av figurmønster. I studien fant hun at mønster hvor strukturen hadde lett gjenkjennelige aspekter som kunne generaliseres, var enkelt for elevene å generalisere symbolsk. Mønstre hvor strukturen var vanskeligere å gjenkjenne fremkalte derimot numeriske resonnement med en verditabell istedenfor visuell resonnering.

3 Forskningsdesign

I dette kapittelet presenteres de metodiske valgene som er gjort i forbindelse med studien og en beskrivelse av forløpet til studien. Dette inkluderer hvilket paradigme jeg har posisjonert meg i, valg av metode og informanter, type datainnsamling, utforming av oppgaver, analyseringsprosessen og en vurdering av studiens relabilitet og validitet. Kapittelet avsluttes med hvilke etiske betraktninger som er gjort.

3.1 Paradigme

Et paradigme påvirker måten kunnskap studeres og tolkes på, og fungerer som en veiledende filosofi bak forskning. Det er valget av paradigme som setter ned intensjonen, motivasjonen og forventningene til forskningen (Mackenzie & Knipe, 2006). Paradigmet beskriver forholdet mellom forskeren og virkeligheten (epistemologi), virkelighetens natur (ontologi), verdiers rolle i forskning (aksiologi) og angir metoder som egner seg for å studere virkeligheten (metodikk) (Creswell & Creswell, 2013).

Mitt syn på kunnskap i denne masteroppgaven er interpretivistisk. I det interpretivistiske verdensbildet er verden sosialt konstruert, og det er gjennom erfaringer individer tolker virkeligheten i tankene sine. Mennesker kan ikke skilles fra sine erfaringer og sin kunnskap (Creswell & Creswell, 2013). Jeg som forsker har prøvd å følge dette paradigmet og forsøkt å trekke innsikter og konklusjoner fra dataene som er funnet. I forskningen ville jeg stole mest mulig på deltakernes syn på fenomenene, figurmønster og funksjoner, som ble studert.

3.2 Metode

Valget av metode hadde til hensikt å fremskaffe de dataene som var nødvendig for å svare på forskningsspørsmålene. I dette kapittelet presenteres de metodiske valgene som ble tatt i studien.

3.2.1 Kvalitativ metode

For å søke svar på forskningsspørsmålene mine har jeg benyttet meg av en kvalitativ metode. Kvalitativ metode er avhengig av å forstå et fenomen fra deltakerens ståsted i konteksten det skjer i (Stake, 2006). I denne studien søkes det forståelse omkring fenomenene figurmønster og funksjoner. En kvalitativ forskning er en fortolkende tilnærming til verden, der forskeren prøver gi mening til, eller tolke, fenomener i form av betydningen som deltakere gir dem (Denzin & Lincoln, 2011). I følge Cohen et al. (2018) er målet i kvalitativ forskning å studere handlinger, holdninger, meninger, intensjoner og oppførsel i detalj.

Den kvalitative metoden jeg har benyttet meg av er oppgavebasert intervju. Denne intervjuformen tillater meg som forsker å inkludere matematiske oppgaver inn i en intervjusetting. Jeg ønsket å benytte meg av oppgavebaserte intervju slik at jeg kunne kartlegge elevenes løsningsstrategier og tankemønster i arbeid med oppgavene. Jeg tok også feltnotater under de oppgavebaserte intervjuene, og samlet inn elevenes skriftlige arbeid med oppgaver i grupper. Kapittel 3.4 gir en grundigere beskrivelse av oppgavebasert intervju som metode.

3.2.2 Fenomenologi

Innenfor kvalitativ metode finnes det metodiske tilnærminger med ulike særtrekk. Den metodiske tilnærmingen til denne studien er fenomenologisk tilnærming. En fenomenologisk studie kan sees ulikt på, alt ettersom hvilket rammeverk som er tatt i betraktning. Jeg velger å følge Creswell og Creswell (2013) sin forståelse av fenomenologi. Creswell og Creswell (2013) mener at en fenomenologisk studie beskriver den felles betydningen flere individer har av et konsept eller et fenomen. Fenomenet som skal utforskes er forskningsspørsmålene for studien. For å svare på forskningsspørsmålene har jeg samlet inn data fra elever som har arbeidet med oppgaver, og forsøkt å utvikle en sammensatt beskrivelse av hva elevene opplevde og hvordan de opplevde det (Creswell & Creswell, 2013). Studien er en transcendental fenomenologisk forskning, som betyr at jeg som forsker setter mine erfaringer til side så mye som mulig for å forsøke å få et nytt perspektiv på fenomenet som undersøkes (Creswell & Poth, 2016).

3.3 Samarbeid med skole og valg av informanter

Kvalitative studier har vanligvis et begrenset utvalg informanter, dermed er det viktig at forskeren bruker en utvelgelsesprosess som er hensiktsmessig for forskningsspørsmålene (Thagaard, 2018). I en kvalitativ studie er hensikten å få mye data fra et begrenset antall informanter (Christoffersen & Johannessen, 2012). Utvalget i denne masteroppgaven er 14 elever på 10. trinn som går i samme klasse. Klassen er en energisk og muntlig klasse, med fruktbare og reflekterende diskusjoner og spørsmål. Jeg var praksisstudent i klassen og kjente dermed elevene fra før.

Jeg ønsket at utvalget av elever til denne studien skulle være på 10. trinn da disse skal ha forkunnskaper om figurmønster og geometri. Etter 8. trinn skal elever kunne beskrive og generalisere mønstre med egne ord og algebraisk, og etter 9. trinn skal elever kunne beskrive, forklare og presentere strukturer og utviklinger i geometriske mønstre og i tallmønstre (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Jeg søkte til Norsk Senter for Forskningsdata (NSD) i november 2022, og prosjektet ble vurdert i desember 2022. Jeg kontaktet praksislærer, som er kontaktlærer i klassen, høsten 2022 via telefonsamtale. Vi avtalte at undersøkelsen skulle finne sted i den siste praksisuken, uke 2 i 2023. Jeg hadde jevnlig dialog med elevenes lærer. I desember 2022 sendte jeg samtykkeskjema og informasjon om prosjektet til lærer. Disse ble delt ut i uke 2023, og jeg mottok dem den påfølgende uken. Gjennomføringen av datainnsamlingen pågikk i uke 2. I starten av uke 2 hadde jeg en samtale med elevene om hva prosjektet gikk ut på, hva det ville innebære å delta i prosjektet, og hvordan prosessen ville foregå videre i uken. Jeg fikk signatur av 17 foresatte med godkjennelse på at deres barn kunne delta i prosjektet. Etter hvert som jeg tok ut gruppene var det tre elever som ikke ville delta i prosjektet selv om de hadde levert samtykkeskjema. Dermed ble det 14 av 18 elever som deltok i prosjektet. Noen av gruppene ble dermed mindre enn først antatt, noe som har resultert i at to av fem grupper har to elever.

Elevene ble satt sammen i grupper med hjelp av lærer. Gruppene ble lagd slik at elevene arbeidet med medelever de var vant til å samarbeide med og var trygge på. Dette ble gjort for at situasjonen skulle føles naturlig for elevene.

3.4 Datainnsamling

Datainnsamlingen bestod av transkribert lydopptak fra fem oppgavebaserte intervjuer i grupper, elevenes skriftlige arbeid og feltnotater gjort av meg under intervjuene. Under intervjuene ble det tatt lydopptak. Elevene arbeidet i grupper på 2-4 i én time, med et oppgavesett bestående av to oppgaver. Jeg ønsket å ta feltnotater for å plukke opp elementer en lydopptaker ikke er kapabel til, slik som peking på oppgaveark og på egne notater og tegninger. Jeg noterte ned tidspunkt for hendelser mens elevene skrev eller tegnet, slik at jeg kunne koble observasjonsnotatene opp mot transkripsjonen av lydopptaket i ettertid.

Gruppene arbeidet med oppgavene på et grupperom hver for seg, og til ulik tid, slik at jeg kunne være like mye til stede i alle gruppene. Ved samarbeid i grupper kan elevene forklare tankegangen sin i arbeid med å løse oppgavene. Slik kan datamaterialet bli rikere, og jeg som forsker kan få en dypere forståelse for løsningene til elevene. I tillegg kan et gruppesamarbeid gjøre situasjonen tryggere for elevene, og elevene kan dele tanker med hverandre slik at oppgavene kan være enklere å løse. I etterkant av arbeid i grupper samlet jeg inn elevenes skriftlige arbeid slik at dette kunne brukes i analysen.

3.4.1 Oppgavebasert intervju som metode

Intervju er den mest anvendte metoden innen kvalitativ forskning (Thagaard, 2018; Postholm , 2010). Thagaard (2018) skriver at intervju gir et godt grunnlag for å få innsikt i tanker, følelser og erfaringer hos informantene. I denne studien har jeg brukt et oppgavebasert intervju som metode. Data fra oppgavebasert intervju ble samlet inn i form av lydopptak gjennom appen Nettskjema-diktafon.

Et oppgavebasert intervju kan benyttes når forskeren ønsker å kartlegge elevers løsningsstrategier, tankemønstre, utbytte av undervisning og elevers matematiske og kognitive utvikling (Goldin, 1997). Maher & Sigley (2020) hevder at et slikt intervju kan gi forskeren innsikt i de eksisterende matematiske kunnskapene til elevene, samt hvordan elever bygger på nye ideer basert på tidligere ideer for å utvikle egen kunnskap. For å undersøke forskningsspørsmålene var det hensiktsmessig å ta utgangspunkt i oppgaver som inkluderte figurmønster og funksjoner. Jeg ønsket å ta i bruk oppgavebasert intervju slik at elevene fikk mulighet til å arbeide med oppgaver samtidig som jeg kunne stille spørsmål. Ved å gjennomføre oppgavebaserte intervju fikk jeg en bred innsikt i hvordan elevene hadde tenkt i oppgavene, hva de hadde gjort og hvorfor de gjorde slik de gjorde.

Formålet med et oppgavebasert intervju er ifølge Goldin (1997) å (1) observere elevers matematiske atferd i oppgaveløsning, og (2) trekke slutninger fra observasjonen. Dette gjør det mulig for forskeren å si noe om elevenes kunnskapsstrukturer, påvirkning, meninger, kognitive prosesser eller endring av disse i løpet av intervjuet. I denne studien var formålet med de oppgavebaserte intervjuene å observere elevenes matematiske atferd når de arbeidet med figurmønster og funksjoner, og ut ifra dette trekke slutninger om elevenes generaliseringsstrategier og samvariasjonelle tilnærming til funksjoner, samt en eventuell sammenheng mellom disse.

3.5 Utformingen av elevenes oppgaver

Elevene i denne studien fikk utdelt to oppgaver. Oppgavene som er valgt til studien har jeg modifisert fra oppgavene Wilkie (2016, 2019) brukte i sine studier. Den første oppgaven elevene fikk utdelt kalles for *fyrstikkhusoppgaven*, og inkluderer et lineært figurmønster. Den andre oppgaven elevene fikk utdelt kalles for *flismønsteroppgaven*, og inkluderer et kvadratisk figurmønster. I dette kapittelet legges oppgavene frem, samt kommentarer og refleksjoner rundt oppgavene. Oppgavene i sin helhet er lagt ved i vedlegg 1.

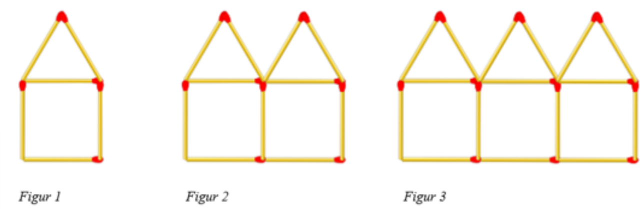
Jeg har inkludert avstander og tall på aksene i koordinatsystemene i oppgavene. Modifiseringen er kommentert ytterligere i kapittel 3.7. De opprinnelige oppgavene inneholder begge ni deloppgaver. Jeg endret oppgavene slik at de fikk færre deloppgaver. Tidsbegrensningen på én time var også et viktig argument for å modifisere oppgavene. Warren og Cooper (2008) anbefaler å trekke elevers oppmerksomhet til den uavhengige variabelen i oppgaver. For å bevare dette prinsippet har jeg inkludert figurnummer på figurene under hver figur i begge oppgavene.

3.5.1 Fyrstikkmønster

Den første oppgaven er et fyrstikkmønster (illustrert i figur 3.A). Dette mønsteret fremstiller et geometrisk mønster som er av lineær vekst. Det algebraiske uttrykket for mønsteret er $a_n = 5n + 1$ der a_n står for antall fyrstikker i figurnummer n.

Fyrstikkhus

a) Tegn opp hvordan figur 4 vil se ut.
b) Hvordan kan man finne det totale antallet fyrstikker som trengs for en hvilken som helst figur nummer n? Prøv å lag en formel som dere kan bruke for å finne hvor mange fyrstikker dere trenger til figur n.
c) På neste side ser dere et koordinatsystem med figurnummer langs x-aksen og antall fyrstikker langs y-aksen. Tegn inn koordinatene for de 10 første husene. Hvilken type graf får dere?
d) Dere har 100 fyrstikker og vil lage en figur med fyrstikkhus. Får dere noen fyrstikker til overs? Vis hvordan dere kommer frem til svaret både grafisk og ved regning



Figur 3.A: Fyrstikkhusoppgave uten koordinatsystem

I deloppgave a) kan elevene bruke sine visualiseringferdigheter og se på strukturen i mønsteret. Dette er ment som en hjelp før deloppgave b). Carlson et al. (2002) hevder at grafer egner seg til å utvikle et samvariasjonssyn gjennom å vise visuelt hvordan endringer i en variabel påvirker en annen variabel. Med grunnlag i dette, samt med et ønske om å undersøke om elevene evnet å se sammenhengen mellom det algebraiske uttrykket og en grafisk fremstilling av dette, valgte jeg å trekke inn et grafisk element i oppgaven. Gjennom denne deloppgaven ønsket jeg å undersøke elevenes nivå av samvariasjonell tilnærming til den grafiske fremstillingen.

Den opprinnelige fyrstikkhusoppgaven fra Wilkie (2016) inneholder oppgaver hvor det blir spurt om hvor mange fyrstikker det er i forskjellige figurer. Jeg har sløyfet disse deloppgavene da de ikke gir konkrete funn som er aktuelle for forskningsspørsmålene til studien. I tillegg blir oppgaveomfanget mindre for elevene, og jeg anser det som unødvendig å stille samme type spørsmål flere ganger, hvor kun en komponent er forandret.

En annen modifisering jeg har gjort er at jeg har knyttet flere spørsmål sammen i ett. Min deloppgave b) har for eksempel Wilkie (2016) som to separate spørsmål, hvor hun først ber elevene skrive ned hvordan de kan finne et hvilket som helst hus. Elevene i denne studien arbeider i grupper og det kan dermed være naturlig at elevene ytrer sine tanker gjennom kommunikasjon. Med grunnlag i dette, og at elever kan oppleve det som overveldende med for mange deloppgaver, har jeg sammenfattet Wilkies (2016) spørsmål til ett.

Til deloppgave d) inkluderte jeg et koordinatsystem. Dette er ikke inkludert i den opprinnelige oppgaven. Dette gjorde jeg slik at elevene skulle få muligheter til å løse oppgavene på ulike måter, samtidig som enda en skissering av graf kunne gi meg mer data til å svare på det tredje forskningsspørsmålet.

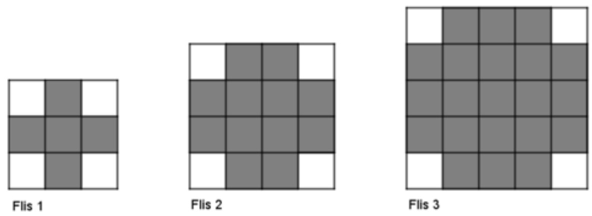
3.5.2 Flismønster

Den andre oppgaven som ble gitt er av et flismønster (illustrert i figur 3.B). Flismønsteret er av kvadratisk vekst. Det algebraiske uttrykket for mønsteret er $a_n = n^2 + 4n$, der a_n står for antall små grå kvadrater i figurnummer n.

Flismønster

Nedenfor ser dere tre fliser som er satt sammen av små grå og små hvite kvadrater.

a) Tegn opp hvordan flis nr. 4 vil se ut. Noter ned hva dere ser med mønsteret på flisene.
b) Kan dere lage en formel for å finne antall små grå kvadrater i flis nummer n?
c) På neste side ser dere et koordinatsystem med flisnummer langs x-aksen og antall små grå kvadrater langs y-aksen. Tegn inn koordinatene for de seks første flisene.
d) Trekk en linje mellom koordinatene. Kan deres beskrive hvilken type funksjon dette er? Hint: bruk det dere fant i b)



Figur 3.B: Flismønsteroppgave uten koordinatsystem

Deloppgave a) er ment som en hjelp for å organisere tankene rundt strukturen til mønsteret før elevene skal lage en formel i neste deloppgave. Å oppmuntre til visualisering kan hjelpe elever å legge merke til ubestemtheten til det funksjonelle forholdet ved å bruke et mønsters fysiske struktur (Küchemann, 2010). Til deloppgave d) la jeg ved et hint. Dette gjorde jeg med et ønske om at elevene skulle studere verdiene og variablene i det algebraiske uttrykket.

Flismønsteroppgaven er en modifisert oppgave fra Wilkie (2019). Den opprinnelige oppgaven inneholder en deloppgave hvor elevene blir bedt om å fylle ut en verditabell for de seks første figurene, og en deloppgave hvor elevene blir bedt om å finne et generelt uttrykk for mønsteret hvis de kun fikk verditabellen utdelt, og ikke figurene. Warren og Cooper (2008) anbefaler å bruke slike tabeller med verdier hvis forekomster av den uavhengige variabelen ikke øker en etter en. I arbeid med å velge oppgaver til studien prøvde jeg å løse oppgavene på ulike måter, slik at jeg hadde noen tanker om hvordan elevene kunne løse oppgavene. En metode jeg ofte benytter meg av i arbeid med figurmønster, er å lage en verditabell. Jeg ønsket å få frem flere forskjellige løsningsmetoder og var interessert i å lytte til og forske på hvordan elevene tenkte når de skulle generalisere mønstrene. Jeg unnlot dermed å spesifikt spørre om en verditabell i oppgavene.

Deloppgave c) og d) er designet og modifisert for å undersøke elevenes samvariasjonelle tilnærming til funksjoner, samt å undersøke om elevene fant noen forbindelser med grafen og den generelle formelen. I siste deloppgave spurte jeg elevene om de kunne beskrive hvilken type funksjon de hadde skissert, noe som Wilkie (2019) ikke har lagt vekt på i sin flismønsteroppgave. Funksjonen elevene tegnet, dersom de hadde funnet riktig generelt uttrykk, er en del av en andregradsfunksjon.

3.6 Utforming av intervjuguide

En intervjuguide er en oversikt og plan på hvilke spørsmål som skal stilles i et intervju. Intervjuguiden til oppgavebaserte intervju er lagt ved som vedlegg 2.

I utformingen av en intervjuguide legger Thagaard (2018) frem at forskeren må planlegge godt, slik at det blir stilt spørsmål om de sentrale temaene i prosjektet, og at forskeren kan være fleksibel overfor intervjupersonenes utsagn.

Goldin (1997) legger frem fem prinsipper som oppgavebaserte intervju bør ha for at intervjuet skal nå sitt maksimale potensiale for innhenting av informasjon. I utformingen av intervjuguiden og i forberedelsen til de oppgavebaserte intervjuene benytter jeg meg av Goldin (1997) sine fem prinsipper.

Det første Goldin (1997) legger vekt på er at de matematiske ideene i oppgavene bør være tilpasset aldersgruppen informantene er i, og at innholdet i oppgavene er fleksible slik at oppgavene kan tillate bevis i ulike former, basert på informantenes evner. Oppgavene i denne studien inkluderer matematikk elevene har forkunnskaper om, og oppgavene inviterer til ulike løsningsmetoder.

Det neste prinsippet er at oppgavene bør ha en rik representasjonsstruktur. I oppgavene er figurmønstrene lagt ved som en illustrasjon, og elevene skal tegne opp neste figuren selv. Da skaper elevene en symbolsk representasjon. Elevene kan løse deloppgavene på forskjellige måter og ved bruk av ulike metoder. En annen form for symbolsk representasjon kommer til syne når elevene skal skissere grafer selv.

Videre fremhever Goldin (1997) at intervjuguiden skal utformes slik at oppgavene engasjerer elevene til problemløsning som gir forskeren mulighet til observere fremgangsmåter og spontane avgjørelser. Her legger Goldin (1997) vekt på at forskeren ikke skal gi veiledning og hint før elevene har hatt mulighet til å løse oppgavene på sine egne premisser. I intervjuguiden har jeg et eget kriterium som handler om at jeg skal la elevene få tenke lenge selv før jeg stiller spørsmål.

Det neste prinsippet er at intervjuguiden skal ha tydelige kriterier. Forskeren skal ikke legge føringer for riktige og gale svar. Oppgavene og spørsmålene skal være utformet for å gi mulighet til selvkorrigering. Intervjuguiden er formet slik at egne kriterier som jeg som forsker skal følge, står øverst.

Elevene fikk utdelt et hefte med oppgavene uten at jeg stilte noen spørsmål, men gav elevene tid til å lese gjennom. Deretter fikk elevene beskjed om å løse fyrstikkhusoppgaven først, og jeg ba elevene lese oppgavene høyt og diskutere dem imellom. Jeg valgte å designe intervjuguiden med eventuelle oppfølgingsspørsmål. Disse ble stilt dersom elevene satt fast med en oppgave eller dersom jeg ønsket en grundigere beskrivelse av deres svar.

Det siste prinsippet fremhever at elevene bør ha tilgang til representasjonsredskaper. Elevene fikk utdelt oppgaveark, kalkulator, kladdeark, blyanter og viskelær i arbeid med oppgavene.

3.7 Pilotering av oppgavene

Uken før datamaterialet skulle samles inn gjennomførte jeg en pilotering av oppgavene som skulle brukes i de oppgavebaserte intervjuene. Jeg prøvde ut oppgavene på elever i en 1T-gruppe på videregående skole, altså elever som har valgt teoretisk matematikk i 1. klasse på videregående skole. Hensikten med pilotprosjektet var å avdekke mulige misforståelser rundt oppgavene, vanskegrad og tidsbruk.

Elevene var til stede i samme klasserom og arbeidet med oppgavene i par. Min rolle som intervjuer ble lagt til side da fokuset var på utprøvelse av oppgavene. Pilotprosjektet forberedte meg på hvilke typer spørsmål og utfordringer jeg kunne få hos elevene på 10. trinn. Jeg observerte at elevene stort sett hadde kontroll på de første deloppgavene i oppgavene. Elevene hadde størst problemer med å overføre den generelle formelen til et koordinatsystem. Oppgavearkene jeg delte ut til elevene i pilotprosjektet hadde blanke rutenett hvor y-aksen og x-aksen hadde navn, men ingen avstander var markert med tall. Elevene i pilotprosjektet brukte mye tid på, og slet med, å finne ut hvilke avstander som var mest hensiktsmessige å bruke. Elevene stoppet opp, og mange av elevene startet med å gi aksene verdier 1, 2, 3 osv.

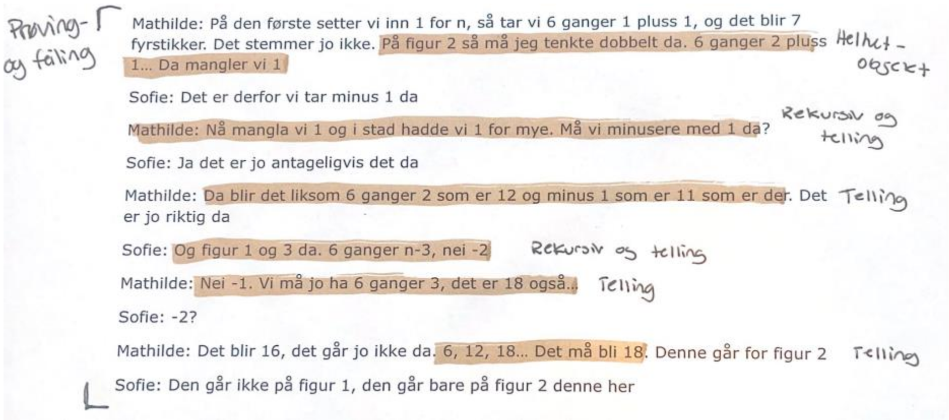
Etter gjennomført pilotering inkluderte jeg gjennomtenkte avstander på aksene i koordinatsystemet til oppgavene før jeg gjennomførte datainnsamlingen med 10. klassingene. På grunnlag av piloteringen fant jeg det hensiktsmessig å skalere aksene. Dette ble gjort slik at elevene ikke skulle bruke tiden på å gi avstandene verdier. Dersom elevene hadde gitt ugunstige verdier til aksene kunne det vært vanskeligere for elevene å se hvilken type graf de hadde skissert. Jeg la passende verdier til hvert koordinatsystem for begge oppgavene, og la ved rutenett bak til fyrstikkhusoppgaven. Wilkie (2020) anbefaler at oppgaver som omhandler skissering av grafer ut fra generalisering bør inneholde skalerte akser og rutenett, og ikke blankt område.

3.8 Abduktiv innholdsanalyse

Bogdan og Biklen (2007) definerer analyse i kvalitativ forskning som prosessen der forskeren systematisk undersøker og arrangerer datamaterialet for å komme frem til et resultat. I arbeidet med å analysere datamaterialet har jeg valgt å ta i bruk en innholdsanalyse-tilnærming. En innholdsanalyse inneholder systematiske koder og kategoriseringsmetoder som brukes for å utforske datamaterialet for å bestemme trender og mønstre for ord som brukes, deres relasjoner, frekvens, kommunikasjonsstrukturer og diskurser. I en innholdsanalyse undersøkes det hvem som sier hva, til hvem og med hvilken effekt ting er fortalt. Analysen er en beskrivende tilnærming i koding av data og tolkning av kvantitative tellinger av kodene (Vaismoradi et al., 2013).

Forholdet mellom datainnsamling og analyse og mellom teori og data kan diskuteres i vilkår for induksjon, deduksjon og abduksjon. Kennedy og Thornberg (2018) argumenterer for at en ulempe ved deduktiv analyse kan være at forskeren kun ivaretar aspekter av dataene som er forskrevet av teorier, og overser andre aspekter av dataene som er utenfor teoriens omfang. Med grunnlag i dette har jeg valgt å ha en abduktiv tilnærming til analyse i denne studien. I en abduktiv kvalitativ analyse er forskeren åpen og sensitiv for data, samtidig som forskeren tillater bruk av eksisterende teorier. Forskeren undersøker hvordan dataene støtter eksiterende teorier, samt hvordan dataene kan kreve endringer i eksisterende forståelser. Eksisterende teorier er kilde til identifisering og tolkning av mønstre (Kennedy & Thornberg, 2018).

Gjennom analyseprosessen har jeg brukt Creswell og Creswell (2018) sine fem trinn for kvalitativ analyse: (1) organisere og klargjøre data for analyse, (2) studere data, (3) kode data, (4) generere en beskrivelse og temaer, og (5) representere beskrivelsene og kategoriene. Jeg transkriberte intervjuene fortløpende etter datainnsamlingen, og sorterte dataen ved å knytte sammen transkripsjon av intervju, elevenes skriftlige arbeid og egne feltnotater til egne dokumenter. Videre gjorde jeg meg godt kjent med rammeverkene for studien. Datamaterialet ble kodet etter rammeverkene utarbeidet av Carlson et al. (2002) og Lannin (2005). Figur 3.C, 3.D og 3.E viser konkrete eksempler fra min kodeprosess.



Prøving- og feiling

Mathilde: På den første setter vi inn 1 for n, så tar vi 6 ganger 1 pluss 1, og det blir 7 fyrstikker. Det stemmer jo ikke. På figur 2 så må jeg tenkte dobbelt da. 6 ganger 2 pluss 1... Da mangler vi 1 — Helhet-objekt

Sofie: Det er derfor vi tar minus 1 da

Mathilde: Nå mangla vi 1 og i stad hadde vi 1 for mye. Må vi minusere med 1 da? — Rekursiv og telling

Sofie: Ja det er jo antageligvis det da

Mathilde: Da blir det liksom 6 ganger 2 som er 12 og minus 1 som er 11 som er der. Det er jo riktig da — Telling

Sofie: Og figur 1 og 3 da. 6 ganger n-3, nei -2 — Rekursiv og telling

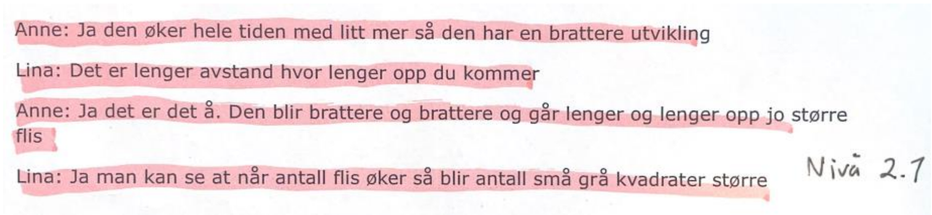
Mathilde: Nei -1. Vi må jo ha 6 ganger 3, det er 18 også.. — Telling

Sofie: -2?

Mathilde: Det blir 16, det går jo ikke da. 6, 12, 18... Det må bli 18. Denne går for figur 2 — Telling

Sofie: Den går ikke på figur 1, den går bare på figur 2 denne her

Figur 3.C: Koding av generaliseringsstrategier



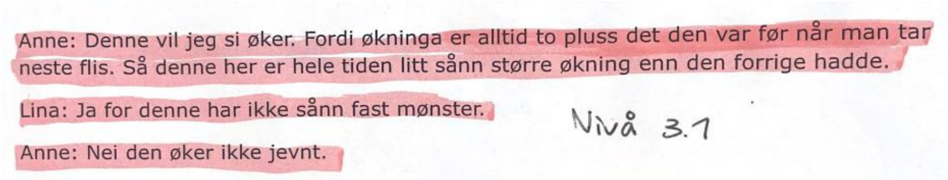
Anne: Ja den øker hele tiden med litt mer så den har en brattere utvikling

Lina: Det er lenger avstand hvor lenger opp du kommer

Anne: Ja det er det å. Den blir brattere og brattere og går lenger og lenger opp jo større flis

Lina: Ja man kan se at når antall flis øker så blir antall små grå kvadrater større — Nivå 2.1

Figur 3.D: Koding av samvariasjonell tilnærming til funksjoner 1



Anne: Denne vil jeg si øker. Fordi økninga er alltid to pluss det den var før når man tar neste flis. Så denne her er hele tiden litt sånn større økning enn den forrige hadde.

Lina: Ja for denne har ikke sånn fast mønster. — Nivå 3.1

Anne: Nei den øker ikke jevnt.

Figur 3.E: Koding av samvariasjonell tilnærming til funksjoner 2

Lannin (2005) presenterer fem strategier for generalisering i sitt rammeverk. Da jeg kodet dataen knyttet til det første forskningsspørsmålet tok jeg utgangspunkt i Lannins (2005) kategorier. De fem ulike generaliseringsstrategiene kodet jeg ved å markere i brun farge og skrive navnet på strategien. For å kode det andre forskningsspørsmålet brukte jeg samvariasjonsrammeverket og nivåene i dette. Nivåene markerte jeg med rosa farge og jeg skrev hvilket nivå utsagnet tilsvarte. Videre samlet jeg alt av data som tilhørte en kategori, eller et nivå, i et dokument. Slik kunne jeg studere dataene ytterligere og se etter trender. Her la jeg også med bilder av elevenes skriftlige arbeid. Analysekapittelet er utformet etter hver kategori og hvert nivå i de to oppgavene.

3.9 Transkripsjon

Det første trinnet beskrevet av Creswell og Creswell (2018) handler om å organisere og klargjøredata for analyse. I arbeidet med dette trinnet transkriberte jeg dataene fra intervjuene. Braun og Clarke (2006) hevder at gjennom å transkribere data får forskeren en mer fullstendig forståelse av datamaterialet slik at forskeren kan danne seg meninger tilknyttet datamaterialet. Jeg transkriberte intervjuene fortløpende etter de ble gjennomført slik at alt var ferskt i minne, og jeg kunne organisere og kategorisere det som ble sagt sammen med feltnotatene mine med ikke-verbale handlinger og elevenes skriftlige arbeid. Jeg fikk en mer fullstendig forståelse av datamaterialet, og fant elementer som gikk igjen som jeg ble nysgjerrig på om var trender jeg kunne se nærmere på.

I arbeid med å transkribere unnlot jeg å transkribere ikke-faglige emner som kom frem mellom deltakerne, da dette ikke er relevant for mine forskningsspørsmål. Jeg unnlot også å transkribere korte utrykk elevene sa slik som «hm..». Når jeg som forsker har stilt oppfølgingsspørsmål til elevene under de oppgavebaserte intervjuene, har jeg referert til meg selv som *intervjuer* i transkripsjonene. Analysekapittelet viser transkripsjonsutdrag som inneholder «(…)», dette viser til deler av transkripsjonen som ikke er tatt med i utdragene da dette ikke var relevant.

Elevene fikk tildelt pseudonymer i transkripsjonen, slik at de ikke skal være gjenkjennbare i studien. Etter transkripsjonen var ferdig leste jeg den opp mot lydopptaket for å sikre at ingen ord eller setninger var glemt. En oversikt over gruppene og pseudonymene er presentert nedenfor i tabell 3.A.

Tabell 3.A: Gruppeoversikt

Gruppenummer	**Elever i gruppene**			
Gruppe 1	Anne	Lina	Karen	
Gruppe 2	Amalie	Karl	Stian	
Gruppe 3	Filip	Ola	Oskar	Marius
Gruppe 4	Henriette	Mari		
Gruppe 5	Mathilde	Sofie		

3.10 Validitet og reliabilitet

Innenfor kvalitativ forskning innebærer validitet at forskeren sjekker nøyaktigheten på funnene sine ved å bruke visse prosedyrer (Creswell & Creswell, 2013). Validitet i kvalitativ forskning refererer til presisjonen der funnene nøyaktig gjenspeiler dataene, at man måler det man har sagt man skal måle og ikke noe annet. Validitet i en studie kan bli styrket ved å legge ved eksempler på hvordan koding har blitt gjort, slik som vist i kapittel 3.8.

I denne studien har jeg brukt flere av Creswell og Creswells (2013) strategier for å adressere kvalitativ validitet. Jeg har gitt en grundig beskrivelse av utvalget av elever, skolemiljøet og klassemiljøet for å sikre at funnene kan gi et mer realistisk og rikt resultat. I tillegg har jeg gitt informasjon om meg selv og motivasjonen for å skrive om det valgte temaet i innledningen for at leserne skal få en ærlig fortelling. Underveis i arbeidet med studien har jeg fått god hjelp av veilederen min som har vurdert og stilt kritiske spørsmål ved studien, noe som også styrker validiteten til studien. I tillegg blir resultatene på forskningen mer realistiske og gyldige da utvalget av elever består av elever med forskjellige forkunnskaper i matematikk.

Pålitelighet, eller reliabiliteten, i kvalitative studier indikerer at forskerens tilnærming er konsistent på tvers av ulike forskere og mellom ulike prosjekter. En måte å vise til relabilitet i en studie er å beskrive hvordan prosessen har foregått (Creswell & Creswell, 2013). Studiens prosess er beskrevet i kapittel 3.3. Creswell og Creswell (2013) anbefaler også forskere å kryssjekke koding av datamaterialet for å styrke reliabiliteten i studien. Under analyseprosessen med koding sendte jeg deler av datamaterialet til medstudenter for å se hvordan de ville kodet materialet og om dette samsvarer med min koding. Ved å gjennomføre dette ble gyldigheten til kodingen min mer presis. Creswell og Creswell (2013) vektlegger også gyldigheten til kodene, ved å anbefale forskere å kontinuerlig sammenlikne data med kodene og ved å skrive notater om kodene og deres definisjoner. Dette er et moment jeg også har vektlagt i analyseprosessen.

Postholm og Jacobsen (2018) antyder at en studie sjeldent gir nøyaktig de samme resultatene fordi både forskeren og informantene hele tiden er i utvikling, og bringer med sine erfaringer og kunnskap inn i sine interaksjoner. Jeg har etterstrebet objektivitet i studien, men det er nærliggende å tro at jeg hadde fått noe annerledes resultater dersom jeg hadde gjennomført studien på nytt med andre informanter.

3.11 Etiske betraktninger

Underveis i prosessen med å planlegge og gjennomføre en kvalitativ studie må forskere vurdere hvilke etiske problemer som kan dukke opp under studien (Creswell & Creswell, 2013). Etisk forskning handler om hva en forsker bør og ikke bør gjøre i sin forskning (Cohen et al., 2018). I starten av prosessen med studien søkte jeg om vurdering av prosjektet til Norsk Senter for Forskningsdata (NSD). Prosjektbeskrivelsen til forskningsprosjektet er lagt ved som vedlegg 4. Prosjektet ble godkjent av NSD. Vurderingen av forskningsprosjektet fra NSD er lagt ved som vedlegg 5. Etter at prosjektet ble godkjent tok jeg kontakt med den valgte ungdomsskolen. Elevene fikk utdelt et informativt samtykkeskjema som inneholdt informasjon om studien og deltakernes rettigheter. Informasjonsskrivet til forskningsdeltakerne og deres foresatte er lagt ved som vedlegg 3.

Elevene kunne selv velge om de ønsket å ta del i studien eller ikke. Deltakerne i studien er ungdomsskoleelever under 16 år. For ungdom under 16 år er det krav om at foresatte gir samtykke (Postholm, 2010). Deltakerne har rett til anonymitet og ivaretagelse av personvern, og på grunnlag av dette har jeg gitt deltakerne pseudonymer (Cohen et al., 2018). Konfidensialiteten har også blitt overholdt da det ikke skal være mulig å spore opp skolen, klassen eller elevene i forskningen.

Datamaterialet som er innhentet til studien innebærer lydopptak av intervju, feltnotater og elevers skriftlige arbeid. Jeg brukte appen Nettskjema-diktafon for å ta lydopptak av intervjuene. Lydopptaket ble tatt gjennom appen på smarttelefonen min, og opptakene ble sent til Nettskjema. Opptakene blir umiddelbart kryptert på telefonen og blir lagret på en sikker server. Jeg lastet ned lydopptakene til en privat og sikker server på NTNU. På denne serveren er også feltnotatene mine og kopier av elevenes skriftlige arbeid. Alt dette er i henhold til NSD sine retningslinjer. Elevenes skriftlige arbeid oppbevares i et låst hjem og skal makuleres ved prosjektets avslutning. Digital data på NTNUs server blir slettet etter avslutningen av forskningsprosjektet.

4 Funn og analyse

I dette kapittelet presenteres funn og analyse fra datamaterialet som er samlet inn ved lydopptak av oppgavebasert intervju, elevenes skriftlige arbeid og feltnotater. En analyse av generaliseringsstrategier til elevene på 10. trinn *og* deres samvariasjonelle tilnærming til funksjoner legges frem med bakgrunn i de teoretiske rammeverkene presentert i kapittel 2. Analysen danner grunnlaget for diskusjonen som kommer i kapittel 5.

Kapittelet er delt opp i seks deler. I kapittel 4.1 og 4.2 blir generaliseringsstrategiene til elevene analysert i lys av Lannin (2005) sitt teoretiske rammeverk. Det blir først redegjort for hver strategi i fyrstikkhusoppgaven, deretter i flismønsteroppgaven. I kapittel 4.3 og 4.4 blir elevenes samvariasjonelle tilnærming til funksjoner analysert i lys av rammeverket til Carlson et al. (2002), hvor jeg har tatt inspirasjon fra Wilkie (2020) og gjort egne tilpasninger. Å analysere oppgavene hver for seg gav et inntrykk av hvordan elevene arbeidet seg gjennom oppgavene fra start til slutt. I kapittel 4.5 legges det frem kommentarer om elevenes arbeid med å skissere grafer. Avslutningsvis presenteres en oppsummering av funnene i kapittel 4.6.

Analysen av elevenes generaliseringsstrategier viste at elevene brukte flere strategier i arbeid med oppgavene. Elevene knyttet seg ikke til én enkelt strategi, men varierte strategiene ut fra hva oppgavene etterspør. Analysen viste at elevene benyttet seg av de ikke-eksplisitte strategiene for å skaffe seg oversikt over, og kunnskaper om, figurmønstrene. I arbeid med å finne den generelle formelen benyttet elevene seg hovedsakelig av de eksplisitte strategiene. Tabell 4.A viser en oppsummering av hvilke generaliseringsstrategier de ulike gruppene tok i bruk i de ulike oppgavene. Detaljene i funnene presenteres i de to neste kapitlene.

Tabell 4.A: Oppsummering av elevenes generaliseringsstrategier

Fyrstikkhus

Strategi	Gruppe
Telling	1, 2, 3, 4, 5
Rekursiv	1, 2, 3, 4, 5
Helhet-objekt	1, 3, 4, 5
Prøve og feile	1, 3, 5
Kontekstuell	1, 2, 4

Flismønster

Strategi	Gruppe
Telling	1, 2, 3, 4, 5
Rekursiv	1, 2, 3, 4, 5
Helhet-objekt	1, 2, 3, 4, 5
Prøve og feile	1, 3, 5
Kontekstuell	1, 2, 4

Det var til dels vanskelig å kategorisere ulike utsagn til ulike generaliseringsstrategier, da elevene ofte brukte flere strategier i samme løsning. Elevene brukte strategiene om hverandre og vekslet i bruken av dem når de ikke hadde en tydelig plan for løsningsprosessen. Analysen viste at bruken av strategiene telling og rekursiv fløt inn i hverandre. Elevene brukte telling for å telle opp antall elementer i de ulike mønstrene, og for å finne den neste figuren måtte de også se på forandringene i antall komponenter i hvert av mønstrene. De brukte dermed også rekursiv strategi. Det er et uklart skille mellom strategiene, da elevene var avhengige av å se på økninger mellom to elementer for å kunne si noe om forskjellen mellom elementene. Analysen viste også at i to tilfeller gav bruken av prøve og feile-strategien en kontekstuell strategi. Hvorvidt en strategi er kontekstuell eller ei avhenger av elevenes begrunnelse for strategien. Elever kan ha funnet riktig generell formel for et figurmønster, men dersom elevene ikke klarte å begrunne komponentene i formelen, kunne løsningen likevel ikke kategoriseres som en kontekstuell strategi.

Elevenes beskrivelser av deres skisserte grafer presenteres i analysen av elevenes samvariasjonelle tilnærming til funksjoner. Beskrivelsene ble delt inn i ulike nivå fra samvariasjonsrammeverket. Analysen viste at elevenes nivå varierer og at elevene er på ulike nivå i de forskjellige oppgavene. Tabell 4.B viser en oppsummering av de ulike nivåene i de ulike oppgavene. Detaljene i funnene presenteres i kapittel 4.3 og 4.4.

Tabell 4.B: Oppsummering av elevenes nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner

Fyrstikkhus

Nivå	Gruppe
Før 1	3, 4
1.1	1, 3, 5
1.2	3, 5, 4
2.1	1, 3, 5
3.1	1, 2

Flismønster

Nivå	Gruppe
Før 1	2
1.1	1, 3
1.2	1, 3
2.1	1, 4, 5
3.1	1

I arbeid med å analysere elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner oppsto det vanskeligheter med kategorisering. I noen tilfeller sier elevene ikke eksplisitt noe som tilhører et gitt nivå, men det er underforstått at elevene forstår elementer med grafen til tross for at elevene ikke sier det direkte. Et eksempel på dette for gruppe 4 blir vist kapittel 4.4.4.

4.1 Generaliseringsstrategier i fyrstikkhusoppgaven

I dette kapittelet analyser jeg elevenes generaliseringsstrategier i arbeid med fyrstikkhus-oppgaven. Kapittel er delt inn etter de ulike strategiene.

4.1.1 Telling

Strategien telling ble observert hos alle gruppene i arbeid med fyrstikkhusoppgaven. I deloppgave a) starter elevene med å telle hvor mange fyrstikker det er i de forskjellige husene før de skal tegne figur 4. Videre teller elevene opp antallet fyrstikker i tegningen av figur 4. Gruppe 1 og 4 teller antall hus i hver av figurene. Når elevene bruker strategien telling slik som beskrevet ovenfor, kan det ikke utelukkes at det er en grad av rekursiv strategi involvert. Elevene ser på hvordan mønsteret forandrer seg fra et element til det neste i mønsteret. Dette blir kommentert ytterligere i kapittel 4.1.2.

Når gruppe 3 arbeider med deloppgave d) foreslår Marius å tegne opp en rekke hus for å se hvor mange fyrstikker de eventuelt får til overs når de skal bruke 100 fyrstikker til å lage hus. Marius bruker dermed telle-strategien.

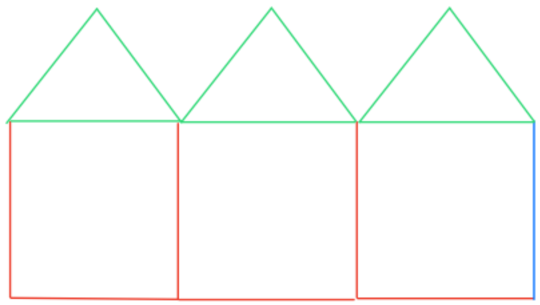
4.1.2 Rekursiv

Alle gruppene brukte rekursiv strategi i deloppgave a). Ingen av gruppene kom frem til et generelt uttrykk ved å bruke rekursiv strategi alene. Elevene brukte rekursiv strategi på ulike måter. Dette blir følgende vist gjennom konkrete eksempler.

Alle gruppene observerer at antallet fyrstikker øker med fem mellom figurene. Amalie begrunner dette med at den ene veggen fyller ut den andre, og Anne begrunner det med at husene har en felles fyrstikk hele tiden. Elevene har studert mønstret og bruker tidligere figurer av fyrstikkhus for å kunne si noe om hvordan mønsteret vokser. Elevene har også brukt strategien telling i funn av denne oppdagelsen, slik som kommentert i kapittel 4.1.1.

Anne i gruppe 1 delte opp mønsteret i mindre deler og brukte telling og rekursiv strategi for å finne ut hvor mange fyrstikker som ble lagt til hver gang.

Anne: Vi legger til ett til hus minus den. Den henger på en måte… Vi prøver å tegne opp huset. Det er ett hus, også liksom du legger til ett til hus. Men her hører det til, så du legger til taket på de to. Taket og de to hele tiden



Figur 4.A: Annes dekomponering av fyrstikkhusmønsteret

Anne har dekomponert mønsteret slik som vist illustrert i figur 4.A. Taket på huset, markert i grønn, har tre fyrstikker. Når Anne ovenfor referer til «de to hele tiden», referer hun til en L-form markert i rødt. Hun legger til en L-form og taket når de neste figurene skal tegnes, og fyrstikken som er markert i blått er det som Anne referer til som den felles fyrstikken fyrstikkmønsteret alltid har.

Når Amalie arbeider med å finne en generell formel bruker hun telling og rekursiv strategi. Amalie teller antall fyrstikker i hver figur. Hun tar utgangspunkt i den foregående figuren og plusser på 5 for å finne den etterfølgende figuren. Liknende tankegang kommer til syne når gruppe 1 og 3 skal skissere grafen. Gruppene teller seg opp fra 6 (antall fyrstikker i første figur) og adderer med 5 for hver figur for å skissere grafen.

Når gruppe 2 skal skissere grafen løser de dette med å tegne opp koordinatene for de fire første husene. Amalie ser at antallet med fyrstikker alltid ender med én over tallverdiene som er markert på y-aksen. Dette er rekursiv strategi.

Når Amalie videre skal løse deloppgave d) studerer hun mønsteret i antall fyrstikker de forskjellige husene har og begrunner svaret sitt med dette.

Amalie: Du har 96 hvis du skal få til å lage noe, så da har du fire til overs

Karl: Ja for hvis ikke får du 101

Amalie: For det øker alltid med over én i femgangen, nei det er alltid over én i femgangen

Karl: Ja, den hadde ikke endt på 100 uansett

Amalie: Du kan ikke sprenge skalaen med fyrstikker så du har 96 og da blir det fire til overs

(…)

Amalie: Som sagt utvikles det samme hele veien så det blir ikke noe forandring. Og det blir enten et 6-tall eller et 1-tall bakerst, og hvis du skal så nærme til 100 som mulig er det 101

Amalie har funnet et mønster hvor hun ser at antall fyrstikker i figurene alltid ender med 1 eller 6. Funnet er rekursivt fordi hun har sett på de første verdiene av totalt antall fyrstikker i ulike hus og funnet et mønster ut fra dette. Gruppe 1 gjør også denne oppdagelsen. Gruppen bruker funnet til å skissere grafen i deloppgave d). Når gruppen kommer til 96 stopper de og leser fra grafen at da kan de lage 19 fyrstikkhus.

Ved å bruke rekursiv strategi kan elevene finne antall fyrstikker i et hvilket som helst figurtall. Elevene er avhengige av å vite antallet fyrstikker i den foregående figuren, eller starte på 6 og addere med 5 for å finne de etterfølgende figurene. Elevene leter ikke etter en generell formel, men finner en generell sammenheng som gjelder for dette mønsteret.

4.1.3 Helhet-objekt

Fire av gruppene brukte helhet-objekt-strategien i arbeid med fyrstikkhusoppgaven. I to av tilfellene gav bruken av strategien en korrekt løsning. I disse tilfellene samarbeidet elevene med hverandre og korrigerte slik at det ble tatt hensyn til over- og undertelling slik at strategien fungerer.

Etter at gruppe 4 har tegnet opp fyrstikkhus 4 og skal telle antall fyrstikker i hvert hus bruker Henriette helhet-objekt-strategien. Henriette dobler antall fyrstikker i figur 1 og mener at figur 2 har 12 fyrstikker. Henriette tar ikke hensyn til den delte veggen i figur 2.

Gruppe 5 bruker helhet-objekt-strategien i deloppgave d). Sofie foreslår å plusse med 5 fra første fyrstikkhus helt til de kommer til 100. Mathilde sier at Sofie ikke trenger å begynne smått, og foreslår at de heller kan multiplisere 6 med 11 som blir 66. Mathilde har tatt utgangspunkt i det første fyrstikkhuset som har seks fyrstikker og multipliserer dermed 6 med 11, med et ønske om å finne antall fyrstikker i en rekke med elleve fyrstikkhus.

Gruppe 4 bruker også helhet-objekt-strategien i arbeid med deloppgave d).

Henriette: Vi ser at det er 51 på figur 10. Så da vil det si at det nesten er 19 da, hvis vi skal ha noen til overs. Stemmer ikke det da? For hvis vi dobler det blir det 102, og hvis vi tar 5 minus det så blir det… Så da blir det 19

(…)

Mari: Man må plusse på 1 siden vi har den ekstraveggen. Så vi kan ikke ta 5 ganger 10 pluss 1 ganger med 2 siden da har vi ekstraveggen to ganger. 5 ganger 10, vi kan ta det i parentes først. Så ganger vi 2 i en parentes, så pluss 1. Da teller vi bare ekstraveggen en gang

Henriette bruker formelen gruppen har funnet, $a_n = 5n + 1$, og setter inn 10 for n. Hun ser at for 10 fyrstikkhus trenger man 51 fyrstikker. Deretter dobler Henriette det hun har funnet og drar konklusjonen med at 19 hus må være det riktige svaret. Når Henriette dobler og finner at 20 fyrstikkhus har 102 fyrstikker tar hun ikke høyde for den delte sideveggen. Mari, i samme gruppe, har forstått hvorfor Henriettes metode ikke fungerer. Mari gjør justeringer for over- og undertelling for å komme frem til riktig svar.

Gruppe 1 bruker også helhet-objekt-strategien:

Anne: Vi kan ikke prøve å hoppe da? Å hoppe på grafen? Den stopper på 55 fyrstikker. Men figur 20, blir ikke det 52 fyrstikker? Hvis figur.. Eller… det går kanskje ikke an å ta dobbelt nei

Lina: Hvis det hadde vært to, hadde det gått an å ta dobbelt

Anne: Ja og her øker det jo med fem ikke med to. Figur 10 har jo 51 fyrstikker

Lina: Det blir 5 ganger 20, som blir 100

Anne: Men første er på 6 så det blir 100

Lina: Vent da… Blir det ikke det 19 da?

Anne og Lina forsøker først å doble antall fyrstikker. Lina foreslår å multiplisere 5 med 20, og begrunner dette med at fyrstikkmønsteret øker med fem fyrstikker for hver figur. Anne gjør en justering for å unngå overtelling når hun tar hensyn til at det første fyrstikkhuset har seks fyrstikker. Ved hjelp av helhet-objekt-strategien har gruppen kommet frem til et korrekt svar.

Når gruppe 3 arbeider med deloppgave c) og skal lage en graf bruker de helhet-objekt-strategien:

Marius: 10 hus, 10 ganger 6, det er 60. Også toppen da, dette er toppen

Marius tar utgangspunkt i det første fyrstikkhuset og multipliserer med 10 for å finne toppen av grafen de skal tegne. Gruppen oppdager at y-aksen ikke går opp til 60, og de mener dermed at Marius sin løsningsmetode må være feil.

4.1.4 Prøve og feile

Gruppe 1, 3 og 5 brukte en strategi basert på prøving og feiling i arbeid med deloppgave b). Gruppe 5 kom ikke frem til en generell formel ved bruk av denne strategien, mens gruppe 1 og 3 kom frem til en generell formel.

Gruppe 1 bruker prøve og feile-strategien når de prøver å lage et generelt uttrykk. Ved å bruke denne strategien kommer de etter hvert frem til riktig formel for mønsteret, og har oppnådd en kontekstuell strategi. Elevene starter med å bruke tallet 6 i en formel, da det er seks fyrstikker i det første huset. De har identifisert at mønsteret hele tiden vokser med fem fyrstikker, og ønsker bruke denne økningen når de skal finne en generell formel. De er innom formlene: $a_n = (n+5)\cdot(n-1)$, $a_n = 6+(n-1)$, $a_n = 6+n$, $a_n = 6n$, $a_n = 6n-1$ og $a_n = 6n-(n-2)$. Hvor alle formlene inneholder det de har ytret at de ønsker å få med, seks som antall fyrstikker i første figuren og fem som symboliserer måten mønsteret vokser på. Anne og Lina tester ut de forskjellige formlene og endrer dem når de ser at formlene ikke fungerer. Elevene kommer etter hvert frem til en riktig formel etter prøving og feiling, dette blir kommentert ytterligere i kapittel 4.1.5.

Gruppe 3 forsøker å løse deloppgave b) ved å gjette seg frem til svaret. Denne gruppen starter også med å ta utgangspunkt i de seks fyrstikkene i det første huset. Gruppen er innom formlene: $a_n = 6n - 1$, $a_n = 6n - n$ og $a_n = n + 5$, før de kommer frem til formelen $a_n = 5n + 1$.

Filip: Men det skal være noe sånn felles minus? Hva med $n \cdot 5$? Figurtall ganger 5 også pluss 1? n er figurtall sant. Også tar vi figurtall ganger 5, det blir 10, også 16 også pluss 1. Figurtall ganger 5, for hvis det er figur 2 blir det 2 ganger 5 som er 10 så plusser du på 1 så er det 11. Samme med 3, da er det 3 ganger 5 som er 15 også pluss 1 som er 16, og da blir det riktig svar

Gruppen har prøvd å tilpasse de ulike formlene til fyrstikkmønstret og prøvd ut formlene sine ved å teste for de første tilfellene av fyrstikkhus. Etter flere forsøk med prøving og feiling har elevene kommet frem til en riktig formel, men elevene har ingen forklaring på hvorfor denne formelen fungerer, og oppnår dermed ikke en kontekstuell strategi.

Gruppe 5 forsøker også å tilpasse ulike formler til mønsteret. Gruppen eksperimenterer med ulike regneoperasjoner og tall som passer oppgaveteksten. Gruppen er innom formlene: $a_n = 6n + 1$, $a_n = 6n - 1$ og $a_n = 6n + 5$, men kommer ikke frem til en riktig formel.

4.1.5 Kontekstuell

I arbeid med fyrstikkhusoppgaven brukte tre grupper en kontekstuell strategi. Gruppe 1, 2 og 4 brukte strategien i arbeid med å finne en generell formel. Gruppe 1 og 4 brukte også kontekstuell strategi i deloppgave d).

Som vist i kapittel 4.1.4 brukte Anne og Lina prøve og feile-strategien i arbeid med deloppgave b). Ved hjelp av prøving og feiling kommer gruppen frem til en generell formel, og har oppnådd en kontekstuell strategi da de også kan forklare denne formelen:

Anne: Se her, for eksempel her er det 1, 2, 3, 4, 5, 6 også er det pluss 5. Så må du gange med $5n$ som blir 2. Som altså blir 5 ganger n som her blir 2 minus 1. Som bare blir 1. Så da blir det bare 5 ganger 1. Her blir det 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 1, 2, 3, 4, 5 og det blir 2 så da blir det pluss 5 ganger n som er 3, minus 1 som er 2. Så blir det 5 ganger 2. Stemmer ikke det da? Jeg tror denne stemmer. Altså pluss 5 ganger 3 minus 1. Da skal det være 16 her. Så da stemmer jo formelen. n er her figur 3, så da stemmer det med 16. 6 pluss 5 ganger fordi n er 2. 2 er alltid minus 1 fordi det er den eneste som mangler. Så da blir det ikke 2, men 1 og da må du gange 5 med 1 og det stemmer for da blir det 6 så blir det pluss 1, 2, 3, 4, 5

Etter at Anne har forklart dette, tester hun det hun har funnet for figur 4 og ser at det hun har funnet stemmer. Anne har skrevet ned $6 + 5(n-1)$ på papiret sitt. Forklaringen til Anne kan være noe vanskelig å forstå slik hun ytrer den muntlig. Anne starter med 6, siden det er seks fyrstikker i første hus. Hun tar med 5 i formelen, og multipliserer med n ettersom hvor mange hus det er i mønsteret, altså figurtallet som også symboliserer antall hus. Hovedpoenget til Anne er at man videre må ta $n-1$ fordi det alltid er en vegg som blir delt mellom to hus. Formelen til Anne forenkles slik:

$$a_n = 6 + 5(n-1)$$
$$a_n = 6 + 5n - 5$$
$$a_n = 5n + 1$$

Anne har kommet frem til riktig generelt uttrykk for mønsteret. Gruppen forslår å bruke denne formelen for å løse deloppgave d), og tester med ulike verdier. Gruppen noterer dette på arket sitt:

$$a_n = 6 + 5(19-1)$$
$$a_n = 6 + (5 \cdot 18)$$
$$a_n = 96$$

Anne: Vi får til å lage figur nummer 19, da blir det 96 fyrstikker og vi får fire fyrstikker til overs

Elevene ser sammenhengen mellom figurmønsteret og den generelle formelen. Dette kommer til syne da de foreslår å benytte seg av formelen for å løse oppgaven.

Mari i gruppe 4 har også brukt kontekstuell strategi i arbeid med deloppgave d). Mari har forstått at den eksplisitte formelen kan brukes til å løse oppgaven, og på denne måten ser en klar sammenheng mellom det generelle uttrykket og fyrstikkmønsteret. Mari setter $5n+1$ lik 100 og lager et uttrykk for n.

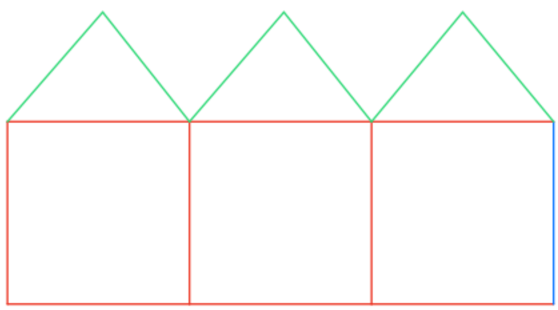
Mari: Ja da blir det 99 delt på 5. Det går jo ikke opp, så da ser vi at noe blir til overs

Løsningen til Mari forteller at det blir fyrstikker til overs. Mari gir ikke et eksakt antall på hvor mange fyrstikker som blir til overs.

Gruppe 4 bruker kontekstuell strategi i arbeid med å finne en generell formel.

Henriette: Her er det alltid $n+1$, her er det 3 pluss 1. Vi tenker de her fyrstikkene, de tre også er det en ekstra hver gang. Her er det to og en ekstra, her er det en og en ekstra. Sånn ja. Da blir det $2n$ og $3n$ pluss 1. Skal vi se, ja. Her er det jo også to sånne der, da er det tre sånne spisser da blir det figurnummer 3 ganger 2. 2 for hver spiss, $2n$. Så da blir det $5n+1$

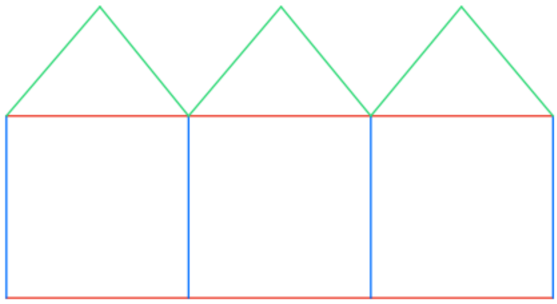
For å gjøre forklaringen til Henriette enklere har jeg laget en illustrasjon, vist i figur 4.B:



Figur 4.B: Henriettes dekomponering av fyrstikkhusmønsteret

Henriette har delt mønsteret opp i tre deler, slik som illustrert i figur 4.B. De to grønne fyrstikkene er taket på huset og Henriette har satt disse som $2n$, da det er to fyrstikker og like mange tak som det er fyrstikkhus. Fyrstikkene som er markert i rødt er en grunnlinje, sidevegger i huset og toppen av huset. Henriette betegner hver av disse delene som n da det er like mange i hver del som det er antall hus. Henriette plusser deretter på 1, som er den blå fyrstikken, og får: $a_n = 3n + 2n + 1 = 5n + 1$.

Karl dekomponerer også mønsteret når han skal finne et algebraisk uttrykk, slik som vist i figur 4.C.



Figur 4.C: Karls dekomponering av fyrstikkhusmønsteret

Karl: $2n$ pluss … Da har jeg tatt disse så var det da blir det n pluss 1. Dette blir avansert. Også de oppå da blir det $2n + 2n$. Da spørs det om det her går. $2n$ siden to av de husene, firkantene. $1n$ her og $1n$ her, så ser jeg for meg det her som n, at de også er n også pluss 1 også var det her $2n$ fordi det blir det dobbelte. Nei det går jo heller ikke. Eller jo. 1, 2, 3, jo det går. $2n$ det er 4. Figur 2 da. Da har vi $2 \cdot 2$ først, så $+1 + 2 + (2 \cdot 2)$. Da har vi 4+2+1+4 som er 11

Karl har delt mønstret ved å ta taket (grønne fyrstikker), de vannrette fyrstikkene (røde fyrstikker) og de loddrette fyrstikkene (blå fyrstikker) hver for seg. Mens Karl forklarer det han sier ovenfor, skriver han ned formelen $a_n = 2n(n+1) + 2n$. $2n$ i starten av formelen symboliserer de røde fyrstikkene, hvor hver vannrette rekke er n. $n+1$ er de loddrette, blå fyrstikkene. $2n$ i slutten av Karls formel er de grønne fyrstikkene. Karl har dekomponert mønsteret. Han ser hver del for seg selv, og lager et uttrykk for de forskjellige delene før han legger det sammen i en formel. Dette er en kontekstuell strategi. Karl lager en generell formel basert på informasjonen gitt i oppgaven.

4.2 Generaliseringsstrategier i flismønsteroppgaven

I dette kapittelet analyser jeg elevenes generaliseringsstrategier i arbeid med flismønsteroppgaven. Kapittel er delt inn etter de ulike strategiene.

4.2.1 Telling

Alle gruppene brukte telle-strategien i flismønsteroppgaven. Elevene brukte illustrasjonen av flisene til å telle utviklingen i små grå og hvite kvadrater. Alle gruppene identifiserte at mønsteret alltid hadde fire hvite kvadrater. Elevene tok høyde for hvordan figurene utviklet seg og brukte også rekursiv strategi.

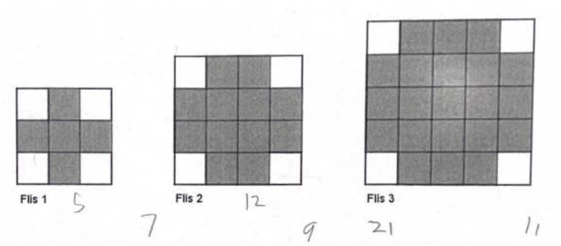
Gruppe 1 teller små grå kvadrater i flisene og ser at flisnummeret gir antall grå kvadrater i nederste rad. Gruppen teller opp hvite og grå kvadrater for å tegne neste figur. De noterer seg også at kvadratet i midten alltid øker med en mer, slik at det går fra $1 \cdot 1$ til $2 \cdot 2$ til $3 \cdot 3$ osv. Dette er en kombinasjon av telling og rekursiv strategi.

Når gruppe 5 skal skissere en graf foreslår Mathilde at gruppen må tegne opp figur 5, og telle antall små grå kvadrater i figuren slik at de kan finne riktige koordinater. Sofie foreslår at figur 5 har 45 små grå kvadrater. Hun begrunner dette med at hun så for seg figuren i hodet. Mathilde og Sofies strategier kvalifiserer seg under den ikke-eksplisitte strategien telling, da elevene tegner en modell både fysisk og mentalt for å telle de ønskede egenskapene.

4.2.2 Rekursiv

Alle gruppene brukte rekursiv strategi i startfasen av oppgaven. Elevene så på utviklingen fra ett element til et annet, og fant en sammenheng mellom antall små grå kvadrater og antall små hvite kvadrater. Dette ble kommentert i kapittel 4.2.1.

Gruppe 1 har skrevet ned hvor mange små grå kvadrater det er i figurene og økningen i antall små grå kvadrater mellom hver av figurene, slik som vist i figur 4.D.



Figur 4.D: Oversikt over flismønsteret fra gruppe 1

Anne: Fem og tolv, så syv i økning. Så er det 21. Øker med syv ja. Fra tolv til 21 så er det ikke syv, men ni i økning

Lina: Hvis vi finner areal for hele figuren og så tar minus 4 så finner vi økningen hele tiden

Anne: Så øker den med elleve i figur 4, så den øker alltid med to mer

Gruppen har sett på de påfølgende figurene for å bestemme hvordan de neste figurene vil se ut, og har dermed brukt en rekursiv strategi. Gruppen bruker dette funnet videre til å tegne inn koordinatene for de seks første flisene.

I arbeid med å se etter mønster og finne en formel setter gruppe 2 og 3 opp en verditabell. Når gruppene studerer tabellene finner de det samme som gruppe 1, at selve økningen i små grå kvadrater øker med to mer for hver figur.

4.2.3 Helhet-objekt

Alle gruppene brukte helhet-objekt-strategien da de studerte flismønsteret i deloppgave a). Ellers var det kun gruppe 2 som brukte strategien. Ingen av gruppene kom frem til en generell formel ved å bruke helhet-objekt-strategien i denne oppgaven.

Når gruppene arbeider med deloppgave a) og b) identifiserer alle gruppene at midten består av et kvadrat av små grå kvadrater. Elevene finner da at figur 4 må bestå av et kvadrat i midten som inneholder $4 \cdot 4$ små grå kvadrater. Elevene tar utgangspunkt i en del av mønsteret og danner en større enhet ved multiplikasjon når de identifiserer at kvadratet består av figurnummeret (n) opphøyd i andre.

Når Amalie i gruppe 2 arbeider med b) bruker hun helhet-objekt-strategien:

Amalie:	Fem er fast. Det blir det.. Fire fast så plusse på 1, så 7 plusse på 5, så 5 så er det 2 og da får du…
	(…)
Amalie:	Jeg får til starten og ikke resten. Vi plusser med 7 der, så 14 der så 21 der. For det blir det bare 5 og der…

Amalie tar utgangspunkt i at den første figuren har fem små grå kvadrater. Videre bruker hun både telling og rekursiv strategi når hun oppdager at neste figur har økt med syv små grå kvadrater. Amalie bruker helhet-objekt-strategien når hun videre mener at differansen i antall små grå kvadrater mellom flis 2 og flis 3 er 14, og mellom flis 3 og flis 4 er 21. Amalie multipliserer 7 med figurnummeret for å få differansen til den neste figuren. Differansen øker med to for hver figur og Amalies strategi er dermed feil.

4.2.4 Prøve og feile

Prøve og feile-strategien ble kun identifisert i arbeid med deloppgave b). Gruppe 1 lyktes ved å bruke denne strategien for å finne en generell formel, mens gruppe 3 og 5 ikke kom i mål. En gruppe brukte regneoperasjoner og tall knyttet til konteksten, mens to av gruppene brukte tilfeldige regneoperasjoner og tall.

Gruppe 1 bruker en strategi basert på prøving og feiling i arbeid med b). Gruppen foreslår formelen $a_n = (n+2) \cdot 2 - 4$.

Anne:	Ja da tester vi. Da blir det 3 som er $n+2$ så det blir 5 da blir det 5 ganger 5 minus de fire, da blir det de grå

Anne har skrevet ned formelen på papiret sitt og satt en strek mellom -4 slik: $a_n = (n+2) \cdot 2 \mid -4$. Når hun regner tar hun $(n+2)^2$ og multipliserer ikke med 2 slik som hun sier at hun gjør. Elevene prøver for andre figurer og får riktige svar.

Jeg etterspør om gruppen kan forklare formelen de har skrevet en gang til.

Anne:	Det blir n som er 1. Pluss 2 så ganger det med 2 og da blir det 3. Så blir det $3 \cdot 3$ som blir 9 og minus 4 siden det hele tiden er fire hvite i hjørnene. Så ganger vi med 2 først og ikke ganger 2 og så minus 4. Og da var det 2 siden det er to her, så plusser vi med 2. De to og de to. Så ganger vi med 2 for å få… siden det er fire
Lina:	Det er ikke sikkert det stemmer å gange med 2, for det blir 3 og 3 ganger 2 er 6
Anne:	Åja ja! Vi må ta det i andre i stedet, altså gange det med seg selv
Lina:	Ja akkurat!
Anne:	Så har vi nå $n+2$ i en parentes og den i andre og så minus 4. Og da står $(n+2)^2 - 4$ for n som er 2, og pluss en til toer siden det hele tiden

> er to mer. Og vi tar i andre siden vi ganger den med den og det er likt så det blir arealet. Så tar vi minus 4 siden det er de fire hvite

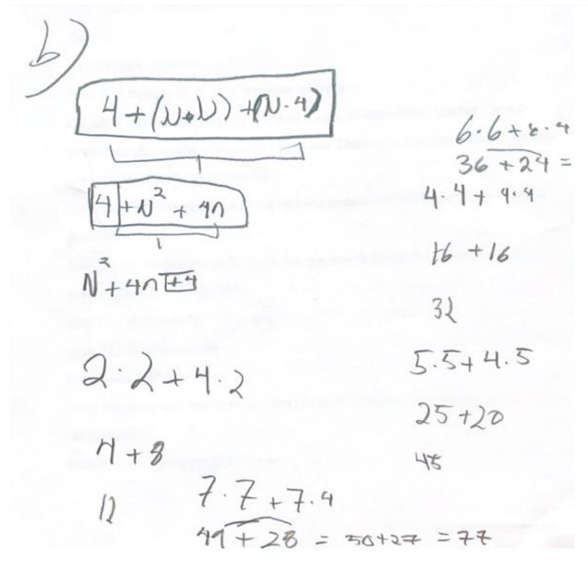
Anne finner $n+2$ for sidelengdene, antallet med små grå kvadrater øker alltid med 2 i sidelengde. Lina kommenterer at det ikke fungerer å multipliser med to slik de har skrevet, men at de må finne arealet. Gjennom samarbeid og prøving og feiling har gruppen nå funnet formelen $a_n = (n+2)^2 - 4$. De forteller at $n+2$ står for sidelengdene, og at de må finne arealet av hele figuren og dermed subtrahere med fire da det er fire små hvite kvadrater i hjørnene. Den siste forklaringen til Anne er en kontekstuell strategi som gruppen har oppnådd gjennom prøving og feiling. Annes strategi blir en kontekstuell strategi, da hun kan forklare formelen sin og komponentene i denne.

Når gruppe 3 skal finne en generell formel bruker de prøve og feile-strategien uten å lyktes. De er innom mange forskjellige formler, både for å finne et uttrykk for kvadratene i midten og kvadratene rundt. Gruppen gjetter på forskjellige tall og regneoperasjoner, uten å ta hensyn til hvorfor uttrykkene kan fungere og kommer ikke frem til noe svar. Gruppe 5 bruker prøve og feile-strategien og finner et uttrykk for kvadratet med små grå kvadrater i midten. Gruppen forsøker videre å finne en generell formel for mønsteret gjennom prøving og feiling, men kommer ikke i mål.

4.2.5 Kontekstuell

Gruppe 1, 2 og 4 benyttet seg av kontekstuell strategi for å finne det algebraiske uttrykket for flismønsteret. Bruken av kontekstuell strategi til gruppe 1 ble ytterlig kommentert i kapittel 4.2.4.

Når gruppe 2 arbeider med deloppgave a) er Karl rask med å tenke på hvordan en generell formel for dette mønsteret kan være. Karl noterer seg at sidelengdene er $n+1$ og at det alltid er fire hvite kvadrater. Han deler opp mønsteret av de små grå kvadratene i to, kvadratet i midten og sidene hver for seg.



Figur 4.E: Karls arbeid med deloppgave b) i flismønsteroppgaven

Figur 4.E viser at Karls har markert rundt *+4*. Dette symboliserer de fire hjørnene som ikke skal regnes med i formelen, men som ville vært et uttrykk for hele kvadratet med grå og hvite små kvadrater. Karl har ikke regnet med +4 når han regner ut hvor mange små grå kvadrater det er i de forskjellige figurene.

Karl: Da har vi $4+n^2+4n$. Da har vi n^2+4n+4. Jeg tror dette er riktig. Nå skal jeg sjekke. Nå har vi fire hvite som er faste, så går vi ut fra figurtallene nedpå her. Så har vi $n \cdot n$, så får vi kjernen. Her har vi $3 \cdot 3$, da har vi hele dette området. Sammen her med $1 \cdot 1$ og $2 \cdot 2$ fyller ut her. Så tar vi 4 ganger n da får vi $1 \cdot 4 = 4$, så får vi $4 \cdot 2 = 8$ og $4 \cdot 3 = 12$, da har vi fylt ut

Karl har uttrykt kvadratet av små grå kvadrater i midten som n^2, og sidene som $4n$. Dette er en kontekstuell strategi. Karls gir forklaringer til hver komponent i formelen.

Når Henriette og Mari i gruppe 4 arbeider med deloppgave b) bruker de kontekstuell strategi. Elevene viser at de forstår sammenhengen mellom det algebraiske uttrykket og det voksende mønsteret. Elevene forsøker å dekomponere figuren til å inneholde kvadrattall og trekanttall, og bruker formlene de har lært om disse tallene. Deretter foreslår Henriette å regne ut arealet til hele figuren og subtrahere med fire.

Henriette: Men nå tenkte jeg på noe. Kunne det ikke bare gått an å finne ut selve figuren og minusert med fire?

Mina: Ja det går an, for da blir det $n+2$ i parentes ganger med 2 minus 4. Det her skal da være i en parates

De forsøker med det de har funnet, men ser at de får feil svar. Dermed har også denne gruppen brukt noe av strategien prøving og feiling. Mari forstår hva gruppen har gjort feil og legger raskt frem en forklaring:

Mari: $n+2$ er den siden ganger med $n+2$ fordi det er areal gange med bredde. Da er det 3 pluss 2 ganger 3 pluss 2 i parentes, som er 5 pluss 5, nei 5 ganger 5, som er 25. Så hvis vi tar minus 4 blir det 21. Så det blir det $(n+2)\cdot(n+2)-4$, og det er likningen. Vi kan jo gjøre noe mer, n ganger n...

Henriette: Kan vi ikke da si $2n$, n^2 liksom?

Mari: n^2+4-4

Henriette: Nei det blir feil

Mari: Vi må gange hver av de med hverandre. $n^2+2n+2n+4$

Henriette: -4

Mari: Det vil si at det er $4n^2$, nei n^2 også pluss $4n$ også er det ikke noe mer

De har funnet en formel som fungerer for det voksende mønsteret ved å ta hele figuren og subtraherer med fire for de hvite hjørnene. Gruppen har også funnet at formelen kunne forkortes slik at det algebraiske uttrykket er $a_n = n^2+4n$.

4.3 Samvariasjonell tilnærming til funksjoner i fyrstikkhusoppgaven

I dette kapittelet analyserer jeg elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner i arbeid med fyrstikkhusoppgaven. Kapittelet er delt opp etter de ulike nivåene fra samvariasjonsrammeverket.

4.3.1 Nivå: før 1

I arbeid med fyrstikkhusoppgaven er det to elever som beskriver grafen de har skissert i billedlige termer. Marius i gruppe 3 beskriver grafen gruppen har skissert som en del av en pyramide, og Henriette i gruppe 4 beskriver grafen som en trapp.

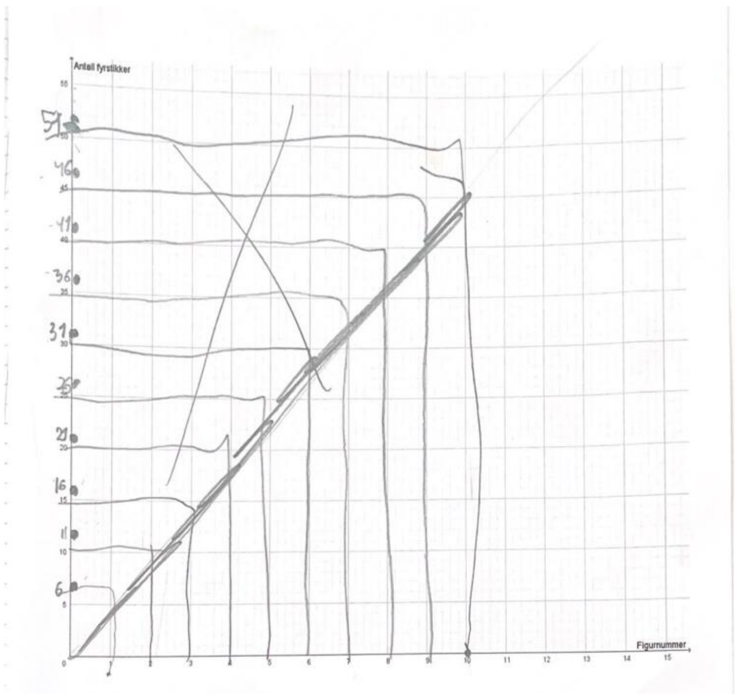
4.3.2 Nivå: 1.1 Variasjon

Det er tre grupper som beskriver endringsretningen i en variabel. Ola i gruppe 3 viser til nivå 1.1 når han sier at grafen kommer til å gå oppover. Mathilde i gruppe 5 foreslår for gruppen at de skal *«gå opp sånne småruter»* og referer til endring i y-variabelen. Amalie i gruppe 1 viser til nivå 1.1 når hun beskriver endringsretningen til x-variabelen: *«antall figurtall er bortover på x-aksen her».*

4.3.3 Nivå: 1.2 Variasjon

Gruppe 3, 4 og 5 beskriver retning og mengde endring i en variabel i løpet av arbeidet med fyrstikkhusoppgaven.

Når gruppe 3 skal tegne opp grafen i et koordinatsystem starter de med å markere punkter kun på y-aksen. Punktene som er markert kan man se på figur 4.F.



Figur 4.F: Graf til fyrstikkhusoppgaven fra gruppe 3

Når gruppe 5 arbeider med å skissere grafen gjør de det samme som gruppe 3, de teller og markerer oppover på y-aksen. Begge gruppene beskriver retning, da de markerer punkter oppover, og mengden endringen i y-variabelen, 5. Gruppene tar ikke hensyn til x-variabelen og er dermed på nivå 1.2

Mari i gruppe 4 har en beskrivelse av grafen gruppen har tegnet i c) som svarer til nivå 1.2. Mari beskriver retninger, som er oppover, og mengden endring i en variabel, som er fem.

Mari: Den går fort. Den øker jo bare med fem hver gang gjør den. Fem oppover hele tiden

4.3.4 Nivå: 2.1 Kovariasjon

Gruppe 1, 3 og 5 koordinerer endringsretningen i en variabel med endringer i den andre variabelen. Nedenfor vises konkrete eksempler på elever i gruppe 1, 3 og 5 som er på nivå 2.1.

Anne i gruppe 1 forteller at grafen gruppen har skissert øker jevnt. Anne koordinerer dermed endringsretningen i en variabel med endringen i den andre variabelen når hun sier at grafen øker jevnt, og ikke bare øker. Anne har tatt høyde for begge variablene. Lina i samme gruppe beskriver grafen som en økende graf. Antageligvis referer Lina til en graf som øker jevnt med konstant stigningstall. Lina beskriver dermed endringsretningen i y-variabelen og x-variabelen.

Gruppe 3 arbeider med å skissere grafen og viser til nivå 2.1.

Filip: Vi må lage sånne små streker fra der til dit og fra der til dit. Forstår du?

Ola: Det funker nesten som en søyle. Jo flere hus du har, jo høyere

Ola har funnet at når antallet hus blir større blir grafen høyere. Høyden på grafen referer til y-aksen som viser antallet med fyrstikker. Ola ser en sammenheng hvor antallet fyrstikker øker når antall hus blir større. Filip kommenterer senere at grafen er en stigende graf, noe som også viser til nivå 2.1 for Filip.

Mathilde og Sofie er også innenfor nivå 2.1 i det følgende transkripsjonsutdraget:

Mathilde: Dette er en rettlinjet graf

Sofie: En positiv?

Mathilde: Den går oppover til høyre i en strak

Intervjuer: Strak?

Mathilde: Ja den er liksom økende, ikke det ordet men… stabil?

Det kan se ut til at jentene tipper seg litt frem i en forklaring av hva slags type graf de har skissert, men utdraget ovenfor viser at elevene forstår at når x-variabelen øker så øker også y-variabelen. Mathilde kommenterer også at grafen er stabil, en faktor som tyder på at Mathilde har forstått at grafen vokser jevnt. Dette er nivå 2.1 da gruppen ikke kommenterer hvor mye grafen vokser, men har med endringene til begge variablene.

4.3.5 Nivå: 3.1 Kovariasjon

Gruppe 1 og 2 koordinerer retning og endringsmengde i en variabel med endringen i den andre variabelen og er dermed på nivå 3.1.

Gruppe 1 viser til nivå 3.1 i følgende transkripsjonsutdrag:

Anne: Så da skal vi liksom ta et kryss her sånn. Og her var det vel elleve, da blir det her

Lina: Så var det 16 på 3eren. Blir det ikke 21 på neste?

Anne: Jo for vi legger jo hele tiden på fem, så vi kan bare øke med fem

Lina: Ja så da blir det 21. Er det lov? Øke med fem hele tiden?

Anne: 16 pluss 5 det blir 21

Lina: Så blir det 26

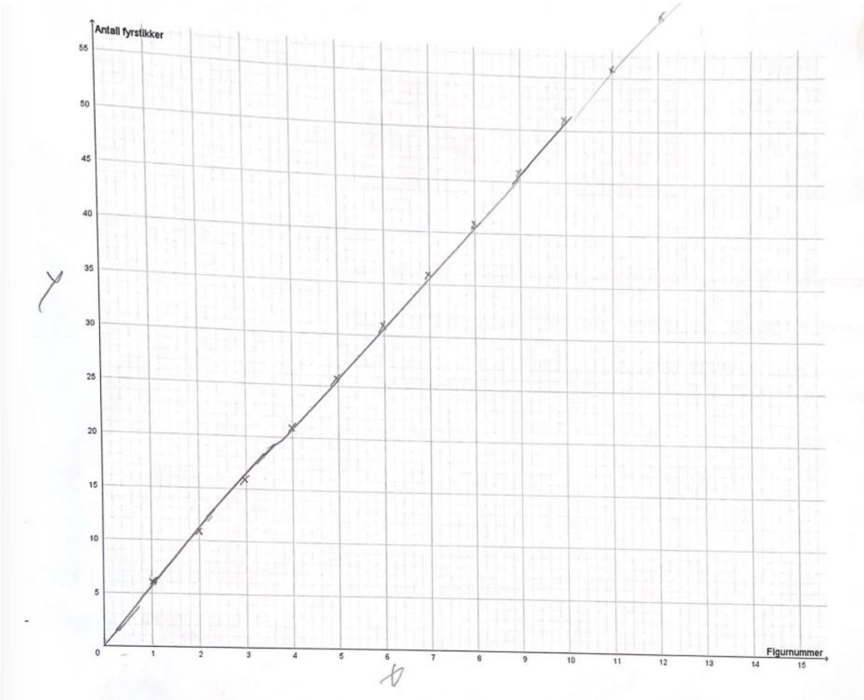
Anne: Øker med fem hver gang, så når vi først har funnet dette så øker vi bare med fem

Anne og Lina beskriver både retningen til y-variabelen gjennom ordet *økende,* og mengden endring i y-variabelen som er fem. I tillegg koordinerer de det de har funnet om y-variabelen med x-variabelen, da de krysser av i koordinater i koordinatsystemet og tar høyde for at figurnummeret øker i samsvar med antall fyrstikker.

Amalie i gruppe 2 viser også til kovariasjon av nivå 3.1:

Amalie: Så vi skal dit da for første. Figurnummer 2 er det elleve. Figurnummer 3 er det 16. Figurnummer 4 var det 21. I figur 5 så er det… Det er egentlig bare å krysse av en over den hovedstreken hele veien da

Amalie har trukket en linje mellom de fire første koordinatene og ser at når antall hus øker så øker antallet fyrstikker like mye hver gang. Hun sier at man kan krysse av en over hovedstreken hele veien, og med hovedstreken referer hun til krysningspunktene som rutenettet har. På figur 4.G er det synlig at gruppens markerte punkter er litt over denne «hovedstreken». Amalie kommenterer også endringsmengden, og Amalies forklaring kvalifiserer seg dermed som nivå 3.1.



Figur 4.G: Graf til fyrstikkhusoppgaven fra gruppe 2

Videre har gruppe 2 har funnet at grafen de har skissert er en lineær graf og at den vokser jevnt.

Karl: Dette er jo en lineær graf. Den er lineær siden den er rett. Den har ikke noen kurver ettersom det ikke er noen variabler som spiller inn. Det er ingen variabler som gjør at den kan gå opp og ned

Amalie: Den vokser jevnt

En lineær beskrivelse av en graf viser til at Karl koordinerer retningen og endringsmengden i en variabel, med endringer i den andre variabelen. Karl nevner ikke spesifikt at stigningstallet til grafen er fem, men viser til at grafen stiger jevnt ved bruk av ordet *lineær*. Karl har en klar forståelse for hva de ulike komponentene i det algebraiske uttrykket de tidligere har funnet symboliserer. Han påpeker at grafen ikke har noen variabler som gjør slik at den kan gå opp og ned, og begrunner dette med at da må grafen være lineær.

I deloppgave d) kommenterer Amalie at grafen utvikles likt hele veien, at den ikke forandrer seg, og vokser jevnt. Denne kommentarer svarer til nivå 3.1 da Amalie har koordinert retningen og endringsmengden i en variabel med endringen i den andre variabelen. Amalie påpeker at grafen utvikles likt hele veien. Hun kommenterer også retningen når hun forklarer at grafen vokser jevnt.

4.4 Samvariasjonell tilnærming til funksjoner i flismønsteroppgave

I dette kapittelet analyserer jeg elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner i arbeid med flismønsteroppgaven. Kapittelet er delt opp etter de ulike nivåene fra samvariasjonsrammeverket.

4.4.1 Nivå: før 1

Gruppe 2 beskriver grafen i billedlige termer:

Karl: Det er akkurat samme type graf som tidligere, men jeg må sikkert tegne den inn fortsatt

Stian: Det likner på en u

Anne: Grafen går veldig mye mer oppover enn den forrige

(…)

Karl: Det er en type buet eller kurvet funksjon

Gruppen sier at grafen likner på en u og at den vil være buet eller kurvet.

4.4.2 Nivå: 1.1 Variasjon

Gruppe 1 og 3 viser til nivå 1.1 i arbeid med flismønsteroppgaven.

Transkripsjonsutdrag fra gruppe 3 når gruppen arbeider med deloppgave d):

Ola: Vi må trekke en linje mellom alle

Oskar: Svart kan være at det kunne vært lettere om det hadde vært en rett linje oppover. Vi tegna jo rett i stad

Ola: Trekk linjen mellom koordinatene

Marius: Den her ser jo litt mer skeivere ut da

I utdraget blir endringsretningen beskrevet da det blir kommentert at grafen går oppover og at grafen ser skjev ut.

Gruppe 1 viser til nivå 1.1 da Anne kommenterer at denne grafen går mer oppover enn den forrige. Lina legger også til at det er større avstand mellom punktene i denne grafen enn den som ble skissert i fyrstikkhusoppgaven. Anne og Lina beskriver endringsretningen i y-variabelen.

4.4.3 Nivå: 1.2 Variasjon

I arbeid med flismønsteroppgaven er det to grupper som viser til nivå 1.2.

I det følgende utdraget beskriver Anne og Lina i gruppe 1 retningen og mengden endring i y-variabelen:

Lina: Den øker alltid med 2 mer enn den forrige du må plusse på 2 med variasjon på det du allerede har

Anne: Grafen går veldig mye mer oppover enn den forrige

I arbeid med å skissere opp grafen til flismønsteret kommenterer Ola i gruppe 3 at grafen går oppover, og han beskriver dermed retningen til y-variabelen. Gruppen har funnet at differansen mellom antall små grå kvadrater i flisene alltid øker med to mer for hver gang, og gruppen tar også ta høyde for mengden endring i y-variabelen.

4.4.4 Nivå: 2.1 Kovariasjon

Gruppe 1, 4 og 5 er viser til nivå 2.1 når gruppene skal beskrive grafene de har skissert.

Gruppe 1 viser til nivå 2.1 i det følgende transkripsjonsutdraget:

Anne: Ja den øker hele tiden med litt mer så den har en brattere utvikling

Lina: Det er lenger avstand hvor lenger opp du kommer

Anne: Ja det er det å. Den blir brattere og brattere og går lenger og lenger opp jo større flis

Lina: Ja man kan se at når antall flis øker så blir antall små grå kvadrater større

I dette utdraget viser elevene at de koordinerer endringsretningen til y-variabelen (antall små grå kvadrater) med endringer i x-variabelen (flisnummer).

Gruppe 4 viser til nivå 2.1 i det følgende transkripsjonsutdraget:

Intervjuer: Kan dere beskrive grafen dere har tegnet?

Mari: Ja den går oppover også er den litt kurva og ikke rett. Mellom punktene er avstanden ulik

Mari koordinerer endringsretningen i y-variabelen med endringer i x-variabelen når hun sier at grafen går oppover og at avstanden mellom koordinatene er ulike. Mathilde i gruppe 5 kommenterer også at grafen gruppen har skissert øker, og det med ulike tall hele tiden. Verken Mari eller Mathilde nevner eksplisitt den eksakte mengden med endring. Mari referer til mengden endring siden hun forstår at avstanden mellom y-koordinatene er ulike, og Mathilde når hun ytrer at grafen øker med ulike tall hele tiden. Mari kommenterer også at grafen er kurvet, noe som også viser til hennes forståelse av at det er en ikke-lineær graf som er skissert og at avstanden mellom punktene i y-retningen er forskjellige. Med grunnlag i at Mari og Mathilde ikke nevner hvor stor mengden økning for y-koordinatene er har jeg valgt å plassere beskrivelsene på nivå 2.1 fremfor nivå 3.1.

4.4.5 Nivå: 3.1 Kovariasjon

Det er kun gruppe 1 som viser til nivå 3.1 i flismønsteroppgaven. Nivå 3.1 kommer til syne når gruppen skal beskrive grafen de har skissert i deloppgave d):

Anne: Denne vil jeg si øker. Fordi økningen er alltid to pluss det den var før når man tar neste flis. Så denne her er hele tiden litt sånn større økning enn den forrige hadde

Lina: Ja for denne har ikke sånn fast mønster

Anne: Nei den øker ikke jevnt

Gruppe 1 har funnet at antall små grå kvadrater i flisene øker med 2 mer enn det gjorde mellom de to foregående flismønstrene hver gang. Anne koordinerer denne endringsmengden med retningen; at grafen øker, med endringer i den andre variabelen som er flismønsternummer. Når Anne sier at grafen øker, og at grafen ikke øker jevnt, viser hun til nivå 1.1 hvor hun beskriver endringsretningen i y-variabelen.

4.5 Grafene elevene har skissert

Alle gruppene skisserte grafer til fyrstikkhusmønsteret. Hvor nøyaktige koordinatene i grafene elevene har skissert er, varierer i noen grad. Gruppe 1, 2 og 4 har skissert riktige grafer. Figur 4.H viser at gruppe 3 har skissert grafen sin ved å trekke linjer ut fra x-aksen og y-aksen. Gruppen har ikke brukt linjal og har dermed ikke funnet helt riktige koordinater. Grafen ser ut til å likne en lineær graf, men gjenspeiler likevel ikke mønstret korrekt. Gruppe 5 har tegnet opp koordinater ved å telle seg opp fra fem, men gruppen har markert feil y-verdier for figurnummer 7 og 8.

For flismønsteroppgaven var det noe mer variert hvordan elevene skisserte grafene. Gruppe 1 og 4 har skissert en graf med korrekte koordinater. Gruppe 2 plotter inn koordinater og tegner strek mellom koordinatene. Gruppe 2 har vært unøyaktige i dette arbeide. Grafen viser for eksempel at y-verdien til flisnummer 3 er korrekt, men koordinatene er på flisnummer 2,5 og ikke flisnummer 3. Gruppen er også unøyaktige i det videre arbeidet, hvor koordinatene på x-aksen ligger før selve flisnummeret. Dette resulterer i at gruppen får en graf som ser ut til å være mer lineær enn en kvadratisk funksjon. Gruppe 3 og 5 har ikke funnet en generell formel for flismønsteroppgaven. Gruppene forsøker å skissere en graf ved å telle antall små grå kvadrater for de første figurtallene, men er unøyaktige i plotting av koordinater og klarer ikke skissere opp en riktig graf.

I arbeid med å skissere en graf i fyrstikkhusoppgaven har alle gruppene funnet neste koordinat ved å telle fem opp fra forrige koordinat. I arbeid med å skissere en graf i flismønsteroppgaven har gruppene mer varierte løsningsmetoder. Gruppe 1 og 3 tegner koordinatene med grunnlag i tidligere funn, der økningen i antall små grå kvadrater i flismønsteret øker med to mer for hver gang. Gruppe 2 og 4 bruker den generelle formelen for å plassere koordinatene. Ingen av gruppene kommenterer den generelle formelen som et funksjonsuttrykk eller beskriver sammenhengen mellom grafen og generaliseringen deres.

4.6 Oppsummering av funn

Gjennom å analysere elevenes svar på oppgavene har jeg kommet frem til ti funn knyttet til forskningsspørsmålene. Disse funnene diskuteres i kapittel 5.

Knyttet til det første forskningsspørsmålet har jeg kategorisert fem funn:

- Elevene bruker hovedsakelig de ikke-eksplisitte strategiene i oppstartsfasen av oppgavene
- Elevene bruker hovedsakelig de eksplisitte strategiene i arbeid med å finne en generell formel
- Elevene evner i stor grad å finne en generell formel for figurmønstrene
- Elevene bruker flere strategier når de generaliserer figurmønstrene
- Elevene bruker strategiene på ulike måter

Til det andre forskningsspørsmålet har jeg kategorisert to funn:

- Elevenes nivå varierer mellom oppgavene
- Elevene er på relativt høyt nivå når de beskriver en lineær graf

Til det tredje forskningsspørsmålet har jeg kategorisert tre funn:

- Elevene evner i stor grad å koble utviklingen av ulike figurmønstre opp mot et koordinatsystem
- Korrelasjon mellom elevene som har tegnet korrekt graf og elevene som er på høyt nivå
- Korrelasjon mellom elevene som har brukt kontekstuell generaliseringsstrategi, har høyt nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner og har skissert korrekt graf

5 Diskusjon

I dette kapittelet diskuteres funnene fra kapittel 4 opp mot relevant teori og tidligere forskning. Diskusjonen danner grunnlaget for å svare på de tre forskningsspørsmålene for studien:

1. Hvilke generaliseringsstrategier bruker elever på 10. trinn i arbeid med figurmønster?
2. Hvilke nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner viser elevene når de beskriver grafene de har skissert av figurmønstrene de har generalisert?
3. Hvilken sammenheng er det mellom elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner og deres generaliseringsstrategier?

Diskusjonskapittelet er delt opp i fire deler. De første tre delene diskuterer forskningsspørsmålene for studien. Til hvert forskningsspørsmål har jeg kategorisert opp funn. Gjennom å analysere elevenes svar på oppgavene kom jeg frem til ti funn. Disse funnene ble presentert avslutningsvis i analysekapittelet. Funnene blir diskutert opp mot teori og tidligere forskning. I den siste delen av diskusjonskapittelet diskuteres studiens begrensninger.

I dette kapittelet referer jeg til elever som er på høyt nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner. Dette betyr at elevene er på nivå 2.1 eller 3.1.

5.1 Hvilke generaliseringsstrategier bruker elever på 10. trinn i arbeid med figurmønster?

Dette kapittelet er delt opp i fem underkapitler som viser funnene til det første forsknings-spørsmålet.

5.1.1 Elevene bruker hovedsakelig de ikke-eksplisitte strategiene i oppstartsfasen av oppgavene

Studien viste at elevene tok i bruk de ikke-eksplisitte strategiene i oppstartsfasen av begge oppgavene. De ikke-eksplisitte strategiene førte ikke direkte til et generelt uttrykk. Dette samsvarer med hva Lannins (2005) studie viser. Elevene endret bruken av strategier når de skulle finne et algebraisk uttrykk for de voksende mønstrene.

Samtlige grupper startet med telle-strategien for å danne et overblikk over hvordan figurfølgene utvikler seg. Lannin (2005) peker på at en del av telle-strategien er å benytte egenskaper man har telt seg frem til, til å lage en generell formel. Telle-strategien, og rekursiv strategi, gav elevene i studien verdifull informasjon som de senere benyttet i arbeid med å generalisere mønstrene. Ved hjelp av strategien telling klarte mange elever å finne en rekursiv sammenheng som igjen gjorde dem i stand til å finne en eksplisitt formel.

I analysekapittelet ble det vist at telle-strategien førte elevene på et blindspor. Noen av gruppene startet for eksempel formlene sine med 6 eller $6n$. Tallet 6 hadde elevene telt seg frem til da dette var antallet fyrstikker i den første figuren. Gruppene som startet de generelle formlene sine med tallet 6 ble dermed låst fast til tallet de hadde telt seg frem til ved bruk av strategien telling.

Rekursiv strategi ble hyppigst brukt i oppstartsfasen i oppgavene der elevene så på hvordan figurmønstrene endret seg fra et element til neste element. Den rekursive strategien virker naturlig å starte med for elevene slik at de fikk en oversikt over hvordan elementene utvikler seg gjennom figurmønstrene.

5.1.2 Elevene bruker hovedsakelig de eksplisitte strategiene i arbeid med å finne en generell formel

Elevene i denne studien benyttet seg i hovedsak av de eksplisitte strategiene i arbeid med å finne en generell formel for de voksende mønstrene. I analysen ble det vist at bruk av hver av de tre eksplisitte strategiene førte til en generell formel. Det ble også vist eksempler der bruk av de eksplisitte strategiene helhet-objekt og prøve og feile, ikke førte til en generell formel.

I de tre neste underkapitlene blir bruken av de ulike eksplisitte strategiene diskutert. Strategiene blir knyttet opp mot teori og tidligere forskning, og det blir vist til eksempler fra analysekapittelet.

5.1.2.1 Helhet-objekt-strategi

Helhet-objekt-strategien krever høy forståelse av oppgaven det arbeides med, samt en god matematisk forståelse, for å unngå feil med over- og undertelling. Ved bruk av denne strategien kan det raskt oppstå småfeil. Kapittel 4.1.3 viste at gode dialoger mellom elevene i gruppene oppklarte småfeil, slik at bruken av strategien blir korrekt og det blir gjort justering for over- og undertelling. Det er også verdt å merke seg at strategien ble hyppigst brukt i fyrstikkhusoppgaven. En årsak til dette kan være at strategien er vanskeligere å bruke i et mønster som ikke er lineært. Analysen viste at fem av syv forsøk på å bruke helhet-objekt-strategien ikke førte frem til riktige løsninger. Dette funnet samsvarer med funnene til Lannin (2005) som tilsier at elevene ofte bruker denne strategien feil.

Strategien ble brukt i arbeid med å lage en generell formel, men også i andre deloppgaver. De to gangene bruken av strategien førte til et korrekt svar var i deloppgave d) i fyrstikkhusoppgaven.

5.1.2.2 Prøve og feile-strategi

Prøve og feile-strategien var den som ble hyppigst brukt i arbeid med å finne en generell formel. Rivera og Becker (2005) mener at bruken av en prøve og feile-strategi raskt kan føre til konklusjoner som er feil. I denne studien var halvparten av forsøkene på å finne en generell formel ved bruk av en prøve og feile-strategi vellykket.

Rivera og Becker (2005) fant at elever som benytter seg av denne strategien hadde problemer med å arbeide strategisk videre med formelen når formelen blir feil. Funnet til Rivera og Becker (2005) er ikke et gjennomgående funn for denne studien, men det samsvarer i noen grad, da tre av forsøkene på å finne en formel med prøving og feiling var mislykket. Spesielt i arbeid med flismønsteret, hvor to grupper ikke fant frem til en formel ved bruk av strategien, viste datamaterialet at elevene raskt gir opp denne strategien. Dette kan tyde på at elevene hadde problemer med å arbeide seg videre når de fant at formlene ikke fungerte.

Elevene i studien til Lannin (2005) reflekterte ikke over hvorfor en bestemt generalisering var gyldig når de kom frem til en generell formel gjennom prøving- og feiling. I denne studien var det en gruppe som reflekterte over dette. En gruppe fant en generell formel gjennom prøving- og feiling i begge oppgavene. Elevene i gruppen gav gode forklaringer til hvorfor formelen fungerte, og hva de ulike komponentene i formelen representerte. Analysen viste at denne gruppen har oppnådd en kontekstuell strategi gjennom en prøve og feile-strategi.

Det som var gjennomgående ved prøve og feile-strategien var at elevene fant ulike formler og testet disse for de første figurene i mønstrene. Noen grupper brukte tall og regneoperasjoner vilkårlig, mens andre brukte informasjon de hadde funnet ved strategiene telling og rekursiv for å lage formler de senere testet. To av gruppene forsøkte å finne en formel som passet for en spesiell forekomst av mønsteret i stedet for å forstå den generelle relasjonen i mønstret. Elevene fant en formel som passet for en figur, og prøvde deretter formelen i den påfølgende eller den foregående figuren. Dersom formelen ikke fungerte, byttet de ut tall og regneoperasjoner for å få det til å fungere på den figuren de så på. Dette er en variant av prøving og feiling som Mason (1996) karakteriserer som en lokal taktikk. Det at elevene bruker ulike regneoperasjoner og tall og tester for ulike forekomster av figurene viser at elevene kan bruke symboler flytende og fleksibelt, noe som strider imot Lees (1996) hypotese.

Analysen viste at tre grupper benyttet seg av en prøve og feile-strategi. Dette samsvarer med funn til Healy og Hoyles (1999) og Radford (2010) som tilsier at prøve og feile-strategien er en av hovedstrategiene som elevene bruker i arbeid med å komme frem til en generalisering

5.1.2.3 Kontekstuell strategi

Kontekstuell strategi ble hovedsakelig brukt i arbeid med å lage en generell formel til de to figurmønstrene. Når elevene bruker formelen for å løse oppgaven betyr det at de implisitt har forstått hva elementene i formelen står for, og elevene ser da en tydelig sammenheng mellom figurmønsteret og den generelle formelen de har laget.

5.1.3 Elevene evner i stor grad å finne en generell formel for figurmønstrene

Studien viste at fire grupper kom frem til en generell formel for fyrstikkmønsteret, og tre grupper kom frem til en generell formel for flismønsteret. Dette funnet tyder på at mange av elevene i denne studien mestrer å lage et generelt uttrykk til figurmønstre, slik som også Lannin (2005) fant i sin studie. I studiene til English og Warren (1998) og Rivera og Becker (2005) fant de det motsatte, at elevene ikke mestret å lage generelle uttrykk til figurmønstre.

Rivera og Becker (2005) fant at elevene som ikke evnet å lage et generelt uttrykk, likevel mestret å utvide figurmønstrene. Alle gruppene i denne studien mestret å utvide begge figurmønstrene. For fyrstikkhusoppgaven var det kun en gruppe som ikke klarte å lage en generell formel, men de klarte likevel å utvide mønsteret. For flismønsteroppgaven utvidet to grupper mønsteret korrekt, men klarte ikke å lage en generell formel. Dette samsvarer med Rivera og Becker (2005) sine funn. De resterende gruppene klarte både å utvide mønsteret og å lage en generell formel. Gruppene så hvordan figurmønstrene utviklet seg og klarte å finne et generelt uttrykk for mønstrene. Dette samsvarer med hva Cooper og Warren (2011) fant i sin studie.

I følge Küchemann (2010) har elever vanskeligheter med å bestemme verdier for store figurtall ved å generalisere. Analysen av elevenes arbeid med deloppgave d) i fyrstikkhusoppgaven viser det motsatte. Oppgaven ba elevene finne et svar for et høyt figurtall, både grafisk og ved regning. Tre av gruppene klarte å finne løsningen på to måter. Elevene i denne studien ser ikke ut til å ha noen problemer med å generalisere ved store figurtall da fire av fem grupper løste deloppgave d) korrekt. En mulig årsak til dette kan være at oppgaven inkluderte et koordinatsystem. Flere grupper forlenget grafen de hadde tegnet i deloppgave c), og kunne dermed løse oppgaven grafisk. Flere grupper brukte også den grafiske løsningen når de skulle arbeide med hvordan de kunne løse deloppgaven ved regning. To grupper brukte svaret de fikk gjennom å løse oppgaven grafisk og viste deretter at svaret var korrekt ved bruk av den generelle formelen. Mens to grupper brukte formelen til å vise hvor mange fyrstikker de fikk til overs. Disse to gruppene, som har brukt kontekstuell generaliseringsstrategi, viste at de hadde forstått formelen og evnet å bruke den.

5.1.4 Elevene bruker flere strategier når de generaliserer figurmønstrene

Elevene brukte flere strategier når de generaliserte figurmønstrene i oppgavene. Dette funnet stemmer overens med Lannins (2005) studie som fant at elever ofte brukte ulike strategier for å lage et generelt uttrykk. I analysekapittelet viser tabell 4.A en oppsummering av elevenes generaliseringsstrategier i de ulike oppgavene. Her kan man se at gruppene brukte minst tre ulike strategier i arbeid med deloppgavene. Faktum at gruppene varierte bruken av strategier er en klar indikasjon på at en enkelt strategi alene ikke er nok for at elevene skal få dannet det overblikket over figurmønstrene de trenger, og som leder dem frem til en generell formel. En kombinasjon av flere ulike strategier ledet elevene frem til korrekte løsninger. Hver strategi hadde sin funksjon, og en kombinasjon av strategiene gjorde det mulig for elevene å danne generelle formler som representerte figurmønstrene. Dette stemmer også over ens med funnet til Stacey (1989), som viser at de fleste elever kombinerer flere generaliseringsstrategier, og bruker ulike strategier for å løse ulike deler av oppgavene.

En mulig årsak til at elevene brukte forskjellige strategier i arbeid med oppgavene kan være måten spørsmålene er stilt på. Til noen spørsmål er det være naturlig å bruke en gitt strategi. For eksempel spør deloppgave a), i begge oppgavene, om hvordan neste figur i rekken ser ut. Her kan det være naturlig for elevene å bruke strategiene telling og rekursiv, og ikke gå rett på kontekstuell strategi. En gruppe gikk allikevel direkte til kontekstuell strategi og fant en formel for flismønsteret før de hadde løst deloppgave a).

5.1.5 Elevene bruker strategiene på ulike måter

Studiens funn viser at elevene bruker de ulike generaliseringsstrategiene på ulike måter.

Strategien telling ble oftest brukt til å telle opp egenskapene i figurene. En gruppe brukte også strategien i arbeid med deloppgave d) i fyrstikkhusoppgaven. Gruppen foreslo å tegne en rekke hus for å se hvor mange fyrstikker de fikk til overs når de skulle bruke 100 fyrstikker til å lage hus. Telle-strategien ble også brukt i arbeid med å skissere grafer. Alle gruppene bruker en additiv strategi, hvor de finner koordinater ved å telle seg fram til neste koordinat (MacGregor & Stacey, 1995; Warren, 2000).

Rekursiv strategi ble brukt på ulike steder i oppgavene, men hyppigst i arbeid med deloppgave a) i oppgavene. Elevene fant de neste figurene i mønstrene på ulike måter. Eksempelvis dekomponerte en gruppe mønsteret for å finne ut hvor mange, og hvilke(n) fyrstikk som blir lagt til hver gang. Den rekursive strategien til denne gruppen med dekomponering, som også inkluderer strategien telling, er en strategi som Mason (1996) har omtalt. Elevene viste også en annen måte å bruke rekursiv strategi på da to grupper lagde verditabeller. Dette funnet motstrider med Warren (1996) som fant at elever ikke klarer å konvertere et mønster til en verditabell.

Helhet-objekt-strategien ble brukt noe ulikt av elevene, enten dobler de eller så multipliserer de med et annet tall. Strategien ble også brukt i ulike deloppgaver.

I analysen ble det vist at de samme gruppene benyttet seg av en prøve og feile-strategi i begge oppgavene, men at gruppene brukte strategien ulikt. Elevene kom frem til ulike formler og forklaringer.

Den kontekstuelle strategien ble brukt på ulike steder i oppgavene, og på ulike måter på de ulike stedene. I arbeid med å lage en generell formel brukte noen grupper kontekstuell strategi ved at de gav en forklaring til formelen, mens noen grupper forklarte formelen gjennom dekomponering av mønstrene. Dekomponering av mønster så ut til å gjøre tellingen lettere slik at elevene enklere oppdaget sammenhenger (Mason, 1996).

5.2 Hvilke nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner viser elevene når de beskriver grafene de har skissert av figurmønstrene de har generalisert?

Dette kapittelet er delt opp i to underkapitler som viser funnene til det andre forsknings-spørsmålet.

5.2.1 Elevenes nivå varierer mellom oppgavene

Analysen viste at elevenes nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner i beskrivelse av grafene varierte mellom oppgavene. For eksempel var en gruppe på nivå 3.1 i fyrstikkhusoppgaven, men på nivå før 1 i flismønsteroppgaven (jfr. tabell 4.B). Elevene har ulike nivåer når de beskriver grafene de har skissert, hvilket samsvarer med Carlson et al. (2002) sitt funn.

I studien til Carlson et al. (2002) var de fleste elevene på nivå 2.1 og 3.1. I denne studien var det derimot bare 40% av elevene som var på nivå 2.1 eller 3.1 (jfr. tabell 4.B). En mulig årsak til denne forskjellen kan være at Carlson et al. (2002) forsket på studenter fra et universitet, mens mitt utvalg var ungdomsskoleelever.

Wilkie (2020) fant at elever som tenkte rekursivt om figurmønster, men ikke klarte å generalisere det, likevel gav beskrivelser av den skisserte grafen som tilsvarte nivå 3.1. Dette var ikke et funn i denne studien. Gruppene i denne studien som var på nivå 3.1 hadde brukt både rekursiv strategi og kontekstuell strategi. Når elever bruker en kontekstuell strategi har de klart å generalisere figurmønsteret.

I studien til Wilkie (2020) vises det at elever som kom frem til en generell formel kunne tegne inn koordinater galt. Dette funnet gjaldt også for denne studien. Koordinatsystemet som ble lagt ved flismønsteroppgaven, inneholdt ikke rutenett. Wilkie (2020) argumenterer for at mangelen på rutenett eller vanskeligheter med akseskalaer kan føre til at elever som har korrekt formel, kan tegne inn koordinater galt. Oppgavene i denne studien hadde, til motsetning fra i Wilkies (2020) studie, verdier på akseskalaer slik at grafene skulle være enklere å skissere for elevene. Dersom navn og verdier på aksene ikke hadde vært inkludert i oppgavene, kunne dette resultert i at flere grupper tegnet inn koordinatene galt (Wilkie, 2020).

5.2.2 Elevene er på relativt høyt nivå når de beskriver en lineær graf

Når elevene beskrev en lineær graf var de på høyere nivå enn når de beskrev grafen til en kvadratisk funksjon. Elevene hadde også flere beskrivelser på høyt nivå til den lineære grafen. Det så ut som et lineært mønster hjalp elevene i arbeidet med generalisering og med bruken av samvariasjonell tilnærming til funksjoner. Studien viste at elevene i stor grad evnet å beskrive en lineær funksjon, men at de i mindre grad klarte å beskrive oppgaven med flismønsteret som ikke var lineært.

Wilkies (2020) studie hadde to oppgavesett og hun fant en nedgang i antall elever som var på høyt nivå når elevene arbeidet med et vanskeligere mønster. Videre bidro dette til at elevene ikke skisserte korrekte grafer. I denne studien var det færre grupper som skisserte en korrekt graf til flismønsteret sammenliknet med fyrstikkmønsteret, hvilket samsvarer med Wilkies (2020) funn. Dette kan skyldes flere forhold. Koordinatsystemet som var lagt ved til flismønsteroppgaven inneholdt ikke rutenett. Dette kan gjøre det vanskeligere for elevene å skissere grafen til flismønsteret. Analysen viste også at elevene plottet koordinater unøyaktig. En annen årsak kan være at en beskrivelse av en lineær funksjon inneholder matematiske begreper elevene forstår og har brukt tidligere. Studiene til MacGregor og Stacey (1995) og Warren (2000) viser at mange elever mangler et passende språk til å forklare funksjoner. Dette ser også ut til å være tilfellet i denne studien når elevene skulle beskrive en andregradsfunksjon. Denne antagelsen korrelerer også med Stacey og Macgregor (2002) sitt funn hvor en tredjedel av elevene beskrev funksjonelle relasjoner på umodne måter som ikke støttet opp om en algebraisk oversettelse. Selv om to grupper fant en generell formel for flismønsteret, som inneholdt et andregradsledd, hadde de problemer med å beskrive grafen de hadde skissert. Litteratur viser til at elever har problemer med å forstå og koble sammen kvadratiske begreper og representasjoner (Lobato, 2012)

To grupper i denne studien tegnet opp en verditabell i arbeid med flismønsteroppgaven. Wilkie (2019) fremhever at vanskeligere mønstre gjerne fremkaller verditabeller, slik som flismønsteroppgaven gjorde. Wilkie (2021) peker på at verditabeller synliggjør andregrads-funksjoner ved at den økende stigningen til grafen blir tydelig. Til tross for dette var det ingen av disse gruppene som skisserte en riktig graf til flismønsteret eller beskrev grafen på et høyt nivå, nivå 2.1 eller 3.1.

5.3 Hvilken sammenheng er det mellom elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner og deres generaliseringsstrategier?

Dette kapittelet er delt opp i tre underkapitler som viser funnene til det tredje forsknings-spørsmålet.

5.3.1 Elevene evner i stor grad å koble utviklingen av ulike figurmønstre opp mot et koordinatsystem

I fyrstikkhusoppgaven hadde fire grupper utsagn på kovariasjonsnivå. Elevene som var på kovariasjonsnivå koblet utviklingen av fyrstikkhusmønsteret opp mot koordinatsystemet. Elevene gav gode beskrivelser og så hvilken type graf de hadde skissert. En elev brukte ordet *lineær* når grafen ble beskrevet. Derimot var det ingen som brukte ordet *andregradsfunksjon* eller *parabel* når de skulle beskrive grafen til flismønsteret. Flere grupper viste likevel at de hadde forstått at funksjonen ikke var lineær, da de kommenterte at endringshastigheten ikke var konstant.

Alle nivåer av samvariasjonell tilnærming til funksjoner forutsetter at elevene kan beskrive noen elementer av grafene som er skissert. Fire grupper hadde utsagn av variasjonsnivå eller kovariasjonsnivå. De fleste gruppene klarte å skissere en graf utfra det generelle uttrykket for fyrstikkmønsteret, og to grupper klarte det for flismønsteret. Studien viser dermed det motsatte av funnene i studien til Dreyfus og Halevi (1991) og Leinhardt et al. (1990), der de fant at elever sliter med å etablere en sammenheng mellom et algebraisk utrykk og den grafiske representasjonen.

Gruppene som klarte å skissere en graf utfra en generell formel har lagd en kobling mellom grafen og generaliseringen de hadde gjort. Det er derimot ingen grupper som eksplisitt beskrev sammenhengen mellom grafen og generaliseringen. Ingen av gruppene kommenterte den generelle formelen som et funksjonsuttrykk. For fyrstikkhusoppgaven hadde elevene funnet formelen $a_n = 5n + 1$. Formelen kunne blitt skrevet som et funksjonsuttrykk, $f(x) = 5n + 1$. Dersom elevene hadde skrevet formelen som et funksjonssuttrykk, eller oppgaven hadde spurt elevene om å gjøre dette, kan det tenkes at flere elever ville beskrevet sammenhengen mellom grafen og generaliseringen (Wilkie, 2020). Alle gruppene fant at fyrstikkhusmønsteret vokste lineært. Ingen grupper begrunnet den lineære veksten til grafen utfra formelen, hvor tallet fem viser til stigningstallet. Det var heller ingen grupper som kommenterte konstantleddet, 1, som forteller at grafen skjærer y-aksen. Funnet samsvarer med Wilkies (2020) studie, der det kun var to elever som beskrev en sammenheng mellom grafen og generaliseringen. Det var heller ingen elever som eksplisitt kommenterte at grafens stigning samsvarte med den generelle formelen. En mulig årsak til mangelen på beskrivelser av sammenhenger mellom den generelle formelen og grafen kan være at oppgaveteksten var for åpen og måtte ha spesifisert at disse sammenhengene skulle beskrives (Wilkie, 2020).

5.3.2 Korrelasjon mellom gruppene som har tegnet korrekt graf og gruppene som er på høyt nivå

Kapittel 4.5 beskrev elevenes arbeid med å skissere grafer. Her ble det vist at tre grupper hadde skissert korrekte grafer til fyrstikkhusmønsteret. To av disse gruppene var på nivå 3.1. For flismønsteroppgaven hadde to grupper skissert korrekt graf, hvor en av disse gruppene var på nivå 3.1 og en på nivå 2.1. Funnene viser at det er en korrelasjon mellom gruppene som tegnet korrekt graf og gruppene som er på høyt nivå av korrelasjon. Dette samsvarer med funn i studien til Wilkie (2020), der elever som viste det høyeste generaliseringsnivået også hadde skissert grafer.

5.3.3 Korrelasjon mellom gruppene som har kontekstuell generaliseringsstrategi, har høyt nivå og har skissert korrekt graf

Det var tre grupper som brukte kontekstuell generaliseringsstrategi i arbeid med oppgavene. To av disse gruppene var på nivå 3.1 i fyrstikkhusoppgaven, og en av gruppene i flismønsteroppgaven. En av gruppene var på nivå 2.1 i flismønsteroppgaven, som også er et høyt nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner. Det viser at det er en korrelasjon mellom elevene som har brukt kontekstuell generaliseringsstrategi og elevene som er på høyt nivå. Wilkie (2020) fant det motsatte, hvor et høyt generaliseringsnivå ikke var assosiert med et høyere nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner.

Studien viser at dersom en elev forstår det generelle uttrykket, mestrer eleven i større grad å skissere grafen til dette uttrykket. Videre beskriver eleven også grafen på et høyere nivå av samvariasjonell tilnærming. Det var de samme tre gruppene som skisserte korrekt graf og som brukte kontekstuell generaliseringsstrategi for fyrstikkhusmønsteret. To av disse gruppene viste også til nivå 3.1. For flismønsteret var det to grupper som skisserte korrekt graf og som også hadde brukt kontekstuell generaliseringsstrategi. En av disse gruppene hadde også nivå 3.1.

En gruppe som hadde kontekstuell generaliseringsstrategi hadde ikke skissert korrekt graf til flismønsteret, noe som kan ha resultert i at gruppen ikke oppnådde et høyt nivå i flismønsteroppgaven. Da gruppen hadde brukt kontekstuell strategi innebar dette at gruppen hadde forstått komponentene i formelen, og så sammenhengen mellom denne og mønsteret (Lannin, 2005). Med bakgrunn i dette kan det diskuteres om gruppen burde ha klart å skissere opp grafen.

5.4 Studiens begrensninger

Gjennom denne studien har jeg forsket på generaliseringsstrategier i arbeid med figurmønster, og knyttet dette opp til elevers beskrivelser av grafer. Dette har det ikke vært forsket på tidligere i Norge. Studien har også noen begrensninger som blir kommentert i dette kapittelet.

I denne studien ser jeg på elevers generaliseringsstrategier og nivå av samvariasjonell tilnærming, basert på fem oppgavebaserte intervju. Elevene kommer fra samme klasse. Det er derfor noe usikkert om resultatene representerer alle elever på 10. trinn. Det kunne vært interessant å foreta en liknende studie, med flere informanter fra ulike skoler og på ulike trinn, for å undersøke om mine funn er representative for et større utvalg av elever. Elever i en annen klasse på en annen skole eller på et høyere trinn kan for eksempel ha hatt mer undervisning i funksjoner, noe som kunne spilt inn på resultatene. Elevene i studien hadde hatt lite undervisning om funksjoner, og spesielt funksjoner av kvadratisk vekst. Det kunne dermed vært interessant å studere elever som har bedre forkunnskaper om funksjoner, og undersøkt om nye funn fra en slik studie underbygger eller motsier mine funn.

I denne studien ble det brukt fem oppgavebaserte intervju med én times varighet. Dette har gitt meg et begrenset datamateriale. Dersom elevene hadde fått bedre tid til å arbeide med oppgavene kunne det gitt meg flere svar. Dette kunne også gitt meg som forsker bedre innblikk i elevenes arbeid med oppgavene.

Lærer for klassen hjalp til med å sette sammen gruppene slik at gruppene besto av elever som var kognitivt sterke og svake, og som samtidig samarbeidet godt sammen. Dette kan ha påvirket resultatene for studien, og resultatet kunne vært annerledes om gruppene var satt sammen tilfeldig. Resultatene kunne også ha vært annerledes dersom elevene på gruppene hadde like matematiske ferdigheter.

Elevene fikk ikke utdelt konkreter under de oppgavebaserte intervjuene. For at elevene i større grad kunne fått en visuell oppfatning av figurmønstrene kunne jeg gitt elevene fysiske konkreter, for eksempel fyrstikker, til arbeid med oppgavene. Dette kan tenkes at denne faktoren kunne ha påvirket funnene i studien.

Ved å bruke kvalitative forskningsmetoder kan det oppstå spørsmål om forskerens subjektivitet. Kvalitative studier har en ustrukturert form, noe som kan føre til at forskerens interesser og personlige motivasjon påvirker analyseprosessen. Derfor er det en risiko for at resultatene kan bli subjektive (Bryman, 2012). Jeg ble motivert til å skrive denne masteroppgaven på grunn av mine egne erfaringer og positive opplevelser med bruk av figurmønstre. Min egen motivasjon kan ha ført til at jeg ubevisst har søkt etter positive sider ved bruk av figurmønstre, og hatt forventinger om at elevene ville se sammenhengen mellom det generelle uttrykket for figurmønstre og en graf. Dette kan ha påvirket resultatene av studien. Jeg var imidlertid klar over denne muligheten og har vært bevisst på at personlige interesser ikke skulle påvirke studien.

I denne studien har jeg hatt en abduktiv tilnærming hvor jeg har tatt utgangspunkt i rammeverkene til Lannin (2005) og Carlson et al. (2002) for å analysere datamaterialet. En fordel med å bruke eksisterende rammeverk er at man i utforskningen av dem kan bli oppmerksom på detaljer og nyanser i datamaterialet. Det er imidlertid også utfordringer ved å ta i bruk andres rammeverk. Ved å ta i bruk andres rammeverk kan det føre til at man prøver å tilpasse dataene til rammeverket. Som en abduktiv forsker har jeg undersøkt hvordan dataene støtter de eksisterende teoriene, men jeg har også sett på teori utover rammeverkene. Motsatt kunne en deduktiv tilnærming oversett annen relevant teori og aspekter ved datamaterialet.

6 Avslutning

I dette kapittelet presenteres en oppsummering av studien. Avslutningsvis legger jeg frem didaktiske implikasjoner av studien og refleksjoner rundt videre forskning.

6.1 Oppsummering

Innledningsvis kom jeg med følgende forskningsspørsmål for denne studien:

1. Hvilke generaliseringsstrategier bruker elever på 10. trinn i arbeid med figurmønster?
2. Hvilke nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner viser elevene når de beskriver grafene de har skissert av figurmønstrene de har generalisert?
3. Hvilken sammenheng er det mellom elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner og deres generaliseringsstrategier?

I denne studien knyttet jeg generalisering av figurmønster opp mot grafer for å lære mer om elevers generaliseringsstrategier og samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner. For å svare på de tre forskningsspørsmålene ble det utformet en oppgave med et figurmønster av lineær vekst og en oppgave med et figurmønster av kvadratisk vekst. Disse oppgavene ble gitt til fem grupper à 2-4 elever fra 10. trinn. Ved hjelp av lydopptak, feltnotater og elevenes skriftlige arbeid ble det hentet ut datamateriale som dannet grunnlaget for å svare på forskningsspørsmålene.

Datamaterialet er presentert og analysert i kapittel 4, og funnene fra kapittel 4 er videre diskutert i kapittel 5. For å analysere elevenes generaliseringsstrategier benyttet jeg meg av et rammeverk utformet av Lannin (2005). I analysen av elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner benyttet jeg meg av et rammeverk fra Carlson et al. (2002), hvor jeg gjorde egne tilpasninger og tilpasninger etter inspirasjon fra Wilkie (2020). Gjennom analyseprosessen har jeg observert ti funn som videre ble diskutert i kapittel 5.

Min analyse og diskusjon av elevenes generaliseringsstrategier viser hvilke strategier elevenes synes var mest hensiktsmessige å bruke i ulike kontekster. Analysen har vist at elevene ofte starter med en ikke-eksplisitt strategi for å danne et overblikk for å få informasjon om mønstrene. De ikke-eksplisitte strategiene alene fører ikke frem til en generell formel, og elevene endret bruken av eksplisitte strategier i arbeid med å finne en generell formel for figurmønstrene. En kombinasjon av ulike strategier førte elevene frem til en generell formel for det lineære mønsteret, og i noen grad for det kvadratiske mønsteret. Elevene bruker flere strategier i arbeid med en og samme oppgave, og måten elevene bruker strategiene varierte. Studien viste også at elevene i stor grad evnet å finne en generell formel for figurmønstrene og koble denne formelen opp til et koordinatsystem. Det var noe mer utfordrende for elevene å gi beskrivelser av grafene de hadde skissert fra de generelle formlene, spesielt gjaldt dette for det kvadratiske mønsteret. Elevene gav beskrivelser på høyere nivå av samvariasjonell tilnærming når de beskrev den lineære grafen, og elevenes nivå varierte mellom oppgavene. Videre viste studien at det var en sammenheng mellom elevene som brukte en kontekstuell generaliseringsstrategi og elevene som var på høyt nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner. Studien viste også at det var en korrelasjon mellom elevene som har tegnet riktig graf og elevene som var på høyt nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner.

6.2 Didaktiske implikasjoner

Denne studien viser muligheten figurmønster har for å utvikle forståelse for generalisering og en samvariasjonell tilnærming til funksjoner. Figurmønster egner seg til å arbeide med generalisering da elevene får en visuell oppfatning slik at de kan beskrive og forklare regelmessigheter som er lik for alle figurene i mønstrene. Dette hjelper elevene til å finne en generell regel for å beskrive et mønster (Lannin, 2005). I arbeid med figurmønster bør det være et mål å få elevene til å finne en eksplisitt formel hvis mulig.

Det å se det generelle i en kontekst er også viktig i andre matematiske tema. Funn viste at elevene i stor grad fant eksplisitte formler for figurmønstrene. Elevene brukte en kombinasjon av ulike strategier for å komme frem til generelle formler.

Oppgaver med lineære og kvadratiske figurmønster kan være med på å utvikle elevers forståelse for å komme frem til generelle formler. Elevene må vurdere gyldigheten av generelle formler og begrunne hvorfor, eller hvorfor ikke, formelen er gyldig. Denne ferdigheten kan elevene også få brukt innenfor andre områder i matematikken.

Det er mangler i litteraturen som knytter generalisering figurmønster opp mot funksjoner og skissering av grafer. Denne studien gir derfor et bidrag til litteraturen som omhandler generalisering av flismønster og knytter dette til funksjoner. Studien har dermed vært viktig å gjennomføre. Denne studien tar også for seg koblingen mellom figurmønstre med kvadratisk vekst i tillegg til lineær vekst. Dette er også et område det er lite forskning på, både i Norge og internasjonalt

Funnene i studien indikerer at elevene hadde utfordringer med å oppdage sammenhengen mellom et generelt uttrykk og grafen til dette uttrykket. Spesielt gjaldt dette det kvadratiske uttrykket. Med større fokus på en samvariasjonell tilnærming til funksjoner kan dette hjelpe elevers læring om konstante og ikke-konstante endringshastigheter. Elever vil da kunne resonnere om endringsretning og mengden endring, og forstå hvordan endringer i en variabel påvirker en annen variabel.

Det kan tenkes at elevene enklere oppdager sammenhenger dersom oppgaver spesifikt ber elevene om å beskrive sammenhengen mellom det generelle uttrykket og grafen de skisserer. Slik kunne en lærer fått rikere informasjon om hvordan mønsteroppgaver kan være nyttig for å finne ut av elevers utfordringer med å se sammenhengen mellom en graf og et generelt uttrykk.

Studiens funn viser at det er et behov for å arbeide med forståelse av funksjoner. Hvordan elever oppfatter punkter på en graf og stigningen til en graf, samt hva de ulike variablene betyr, er områder som kan arbeides mer med.

Denne studien viser blant annet at koblingen mellom et eksplisitt uttrykk og skissering av grafer til dette uttrykket, kan gi et ekstra bidrag til den tradisjonelle undervisningen med algebra og funksjoner hver for seg. Det å bruke en visuell kontekst, som figurmønster, kan hjelpe elever med å se sammenheng mellom algebraisk uttrykk og overgangen til grafer og funksjonsuttrykket. Studien kan gi lærere på ungdomstrinnet inspirasjon til å arbeide med algebra og funksjoner ny måte.

6.3 Videre forskning

I arbeid med denne studien har jeg fått et innblikk i forskning innenfor matematikk-didaktikk og fått ny kunnskap om hvordan elever arbeider med figurmønster og grafer. Det finnes flere interessante og mulige utvidelser.

En tilnærming til videre forskning kan være å studere mønstrene i revers. Elevene kunne fått utdelt en graf, og arbeidet med å lage et generelt uttrykk, til grafen. Videre kunne elevene, enten ved hjelp av grafen eller den generelle formelen, lagd et eget mønster som representerte formelen. Ved å gjøre dette hadde det vært interessant å studere om elevene i større grad oppdaget sammenhengen som er mellom grafen og den generelle formelen. Elevene kunne fått tilgang på konkreter slik at de i større grad fikk oppdage de visuelle aspektene figurmønster bringer med seg.

Videre forskning burde undersøke ytterlige i hvilken grad sammenkoblingen med generelle uttrykk utledet fra generalisering av figurmønster og skissering av tilhørende grafer kunne hjulpet elever med å forstå komponentene i det generelle uttrykket. Ytterligere klasseromsforskning for design av slike oppgaver og vurdering av lineære og spesielt kvadratiske figurmønstre kan være verdifullt. Videre forskning kunne også sett på hvordan elever jobber med generalisering av mer sammensatte figurmønstre og hvordan dette kan knyttes til grafer.

Referanser

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag*. Scandinavian University Press (Universitetsforlaget).

Bieda, K. N., & Nathan, M. J. (2009). Representational disfluency in algebra: Evidence from student gestures and speech. *ZDM*, *41*, 637–650.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446. JSTOR.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization* (s. 5–23). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Bogdan, R., & Biklen, S. (2007). *Qualitative research for education: An introduction to theories and methods*.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4. utg.). Oxford University Press.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352. https://doi.org/10.2307/4149958

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forlag.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). Routledge.

Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research design: Qualitative, and mixed methods approaches* (5. utg.). Sage Publications.

Creswell, J. W., & Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (3. utg.). SAGE Publications.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2016). *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches*. SAGE Publications.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Red.). (2011). *The Sage handbook of qualitative research* (4. utg.). SAGE Publications.

Dreyfus, T., & Halevi, T. (1991). Quadfun: A Case Study of Pupil Computer Interaction. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *10*(2), 43–48.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration. *The Mathematics Teacher*, *91*(2), 166–170.

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *9*, 40–177. https://doi.org/10.2307/749946

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1998). Children's Strategies with Number Patterns. *Educational Studies*, *24*(3), 315–331. https://doi.org/10.1080/0305569980240305

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and Symbolic Reasoning in Mathematics: Making Connections With Computers? *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(1), 59–84. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101_3

Kennedy, B., & Thornberg, R. (2018). Deduction, induction and abduction. I U. Flick (Red.), *The SAGE handbook of qualitative data collection* (s. 49–64). SAGE Publications.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Fastatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Küchemann, D. (2010). Using patterns generically to see structure. *Pedagogies: An International Journal*, *5*(3), 233–250. https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.486147

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. I N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra* (s. 87–106). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_6

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1–64. https://doi.org/10.3102/00346543060001001

Lobato, J. (2012). The Actor-Oriented Transfer Perspective and Its Contributions to Educational Research and Practice. *Educational Psychologist*, *47*(3), 232–247. https://doi.org/10.1080/00461520.2012.693353

Lobato, J., Hohensee, C., Rhodehamel, B., & Diamond, J. (2012). Using Student Reasoning to Inform the Development of Conceptual Learning Goals: The Case of Quadratic Functions. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(2), 85–119. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.656362

MacGregor, M., & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(1), 69–85. https://doi.org/10.1007/BF03217276

Mackenzie, N., & Knipe, S. (2006). Research dilemmas: Paradigms, methods and methodology. *Issues in Educational Research*, *16*, 193–205.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra* (s. 65–86). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J. (2017). Overcoming the Algebra Barrier: Being Particular About the General, and Generally Looking Beyond the Particular, in Homage to Mary Boole. I S. Stewart (Red.), *And the Rest is Just Algebra* (s. 97–117). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Mason, J., & Sutherland, R. (2002). *Key aspects of teaching algebra in schools*. London: QCA.

Moss, J., Beatty, R., & Shillolo, G. (2008). What is your theory? What is your rule? Fourth graders build an understanding of function through patterns and generalising problems. I C. Greenes & R. Rubenstein (Red.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics (70th yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)* (s. 155–168). NCTM.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*, 37–62.

Rivera, F. D., & Becker, J. (2005). Teacher to Teacher: Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*(4), 198–204. https://doi.org/10.5951/MTMS.11.4.0198

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. I J. J. Kaput, M. L. Blanton, & D. W. Carraher (Red.), *Algebra in the Early Grades*. Routledge.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Stacey, K., & Macgregor, M. (2002). Curriculum Reform and Approaches to Algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Red.), *Perspectives on School Algebra* (Bd. 22, s. 141–153). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_8

Stake, R. E. (2006). *Multiple case study analysis*. The Guilford Press.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations to Describe and Represent Problem Situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 89–112. JSTOR. https://doi.org/10.2307/749821

Syawahid, M. (2022). Elementary students' functional thinking in solving context-based linear pattern problems. *Beta: Jurnal Tadris Matematika*, *15*(1), 37–52. https://doi.org/10.20414/betajtm.v15i1.497

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvaliatitve metoder* (5. utg.). Fagbokforlaget.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation , covariation , and functions: Foundational ways of thinking mathematically. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

Warren, E. A. (1996). *Interactions between instructional approaches, students' reasoning processes, and their understanding of elementary algebra*. Queensland University of Technology.

Warren, E. A. (2000). Visualisation and the development of early understanding in algebra. I M. Koyama & T. Nakahara (Red.), *Proceedings of the 24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Edcucation* (Bd. 4, s. 273–280).

Warren, E. A. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. I P. Clarkson, A. Downton, & M. Horne (Red.), *Proceedings of the 28th conference of the mathematics education research group of Australia* (s. 759–766). Deakin University Press.

Warren, E. A., & Cooper, T. (2008). Generalising the Pattern Rule for Visual Growth Patterns: Actions That Support 8 Year Olds' Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171–185. JSTOR.

Watanabe, T. (2011). Shiki: A Critical Foundation for School Algebra in Japanese Elementary School Mathematics. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization* (s. 109–124). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_7

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 333–361. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x

Wilkie, K. J. (2019). Investigating secondary students' generalization, graphing, and construction of figural patterns for making sense of quadratic functions. *The*

Journal of Mathematical Behavior, *54*, 100689. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.005

Wilkie, K. J. (2020). Investigating Students' Attention to Covariation Features of their Constructed Graphs in a Figural Pattern Generalisation Context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(2), 315–336. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09955-6

Wilkie, K. J. (2021). Seeing quadratics in a new light: Secondary mathematics pre-service teachers' creation of figural growing patterns. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(1), 91–116. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09997-6

Wilkie, K. J. (2022). Coordinating visual and algebraic reasoning with quadratic functions. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00426-w

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 379–402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgavesett

Vedlegg 2: Intervjuguide

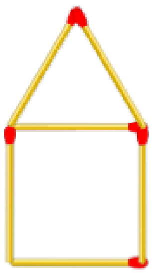
Vedlegg 3: Informasjonsskriv til forskningsdeltakere og deres foresatte

Vedlegg 4: Prosjektbeskrivelse NSD

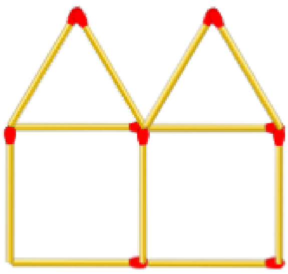
Vedlegg 5: Vurdering av forskningsprosjektet fra NSD

Vedlegg 1: Oppgavesett

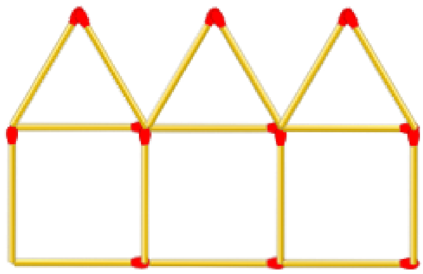
Fyrstikkhus



Figur 1



Figur 2



Figur 3

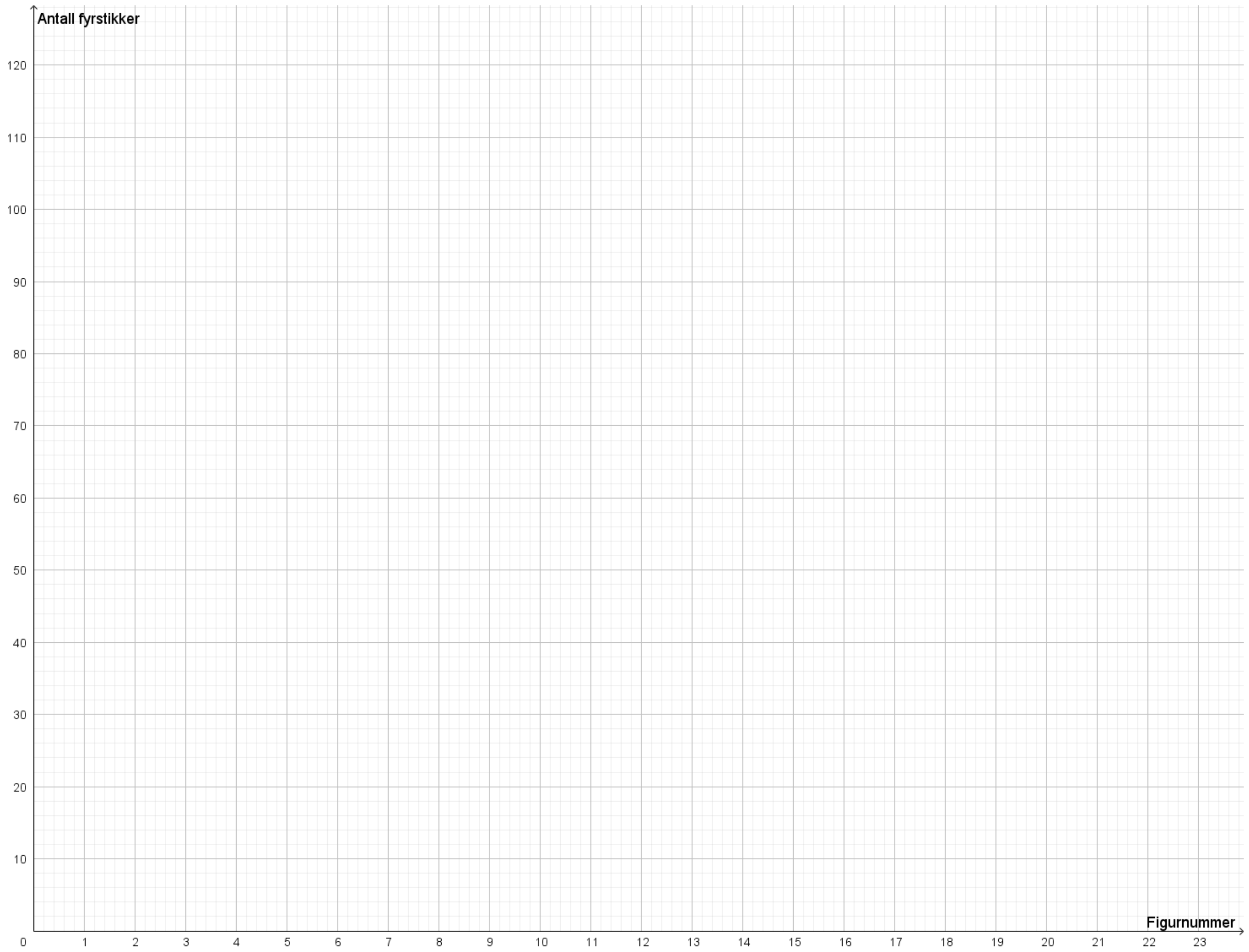
a) Tegn opp hvordan figur 4 vil se ut.

b) Hvordan kan man finne det totale antallet fyrstikker som trengs for en hvilken som helst som figur nummer n? Prøv å lag en formel som dere kan bruke for å finne hvor mange fyrstikker dere trenger til figur n.

c) På neste side ser dere et koordinatsystem med figurnummer langs x-aksen og antall fyrstikker langs y-aksen. Tegn inn koordinatene for de 10 første husene. Hvilken type graf får dere?

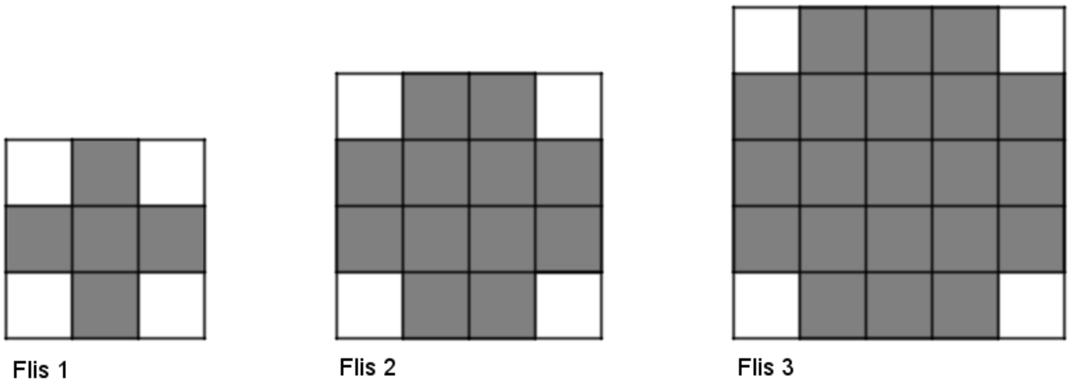

Antall fyrstikker
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
Figurnummer

d) Dere har 100 fyrstikker og vil lage én figur med fyrstikkhus. Får dere noen fyrstikker til overs? Vis hvordan dere kommer frem til svaret både grafisk og ved regning.



Flismønster

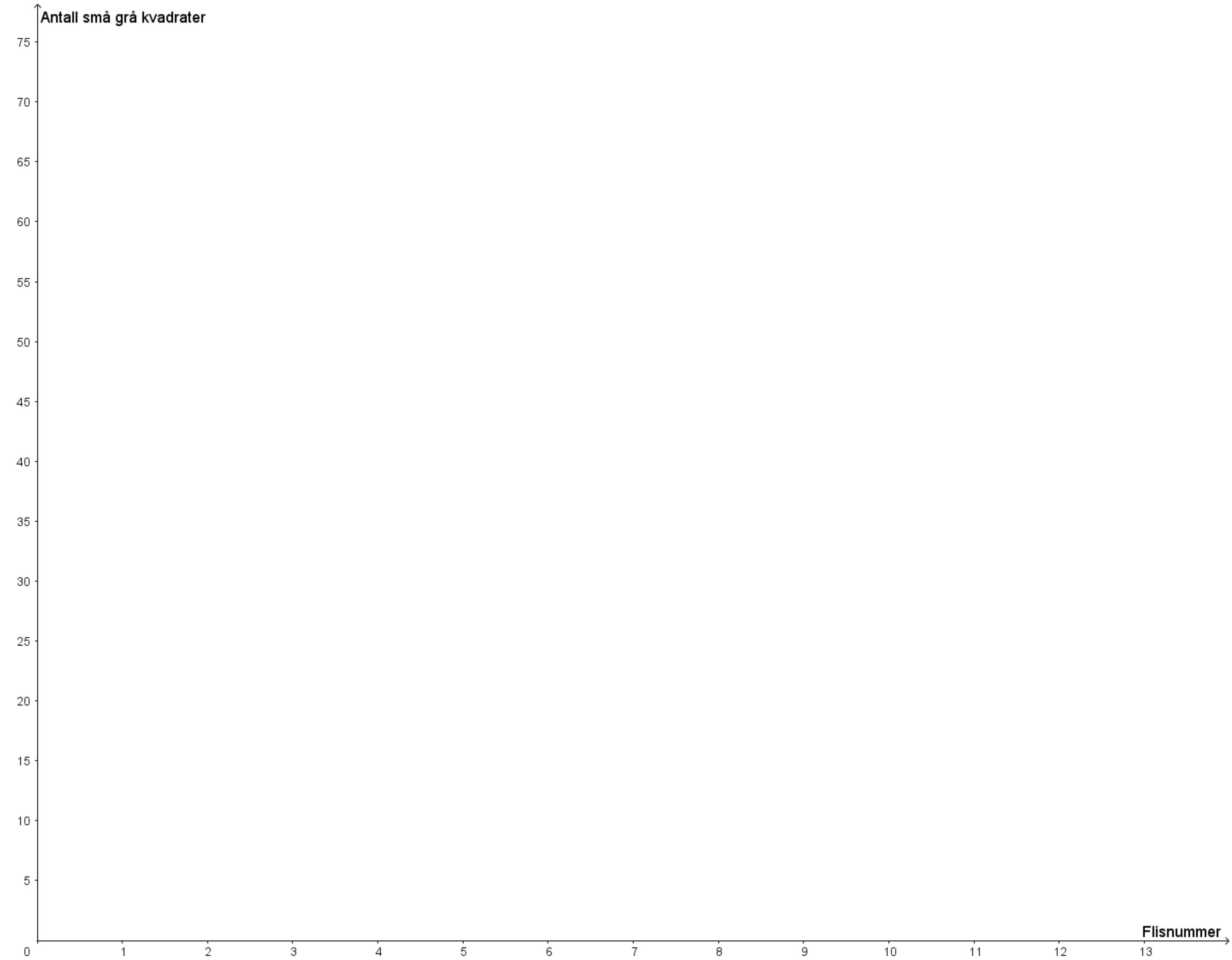
Nedenfor ser dere tre typer fliser som er satt sammen av små grå og små hvite kvadrater:



a) Tegn opp hvordan flis nr. 4 vil se ut. Noter ned hva dere ser med mønstret på flisene.

b) Kan dere lage en formel for å finne antall små grå kvadrater i flis nummer n?

c) På neste side ser dere et koordinatsystem med flisnummer langs x-aksen og antall små grå kvadrater langs y-aksen. Tegn inn koordinatene for de seks første flisene.



d) Trekk en linje mellom koordinatene. Kan dere beskrive hvilken type funksjon dette er? Hint: bruk det dere fant i b)

Vedlegg 2: Intervjuguide

Intervjuguide til oppgavebasert intervju

Egne kriterier under oppgavebasert intervju

- Jeg som forsker må ikke legge føringer for riktige og gale svar
- La elevene få tenke lenge selv før jeg stiller spørsmål
- Still oppfølgingsspørsmål der jeg synes noe er uklart eller jeg merker at eleven er inne på et rett spor, men ikke klarer å formulere seg helt riktig
- Ikke forstyrr elevene på noen måte, vær forsiktig med egen mimikk og små kommentarer
- Bruk prober flittig, vis at jeg lytter og følger med

Spørsmål som kan stilles i arbeid med oppgavene:

Dersom elevene står fast med å finne uttrykket:

- Kan dere prøve å tegne de to neste figurene?
- Er det noen sammenheng mellom figurene?
- Hva er forskjellen mellom figurene?
- Er det noen sammenheng mellom figurtallet og figuren?
- Ser dere et mønster?
- Kan dere dele mønsteret opp i noen deler for å gjøre det enklere for dere?

Dersom elevene har vanskeligheter med å tegne grafen:

- Hva er det som står på x-aksen?
- Hva er det som står på y-aksen?
- Hvordan pleier de grafene dere er kjent med å se ut?
- Hvordan utvikler denne grafen seg?
- Kan dere beskrive hvordan grafen ser ut?

Oppfølgingsspørsmål som kan stilles underveis

- Hva tenker du/dere?
- Hva tror du/dere?
- Hva gjorde du/dere der?
- Hvorfor gjorde du/dere slik?
- Hvordan kom du/dere frem til det?
- Hvordan hjelp dette deg/dere med å komme frem til løsningen?
- Kan du/dere prøve å utdype hva du/dere mener?
- Kan du forklare det en gang til slik at jeg og de andre i gruppen forstår hva du mener?

Vedlegg 3: Informasjonsskriv til forskningsdeltakere og deres foresatte

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet *«Elevers generalisering og forståelse av figurmønster knyttet til funksjoner»*?

Dette er et spørsmål, til deg som foresatt på vegne av ditt barn, om ditt barn kan delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke elevers arbeid innenfor tema figurmønster og funksjoner i matematikk. I dette skrivet vil du får informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål
Formålet ved forskningsprosjektet er å undersøke hvordan elever på 10. trinn arbeider med figurmønster og funksjoner i matematikk. Det er gjort lite forskning på figurmønster koblet opp mot funksjoner i Norge. Opplysningene jeg henter inn skal bli brukt i en masteroppgave på Grunnskolelærerutdanningen 5-10 på NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Veileder Arne Amdal og studenten Eline Aanensen ved Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU)/ Institutt for lærerutdanning ved Norges Teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU) er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får ditt barn spørsmål om å delta?
Ditt barn får spørsmål om å delta i prosjektet fordi jeg er praksisstudent ved ungdomsskolen der barnet ditt er elev. Jeg ønsker å bruke elever på 10. trinn da elevene skal ha forkunnskaper om figurmønster og funksjoner. Alle elevene i klassen til barnet ditt får spørsmål om å delta i studien.

Hva innebærer det for ditt barn å delta?
Deltakelse i prosjektet innebærer gruppearbeid med to oppgaver.

Det vil bli gjort lydopptak av arbeid i grupper og samlet inn skriftlig elevarbeid (f. eks: tegninger, svar på oppgavene). Jeg og min veileder vil være de eneste som har tilgang til lydopptak og skriftlige dokumenter som samles inn. Det er viktig å ta lydopptak slik at jeg kan transkribere og analysere hvordan elevene har arbeidet med oppgavene. Det vil bli satt av én time til arbeid med oppgaver i grupper innenfor ordinær skoletid.

I tillegg vil jeg observere gruppearbeider for å notere ned fysiske ting som skjer som ikke en lydopptaker vil få med seg.

Foresatte kan få tilgang til oppgavene og en intervjuguide til intervjuet på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan barnet når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis han/hun ikke vil delta eller senere velger å trekke seg. Det vil ikke påvirke vurderingen i matematikkfaget.

Forskningen vil bli gjennomført i normal skoletid og er ikke en del av den ordinære undervisningen. Det vil bli tatt ut grupper på 2-4 elever som arbeider på et grupperom med oppgaver mens resten av klassen har ordinær undervisning.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Jeg vil kun bruke opplysningene om ditt barn til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Eline Aanensen (student) og Arne Amdal (veileder) vil være de eneste som har tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil bli låst i mappe på NTNU sin server, og skriftlige dokumenter vil være innlåst i et skap. Opprinnelige navn eller andre personopplysninger om barnet ditt skal ikke oppgis. Navn på elevene vil bli erstattet med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrig data. Elevenes navn vil pseudonymiseres slik at andre vil ha vanskeligheter med å gjenkjenne elevene. Dette betyr at jeg vil avidentifisere personopplysningene om ditt barn slik at de ikke kan knyttes til ditt barn uten bruk av tilleggsopplysninger. Opplysningene som vil publiseres er årstrinn i skolegangen og skriftlige besvarelser i arbeid med oppgaver i gruppe.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes 25.08.2023. Digitale data (lydopptak) vil bli slettet etter avslutning av prosjektet og skriftlige dokumenter vil bli makulert. Transkripsjon av lydopptak vil også bli slettet.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU)/ Institutt for lærerutdanning ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU) har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- NTNU ved Arne Amdal, mail: arne.amdal@ntnu.no, tlf: 95930437
- Student ved NTNU, Eline Aanensen, mail: elinaan@stud.ntnu.no, tlf: 94161488
- NTNUs personvernombud: Thomas Helgesen, mail: thomas.helgesen@ntnu.no, tlf: 93079038

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Eline Aanensen (forsker) Arne Amdal (veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg og barnet mitt har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Elevenes generalisering og forståelse av figurmønster knyttet til funksjoner» og har fått anledning til å stille spørsmål. På vegne av mitt barn samtykker jeg til:

- ☐ å delta i gruppearbeid med oppgaver med lydopptak
- ☐ at forsker kan samle inn mine/gruppens notater i gruppearbeid
- ☐ at oppgaveark og evt. notater og lydopptak kan gi opplysninger om meg til prosjektet
- ☐ at opplysningene om meg publiseres slik at jeg kan gjenkjennes, men opplysningene vil bli pseudonymifisert

På vegne av mitt barn samtykker jeg til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av foresatte, dato)

Vedlegg 4: Prosjektbeskrivelse NSD

Minside / Elever på 10.trinns generaliseringsstrategier og samvariasjonelle tilnærming til funksjoner i arbeid med figurmønster

Elever på 10.trinns generaliseringsstrategier og samvariasjonelle tilnærming til funksjoner i arbeid med figurmønster

Prosjektet er et masterprosjekt for grunnskolelærerutdanning 5-10. klasse i matematikk på NTNU i Trondheim. Hvilke generaliseringsstrategier elever benytter seg av når de arbeider med et lineært og et kvadratisk figurmønster vil bli studert. Jeg skal også se på hvilket nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner elevene har når de beskriver deres grafer som er skissert ut fra arbeid med å generalisere figurmønstrene. Videre skal jeg studere hvilken sammenhengen mellom disse. Forskningsspørsmålene for studien er: - Hvilke generaliseringsstrategier bruker elever på 10.trinn i arbeid med figurmønster? - Hvilke nivå av samvariasjonell tilnærming til funksjoner viser elevene når de beskriver grafene de har skissert av figurmønstrene de har generalisert? - Hvilken sammenheng er det mellom elevenes samvariasjonelle tilnærminger til funksjoner og deres generaliseringsstrategier? Datainnsamlingen vil foregå gjennom oppgavebasert intervju. Elevers besvarelser vil bli samlet inn.

Fagfelt: Samfunnsvitenskap

Meldeskjema 667427	Vurdert	21.11.2022
Datahåndteringsplan		16.11.2022

+ Nytt meldeskjema + Ny datahåndteringsplan + Arkivere data + Bestille data

Prosjektmedlemmer

+ Legg til Logg

Navn	Tilgang
Arne Kristian Amdal	Kan administrere
Eline Aanensen (deg)	Kan administrere

Vedlegg 5: Vurdering av forskningsprosjektet fra NSD

Sikt

Meldeskjema / Elevers generalisering og forståelse av figurmønster knyttet til funksj... / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
667427	Automatisk	06.12.2022

Prosjekttittel
Elevers generalisering og forståelse av figurmønster knyttet til funksjoner

Behandlingsansvarlig institusjon
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig
Arne Kristian Amdal

Student
Eline Aanensen

Prosjektperiode
21.11.2022 - 25.08.2023

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 25.08.2023.

Meldeskjema

Grunnlag for automatisk vurdering
Meldeskjemaet har fått en automatisk vurdering. Det vil si at vurderingen er foretatt maskinelt, basert på informasjonen som er fylt inn i meldeskjemaet. Kun behandling av personopplysninger med lav personvernulempe og risiko får automatisk vurdering. Sentrale kriterier er:

- De registrerte er over 15 år
- Behandlingen omfatter ikke særlige kategorier personopplysninger;
  - Rasemessig eller etnisk opprinnelse
  - Politisk, religiøs eller filosofisk overbevisning
  - Fagforeningsmedlemskap
  - Genetiske data
  - Biometriske data for å entydig identifisere et individ
  - Helseopplysninger
  - Seksuelle forhold eller seksuell orientering
- Behandlingen omfatter ikke opplysninger om straffedommer og lovovertredelser
- Personopplysningene skal ikke behandles utenfor EU/EØS-området, og ingen som befinner seg utenfor EU/EØS skal ha tilgang til personopplysningene
- De registrerte mottar informasjon på forhånd om behandlingen av personopplysningene.

Informasjon til de registrerte (utvalgene) om behandlingen må inneholde

- Den behandlingsansvarliges identitet og kontaktopplysninger
- Kontaktopplysninger til personvernombudet (hvis relevant)
- Formålet med behandlingen av personopplysningene
- Det vitenskapelige formålet (formålet med studien)
- Det lovlige grunnlaget for behandlingen av personopplysningene
- Hvilke personopplysninger som vil bli behandlet, og hvordan de samles inn, eller hvor de hentes fra
- Hvem som vil få tilgang til personopplysningene (kategorier mottakere)
- Hvor lenge personopplysningene vil bli behandlet

- Retten til å trekke samtykket tilbake og øvrige rettigheter

Vi anbefaler å bruke vår mal til informasjonsskriv.

Informasjonssikkerhet
Du må behandle personopplysningene i tråd med retningslinjene for informasjonssikkerhet og lagringsguider ved behandlingsansvarlig institusjon. Institusjonen er ansvarlig for at vilkårene for personvernforordningen artikkel 5.1. d) riktighet, 5. 1. f) integritet og konfidensialitet, og 32 sikkerhet er oppfylt.

NTNU

Kunnskap for en bedre verden