

Håvard Horne og Johan Henrik Kvitfjell

Skjer estimering intuitivt eller kognitivt?

En oppgave om hvordan lærerstudenter estimerer mengders numerositet

Masteroppgave i Matematikdidaktikk 5.-10. trinn

Veileder: Eivind Kaspersen

Mai 2023

Håvard Horne og Johan Henrik Kvitfjell

Skjer estimering intuitivt eller kognitivt?

En oppgave om hvordan lærerstudenter estimerer mengders numerositet

Masteroppgave i Matematikdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Eivind Kaspersen
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning



Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne oppgaven har undersøkt lærerstudenters strategier i estimeringsoppgaver. Hensikten med oppgaven var å finne ut om estimering skjer intuitivt eller kognitivt. Dette skulle bidra til å gi lærere et teoretisk grunnlag for undervisning med estimering. Oppgavens problemstilling er: *Vil lærerstudenter estimere intuitivt eller kognitivt i estimeringsoppgaver med lett gjenkjennelige mønstre og symmetriske gruppestrukturer?*

I oppgaven benyttet vi en mixed metode gjennom innsamling av både kvalitative og kvantitative data i et oppgavebasert spørreskjema. Spørreskjemaet inneholdt estimeringsoppgaver med 15 til 29 elementer samt refleksjonsspørsmål til utvalgte oppgaver, og det ble besvart av 162 lærerstudenter. Estimeringsoppgavene var delt i fire oppgavetyper, som hver hadde ulik struktur. Med en intuitiv modell for estimering forventer man ikke at ulik struktur i estimeringsoppgaver skal føre til ulike resultater. En kognitiv modell er derimot åpen for at strukturen i en mengde har betydning for estimering. Vi kunne dermed se om estimering skjedde intuitivt eller kognitivt ved å undersøke om struktur hadde sammenheng med estimering.

Vi utførte induktiv analyse av det kvalitative datamaterialet. Analysen identifiserte ulike kategorier som beskrev deltakernes strategier for å løse estimeringsoppgaver. Samtidig gjennomførte vi en analyse av det kvantitative datamaterialet for å undersøke forskjellene mellom resultatene fra de ulike oppgavetyperne. Denne analysen avdekket statistisk signifikante forskjeller i deltakernes besvarelser på de ulike oppgavetyperne. For å styrke validiteten i oppgaven gjennomførte vi triangulering av kvalitative resultater med kvantitative. Trianguleringen viste at det var sammenheng mellom hvilke strategier deltakerne rapporterte, og resultatene fra estimeringsoppgavene.

Resultatene i denne oppgaven viser at lærerstudentene brukte kognitive strategier for estimering. Dette peker mot at estimering kan skje kognitivt. Det at estimering skjer kognitivt har didaktiske konsekvenser. Undervisning som inneholder estimering bør ha som mål at elevene skal utvikle et repertoar av strategier for estimering. Arbeidsmetoden i slik undervisning bør være preget av at elevene diskuterer hvilke strategier de har brukt, og en utforsking av hvilke strategier som er mest effektive.

Abstract

This study has examined teacher students' strategies in estimation tasks. The purpose of the study was to determine whether estimation occurs intuitively or cognitively. This was intended to provide teachers with a theoretical foundation for teaching with estimation. The research question of the study is: Will teacher students estimate intuitively or cognitively in estimation tasks with easily recognizable patterns and symmetrical group structures?

In the study, a mixed method was employed through the collection of both qualitative and quantitative data using a task-based questionnaire. The questionnaire included estimation tasks with 15 to 29 elements, along with reflection questions for selected tasks. It was completed by 162 teacher students. The estimation tasks were divided into four task types, each with a different structure. With an intuitive model of estimation, it is not expected that different structures in estimation tasks will lead to different results. However, a cognitive model is open to the idea that the structure of a set influences estimation. Thus, we could investigate whether estimation occurred intuitively or cognitively by examining the relationship between structure and estimation.

We conducted inductive analysis of the qualitative data. The analysis identified various categories that described participants' strategies for solving estimation tasks. At the same time, we carried out an analysis of the quantitative data to examine the differences between the results of the different task types. This analysis revealed statistically significant differences in participants' responses to the various task types. To strengthen the validity of the study, we triangulated qualitative results with quantitative data. The triangulation showed a connection between the strategies reported by the participants and their results in the estimation tasks.

The results of this study show that teacher students employed cognitive strategies for estimation. This suggests that estimation can occur cognitively. The findings have didactic implications. Teaching that incorporates estimation should aim to help students develop a repertoire of estimation strategies. The teaching method in such instruction should involve discussions among students about the strategies they have used and explore which strategies are most effective.

Innhold

Figurer	x
Tabeller	x
Forkortelser/symboler	xi
1 Innledning	1
1.1 Introduksjon av estimering	1
1.2 Hvorfor er estimering viktig?	1
1.3 To ulike modeller for estimering	1
1.4 Didaktiske konsekvenser	2
1.5 Hvordan skal vi finne ut om estimering er intuitivt eller kognitivt?	2
1.6 Problemstilling og forskningsspørsmål	3
1.7 Struktur og oppbygging	4
2 Teorikapittel	5
2.1 Fra ikke-symboliske til symbolske tall	5
2.2 Subitisering og estimering	6
2.3 To modeller for estimering	7
2.3.1 Intuitiv modell for estimering (ANS)	7
2.3.1.1 ANS i undervisning	8
2.3.2 Kognitiv modell for estimering	9
2.3.2.1 Arbeidsminnet	9
2.3.2.2 Mental sammenligning	9
2.3.2.3 Telling	9
2.3.2.4 Nedbrytning i subetiserbare grupper	10
2.3.2.5 Addisjon og multiplikasjon	10
2.4 Didaktiske konsekvenser	10
2.4.1 Hvordan kan undervisning med intuitiv modell for estimering se ut?	11
2.4.2 Hvordan kan undervisning med kognitiv modell for estimering se ut?	12
2.5 Oppsummering	13
3 Metode	15
3.1 Paradigme	15
3.2 Mixed metode	15
3.3 Utforming av instrumentet	16
3.3.1 Kvikkbilder	16
3.3.2 Oppgavetyper	17
3.3.2.1 Oppgavetyperne <i>figurert</i> og <i>tilfeldig strukturert</i>	17

3.3.2.2	Oppgavetyperne <i>symmetrisk gruppert</i> og <i>ikke-symmetrisk</i>	18
3.3.3	Oppvarmingsoppgaver	20
3.3.4	Refleksjonsspørsmål	20
3.3.5	Oppsummering av innholdet i instrumentet	21
3.4	Beskrivelse av gjennomføring	21
3.4.1	Pilot.....	21
3.4.2	Deltakere	21
3.4.3	Eksperimentell prosedyre	21
3.5	Metode for analyse	22
3.5.1	Rådata.....	22
3.5.2	Kvalitativ analyse.....	22
3.5.3	Kvantitativ analyse.....	25
3.5.4	Sammenligning og triangulering av kvantitative og kvalitative data	27
3.6	Validitet og reliabilitet.....	27
3.6.1	Kvalitativ del	28
3.6.1.1	Reliabilitet.....	28
3.6.1.2	Validitet	29
3.6.2	Kvantitativ del	29
3.6.2.1	Reliabilitet.....	29
3.6.2.2	Validitet	30
3.6.3	Reliabilitet og validitet i design av instrumentet	30
3.6.3.1	Validering av lett gjenkjennelige figurer	30
3.6.3.2	Oppgavenes rekkefølge.....	31
3.6.3.3	Rapportering av resultater	31
3.6.4	Metodekritikk.....	32
3.7	Etikk.....	32
3.8	Oppsummering	33
4	Analyse og resultat	34
4.1	Kvalitative resultater	34
4.1.1	<i>Intuitive</i> og <i>kognitive</i> strategier	34
4.1.2	Beskrivelse av <i>intuitive</i> strategier.....	35
4.1.3	Beskrivelse av de ulike <i>kognitive</i> strategiene	36
4.1.3.1	<i>Gruppering</i>	37
4.1.3.2	<i>Regning</i>	38
4.1.3.3	<i>Telling</i>	38
4.1.3.4	<i>Lager figuren selv</i>	39
4.1.3.5	<i>Sammenligning</i>	40

4.1.4	<i>Figurert og tilfeldig strukturerte</i>	41
4.1.5	<i>Symmetrisk gruppert og ikke-symmetrisk gruppert</i>	42
4.2	Kvantitative resultater	44
4.2.1	Responstider	44
4.2.1.1	<i>Figurerte mot tilfeldig strukturerte oppgaver</i>	45
4.2.1.2	<i>Symmetrisk gruppert mot ikke-symmetrisk gruppert</i>	46
4.2.2	Responser	48
4.2.2.1	<i>Figurerte mot tilfeldig strukturerte oppgaver</i>	48
4.2.2.2	<i>Symmetrisk grupperte og ikke-symmetrisk grupperte oppgaver</i>	49
4.3	Resultater fra samlet analyse av kvantitative og kvalitative data.	50
4.3.1	Responstider fra <i>intuitive</i> mot <i>kognitive</i> strategier.....	50
4.3.1.1	<i>Figurert mot tilfeldig strukturert</i>	51
4.3.1.2	<i>Symmetrisk gruppert mot ikke-symmetrisk gruppert</i>	53
4.3.2	Responstider fra ulike <i>kognitive</i> strategier	56
4.4	Oppsummering	57
5	Diskusjon.....	59
5.1	Formålet med oppgaven.....	59
5.2	Våre funn	59
5.2.1	<i>Hvordan beskriver lærerstudenter selv at de estimerer?</i>	59
5.2.2	<i>Hva er sammenhengen mellom strukturering i lett gjenkjennelige figurer eller tilfeldig strukturerte mengder, og estimering av mengdene?</i>	60
5.2.3	<i>Hva er sammenhengen mellom symmetrisk strukturering av en mengde og estimering av mengden?</i>	60
5.2.4	Resultatene peker på en kognitiv modell for estimering	61
5.3	Didaktiske konsekvenser	61
5.4	Implikasjoner for videre forskning	62
5.5	Funn relatert til tidligere forskning.....	63
5.6	Metodiske utfordringer.....	63
5.7	Konklusjon	64
	Referanser.....	65

Figurer

Figur 2.1: Oppgave fra Park et al (2016)	11
Figur 2.2: Oppgave fra Bondø (2016).....	13
Figur 3.1: Eksempeloppgave, 21 figurert	17
Figur 3.2: Eksempeloppgave, 21 tilfeldig strukturert	18
Figur 3.3: Eksempeloppgave, 21 symmetrisk gruppert	19
Figur 3.4: Eksempeloppgave, 21 ikke-symmetrisk gruppert	20
Figur 3.5: Bilde av kryss, et eksempel på kvikkilde og svarboks	22
Figur 3.6: Eksempel på koding i NVivo	23
Figur 3.7: Søylediagram som viser fordelingen av deltakernes strategier.	25
Figur 3.8: Skjerm bilde av deltakernes egne beskrivelser	28
Figur 3.9: Figur som ikke ble validert	31
Figur 3.10: Fire av kvikkildene vi designet i oppgavetyper figurert	31
Figur 4.1: Søylediagram for intuitive og kognitive strategier for alle oppgavene	35
Figur 4.2: Søylediagram for de <i>kognitive</i> strategiene for alle oppgavetyper.....	36
Figur 4.3: Søylediagram for <i>intuitive</i> og <i>kognitive</i> strategier (1)	41
Figur 4.4: Søylediagram for <i>kognitive</i> strategier (1).....	42
Figur 4.5: Søylediagram for <i>intuitive</i> og <i>kognitive</i> strategier (2)	43
Figur 4.6: Søylediagram for <i>kognitive</i> strategier (2).....	44
Figur 4.7: Eksempeloppgaver, <i>figurert</i> og <i>tilfeldig strukturert</i>	45
Figur 4.8: Medianen for responstiden (1).....	46
Figur 4.9: Eksempeloppgaver, <i>symmetrisk</i> og <i>ikke-symmetrisk gruppert</i>	47
Figur 4.10: Medianen for responstiden (2)	47
Figur 4.11: Median av deltakernes respons (1).....	49
Figur 4.12: Median av deltakernes respons (2).....	50
Figur 4.13: Boksplot for responstider (1)	53
Figur 4.14: Boksplot for responstider (2)	56
Figur 4.15: Box-plot av responstid for ulike strategier	57
Figur 5.1: Eksempel, lett gjenkjennelig og symmetrisk.....	64

Tabeller

Tabell 4.1: Eksempler på besvarelser kategorisert som <i>intuitive</i>	36
Tabell 4.2: Eksempler på strategier i kategorien <i>gruppering</i>	37
Tabell 4.3: Eksempler på strategier i kategorien <i>regning</i>	38
Tabell 4.4: Eksempler på strategier i kategorien <i>telling</i>	39
Tabell 4.5: Eksempler på strategier i kategorien <i>lager figuren selv</i>	40
Tabell 4.6: Eksempler på strategier i kategorien <i>sammenligning</i>	40
Tabell 4.7: Eksempler på strategier som hverken passet som <i>intuitive</i> eller <i>kognitive</i> strategier	40
Tabell 4.8: Resultater fra Mann-Whitney U-test på data knyttet til figur 4.13.	52
Tabell 4.9: Resultater fra Mann-Whitney U-test på data knyttet til figur 14.	55

Forkortelser/symboler

ANS	Aproximate number system
Ms	Millisekund
NESH	Nasjonale forskningsetiske komité samfunnsvitenskap og humaniora
NSD	Norsk senter for forskningsdata

1 Innledning

1.1 Introduksjon av estimering

Temaet for denne oppgaven er estimering. I denne oppgaven definerer vi estimering som prosessen der man forsøker å bestemme det totale antallet elementer i en mengde. Estimering skjer hver gang vi møter en mengde, og forsøker å finne ut hvor stor mengden er. Et eksempel på estimering finner vi i forskningen til Jevons (1871). Han kastet et tilfeldig antall bønner ned i en eske, deretter kikket han kjapt ned i esken. Etter at han hadde sett ned i esken så han bort igjen og forsøkte å estimere hvor mange bønner han hadde sett. Begrepet estimering beskriver hele prosessen, fra Jevons så ned i esken til han hadde et ferdig estimat for antallet bønner i esken. Som et begrep for det totale antallet elementer i en mengde bruker vi Kaufmanns (1949) *numerositet*.

1.2 Hvorfor er estimering viktig?

Estimering er en viktig egenskap som har en sammenheng med ulike matematiske ferdigheter. I følge Starkley og McCandliss (2014) er estimering grunnlaget for mestring av symbolsk matematikk i skolen. Estimering som utnytter gruppestrukturer er tett knyttet til tallforståelse og matematiske ferdigheter (Ciccione og Dehaene, 2020; Clements, et. al., 2019). I tillegg har estimering korrelasjon til matematisk kompetanse for førskole- og barneskoleelever (Halberda et al., 2008). Det finnes også et større potensial for å bruke estimering i matematikkundervisning for barn i ung alder, som kan hjelpe dem med å oppdage kritiske egenskaper ved tall (Clements, et. al., 2014). Forskningslitteraturen fremmer altså en rekke argumenter for estimeringens didaktiske plass i skolen. I læreplanen blir tallforståelse trukket frem og «elevene må tidlig få et godt tallbegrep», dette er et matematisk kunnskapsområde i kjerneelementene av matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet, 2021). Matematikksenteret (Bondø, 2016) mener estimeringsoppgaver skaper rike matematiske spørsmål som er med på å fremme elevenes tallforståelse, og gi lærerne innsikt i hvordan elevene tenker (Bondø, 2016). For å utnytte de didaktiske mulighetene til estimering, er det et viktig spørsmål som må besvares: Hvordan foregår estimering?

1.3 To ulike modeller for estimering

Mekanismene bak estimering er uklare, og det finnes flere teorier som forsøker å beskrive hvordan estimering foregår (Gilmore, et. al., 2018; Lüwel og Verschaffel, 2008). Disse teoriene kan deles inn i to hovedretninger, intuitive og kognitive modeller. I denne oppgaven er hensikten å undersøke om estimering er intuitivt eller kognitivt.

Intuitive modeller ser på estimering som en automatisk prosess: Uten at vi tenker over det, vil vi få et estimat på mengdens numerositet. Det skjer ingen vurderinger fra man ser mengden til man har et estimat. Estimeringen bruker kun intuisjon. Kognitive modeller antar at det er en rekke mentale funksjoner som er mulig å bruke for å avgjøre mengdens numerositet (Lüwel og Verschaffel, 2008). Det skjer kognitive vurderinger fra man ser mengden til man har et estimat. En kognitiv modell åpner for at vi kan holde et bilde av mengden i bevisstheten, og utføre strategier for å estimere numerositeten. Disse

strategiene kan for eksempel være å se etter grupper i mengden (Starkey og McCandliss, 2014), eller gjenkjennelige mønstre (Katzin, et. al., 2019).

1.4 Didaktiske konsekvenser

Vi ønsker å finne ut om estimering skjer intuitivt eller kognitivt fordi modellene vil gi ulike didaktiske konsekvenser. Hvilken modell man legger til grunn vil bestemme innholdet i undervisningen. Dersom man begrunner undervisningen i en intuitiv modell, bør man trene opp intuisjonen. Modellen peker på at vi har en egenskap som automatisk gir oss et estimat på mengden vi ser (Gilmore, et. al., 2018). For å utvikle denne egenskapen burde man arbeide med mengdetrening av estimering. Undervisningen vil være preget av repetitive oppgaver (Park, et. al., 2016). Der kan elevene for eksempel øve på en rekke estimeringsoppgaver, for å utvikle intuisjonen.

Dersom man begrunner undervisningen i kognitive modeller, blir utvikling av kognitive strategier sentralt. Målet med undervisningen vil være å bygge et repertoar av forskjellige strategier for estimering. Slike strategier kan innebære bruk av regneoperasjoner i estimeringen, ulike tellestrategier (Lüwel og Verschaffel, 2008), eller å bryte ned mengden i mindre grupper (Ciccione og Dehaene, 2020). Arbeidsmetoden vil være å diskutere ulike måter å se en mengde på, og å utfordre elevene til å resonnerer rundt mengdenes struktur og egenskaper ved potensielle regneoperasjoner (Bondø, 2016).

Kjernen av problemet ligger i hvilken modell man begrunner undervisningen i. Vi ønsker å begrunne undervisningen i den modellen som stemmer for estimering. Dermed ønsker vi å finne ut av hvilken modell for estimering som er rett. Skjer estimering intuitivt eller kognitivt?

1.5 Hvordan skal vi finne ut om estimering er intuitivt eller kognitivt?

For å finne ut om estimeringen skjer intuitivt eller kognitivt, undersøkte vi estimering på flere måter. Først spurte vi deltakerne selv hvordan de estimerte. Vi ønsket å undersøke deltakernes egne opplevelser av hvordan de estimerte, fordi dette er forsket lite på fra tidligere. Deretter ønsket vi også å se på resultatene av estimeringsoppgaver med ulike strukturer. Dette gjorde vi fordi et viktig skille mellom intuitive og kognitive modeller er strukturens betydning for estimering.

I en intuitiv modell for estimering er det ikke noen sammenheng mellom strukturen til mengdene og estimering av den. En intuitiv modell sier at det er kun mengdens størrelse som avgjør hvor godt vi estimerer (Gilmore, et. al., 2018). En stor mengde vil være vanskeligere å estimere enn en liten mengde, uavhengig av mengdenes strukturer. En kognitiv modell åpner derimot for en sammenheng mellom mengdens struktur og estimering av den. Ifølge en kognitiv modell kan man bruke ulike kognitive strategier for å estimere mengder med ulike strukturer.

Ved å benytte estimeringsoppgaver med ulik struktur kunne vi dermed se hvilken modell som stemmer for estimering. Med en intuitiv modell kunne vi forvente samme resultater på oppgaver med ulik struktur. Om vi derimot fikk ulike resultater på oppgaver med ulik struktur ville det peke på en kognitiv modell for estimering.

Vi valgte å avgrense oppgaven til å ta for seg hvordan deltakerne selv beskriver fremgangsmåter i estimering, og strukturens betydning i estimering.

Vi gjorde også flere avgrensninger for oppgaven. Litteraturen trekker sammenheng mellom enkelte typer strukturer og estimering. Katzin, et. al. (2019) peker på at gjenkjennelige mønstre fasiliterer for estimering. Derfor ville vi bruke gjenkjennelige mønstre i noen av oppgavene våre. Gruppestrukturer fasiliterer også for estimering (Ciccione og Dehaene, 2020; Starkey og McCandliss, 2014). Derfor valgte vi å bruke gruppestrukturer i våre oppgaver. Videre lurte vi på om hvis gruppene dannet et symmetrisk mønster, ville det hjelpe estimeringen? Symmetriens betydning i estimering er ikke grundig kartlagt i litteraturen. Dermed lagde vi to oppgavetyper med gruppestrukturer, hvor gruppene dannet et symmetrisk mønster i den ene. Dersom vi sammenlignet estimeringen av de ulike strukturene, ville det bli synlig om estimeringen var kognitiv eller intuitiv.

1.6 Problemstilling og forskningsspørsmål

Formålet med denne oppgaven er å undersøke om estimering er kognitiv eller intuitiv. Dette er et viktig spørsmål, fordi svaret har didaktiske konsekvenser. Dette fører oss til vår problemstilling:

Vil lærerstudenter estimere intuitivt eller kognitivt i estimeringsoppgaver med lett gjenkjennelige mønstre og symmetriske gruppestrukturer?

Om intuitive modeller stemmer vil ikke ulike strukturer endre hvordan deltakerne estimerer. Derfor ville vi sammenligne hvordan deltakerne estimerte oppgaver med ulik struktur. Om deltakerne fikk ulike resultater, ville det peke på at intuitive modeller ikke stemmer, og at estimering er kognitivt. Problemstillingen ble brutt ned i tre forskningsspørsmål:

1. Hvordan beskriver lærerstudenter selv at de estimerer?

Det er få som har forsket på deltakeres egen beskrivelse av estimeringsstrategier. Ved å se på deltakernes beskrivelser av egen estimering, ville vi få et innblikk i hvordan de tenkte. Slik kunne vi se om deltakerne oppga ulike strategier for oppgaver med ulike strukturer. Dette ville hjelpe oss med å avgjøre om estimering er intuitivt eller kognitivt.

2. Hva er sammenhengen mellom strukturering i lett gjenkjennelige figurer og estimering av mengdene?
3. Hva er sammenhengen mellom symmetrisk strukturering av en mengde og estimering av mengden?

De to neste forskningsspørsmålene så på strukturens sammenheng med estimering. For å svare på disse forskningsspørsmålene har vi designet fire oppgavetyper, med ulik struktur i hver oppgavetype. Disse fire kalte vi: *Figurert*, *tilfeldig strukturert*, *symmetrisk gruppert* og *ikke-symmetrisk gruppert*. Resultatene fra de ulike oppgavetyperne vil dermed fortelle oss om det er en sammenheng mellom strukturen i en mengde og estimeringen av mengden. En intuitiv modell sier at det ikke vil være forskjell i resultatene, mens en kognitiv modell sier at det kan være forskjell i resultatene. Dermed vil sammenligning av resultatene fra de ulike oppgavetyperne kunne besvare problemstillingen.

For å besvare forskningsspørsmålene, samlet vi inn både kvalitative og kvantitative data. Vi analyserte deltakernes selvrapporterte strategier, og vi benyttet en induktiv analyse inspirert av Charmaz tilnærming til Grounded Theory (Bryman, et. al., 2021; Charmaz, 2006). Her fant vi kategorier for deltakernes strategier. Disse analyserte vi opp mot de

ulike modellene for estimering. Den kvantitative analysen sammenlignet responstider og responser. For å analysere kvantitative funn brukte vi Kolmogorov-Smirnov test og Wilcoxon signed rank H-test. Vi triangulerte også deltakernes strategier med responstiden deres. Til dette brukte vi Mann-Whitney U-test og Kruskal-Willies test.

1.7 Struktur og oppbygging

I kapittel 2, teori, skal vi redegjøre for hva estimering er, og hvorfor det skiller seg fra telling og subitisering. Vi skal også redegjøre for den intuitive modellen for estimering og den kognitive modellen for estimering, samt hvilke didaktiske konsekvenser hver av disse har. I kapittel 3, metode, skal vi redegjøre for vår mixed metode, og forklare hvordan vi lagde datainnsamlingsverktøyet. Videre skal vi presentere våre resultater og analyser, kapittel 5. Til sist skal vi diskutere funnene våre, og hvilke didaktiske konsekvenser de får i kapittel 5, diskusjon.

2 Teorikapittel

Vår masteroppgave handler om å se på de didaktiske konsekvensene av skillet mellom intuitive og kognitive modeller for estimering. Dersom man begrunner undervisningen i intuitive modell, vil målet med undervisningen være å forbedre medfødte intuitive egenskaper (Gilmore, et. al., 2018). Da vil fokuset for eksempel ligge på mengdetrening på estimeringsoppgaver. Trening etter intuitive modeller legger ikke noen krav til strukturen av mengdene man skal estimere. Ifølge intuitive modeller må man øke hjernens nevrologiske kapasitet for å estimere større mengder (Krajcsi, 2017). Da er det mengdens størrelse som er avgjørende, ikke mengdens struktur.

Hvis man derimot begrunner undervisningen i kognitive modeller for estimering, vil målet være å bygge opp et repertoar av fremgangsmåter for å estimere mengder. Eksempler på fremgangsmåter kan være regnestrategier eller mental sammenligning med kjente representasjoner for tall (Lüwel og Verschaffel, 2008). For å bygge opp et repertoar av slike fremgangsmåter, vil undervisningen være preget av å jobbe med oppgaver som legger til rette for kognitiv behandling av mengden. Dette kan gjøres ved å bruke gjenkjennelige mønstre og matematisk meningsfulle strukturer.

For å se nærmere på skille mellom kognitive og intuitive modeller for estimering, skal vi starte teorikapittelet med å definere estimering. Dette vil vi gjøre ved å beskrive hvordan estimering er veien fra ikke-symboliske til symbolske tall. Der skal vi snakke om hvilke egenskaper vi mennesker har i møtet med tall og mengder, utenom symboler. Videre vil vi vise hvilken mengde man kan estimere, gjennom å forklare hvorfor subitisering og estimeringer er uavhengige prosesser (Kaufmann, et. al., 1949). Vi skal beskrive forskjellen mellom disse to, og beskrive noen karakteristikk ved estimering som viser dette skillet.

Vi vil så redegjøre for intuitive og kognitive modeller for estimering. Da begynner vi med å beskrive den intuitive modellen Approximate Number System (ANS). Den mener at det finnes et system i hjernen som gjør at vi intuitivt kommer med et estimat av en mengde (Gilmore, et. al., 2018). Videre skal vi legge frem kognitive modeller for estimering. De åpner for at man kan benytte arbeidsminnet til å arbeide kognitivt med mengdene. Vi skal også vise undervisning som passer til både intuitive og kognitive modeller for estimering. Forskjellen i undervisningen tydeliggjør de didaktiske konsekvensene; ulike modeller for estimering gir ulike måter å undervise på.

2.1 Fra ikke-symboliske til symbolske tall

I vår oppgave er det viktig å skille mellom mengder og tall. Mengde er i matematikken en samling objekter, som kalles elementer i mengden (Briseid, 2023). Tall er matematiske konstruksjoner som angir mengde og størrelse (Aubert, 2023). Tall er altså det vi bruker for å beskrive hvor mange elementer en mengde inneholder. Beskrivelsene kan være både symbolske og ikke-symboliske.

Mengder er noe vi alle omgir oss med i hverdagen. De finnes overalt. Det kan være stoler i et rom, fingre på hendene eller bøker i en bokhylle. De finnes i ulike former og i ulike størrelser. Allerede før vi lærer oss symboler og nøyaktig språk om tall, har vi mennesker egenskaper som forteller oss noe om mengdene. Vi kan gjenkjenne små mengder med

sikkerhet, før vi vet hva ordene én, to og tre betyr (Clements, et. al., 2019). Vi kan også si noe om de større mengdene. Blir vi presentert ulike mengder, ser vi hvilken som har flest eller færrest elementer. Helt uten å ha noe symbolsk forståelse. Så lenge det er stor nok forskjell mellom antall elementer i mengden, gjør vi dette med sikkerhet (Gilmore, et. al., 2018). Egenskapene er medfødte, og ikke noe vi må lære oss. De gjør det mulig for oss å representere mengdene ikke-symbolsk. Vi har altså en egenskap for å behandle mengder helt uten å bruke symboler. Dette gir oss en ide om hva mengden inneholder, uten at vi beskriver den med symboler. Dermed kan vi kalle disse egenskapene ikke-symbolske tallkunnskap. Ikke-symbolske tallkunnskap er så grunnleggende at de er funnet i spedbarn og i andre dyr enn mennesker. Ikke-symbolsk behandling av mengder i tidlig alder er sterkt knyttet til matematiske ferdigheter (Clements, et. al., 2019). Det er også sentralt i utviklingen av tallforståelse (Clements, et. al., 2014).

Symbolsk tallkunnskap er et grunnleggende verktøy for å kommunisere matematisk kunnskap (Vygotsky, 1978). I motsetning til ikke-symbolsk tallkunnskap er ikke dette medfødt, man er nødt til å lære det. Når man lærer seg å bruke symbolske tall, åpnes nye muligheter for behandling av mengder. Der man tidligere kun hadde en idé om hva mengden inneholder, kan man nå bruke tallsymboler for å beskrive det. Man kan bestemme en symbolsk verdi for antall elementer det er i en mengde. Antall elementer i en mengde kaller Kaufmann (1949) *numerositet* (oversatt fra *numerousness*). For å finne numerositeten til en mengde kan man bruke flere egenskaper. En sikker måte er å telle seg frem til numerositeten. Telling er en langsom prosess. Det finnes derimot andre egenskaper som finner en numerositet for mengder fortere. For små tall har vi subitisering og for de store har vi estimering (Kaufmann, et. al., 1949).

2.2 Subitisering og estimering

Subitisering blir definert som den umiddelbare tilgangen på numerositet (Kaufmann, et. al., 1949). Ser man en gruppe med få prikker, ser man umiddelbart og med sikkerhet hvor mange prikker det er. Subitisering er en hurtig og presis egenskap for å bestemme små mengders numerositet. Noe som ble forsket på allerede i 1871. Da eksperimenterte Jevons (1871) med bønnekasting. Han fant ut at sinnet kunne omfavne et sted mellom fire og fem objekter samtidig og umiddelbart. Akkurat hvor subitiseringens øvrige grense ligger, er uklart. Forskningsfeltet har funnet resultater som tyder på at den er alt fra 2-6 (Kaufmann, et. al., 1949; Railo et al., 2008; Repp, 2007; Mandler & Shebo, 1982; Mazza, V. 2017; Wolters et al. 1987), men i dag er det oftest fire som går igjen (Katzin, 2018). Denne grensen er viktig for å skille subitisering fra estimering. Det er kun subitisering om det er hurtig og presist.

Med større mengder enn de som kan subitiseres, må vi estimere mengdens numerositet. Estimering sine karakteristikk skiller seg fra subitisering. Der hvor subitisering er presist, er estimering unøyaktig. Jo større mengdene blir, jo mer varierer estimeringen. Tendensen er også at man underestimerer ved mengder på 20 og oppover (Gilmore, et. al., 2018).

Det finnes også modeller som beskriver mekanismene bak estimering. Man kan skille beskrivelsene fra litteraturen inn i to modeller: en kognitiv og en intuitiv. Forskjellen er om numerositeten blir estimert ved hjelp av kognitive prosesser, eller om estimatet kommer intuitivt.

2.3 To modeller for estimering

Etter innholdsfortegnelsen er det satt inn automatiske tabell- og figurlister. Du kan fjerne en av eller begge disse om du ikke har tabeller og/eller figurer. Det er også mulig å sette inn egne lister for likninger (finnes som et standardvalg i Word) eller andre ting (bilder, kart) dersom man har mange slike.

2.3.1 Intuitiv modell for estimering (ANS)

Approximate number system (ANS) er et intuitivt system som brukes for å estimere større mengder. I dette delkapittelet skal vi forklare hvordan systemet fungerer. Vi skal fortelle om Weber's lov, og hvordan den er med på å beskrive ANS. Systemet har en sammenheng med numerositeten til mengdene som skal estimeres, men ikke formen og mønsteret. Til slutt skal vi presentere ulike meninger om hvilken plass ANS har i matematikkdiridaktikken.

Det finnes flere slike intuitive modeller for mengdeestimering (Krajci, 2016). Vi har valgt å ta for oss ANS. I ANS blir estimering beskrevet som intuitivt. Ved hjelp av systemer i hjernen, kommer vi frem til et estimat. Vi trenger ikke reflektere noe over mengden. Systemet gjør at vi intuitivt kommer frem til et estimat for numerositeten.

ANS sier at det finnes et nevrologisk system i hjernen som brukes til å gjenkjenne tall (Gilmore, et. al., 2018). ANS-teori mener at når vi ser en mengde, reagerer nevroner i hjernen. De reagerer med å estimere en numerositet til mengden. Presisjonen i estimeringen vil variere avhengig av mengdens numerositet. Høyere numerositeter vil gi mer upresise estimat. I tillegg vil høyere numerositeter også gi økt variasjon i estimeringen. Denne modellen for ANS er empirisk bevist. Her ble det gjort funn av to nevroner som spesifikt reagerer på numerisk stimuli. Nevronene ble først påvist gjennom forskning på aper, som viste seg å ha nevroner som reagerte på bestemte numerositeter (Clements, et. al., 2019; Gilmore, et. al., 2018). Måten disse nevronene reagerer på ulike stimuli, gir resultater som følger modellen for ANS. På den måten peker disse resultatene på ANS (Dehaene, 2003).

Ifølge ANS er det også mulig å tallfeste hvor god man er i mengdeestimering (Revkin, et. al., 2008). Dette gjøres gjennom sammenligningsoppgaver med estimering av mengder, hvor målet er å avgjøre hvilken mengde som har størst numerositet. Resultatene i slike oppgaver kan brukes til å kalkulere Weber-fraksjonen. Det er en konstant som er tilknyttet hvert individ, som beskriver hvor presist et individ kan estimere (Gilmore, et. al., 2018). Dersom man klarer å se forskjell mellom liknende mengder, har man god ANS og en lav Weber-fraksjon (Revkin et al., 2008).

Hvor mye variasjonen i estimerer øker, blir bestemt av Webers lov: Variasjonen i estimerer øker i takt med økt stimuli, slik at variasjonen mellom to stimuli øker proporsjonalt med numerositeten i stimuli (Dehaene, 2003; Revkin, et. al., 2008; Testolin og McClelland, 2021). For å forklare Webers lov er det vanlig å se på hvilke effekter som følger loven.

Når en skal se på hva som har effekt på estimeringen, er det tre aspekter ved numerositeten som blir trukket frem (Krajcsi, 2017). Forskjellen i mengdenes numerositet er et aspekt, og størrelsen til mengdenes numerositet et annet. Det er en sammenheng mellom disse. Små forskjeller og store størrelser gjør sammenligning av mengder vanskeligere. Der denne sammenhengen blir påvist, vil variasjonen mellom

respons på to stimuli øke proporsjonalt med numerositeten i stimuli, og man vil se at ANS fungerer i henhold til Webers lov (Krajcsi, 2017).

Denne proporsjonaliteten bringer oss videre til numerositetens tredje aspekt: Forholdet mellom to numerositeter, og effekten av forholdet mellom dem, *ratioeffekten*.

Ratioeffekten beskriver hvordan forholdet mellom to mengder endrer vår evne til å estimere deres numerositet. Ifølge den skal alle stimulipar med likt forhold, ha likt forhold mellom variasjon på estimeringen. Dette er en direkte konsekvens av at ANS skal følge Webers lov (Gilmore, et. al., 2018). Om dette stemmer vil det være et likt forhold mellom variasjonen i estimerer for tre og ni, som variasjonen i estimerer for 30 og 90. Ratioeffekten reflekterer avstandseffekt og størrelseseffekt, gjennom å vise sammenhengen mellom dem. Effekten er et sentralt kjennetegn man ser etter, når man ønsker å se om ANS virker i henhold til Webers lov (Krajcsi, 2017). Om mengdeestimering skjer gjennom ANS slik den er beskrevet gjennom Webers lov, er det mulig å begrunne hvorfor noen er bedre enn andre til å estimere store mengder.

Numerositet er det eneste aspektet med en mengde som ANS tar i betraktning (Dehaene, 2003; Gilmore, et. al., 2018; Revkin, et. al., 2008; Testolin og McClelland, 2021). Hvilken effekt mengdens struktur har er ikke beskrevet. Dermed er det kun antallet elementer i mengden som har sammenheng med estimering, ifølge ANS. Hvordan mengden blir presentert er ikke sentralt for ANS. Mengden kan bli presentert i gjenkjennbare grupper, symmetriske strukturer, eller som velkjente bilder. Slik ANS beskrives i litteraturen vil man derimot ikke behandle slike mengder annerledes enn om elementene i mengdene var plassert tilfeldig. Det intuitive systemet fokuserer bare på mengdens størrelse, ikke mønster og form.

2.3.1.1 ANS i undervisning

Tidligere forskning har forsøkt å argumentere for at ANS kan brukes for å beskrive større deler av estimering. Enkelte påstår at ANS er en av menneskets måter å behandle symbolske tall på (f.eks., Halberda, et al., 2008; Halberda, et. al., 2012; Lourenco et al., 2012). Om dette stemmer er intuitive evner nyttige redskap i matematikdidaktikken. Andre kritiserer dette ved å påpeke at ANS er helt adskilt fra behandling av symbolske tall (f.eks., Agrillo, et. al., 2015; Gilmore, et. al., 2018; Krajcsi, 2017; Krajcsi, et. al., 2016; Krajcsi, et. al., 2018; Parther, 2014). Om ANS ikke kan brukes for å behandle symbolske tall, svekker dette den intuitive modellens rolle i matematikdidaktikken.

Hvorvidt arbeid med ANS oppgaver har en sammenheng med matematiske ferdigheter er viktig. Om det er en sammenheng peker dette mot at det er hensiktsmessig å begrunne matematikkundervisning i intuitive modeller. Gilmore et al (2018) mener at grunnen til at denne typen oppgaver viser seg å fremme symbolske matematiske ferdigheter, ikke har med ANS å gjøre. Det er derimot flere som har funnet denne sammenhengen, og mener at ANS er tett knyttet til matematiske ferdigheter (f.eks., Halberda, et. al., 2008; Halberda, et. al., 2012; Lourenco, et. al., 2012). Gilmore et. al. (2018) kritiserer påstander om denne sammenhengen. Hun sier at det er kun i undersøkelser som benytter sammenligningsoppgaver, det er funnet en sammenheng mellom ANS og matematiske ferdigheter. Ved ren estimering er det ikke vist sterke nok empiriske bevis til å konkludere med at sammenhengen er reell. Dermed er ikke litteraturen tydelig på hvilken plass ANS skal ha i undervisning.

2.3.2 Kognitiv modell for estimering

Den andre modellen beskriver estimering som en kognitiv prosess. Da blir estimering mer som en kompleks problemløsningsaktivitet, som leder frem til en omtrentlig beregning av numerositeten (Luwel og Verschaffel, 2008). En kognitiv modell vil poengtere at man først ser, oppfatter og skaper seg et bilde av mengden, deretter prosesseres det mentale bildet av mengden. Denne prosesseringen skjer på forskjellige måter. Det kan handle om sammenligning med en referanse fra minnet. Eller så kan det handle om ulike strategier man utfører på bildet, som telling, nedbrytning i subitiserbare grupper, addisjon og multiplikasjon. I denne delen av kapitlet skal vi beskrive disse kognitive prosessene.

2.3.2.1 Arbeidsminnet

Den kognitive modellen for estimering beskriver at man klarer å lagre et bilde av mengden i hodet, gjennom bruken av arbeidsminnet. Det har blitt funnet hjerneaktivitet som tyder på at arbeidsminnet aktiveres i estimeringsoppgaver. Større mengder, gir også mer aktivitet i arbeidsminnet (Pagano, et. al., 2014; Wanlu, et. al., 2022). Bildet man har på arbeidsminnet, vil være en etterligning av det man har sett. Man vil ikke alltid klare å holde det hele riktige bildet på arbeidsminnet. Estimeringen vil da begrenses av hvor store mengder man klarer å holde i arbeidsminnet (Gilmore, et. al., 2018). Hvis man ser en mengde, og klarer å holde et bilde av mengden på arbeidsminnet, vil man kunne utføre kognitive prosesser på dette bildet. Videre skal vi beskrive de ulike kognitive prosessene man kan gjøre på dette bildet.

2.3.2.2 Mental sammenligning

En kognitiv prosess man kan gjøre med det mentale bildet, er å sammenligne det med en referanse (Luwel og Verschaffel, 2008). Klahr (1972) presenterer en modell for denne kognitive prosessen. Han mener at langtidsminnet har lagret maler av representasjoner for mengder. Når vi oppfatter stimulus, blir en mal overført fra langtidsminnet. Malen blir så sammenlignet med stimulus. Dersom det stemmer overens, kan man gi mengden et estimat. Hvis ikke må vi fjerne eller tilføre elementer fra mengden, for å arbeide mot et estimat. Dermed blir maler fra hukommelsen referanse for sammenligning. Katzin (2019) peker på at estimering vil avhenge av mønstergjennkjennelse. Kjenner man igjen mønsteret av mengden, kan man bruke dette som referanse for sammenligning. Kanskje kan man se en mengde som likner på et mønster man forbinder med 10 elementer. Mengden ser litt større ut enn det mønsteret man kjenner fra før. Estimaten vil da bli høyere enn 10, men lavere enn 15. Man kan også bruke oppgaver man nettopp har gjort, som referanse for sammenligning. For eksempel ved å se om den nye oppgaven har flere eller færre elementer enn den forrige. Sammenligning med maler for representasjoner av tall, gjenkjennbare mønstre, eller tidligere oppgaver, er alle måter man kan sammenligne med en referanse for å estimere.

2.3.2.3 Telling

De andre kognitive prosessene som kan gjøres med bildet på arbeidsminnet, handler om funksjoner som utføres på det mentale bildet av mengden. Når man ser for seg bildet, har man ulike strategier for å beregne seg frem til et estimat. Den første av disse strategiene vi skal nevne er telling. Telling vil avhenge av hvor god tid man får på å se mengden, og hvor tydelig man klarer å se for seg mengden etterpå. Man kan forsøke å telle hele bildet man har av mengden. Man kan også telle en mindre del av mengden og så estimere resten av mengden på bakgrunn av dette (Luwel og Verschaffel, 2008).

2.3.2.4 Nedbrytning i subetiserbare grupper

Strategien nedbrytning i subetiserbare grupper handler om å utnytte gruppestrukturene i en mengde. Mengdene kan deles inn i grupper enten ved hjelp av avstand, eller farger (Ciccione og Dehaene, 2020). Da kan man kjapt oppfatte mengden i gruppene, for så å få med seg hvor mange grupper det er. Om man vet størrelsene på gruppene og vet hvor mange grupper det er, kan man legge sammen gruppene for å finne numerositeten (Starkey og McCandliss, 2014). Det er mulig å bruke denne strategien på mengder uten tydelige gruppestrukturer. Likevel blir grupperte mengder nummerert raskere og mer presist enn tilfeldige mengder (Mandler og Shebo, 1982). For at denne fasiliteringen skal skje best mulig, må gruppene være innenfor subetiseringsgrensen (Wender og Rothkegel, 2000). Å bryte ned mengder på denne måten er anerkjent som en strategi for estimering. Den er beskrevet under flere ulike navn: Groupitizing (Starkey og McCandliss, 2014), Conceptual subitizing (Clements, et. al., 2019) og Subitizing with addition (Klahr, 1972). Selv om ordlyden i forklaringene bak begrepet varierer, er essen gjennomgående. Det handler om å finne og utnytte gruppestrukturer for å estimere mengden bedre. Slike grupperinger legger til rette for bruk av simpel aritmetikk. Likevel er ikke den matematiske faktoren påpekt eksplisitt i alle forklaringene.

2.3.2.5 Addisjon og multiplikasjon

Nedbrytning i subetiserbare grupper fremprovoserer bruk av addisjon og multiplikasjon. For seg selv gir nedbrytning kun mindre grupper, som er enklere å estimere hver for seg. For å estimere hele mengdens numerositet er man avhengig av å legge sammen gruppene. Den matematiske faktoren i strategien blir poengtert av Ciccione og Dehaene (2020). De ønsket å se om det er en sammenheng mellom matematiske ferdigheter og estimering. De testet tre grupper med ulike matematiske ferdigheter, og benytte oppgaver der elementene varierte mellom ulike former for grupperinger. De viste at selv simple estimeringsoppgaver involverer mental aritmetikk. De fant også ut at det var forskjell på om man brukte multiplikasjon og addisjon. Oppgaver som legger til rette for multiplikasjon, er lettere å estimere. Dette resulterer i at mengder med numerositeter som ikke kan fasiliteres for multiplikasjon er vanskeligere. Noe som vil si at det er fornuftig å forvente dårligere resultater for estimeringsoppgaver med primtall som numerositet. Det er flere som har funnet korrelasjon mellom prestasjon i estimeringsoppgaver som fasiliteres for nedbrytning, og matematiske ferdigheter (Arndt, 2013; Gilmore, et. al., 2018).

2.4 Didaktiske konsekvenser

Motivasjonen for denne masteroppgaven er de didaktiske konsekvensene av kognitive og intuitive modeller for estimering. Modellene legger ulike didaktiske føringer for hvordan man kan bruke estimering i matematikkundervisning. Estimerings plass i matematikken er tydelig, det er funnet tydelig korrelasjon mellom enkelte typer estimering og matematiske ferdigheter (Ciccione og Dehaene, 2020). Dermed er det et behov for å avdekke hvilke modeller som best utnytter estimerings didaktiske potensial.

De didaktiske konsekvensene av kognitive og intuitive modeller for estimering gjenspeiles i undervisningens mål. Undervisning som baserer seg på en intuitiv modell vil ha som mål å øke elevenes kapasitet for hvor store mengder de kan estimere. Intuitive modeller som ANS tar ikke hensyn til mengdens struktur (Gilmore, et. al., 2018). Derfor vil ikke mengders struktur ha noen betydning i en intuitiv modell, og man trenger heller ikke jobbe med ulike strukturer. Mengdens struktur er derimot sentral i undervisning

basert på kognitive modeller. Kognitive modeller legger vekt på hvilke strategier elevene bruker for å estimere. Strategier for estimering må tilpasses mengdens struktur. Om mengden ser ut som sidene på en terning er det enkelt å sammenligne med mentale representasjoner. Om mengdene ser ut som et kvadrat kan man regne ut antall elementer ut fra antall elementer på en side. Dermed vil undervisning som baserer seg på en kognitiv modell ha som mål å utvikle elevenes strategier for estimering. Dette kan en gjøre ved å variere mengdenes strukturer, og diskutere sammen hvilke strategier som er nyttige i hvilke situasjoner.

Vi vil i dette delkapitlet gre ut om undervisningsopplegg som tar utgangspunkt i både intuitive og kognitive modeller. Vi vil beskrive oppgavene som kan brukes i slik undervisning, og hvordan de følger modellene vi har klassifisert dem under.

2.4.1 Hvordan kan undervisning med intuitiv modell for estimering se ut?

Den ene formen for undervisning tar utgangspunkt i intuitive modeller for estimering. Man ser en mengde, og så er det systemer i hjernen som gir oss et estimat for mengden. Det er mulig å trene disse systemene, for å bli bedre til å estimere. En metode vil være å øve på gjentagende estimeringsoppgaver. Elevene blir presentert en mengde, og så skal de raskt og presist, og sammenligne ulike mengder. Det er mye som tyder på at sammenligning av mengder har en sammenheng med symbolsk matematisk kompetanse. Derfor foreslår blant annet Clements (2014) ANS-undervisning gjennom å sammenligne mengder. Her påpekes viktigheten av ikke å tallfeste mengdene, bare å fortelle hvilke av mengdene som er størst. Undervisningen som ta vare på dette vil for eksempel likne på den Park et al (2016) presenterte i sin forskning.

Opgaven vi har valgt for å vise hvordan undervisning begrunnet i en intuitiv modell kan se ut, er en oppgave for å arbeide med ANS (Park, et. al., 2016). ANS-ferdigheter beskrives av Weber-fraksjonen. Begge gjenspeiler kun numerositetens sammenheng med estimering (Gilmore, et. al., 2018). Altså er det kun mengdens størrelse som endrer hvor presist man kan estimere den, noe som er karakteristisk for intuitive modeller. Undervisning med utgangspunkt i en slik modell, vil derfor kun fokusere på mengdens størrelse. Oppgaven under er en sammenligningsoppgave, og er ment for å jobbe med ANS. Man løse oppgaven ved å si hvilken kurv som inneholder størst mengde.



Figur 2.1: Oppgave fra Park et al (2016)

Oppgaven til elevene, er å hjelpe bamsen i figur 2.1. De skal velge kurven som inneholder den største mengden gjenstander. Hver gang en ballong sprekker faller gjenstander ned i kurven. Noen ganger kommer det en fugl som fjerner noen av gjenstandene i bøttene. Elevene får mange forskjellige oppgaver av denne typen. For hver oppgave, skal de på nytt velge kurven med flest gjenstander i seg. Hvordan de velger kurv skal ikke diskuteres med andre. Her skal man bestemme kurv intuitivt, og gjør man det mange nok ganger blir man flinkere til å estimere. I tillegg finner Park et al. (2016) at denne treningen på intuitiv estimering, øker elevenes symbolske matematikkferdigheter.

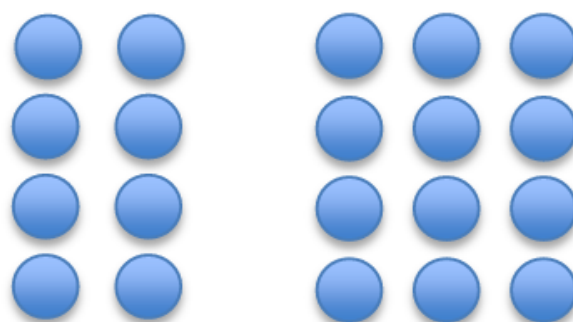
Oppgaven fremhever flere karakteristikker fra ANS. Størrelsen på mengden gjenstander i kurvene, og variasjonen på størrelsene som tilføres bestemmer vanskelighetsgrad. Som ANS-teorien beskriver, vil små forskjeller og høy numerositet av gjenstander gjøre oppgavene vanskeligere. Mengdene med gjenstander er alltid tilfeldig strukturert, og det eneste som endres er numerositeten til gjenstandene i bøttene. Strukturen og mønsteret på gjenstandene vil ikke ha noe å si for hvordan de intuitivt kommer frem til et estimat av hvilken bølge som har flest gjenstander.

Dette er en oppgave hvor elevene arbeider med å sammenligne og vurdere mengder. Hvilken plass et slikt undervisningsopplegg har i matematikdidaktikken, kan diskuteres. Clements et. al. (2018) og Park et al. (2016) viser at sammenligningsoppgaver øker symbolske matematikkferdigheter. På en annen side, vet vi at oppgaver med symbolsk nummersammenligning, har en enda større sammenheng med matematisk oppnåelse (Gilmore et. al. 2018).

2.4.2 Hvordan kan undervisning med kognitiv modell for estimering se ut?

Kognitive modeller for estimering presenterer flere strategier for estimering. Blant strategiene er telling, sammenligning, aritmetikk og nedbrytning i subetiserbare grupper. Alle strategiene krever at man klarer å holde mengden i bevisstheten lenge nok til at man klarer å benytte strategiene sine. Dette krever bruk av arbeidsminnet (Gilmore, et. al., 2018). Da kan elevene bruke ulike strategier for å komme frem til et estimat for numerositeten. Dersom man utvikler undervisning om estimering med tanke på fasilitering for bruk av kognitive strategier, får vi flere muligheter. Da kan undervisning brukes for å fremme tallforståelse, engasjere elevene i rike matematiske spørsmål og å fremheve matematiske ideer (Bondø, 2016). I stedet for at estimering kun baserer seg på intuisjon, åpner dette for at man arbeider med matematiske ideer og konsepter gjennom estimeringsoppgaver.

Matematikksenteret ved NTNU foreslår undervisning som baserer seg på en kognitiv modell for estimering. Elever får se bilder av mengder av prikker eller andre objekter i kort tid. Grupperingen av mengdene vil legge et grunnlag for det matematiske innholdet i undervisningen. Elevene får i oppgave å søke etter effektive strategier for å bestemme numerositeten til mengdene. Her kan undervisningen for eksempel utvikles for å understreke betydningen av regneartene. I tillegg kan ulike egenskaper ved regneartene belyses gjennom undervisning om estimering. Assosiative, kommutative og distributive egenskaper er alle temaer som undervisningen kan inneholde (Bondø, 2016). Dermed vil undervisning med en kognitiv modell for estimering, ta for seg matematiske ideer.



Figur 2.2: Oppgave fra Bondø (2016)

I figur 2.2 vises et eksempel på en mengde som elever skal estimere. Elevene får se bildet i kort tid, noen få sekunder eller mindre. Etter at elevene har kommet frem til sine estimater, skal de ulike strategiene diskuteres. Struktureringen i bildet åpner for å bruke ulike strategier for å estimere mengdens numerositet. Her kan målet for undervisningen være at elevene kommer frem til at ulike regneoperasjoner er gode strategier. Kanskje elevene erfarer at addisjon og multiplikasjon fungerer bedre enn sammenligning eller telling i akkurat denne oppgaven. Fordi mønstrene legger til rette for addisjon og multiplikasjon. Dersom man gjenkjenner den tydelige strukturen, kan man med sikkerhet bruke disse regneartene. Det vil også være tydelig, at å telle til 20 tar lengre tid enn å regne ut at $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$. Ikke bare vil man se at bruken av multiplikasjon og addisjon kan være nyttig, men egenskaper ved disse regneartene kan også bli diskutert.

Oppgaven i figur 2.2 vil være egnet til å diskutere både den distributive og assosiative lov. Gjennom at elevene leter etter en god estimeringsstrategi, vil det kunne bli diskutert at $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 5 \cdot 4$. Elevene vil få samme svar om de regner det som en todelt figur, eller ser på hele som en figur. På grunn av den distributive lov vil de uansett estimere 20. Gjennom å se mengder som dette, kan dermed den distributive sammenhengen mellom multiplikasjon og addisjon bli tydelig. Assosiativitet kan også bli diskutert. Kanskje en elev alltid multipliserer det loddrette antallet med det vannrette, mens en annen elev gjør motsatt. Begge måtene leder frem til samme svar. Gjennom estimeringsoppgaver er det dermed mulig å gjøre elevene kjent med assosiativitet og distributivitet.

Slik dette undervisningsopplegget ble beskrevet var assosiativitet og distributivitet i fokus. Liknende undervisning om estimering kunne tydeligere sett på sammenhengen mellom multiplikasjon og gjentatt addisjon. Annen undervisning kunne sett på hvordan noen strukturer og mønstre inviterer til multiplikasjon. Undervisningen kunne også undersøkt oppbyggingen av ulike tall, som kvadrattall eller primtall. Den kognitive modellen for estimering åpner for undervisning som tar for seg og diskuterer mer enn bare estimering.

2.5 Oppsummering

I teorikapittelet har vi presentert to modeller for estimering, en kognitiv og en intuitiv. Vi har også redegjort for de didaktiske konsekvensene av de ulike modellene for estimering. Vi har beskrevet hvordan estimering utvikler seg fra å bruke ikke-symbolsk tallkunnskap, til å kunne bestemmes symbolsk. Vi presenterte skillet mellom estimering og

subitisering, ved at subitisering kun gjelder for små mengder, mens estimering gjelder for store mengder. Der subitisering finner numerositet hurtig og presist, er estimering mer langsomt og upresist.

Videre har vi greid ut om ANS som en intuitiv modell for estimering. Vi har beskrevet at ANS bruker Webers lov for å beskrive hvordan vi kommer frem til estimerer.

Konsekvensene av Webers lov er at estimeringen kun har en sammenheng med mengdens numerositet, og ikke med mengdens struktur. Vi presenterte også ulike syn på sammenhengen mellom ANS og matematikkferdigheter.

Vi har også beskrevet en kognitiv modell for estimering. Modellen poengterer at vi først ser og oppfatter en mengde. Denne lagrer vi på arbeidsminnet, for så å bruke ulike strategier for å prosessere mengden. Disse strategiene beskrev vi som sammenligning med en referanse, telling, nedbrytning i subitiserbare grupper, addisjon og multiplikasjon.

Til slutt pekte vi på de didaktiske konsekvensene hver av modellene for estimering har. Her beskrev vi undervisning som baserte seg på en intuitiv modell for estimering, før vi beskrev undervisning som baserte seg på en kognitiv modell for estimering.

3 Metode

3.1 Paradigme

For å beskrive forskningsmetoden i denne oppgaven vil vi starte med å redegjøre for oppgavens filosofiske standpunkt. Et forskningsparadigme blir definert som et generelt filosofisk verdenssyn (Creswell, 2014). Verdenssynet skal sette parameterne for forskningens natur, og vise hvilke forutsetninger vi som forskere bringer med oss inn i vitenskapen. Et paradigme vil dermed gi føringer for ontologiske og epistemologiske hensyn. Ontologi handler om hvilket syn man har på virkeligheten og den sosiale verden. Epistemologi handler om forskerens forhold til verden og hvordan kunnskap skapes (Bryman, et. al., 2021). Forskerens ontologiske og epistemologiske ståsted legger dermed grunnlaget for hvordan forskningen skal foregå. I tillegg vil det også peke på det metodologiske aspektet, og gi føringer for hvilke metoder som best studerer virkeligheten (Punch, 2013).

I vår masteroppgave har vi et pragmatisk paradigme. Med et pragmatisk paradigme, mener vi at virkeligheten både eksisterer i og er uavhengig av individer. I pragmatisme vil forskeren ha frihet til å tilpasse forskningen etter situasjonen og forskningsproblemet. Dette åpner for å hente idéer fra andre paradigmer. I et fortolkende verdenssyn har mennesker sine subjektive opplevelser av virkeligheten. Da vil noe av virkeligheten ligge i de erfaringene og tolkningene hver enkelt henter fra verden rundt seg. Et pragmatisk paradigme åpner også for at vi kan finne svar gjennom den mer tradisjonelle formen for forskning som postpositivistene representerer. Hos postpositivister definerer årsakene handling, dermed blir søken etter og studiet av årsakene viktig. Pragmatisme åpner for innsikter fra andre paradigmer, men er ikke forpliktet til noen av dem (Creswell, 2014).

På bakgrunn av vårt pragmatiske paradigme er det naturlig å velge en mixed metode (Creswell, 2014). Gjennom en mixed metode samler vi inn både kvalitative og kvantitative data. Den kvantitative dataen kan brukes for å avdekke statistiske sammenhenger om virkeligheten. Den kvalitative dataen gir oss innblikk i menneskers opplevelser og erfaringer, og på den måten avdekker det virkeligheten i deres eget sinn. Med en mixed metode kan vi sammenfatte disse, og dermed avdekke virkeligheten, slik pragmatikere mener den er.

3.2 Mixed metode

Mixed metode er forskningsmetoden der man samler inn både kvalitative og kvantitative data. Målet er å kunne gi et helhetlig bilde av det som undersøkes (Creswell, 2014). Kvantitative data godt egnet for å lete etter større sammenhenger. Et mål med kvantitativ forskning er å avdekke årsaken til at noe skjer, og funnene kan ofte generaliseres (Bryman, et. al., 2021). I tillegg kan kvantitative data også være godt egnet for deduktiv forskning, for å teste teori (Bryman et. al., 2021; Creswell, 2014). Kvalitative data vil i større grad vise nyansene av en situasjon. Kvalitative data har som mål å gi dypere innsikt innenfor bestemte temaer (Bryman, et. al., 2021). Ved å spille på styrkene fra både kvantitative og kvalitative data, gir en mixed metode grunnlag for å se større sammenhenger, men også en dypere beskrivelse av sammenhengene.

Innenfor mixed metode er det flere måter man kan vektlegge kvalitative og kvantitative data. En måte er convergent parallell design. I et convergent parallell design vil man vanligvis forsøke å vektlegge datatypene likt (Creswell, 2014). Begge typer data samles inn samtidig. En samlet analyse av kvalitative og kvantitative data, vil gi et mer komplett bilde av den bakenforliggende informasjonen. På den måten vil man integrere datamaterialets innhold i resultatene. Dette vil belyse situasjonens årsaker sammen med individuelle opplevelser av situasjonen. Et viktig poeng i denne typen forskning er triangulering mellom den kvalitative og kvantitative dataen. Man bør se etter hvilke data som motsetter hverandre eller gir inkongruente funn. Samtidig bør man lete etter funn som er sammenfallende i både den kvalitative og kvantitative dataen. Slik vil man kunne gi et mer komplett bilde av datamaterialet (Bryman, et. al., 2021).

I vår oppgave brukte vi en mixed metode med convergent parallell design. Vi samlet inn data gjennom en oppgavebasert spørreundersøkelse. Undersøkelsen hadde 68 spørsmål og ble gjennomført av 162 deltakere. Den ble designet slik at vi samlet inn både kvalitative og kvantitative data fra alle deltakerne. Helheten av både kvalitative og kvantitative data, la til rette for sammenligning og triangulering av datamaterialet. Den kvantitative dataen ga oss et samlet bilde av deltakernes hurtighet og presisjon til estimering, og den kvalitative dataen ga oss innsikt i tankene som ligger bak deltakernes besvarelser.

3.3 Utforming av instrumentet

I dette delkapittelet skal vi redegjøre for hvordan vi utformet instrumentet for datainnsamling. Hensikten med instrumentet var å undersøke om estimering er intuitivt eller kognitivt, da dette ville ha didaktiske konsekvenser. Intuitive og kognitive modeller er uenige om strukturen i en mengde har betydning for estimering. Derfor designet vi fire oppgavetyper med ulike strukturer. Vi samlet inn data gjennom et oppgavebasert spørreskjema. Dette åpnet for å samle inn både kvalitative og kvantitative data. Med det oppgavebaserte spørreskjemaet, hadde vi også muligheten til å nå mange deltakere. I dette delkapittelet skal vi beskrive oppgaveskjemaet, og begrunne strukturene i oppgavetyperne. Vi forklarer også hvordan vi har utformet og brukt refleksjonsspørsmål. Besvarelsene på refleksjonsspørsmålene ville hjelpe oss å avdekke hvilke strategier deltakerne brukte.

3.3.1 Kvikkbilder

Vi brukte kvikkbilder som oppgaveform i undersøkelsen, hvor hensikten var at deltakerne skulle estimere. Et kvikkbilde inneholder en samling objekter, i vårt tilfelle prikker. Målet med slike oppgaver er å finne numerositeten. I vår undersøkelse ble bildene vist i 200 millisekunder (ms). Dette var nok til at man klarte å oppfatte bildet, men ikke nok til at man klarte å utføre estimeringen mens man så bildet. Kvikkbilder vises vanligvis kun i en kort periode, fra få sekunder, ned til brøkdeler av et sekund. Andre undersøkelser har benyttet samme stimulitid (f.eks., Mandler og Shebo, 1982). Den som skal løse oppgaven må bruke sine strategier innenfor estimering for å fastslå hvor mange prikker kvikkbildet inneholder.

Vi valgte å designe kvikkbildeoppgaver med numerositeter fra 15-29. I litteraturen finner vi flere undersøkelser som ser på hvordan kvikkbilder med ulike strukturer blir estimert. De fleste av disse undersøkelsene ser på mengder mellom 1 og 15 (f.eks., Ciccione og Dehaene, 2020; Starkey og McCandliss, 2014; Wendel og Rothkengel, 2000). Med tilrettelegging for gruppertisering klarer man å estimere med relativt høy presisjon opp til ni (Ciccione og Dehaene, 2020). Med trening på bestemte oppgaver, kan denne grensen være så høy som 18 (Wolters, et. al., 1987). Det kan derfor tenkes at et sted

mellom 9 og 20 ligger det en grense, hvor presis estimering ikke lenger er realistisk. Ved å ta for oss numerositeter fra 15 til 29 er det fornuftig å tenke at vi har et spenn på 15 datapunkter som ikke kan estimeres presist. Hvilken betydning struktur har for estimeringen av mengder som er for store til å estimere presist, er uklart. Vi ønsker å se på strukturens betydning i kvikkbilder med for høy numerositet.

3.3.2 Oppgavetyperne

Formålet med denne oppgaven er å undersøke om estimering er en intuitiv eller en kognitiv prosess. Intuitive modeller for estimering mener at det kun er mengdens numerositet som har en sammenheng med estimering (Gilmore, et. al., 2018). Derfor brukte vi fire oppgavetyper med lik numerositet, men ulik struktur. Ved å sammenligne resultatene fra de ulike oppgavetyperne ville vi dermed se sammenhengen mellom strukturering av en mengde og estimeringen av mengden. I dette delkapittelet skal vi beskrive strukturen i oppgavetyperne, og begrunne hvorfor vi har valgt disse strukturene.

3.3.2.1 Oppgavetyperne *figurert* og *tilfeldig strukturert*

Den første oppgavetypen med kvikkbilder kalte vi *figurert*. I denne oppgavetypen ble prikkene plassert slik at de dannet en lett gjenkjennelig figur. Målet med de lett gjenkjennelige figurene, var å se om en gjenkjennelig struktur hadde en betydning for hvordan deltakerne estimerte. Intuitive modeller for estimering avviser dette, mens kognitive modeller åpner for at mengdenes strukturer har noe å si. En gjenkjennelig struktur gjør kanskje at deltakerne kan holde bildet i bevisstheten lengre, og benytter arbeidsminnet sitt for å estimere numerositeten. Det er flere som peker på at gjenkjennelse av mønstre hjelper estimering (f.eks., Cohen, 2018; Mandler og Shebo, 1982; Von Glaserfeld, 1983; Wolter et al, 1987).

I oppgavetypen *figurerte*, designet vi 15 lett gjenkjennelige figurer. Eksempler på figurene vi valgte er: Hjerte, bil, hus og strekmann. I figur 3.1 vises et eksempel på briller. For at et kvikkbilde skulle bli brukt i undersøkelsen, stilte vi krav om at det skulle være en lett gjenkjennelig figur. Dette innebar at det skulle være enkelt å se hvilken figur prikkene skulle forestille gjennom undersøkelsen, selv med kort stimulitid. Beskrivelsen lett gjenkjennelig figur er subjektiv. Derfor måtte vi validere hvilke figurer som oppfylte dette kravet. Valideringsprosessen er beskrevet i delkapittel 3.6 Validitet og reliabilitet.



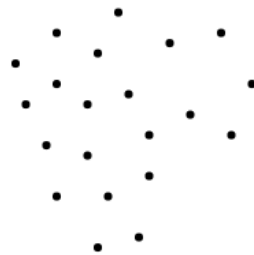
Figur 3.1: Eksempeloppgave, 21 figurert

Dette bildet viser oppgave 2 i undersøkelsen. Prikkene er plassert for å etterligne briller, bildet inneholder 21 elementer. Hentet fra vedlegg 2.

Den neste oppgavetyper kalte vi *tilfeldig strukturert*. Grunnen til at vi har *tilfeldig strukturerte* kvikkbilder med i vår undersøkelse, er for å ha et sammenligningsgrunnlag. Vi brukte oppgavetyper som et sammenligningsgrunnlag med de *figurerte* oppgavene. De *figurerte* oppgavene ble designet for at strukturen skulle ha en sammenheng med estimering. Ved å sammenligne med de *tilfeldig strukturerte* oppgavene, kunne vi undersøke forskjellen mellom de lett gjenkjennelige mengdene og tilfeldig struktur.

De *tilfeldig strukturerte* oppgavene ble også brukt til å sammenligne våre resultater med annen forskning. Estimering ved store ustrukturerte mengder er undersøkt tidligere, og vi vet at dette er noe mennesker er dårlige på. (Kaufmann, et. al., 1949; Mandler og Shebo, 1982). For størrelser over 20 har vi en tendens til å underestimere (Gilmore, et. al., 2018). Dersom resultatene fra våre *tilfeldige strukturerte* oppgaver følger samme mønster, vil dette styrke forskningens troverdighet.

I oppgavetyper *tilfeldig strukturert*, er prikkene plassert tilfeldig etter beste evne. Se figur 3.2 for eksempel. Prikkene er plassert i nærheten av hverandre, slik at de til sammen danner en gruppe. Avstandene mellom prikkene er forholdsvis stabile. Vi har ikke tilstrebet lik avstand mellom prikkene, men vi har likevel passet på at prikkene danner en gruppe med tilnærmet jevn fordeling. Altså er ikke prikkene helt tilfeldig plassert, men målet var heller at prikkene skulle oppfattes som tilfeldig når man ser dem i en kort periode.



Figur 3.2: Eksempeloppgave, 21 tilfeldig strukturert

Dette bildet viser oppgave 48 i undersøkelsen. Prikkene er plassert tilfeldig. Bildet inneholder 21 elementer. Hentet fra vedlegg 2.

3.3.2.2 Oppgavetyperne *symmetrisk gruppert* og *ikke-symmetrisk*

Våre to siste oppgavetyper ble designet med utgangspunkt i gruppestrukturer. Vi ønsket å se hvilken sammenheng strukturering av gruppene har med estimering. Derfor laget vi to oppgavetyper med grupperte mengder, hvor gruppene er plassert ulikt. Ved å sammenligne resultatene fra oppgavetyperne *symmetrisk gruppert* og *ikke-symmetrisk gruppert*, vil sammenhengen mellom symmetrisk struktur og estimering komme til syne. Den eneste forskjellen mellom oppgavetyperne er nettopp gruppens plassering. En intuitiv modell for estimering vil ikke kunne forklare denne forskjellen. Det vil derimot en kognitiv modell kunne gjøre.

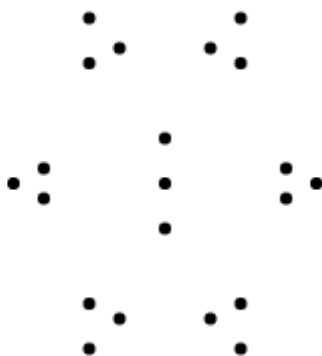
Litteraturen peker på at gruppestrukturer fasiliterer for estimering (f. eks: Ciccione og Dehaene, 2020; Clements, et. al., 2018; Stakey og McCandliss, 2014; Wendel og Rothkengel, 2000). I oppgavetyper *symmetrisk gruppert*, er prikkene plassert i grupper, og gruppene danner et symmetrisk bilde. Gruppene er de samme som blir brukt i oppgavetyper *ikke-symmetrisk gruppert*. Det er like mange prikker i gruppene, prikkene

innad i gruppene står likt i forhold til hverandre og gruppene er ikke rotert. Det vil si at kvikkbildet med 21 *symmetrisk grupperte* prikker (figur 3.3), og kvikkbildet med 21 *ikke-symmetrisk grupperte* prikker (figur 3.4), har helt like grupper. Den eneste forskjellen på 21 *symmetrisk gruppert* og 21 *ikke-symmetrisk gruppert*, er den symmetriske plasseringen av gruppene.

Både oppgavetyperen *symmetrisk gruppert* og *ikke-symmetrisk gruppert*, hadde prikkene plassert i så like grupper som mulig. Grunnen til at vi valgte å bruke så like grupper som mulig, ligger i funn fra forskningen til Ciccione og Dehaene (2020). Funnene deres peker mot at så like grupper som mulig legger til rette for gruppetisering. Dette gjør det enklere for deltakere å benytte matematiske ferdigheter for å løse oppgavene. Størrelsen på gruppene er ikke over fire, fordi dette er subitiseringsgrensen flest er enige om. I våre kvikkbilder skulle det dermed være mulig å oppfatte størrelsen på gruppene.

Dersom en kognitiv modell for estimering stemmer, vil symmetrisk strukturering av gruppene kunne fasilitere for estimering. Om man gjennomskuer at bildet er symmetrisk trenger man ikke oppfatte hele bildet. Ved å kun oppfatte den ene siden av bildet er det mulig å resonnerer seg frem til hvor mange prikker hele bildet har. Om vi bruker figur 3.3 som eksempel: Vi ser for oss at vi klarer å oppfatte at bildet er symmetrisk, men kun ser gruppene på høyre side. Vi så at det var tre like grupper og at en av dem hadde tre prikker. Vi så også at det var noe i midten, men oppfattet ikke helt hva det var. Ut fra dette regner vi at høyre side har ni prikker, da må også venstre side ha ni prikker, det blir 18 til sammen. Vi er ikke sikre på midten, men det var minst to, og under fem prikker der. Det betyr at bildet måtte ha 20-22 prikker. Det ville vært et godt estimat, siden bildet hadde 21 prikker. Et slikt resonnement stiller høye kognitive krav og krever at man oppfatter symmetrien. Det krever at man bruker arbeidsminnet, og prosesserer det man har sett gjennom blant annet regning.

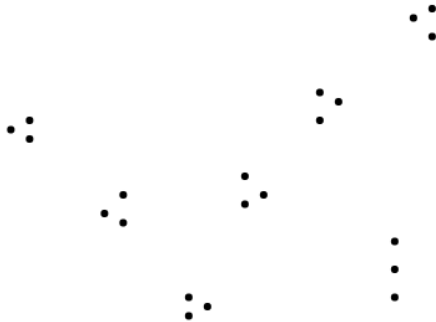
For at bildet skulle regnes som *symmetrisk gruppert*, krevde vi at det minst hadde rotasjonssymmetri. De fleste bildene hadde også symmetrilinjer. Kun ett bilde i denne oppgavetyperen hadde bare rotasjonssymmetri. I figur 3.3 har bildet to speilingslinjer, og rotasjonssymmetri. I figur 3.4 har bildet hverken speilingsymmetri eller rotasjonssymmetri.



Figur 3.3: Eksempeloppgave, 21 symmetrisk gruppert

Dette bildet viser oppgave 45 i undersøkelsen. Prikkene er plassert i grupper, som danner et symmetrisk bilde med to speilingslinjer. Bildet inneholder 21 elementer. Hentet fra vedlegg 2.

Oppgavetyperen *ikke-symmetrisk gruppert* var viktig å ha med som sammenligningsgrunnlag. Denne oppgavetyperen gjorde at vi kunne se på sammenhengen mellom den symmetriske plasseringen av gruppene og deltakernes estimering.



Figur 3.4: Eksempeloppgave, 21 ikke-symmetrisk gruppert

Dette bildet viser oppgave 38 i undersøkelsen. Prikkene er plassert i syv grupper på tre i hver. Bildet inneholder 21 elementer. Hentet fra vedlegg 2.

3.3.3 Oppvarmingsoppgaver

På starten av undersøkelsen fikk deltakerne fire oppvarmingsoppgaver, med én oppgave fra hver oppgavetype. Dette gjorde vi for å la deltakerne bli vant med stimultiden i oppgavene. Vi oppdaget i valideringen av den figurerte oppgavetyperen, at deltakerne ble overrasket over hvor kort periode oppgavene ble vist. Det førte til at deltakerne opplevde at de ikke klarte å svare godt på den første oppgaven. Vi ønsket ikke at dette oppmerksomhetsproblemet skulle svekke reliabiliteten til besvarelsene på første oppgave i undersøkelsen. Ved å legge inn oppvarmingsoppgaver fikk deltakerne erfare hvor raskt bildene dukket opp, uten at det påvirket resultatet. Derfor startet vi undersøkelsen med en oppvarmingsoppgave fra hver oppgavetype, for å forberede deltakerne på de ulike typene oppgaver de kunne møte.

3.3.4 Refleksjonsspørsmål

Gjennom vårt første forskningsspørsmål, *hvordan beskriver lærerstudenter selv at de estimerer*, ønsket vi å samle inn kvalitativ data. Dette ble gjort gjennom fire refleksjonsspørsmål i hver undersøkelse. Refleksjonsspørsmålene lød: «Beskriv, så detaljert som mulig, hvordan du tenkte på forrige oppgave». Hver deltaker fikk dette spørsmålet etter fire oppgaver, ett fra hver oppgavetype.

Oppgavene som hørte til refleksjonsspørsmålene, hadde like stor numerositet for hver deltaker. Det var tre ulike numerositeter deltakerne fikk refleksjonsspørsmål etter: 16, 21 eller 29. På denne måten fikk hver enkelt deltaker fortelle om sin opplevelse for hver av de forskjellige oppgavetyperne. Dette var viktig fordi vi ønsket et dypere innblikk i hvilke strategier deltakerne brukte for ulike strukturer. Vår kvalitative data skulle vise hvilke individuelle tilpasninger deltakerne gjorde, for å behandle ulikheten i strukturen.

Ulike deltakere fikk refleksjonsspørsmål på ulike numerositeter. De forskjellige numerositetene 16, 21 og 29, representerte henholdsvis en lav, en middels, og en høy numerositet. Formålet med spredningen var at vi kunne se om vi fikk forskjellige

rapporterte strategier for numerositeter med ulik størrelse. Av hensyn til oppgavens omfang valgte derimot å ikke fokusere på denne numerositetsforskjellen i analysen.

3.3.5 Oppsummering av innholdet i instrumentet

Spørreskjemaet vårt inneholdt totalt 64 kvikkbildeoppgaver. Fire av oppgavene var oppvarmingsspørsmål. Av de resterende 60, var det dermed 15 oppgaver fra hver av de fire ulike oppgavetyper. Disse 15 oppgavene hadde numerositetene 15 til 29. På denne måten fikk vi samlet inn data om ulike strategier, og for de ulike numerositetene vi ønsket. I tillegg hadde vi fire refleksjonsspørsmål for å samle inn deltakernes beskrivelser av egen estimering.

3.4 Beskrivelse av gjennomføring

3.4.1 Pilot

Før vi samlet inn data, gjennomførte vi en pilot. Der testet vi vårt oppgavebaserte spørreskjema. Vi fikk hjelp av seks medstudenter som alle gjennomførte undersøkelsen. Ulike medstudenter gjennomførte en pilot av ulike oppgaveskjemaer. Noen gjennomførte med refleksjonsspørsmål til numerositeten 16, noen til 21 og noen til 29. Fem av seks deltakere brukte mellom 15-20 minutter på å gjennomføre oppgaveskjemaet. Den siste deltakeren brukte 30 minutter. Grunnen til at denne deltakeren brukte dobbelt så lang tid, var at den skrev ned, tegnet opp og regnet i skriveboken sin. Det at deltakerne bruker hjelpemidler i forskjellig grad, kunne gi deltakerne ulike utgangspunkt for undersøkelsen. Derfor måtte vi presisere at deltakerne skulle svare så raskt og presist som mulig. Ellers ga piloten oss også annen viktig innsikt. Gjennom programmet fikk vi all data vi hadde planlagt. Vi fikk responstid, responser og svar på refleksjonsspørsmålene. Vi fikk se hvordan resultatene ble presentert, slik at vi kunne planlegge hvordan vi skulle behandle data fra undersøkelsen.

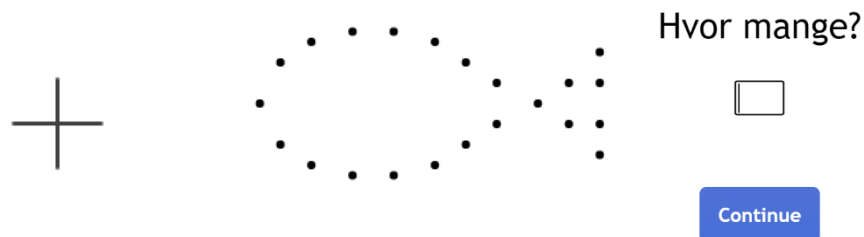
3.4.2 Deltakere

Undersøkelsen ble gjennomført av studenter ved NTNUs grunnskolelærerutdanning. Den ble gjennomført i syv forskjellige klasser, på forskjellige kull, med ulike fagkombinasjoner. Totalt samlet vi inn data fra 162 deltakere, med en gjennomsnittsalder på 22,06 år. Kjønnfordelingen på deltakerne var 36 menn, 125 kvinner og én valgte å ikke oppgi kjønn. Datainnsamlingen foregikk over en periode på to uker. Deltakerne var lærerstudenter på utdanningen til 1. - 7. trinn og 5. - 10. trinn. Felles for alle som deltok på undersøkelsen var at de har tatt matematikkdiraktiske fag ved universitetet. Dette sikrer at deltakerne har matematiske forutsetninger for funksjonene i den kognitive prosessen foreslått i estimering. Deltakerne hadde i ulik grad av kjennskap til kvikkbilder. Noen hadde kjennskap til kvikkbilder fra matematikkfag ved universitetet. Andre deltakere hadde aldri hørt om det før. På forhånd av undersøkelsen fikk studentene vite at vi forsket på estimering gjennom kvikkbildeoppgaver.

3.4.3 Eksperimentell prosedyre

Deltakerne satt i sine egne klasserom og brukte sine egne PC-er. De ble bedt om å gjennomføre undersøkelsene hver for seg, uten samarbeid. Deltakerne fikk beskjed om at de skulle estimere antall prikker i oppgaven. De fikk ikke vite intervallet antallet prikker befant seg innenfor. Før hver oppgave ble det vist et kryss på skjermen. Krysset var på skjermen i 1000 ms. Da krysset forsvant, dukket kvikkbildet opp på skjermen. Det ble vist i 200 ms. Etter kvikkbildet forsvant, kom det opp en svarboks på skjermen. Der fikk deltakerne skrive inn estimert numerositet. Det ble presisert at deltakerne skulle

svare så raskt og presist som mulig. Etter at deltakerne hadde skrevet inn estimert numerositet og trykket på enter, dukket krysset opp igjen. Da gjentok prosessen seg for neste oppgave. Illustrasjon av krysset, kvikkbildet og svarboksen finnes i figur 3.5. Imellom de 60 kvikkbildene fikk deltakerne fire refleksjonsoppgaver. Deltakerne svarte på alle kvikkbildeoppgavene og refleksjonsspørsmålene i løpet av ca. 20 minutter, uten pause.



Figur 3.5: Bilde av kryss, et eksempel på kvikkbilde og svarboks

Krysset ble vist i 1000 ms før ett av kvikkbildene ble vist i 200 ms. Etter dette kom svarboksen opp på skjermen, denne forsvant når deltakerne skrev inn sitt svar. Deretter gjentok prosessen seg for alle 64 kvikkbildene

3.5 Metode for analyse

I dette delkapittelet skal vi kort beskrive hvordan vi strukturerte rådataen fra undersøkelsen. Denne struktureringen ga oss ulike tabeller for kvantitative og kvalitative data. Analysen av kvantitative data tok for seg medianverdier på de ulike estimatene og responstidene. Analysen av kvalitative data fant strategier deltakerne brukte, gjennom induktiv koding. Til slutt beskriver vi hvordan sammenligning og triangulering av kvantitative og kvalitative data ble gjennomført.

3.5.1 Rådata

Det første steget i analysen var å rydde og organisere datasettet, slik at det var klart for videre analyse. Rådata fra undersøkelsen inneholdt deltakernes besvarelse og responstid. Hver deltaker ble også tildelt et deltakernummer. Ryddingen og organiseringen av datasettet resulterte i fem tabeller, tre tabeller for kvalitative data, og to for kvantitative. Først organiserte vi de kvalitative dataene. Her organiserte vi dataene i tre kvalitative tabeller. Disse inneholdt besvarelser på refleksjonsspørsmål etter oppgaver med 16 elementer, 21 elementer og 29 elementer. Hver av de kvalitative besvarelsene ble også knyttet til et deltakernummer og responstiden. For at vi senere kunne analysere de kvalitative resultatene opp mot de kvantitative resultatene. De kvantitative dataene ble organisert i to tabeller. Den ene tabellen viser hva deltakerne har svart, og den andre viser hvor lang tid de brukte. Alle besvarelser og responstider er knyttet til deltaker- og oppgavenummer.

3.5.2 Kvalitativ analyse

De kvalitative dataene ble samlet inn for å svare på forskningsspørsmålet: *Hvordan beskriver lærerstudenter selv at de estimerer?* Vi ville undersøke hvordan deltakerne selv beskrev at de estimerte, og trekke slutninger basert på deltakernes egne beskrivelser.

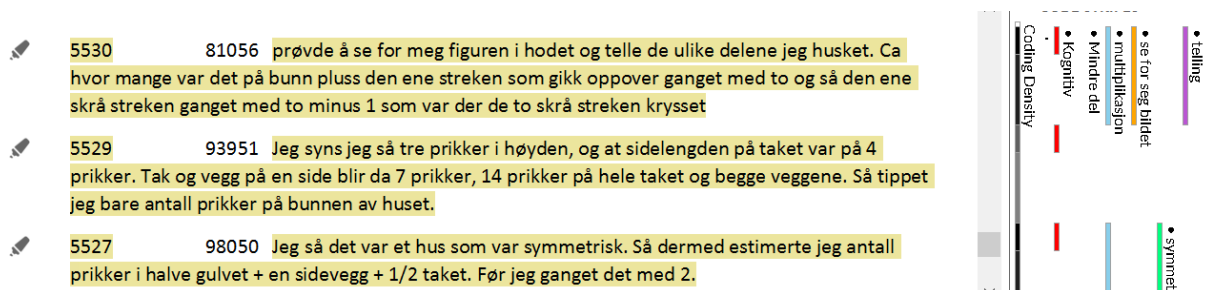
Derfor valgte vi en induktiv analyse. En induktiv analyse handler om å trekke slutninger ut fra observasjoner (Bryman, 2021).

Vår induktive analyse var inspirert av Charmaz (2006) tilnærming til grounded theory. I denne tilnærmingen analyserer man data ved å finne koder og kategorier på bakgrunn av disse. Koding er å bryte ned data i deler, for så å navngi dem. Kategorier har som mål om å representere et fenomen fra virkeligheten (Bryman, 2021).

Charmaz (2006) bruker en tre-steps tilnærming til å utvikle kategorier gjennom koding. Først gjennomføres det *initial koding*. Denne har som mål å gi et tidlig inntrykk av datamaterialet. Her er kodingen detaljert, og ofte kan hver linje i datamaterialet få en egen kode. Det er viktig at forskeren er åpen i møtet med datamaterialet (Bryman, et. al., 2021). Deretter gjennomføres en *fokusert koding*, som finner de mest fremtredende av de initiale kodene, og bruker dette til å gjennomgå større mengder av data (Thornberg og Charmaz, 2014). Her kan de initiale kodene slås sammen for å generere nye, mer fokuserte koder (Bryman, et. al., 2021). Til slutt en *teoretisk koding* som spesifiserer forholdet mellom de forskjellige kategoriene, og som trekker analysen i en teoretisk retning. I det siste steget kan forskeren innlemme idéer fra eksisterende litteratur (Charmaz, 2006).

Gjennom en induktiv metode, finnes det et ideal om koding helt uten påvirkning fra teori. Ren induktiv koding, er i prinsippet umulig (Kennedy, 2018). Det vil si at man ikke klarer å analysere data helt objektivt, kun ut fra det man finner i datasettet. Subjektiviteten, erfaringer og teoretisk kunnskap om temaet vil påvirke analysen. Vi har i denne oppgaven basert oss på intuitive og kognitive modeller for estimering. Det er denne teorien som kan ha påvirket oss da vi søkte etter koder, og da vi samlet kodene i kategorier.

For å analysere importerte vi deltakernes besvarelser inn i NVivo (QSR International Pty Ltd., utgitt i mars 2020), et verktøy for kvalitativ dataanalyse. Vi brukte funksjonene i programmet for å kode datamaterialet. Hver deltaker hadde svart på hvordan de kom frem til sine estimater. Disse besvarelsene resulterte i kodene våre. Enten førte svaret til opprettelsen av en ny kode, eller så ble det plassert i en eksisterende kode. Eksempel på hvordan kodingen kunne se ut i NVivo er vist i figur 3.6. Til venstre er deltakernes besvarelser. Bildet viser at besvarelsene som er kodet har blitt farget. Til høyre er et utvalg av koder de ulike besvarelsene inneholder.



Figur 3.6: Eksempel på koding i NVivo

Vi startet med en *initial koding* av datamaterialet. Her kodet vi datamaterialet hver for oss. Vi utforsket datamaterialet og fant beskrivelser av strategiene deltakerne brukte for å estimere. Disse fikk enkle og presise navn gjennom den initiale kodingen. Hver eneste besvarelse ble kodet, ofte med flere koder for hver besvarelse. I den *initiale kodingen*

gikk vi gjennom besvarelser fra alle oppgavetyper; Figurert, tilfeldig strukturert, symmetrisk gruppert og ikke-symmetrisk grupperte prikker. Dette gjorde vi for å få et innblikk i helheten av strategier før vi fokuserte kodingen.

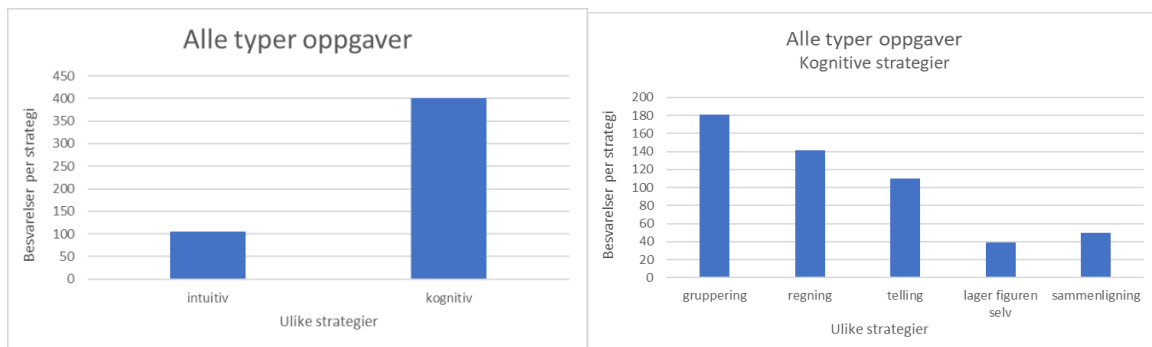
Det neste steget i analysen var *fokusert koding*. Her diskuterte vi hvilke koder som var mest gjennomgående og som pekte på deltakernes strategier for estimering. Disse kodene var grunnlaget for den resterende kodingen av datamaterialet. Her diskuterte vi hvilke koder som svarte på deltakernes strategi for estimering. Det var flere av kodene som ikke beskrev strategier for estimering. Disse handlet typisk om at deltakerne kommenterte på at de hadde skrevet inn feil tall, eller at de kommenterte hva som var vanskelig med oppgaven uten å si hva de selv gjorde. Disse besvarelsene kodet vi til *ikke svar på oppgaven* og var ikke i søkelyset gjennom den fokuserte kodingen. Det var kodene som beskrev deltakernes strategier vi var opptatt av.

Gjennom den *fokuserte kodingen* fant vi flere fellestrekk mellom ulike koder. Noen av kodene ble samlet til felles kategorier. For eksempel samlet vi flere lignende koder om gruppering. Gjennom den initiale kodingen fant vi kodene: *Delte opp i 3-ere, delte opp i 4-ere, delte opp i 5-ere, delte opp i grupper, og tok utgangspunkt i mindre del*. Alle disse kodene ble slått sammen til en felles kode, *gruppering*. Da gikk vi tilbake i datamaterialet, og kodet alle beskrivelsene som passet til *gruppering*.

Til sist gjennomførte vi den *teoretiske kodingen*. Her samlet vi de mest sentrale kodene vi hadde produsert i kategorier og laget en oversikt som viste sammenhengen mellom disse. Ved hjelp av idéer fra den eksisterende litteraturen om estimering, kom vi frem til en hierarkisk inndeling av kategoriene. I denne inndelingen var kategoriene *intuitive strategier* og *kognitive strategier* overordnet. *Intuitive strategier* sto for seg selv, men under *kognitive strategier* plasserte vi *gruppering, regning, telling, lager figuren selv, og sammenligning*.

Rammeverket for videre analyse av datamaterialet var de ulike modellene for estimering. Vi analyserte hvordan deltakernes strategier kunne peke på enten intuitive eller kognitive modeller for estimering. Vi så på intuitive modeller gjennom ANS-teori, eller kognitive modeller gjennom bruken av arbeidsminnet med kognitiv prosessering av bildet. Dette gjorde vi ved å se på hva strategiene gikk ut på, og hvor ofte de ulike strategiene forekom.

For å analysere strategiene, fremstilte vi antall besvarelser fra de ulike kategoriene i-seks søylediagram. Disse søylediagrammene viser hvor mange besvarelser de ulike kategoriene inneholdt. Det første diagrammet viser hvor mange intuitive og kognitive strategier vi fant. Det neste viser fordelingen av ulike kognitive strategier. Disse to søylediagrammene er vist i figur 3.7. De siste fire søylediagrammene viser hvilken sammenheng de ulike oppgavetyper har med strategiene deltakerne bruker for å estimere. På samme måte som i figur 3.7 ser vi på forskjellen av intuitive og kognitive strategier, og på fordelingen av de kognitive strategiene.



Figur 3.7: Søylediagram som viser fordelingen av deltakernes strategier.

3.5.3 Kvantitativ analyse

Kvantitative analyser er verktøy som er egnet for å se etter større sammenhenger i datasett. Navnet kvantitativ peker på at man forsøker å tallfeste virkeligheten. Fordelene med slike analyser er at resultatene egner seg for generalisering, og metoden er passende for deduktiv forskning, hvor man testet teorier (Bryman, et. al., 2021). I kvantitative analyser har man gjerne store datasett som viser forskjell mellom to eller flere variabler. Da ønsker man å teste forskjellen for å finne ut om den er statistisk signifikant. Om forskjellen er signifikant eller ikke sier ikke noe om hvor stor forskjellen er. Signifikansen sier hvor sikker man er på at forskjellen man har funnet kan generaliseres til resten av populasjonen (Bryman, et. al., 2021). Det finnes mange ulike tester man kan bruke for å sjekke om forskjellen man har funnet er signifikant. Her vil vi først gå gjennom to ulike t -tester og en ANOVA test.

En t -test er designet for å se om forskjellen mellom to variabler er signifikant. For t -tester skiller man mellom tester som egner seg for parede variabler og uavhengige variabler. Om to variabler er parede betyr dette at variablene er hentet fra samme utvalg, og at hver variabel inneholder datapunkter som parvis hører sammen (Field, 2013). Et eksempel på et slikt datasett kan være før- og ettertester på deltakere som har gjennomført et bestemt treningsprogram. Da vil resultatet av testen gjenspeile hvor sannsynlig det er at andre ville oppnå samme resultater om de gjennomførte samme treningsprogram. For å teste to slike variabler kan man bruke en Paired sample t -test.

Om variablene derimot er uavhengige av hverandre betyr det at dataene fra variablene ikke er hentet fra samme deltakere. For uavhengige variabler trenger det heller ikke være like mange datapunkter i hver variabel. Et eksempel på et slikt datasett kan være to ulike utvalg som gjennomfører to ulike treningsprogram. Da vil testen vise om det er en reell forskjell mellom resultatene til treningsprogrammene. For å teste slike variabler kan man bruke en independent variable t -test (Field, 2013).

Ved å gjennomføre en t -test får man oppgitt en p -verdi, det er den som sier om forskjellen er statistisk signifikant. I sosial forskning er det vanlig å si at et resultat er statistisk signifikant om p -verdien er lavere enn 0,05 (Bryman, et. al., 2021). P -verdien er en tallfestet sannsynlighet for at man vil finne den samme forskjellen, selv om den ikke finnes i hele populasjonen. Dersom p -verdien er 0,05 betyr det at 5 av 100 ganger vil man finne den forskjellen som resultatet viser, selv om forskjellen ikke finnes i resten av populasjonen.

Med flere enn to variabler kan man bruke en ANOVA test. I prinsippet er en ANOVA en måte å gjennomføre mange t -test mellom alle variablene (Field, 2013). Testen gir deg også en F -verdi som forteller om det er sannsynlig at det er forskjell mellom

gjennomsnittet i noen av variablene som ble testet. Problemet med denne verdien er at den ikke forteller oss hvilke variabler det er signifikant forskjell mellom. Alle testene vi har nevnt til nå er parametriske tester, som betyr at testene gjør noen antagelser om utvalget. Blant annet antar testene at utvalgene er normalfordelt. For å finne ut om utvalgene er normalfordelt kan man gjennomføre en Kolmogorov-Smirnov test (Field, 2013). Prinsippet bak denne testen er at utvalget blir sammenlignet med et normalfordelt utvalg. Dersom p -verdien for testen er under 0,05, viser det at det er en signifikant forskjell mellom utvalget som testes og det normalfordelte utvalget. Da er det ikke sannsynlig at utvalget som testes er normalfordelt.

For å teste sammenhengen mellom to variabler som ikke er normalfordelte, må man bruke en ikke-parametrisk test (Field, 2013). Ikke-parametriske tester antar ikke at utvalgene er normalfordelt, men kan likevel teste signifikans mellom to variabler. En ikke-parametrisk versjon av Paired sample t -test er Wilcoxon signed rank t -test. En ikke-parametrisk versjon av independent variable t -test er Mann-Whitney U-test (Field, 2013). Og en ikke-parametrisk versjon av en ANOVA-test er Kruskal-Wallis H-test (Field, 2013). En Kruskal-Wallis H-test gjennomfører derimot ikke en t -test mellom alle variablene. Dersom man ønsker å se sammenhengen mellom alle variablene kan man manuelt gjennomføre Mann-Whitney U-tester mellom alle variablene. Dermed forteller Kruskal-Wallis H-testen oss kun om det finnes en signifikant forskjell mellom noen av variablene, men ikke mellom hvilke variabler den er (Field, 2013).

Den kvantitative dataen vi samlet inn inneholdt responser og responstider fra deltakernes besvarelser. Analysen av den kvantitative dataen gikk ut på å strukturere dataene slik at vi kunne se om det var noen forskjeller i responser eller responstider. Struktureringen av datamaterialet foregikk i Excel, der ble responser og responstider strukturert slik at de som tilhørte samme oppgave sto i en kolonne. Denne oversikten brukte vi for å regne ut medianen av responser og responstider på hver oppgave. Vi brukte medianen fordi den gjenspeiler ekstreme verdier i mindre grad enn gjennomsnittet gjør. Vi har også sett andre studier som gjør det samme (Ciccione og Dehaene, 2020). I våre responser og responstider fant vi en del ekstreme verdier, som vi ikke ønsker skal gi en kunstig fremstilling av resultatene. Vi lagde deretter diagrammer i Excel for å visualisere medianene. Diagrammene for responser inneholder også en identitetslinje som viser det korrekte svaret på hver oppgave. På den måten kan vi sammenligne besvarelsene fra de ulike oppgavetyper, og se sammenhengen mellom ulike strukturer og deltakernes estimering. Dette er en vanlig måte å fremstille resultater på i litteraturen (f.eks., Ciccione og Dehaene, 2020; Kaufmann, et. el., 1949; Mandel og Shebo, 1982; Starkey og McCandliss, 2014).

Vi måtte teste om forskjellen vi fant mellom oppgavetyper i responser og responstider var statistisk signifikante. Analysen av de kvantitative dataene ble gjennomført med programmet SPSS 28 (IBM corp., utgitt i 2021). For alle utvalgene som ble testet brukte vi en Kolmogorov-Smirnov test, for å sjekke om vi skulle bruke parametriske eller ikke-parametriske t -tester (Field, 2013), utvalgene var ikke-parametriske. Responsene og responstidene var hentet fra samme deltakere og fra oppgaver med samme numerositet, dermed var de ulike oppgavetyper parede variabler. Derfor brukte vi Wilcoxon signed-rank t -test. For å besvare forskningsspørsmålene våre sammenlignet vi *figurerte oppgaver med tilfeldig strukturerte* og *symmetrisk grupperte* med *ikke-symmetrisk grupperte*. For begge parene med oppgavetyper, gjennomførte vi Wilcoxon signed-rank t -test på både responser og responstider.

3.5.4 Sammenligning og triangulering av kvantitative og kvalitative data

Sammenligning og triangulering av kvalitative og kvantitative data, gjør at informasjonen fra hvert datasett vil utfylle informasjonen fra det andre (Bryman, et. al., 2021). De kvantitative dataene gir oss ikke grunnlag for å si hvorfor noen deltakere scorer bedre enn andre. Dataene forteller oss hvilke strategier deltakerne benyttet, men ikke noe om hvor godt strategiene fungerte. Sammen kan kvantitative og kvalitative data utfylle hverandre og gi oss et mer komplett bilde gjennom sammenligning. Triangulering handler om å utvikle beskrivelser basert på flere sammenfallende datakilder. Dette kan brukes til å bygge en sammenhengende begrunnelse for disse beskrivelsene (Creswell og Creswell, 2018).

Vi ønsket å sammenligne kvantitative og kvalitative data for å vise et mer utfyllende bilde av estimering. Besvarelsene fra refleksjonsspørsmålene ga oss kategorier for hvilke strategier som ble brukt. Vi fikk en oversikt over hvilke deltakere som brukte *intuitive* og *kognitive* strategier. Deretter kunne vi finne responstiden til deltakerne som brukte *intuitive* og *kognitive* strategier, og sammenligne strategienes responstider med hverandre. For å gjøre dette sammenlignet vi responstider mellom *intuitive* og *kognitive* strategier for alle oppgavetyper. I likhet med analysen av alle responstider satt vi *figurerte mot tilfeldig strukturerte og symmetrisk grupperte mot ikke-symmetrisk grupperte*. Før vi kunne se om forskjellene mellom strategiene var signifikant, måtte vi se om utvalget var normalfordelt. For å gjøre dette utførte vi en Kolmogorov-Smirnov test, utvalget var ikke normalfordelt. For å se om forskjellen i responstid mellom *intuitive* og *kognitive* strategier var signifikant, brukte vi en Mann-Whitney U-test.

Vi ønsket også å triangulere responstiden med underkategorier av strategiene. Dermed triangulerte vi responstider med strategiene: *Gruppering, regning, telling, lager figurene selv, sammenligning og intuitive*. Trianguleringen undersøkte om strategiene vi kategoriserte og responstid sammenfalt. Høy responstid vil indikere mer omfattende kognitive prosesser for å komme frem til et estimat. Dersom responstidene er høyere for de kognitive strategiene, styrker dette grunnlaget for å si at en kognitiv prosess har funnet sted. Før vi kunne se om forskjellene mellom de ulike strategiene var signifikant, måtte vi se om utvalget var normalfordelt. For å gjøre dette utførte vi en Kolmogorov-Smirnov test og vi fant at utvalget ikke var normalfordelt. For å avgjøre om forskjellene i responstidene som tilhørte strategiene er signifikante, benyttet vi en Kruskal-Wallis H-test. Vi fant at det var forskjell i responstid mellom strategier. Testen forteller oss kun om det er en signifikant forskjell mellom noen av strategiene, ikke hvilke strategier det er forskjell mellom.

Ved bruk av triangulering og sammenligning av kvalitative og kvantitative data, har vi styrket og utvidet informasjonen fra datasettet. Det har gitt oss et bedre grunnlag for å vurdere hva våre funn sier. Videre har analysen tydeliggjort hvordan datamaterialet besvarer forskningsspørsmålene våre. Dette har gitt oss grunnlag for å besvare om det er sammenheng mellom strukturering i kvikkbilder og estimering.

3.6 Validitet og reliabilitet

I dette delkapittelet vil vi redegjøre for validiteten og reliabiliteten til forskningen vår. Vi vil beskrive hvilke grep vi har gjort for å styrke validiteten og reliabiliteten i undersøkelsen. Dette vil vi gjøre ved å redegjøre for konkrete handlinger som ble gjort, og aspekter ved datamaterialet som styrker validiteten og reliabiliteten. Videre vil vi

legge frem et kritisk syn på egen forskning, og påpeke hva som svekker forskningens validitet og reliabilitet.

3.6.1 Kvalitativ del

3.6.1.1 Reliabilitet

Reliabilitet i kvalitativ forskning handler om at ulike forskere i ulike prosjekter kan ha en konsekvent tilnærming til forskningen (Creswell og Creswell, 2018). En måte å sikre forskningens reliabilitet på, er å sjekke transkripsjoner for å sikre at det ikke har skjedd noen åpenbare feil under transkriberingen. Feil under transkribering vil svekke oppgavens reliabilitet (Creswell og Creswell, 2018). Kryssjekking av koder som er utviklet av forskjellige forskere, er en strategi for å øke forskningens reliabilitet. Dersom forskere utvikler koder hver for seg, bør man sammenligne kodene (Creswell og Creswell, 2018). Det er også viktig å passe på at kodene ikke sklir ut og endres. Kodenes betydning må forbli den samme gjennom hele analysen. Dette kan man sikre ved å skrive ned definisjoner på de ulike kodene (Creswell og Creswell, 2018).

Våre kvalitative data er ikke et transkript. Det betyr at det ikke kan ha skjedd mistolkninger i transkripsjonen, fordi vi analyserte tekst som deltakerne selv hadde skrevet. Likevel var det mulig at besvarelsene vi analyserte kunne tilhøre feil deltaker. Hver person hadde svar på fire kvalitative spørsmål. Det var viktig at disse svarene tilhørte riktig person. Dermed utformet vi tabellene med deltakernes besvarelser tilhørende deltakernummer. Utformingen av tabellene vises i figur 3.8

Worker ID	RT, 21.1	Text 1, 21.1
5642	38582	Prøvde å se på mengden av prikker og hvordan de var formert.
5640	119870	Jeg prøvde å se det for meg i hodet
5639	49514	Prøvde å huske mønsteret, for å resonnerer med fram til et svar
5638	9847	Jeg så det for meg i hodet og telte
5637	29271	Jeg så det for meg i hodet å gjettet

Figur 3.8: Skjerm bilde av deltakernes egne beskrivelser

Skjerm bilde fra Excel av deltakernes beskrivelser av egne estimering. Hentet fra figurerte oppgaver med 21 prikker.

Vi var åpne for at det kunne ha skjedd en feil i hvilke besvarelser som hørte til hvilke deltakernummer. Derfor gjennomførte vi stikkprøver i tabellene, for å undersøke om deltakernummer tilhørte riktig besvarelse. Dette gjorde vi ved å se på dataene i tabellene vi hadde laget. For eksempel så vi i tabellen fra figur 3.8, på deltaker 5642. Vi sjekket om deltaker 5642 hørte til akkurat den samme besvarelsen i rådataene av resultatene.

Gjennom kryssjekking sammenlignet vi kodene som ble utviklet hver for oss. Denne prosessen baserte seg på at vi er to medforfattere av denne oppgaven. Den *initiale* kodingen gjorde vi hver for oss, uavhengig av hverandre. Etter å ha kodet én tredel av oppgaven, gikk vi sammen for å kryssjekke og diskutere hvilke koder vi burde fokusere på. Spørsmål vi stilte var: «Har vi de samme kodene, og hvilke koder kan vi slå sammen til den *fokuserte* kodingen?». For eksempel slo vi sammen mange *initiale* koder til en fokusert kode som vi kalte *gruppering*. Denne koden definerte vi som: alle besvarelsene som nevner deler av helheten, mindre del, eller spesifiserer dette gjennom ord som del, gruppe, pulje eller synonymer for disse. Alle besvarelsene som passet til denne

beskrivelsen ble kodet til *gruppering*. Det at vi skrev ned definisjoner for de ulike kodene, sikret at kodene ikke endret betydning i løpet av prosessen.

3.6.1.2 Validitet

Validitet i kvalitativ forskning handler om at forskeren sjekker om funnene er nøyaktige (Creswell og Cresswell, 2018). Dette gjøres ved bruk av ulike prosedyrer. De prosedyrene vi har valgt å fokusere på for validiteten av våre kvalitative data er: Triangulering av ulike datakilder, tydeliggjøring av inhabiliteten vi som forskere bringer med oss i forskningen, og «peer debriefing». Triangulering av ulike datakilder kan gi et mer helhetlig bilde av virkeligheten. Dersom man utvikler kategorier på bakgrunn av flere sammenfallende datakilder, vil dette styrke oppgavens validitet (Creswell og Creswell, 2018). Å tydeliggjøre forskerens inhabilitet med et åpent og ærlig narrativ, kan øke oppgavens validitet (Cresswell og Cresswell, 2018). Til sist handler «peer debriefing» om å få et syn på oppgaven fra en annen forsker. Denne personen kan gjennomgå og stille spørsmål ved det som ikke resonnerer med andre, for å øke oppgavens validitet (Creswell og Creswell, 2018)

For å øke oppgavens validitet triangulerte vi ulike datakilder. Gjennom vår kvalitative analyse fant vi strategier for estimering, disse gir et bilde på hvordan estimering skjer. Disse besvarelsene kunne vi triangulere opp mot de kvantitative dataene våre. Vi gjorde dette gjennom å lage boksplokk av responstidene for de ulike estimeringsstrategiene. Vi antok at flere ulike strategier var kognitive. Vi antok også at høyere responstid tydet på en kognitiv strategi for estimering. Gjennom de aller fleste kategoriene fant vi forventede responstider, og at de ulike datakildene var sammenfallende. Det vi kategoriserte som kognitive strategier tok lengre tid. Allikevel fant vi responstider i kategorien *sammenligning* som ikke fulgte et forventet mønster. Dermed fant vi gjennom trianguleringen av de kvalitative kategoriene og de kvantitative responstidene et funn som hver enkelt av datatypene ikke kunne vist på egenhånd.

Vi gikk inn i arbeidet med denne oppgaven med en tro på at en kognitiv modell for estimering, ville gi en rikere matematikkundervisning. Dermed hadde vi en skjevhet som forskere i denne oppgaven. Av de undervisningsoppleggene vi beskrev i teorikapittelet, er det opplegget med forankring i en kognitiv modell som har den tydeligste koblingen til matematikkfaget. Her dreier undervisningen seg om matematiske konsepter som regneartene og egenskaper ved disse. Dette mener vi gjør at estimeringsundervisning er mer aktuelt for bruk i skolen. Dermed ønsket vi resultater som pekte på en kognitiv modell for estimering.

Til sist har vi også brukt strategien «peer debriefing» for å sikre validiteten til de kvalitative resultatene. Vi ønsket å sikre at våre kvalitative resultater kunne gi oss svar på forskningsspørsmålet: *Hvordan beskriver lærerstudenter selv at de estimerer?* For å få til dette har veilederen vår sett gjennom og stilt spørsmål ved måten vi samlet inn kvalitativ data. På denne måten brukte vi innspill fra veilederen vår, for å sikre at den kvalitative innsamlingen resonnerer med andre.

3.6.2 Kvantitativ del

3.6.2.1 Reliabilitet

I kvantitative studier handler reliabilitet i stor grad om hvorvidt man får samme resultater om man gjentar studiet (Bryman, et. al., 2021). Det er flere måter å sjekke dette på, en måte er å vurdere forskningens stabilitet. Dette forteller oss om slike

resultater kan oppnås med samme metode i en annen situasjon (Bryman, et. al., 2021). En annen måte å undersøke kvantitativ reliabilitet på er «inter-rater reliabilitet», som handler om enighet ved tolkninger mellom observatører (Bryman, et. al., 2021).

Vi tok vare på forskningens stabilitet ved å designe oppgavetyper *tilfeldig strukturert*. Denne oppgavetyper gjorde det mulig å sammenligne våre resultater med tidligere forskning på temaet. Mye tidligere forskning har sett på estimering av store ustrukturerte mengder, slik som i vår *tilfeldig strukturert* oppgavetype (f.eks., Kaufmann, et. al., 1949; Mandler og Shebo, 1982). Dersom resultatene våre i denne oppgavetyper stemmer overens med tidligere resultater i lignende forskning, viser dette stabilitet i vår undersøkelse.

For å ta vare på vår forsknings «inter-rater reliabilitet», har vi gjennomført den kvantitative analysen etter standardiserte metoder. Våre kvantitative resultater inneholder kun tall, og disse skal analyseres ved metoder som kolmogorov-Smirnov test, Mann-Whitney U-test, Wilcoxon signed rank H-test og Kruskal-Wallis H-test. Dermed er det lite subjektivitet involvert i fremstilling av kvantitative data i vår oppgave.

3.6.2.2 Validitet

Validitet i kvantitative studier sier hvor godt forskningen faktisk måler det den ønsker å måle (Bryman, et. al., 2021). Validiteten i den kvantitative delen av vår forskning hviler i stor grad på designet av datainnsamlingsverktøyet. Designet av instrumentet og hensyn som ble gjort i designet av den, skal vi redegjøre nøye for i delkapittel 3.6.3. Her beskriver vi hva vi ønsker at ulike deler av instrumentet skal måle, og hvorfor det måler akkurat dette. For å sørge for at instrumentet skulle klare å måle det vi ønsket, har vi hatt løpende kommunikasjon med veilederen vår under designet. Dette gir instrumentet vårt «face validity» (Bryman, et. al., 2021).

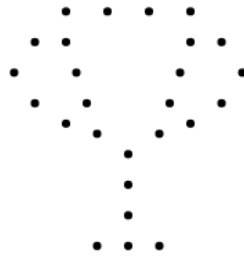
3.6.3 Reliabilitet og validitet i design av instrumentet

3.6.3.1 Validering av lett gjenkjennelige figurer

Hvorvidt noe er gjenkjennelig er subjektivt, derfor ønsket vi å forsikre oss om at vår *figurerte* oppgavetype inneholdt lett gjenkjennelige figurer. Premisset for oppgavetyper var nettopp dette, at figurene skulle være lett gjenkjennelige. Selv om vi vurderte at motivet for figuren var gjenkjennelig, kunne vi ikke garantere at kvaliteten på bildet var god nok til at alle kunne kjenne igjen figuren. Dermed hadde vi et behov for å teste figurene, før vi bestemte om de var gode nok til å brukes i undersøkelsen. Dette forsøkte vi å validere ved å teste de opprinnelige 15 bildene våre på åtte lærerstudenter. Studentene fikk se én figur av gangen i 100 msek. De fikk vite at det dukket opp figurer på skjermen, og at deres oppgave var å si om de gjenkjente en figur i prikkene. Vi satt sammen med deltakerne og noterte oss hvilke figurer deltakerne kjente igjen, og hvilke de ikke kjente igjen. Dersom flere enn én av deltakerne ikke gjenkjente figuren i bildet, ble bildet forkastet. Deretter laget vi nye utkast på bilder som vi testet på neste deltaker. Dette ble gjentatt frem til alle kvikkbildene i oppgavetyper *figurert* kunne anses som lett gjenkjennelige.

Underveis ble en pokal, kopp, kjele, og et smilefjes forkastet. Dette var figurer flere enn én person hadde problemer med å kjenne igjen. I figur 3.9 vises eksempelet med pokalen vi hadde laget. Denne figuren var det tre av deltakerne som ikke klarte å gjenkjenne som en pokal. Dermed måtte pokalen forkastes, og en ny figur ble designet

og validert. Til slutt satt vi igjen med 15 bilder som vi kunne vurdere som lett gjenkjennelige. Eksempler fra disse bildene vises i figur 3.10.



Figur 3.9: Figur som ikke ble validert

Figuren skal forestille en pokal, og har 26 prikker.



Figur 3.10: Fire av kvikkbildene vi designet i oppgavetyperen figurert

3.6.3.2 Oppgavenes rekkefølge

Vi bestemte oss for at oppgavene skulle komme i samme rekkefølge for alle deltakerne. Men rekkefølgen skulle være stokket, slik at de forskjellige oppgavetyperne og størrelsene ble presentert om hverandre. Vi vet at en strategi for estimering er sammenligning med tidligere oppgaver (Lüwel og Verschaffel, 2008). For at vi skulle godkjenne en rekkefølge hadde vi en føring om at maks to etterfølgende oppgaver kunne være fra samme oppgavetype. Vi gjorde dette for at deltakerne skulle ha like sammenligningsmuligheter på alle oppgavene. Hadde det for eksempel kommet fem bilder med tilfeldig plasserte prikker på rad, ville man lettere kunne sammenligne med de fire foregående. Da ville man hatt ulike forutsetninger for å svare på den første oppgaven som den femte i rekken. For å stokke rekkefølgen, brukte vi et java-script til å generere tilfeldige rekkefølger. Vi gikk gjennom fire forskjellige stokkete rekkefølger før vi fant et som tilfredstilte våre krav.

3.6.3.3 Rapportering av resultater

Vi måtte validere rapporteringsmetoden for å forsikre oss om at instrumentet samlet de dataene det skulle. Vi brukte dataprogrammet JATOS (Lange, et.al., 2015) for å distribuere spørreskjemaet og samle resultater. Begrunnelsen for å velge JATOS, var at data som ble samlet inn kun ble lagret på en NTNU-server administrert av forskningsgruppen dette prosjektet er en del av. Programmet ga oss resultater som respons og responstid. For å være sikker på at resultatene programmet rapporterte var faktiske, gjennomførte vi tester på oss selv. Gjennom disse testene fant vi at den numerositeten deltagerne svarte for hver oppgave, ble riktig rapportert i resultatet. Der ble riktig tall rapportert til riktig oppgave. Vi testet også rapporteringen av responstid.

Her gjennomførte vi tester med stoppeklokke. Da fant vi at målingen av responstiden startet i det svarboksen dukket opp på skjermen.

3.6.4 Metodekritikk

Metoden brukt i denne oppgaven er sterkt inspirert av andre studier i fagfeltet (f. eks, Ciccione og Dehaene, 2020; Mandler og Shabo, 1982; Starkey og McCandliss, 2014). Bruk av kvikkbildeoppgaver er en anerkjent metode for å se på estimering. Deler av metoden som strukturering i grupper, valg av stimulitid og fremstilling av grafer for median er replikert fra andre studier. Gruppestrukturer og stimulitid er inspirert av Ciccione og Dehaene (2020), mens den grafiske fremstillingen brukes av store deler av estimeringslitteraturen (f.eks., Ciccione og Dehaene, 2020; Kaufmann, et. al., 1949; Mandler og Shebo, 1982). Dette er likevel ikke tilfellet for hele metoden. Fokuset i oppgaven ligger innenfor en lite utforsket nisje, strukturering av kvikkbilder med store numerositeter. Dermed er deler av metoden vanskelig å sammenligne med tidligere forskning, som for eksempel lett gjenkjennelige figurer eller symmetri. Denne manglende muligheten til å sammenligne deler av metoden med tidligere forskning vil svekke vår validitet og reliabilitet.

Deltakernes omgivelser var i liten grad kontrollert under gjennomføringen av undersøkelsen. Deltakerne satt i sine egne klasserom og brukte sine egne PCer. De ble bedt om å ikke samarbeide, og undersøkelsene ble gjennomført stille og rolig. Konsekvensen av dette er at det er lite trolig at alle deltakere møtte oppgavene med likt utgangspunkt. Noen satt tettere til andre deltakere enn andre, avstanden til skjermen var ulik og en lyder fra klasserommet kunne forstyrre akkurat idet et kvikkbilde kom på skjermen. Som en følge av dette kan det være enkelte avvik i datasettet som ikke reflekterer deltakernes estimering på sitt beste. Dette er ikke et problem som gjør dataen vår ugyldig, men heller en faktor vi må være klar over i analysen av datamaterialet.

3.7 Etikk

Forskningen i denne masteroppgaven er gjort med utgangspunkt i retningslinjene til den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH). Blant annet peker disse retningslinjene på hensynet man må ha til deltakere i forskning (NESH, 2021). Her tok vi flere spesielle avveininger for å ivareta deltakernes anonymitet, og for å sikre at deltakelse var informert og frivillig.

Samtykkeskjemaet var det første som møtte deltakerne i vår undersøkelse. Der ble deltakerne informert om at NTNU var ansvarlig databehandler, hvilke data vi samlet inn, og hva deres deltakelse innebar. For å starte på undersøkelsen måtte deltakerne huke av for deres samtykke. Deltakerne ble informert om at det var helt frivillig å delta, og at de kunne trekke seg fra undersøkelsen på et hvilket som helst tidspunkt. Frivillig deltakelse ble både informert om muntlig på forhånd, og presisert skriftlig i samtykkeskjemaet. Det var flere av deltakerne som trakk seg underveis. De startet, men fullførte ikke vårt oppgavebaserte spørreskjema. Samtykkeskjemaet vises i vedlegget til denne oppgaven.

Dataen ble samlet inn gjennom programmet JATOS. Dette sikret at data kun ble lagret på NTNU-servere. I tillegg var all data som programmet lagrer anonym. Utenom besvarelsen og responstid, ble skjerminnstillinger, operativsystem, nettleser, alder og kjønn samlet inn. Dette ble koblet sammen med et deltakernummer. Deltakernummeret var vår måte å navngi de forskjellige besvarelsene med et tall. Hverken deltakernummer, besvarelsene eller resterende data er i dette tilfellet nok til å gjenkjenne ulike deltakere i våre resultater.

Denne oppgaven er en del av et større prosjekt ved Instituttet for Lærerutdanning ved NTNU. Dette prosjektet har godkjenning fra Norsk senter for forskningsdata (NSD), til å samle inn dataene vi gjør i denne oppgaven.

3.8 Oppsummering

I dette metodekapittelet startet vi med å beskrive det pragmatiske paradigmet vår forskning er forankret i. Vi undersøkte både deltakernes subjektive opplevelser av estimering, og generelle trekk ved estimeringen. Vår mixed metode hadde et konvergent parallell design. Vi samlet inn de kvantitative og kvalitative dataene samtidig, og analyserte disse samtidig.

Vi har gjort rede for utformingen av datainnsamlingsinstrumentet. Instrumentet har 68 oppgaver, fire oppvarmingsspørsmål, fire refleksjonsspørsmål og 60 kvikkbildeoppgaver, delt i fire oppgavetyper. Målet med oppgavetyperne var å sammenligne lett gjenkjennelige figurer med tilfeldige strukturer, og sammenligne symmetriske med ikke-symmetriske grupper. Refleksjonsspørsmålene lot oss se hvilke strategier deltakerne benyttet. Deretter kunne vi sammenligne strategiene med kvantitative data, og se sammenhengen mellom strategier og estimeringer. Videre beskrev vi hvordan datainnsamlingen foregikk. Vi samlet inn data fra studenter ved lærerutdanningen på NTNU, som alle hadde eller hadde hatt matematikdidaktiske fag ved universitetet.

Vi forklarte hvordan analysemetoden i oppgaven skulle foregå. Vi har analysert og testet signifikans av de kvantitative dataene i SPSS, for å sammenligne medianen av responsen og responstiden. Vi analyserte kvalitative data med induktiv metode for at analysen skulle beskrive datamaterialets innhold. Videre beskrev vi hvordan vi hadde sammenlignet funn fra de kvalitative dataene med de kvantitative. Slik ville funn fra begge datasettene utfylle hverandre og gi et mer komplett bilde av deltakernes estimering.

Vi gjorde flere grep i utformingen av datainnsamlingsinstrumentet, for å styrke dens reliabilitet og validitet. Vurderinger om kvantitativ reliabilitet så på forskningens stabilitet og inter-rater reliabilitet. Den kvalitative reliabiliteten omhandler korrekt transkribering og kryssjekking av koder. For kvalitativ validitet brukte vi triangulering, tydeliggjøring av forskerens inhabilitet og «peer debriefing». Vi fortalte videre om svakheter med metoden.

Da vi samlet inn og behandlet data, måtte vi ta flere ulike etiske hensyn. Vi har fulgt retningslinjer fra NESH, brukt samtykkeskjema, samlet anonyme data på NTNU-servere, og forskningen er søkt til NSD.

4 Analyse og resultat

Formålet med denne oppgaven er å undersøke om estimering er intuitivt eller kognitivt. Dette vil legge føringer for hvordan vi gjennomfører undervisning med estimering. For å svare på oppgavens formål, utformet vi problemstillingen: *Vil lærerstudenter estimere intuitivt eller kognitivt, i estimeringsoppgaver med symmetriske gruppestrukturer og lett gjenkjennelige mønstre*. I dette kapittelet skal vi presentere resultater fra analysen vi har gjort for å besvare problemstillingen. Resultatene vi analyserte er hentet fra 162 deltakere, og inneholder responser, responstider og rapporterte strategier på 60 kvikkbildeoppgaver, delt i fire oppgavetyper.

4.1 Kvalitative resultater

Et av forskningsspørsmålene våre var: *Hvordan beskriver lærerstudenter selv at de estimerer?* Få forskere har spurt personer hvordan de selv mener at de estimerer. Derfor samlet vi inn data hvor deltakere selv fikk beskrive hvordan de kom frem til sine estimater. For å analysere deltakernes egne beskrivelser, har vi brukt induktiv koding inspirert av Charmaz sin tilnærming til grounded theory (Bryman, et. al. 2021). Dette ga oss kategorier som vi senere tolket opp mot litteraturen for å finne ut om strategiene var *kognitive* eller *intuitive*.

I dette delkapittelet skal vi gjennomgå strategiene deltakerne selv rapporterte at de brukte for å estimerte i vår datainnsamling. Hver og en deltaker redegjorde for sin strategi til fire forskjellige oppgaver. En av hver type. Totalt hadde vi 162 deltakere, og dermed 648 beskrivelser fra deltakerne. Av disse var det 131 besvarelser som ikke ble kodet til en spesifikk strategi. Enten fordi de ikke svarte på spørsmålet i det hele tatt, og ble kodet til eller fordi svaret deres ikke var spesifikt for oppgaven det hørte til. Disse besvarelsene ble kodet til *ikke svar på oppgaven*. Etter at denne kategorien ble fjernet, sto igjen med 517 besvarelser som hver ble kategorisert i ulike strategier.

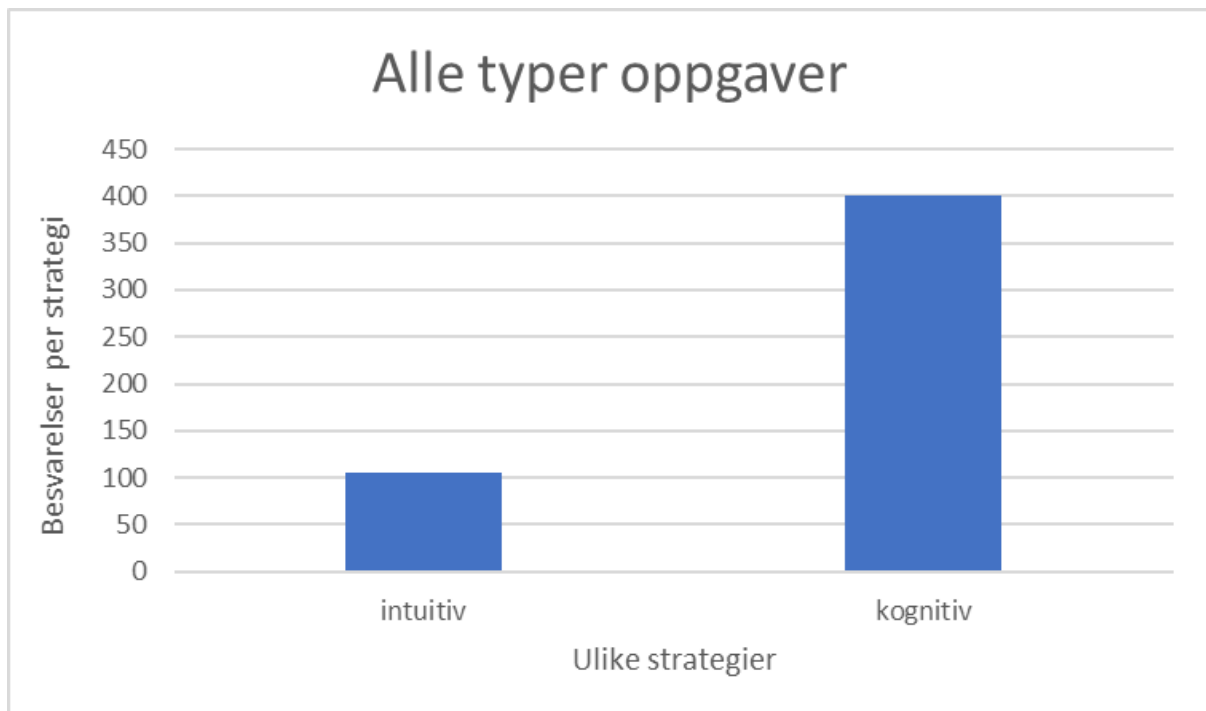
4.1.1 *Intuitive* og *kognitive* strategier

I teorien beskrev vi forskjellige modeller for hvordan man estimerer. En modell som beskriver intuitive systemer i hjernen og en som beskriver ulike kognitive strategier for estimering. Vi ønsket å finne ut hvilken av disse modellene som stemmer for estimering. I vår analyse av deltakernes egne besvarelser fant vi klart flest *kognitive* strategier for estimering.

I figur 4.1 vises fordelingen av *intuitive* og *kognitive* strategier. Det var 106 *intuitive* strategier og 401 *kognitive* strategier. De *intuitive* og *kognitive* strategiene utelukket hverandre. Dersom en strategi ble kategorisert til å være *intuitiv* kunne den ikke være *kognitiv*. Enten så ble det beskrevet et intuitivt estimat, eller så måtte kvikkbildet prosesseres kognitivt. Strategiene i kategorien *kognitiv* ble kategorisert i ulike kognitive strategier: *gruppering, regning, telling, lager figuren selv, og sammenligning*.

Det var totalt 10 besvarelser vi ikke klarte å kategorisere som hverken *intuitive* eller *kognitive*. Disse besvarelsene var ikke tydelige nok på om de brukte intuisjon eller kognitive prosesser for å estimere kvikkbildene. Det var den kognitive strategien *sammenligning*, som i noen beskrivelser ble vanskelig å skille fra en *intuitiv* strategi.

Dette kommer vi tilbake til når vi skal beskrive og eksemplifisere deltakernes beskrivelser fra denne kategorien, i delkapittel 4.1.3.



Figur 4.1: Søylediagram for intuitive og kognitive strategier for alle oppgavene

4.1.2 Beskrivelse av *intuitive* strategier

Totalt ble 106 besvarelser kategorisert som *intuitive*. De fleste av disse var korte forklaringer som på en eller annen måte fastslo at estimeringen var intuitiv. I tabell 4.1 har vi vist flere forskjellige besvarelser i den *intuitive* kategorien. De tre første sitatene fra deltaker 6592, 5453 og 5644 er de mest typiske for de intuitive strategiene. Her beskrives det kort på hvilken måte de kommer frem til et estimat. Ord som tipping, gjetting og antagelse går igjen i denne kategorien med besvarelser.

Andre deltakere var litt mer utfyllende om hvorfor de gikk for den strategien de valgte. Som eksempel, beskriver deltaker 5536: «at jeg ikke klarer å «ta bilde» av prikkene å lage i hukommelsen». Deltaker 5542 beskriver: «klarer ikke huske hvordan bildet ser ut». For akkurat disse deltakerne gikk det litt for fort til å huske hva de hadde sett. Men det at deltakerne nevner det, mener vi impliserer noe interessant. For dersom deltakerne hadde klart å huske, eller holde på et bilde av mengden, ville de kanskje ha brukt noe annet enn en intuitiv strategi. Å holde bildet i arbeidsminnet er en del av den kognitive modellen for estimering (Gilmore, et. al., 2018). Selv om deltakerne estimerer intuitivt i denne oppgaven, åpner de for at de kunne brukt en kognitiv strategi, dersom oppgaven ga dem andre forutsetninger.

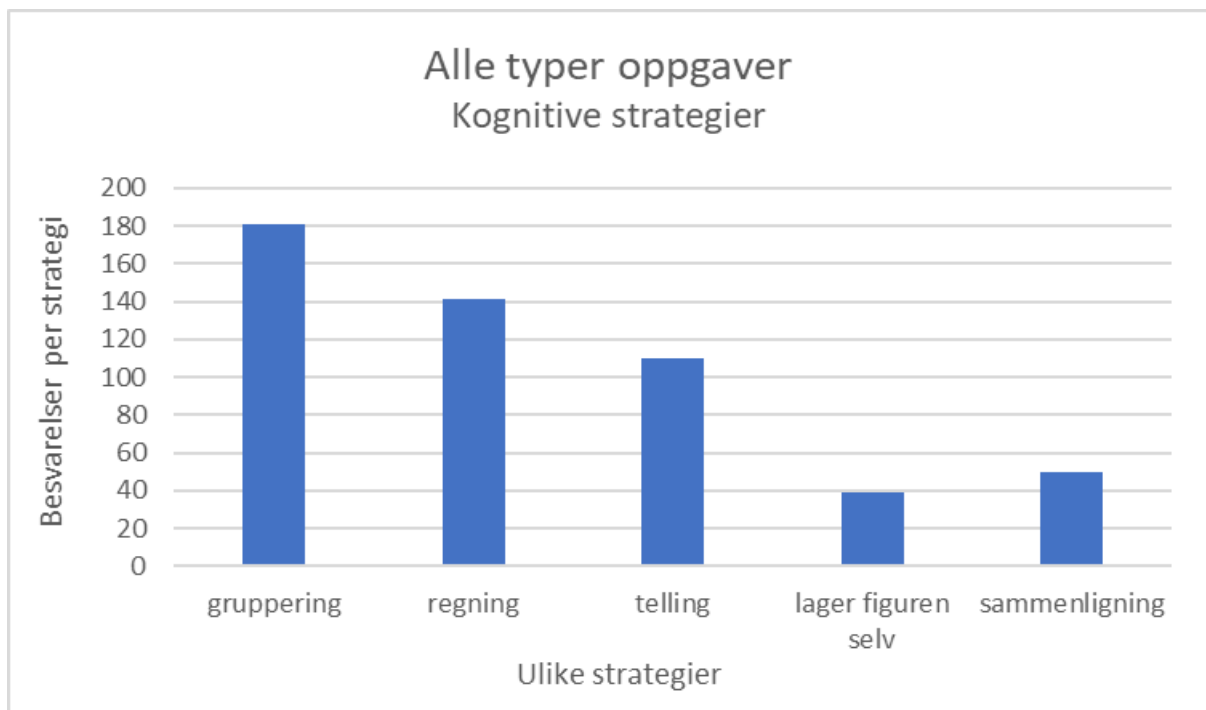
Deltaker	Besvarelse	Type oppgave	Antall prikker
6592	<i>100% ren tipping</i>	Tilfeldig strukturert	16
5453	<i>Vill gjetning</i>	Figurert	29

5644	<i>Jeg tenkte ikke, jeg gjetta</i>	Figurert	16
5536	<i>Her er det vill gjetting, da jeg ikke har sjans til å rekke å telle, videre kan jeg si at jeg ikke klarer å «ta bilde» av prikkene å lage i hukommelsen</i>	Figurert	16
5542	<i>Tenker ikke mye på oppgaven og satser på at intuisjonen er sånn passe rett. Klarer ikke å huske hvordan bildene ser ut uansett.</i>	Tilfeldig strukturert	16

Tabell 4.1: Eksempler på besvarelser kategorisert som *intuitive*

4.1.3 Beskrivelse av de ulike *kognitive* strategiene

Alle besvarelser som beskrev kognitive prosesser, ble kategorisert som *kognitive*. Innenfor de kognitive besvarelsene, fantes det en rekke strategier. De strategiene som gikk igjen flest ganger samlet vi i fem kategorier; *gruppering, regning, telling, lager figuren selv, og sammenligning*. Alle disse seks strategiene ble funnet i alle typer oppgaver. Ikke alle besvarelsene som var kognitive, passet inn i akkurat disse kategoriene. Totalt var det 21 besvarelser vi kategoriserte som *kognitive*, uten å gi dem en spesiell kognitiv strategi. Kategoriene for kognitive strategier var overlappende. Her kunne en besvarelse høre til kun én strategi, mens en annen kunne høre til to eller tre forskjellige strategier. I figur 4.2 vises fordelingen av de ulike kognitive strategiene. De tre mest brukte strategiene, *gruppering, regning, og telling* ble alle kategorisert for over hundre besvarelser. Videre skal vi vise frem hver av de kognitive strategiene, og peke på ulike kjennetegn ved dem.



Figur 4.2: Søylediagram for de *kognitive* strategiene for alle oppgavetyper

4.1.3.1 Gruppering

I tabell 4.2 har vi valgt ut noen eksempler på strategier som vi har kategorisert som *gruppering*. Deltaker 5512 beskriver hvordan den kommer frem til hvor mange som er i hver gruppe og hvor mange grupper det er. Deltaker 6572 beskriver at den gikk ut ifra grupper på fire, og fant ut hvor mange slike grupper som behøvdes. Deltakeren brukte denne strategien i en oppgave med tilfeldig plasserte prikker. Dette viser at deltakerne ikke er avhengig av gruppestrukturer i oppgaven, for å bruke *gruppering*.

Noen deltakere brukte flere *kognitive* strategier om gangen. Deltaker 5436 grupperer først, før gruppene brukes til å regne ut totalt antall prikker i kvikkbildet. Dermed ble denne besvarelsen kategorisert som både *gruppering* og *regning*. Deltaker 6566 bruker tre strategier. *Gruppering*, *regning*, og *telling*. Teller først, i grupper, før gruppene adderes. En kognitiv modell beskriver estimering som en kompleks problemløsningsaktivitet som leder frem til en omtrentlig beregning av et estimat (Lüwel og Verschaffel, 2008). Det at våre deltakere var tilbøyelige til å bruke flere strategier om hverandre, mener vi understreker en kognitiv modell for estimering. For deltakerne som bruker flere av disse strategiene om hverandre, er det en omfattende kognitiv prosess å estimere. Mengden må deles opp, og kanskje må ulike deler telles, før man regner seg frem til et estimat.

Deltaker	Besvarelse	Type oppgave	Antall prikker
5512	<i>jeg tenker først over ca hvor mange en gruppe var. Jeg så der at det ikke var mange og tenke det kunne være ca 3-4 stykker. deretter i side synet får jeg en oversikt over hvor mange slike grupper det er. derfra prøver jeg å estimere hvor mange prikker det ca kan være.</i>	Ikke-symmetrisk gruppert	21
6572	<i>så en mengde som var ca 4 så prøvde jeg å se for meg ish hvor mange sånne grupper med 4 det var og så et par til</i>	Tilfeldig	16
5436	<i>Jeg så at det var 6 grupper (tror jeg), så tippet jeg at det var ca 4 prikker i hver gruppe. Derfor tok jeg 6 ganger 4 som er 24</i>	Symmetrisk gruppert	29
6566	<i>telte i grupper ut fra hvordan jeg så prikkene lå. Så ut som det var grupper på fire eller fem og adderte dem.</i>	Ikke-symmetrisk gruppert	16

Tabell 4.2: Eksempler på strategier i kategorien *gruppering*

4.1.3.2 Regning

Vi kategoriserte 141 besvarelser til strategien *regning*. Typisk for mange av disse, var at de også inneholdt strategien *gruppering*. Grupperingen var grunnlaget for mange av regnestykkene. Dette så vi i tabell 4.3 med deltaker 5436 og 6566, der begge fant ut hvor mange prikker det er i hver gruppe, før de henholdsvis multipliserte og adderte seg frem til svaret. *Gruppering* impliserer *regning* i mange tilfeller. Men besvarelsene er kun kategorisert som *regning* dersom deltakerne har formulert bruken av matematiske prosesser. Det betyr ikke at deltakerne ikke regner hvis de ikke nevner det. Men vi vet ikke hvordan de kommer seg fra *gruppering* til et estimat.

I tabell 4.3 finnes to forskjellige besvarelser som vi kategoriserte som *regning*. Deltaker 5621 oppfattet grupper som ble grunnlaget for multiplikasjon. Deltaker 5681 husket de ulike delene av huset, reflekterte seg frem til hvor mange det var i hver del, og adderte sammen de ulike delene. Regneartene addering og multiplisering gikk igjen. I tillegg var det noen som doblet eller tredoblet antallet de fikk med seg.

Strategien *regning* mener vi peker på bruken av arbeidsminnet og en prosessering av bildet man har sett. Selv om bildet hadde forsvunnet, klarte deltakerne å regne seg frem til et estimat. Enten så var det grupper, eller så var det en gjenkjennelig figur deltakerne hadde på arbeidsminnet, før de regnet seg frem til et estimat. Begge beskrivelsene tyder på en kognitiv modell for estimering.

Deltaker	Besvarelse	Type oppgave	Antall prikker
5621	<i>jeg så 7 grupper med 3 i hver, derfor tok jeg 7x3</i>	Symmetrisk gruppert	21
5681	<i>jeg rakk så vidt å se litt på taket hvor mange prikker det var på den ene siden av taket. jeg synes jeg så fem. det vil si at den andre siden av taket må ha fire siden den må ha en spiss. videre synes jeg at jeg huska at det var to prikker ned fra taket som var vegger. to vegger vil si pluss fire. deretter gjetta jeg meg frem til at det var tre prikker i midten nederst og at vi til sammen får 16</i>	Figurert	16

Tabell 4.3: Eksempler på strategier i kategorien *regning*

4.1.3.3 Telling

Strategien *telling* var en annen gjennomgående strategi. 110 av besvarelsene ble kategorisert som *telling*. Likevel hadde deltakerne ulike måter å bruke strategien *telling* på. Noen så for seg hele bildet, for så å telle hvert element. Dette gjorde de etter at bildet hadde forsvunnet, fordi de klarte å holde på bildet i minnet en liten stund etter det hadde forsvunnet. Deltaker 6601 og 5441 beskrev dette. Deltaker 6601 så at prikkene var formet som et hus, og prøvde å gjenskape huset etter minnet ved å telle. 5441 telte to og to prikker etter hvor deltakeren husket prikkene var. Selv om begge to brukte minnet for å telle, formulerte de seg på en måte som viste at de ikke var helt sikre på at de husket det riktige bildet: «prøvde å gjenskape og telle, sånn ca. der jeg husket». Andre, som 5620, telte en liten del av bildet. For så å bruke dette antallet til å arbeide seg frem til et estimat.

På samme måte som *regning*, mener vi strategien *telling* tyder på en kognitiv modell for estimering. Her lagres et bilde av mengden på arbeidsminnet, før deltakerne prosesserer denne mengden. En måte å prosessere mengden på, var for våre deltakere ved bruk av strategien *telling*.

Deltaker	Besvarelse	Type oppgave	Antall prikker
6601	<i>Jeg tenkte at prikkene var formet som et hus, og prøvde å gjenskape dette huset med hendene mine og telle ca antall prikker jeg tenkte jeg så.</i>	Figurert	16
5441	<i>Jeg telte 2 og 2, og prøvde å dekke området med prikker. Brukte to fingre til å peke på skjermen for å telle, sånn ca. der jeg husket at prikkene var.</i>	Tilfeldig	29
5620	<i>på oppgaven med brillene, prøvde jeg å telle buen av venstre brilleglass, for å så gange det med 2. Jeg tenkte at den lange streken på toppen må være like lang som en av buene. Derfor fikk jeg regnestykket 8x3</i>	Figurert	21

Tabell 4.4: Eksempler på strategier i kategorien *telling*

4.1.3.4 Lager figuren selv

Strategien *lager figuren selv*, er minst representert i diagrammet vårt. 31 besvarelser ble kategorisert som dette. Deltakerne hadde en formening, kanskje et bilde på hvordan oppgaven så ut. Deretter etterlignet de dette bildet. Estimater deres ble da så mange prikker de trengte for å lage etterligningen. Enten så lagde de dette bildet i hodet, eller så tegnet de det opp i lufta slik deltaker 5530 beskriver det i tabell 4.5.

Vi mener denne strategien peker på bruken av arbeidsminnet. Deltakerne som brukte denne strategien husket ikke alle detaljene, men f. eks at mengden så ut som en bil. På bakgrunn av dette arbeidet de seg frem til et estimat. Deltakerne så hvor mange prikker som naturlig å bruke for å fylle opp figuren, og dette ble estimatet deres. Dette kan bety at deltakerne i denne kategorien brukte arbeidsminnet, og på bakgrunn av det reflekterte de seg frem til et estimat. Dermed mener vi denne strategien belyser bruken av arbeidsminnet, en sentral del av den kognitive modellen for estimering.

Deltaker	Besvarelse	Type oppgave	Antall prikker
5455	<i>Tenkte over hvor mange prikker det var logisk å bruke for å fylle figuren som så ut som en bil</i>	Figurert	29
5530	<i>jeg prøvde å tegne samme figur i hodet. Jeg brukte fingeren for å tegne figuren og prøvde og se ca hvor mange prikker jeg hadde brukt for å lage samme figur</i>	Tilfeldig	16

Tabell 4.5: Eksempler på strategier i kategorien *lager figuren selv*

4.1.3.5 Sammenligning

Den siste kognitive strategien vi kategoriserte var *sammenligning*. Totalt ble 50 besvarelser kategorisert som *sammenligning*.

I tabell 4.6 finnes to eksempler på besvarelser som har blitt kodet til kategorien *sammenligning*. Deltaker 5444 sammenlignet med tidligere oppgaver, og mente det er flere elementer enn i noen andre oppgaver. Deltaker 6588 sammenlignet mengden i kvikkbildet, både med tidligere bilder, men også med en oppfatning om størrelsen til mengden 10 prikker. Deltakerne i undersøkelsen sammenlignet enten med tidligere oppgaver eller med nærmeste 10-er eller 5-er, for å reflektere seg frem til et estimat.

Deltaker	Besvarelse	Type oppgave	Antall prikker
5444	<i>Så at det var mange, og kanskje fler enn det har vært på tidligere oppgaver</i>	Symmetrisk gruppert	29
6588	<i>At det var mindre enn de tidligere, men mer enn 10</i>	Tilfeldig	16

Tabell 4.6: Eksempler på strategier i kategorien *sammenligning*

Den *kognitive* kategorien *sammenligning* ga, i noen tilfeller, utydelige svar på om besvarelsen var *intuitiv* eller *kognitiv*. I tabell 4.7 er det to eksempler på besvarelser som tolkes som enten *intuitive* eller *kognitive*. Begge kan tolkes som *intuitive*. Kanskje har de sett kvikkbildet, og umiddelbart tenkt at dette er 10 prikker, uten noe mer prosessering av bildet. Om dette er tilfellet ville vi kategorisert strategiene som *intuitive*. Begge besvarelsene kan også tolkes som *kognitive*. Deltakerne kan ha sett bildet og kognitivt prosessert det. De kan ha sammenlignet bildet med sin mentale representasjon for 10 elementer, og funnet ut at det er nærme nok til å estimere 10 for oppgaven. En slik beskrivelse ville vi kategorisert som *kognitiv*.

Vi klarer ikke utelukke hverken den ene eller andre strategien for deltakernes beskrivelser. Dermed klarte vi ikke å kategorisere disse og flere andre (totalt 10) besvarelser som enten *intuitive* eller *kognitive*. At kategorien *sammenligning* var vanskelig å skille fra *intuitive strategier*, peker kanskje på at den ikke er helt lik de andre kognitive strategiene. Selv om vi i teorien redegjorde for at *sammenligning* var en del av de kognitive strategiene for estimering, tyder ikke våre kvalitative resultater nødvendigvis på dette.

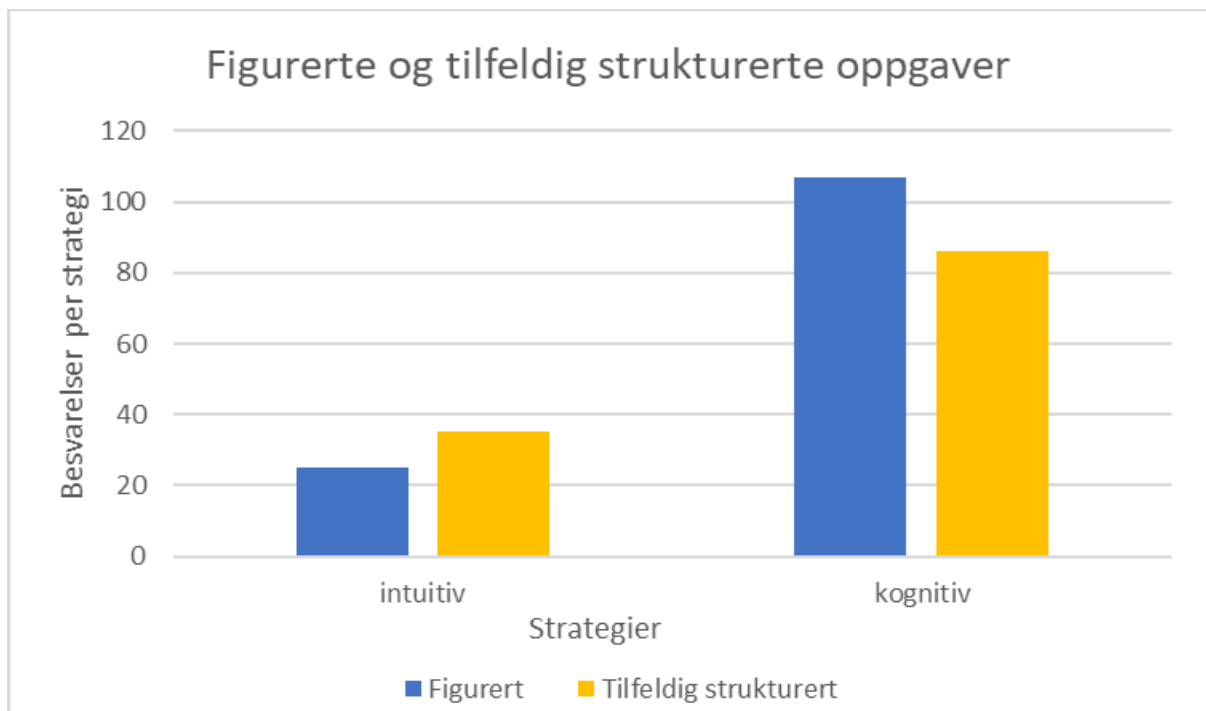
Deltaker	Besvarelse	Type oppgave	Antall prikker
6570	<i>Det så ut som det kunne være 10, så jeg skrev 10.</i>	Tilfeldig	16
6600	<i>Det så ut som cirka 10</i>	Tilfeldig	16

Tabell 4.7: Eksempler på strategier som hverken passet som *intuitive* eller *kognitive* strategier

4.1.4 Figurert og tilfeldig strukturerte

I denne oppgaven er vi ute etter å undersøke om estimering er en intuitiv eller kognitiv prosess. Dette gjør vi ved å undersøke hvilken sammenheng strukturering av mengden har med estimering. Derfor designet vi fire oppgavetyper hvor to og to ble satt opp mot hverandre. *Figurert* mot *tilfeldig strukturert*, og *symmetrisk gruppert* mot *ikke-symmetriske gruppert*. Vi har fremstilt et utvalg av diagrammer for deltakernes besvarelser. Diagrammene viser hvilke strategier som er fremtredende for de forskjellige oppgavetyperne. Til å begynne med, skal vi ta for oss resultatene til de *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgavene.

Figur 4.3 viser fordelingen av *intuitive* og *kognitive* strategier i de *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgavene. For begge oppgavetyperne var det en klar overvekt av *kognitive* estimeringsstrategier. Allikevel var det en forskjell mellom oppgavetyperne. For å løse de *figurerte* oppgavene, var det flere som brukte *kognitive* strategier og færre som brukte *intuitive*. I besvarelsene til de *figurerte* oppgavene finner vi 25 *intuitive* strategier og 107 *kognitive*. Ser vi derimot på de *tilfeldig strukturerte* oppgavene finner vi 35 *intuitive* strategier og 86 *kognitive* strategier. Dersom vi går nøyere inn på de forskjellige *kognitive* strategiene, kan vi finne flere ulikheter. Disse resultatene viser at det var flere som brukte *kognitive* strategier. I tillegg ser vi at når vi endret strukturen i oppgaven var det enda flere som ble tilbøyelige til å bruke *kognitive* strategier. Dette mener vi peker på en kognitiv modell for estimering.

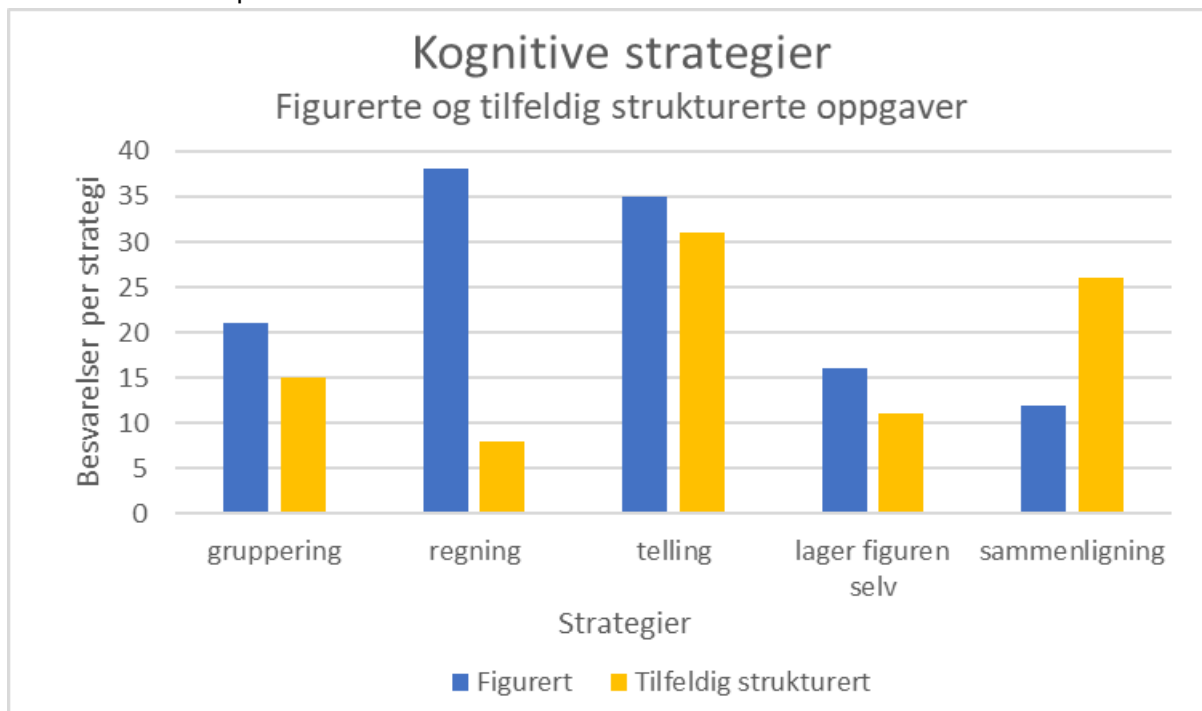


Figur 4.3: Søylediagram for *intuitive* og *kognitive* strategier (1)

Søylediagrammet viser fordeling *intuitive* og *kognitive* strategier for de *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgavene.

I figur 4.4 ser vi fordelingen av de *kognitive* strategiene for de *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgavene. Dette er basert på 107 besvarelser fra de *figurerte* oppgavene, og 86 besvarelser fra de *tilfeldig strukturerte*. Strategiene *gruppering*, *telling* og *lager figuren selv*, ble brukt i lignende grad i både de *figurerte* og de *tilfeldige* oppgavene. Men for to av strategiene var det større forskjeller. I de *figurerte* oppgavene var det hele 38

besvarelser som ble kategorisert til strategien *regning*. Mens kun åtte besvarelser på de tilfeldig strukturerte oppgavene ble kategorisert som *regning*. For kategorien *sammenligning* var tilfellet motsatt. Her var det kun 12 besvarelser som ble kategorisert fra de *figurerte* oppgavene, mens det var hele 26 besvarelser fra de *tilfeldig strukturerte* oppgavene. Av resultatene i forrige tabell så vi at strukturen i oppgavene gjorde at deltakerne brukte flere *kognitive* strategier. Av disse strategiene ser vi også at strukturen i oppgaven endret hvilke kognitive strategier deltakerne brukte. Våre *figurerte* oppgaver førte til mer *regning*. Dette mener vi belyser at strukturen i oppgaven kan legge til rette for matematiske prosesser.



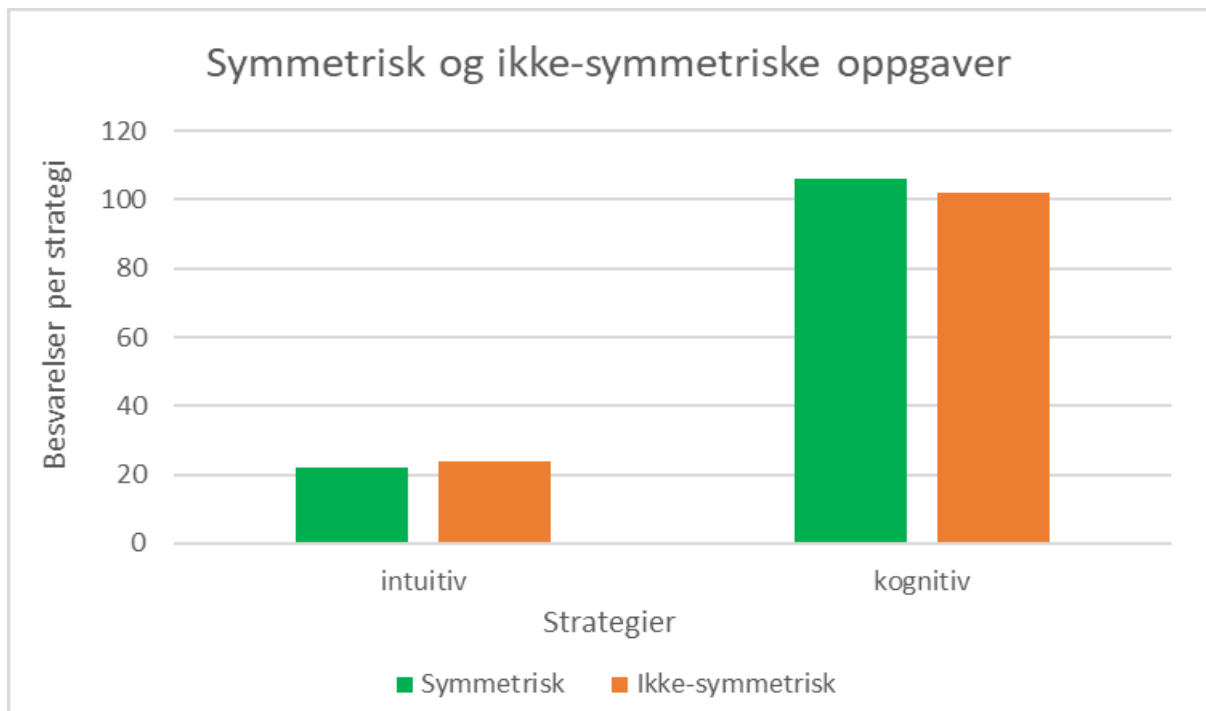
Figur 4.4: Søylediagram for kognitive strategier (1)

Søylediagrammet viser fordeling kognitive strategier for de figurerte og tilfeldig strukturerte oppgavene.

4.1.5 Symmetrisk gruppert og ikke-symmetrisk gruppert

Vi vet at gruppestrukturer har en sammenheng med estimering. Vi ville undersøke om en symmetrisk plassering av disse gruppene har noen betydning. Om symmetrisk plassering av gruppene har en sammenheng med estimering, indikerer dette en kognitiv modell for estimering. Med dette utgangspunktet sammenlignet vi oppgaver med grupper strukturert i *symmetriske grupper* og *ikke-symmetriske grupper*.

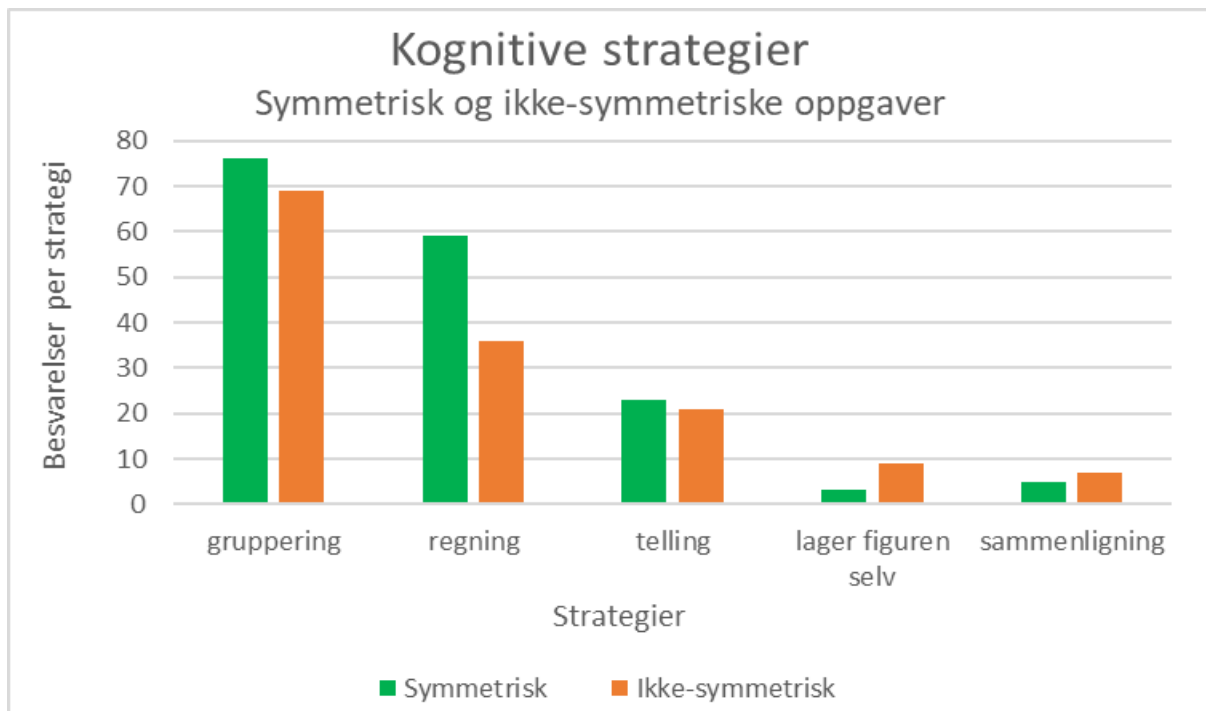
Figur 4.5 viser fordelingen av strategier for de *symmetriske grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgavene. Her var det liten forskjell i antallet besvarelser med *intuitive* strategier. Det var 22 besvarelser fra de *symmetrisk grupperte* oppgavene og 24 besvarelser fra de *ikke-symmetrisk grupperte*. Det var heller ikke stor forskjell i de *kognitive* strategiene. 106 besvarelser fra de *symmetrisk grupperte* oppgavene, og 102 besvarelser fra de *ikke-symmetrisk grupperte* oppgavene. Disse resultatene viste ikke stor forskjell i bruk av strategier.



Figur 4.5: Søylediagram for *intuitive* og *kognitive* strategier (2)

Søylediagrammet viser fordeling *intuitive* og *kognitive* strategier for de *symmetrisk* og *ikke-symmetrisk* grupperte oppgavene.

I figur 4.6 vises fordelingen av de kognitive strategiene for *symmetrisk* gruppert og *ikke-symmetrisk* grupperte oppgaver. Her var det også likheter mellom oppgavetyperne. For strategiene *gruppering*, *telling* og *sammenligning*, er det små forskjeller. Men for strategiene *regning* og *lager figuren selv*, finnes det ulikheter. 59 besvarelser fra de symmetriske oppgavene ble kategorisert som *regning*, mens 36 besvarelser fra de ikke-symmetriske oppgavene ble kategorisert som *regning*. Det var få deltakere som brukte strategien *lager figuren selv*, både i *symmetriske* og *ikke-symmetriske* oppgaver. Henholdsvis tre og ni stykker. Disse resultatene viser at den symmetriske plasseringen av gruppene endret hvilke *kognitive* strategier deltakerne brukte. *Regning* ble mer fremtredende for de *symmetrisk* grupperte oppgavene. Igjen klarte strukturen å fremme de matematiske prosessene.



Figur 4.6: Søylediagram for kognitive strategier (2)

Søylediagrammet viser fordeling kognitive strategier for de symmetrisk og ikke-symmetrisk grupperte oppgavene.

4.2 Kvantitative resultater

Formålet med denne oppgaven er å undersøke om estimering er kognitiv eller intuitiv. I teorikapitlet argumenterer vi for hvorfor intuitive modeller mener at det ikke er sammenheng mellom mengders struktur, og estimering av dem. Ifølge Webers lov er numerositet den eneste faktoren i estimering (Gilmore, et. al., 2018). Om intuitiv modell stemmer for all estimering kan vi dermed forvente like resultater på oppgaver med ulik struktur, men lik numerositet. Vi har derfor stilt forskningsspørsmål som setter slike oppgaver mot hverandre. Et forskningsspørsmål sier: *Hva er sammenhengen mellom strukturering i lett gjenkjennelige figurer eller tilfeldig strukturerte mengder, og estimering av mengdene?* Et annet forskningsspørsmål sier: *Hva er sammenhengen mellom symmetrisk strukturering av en mengde og estimering av mengden?* Forskningsspørsmålene fremhever sammenhengen mellom mengder sin struktur og estimeringen av dem.

For å besvare forskningsspørsmålene vil vi i dette delkapitlet presentere analysen av responser og responstider. Vi sammenlignet responser og responstider fra *figurerte* oppgaver med *tilfeldig strukturerte*, og *symmetrisk grupperte* oppgaver med *ikke-symmetrisk grupperte*. Dette gjorde vi for å fremheve strukturens betydning i kvikkbildeoppgaver. Analysen inneholder grafiske fremstillinger av median for både responser og responstider, samt signifikanstester av forskjellene mellom oppgavetyperne. Resultatene fra sammenligningen av de ulike oppgavetyperne ga oss et innblikk i sammenhengen mellom strukturen i en mengde og estimering av mengden.

4.2.1 Responstider

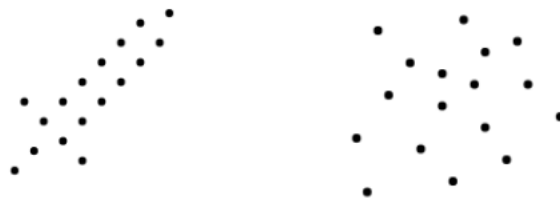
Responstiden er en indikator på om det har foregått kognitiv eller intuitiv estimering.

Hvis det ikke er en sammenheng mellom strukturen i en mengde og estimeringen av den, vil vi forvente lik responstid for oppgaver med lik numerositet, men ulik struktur. Et slikt resultat vil støtte intuitiv modell. Derfor viser den første grafen (figur 4.8 og 4.10) oppgaver med lik numerositet, men ulik struktur.

Responstiden gir oss også en annen indikator på om estimering er en intuitiv eller en kognitiv prosess. Responstiden gir oss et innblikk i hvor omfattende kognitive prosesser som har foregått hos deltakerne. Hvis estimering skjer intuitivt, vil estimatet komme raskt. En kognitiv prosess kan ta tid, og jo mer omfattende prosessen er, jo lengre tid vil den ta. Dersom responstiden er høy, er det naturlig å si at deltakeren har tenkt lenge på oppgaven. Altså har det skjedd en kognitiv prosess. Dermed kan vi bruke responstiden som en indikator på om det har skjedd en kognitiv prosess.

4.2.1.1 Figurerte mot tilfeldig strukturerte oppgaver

Dette delkapittelet inneholder resultater som skal besvare forskningsspørsmålet: *Hva er sammenhengen mellom strukturering i lett gjenkjennelige figurer eller tilfeldig strukturerte mengder, og estimering av mengdene?* For å se sammenhengen mellom strukturen i en mengde og estimering, tok vi for oss oppgavetyperne *figurert* og *tilfeldig strukturert*. Den *figurerte* oppgavetypen inneholder oppgaver med lett gjenkjennelig struktur. Tanken bak gjenkjenneligheten var at deltakerne kunne kjenne igjen mønstre, noe som kan hjelpe med estimering (f.eks. Mandler og Shebo, 1982; Von Glaserfeld, 1983; Wolter, et. al., 1987; Cohen, 2018). I oppgavetypen *tilfeldig strukturert*, har vi forsøkt å plassere elementene så tilfeldig som mulig, i en sky av elementer (se figur 4.7). Dermed kan vi se sammenhengen mellom strukturering og estimering ved å se på forskjellen i hvordan deltakerne har estimert *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver.



Figur 4.7: Eksempeloppgaver, *figurert* og *tilfeldig strukturert*

Begge oppgavene har 17 prikker. Bildet til venstre tilhører oppgavetypen *figurert*, og bildet til høyre tilhører oppgavetypen *tilfeldig strukturert*. Forskjellen mellom oppgavene er strukturen.

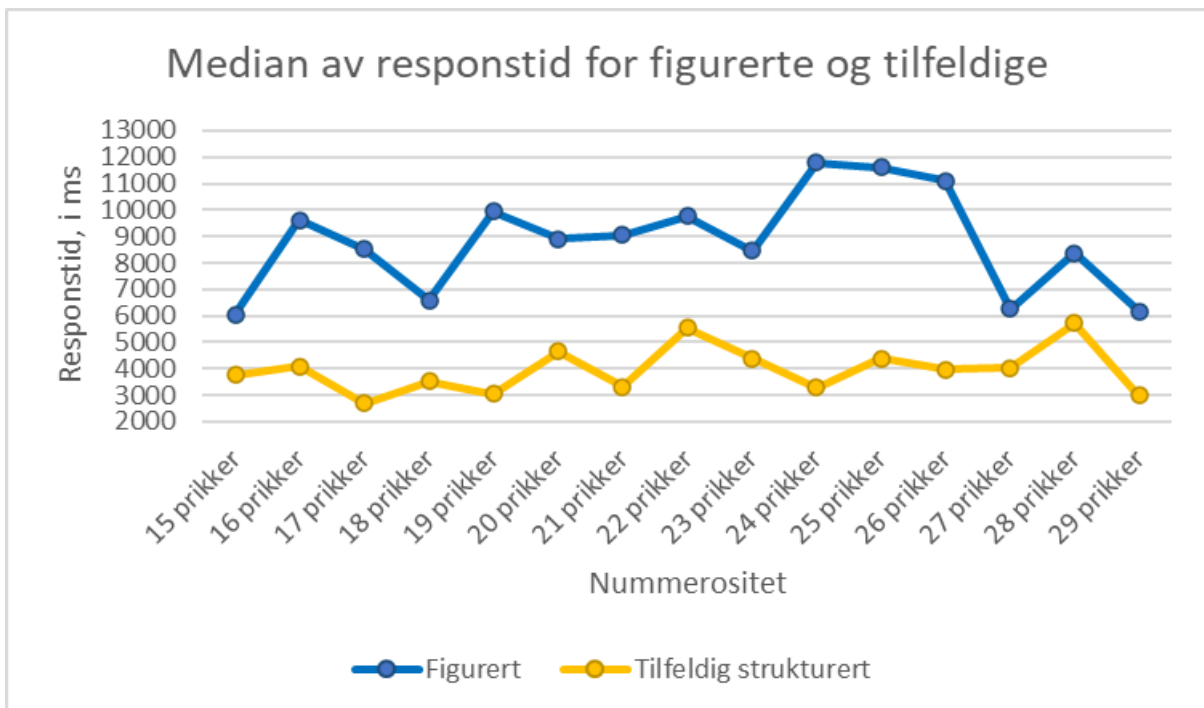
Responstidene for figurerte oppgaver var høyere for tilfeldig strukturerte oppgaver hele veien (Figur 4.8). Hvis intuitiv modell stemmer burde det ikke være forskjell mellom responstidene, men her var det signifikant forskjell mellom responstidene. Dermed peker resultatet mot at intuitiv modell ikke forklarer estimeringen som har foregått her.

Medianen av responstid for figurerte oppgaver er høyere enn medianen av responstiden for tilfeldig strukturerte oppgaver. Vi gjennomførte en *t*-test på responstidene deres for å se om det var en statistisk signifikant forskjell mellom oppgavetyperne. Testen inneholdt totalt 2425 responstider. Responstidene var fordelt på figurerte og tilfeldig strukturerte oppgaver, med besvarelser fra de samme 162 deltakerne. Dermed er responstidene parvis fra samme deltaker.

Før vi kunne gjennomføre en *t*-test måtte vi sjekke om dataen var normalfordelt. Hvis dataene ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Siden

deltakernes responser på figurerte og tilfeldig strukturerte oppgaver kommer fra samme deltakere og undersøkelse, ble testen gjennomført på differansen mellom responstidene. Testen ga oss $D(2425) = 0,082$, $p < 0,001$, og viser signifikant at utvalget ikke er normalfordelt.

Siden dataene ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk t -test (Field, 2013). For å teste to relaterte, ikke-parametriske variabler brukte vi Wilcoxon signed-rank test. Responstiden for figurerte oppgaver ($M = 9743,89$) var statistisk signifikant høyere enn responstiden på tilfeldig strukturerte oppgaver ($M = 5311,92$), $Z = -31,914$, $p < 0,001$, $r = -0,648$. Resultatet peker mot at det er sammenheng mellom strukturen i en mengde og estimering av mengden. Dermed peker resultatet mot at estimering skjer kognitivt.

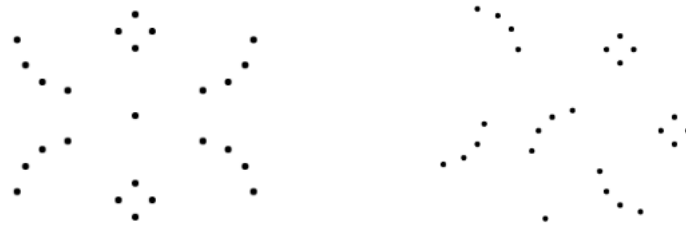


Figur 4.8: Medianen for responstiden (1)

Grafisk fremstilling av medianen for responstidene på *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver.

4.2.1.2 *Symmetrisk gruppert mot ikke-symmetrisk gruppert*

Et av forskningsspørsmålene sier: *Hva er sammenhengen mellom symmetrisk strukturering av en mengde og estimering av mengden?* Hvis en intuitiv modell for estimering stemmer, kan vi forvente at responstiden er lik for begge oppgavetyper. Responstiden for *symmetrisk grupperte* oppgaver var signifikant høyere enn for *ikke-symmetrisk grupperte*. Selv om forskjellen mellom dem var mindre tydelig enn for *figurerte* og *tilfeldig strukturerte*, var det en forskjell. Denne forskjellen vises i figur 4.10 som sammenligner responstidene til *symmetrisk grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Her er numerositetene parvis like, men det er forskjell i strukturen. Gruppene som brukes i oppgaveparene var like, men de var ulikt plassert. I den ene oppgavetyper var gruppene symmetrisk plassert (se figur 4.9). Siden både numerositet og gruppene var parvis like, ville ulikheter i responstid kun gjenspeile betydningen av symmetrisk strukturering.

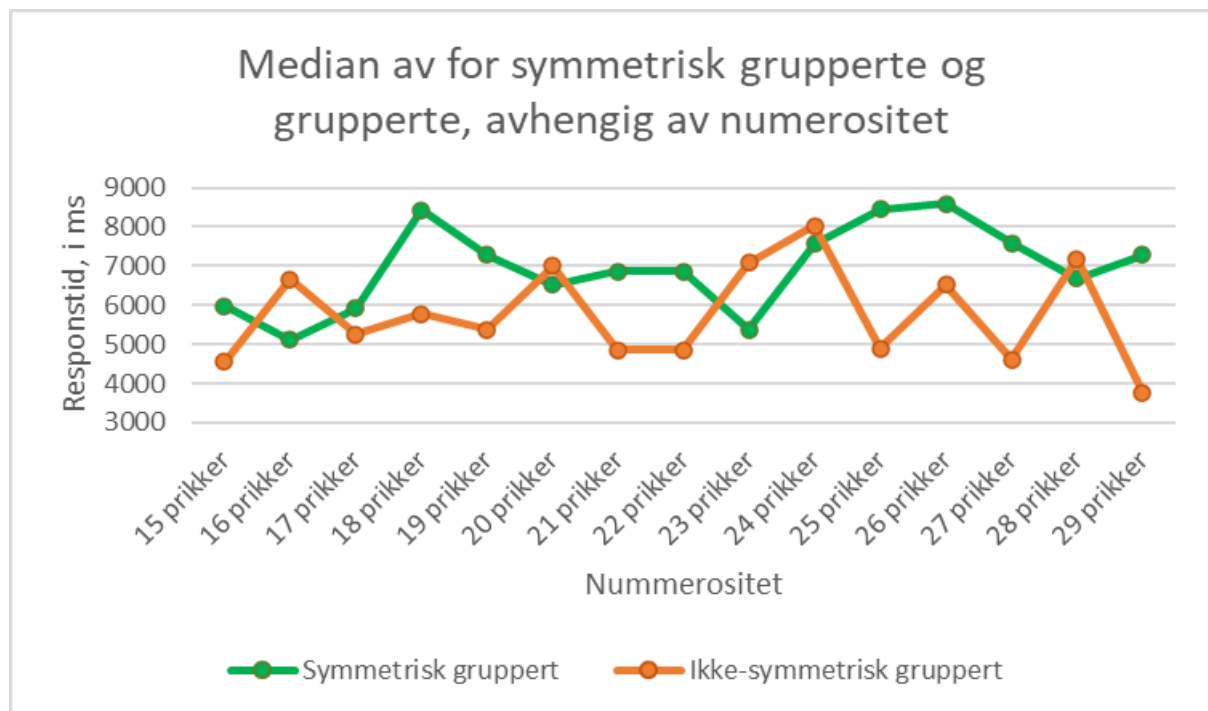


Figur 4.9: Eksempelloppgaver, *symmetrisk* og *ikke-symmetrisk* gruppert

Begge oppgavene har 25 prikker, og gruppene er like. Bildet til venstre tilhører oppgavetypen *ikke-symmetrisk* gruppert, og bildet til høyre tilhører oppgavetypen *symmetrisk* gruppert.

Vi gjennomførte en *t*-test på responstidene deres for å se om det var en statistisk signifikant forskjell mellom oppgavetypene. Testen inneholdt totalt 2418 responstider. Responstidene var parvis fra oppgaver med samme numerositet, men ulik struktur, og kommer fra de samme 162 deltakerne. Før vi kunne gjennomføre *t*-testen måtte vi sjekke om utvalget var normalfordelt. Hvis utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Siden vi jobber med et parert datasett, gjennomførte vi testen på differansen mellom responstidene. Testen ga oss $D(2418) = 0,121$, $p < 0,001$, og viste signifikant at utvalget ikke er normalfordelt.

Siden dataene ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste to relaterte, ikke-parametriske variabler brukte vi Wilcoxon signed-rank test. Responstiden for *symmetrisk* grupperte oppgaver ($M = 7922,60$) var signifikant høyere enn responstiden på *ikke-symmetrisk* grupperte oppgaver ($M = 6692,99$), $Z = -10,933$, $p < 0,001$, $r = -0,222$. Resultatet peker mot at det er sammenheng mellom strukturen i en mengde og estimering av mengden. Dermed peker resultatet mot at estimering skjer kognitivt.



Figur 4.10: Medianen for responstiden (2)

Grafisk fremstilling av medianen for responstidene på *symmetrisk grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver.

4.2.2 Responser

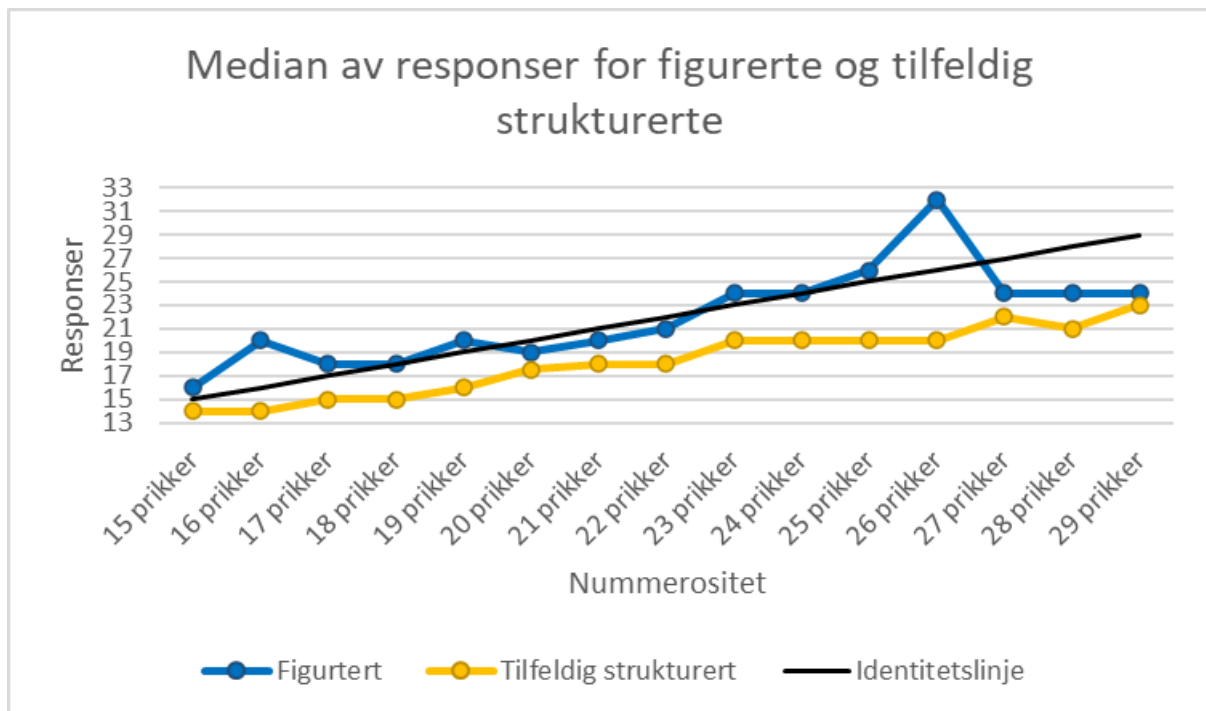
I litteraturen om estimering er det vanlig å se på deltakernes respons på oppgaver. Det gir oss en måte å vurdere hvor godt deltakerne har estimert. For større numerositeter er det forventet at man underestimerer (Gilmore, et. al., 2018). Dette var derimot ikke tilfellet for alle oppgavetyperne våre. Hvis man tar utgangspunkt i en intuitiv modell, vil man forvente at det ikke er sammenheng mellom strukturen i en mengde og hvordan den estimeres. Da vil man også forvente like respons på oppgaver med lik numerositet, men ulik struktur. Dette er en konsekvens av Webers lov. Derfor har vi satt strukturen *figurert* oppgaver mot *tilfeldig strukturert*, og *symmetrisk gruppert* oppgaver mot *ikke-symmetrisk gruppert*. Ved å sette oppgaver med lik numerositet, men ulik struktur opp mot hverandre, vil vi fremheve strukturens betydning.

4.2.2.1 Figurerte mot tilfeldig strukturerte oppgaver

Et av forskningsspørsmålene våre er: *Hva er sammenhengen mellom strukturering i lett gjenkjennelige figurer eller tilfeldig strukturerte mengder, og estimering av mengdene?* Hvis en intuitiv modell for estimering stemmer, kan vi forvente at responsen er lik for begge oppgavetyperne. Figur 4.11 viser grafer på deltakernes besvarelser på oppgaver fra *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgavetyper. Grafen viser oppgaver med samme numerositet, men ulik struktur. Responsene for de *figurerte* og de *tilfeldig strukturerte* oppgavene var ulike. Responsene for *figurerte* oppgaver var signifikant høyere enn responsen for *tilfeldig strukturerte* oppgaver. Det vil si at på de *tilfeldige strukturerte* oppgavene var trenden at deltakerne underestimerte. På oppgavene med lavere numerositet er det mindre underestimering enn på oppgavene med høyere numerositet. De *figurerte* oppgavene fulgte ikke det samme mønsteret. Her fulgte medianen av deltakernes responser identitetslinjen nærmere.

Vi gjennomførte en *t*-test på responsene deres for å se om det var en signifikant forskjell mellom oppgavetyperne. Testen inneholdt totalt 2393 responser. Responsene var fordelt på *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver, med besvarelser fra de sammen 162 deltakerne. Dermed er responsene parvis fra samme deltaker. Før vi kunne gjennomføre *t*-testen måtte vi sjekke om utvalget var normalfordelt. Hvis utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Siden deltakernes responser på *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver kommer fra samme deltakere og undersøkelse, ble testen gjennomført på differansen mellom responsene. Testen ga oss $D(2393) = 0,071$, $p < 0,001$, og viser signifikant at utvalget ikke er normalfordelt.

Siden dataene ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste to relaterte, ikke-parametriske variabler brukte vi Wilcoxon signed-rank *t*-test. Responsen for *figurerte* oppgaver ($M = 22,42$) var signifikant høyere enn responstiden på *tilfeldig strukturerte* oppgaver ($M = 19,44$), $Z = -18,893$, $p < 0,001$, $r = -0,386$. Resultatet peker mot at det er sammenheng mellom strukturen i en mengde og estimering av mengden. Dermed peker resultatet mot at estimering skjer kognitivt.



Figur 4.11: Median av deltakernes respons (1)

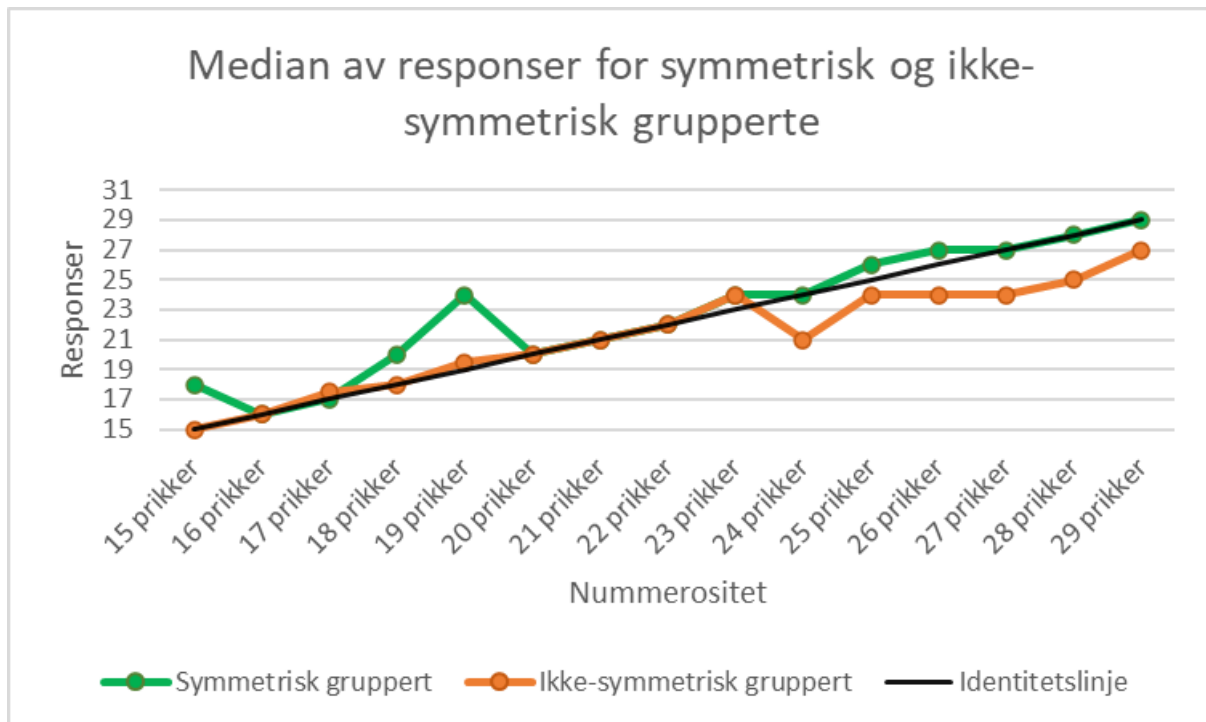
Grafene viser medianen av deltakernes responser på figurerte og tilfeldig strukturerte oppgaver.

4.2.2.2 Symmetrisk grupperte og ikke-symmetrisk grupperte oppgaver.

Et av forskningsspørsmålene er: *Hva er sammenhengen mellom symmetrisk strukturering av en mengde og estimering av mengden?* Hvis en intuitiv modell for estimering stemmer, kan vi forvente at responsen er lik for begge oppgavetyper. Responsene for *symmetrisk grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver følger et lignende mønster, men noe mer underestimering for *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Responsen for *symmetrisk grupperte* oppgaver var noe høyere enn for *ikke-symmetrisk grupperte*. Figur 4.12 viser grafene for medianen av responsene fra *symmetrisk grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Litteraturen peker mot at vi har en tendens til å underestimere mengder på over 20 elementer (Gilmore, et. al., 2018). Dette er i noen grad tilfellet for vår *ikke-symmetriske* oppgavetype. Våre *symmetrisk grupperte* oppgaver følger derimot ikke denne trenden. Noe som peker mot at det er sammenheng mellom den symmetriske strukturen i oppgavene, og estimeringen av den. Vi ønsket å se om forskjellen var statistisk signifikant, og måtte derfor gjennomføre en *t*-test på responsene.

Vi gjennomførte en *t*-test på responsene for å se om det var en statistisk signifikant forskjell mellom oppgavetyper. Testen inneholdt totalt 2384 responser. Responsene var parvis fra oppgaver med samme numerositet, men ulik struktur, og kom fra de samme 162 deltakerne. Før vi kunne gjennomføre en *t*-test måtte vi sjekke om utvalget var normalfordelt. Hvis utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametriske *t*-test (Field, 2013). Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Siden vi jobber med et parret datasett, gjennomførte vi testen på differansen mellom responsene. Testen ga oss $D(2384) = 0,090$, $p < 0,001$, og viser signifikant at utvalget ikke var normalfordelt.

Siden dataene ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste to relaterte, ikke-parametriske variabler brukte vi Wilcoxon signed-rank test. Responstiden for symmetrisk grupperte oppgaver ($M = 23,67$) var signifikant høyere enn responstiden på ikke-symmetrisk grupperte oppgaver ($M = 22,04$), $Z = -10,503$, $p < 0,001$, $r = -0,215$. Resultatet peker mot at det er sammenheng mellom strukturen i en mengde og estimering av mengden. Dermed peker resultatet mot at estimering skjer kognitivt.



Figur 4.12: Median av deltakernes respons (2)

Grafene viser medianen av deltakernes responser på symmetrisk grupperte og ikke-symmetrisk grupperte oppgaver.

4.3 Resultater fra samlet analyse av kvantitative og kvalitative data.

Formålet med denne oppgaven er å undersøke om estimering er kognitiv eller intuitiv. Dette har vi gjort ved å besvare hvert av oppgavens forskningsspørsmål. Vi har tidligere i oppgaven besvart et av forskningsspørsmålene med kvalitative funn, og de to andre med kvantitative funn. I dette delkapittelet vil vi utdype disse svarene ved å se på kvalitative og kvantitative data sammen. Sammenligning og triangulering av kvalitative og kvantitative data, gjør at informasjonen fra hvert datasett vil utfylle informasjonen fra det andre (Bryman, et. al., 2021). Ved at informasjonen fra hvert av datasettene kunne utfylle hverandre, kunne vi gi et mer helhetlig svar om estimering er *intuitivt* eller *kognitivt*.

4.3.1 Responstider fra *intuitive* mot *kognitive* strategier

Tidligere i resultatkapittelet viste vi hvordan ulike responstider peker på at noen oppgavetyper fasiliterer bedre for kognitive strategier enn andre. Vi har også vist til kvalitative funn, som viser at deltakerne oppgir å bruke kognitive strategier på alle oppgavetyper. Vi skal nå se nærmere på responstiden til deltakere som har brukt

kognitive og *intuitive* strategier. Hvis all estimering er intuitivt vil vi også her forvente at responstidene er like, uansett hvilken strategi deltakerne oppgir at de har brukt. Derfor sammenligner responstidene til deltakere som selv oppgir å bruke *kognitive* og *intuitive* strategier. Dersom resultatene gir ulike responstider er det et tydelig tegn på at det er mulig å estimere *kognitivt*.

4.3.1.1 Figurert mot tilfeldig strukturert

Et av forskningsspørsmålene er: *Hva er sammenhengen mellom strukturering i lett gjenkjennelige figurer og estimering av mengdene?* Vi har tidligere besvart dette forskningsspørsmålet ved å se på kvantitative funn. Nå vil vi utdype dette svaret ved å sammenligne kvantitative funn med kvalitative funn. Vi vet fra kvalitative funn at deltakere bruker *kognitive* strategier på alle oppgavetyper. Derfor vil vi se på responstider for deltakere som oppgir å bruke *kognitive* og *intuitive* strategier på figurerte og tilfeldig strukturerte oppgaver. Responstidene for disse oppgavene er visualisert i figur 4.13, og det er forskjell mellom oppgavetyper. Responstidene for *kognitive* strategier på *figurerte* oppgaver er høyere enn responstiden for *kognitive* strategier på *tilfeldig strukturerte* oppgaver. Dette gjelder også for *intuitive* strategier. Vi ønsket å se om disse forskjellene var statistisk signifikante.

Vi gjennomførte *t*-tester på responstidene for å se om det var en signifikant forskjell mellom strategiene. For å vise et helhetlig bilde av sammenhengen mellom strategiene gjennomførte vi fire *t*-tester på data fra figur 4.13. Vi så på sammenhengen mellom responstiden til *kognitive* og *intuitive* strategier innad i hver av oppgavetyper. Vi så også på sammenhengen mellom responstiden til *kognitive* strategier for de ulike oppgavetyper. Samt sammenhengen mellom responstiden til *intuitive* strategier for de ulike oppgavetyper. Datasettene for *kognitive* og *intuitive* strategier var hentet fra ulike deltakere, og det var ulik størrelse på datasettene. Derfor var utvalgene uavhengige av hverandre. Oppgavetyperen *figurerte*, inneholdt 107 responstider fra *kognitive* strategier, og 25 responstider fra *intuitive* besvarelser. Oppgavetyperen *tilfeldig strukturerte*, inneholdt 86 responstider fra *kognitive* strategier, og 35 responstider fra *intuitive* strategier. For hver av de fire *t*-testene måtte vi se om utvalget var normalfordelt. Hvis dataene ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013).

Først så vi på sammenhengen mellom responstider til *kognitive* og *intuitive* strategier for *figurerte* oppgaver. Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Testen ga oss $D(132) = 0,092$, $p < 0,008$, og viste signifikant at utvalget ikke var normalfordelt. Siden utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste uavhengige, ikke-parametriske variabler brukte vi Mann-Whitney U-test. Responstiden for *kognitive* strategier var statistisk signifikant høyere enn responstiden for *intuitive* strategier, $Z = -4,173$, $p < 0,001$.

Neste test så vi på sammenhengen mellom responstider i *kognitive* og *intuitive* strategier fra *tilfeldig strukturerte* oppgaver. Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Testen ga oss $D(121) = 0,187$, $p < 0,001$, og viste signifikant at utvalget ikke er normalfordelt. Siden utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste uavhengige, ikke-parametriske variabler brukte vi Mann-Whitney U-test. Responstiden for *kognitive* strategier var statistisk signifikant høyere enn responstiden for *intuitive* strategier, $Z = -2,207$, $p < 0,027$.

Vi ville også se på sammenhengen mellom responstiden for *kognitive* strategier fra *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver. Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Testen ga oss $D(193) = 0,121, p < 0,001$, og viste signifikant at utvalget ikke var normalfordelt. Siden utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste uavhengige, ikke-parametriske variabler brukte vi Mann-Whitney U-test. Responstiden for *kognitive* strategier fra *figurerte* oppgaver var statistisk signifikant høyere enn responstiden for *kognitive* strategier fra *tilfeldig strukturerte* oppgaver, $Z = -6,938, p < 0,001$.

Til slutt så vi på sammenhengen mellom responstiden for *intuitive* strategier fra *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver. Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Testen ga oss $D(60) = 0,231, p < 0,001$, og viste signifikant at utvalget ikke var normalfordelt. Siden utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste uavhengige, ikke-parametriske variabler brukte vi Mann-Whitney U-test. Responstiden for *Intuitive* strategier fra *figurerte* oppgaver var statistisk signifikant høyere enn responstiden for *Intuitive* strategier fra *tilfeldig strukturerte* oppgaver, $Z = -2,182, p < 0,029$.

For å oppsummere resultatene av signifikantstestene har vi satt dem i tabell 4.8. Kolmogorov-Smirnov test viste signifikant at ingen av utvalgene var normalfordelt. Ingen av utvalgene var relatert med hverandre. Dermed måtte vi bruke en Mann-Whitney U-test (Field, 2013). Alle testene viste at forskjellen mellom utvalgene var statistisk signifikant. Resultatene av Mann-Whitney U-testen vises i tabellen under.

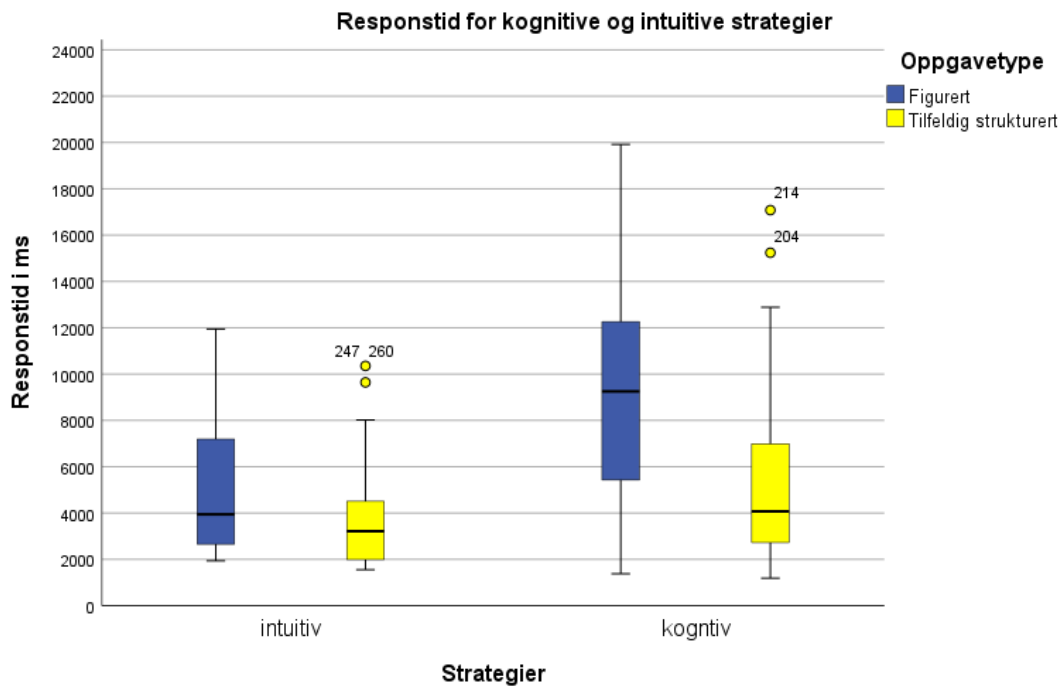
	Z	p
<i>Kognitive</i> mot <i>intuitive</i> strategier, fra <i>figurerte</i> oppgaver.	-4,173	< 0,001
<i>Kognitive</i> mot <i>intuitive</i> strategier, fra <i>tilfeldig strukturerte</i> oppgaver.	-2,207	0,027
<i>Kognitive</i> strategier i <i>figurerte</i> oppgaver mot <i>kognitive</i> strategier i <i>tilfeldig strukturerte</i> oppgaver.	-6,938	< 0,001
<i>Intuitive</i> strategier i <i>figurerte</i> oppgaver mot <i>intuitive</i> strategier i <i>tilfeldig strukturerte</i> oppgaver.	-2,182	0,029

Tabell 4.8: Resultater fra Mann-Whitney U-test på data knyttet til figur 4.13.

I figur 4.13 ser vi et boxplot av responstidene til de *kognitive* og *intuitive* strategiene for å besvare de *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgavene. For de *figurerte* oppgavene var det en signifikant forskjell i responstidene mellom de *intuitive* og de *kognitive* strategiene. Det samme gjelder for de *tilfeldig strukturerte* oppgavene. Det er høyere responstid for de *kognitive* enn for de *intuitive* strategiene. Dette understreker at de *kognitive* strategiene, er mer omfattende, og i så måte peker på en kognitiv prosess for estimering.

De *kognitive* strategiene har signifikant lengre responstid for de *figurerte* oppgavene enn for de *tilfeldig strukturerte*. Dette peker på at strukturen har en sammenheng med estimeringen, en lett gjenkjennelig figur fasiliterer for mer omfattende kognitiv estimering. I tillegg ser vi at de *intuitive* strategiene har signifikant lengre responstid for de *figurerte* oppgavene enn for de *tilfeldig strukturerte*. Dette følger ikke teorien om en

intuitiv modell for estimering. Selv om *intuitiv* estimering av den *figurerte* oppgavetypen er mer kognitivt omfattende enn for den *tilfeldig strukturerte* oppgavetypen.



Figur 4.13: Boksplot for responstider (1)

Responstidene er hentet fra besvarelser kategorisert som *intuitive* og *kognitive* strategier for *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver.

4.3.1.2 Symmetrisk gruppert mot ikke-symmetrisk gruppert

Et av forskningsspørsmålene våre er: *Hva er sammenhengen mellom symmetrisk strukturering av en mengde og estimering av mengden?* Tidligere i kapittelet har vi besvart dette spørsmålet ved å se på kvantitative funn. Nå vil vi utdype dette svaret ved å sammenligne kvantitative funn med kvalitative funn. Her har vi en lignende situasjon som for den figurerte og tilfeldig strukturerte oppgavetypen. Vi vet fra tidligere analyser at det er forskjell i hvor godt oppgavetyperne fasiliterer for kognitive strategier. Vi vet også at det blir brukt kognitive strategier på begge oppgavetyperne. Derfor vil vi også her se responstiden til deltakerne som har oppgitt at de brukte *kognitive* og *intuitive* strategier. Figur 4.14 visualiserer disse responstidene, og viser forskjell i responstiden mellom oppgavetyperne. Vi ville teste om det var en statistisk signifikant forskjell mellom dem, og gjennomførte fire *t*-tester.

Analysen av *kognitive* og *intuitive* strategier for *symmetriske* og *ikke-symmetriske* grupper foregikk på samme måte som for *kognitiv* og *intuitive* strategier fra *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver. De fire *t*-testene ville gi et helhetlig bilde av sammenhengen mellom responstidene. Vi så på sammenhengen mellom *kognitive* og *intuitive* strategier for begge oppgavetyperne. Videre så vi på responstidene fra *kognitive* besvarelser i de *symmetrisk grupperte* oppgavene mot responstidene fra *kognitive* besvarelser fra de *ikke-symmetrisk grupperte* oppgavene. Til slutt så vi på responstidene fra *intuitive* besvarelser på *symmetrisk grupperte* oppgaver mot responstider fra *intuitive* besvarelser på *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Fra de *symmetrisk grupperte* oppgavene inneholdt utvalget 106 responstider fra *kognitive* besvarelser, og 22 responstider fra *intuitive* besvarelser. Fra *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver inneholdt

utvalget 102 *kognitive* besvarelser, og 24 *intuitive* besvarelser. I likhet med responstidene i forrige delkapittel er det heller ikke de samme deltakerne i dette datasettet, dermed er utvalgene uavhengige av hverandre.

Vi startet med å se på sammenhengen mellom responstider i *kognitive* og *intuitive* strategier fra *symmetrisk grupperte* oppgaver. Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Testen ga oss $D(128) = 0,153$, $p < 0,001$, og viste signifikant at utvalget ikke var normalfordelt. Siden utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste uavhengige, ikke-parametriske variabler brukte vi Mann-Whitney U-test. Responstiden for *kognitive* strategier var statistisk signifikant høyere enn responstiden for *intuitive* strategier, $Z = -3,670$, $p < 0,001$.

Videre så vi på sammenhengen mellom responstider i *kognitive* og *intuitive* strategier fra *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Testen ga oss $D(126) = 0,092$, $p < 0,011$, og viste signifikant at utvalget ikke var normalfordelt. Siden utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste uavhengige, ikke-parametriske variabler brukte vi Mann-Whitney U-test. Responstiden for *kognitive* strategier var statistisk signifikant høyere enn responstiden for *intuitive* strategier, $Z = -4,138$, $p < 0,001$.

Den neste testen vi gjorde så på sammenhengen mellom responstiden for *kognitive* strategier fra *symmetrisk* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Testen ga oss $D(208) = 0,143$, $p < 0,001$, og viste signifikant at utvalget ikke var normalfordelt. Siden utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste uavhengige, ikke-parametriske variabler brukte vi Mann-Whitney U-test. Responstiden for *kognitive* strategier fra *symmetrisk grupperte* oppgaver var ikke statistisk signifikant høyere enn responstiden for *kognitive* strategier fra *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver, $Z = -1,514$, $p < 0,130$.

Den siste testen så på sammenhengen mellom responstiden for *intuitive* strategier fra *symmetrisk* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Vi gjennomførte Kolmogorov-Smirnov test for å se om utvalget var normalfordelt. Testen ga oss $D(46) = 0,218$, $p < 0,001$, og viser signifikant at utvalget ikke var normalfordelt. Siden utvalget ikke var normalfordelt, måtte vi bruke en ikke-parametrisk *t*-test (Field, 2013). For å teste uavhengige, ikke-parametriske variabler brukte vi Mann-Whitney U-test. Responstiden for *Intuitive* strategier fra *symmetrisk grupperte* oppgaver var ikke statistisk signifikant høyere enn responstiden for *intuitive* strategier fra *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver, $Z = -0,088$, $p < 0,930$.

For å oppsummere testene vi gjorde på responstidene til *intuitive* og *kognitive* besvarelser fra *symmetrisk* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver, har vi satt resultatene inn i tabell 4.9. Ingen av utvalgene som ble brukt i testene var normalfordelte, dette fant vi ut av ved å bruke en Kolmogorov-Smirnov test. Dermed måtte vi bruke en Mann-Whitney U-test som er laget for uavhengige, ikke-parametriske variabler. Det var statistisk signifikant forskjell mellom *kognitive* og *intuitive* strategier fra begge oppgavetyperne. Det var derimot ikke statistisk signifikant forskjell mellom

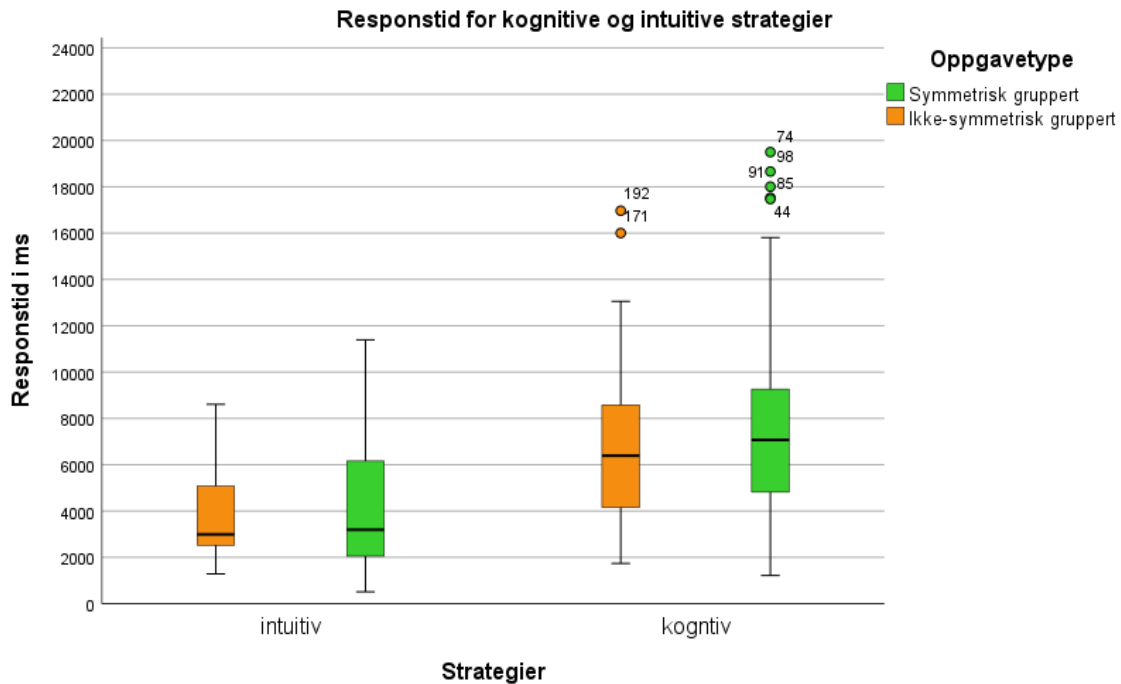
responstider fra *kognitive* eller *intuitive* besvarelse på *symmetrisk grupperte* oppgaver mot *kognitive* eller *intuitive* besvarelser på *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver.

	Z	p
<i>Kognitive mot intuitive strategier, fra symmetrisk grupperte oppgaver.</i>	-3,670	< 0,001
<i>Kognitive mot intuitive strategier, fra ikke-symmetrisk grupperte oppgaver.</i>	-4,138	< 0,001
<i>Kognitive strategier i symmetrisk grupperte oppgaver mot kognitive strategier i ikke-symmetrisk grupperte oppgaver.</i>	-1,514	0,130
<i>Intuitive strategier i symmetrisk grupperte oppgaver mot intuitive strategier i ikke-symmetrisk grupperte oppgaver.</i>	-0,088	0,930

Tabell 4.9: Resultater fra Mann-Whitney U-test på data knyttet til figur 14.

I figur 4.14 ser vi et boxplot av responstidene til de *kognitive* og *intuitive* strategiene for å besvare de *symmetrisk grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgavene. For de *symmetriske* oppgavene var det signifikant høyere responstid for de *kognitive* enn for de *intuitive* strategiene. Det samme gjaldt for de *ikke-symmetriske* oppgavene. Det var signifikant høyere responstid for de *kognitive* enn for de *intuitive* strategiene. Dette understreker at de *kognitive* strategiene peker på en kognitiv prosess for estimering. Deltakerne som har oppgitt *kognitive* strategier bruker lengre tid på å estimere. Både deltakernes egen beskrivelse og deltakernes responstid indikerer at de har estimert kognitivt.

Forskjellen mellom *intuitive* strategier for de ulike oppgavetyperne var ikke signifikant. Det var heller ikke forskjellen mellom *kognitive* strategier for ulike oppgavetyper. Dermed kan vi ikke si noe om disse forskjellene.



Figur 4.14: Boksplot for responstider (2)

Responstidene er hentet fra besvarelser kategorisert som *intuitive* og *kognitive* strategier for *symmetrisk grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver.

4.3.2 Responstider fra ulike *kognitive* strategier

Et av forskningsspørsmålene våre var: *Hvordan beskriver lærerstudenter selv at de estimerer?* Dette spørsmålet har vi besvart tidligere ved å se på kvalitative funn. I dette delkapittelet triangulerer vi de kvalitative funnene med responstider fra kvantitative funn. Deltakerne oppga å bruke mange ulike strategier. Strategiene har vi delt inn i kategorier, og kategoriene vi fant i datamaterialet ble vurdert opp mot eksisterende teori. Slik kunne vi vurdere om kategoriene inneholdt *kognitive* eller *intuitive* strategier. *Intuitive* strategier ble satt under samme kategori, men vi fikk fem kategorier som inneholdt *kognitive* strategier. De fem *kognitive* strategiene var *gruppering*, *regning*, *telling*, *lager figuren selv* og *sammenligning*. Svakheten med disse funnene er at de er kun basert på deltakernes oppfatning av egne strategier. Derfor vil vi triangulere deltakernes rapporterte strategier med responstiden deres. Dette vil styrke reliabiliteten til våre kvalitative funn (Bryman, et. al., 2021). For deltakere som har rapportert *kognitive* strategier forventer vi høye responstider, og for *intuitive* strategier forventer vi lave responstider.

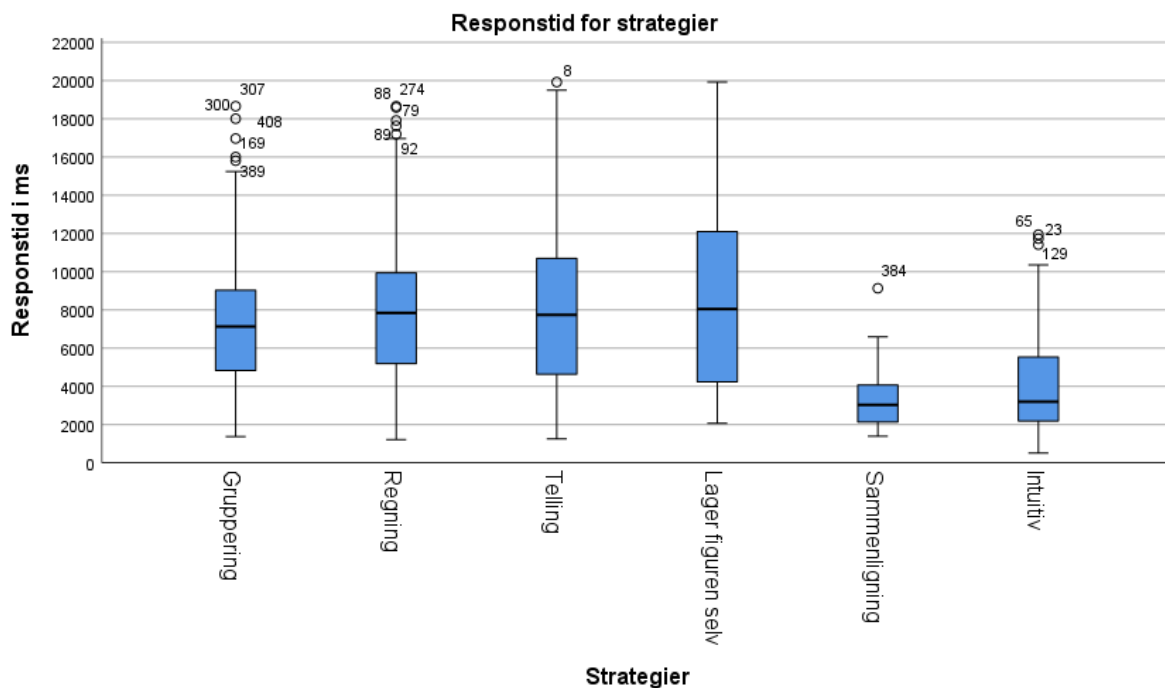
For å visualisere dette laget vi diagrammer som sammenligner responstidene fra oppgaver der deltakerne oppga hvilken strategi de brukte (figur 4.15). Resultatene samsvarte stort sett med det vi forventet. Deltakere som rapporterte *intuitive* strategier hadde lavere responstid enn de som rapporterte *kognitive* strategier. Det var imidlertid én kategori som ga overraskende resultater. Deltakere som rapporterte strategien *sammenligning* hadde de laveste responstidene av alle. Dette var overraskende fordi vi så på *sammenligning* som en *kognitiv* strategi. For å se om forskjellene vi fant i resultatet var statistisk signifikante, måtte vi gjennomføre signifikanstester.

Før vi kunne teste om forskjellen mellom responstidene til kategoriene var statistisk signifikant, måtte vi se om utvalget var normalfordelt. Vi gjennomførte en Kolmogorov-

Smirnov test, $D(609) = 0,108$, $p < 0,001$, som viste signifikant at utvalget ikke var normalfordelt. Dermed måtte vi benytte en signifikanstest som var tilpasset flere uavhengige, ikke-parametriske variabler. Vi gjennomførte derfor en Kruskal-Wallis H-test på responstidene fra de seks kvalitative kategoriene: gruppering, regning, telling, *lager figuren selv*, *sammenligning* og *intuitiv*. Forskjellen mellom gjennomsnittsrangeringene av 335,49 (*gruppering*), 367,89 (*regning*), 351,72 (*telling*), 361,56 (*lager figuren selv*), 127,36 (*sammenligning*) og 170,43 (*intuitiv*) var statistisk signifikant, $H(5, n = 609) = 136,316$, $p < 0,001$.

Resultatet fra Kruskal-Wallis H-testen indikerer at forskjellene som blir visualisert i figur 4.15 er statistisk signifikante. I figur 4.15 ser vi diagrammer for responstidene for hver strategi. Det er ikke overraskende at responstiden til deltakere som har oppgitt å bruke en *intuitiv* strategi har lavere responstid. Det er likevel verdt å merke seg at *intuitive* strategier har lavere responstid enn de fleste *kognitive* strategier innenfor alle oppgavetyper. Denne forskjellen er mindre for de *tilfeldig strukturerte* oppgavene, enn for resten. Likevel er forskjellen signifikant og til stede, og synlig i figur 4.15.

Responstiden for deltakere som har oppgitt å bruke strategien *sammenligning*, skiller seg ut. Den er tydelig lavere enn de andre *kognitive* strategiene. I diagrammene ser *sammenligning* ut til å ha responstider som er mer lik en *intuitiv* strategi. Strategiene *sammenligning* og *intuitiv* har lignende medianer og lite spredning.



Figur 4.15: Box-plot av responstid for ulike strategier

Figuren viser et diagram for hver oppgavetype. Responstiden er kun hentet fra oppgaver med numerositeten 16, 21 og 29.

4.4 Oppsummering

I dette kapittelet har vi presentert resultatene fra analysen vår. Først viste vi at deltakerne selv rapporterte kognitive strategier for estimering. Vi har også besvart problemstillingen ved å vise at det er en sammenheng mellom strukturering av en

mengde og estimeringen av den. Vi har vist at estimering kan skje kognitivt, og at strukturen i mengden fasiliterer for hvor kognitiv estimering blir. Videre har vi også vist at ulike strukturer legger til rette for ulike *kognitive* strategier. *Figurerte* oppgaver fasiliterer bedre for gruppering og regning enn *tilfeldig strukturerte*. *Tilfeldig strukturerte* oppgaver fasiliterer bedre for *sammenligning* enn *figurerte*. Selv om *sammenligning* var definert som en kognitiv strategi i teorikapittelet vårt, pekte responstiden for kategorien på at den kanskje er intuitiv. Vi har også vist at *symmetrisk grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver fasiliterer godt for *gruppering* og *regning*, men *symmetrisk grupperte* oppgaver fasiliterer litt bedre.

Vi fant at flere av deltakerne har brukt mer *kognitive* strategier enn *intuitive*. Den kvalitative analysen avdekket også at det var vanskelig å skille om deltakere brukte en *intuitiv* strategi eller strategien *sammenligning*. Dette blir forsterket av at responstidene for deltakerne som brukte strategien *sammenligning* har en lav responstid. Responstiden deres ligner mer på den fra deltakere som bruker *intuitive* strategier, enn på andre *kognitive* strategier. Til slutt viser analysen at deltakere som bruker *intuitive* strategier har lavere responstid enn deltakere som bruker *kognitive* strategier. Denne forskjellen blir ulike, avhengig av hvordan oppgavene blir strukturert.

5 Diskusjon

5.1 Formålet med oppgaven

Formålet med oppgaven vår var å finne ut om estimering skjer intuitivt eller kognitivt. Dette er et viktig spørsmål fordi svaret har konsekvenser for hvordan undervisning med estimering bør se ut. Undervisning som inneholder estimering vil ha ulikt fokus avhengig av hvilken modell man baserer undervisningen på. Ved å finne ut hvilken modell som stemmer for estimering, kan vi gi lærere et teoretisk grunnlag for valg av aktiviteter i undervisning med estimering. For å nå dette målet har vi besvart problemstillingen:

Vil lærerstudenter estimere intuitivt eller kognitivt i estimeringsoppgaver med lett gjenkjennelige mønstre og symmetriske gruppestrukturer?

Vi brøt ned problemstillingen i tre forskningsspørsmål:

1. Hvordan beskriver lærerstudenter selv at de estimerer?
2. Hva er sammenhengen mellom strukturering i lett gjenkjennelige figurer eller tilfeldig strukturerte mengder, og estimering av mengdene?
3. Hva er sammenhengen mellom symmetrisk strukturering av en mengde og estimering av mengden?

5.2 Våre funn

For å besvare problemstillingen har vi samlet inn og analysert kvalitative og kvantitative data fra 162 lærerstudenter. Resultatene fra analysen peker mot at estimering skjer kognitivt. I dette delkapittelet skal vi oppsummere disse funnene og drøfte hvorfor de peker mot at estimering skjer kognitivt.

5.2.1 *Hvordan beskriver lærerstudenter selv at de estimerer?*

Med vårt første forskningsspørsmål, ønsket vi å undersøke hvordan lærerstudenter selv beskrev at de estimerte. Deltakernes egenrapporterte strategier peker på en kognitiv modell for estimering. De fleste rapporterer *kognitive* strategier. Det peker på en kognitiv modell for estimering. I tillegg peker flere av de *kognitive* strategiene i seg selv mot en kognitiv modell for estimering. Strategiene *gruppering*, *regning* og *telling* beskriver alle kognitiv prosessering av mengden som skal estimeres. Strategien *lager figuren selv* peker på bruken av arbeidsminnet. Lagring av bildet på arbeidsminnet og en prosessering av mengden, er sentralt i en kognitiv modell for estimering (Gilmore, et. al., 2018).

Deltakerne bruker også flere strategier om hverandre. De har mange strategier tilgjengelig, og kan bruke et utvalg av dem for å løse problemet i estimeringsoppgaven. At estimering inneholder et valg om å bruke hensiktsmessige strategier, kan ikke beskrives av en intuitiv modell for estimering. Dette peker i stedet på at estimering er en kompleks problemløsningsaktivitet, sånn som det blir beskrevet av en kognitiv modell for estimering (Lüwel og Verschaffel, 2008).

Med ulik struktur i oppgavene, brukte deltakerne ulike strategier. Vi sammenlignet deltakernes rapporterte strategier for *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver. Her fant vi at de *figurerte* oppgavene fasiliterte bedre for *kognitive* strategier. For sammenligningen av de *symmetrisk grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgavene, fikk vi ikke tilsvarende resultater. Her fasiliterte oppgavetyperne omtrent like godt for *kognitive* strategier. Oppgavetypernes struktur fasiliterte for den *kognitive* strategien *regning*. Både en lett gjenkjennelig struktur og en symmetrisk struktur gjorde at deltakerne brukte strategien *regning* i større grad.

Sammenligning var den siste *kognitive* strategien vi fant gjennom analysen av deltakernes besvarelser. Noen av besvarelsene som kunne høre til denne kategorien var vanskelig å kategorisere som enten *intuitive* eller *kognitive*. I tillegg fant vi at responstiden for kategorien var lavere enn de andre *kognitive* strategiene. Dermed pekte ikke denne kategorien på en kognitiv modell for estimering på samme måte som de andre *kognitive* strategiene.

5.2.2 Hva er sammenhengen mellom strukturering i lett gjenkjennelige figurer eller tilfeldig strukturerte mengder, og estimering av mengdene?

Sammenligning av oppgavetyperne *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* fremhevet sammenhengen mellom struktur og estimering. Resultatene fra de *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgavene peker på en kognitiv modell for estimering. På flere, ulike måter. Responstidene for de *figurerte* oppgavene er statistisk signifikant høyere ($p < 0,001$) enn for de *tilfeldig strukturerte*. Lengre responstider på de *figurerte* oppgavene viser at deltakerne tenker mer for å løse disse oppgavene. Altså var de *kognitive* prosessene mer omfattende for *figurerte* oppgaver enn for *tilfeldig strukturerte*. Dette peker mot at det er sammenheng mellom struktur og estimering. Responsene for de *figurerte* oppgavene fulgte ikke samme mønster som for de *tilfeldig strukturerte*. I likhet med responstidene var deltakernes responser statistisk signifikant høyere ($p < 0,001$) for *figurerte* oppgaver enn *tilfeldig strukturerte*. Igjen peker dette på en sammenheng mellom struktur og estimering.

Boksplottet av de *kognitive* og *intuitive* strategiene viste at deltakerne hadde ulik responstid for de samme strategiene i de ulike oppgavetyperne. Både *kognitive* og *intuitive* strategier for *figurerte* oppgaver hadde en statistisk signifikant høyere responstid enn *kognitive* og *intuitive* strategier på *tilfeldig strukturerte* oppgaver. Vi har argumentert for hvorfor responstid er et mål for den *kognitive* prosesseringen. Derfor viser boksplottene at *kognitive* strategier ikke er like for *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver. De samme strategiene var mer kognitivt omfattende for *figurerte* oppgaver. Dette peker mot at dersom deltakerne forsøkte å benytte *kognitive* strategier, ville mengdens struktur være med å avgjøre hvor kognitivt omfattende estimeringen ble. Dette styrker sammenhengen mellom struktur og estimering. For å oppsummere viser responstider, responser og rapporterte strategier fra *figurerte* og *tilfeldig strukturerte* oppgaver, at det er sammenheng mellom struktur og estimering. Dette er i strid med *intuitive* modeller, dermed viser resultatene at estimering kan skje kognitivt.

5.2.3 Hva er sammenhengen mellom symmetrisk strukturering av en mengde og estimering av mengden?

Vi sammenlignet også *symmetrisk grupperte* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Dette fremhevet også sammenhengen mellom struktur og estimering. Resultatene fra

symmetrisk grupperte og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver støttet en kognitiv modell for estimering. Forskjellen mellom strukturen i oppgavetyperne var ikke stor. Den eneste forskjellen var at den ene oppgavetypen hadde en symmetrisk strukturering av gruppene. Likevel har denne forskjellen i struktur ført til ulike resultater. Dermed viser analyse av disse oppgavetyperne også at det er en sammenheng mellom struktur og estimering, og at estimering kan skje kognitivt.

Responstidene for *symmetrisk grupperte* oppgaver var statistisk signifikant høyere ($p < 0,001$) enn *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Det var en forskjell i responstid, men den var ikke like stor som for *figurerte* og *tilfeldig strukturerte*. Deltakernes responser på *symmetrisk grupperte* oppgaver var også statistisk signifikant høyere ($p < 0,001$) enn *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver. Både responstider og responser peker dermed mot at det er sammenheng mellom struktur og estimering.

Responstidene for deltakerne som beskriver *kognitive* strategier var statistisk signifikant høyere ($p < 0,001$) enn responstiden for de som oppga å ha brukt *intuitive* strategier. Det er dermed tydelig at deltakerne har tenkt, og det har foregått en eller annen kognitiv prosess. Dette peker på en kognitiv modell for estimering. Vi har derimot ikke funnet signifikant forskjell mellom responstiden til *kognitive* strategier mellom oppgavetyperne *symmetrisk* og *ikke-symmetrisk grupperte*. Dermed kan vi ikke si noe om sammenligningen av *kognitive* strategier mellom *symmetrisk* og *ikke-symmetrisk grupperte* oppgaver.

5.2.4 Resultatene peker på en kognitiv modell for estimering

Oppsummert viser våre funn at en intuitiv modell ikke viser et helhetlig bilde av estimering. Dermed er det hensiktsmessig å bruke en kognitiv modell som grunnlag for undervisning som inneholder estimering. Vi har vist dette gjennom deltakernes egenrapporterte strategier. Deltakerne rapporterte mest bruk av kognitive strategier. Vi har også pekt på en kognitiv modell for estimering gjennom å finne sammenheng mellom strukturen i en mengde og estimeringen av mengden. Vi har vist at ulike strukturer estimeres ulikt. Dette er et sentralt skille mellom kognitive og intuitive modeller. Intuitive modeller sier at strukturen i en mengde ikke har betydning for estimering. Dermed har vi vist at den intuitive modellen ikke stemmer for all estimering. Derfor kan vi si at estimering kan skje kognitivt, og det er sammenheng mellom mengdens struktur og hvilke kognitive strategier som blir brukt.

5.3 Didaktiske konsekvenser

I teorikapittelet presenterte vi to ulike måter å undervise gjennom estimering. Disse to undervisningsoppleggene tok utgangspunkt i hver sin modell for estimering. Våre funn tyder på at undervisning bør være utviklet gjennom en kognitiv modell for estimering.

Det intuitive undervisningsopplegget ble utviklet med mål å utvikle elevers estimering ved å trene opp intuisjonen. Undervisningen gikk ut fra at ANS har en sammenheng med matematiske ferdigheter (Park, et. al. 2016). Dette er omdiskutert (Gilmore, et. al., 2018). I undervisningsopplegget fra Park et. al. (2016) var ikke struktureringen av mengden med elementer viktig. Undervisningen handlet om å øve på å sammenligne mengder. Dersom oppgaven skulle endres på, endret man på mengdenes numerositet eller forskjellen mellom mengdenes numerositet (Park et al, 2016). Klarer man å estimere vanskeligere oppgaver, har man utviklet sin ANS-ferdighet, og man vil ha økt

sine matematiske ferdigheter. Våre resultater tyder på at det intuitive ikke er sentralt for estimering, og at deltakere bruker kognitive prosesser. Derfor mener vi dette undervisningsopplegget ikke får med seg helheten av estimering. Våre resultater peker også på at undervisningen ikke bruker de strukturene som fasiliterer best for matematiske operasjoner.

Det andre undervisningsopplegget så på estimering som en kognitiv prosess. Bruken av arbeidsminnet fører til at man kan prosessere ulike mengder kognitivt. Denne prosesseringen har en sammenheng med strukturen mengdene presenteres i. Undervisningsopplegget tok utgangspunkt i at ulik strukturering av mengden har en sammenheng med estimering. Ulike strukturer kan gi ulike regnestrategier. Dette undervisningsopplegget påsto å kunne arbeide med regneartene og egenskaper ved disse. Her skulle elevene reflektere og diskutere hvilke strategier som var hensiktsmessig for å estimere (Bondø, 2016). Vi har funnet resultater som peker på at estimering kan være kognitivt. Derfor mener vi at undervisning med estimering må utvikles på bakgrunn av en kognitiv modell for estimering.

Vi har også funnet at ulik strukturering av mengden fasiliterer for regning. Med undervisning gjennom estimering, bør mengdene struktureres slik at de fasiliterer for matematikk. Vi har sett at våre deltakere brukte kognitive strategier for estimering. Videre har vi sett at strategier kan ha en sammenheng med strukturen i oppgaven, og at strategiene kan bli mer matematiske. Ved å fokusere på å tilpasse strukturen i mengdene som skal estimeres, kan man fasilitere for matematiske operasjoner. Dette samsvarer med hvordan Bondø (2016) beskriver sin undervisning. Strukturen vi fant som fasiliterte best for matematiske operasjoner var *symmetrisk gruppert*. *Ikke-symmetrisk gruppert* og *figurert* fasiliterte også for matematiske operasjoner, men ikke i like stor grad. Våre funn sier at det er mulig å bruke kognitive strategier på tilfeldig strukturerte mengder. Det er derimot svært få som benytter *regning*. Dermed er det mer hensiktsmessig å bruke andre strukturer i undervisningen, hvis man ønsker å arbeide matematisk med estimering.

Våre resultater peker mot en kognitiv modell for estimering. De peker også på at ulik strukturering av mengden kan fasilitere for matematikk. Derfor mener vi at et undervisningsopplegg med estimering bør følge en kognitiv modell. Det som blir viktig med denne undervisningen, er å designe strukturer som legger til rette for de ønskede matematiske refleksjonene og diskusjonene.

5.4 Implikasjoner for videre forskning

Vi mener våre resultater peker spesielt på to områder som forskningsfeltet kan utforske videre. Først mener vi resultatene peker på videre utforsking av de didaktiske mulighetene ved estimering. Gjennom våre resultater ser vi at vi kan fremme strategien *regning* med strukturer i mengden som skal estimeres. Både en gjenkjennelig struktur og en symmetrisk struktur fremprovoserte strategien *regning*. Dette viser at lærere må ta hensyn til mengdens struktur når de designer matematikkundervisning med estimering. Vi mener det er et behov for å utforske videre hvordan strukturer i mengder fasiliterer for matematikk. Mer generelt så vi at strukturer fasiliterte for regning, men ikke hvilke strukturer som fasiliterte for ulike deler av matematikken. Gjennom undervisningsopplegget fra Matematikksenteret (Bondø, 2016), poengterte vi at undervisningen kunne fremme regneoperasjoner, og egenskaper ved disse, som assosiativitet, distributivitet og kommutativitet. Våre resultater fremmer et behov for å utforske hvilke strukturer som har en sammenheng med regneoperasjonene og deres

egenskaper. Vi lurer på hvilke strukturer som best får frem refleksjoner og diskusjoner om akkurat det matematiske innholdet som undervisningen skal inneholde.

Det andre området vi mener kan utforskes mer handler om strategien *sammenligning*. Gjennom denne strategien fikk vi uforventede resultater. I teorikapittelet redegjorde vi for mental sammenligning som en kognitiv strategi. Vi fant en kategori i datamaterialet som vi kalte *sammenligning*. På grunn av litteraturen beskrev vi *sammenligning* som en *kognitiv* strategi. Men i våre resultater var ikke *sammenligning* lik de andre *kognitive* strategiene. *Sammenligning* hadde lavere responstid og var vanskeligere å kode enn de andre *kognitive* strategiene. På bakgrunn av disse resultatene mener vi derfor at det er behov for å undersøke denne strategien nærmere. Kanskje er *sammenligning* egentlig en mer intuitiv strategi. Eller kanskje *sammenligning* er en veldig rask måte å prosessere det man har sett for å komme frem til et estimat. Vi ønsker en dypere forklaring fra deltakere som bruker sammenligning for å estimere. Dette kan gi oss et svar på hva det faktisk innebærer at deltakere sammenligner for å komme frem til et estimat.

5.5 Funn relatert til tidligere forskning

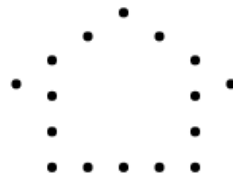
Tre av oppgavetyperne vi designet har i ulik grad hentet inspirasjon fra tidligere forskning (f.eks Ciccione og Dehaene, 2020; Mandler og Shebo, 1982; Starkey og McCandliss, 2014). Dette er oppgavetyperne *tilfeldig strukturert*, *symmetrisk* og *ikke-symmetrisk gruppert*. Ciccione og Dehaene (2020) bruker også gruppestrukturer i sine oppgaver. De legger fokuset på å utforske effekten av ulike antall elementer i hver gruppe, mens vi ser mer på symmetriens betydning. Ciccione og Dehaene (2020) finner korrelasjon mellom matematiske ferdigheter og prestasjon i estimeringsoppgaver med gruppestrukturer. Vi ser ikke etter denne korrelasjonen, men våre funn viser at gruppestrukturer fasiliterer for matematiske regneoperasjoner. Dermed er det en logisk sammenheng mellom resultatene. Hvis en oppgavetype fasiliterer for bruk av matematiske regneoperasjoner, kan vi forvente at deltakerne med høye matematiske ferdigheter vil prestere godt på oppgavetyper. Denne logiske sammenhengen styrker validiteten ved resultatene i vår oppgave og støtter Ciccione og Dehaene (2020) sine resultater.

Det er gjort flere studier på estimering av tilfeldig strukturerte mengder med store numerositeter (Kaufmann, et. al., 1949; Mandler og Shebo, 1982). Gilmore (2018) drøfter resultater fra slike studier og konkluderer med at for mengder over 20 har vi en tendens til å underestimere. Resultatene fra vår *tilfeldig strukturerte* oppgavetype viser lignende resultater. At skillet går akkurat ved mengder med 20 elementer er ikke åpenbart i våre resultater. Det er derimot tydelig at deltakerne har en tendens til å underestimere *tilfeldig strukturerte* oppgaver i våre resultater. Dermed stemmer resultatene våre for *tilfeldig strukturerte* oppgaver overens med konsensus i estimeringslitteraturen (Kaufmann, et. al., 1949; Gilmore, et. al., 2018; Mandler og Shebo, 1982).

5.6 Metodiske utfordringer.

Vi undersøkte to forskjellige måter å strukturere mengder på. En av dem undersøkte lett gjenkjennelige figurer og en av dem undersøkte symmetri. Gjennom de *symmetrisk grupperte* og de *ikke-symmetrisk* grupperte oppgavene fant vi at symmetri hadde en betydning for estimering. Et problem som vi overså, var at noen av de *figurerte* oppgavene også var symmetriske. For disse oppgavene var det derfor ikke bare gjenkjenneligheten som hadde en sammenheng med hvordan deltakerne estimerte. Her hadde deltakernes estimering både en sammenheng med gjenkjenneligheten og

symmetrien i strukturen. For eksempel kan vi se på oppgaven hvor prikkene formet et hus, i figur 5.1. Dette var lett gjenkjennelig og flere av deltakerne beskrev at de så at det var et hus. Likevel er dette huset også symmetrisk. Dermed ble ikke strategien for å estimere kun basert på at man så huset og estimerte ut ifra det. Strategien kunne også basere seg på at de så halvparten av huset, og at det var like mange prikker på hver side. På denne måten fortalte resultatene fra noen av oppgavene ikke bare sammenhengen en lett gjenkjennelig struktur har på estimering alene. Resultatene fra disse oppgavene viste i stedet at både en gjenkjennelig og en symmetrisk struktur har sammenheng med estimering. I ettertid mener vi derfor at alle *figurerte* oppgavene burde vært designet slik at de ikke var symmetriske.



Figur 5.1: Eksempel, lett gjenkjennelig og symmetrisk

5.7 Konklusjon

Denne studien har vist hvordan et utvalg lærerstudenter har estimert i oppgaver med ulike strukturer. Studiet har bidratt til å skape et teoretisk grunnlag for valg av aktiviteter i undervisning med estimering. Lærerstudentene rapporterte selv bruken av kognitive strategier. I tillegg viste responstiden til deltakerne på oppgaver med ulike strukturer, at det er sammenheng mellom strukturen i en mengde og estimering av mengden. På den måten svarer studiet på problemstillingen ved å vise at i møtet med estimeringsoppgaver med lett gjenkjennelige mønstre og symmetriske gruppestrukturer kan lærerstudenter estimere kognitivt. Videre utdyper studiet hvilke kognitive strategier de ulike strukturene fasiliterer for. Ved å besvare problemstillingen peker vi på hvilken didaktisk tilnærming undervisning med estimering bør ha.

Siden studiet viser at estimering kan skje kognitivt, er Bondø (2016) et eksempel på hvordan man bør gjennomføre undervisning med estimering. Strukturen i mengdene som skal estimeres blir sentral. Den skal fasilitere for bruk av kognitive strategier. Ved å fasilitere for kognitive strategier vil undervisningen også åpne muligheten for å resonnerer over ulike strategier i fellesskap. Gjennom slik resonnering kan elever få kjennskap til egenskaper ved matematiske operasjoner. Egenskaper som assosiativitet og distributivitet blir synlige gjennom ulike strategier i Bondø (2016) sin aktivitet. Vår oppgave støtter denne typen undervisning, fordi våre resultater peker på en kognitiv modell for estimering.

Referanser

- Argillo, C., Laura, P., Bisazza, A., & Butterworth, B. (2015). Ratio dependence in small number discrimination is affected by the experimental procedure. *Cognition*.
- Arndt, D., Sahr, K., Opfermann, M., Leutner, D., & Fritz, A. (2013). Core knowledge and working memory as prerequisites of early school arithmetic. *South African Journal of Childhood Education*. Retrieved from http://www.scielo.org.za/scielo.php?pid=S2223-76822013000100002&script=sci_arttext&tlng=es
- Aubert, K. E. (2023). *tall*. Store norske leksikon. Retrieved from <https://snl.no/tall>
- Bondø, A. (2016). Kvikkbilder i arbeid med tallforståelse. *Matematikksenteret*. Retrieved from <https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Bond%C3%B8.%20Kvikkbilder%20i%20arbeid%20med%20tallforst%C3%A5else.pdf>
- Briseid, E. M. (2023). *mengde - matematikk*. Store norske leksikon. Retrieved from http://snl.no/mengde_-_matematikk
- Bryman, A., Clark, T., Foster, L., & Sloan, L. (2021). *Bryman's Social Research Methods*. Oxford University Press.
- Charmaz, K. (2006). *Constructing Grounded Theory: A practical guide through qualitative analysis*. Sage Publications.
- Charmaz, K., & Thornberg, R. (2014). Grounded Theory and Theoretical Coding. In U. Flick, *The SAGE Handbook of Qualitative Data Analysis* (pp. 153-169). Sage Publications. doi:<https://doi.org/10.4135/9781446282243>
- Ciccione, L., & Dehaene, S. (2020). Grouping Mechanisms in Numerosity Perception. *Open Mind*, 102-118. doi:[10.1162/opmi_a_00037](https://doi.org/10.1162/opmi_a_00037)
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and Teaching Early Math The Learning Trajectories Approach*. Routledge.
- Clements, D. H., Sarama, J., & MacDonald, B. L. (2018). Subitizing: The Neglected Quantifier. In A. Norton, & M. W. Alibali, *Constructing Number Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education* (pp. 13-45). Springer.
- Cohen, Z. Z., Arend, I., Yuen, K., Naperstek, S., Gilksman, Y., Veksler, R., & Henik, A. (2018). Tactile enumeration: A case study of acalculia. *Brain and Cognition*, 60-71. doi:<https://doi.org/10.1016/j.bandc.2018.10.001>.
- Creswell, J. W. (2014). Selection of Research Approach. In J. W. Creswell, *Research Design: Qualitativ, Quantitativ and Mixed Methods Approachs* (pp. 3-23). Sage.
- Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research Design - International Student Edition*. Sage Publication Inc.

- Dehaene, S. (2003). The neural basis of the Weber–Fechner law: a logarithmic mental number line. *Trends in Cognitive Sciences*, 145-147.
doi:[https://doi.org/10.1016/S1364-6613\(03\)00055-X](https://doi.org/10.1016/S1364-6613(03)00055-X)
- Field, A. (2013). *Discovering Statistics Using SPSS* (4th ed.). Sage Publications.
- Fu, W., Dolfi, S., Decarli, G., Spironelli, C., & Zorzi, M. (2022). Electrophysiological Signatures of Numerosity Encoding in a Delayed Match-to-Sample Task. *Frontiers in Human Neuroscience*. doi:10.3389/fnhum.2021.750582
- Gilmore, C., Göbel, S. M., & Inglis, M. (2018). *An Introduction to Mathematical Cognition*. Routledge.
- Helbarda, J., Ly, R., Wilmer, J. B., & Germine, L. (2012). Number sense across the lifespan as revealed by a massive Internet-based sample. *Psychological and Cognitive Sciences*, 11116-11120. doi:<https://doi.org/10.1073/pnas.1200196109>
- Helbarda, J., Mazzocco, M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, 455, 665–668.
doi:<https://doi.org/10.1038/nature07246>
- IBM corp. (utgitt i 2021). *IBM SPSS Statistics for windows (versjon 28.0)*. IBM corp.
- Jevons, W. s. (1871). The Power of Numerical Discrimination. *Nature* 3, pp. 281–282.
doi:<https://doi.org/10.1038/003281a0>
- Katzin, N., Cohen, Z. Z., & Henik, A. (2019). If it looks, sounds, or feels like subitizing, is it subitizing? A modulated definition of subitizing. *Psychonomic Bulletin & Review*, 790–797. doi:<https://doi.org/10.3758/s13423-018-1556-0>
- Kaufmann, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., & Volkman, J. (1949). The Discrimination of Visual Number. *The American Journal of Psychology*, 498-525.
doi:<https://doi.org/10.2307/1418556>
- Kennedy, B. L. (2018). Deduction, Induction, and Abduction. In *The SAGE Handbook of Qualitative Data Collection* (pp. 49-64). SAGE Publications Ltd.
- Krajcsi, A. (2017). Numerical distance and size effects dissociate in Indo-Arabic number comparison. *Psychonomic Bulletin & Review volume*, 927–934.
doi:<https://doi.org/10.3758/s13423-016-1175-6>
- Krajcsi, A., Lengyel, G., & Kojouharova, P. (2016). The Source of the Symbolic Numerical Distance and Size Effects. *Cognition*.
doi:<https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.01795>
- Krajcsi, A., Lengyel, G., & Kojouharova, P. (2018). Symbolic Number Comparison Is Not Processed by the Analog Number System: Different Symbolic and Non-symbolic Numerical Distance and Size Effects. *Cognition*.
doi:<https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00124>
- Kunnskapsdepartementet. (2020). Matematikk 1–10 (MAT01-05). In *Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020*.
<https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv16?lang=nob>.

- Lange, K., Kühn, S., & Filevich, E. (2015). "Just Another Tool for Online Studies" (JATOS): An Easy Solution for Setup and Management of Web Servers Supporting Online Studies. *PLoS One*. doi:10.1371/journal.pone.0130834
- Lourenco, S. F., Bonny, J. W., Fernandez, E. P., & Rao, S. (2012). Nonsymbolic number and cumulative area representations contribute shared and unique variance to symbolic math competence. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 18737-18742. doi:https://www.jstor.org/stable/41830095
- Lüwel, K., & Verschaffel, L. (2008). Estimation of 'real' numerosities in elementary school children. *European Journal of Psychology of Education*. doi:https://doi.org/10.1007/BF03173002
- Mandler, G., & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: An Analysis of Its Component Processes. *Journal of Experimental Psychology*. doi:https://doi.org/10.1037/0096-3445.111.1.1
- Mazza, V. (2017). Simultanagnosia and object individuation. *Cognitive Neuropsychology*.
- NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. NESH • Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora.
- Pagano, S., Lombardi, L., & Watson, D. G. (2014). Brain dynamics of attention and working memory engagement in subitizing. *Brain Research*, 244–252. doi:https://doi.org/10.1016/j.brainres
- Park, J., Bermudez, V., Roberts, R. C., & Brannon, E. M. (2016). Non-symbolic approximate arithmetic training improves math performance in preschoolers. *Journal of Experimental Child Psychology*, 278-293. doi:https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.07.011.
- Parther, R. W. (2014). Numerical discrimination is mediated by neural coding variation. *Cognition*, 133(3), 601-610. doi:https://doi.org/10.1016/j.cognition.2014.08.003
- Piazza, M. (2011). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in Cognitive Sciences*, 542-551. doi:https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.008.
- Punch, K. F. (2013). *Introduction to Social Research: Quantitativ an Qualitativ Approach*. Sage Publications.
- QSR International Pty Ltd. (2020). *NVivo (utgitt i mars 2020)*. https://www.qsrinternational.com/nvivo-qualitative-data-analysis-software/home.
- Railo, H., Koivisto, M., Revonsuo, A., & Hannula, M. M. (2008). The role of attention in subitizing. *Cognition*, 82–104.
- Repp, B. H. (2007). Perceiving the numerosity of rapidly occurring auditory events in metrical and nonmetrical contexts. *Perception & Psychophysics*, 529–543. doi:https://doi.org/10.3758/BF03193910
- Revkin, S. K., Piazza, M., & Dehaene, S. (2008). Does Subitizing Reflect Numerical Estimation? *Psychological Science*, 607–614. doi:https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2008.02130.x

- Starkey, G. S., & McCandliss, B. D. (2014). The emergence of "groupitizing" in children's numerical cognition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 120-137. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.03.006>.
- Testolin, A., & McClelland, J. L. (2021). Do estimates of numerosity really adhere to Weber's law? A reexamination of two case studies. *Psychonomic Bulletin & Review*, 158-168. doi:<https://doi.org/10.3758/s13423-020-01801-z>
- Von Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie*, 191-218. Retrieved from <https://psycnet.apa.org/record/1983-12449-001>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. London: Harvard University Press.
- Wendel, K. F., & Rothkegel, R. (2000). Subitizing and its subprocesses. *Psychological Research*, 81-92. doi:<https://doi.org/10.1007/s004260000021>
- Wolters, G., Kempen, H. v., & Wijlhuizen, G.-J. (1987). Quantification of Small Numbers of Dots: Subitizing or Pattern Recognition? *The American Journal of Psychology*, 225-237. doi:<https://doi.org/10.2307/1422405>

Vedlegg

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Vedlegg 2: Kvikkbildeoppgavene fra undersøkelsen

Vedlegg 3: Samskrivingsdokument

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Formålet med forskningsprosjektet

Å undersøke hvordan folk estimerer mengder.

Ansvarlig data behandler

NTNU — Norges tekniske og naturvitenskaplige universitet.

Data

Vi lagrer din besvarelse, responstid, Hvilken nettleser du bruker (f.eks., Chrome), Hvilken enhet og OS du bruker (f.eks., PC/Windows), dine skjerm innstillinger (f.eks., din skjermoppløsning), alder og kjønn.

Deltakelse

Prikker vil vises på skjermen i en veldig kort periode.

Din oppgave er å estimere antallet prikker.

Deltakelse er frivillig, og du kan trekke deg fra eksperimentet når som helst.

Dine rettigheter

Du har rett til å: (1) Få tilgang til personlig data om deg som blir behandlet, (2) kreve å få din personlige data slettet, (3) kreve at uriktig personlig data om deg blir rettet, (4) motta en kopi av din personlige data (dataportabilitet), og (5) sende en klage til Datatilsynet vedrørende behandlingen av din personlige data.

Kontakt

For mer informasjon om studiet, kontakt forskerne gjennom e-mail: johanhkv@stud.ntnu.no ELLER haavahor@stud.ntnu.no

Samtykke

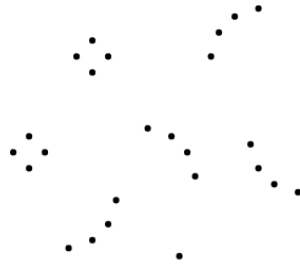
Jeg samtykker til å delta i dette studiet.

Start Eksperiment

Vedlegg 2: Kvikkbildeoppgavene fra undersøkelsen

I dette vedlegget presenterer vi alle kvikkbildeoppgavene i undersøkelsen. Oppgavene blir presentert i samme rekkefølge som i undersøkelsen. For hver oppgave presiserer vi hvilken nummerositet oppgaven har, og hvilken oppgavetype den tilhører. Oppvarmingsoppgavene er ikke med i vedlegget.

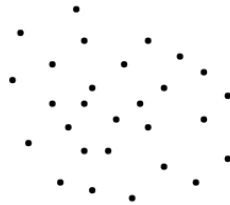
1. 25 ikke-symmetrisk gruppert



2. 21 figureert



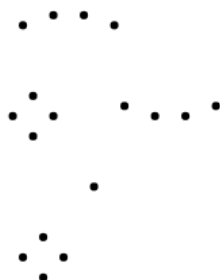
3. 28 tilfeldig strukturert



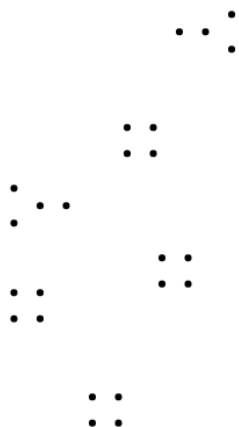
4. 17 figureert



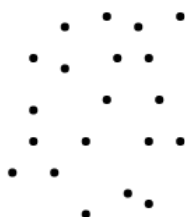
5. **17 ikke-symmetrisk gruppert**



6. **24 ikke-symmetrisk gruppert**



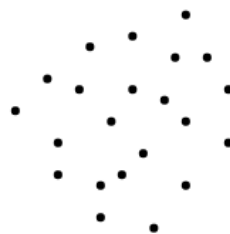
7. **20 tilfeldig strukturert**



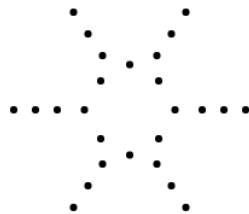
8. **29 ikke-symmetrisk gruppert**



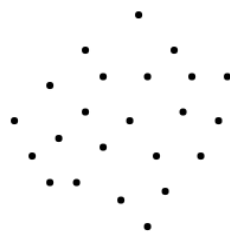
9. **22 tilfeldig strukturert**



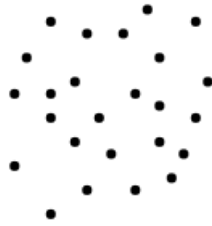
10. **26 figurert**



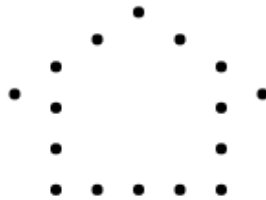
11. **23 tilfeldig strukturert**



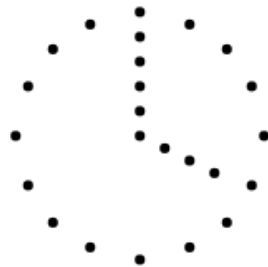
12. **25 tilfeldig strukturert**



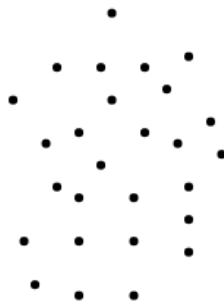
13. **16 figurert**



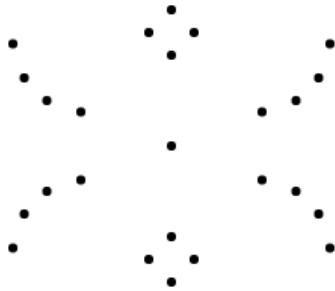
14. **24 figurert**



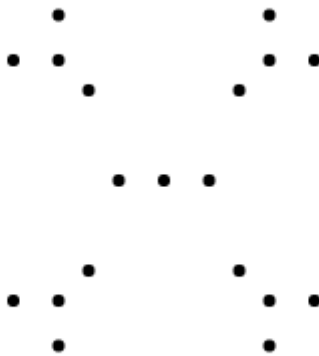
15. **27 tilfeldig strukturert**



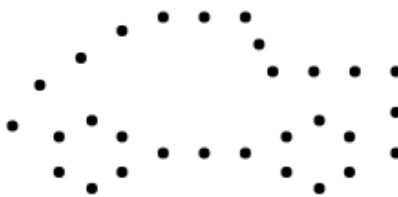
16. **25 symmetrisk gruppert**



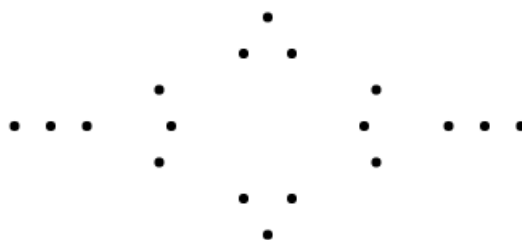
17. **19 symmetrisk gruppert**



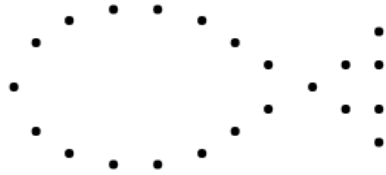
18. **29 figuret**



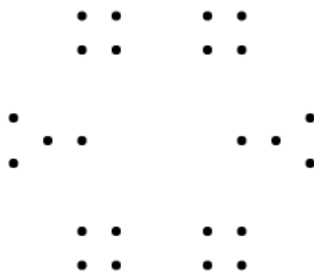
19. **18 symmetrisk gruppert**



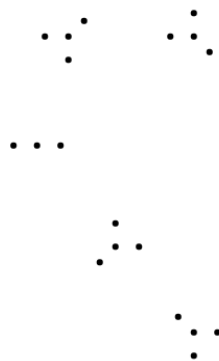
20. **22 figureert**



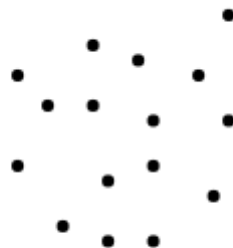
21. **24 symmetrisk gruppert**



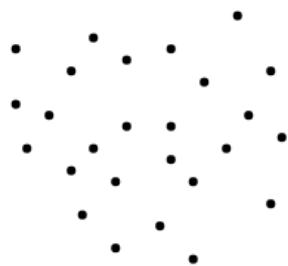
22. **19 ikke-symmetrisk gruppert**



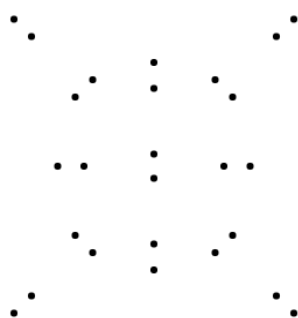
23. **16 tilfeldig strukturert**



24. **26 tilfeldig strukturert**



25. **26 symmetrisk gruppert**



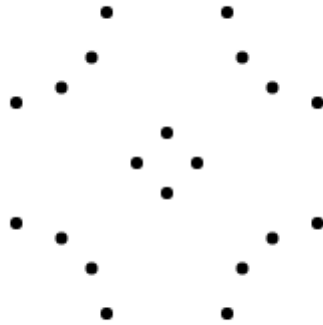
26. **29 symmetrisk gruppert**



27. **15 ikke-symmetrisk gruppert**



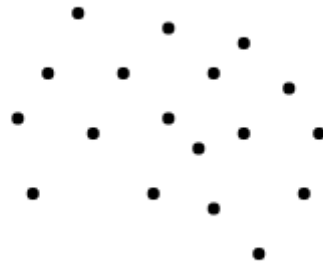
28. **20 symmetrisk gruppert**



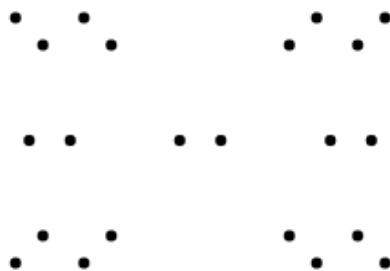
29. **20 figuret**



30. **18 tilfeldig strukturert**



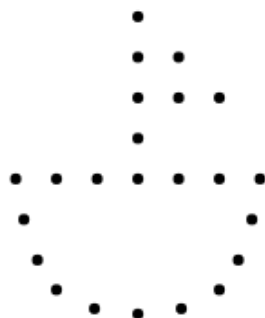
31. **22 symmetrisk gruppert**



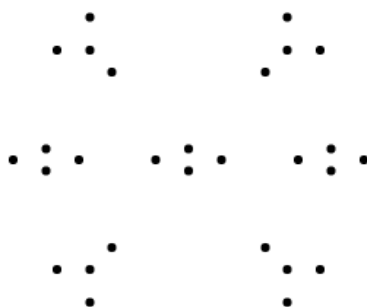
32. **27 figurert**



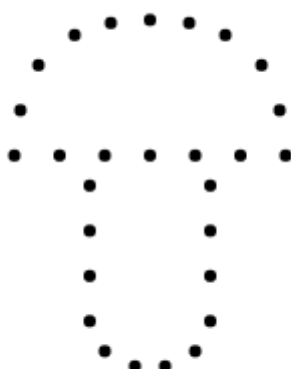
33. **23. figurert**



34. **28 symmetrisk gruppert**



35. **28 figurert**



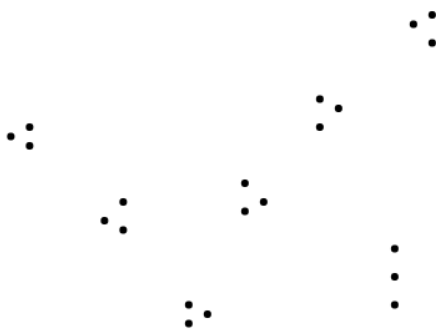
36. **15 figureert**



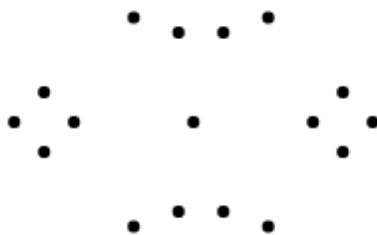
37. **16 ikke-symmetrisk gruppert**



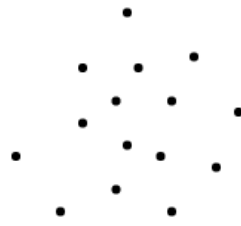
38. **21 ikke-symmetrisk gruppert**



39. **17 symmetrisk gruppert**



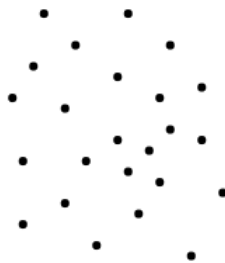
40. **15 tilfeldig strukturert**



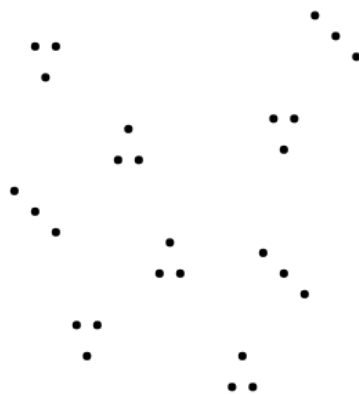
41. **20 ikke-symmetrisk gruppert**



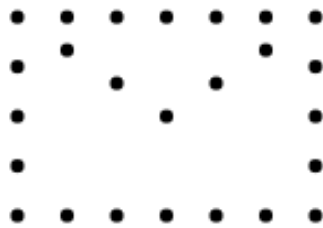
42. **24 tilfeldig strukturert**



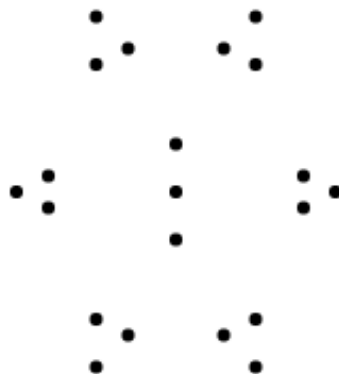
43. **27 ikke-symmetrisk gruppert**



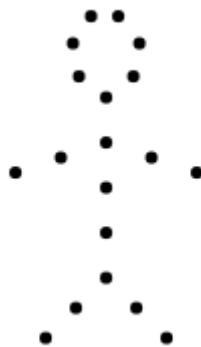
44. **25 figuret**



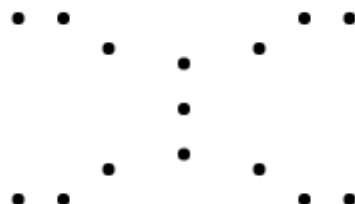
45. **21 symmetrisk gruppert**



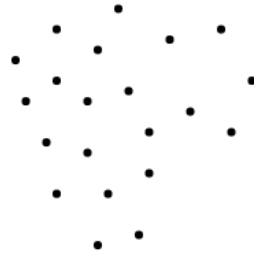
46. **19 figuret**



47. **15 symmetrisk gruppert**



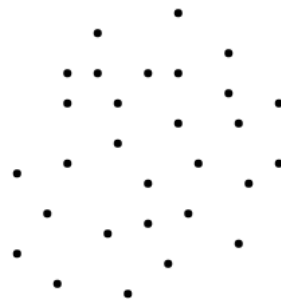
48. **21 tilfeldig strukturert**



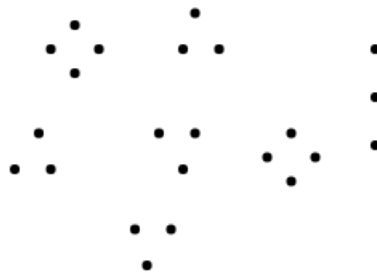
49. **18 ikke-symmetrisk gruppert**



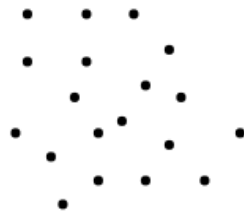
50. **29 tilfeldig strukturert**



51. **23 ikke-symmetrisk gruppert**



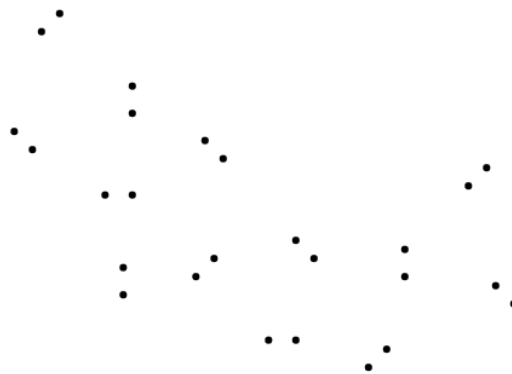
52. **19 tilfeldig strukturert**



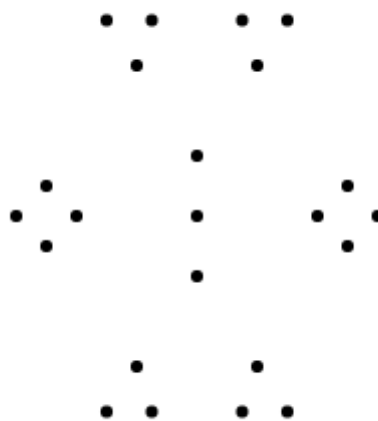
53. **28 ikke-symmetrisk gruppert**



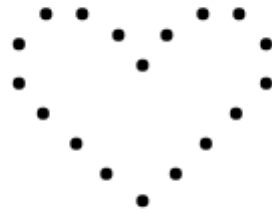
54. **26 ikke-symmetrisk gruppert**



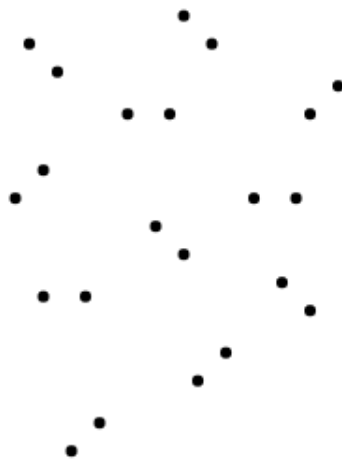
55. **23 symmetrisk gruppert**



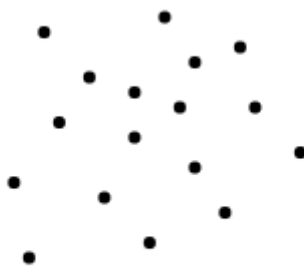
56. **18 figureert**



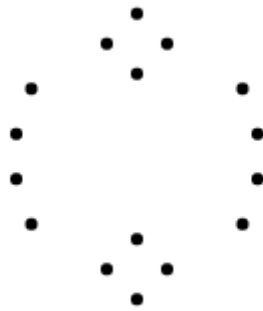
57. **22 ikke-symmetrisk gruppert**



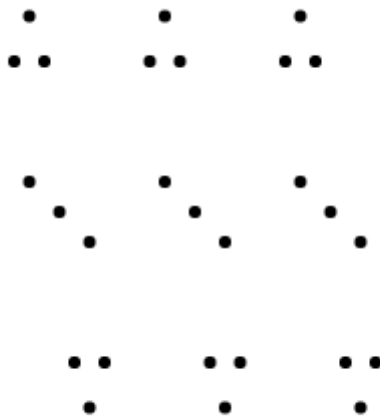
58. **17 tilfeldig strukturert**



59. **16** *symmetrisk gruppert*



60. **27** *symmetrisk gruppert*



Vedlegg 3: Samskrivingsdokument

Vi har valgt å skrive masteroppgaven vår sammen. Dette var et valg vi begge var enige om og entusiastiske over. Tidligere i studieløpet samarbeidet vi mye. Gjennom praksisgruppe, kollokviegruppe og eksamensgruppe. Dermed gikk vi begge inn i masterskrivingen med et kjennskap til hverandres arbeidsmetoder og ambisjoner. Våre tidligere samarbeidserfaringer, ga oss en trygghet på samarbeidet gjennom hele prosessen med masteroppgaven.

Vi søkte om å skrive en oppgave innenfor temaet kvikkbilder. Vi satt sammen og vurderte hvilke temaer vi ønsket å skrive om. I samtale med veileder utviklet oppgaven seg senere til å handle om estimering. Vi satte oss inn i den relevante litteraturen. Alle sentrale artikler ble lest av begge parter, slik at vi kunne diskutere sammen hvordan tidligere forskning kunne bidra til vår oppgave. Vi hadde ikke behov for at begge brukte mye tid på den mindre sentrale litteraturen. Dermed var vi åpne for at vi hver for oss kunne utforske undertemaer av estimering. Å lese litteraturen på denne måten ga oss dypere innsikt i den viktigste litteraturen, men også en bredere innsikt i forskningsfeltet.

Gjennom denne masteroppgaven har vi i all hovedsak arbeidet ved siden av hverandre på masterplassene eller på grupperom på campus. Vi har blitt enige om hvilke dager vi skal arbeide, og i hvilket tidsrom vi skal arbeide. På denne måten har vi alltid mulighet til å kommunisere og diskutere det som arbeides med. For eksempel har vi kanskje skrevet på hvert vårt avsnitt i et delkapittel. Dersom den ene sto fast med en setning eller et argument, har den andre kunnet gi innspill for å løse problemet. I tillegg har vi revidert oppgaven sammen. Kun en periode av prosessen har vi satt hver for oss. Det var under arbeidet i påsken. Da var vi i forskjellige landsdeler. Allikevel avtalte vi tider for å snakke sammen, slik at vi kunne reflektere over utfordringer sammen.

I utformingen av instrumentet måtte vi ta noen viktige valg. Strukturen av elementene i oppgavene våre var prekær for undersøkelsen. Dermed ble valg av strukturer også grunnleggende i vår oppgave. Veilederen vår foreslo et utvalg strukturer vi kunne bruke, og vi ga forslagene en personlig vri. Vi var begge fornøyde med de strukturene vi hadde valgt, og satt i gang med å designe oppgaver. Vi designet oppgavene hver for oss, men vi vurderte alle oppgavene sammen. Mange oppgaver ble forkastet, men vi var begge fornøyde med instrumentet vi sto igjen med.

Vi ønsket å distribuere vår datainnsamling til mange lærerstudenter. Da var det en fordel at vi var to. Da kunne vi samle inn data i flere ulike klasser samtidig, Vi samlet inn data i to klasser hver for oss og tre sammen, slik at vi var i syv forskjellige klasser på lærerstudiet.

Vi gikk inn i analysen av datamaterialet med like forutsetninger. Analysering av datamaterialet var relativt nytt for begge to, og det var derfor trygt å kunne ha noen å drøfte og sparre med gjennom denne prosessen. Gjennom metode for analyse viser vi strategier for troverdighet som spiller på dette samarbeidet. For eksempel at vi kodet samme materialet hver for oss, før vi diskuterte og sammenlignet disse kodene. I analysekapittelet har vi fremstilt mange forskjellige tabeller og diagrammer. For alle disse har vi på sammen diskutert utformingen på forhånd. Vi har funnet ut av hva disse skal vise, og hvordan de skal se ut. Etter vi ble enige om hvordan disse skulle se ut, fremstilte Johan Henrik de kvantitative diagrammene på sin datamaskin og Håvard fremstilte de kvantitative diagrammene og tabellene på sin datamaskin. Men under hele denne prosessen satt vi allikevel ved siden av hverandre, for å diskutere og bli enige om hvert valg sammen.

Samarbeidet i skrivingen av denne oppgaven har vært en støtte gjennom hele prosessen. Vi er begge takknemlige for at samarbeidet har fungert så godt som det har gjort, og for den innsatsen partnerskapet har lagt inn i oppgaven.

