

Adam Aydamirov

Renat Zimin

Tennishall i massivtre: Dimensjonering av buet tak

Tennis Hall in Solid Wood:
Design of Curved Roof

Bacheloroppgave i ingeniørfag, bygg og miljø

Veileder: Arne Mathias Selberg

Medveileder: Jan Arve Øverli

Mai 2023

Prosjektnr: 2022-41

Problemdefinering/prosjektbeskrivelse og resultatmål

Bacheloroppgaven går ut på å dimensjonere taket til en tennishall, med bæresystem av massivtre. Det skal også bestemmes største grad av bueform taket kan ha, samtidig som den overholder brudd- og bruksgrensekravene. Prosjektgruppa skal utføre en kapasitetssjekk av takkonstruksjonen med hensyn til indre krefter (moment, skjærkraft og aksialkraft). Dette inkluderer vurdering av ulike permanente og variable laster som påvirker konstruksjonen.

Resultatmålet er å stå igjen med et godt prosjektert og dimensjonert takelement som tilfredsstillende oppfyller brudd- og bruksgrensekrav. Prosjektgruppen skal fullføre og levere alle arbeidskrav til rett tid og dato. For å oppnå dette vil prosjektgruppen utarbeide en fremdriftsplan, med klare tidsfrister for innlevering av oppgavene som hvert gruppemedlem må følge.

Stikkord: Massivtre, takdimensjonering, bueform, størst grad av bueform, indre krefter, bruddgrensetilstand, bruksgrensetilstand, Eurokode, Norsk Standard	Keywords: CLT, design of roof, arch shape, maximum degree of arch form, internal forces, stresses, ultimate limit state, serviceability limit state
---	--

Forord

Denne oppgaven er utarbeidet som avsluttende del av bachelorstudiet innen ingeniørfag i Bygg og Miljø ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU). Oppgaven er skrevet av Adam Aydamirov og Renat Zimin, ved Institutt for konstruksjonsteknikk, og er gitt internt av universitetet. Arbeidet med oppgaven ble utført våren 2023 og tilsvarer 20 studiepoeng. Professor Arne Mathias Selberg ved Institutt for konstruksjonsteknikk har vært hovedveileder, og medveileder har vært Jan Arve Øverli ved samme instituttet. I tillegg har Dr.ing. ved nevnte institutt Arne Aalberg, bidratt med god hjelp til bruk og forståelse av analyseprogrammet Focus Konstruksjon.

Begge gruppemedlemmene tar studieretningen konstruksjonsteknikk, og det har dermed blitt valgt en oppgave som omhandler dimensjonering. Den opprinnelige problemstillingen tok for seg dimensjonering av en tennishall-konstruksjon i massivtre, som ble senere etter gode samtaler med den interne veilederen, endret/begrenset til dimensjonering av en buet takkonstruksjon i massivtre, med en innlagt twist. Arbeidet med denne oppgaven har vært preget av en stor entusiasme og interesse for ny kunnskap, da dette er et helt nytt tema for oss og studieforløpet inkluderte ikke emnefagene som tar for seg dimensjonering av trekonstruksjoner.

Hensikten med denne avhandlingen er å evaluere dimensjoneringsgrunnlaget for en tre-ledds buekonstruksjon i massivtre med dagens eurokoderegelverk i både bruks- og bruddgrensetilstand. Evalueringen blir utført ved å definere de geometriske parametere, dimensjonerende lasttilfellene og gjennomføring av beregninger etter nåværende regelverk.

Vi vil rette en stor takk til professorene ved Institutt for konstruksjonsteknikk; Arne Mathias Selberg, Jan Arve Øverli, Aarne Aalberg, Bjørn Skallerud og Arild Holm Clausen for motiverende og faglige diskusjoner gjennom arbeidsperioden. Vi ønsker å takke for deres tålmodighet og alltid tilgjengelige veiledning med følgende oppgaven. Veiledningen har bidratt til at den nye kunnskapen som har blitt egnet under arbeidet av denne bacheloroppgaven, har blitt knyttet sammen med kunnskapen opparbeidet gjennom studietiden, og dermed skapt en dypere forståelse og interesse for faget. Vi vil videre takke en tidligere professor ved sistnevnte instituttet, Kolbein Bell for å bidra med hjelp og tips i bruk av dataverktøyet Focus Konstruksjon som har vært komplisert for den gitte oppgaven, men endte opp med å spille en sentral rolle i forståelsen av problemstillingen. Til slutt vil vi takke medstudentene ved studie for faglige samtaler og bidrag til en meget hyggelig arbeidsperiode.

Trondheim, 22. mai 2023

Adam Aydamirov

(a) Adam Aydamirov

Renat Zimin

(b) Renat Zimin

Sammendrag

Denne oppgaven handler om å dimensjonere taket til en tennishall i Trondheim, hvor bæresystemet er konstruert av massivtre. Taket er utformet med en bueform, noe som tillegger ekstra utfordringer i prosjektet sammenlignet med et vanlig tak. Problemstillingen i oppgaven går ut på å bestemme største grad av bueform taket kan ha, samtidig som den tilfredsstillende brudd- og bruksgrensekravene.

Dimensjoneringen er gjort i samsvar med kravene og retningslinjene i Eurokodene. Det er utført en grundig kapasitetsanalyse på takelementet for å vurdere dets evne til å motstå belastninger fra moment, skjærkrefter og aksialkrefter som forekommer på grunn av permanente og variable laster som påvirker konstruksjonen. Basert på disse påvirkningene, er det valgt riktige dimensjoner for buekonstruksjonen for å oppnå tilstrekkelig styrke og stabilitet.

Oppgaven består av to deler. Den første delen innebærer selve dimensjoneringsanalysen som utføres for oppgaven. Den andre delen gir en beskrivelse av det teoretiske grunnlaget for analysen.

Bakgrunnen for oppgaven er det store klimaengasjementet som har funnet sted i moderne tid. Det har medført et større fokus i utforskning av nye bærekraftige løsninger. Massivtre er et godt alternativ til dette, som sammenfaller godt med Trondheim sin status som en foregangsby for bruk av massivtre.

Det ble gjennomført manuelle beregninger og kontrollert med lignende beregningseksempler fra Limtreboka. Bachelorgruppen kjørte ulike variasjoner av systemet på Excel, for å finne den varianten som maksimerte kapasitetsutnyttelsen. Buekonstruksjonen fikk tilfredsstillende kapasitet og endte opp med en høyde på 13,5 meter og en buevinkel på 53 °. Valgte dimensjoner var 400 x 1500 mm. Det ble prøvd å modellere konstruksjonen i Focus Konstruksjon, som viste seg å ikke være så egnet til beregning av indre krefter i krumme elementer.

Abstract

The bachelor thesis comprises a design check of the roof of a tennis hall in Trondheim, where the support system is constructed of solid wood. The roof is designed with an arched shape, which adds extra challenges to the project compared to a normal roof. The objective of the thesis is to determine the greatest degree of arch shape the roof can have, while satisfying the ultimate limit and serviceability limit requirements.

The design of the roof element is done in accordance with the requirements and guidelines in the Eurocodes. A thorough capacity analysis has been carried out on the roof element to assess its ability to withstand loads from moment, shear forces and axial forces that occur due to permanent and variable loads affecting the structure. Based on these loads, proper dimensions are chosen for the arch construction to achieve sufficient strength and stability.

The thesis consists of two parts. The first part involves the actual design process which is carried out for the roof-element. The second part provides a description of the theoretical basis for the analysis.

The background for the thesis is the major climate commitment that has taken place in modern times. This has led to a greater focus on exploring new sustainable solutions. Solid wood is a great alternative, which coincides well with Trondheim's status as a pioneering city for the use of solid wood.

Manual calculations were carried out and controlled with similar examples from the Limtreboka. The bachelor group ran different variations of the system on Excel in order to find the variant that maximized the capacity utilization. The arched construction had a satisfactory capacity and ended up with a height of 13.5 metres and an angle of 53 °. The dimensions chosen were 400 x 1500 mm. There was made an attempt to model the construction in Focus, which turned out to be not so suitable for calculating internal forces in curved elements. This is addressed in the thesis.

Innhold

Forord	i
Sammendrag	iii
Abstract	v
Figurliste	ix
Tabelliste	x
Indeksliste	xi
1 Innledning	1
1.1 Bakgrunn	1
1.2 Målsetting	1
1.3 Problemstilling	1
1.4 Avgrensninger	2
1.5 Metode	2
1.6 Regelverk	3
2 Teoretisk grunnlag	4
2.1 Tre som byggemateriale	4
2.2 Massivtre	5
2.3 Generelt om tennishallen	7
2.4 Beliggenhet	7
2.5 Buer	8
2.5.1 Generelt	8
2.5.2 Krefter i en bue	9
2.5.3 Bueformer	10
3 Beregningsgrunnlag	11
3.1 Teorigrunnlag	11
3.1.1 Bruddgrensetilstand - ULS	11
3.1.2 Bruksgrensetilstand - SLS	15
3.2 Valg av tremateriale	17
3.3 Aktuelle krav i regelverk	17
4 Statisk modell	18
5 Aktuelle laster i SLS og ULS	19
5.1 Generelt	19

5.2	Egenlast	19
5.3	Snølast	20
5.4	Vindlast	20
5.5	Vindsug	21
5.6	Kryp	22
6	Dataverktøy	23
6.1	Focus Konstruksjon	23
6.2	Overleaf	24
6.3	Excel	25
6.4	AutoCAD	25
7	Dimensjonering av tre-ledd bue	27
7.1	Forhåndsdimensjonering	27
7.2	Statisk analyse av bueelementet	28
8	Resultat	32
8.1	Bruddgrensetilstand	32
8.2	Brukgrensetilstand	33
8.3	Sluttresultat	33
9	Diskusjon	34
9.1	Forhåndsdimensjonering	34
9.2	Laster og lastkombinasjoner	34
9.3	Bruddgrensetilstand	35
9.4	Brukgrensetilstand	36
9.5	Focus Konstruksjon	37
9.6	Styrke og stivhet	39
9.7	Usikkerhetsmomenter	40
10	Konklusjon og videre arbeid	41
10.1	Konklusjon	41
10.2	Forslag til videre arbeid	42
11	Vedlegg	46

Figurer

2.1	Varmeledningsevner til utvalgte stoffer og materialer, Ref.	4
2.2	Hovedretningene i treverk. (Forest Products Laboratory, 2010)	5
2.3	Typisk massivtreelement, Midt-Norsk Massivtre AS, 2023, Ref.	5
2.4	Treet bygget i Bergen, ARTEC AS, Portfolio, Ref.	6
2.5	Bilder tatt av idrettshallene på befaring	8
2.6	Kartutsnitt over Øya, Trondheim (Google Maps)	8
2.7	Konstruksjoner med bueform	9
2.8	Limtrehallen Moelv (Moelven Limtre AS, 2006)	10
3.1	Metoder for sideveis avstivning (Limtreboka 2015, kap. 11)	12
3.2	Knekning ut av planet (Limtreboka 2015, kap. 11)	13
4.1	Typiske bæresystemer for buer (Focus Konstruksjon 2023)	18
4.2	Statisk modell av tennishall (Autocad 2024)	18
5.1	Vindsug som en oppadrettet nyttelast (Limtreboka: Beregningseksempler 2015, eks.14)	21
5.2	Anbefalte verdier for utvendige formfaktorer for bueformede tak (NS-EN 1991-1-4, figur 7.11)	21
6.1	Modellen av buete takkonstruksjonen i Focus Konstruksjon	24
6.2	Bøyemoment-diagrammet til modellen i henhold til Focus Konstruksjon	24
6.3	En typisk arbeidsgang i Overleaf LaTeX	25
6.4	Utklipp av Excel-ark	25
6.5	Prosjektgruppens bruk av AutoCAD (AutoCAD 2024)	26
7.2	Indre krefter i et vilkårlig snitt (AutoCAD 2024)	29
7.3	Tre-ledds bue belastet av egenlast + jevnt fordelt snølast (AutoCAD 2024)	30
7.4	Tre-ledds bue belastet av egenlast + trekantlast (AutoCAD 2024)	30
7.5	Tre-ledds bue belastet av egenlast + ensidig trekantlast (AutoCAD 2024)	31
7.6	Tre-ledds bue belastet av egenlast + vindsug (AutoCAD 2024)	31
9.1	38

Tabeller

3.1	Retningslinjer for bruk av lastkombinasjoner (NS-EN 1990, tabell NA.A1 (904)) .	15
3.2	Lastfaktorer for SLS, (NS-EN 1990, tabell A1.4)	16
5.1	Verdier av k_{def} for konstruksjonstre (EK5-1, tabell 3.2)	22
8.1	Største indre krefter i lasttilfellene	32
8.2	Dimensjonerende krefter i buelementet	32
8.3	Kapasitetskontroll i bruddgrensetilstand	32
8.4	Kapasitetskontroll i bruksgrensetilstand	33
8.5	Valgt geometri og materiale	33

Indeksliste og forkortelser

Forkortelser

CLT	Cross Laminated Timber
EK	Eurokode
FEM	Finite Element Method
NA	Nasjonale tillegg
NS-EN	Norsk Standard - Europastandard
P	Principle requirement
SLS	Serviceability Limit State (Bruksgrensetilstand)
ULS	Ultimate Limit State (Bruddgrensetilstand)

Latinske store bokstaver

E	elastisitetsmodul
EI	bøyestivhet
F_i	kraft i retning i (i kan være x, y eller z)
G	skjærmodul
H	horisontal opplagerkraft
L	spennvidde
L_k	knekk lengde
M	moment
M_{maks}	maksimal bøyemoment
N	normalkraft
Q_k	karakteristisk punktlast for egenlast
T	styrkeklasse
V	skjærkraft

Latinske små bokstaver

a	lastbredde
b	tverrsnittsbredde
c_e	utvendig formfaktor
c_i	innvendig formfaktor
g	tyngdeakselerasjon (= $9,81 \text{ m/s}^2$)
g_k	karakteristisk egenlast
h	tverrsnittshøyde
f	pilhøyde
$f_{c,0,d}$	dimensjonerende trykkfasthet i fiberretning
f_d	dimensjonerende fasthet
f_k	karakteristisk fasthet
$f_{m,i,d}$	dimensjonerende bøyefasthet om akse i
$f_{m,k}$	karakteristisk bøyefasthet
$f_{t,0,k}$	karakteristisk strekkfasthet
$f_{t,90,d}$	dimensjonerende strekkfasthet normalt på fiberretningen
$f_{v,d}$	dimensjonerende skjærfasthet

$k_{c,y}$	reduksjonsfaktor for knekning i planet
$k_{c,z}$	reduksjonsfaktor for knekning ut av planet
k_{crit}	reduksjonsfaktor for sideveis utbøyning
k_{def}	deformasjonsfaktor
k_{dis}	faktor som tar betraktning til spenningsfordelingen i et toppunkt
k_h	høydefaktor
k_m	fra uttrykk (6.39) eller (6.40) i Eurokode 5-1
k_{mod}	modifikasjonsfaktor for virkningen av fuktighet og lastvarighet. reduksjonsfaktor som tar hensyn til fasthetsreduksjonen pga.
k_r	lamellenes krumning under produksjonen
k_{vol}	volumfaktor
p_d	trykk på bjelken i møneområdet
$p_{fin,kar}$	dimensjonerende last for karakteristisk lastkombinasjon
q_k	karakteristisk variabel last
$q_{k,flate}$	karakteristisk flatelast for egenlast
$q_{k,linje}$	karakteristisk linjelast for egenlast
q_p	topphastighet
$q_{wind,k}$	karakteristisk vindlast
$v_{b,0}$	referansevindhastighet
w_{inst}	elastisk deformasjon
w_{kryp}	plastisk krypdeformasjon
y_0	ordinat til buens senterlinje

Små greske bokstaver

α	buevinkel
γ_g	tyngdetetthet til materialet
γ_{Gj}	lastfaktor for permanent last
γ_m	partialfaktor for materialegenskaper
γ_{Qi}	lastfaktor for variabel last
δ	nedbøyning
ρ	materialdensitet
$\sigma_{c,0,d}$	dimensjonerende trykkspenning i fiberretning
$\sigma_{m,i,d}$	dimensjonerende bøyespenning om akse i
$\sigma_{t,90,d}$	dimensjonerende strekkspenning normalt på fiberretning
τ_d	dimensjonerende skjærspenning
ψ	kombinasjonsfaktor

1 Innledning

Innledningen tar for seg formålet med oppgaven og metoden som er benyttet for å nå den gitte målsettingen.

1.1 Bakgrunn

I dagens byggeindustri produseres det en stor mengde betong som har sine preg på miljøet. Betong står for omtrent 5% av verdens CO₂-utslipp [1]. Det er estimert at betongforbruket er dobbelt så stort som det totale forbruket av alle øvrige byggematerialer [2]. Dette tyder på betongens dominerende rolle i bygg- og anleggsbransjen og kommer sannsynligvis ikke til å bli mindre relevant i fremtiden. Dets allsidighet, styrke og pålitelighet har gjort det til et preferert valg for konstruksjoner. Det negative preget betongen har på miljøet, er en viktig grunn til at det søkes etter alternative bærekraftige byggemåter.

Bruken av massivtre som byggemateriale har økt betydelig de siste årene. Det skyldes det store klimaengasjementet som har oppstått i byggebransjen. Bygging i massivtre har sine fordeler, ikke bare er det et bærekraftig valg som kan begrense karbonavtrykket, men det er også fordelaktig for energiforbruket og innemiljøet i bygninger [3]. I tillegg har massivtre evnen til å fange opp CO₂, som gjør det til et godt CO₂ negativ løsning i lang sikt [4]. Derfor er massivtre, et materiale som er aktuell i dagens klimadebatt.

I oppgaven er Trondheim valgt som vårt primære fokusområde, på grunn av kommunens anerkjennelse som en foregangsby for bruk av massivtre. Bakgrunnen til dette er da Trondheim kommune startet prosjektet "Trehusbyen Trondheim" i 2006. Prosjektet ble påbegynt for å bevare områdets kulturelle særtrekk og minske CO₂-avtrykket. Dette gjelder ikke bare kommunale bygg, da Trondheim kommune oppmuntrer også alle utbyggere til å bygge i massivtre [5].

1.2 Målsetting

Målet med oppgaven er å ende opp med et godt prosjektert og dimensjonert takelement som tilfredsstillter brudd- og bruksgrensekravene. Bachelorgruppen skal utvikle økt kunnskap og ferdigheter innen dimensjonering av massivtrestrukturer og buede elementer. Bueformen gjør oppgaven spesielt interessant på grunn av sin visuelt tiltalende form og strukturelle utfordring. Med en slik spesiell oppgave, ønsker bachelorgruppen å skape økt interesse for bygging i massivtre og illustrere fordelene med det.

1.3 Problemstilling

Problemstillingen for denne bacheloroppgaven er å dimensjonere taket til en tennishall av massivtre i henhold til retningslinjene i Eurokoden. Det skal også gjennomføres undersøkelser for å bestemme den maksimale graden av bueform takelementet kan ha, samtidig som den overholder

brudd- og bruksgrensekravene. Bachelorgruppen kommer til å bli eksponert for kompleksiteten som følger med den distinkte geometrien, underveis i dimensjoneringsarbeidet.

1.4 Avgrensninger

Det er blitt avklart en rekke avgrensninger for å tilpasse seg forholdet rundt tid og ressursbruk. Avgrensningene er listet opp nedenfor:

- Takelementet blir kun dimensjonert for statiske laster. Seismiske og ulykkeslaster vil ikke bli inkludert i kontrollen.
- Det antas at konstruksjonen er tilstrekkelig beskyttet mot belastninger fra temperaturvariasjoner og vibrasjon.
- Beregninger rundt forbindelser er ikke blitt inkludert i oppgaven.
- Kapasiteten kontrolleres kun ved et snitt i tennishallen, altså midt i tennishallen.
- Det er kun satt fokus på dimensjonering av buelementet i tennishallen, og ikke tilstøtende konstruksjonselementer.

1.5 Metode

Denne avhandlingen tar utgangspunkt i besøket hos Øya tennishall i Trondheim. Formålet med besøket var å studere planløsningen i hallen og få en dypere forståelse av bæresystemet. Etter grundige evalueringer og vurderinger ble det lagt merke til et betydelig forbedringspotensial i tennishallen på Øya. På bakgrunn av disse funnene ble det besluttet å “erstatte” den nåværende hallen med en ny og forbedret versjon av tennishallen.

Opgaven startet med å samle inn gjeldende teori ved å undersøke relevant faglitteratur som Limtrebøkene, Byggforsk og Konstruksjonsteknikk - Laster og bæresystemer. Etter å ha fått en bedre forståelse av oppgaven, vurderte bachelorgruppen ulike løsninger for bæresystemet. Dimensjoneringen ble gjort i samsvar med Norsk Standard.

En sentral del av oppgaven var å bestemme den maksimale graden av buform til takelementet. Dette ble gjort ved å følge Limtrebokas anbefaling for maksimale verdier for pilhøyde og tverrsnittshøyde hos buede konstruksjoner. Spennvidden ble fastsatt tidlig i oppgaven, og etter å ha bestemt tverrsnittsdimensjonene og pilhøyden, valgte man en passende styrkeklasse for buen.

Bachelorgruppen benyttet seg av ulike programvarer som Excel og Focus Konstruksjon. Excel ble brukt til å kjøre ulike variasjoner av systemet, ved å endre på tverrsnittsdimensjonene og styrkeklassen, for å utnytte kapasiteten til det fulleste. Focus Konstruksjon ble brukt til å modellere de ulike løsningene for det statiske systemet, samtidig som gruppen fikk en omfattende forståelse av hvordan programmet tolker en bue.

Bachelorgruppen har vært i kontakt med forskjellige bedrifter for anbefalinger og råd, i løpet av dimensjoneringsprosessen.

1.6 Regelverk

Relevante regelverk som er blitt brukt i denne avhandlingen er angitt nedenfor.

Standarder:

- NS-EN 1990:2002+A1:2005+NA:2016
Eurokode 0: Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner (EK0). [6]
- NS-EN 1991-1-1:2002+NA:2019
Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, Del 1-1: Allmenne laster, Tetthet, egenvekt og nytte-
laster i bygninger (EK1-1-1). [7]
- NS-EN 1991-1-3:2003+A1:2015+NA:2018
Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, Del 1-3: Allmenne laster, Snølaster (EK1-1-3). [8]
- NS-EN 1991-1-4:2005+NA:2009
Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, Del 1-4: Allmenne laster, Vindlaster (EK1-1-4). [9]
- NS-EN 1995-1-1:2004+A1:2008+NA:2010
Eurokode 5: Prosjektering av trekonstruksjoner, Del 1-1: Allmenne regler og regler for
bygninger (EK5-1-1). [10]

Fasthetsverdier for konstruksjonstrevirke er hentet fra:

- NS-EN 338:2016
Konstruksjonstrevirke - Fasthetsklasser. [11]

2 Teoretisk grunnlag

I dette kapitlet vil relevant bakgrunnsteori for oppgaven bli presentert. Først diskuteres materialet som prosjektgruppa har valgt å jobbe med og dets egenskaper. Videre følger to delkapitler som presenterer ulike bueformer og tar for seg relevant teori om kraftfordelingen i en bue.

Først og fremst er det viktig å se nærmere på materialet prosjektgruppen har å jobbe med, og erklære de viktigste egenskapene og fordelene det har, knyttet til den gitte problemstillingen. Å ha god kunnskap til materialet i den gitte problemstillingen, er helt avgjørende for forståelsen og visualiseringen av hva vi har å jobbe med, samt fremgangsmåten på den beste og mest effektive løsningen vi kan komme frem til i en slik oppgave.

2.1 Tre som byggemateriale

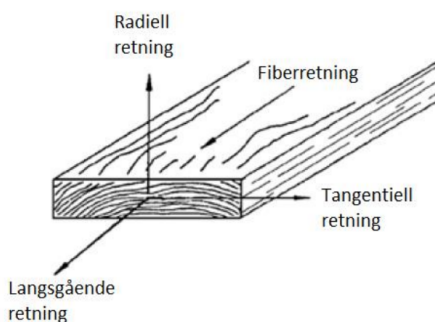
Tre er historisk sett et av de mest tradisjonelle, allsidige og velegnet materialene som har blitt brukt i årtusener både i Norge og i resten av verden. Det attraktive med tre er at det er lett å skaffe, lett å transportere, lett å bearbeide og sammenføre. Dette er særlig aktuelt i Norge, som har kortreist og mye ubrukte ressurser i skogbruket som kan utnyttes. I tillegg har tre som et byggemateriale en stor styrke og stivhet i forhold til dens masse, det er nemlig verdens sterkeste byggemateriale i forhold til vekt [12]. Ved å velge tre som et byggemateriale, får en et fuktighets- og temperaturregulerende materiale som i tillegg har svært gode akustiske egenskaper, noe som vil føre til et godt inn klima i konstruksjonen som blir bygget. Tre vil også kunne delvis fungere som en god isolator som en følge av materialets små varmeledningsevne (0,1 – 0,2 W/mK, fig. 2.1), og lav elektrisk ledningsevne [13]. Det er også viktig å nevne at det er en fornybar ressurs som tar opp og lagrer CO₂, og som kan både gjenvinnes og gjenbrukes i videre kretsløp. Dette bidrar til grønnere og mer bærekraftige valg som det settes særlig stort fokus på i dagens miljødebatt.

Materiale	Varmeledningsevne, $\frac{W}{mK}$
Luft	0,024
Glassull	0,036
Tre	0,1-0,2
Vann	0,5
Jern	80
Kobber	400

Figur 2.1: Varmeledningsevner til utvalgte stoffer og materialer, Ref.

Som et levende materiale, vil tre alltid bevege seg ut fra den skiftende luftfuktigheten [14]. Tre er et hygroskopisk materiale – et materiale som kan både gi fra seg og oppta fuktighet fra omgivelsene rundt. Materialet vil komprimere når det avgir fuktighet og svelle opp når det opptar fuktighet [15]. Dette må en god ingeniør ta hensyn til når en skal prosjektere og dimensjonere

en trekonstruksjon, da ikke alle av materialets egenskaper vil være ønskelig for konstruksjonens bruksfunksjon. En viktig ting å nevne er at tre klassifiseres som et ortotrop materiale; det vil si et materiale med egenskaper i tre retninger (se fig. 2.2). Det deles altså inn i fiberretning (tilsvarende lengderetning), radiell- og tangentiellretning. Ulikhetene i trykkfasthet i tangentiell og radiell retning er relativt små, i forhold til f.e. lengderetningen [16]. Det er derfor i prosjektering av trekonstruksjoner, blir gjort forenklinger ved å operere med kun to retninger – lengderetning og trykk på tvers av fiber.



Figur 2.2: Hovedretningene i treverk. (Forest Products Laboratory, 2010)

2.2 Massivtre

Massivtre er et bærekraftig materiale som er blitt stadig mer brukt og populært blant ingeniører og arkitekter den siste tiden. Dette materialet er en modernisering av såkalt lafte- og stavteknikken med treplanker som krysslegges i 90 grader i flere lag oppå hverandre og blir bundet sammen til større elementer av tre. Hvert lag av treplanke blir altså snudd vinkelrett på det underliggende. Massiv tre er derfor også kjent under forkortelsen CLT, fra Cross Laminated Timber. Vanligvis blir lagene av trevirke limt sammen, men spiker og treplugger kan også brukes. Dette gir en høyere styrke og stabilitet enn tradisjonelle trekonstruksjoner [12]. I kombinasjon med at dette materialet blir ofte fremstilt i store elementer med kort byggetid, blir massivtre et svært ettertraktet byggemateriale i byggesektoren.

Vanligvis vil tykkelsen på slike elementer ligge på mellom 60 mm og 300 mm, og sorteres etter deres formål og bruksområde. Elementer av massivtre har nok styrke til å bli brukt i bl.a. bærende vegger, gulv og tak i høye bygg [17]. Et typisk massivtreelement er vist i figur 2.3.



Figur 2.3: Typisk massivtreelement, Midt-Norsk Massivtre AS, 2023, Ref.

Et godt eksempel på en ingeniørløsning med bruk av massivtre er Treet-bygget i Bergen som frem til 2017 var verdens høyeste trehus (før prosjektet «Miljøtårnet» i Brumunddal ble satt i gang). «Treet» er en 14 etasjer høy boligblokk laget av massivtre, med bærende konstruksjoner i limtre (fig. 2.4). Selv om prosjektet har vært utfordrende på grunn av høyden og kravene til brannsikkerhet og stabilitet, viste massivtre seg som en ideell løsning for disse utfordringene. I tillegg har et slikt bygg mye lavere CO₂-utslipp sammenlignet med konvensjonelle konstruksjoner laget av stål og betong [18].



Figur 2.4: Treet bygget i Bergen, ARTEC AS, Portfolio, Ref.

Det ovenfornevnte tyder på at massivtre er et materiale som egner seg utmerket til spesielt store og høye bygg, med store spenn. Bruk av massivtre gir store, søylefrie lokaler med en høy grad av tilpasning til omgivelsene. Et slikt materiale vil derfor sammenfalle svært godt med den gitte problemstillingen i oppgaven om dimensjonering av en buet takelement i massivtre. Bruk av massivtre i haller og lagerbygg er ofte det mest riktige og beste alternativet, da f.eks. en typisk tennishall vil ofte kreve svært store spenn og åpne areal som kan være problematiske å oppnå med andre materialer [19].

Massivtre har flere fordeler fremfor andre materialekandidater som gjør den om til første valget i slike ingeniørløsninger. Som nevnt ovenfor, er massivtre et miljøvennlig byggemateriale som vil bidra til reduksjon av klimagass utslipp og bidra med å være en fornybar og energiøkonomisk ressurs. Massivtre kan som andre trematerialer resirkuleres og gjenbrukes, også i mye større grad enn andre mindre miljøvennlige materialer [12]. Massivtre med sine gode isoleringsevner vil også sikre et godt innemiljø som passer bra i et kaldt norsk klima. Det kan hindre flere uønskelige og uforutsigbare virkninger av vær og vind, og materialets egenskap å oppta og avgi fukt vil føre til

en jevnere luftfuktighet inne i bygningen. En får på denne måten utnyttet treets egenskaper på en rasjonell måte. Det vil også være mye enklere å utføre tekniske installasjoner i et trehus enn i et betongbygg, samtidig som massivtreelementer lar seg lett kombinere og utføre sammen med andre konstruksjonssystemer [20].

Det er på samme tid viktig å være bevisst på utfordringene som kan komme med bruk av dette konstruksjonsmaterialet, spesielt når det gjelder brannsikkerhet og fuktighet. Det er også viktig å være nøye på dimensjonering og strukturell design for å sikre tilstrekkelig styrke og stabilitet [19]. En god ingeniør må også ta hensyn til materialets egenskaper for å velge riktig materiale til hver enkelt og unik applikasjon.

I sum er massivtre et spennende og stadig mer aktuelt byggemateriale i dagens ingeniørløsninger, med mange gode fordeler inkludert dets lave miljøpåvirkning og rask montasje. Som gode ingeniører har man ansvar å ta hensyn til de stadig økende og større krav til bærekraft og miljøbevissthet i byggeprosjekter, og massivtre er et materiale som oppfyller disse kravene.

2.3 Generelt om tennishallen

Februar 2023, ble det gjennomført besøk til to tennishaller av bachelorgruppen. Under besøket fikk gruppen undersøkt planløsningen i tennishallene og fikk en bedre forståelse av anleggenes statikk. Bachelorgruppen fikk innsikt i hvordan bjelker, avstivninger og søyler var plassert, og hvordan de jobbet sammen for å støtte taket og sikre at konstruksjonen var stabil og trygg. Det er blitt tatt inspirasjon fra flere av tennishallene for tennishallen i problemstillingen. Bilder tatt av tennishallene er vist i figur 2.5.

Tennishallen i oppgaven har som hovedfunksjon for bruk i fritid og/eller trening. Ferdig anlegg vil bestå to tennisbaner og en rekke fasiliteter som garderobe, toalett, tribune, møtelokale for trenere og aktivitetsrom for barn. Tennisbanene plasseres stykkevis i bredderetning til bygningen. Det er valgt standard dimensjoner for tennisbanene. Tennisbanen har en banelengde på 36,6 m og total bredde på 33,5 m for to tennisbaner. Tennishallen har en bredde på 45 m, inkludert banelengden og avstanden fra grunnlinje til vegg, og en lengde på 60 m. Det er tatt hensyn til at det skal være ekstra spillerom og plass for bevegelse ved valg av dimensjoner, i henhold til kravene [21].

2.4 Beliggenhet

Beliggenheten til tennishallen skal være på Øya i Trondheim, et sentralt og tilgjengelig sted med lett tilgang for innbyggere og turister. Den skal erstatte området nåværende tennishall med en fornyet og forbedret versjon av idrettshallen. Denne avgjørelsen ble gjort på bakgrunn av tidligere besøk i området, der prosjektgruppen så forbedringspotensial for tennishallen på Øya. Området er godt plassert i nærheten av skoler og barnehager, med lett tilgang til butikker og underholdningssteder som Trondheim Spektrum. Med Nidelva i nærheten av tennishallen, bidrar det til å gjøre området rundt idrettsanlegget mer attraktivt og skaper en avslappet atmosfære



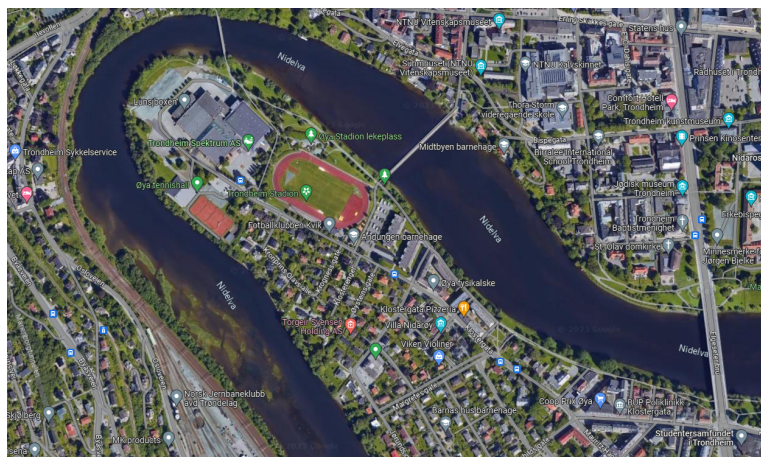
(a) Lade tennisarena



(b) Øya tennishall

Figur 2.5: Bilder tatt av idrettshallene på befaring

for brukerne av tennishallen. Følgelig, vil plasseringen til tennishallen gjøre den til en viktig ressurs for tennisentusiaster i Trondheim og en underholdende aktivitetsmulighet for studenter og mennesker i alle aldre. Bydelen kan ses på figur 2.6. Det at lokasjonen til tennishallen er i Trondheim, faller godt med Trondheim kommune sin satsing på massivtre [5].



Figur 2.6: Kartutsnitt over Øya, Trondheim (Google Maps)

2.5 Buer

2.5.1 Generelt

Historisk sett har buform blitt primært brukt i brukonstruksjoner. Den første bukonstruksjonen antas å være Pont du Gard - en gammel romersk akvedukt og bro, konstruert i det første århundre før vår tid [22]. Videre ble det første husbygget med bukonstruksjon først sett på taket til en låve på 1920-tallet, med formål å utnytte plassen på loftet fullt ut, bl.a. til lagring av høy [23]. Broen Pont du Gard og låven er vist nedenfor i figur 2.7. Spesielt i nyere tider er det blitt mer vanlig å bruke buede tak i konstruksjoner med store spenn. Selve designet er dermed relativt nytt, hvor fokuset settes heller på estetikk og ikke holdbarhet.



(a) Pont du Gard, Ref.



(b) Låve, Ref.

Figur 2.7: Konstruksjoner med bueform

Et visuelt tiltalende bygg er ikke det eneste positive med buede tak, men også egenskapene et slikt tak kan gi bygget. For det første, gjør bueformen det godt egnet til å fordele lastene jevnt over store avstander, samtidig som den bidrar til å minimere de opptredende momentene. For det andre har buede tak god evne til å absorbere horisontale krefter fra vindlast og gi god stabilitet. Til slutt er det en del valgmuligheter av materiale for buede tak, blant annet tre, betong eller stål. Egenskapene til trematerialet gjør det spesielt godt egnet i buede konstruksjoner siden det enkelt kan bearbeides og produseres i ønsket bueform [24].

2.5.2 Krefter i en bue

Som i en hvilken som helst konstruksjon, inkluderer de indre kreftene i en bue et bøyemoment, skjærkraft og aksialkraft. Det kritiske snittet i buen, hvor det maksimale bøyemomentet opptrer, er som regel i buens fjerdedels-punkt. For å oppnå minst mulige bøyemomenter, velges bueformen slik at kreftene den blir utsatt for, fordeler seg jevnt over konstruksjonen. Ofte velger man å ha varierende stivhet EI for å sikre dette. I tillegg må man alltid ta hensyn til asymmetriske laster i dimensjoneringen, som for eksempel snølast på en buehalvdel. Slik skjevlastfordeling vil alltid bidra til betydelige momenter i buen, hvor momentfordelingen vil gi strekk i underkant og på den måten prøve å rette ut buen. Dette blir ofte dimensjonerende i buer. Dermed er det ikke mulig å se helt bort ifra bøyemomentene, ettersom buens statiske system forutsetter at det oppstår krefter [25].

Analyse av snittkrefter er en sentral del av dimensjoneringen, da buer er vanlig å anvende i konstruksjoner med krav på stor styrke og stivhet. Et viktig kjennetegn ved en buekonstruksjon er opptredelsen av horisontale aksialkrefter på oppleggene, selv ved manglende horisontal ytre belastning. Bøyemomentet og skjærkraften vil være vesentlig mindre enn for en bjelke med lik lengde som et resultat av at det er til stede horisontale skyvekrefter. Buens form medfører at en del av momentene og skjærkreftene i buen tas opp av aksialkreftene, noe som resulterer i lavere tverrsnittsstørrelse og en mer bærekraftig design i forhold til andre strukturer [25].

2.5.3 Bueformer

I buede tak er det først og fremst viktig å velge en passende form for buen som tilfredsstillende byggets krav ut fra formålet til bygget. Vanligvis velger man mellom en parabel- eller sirkelform på buen. Sirkelbuen er den mest vanligste, da den arkitektoniske formen tilbyr konstruksjonen god stabilitet og stivhet og gir den en viss simpelthet. I store spenn har parabelform, likevel bedre stivhet og stabilitet enn buer, samtidig som det er mer økonomisk gunstig. Parabelformede buer er også bedre egnet til å tåle de ulike lastene den er utsatt for, da den følger trykklinjen for den mest belastede lastkombinasjonen. Det er trykklinjen som indikerer måten lasten fordeles fra toppen av buen til fundamentet, og hvis konstruksjonen er i tråd med trykklinjen vil det gjøre den sterk nok til å tåle alle større belastninger. Det er derfor det ble bestemt å ha en parabelformet oppbygning til taket på tennishallen [25]. Parabelformet tak vist i figur 2.8.



Figur 2.8: Limtrehallen Moelv (Moelven Limtre AS, 2006)

3 Beregningsgrunnlag

I dette kapitlet vil det bli gitt en oversikt over informasjonen som ligger til grunn for dimensjoneringen av buete takelementet for en tennishall. Først vil det bli gitt en kort gjennomgang av teorien som er relevant for oppgaven. Videre vil valget av tremateriale diskuteres og relevant regelverk for den gitte problemstillingen bli begrunnet.

3.1 Teorigrunnlag

Dette delkapittelet vil forklare definisjonen på grensetilstander og gi en gjennomgang av de generelle prinsippene bak brudd- og bruksgrensetilstand til buekonstruksjoner.

En grensetilstand er når en konstruksjon ikke lenger tilfredsstillende de relevante dimensjoneringskriteriene [26]. Disse kriteriene er knyttet til egenskapene til konstruksjonen eller konstruksjonselementet, og dreier seg om stabilitet, styrke, holdbarhet og bruksgrense. I Eurokodene er de retningslinjene godt beskrevet, og brukes til å sikre at en konstruksjon eller et konstruksjonselement tilfredsstillende kravene til brudd- og bruksgrensetilstand .

3.1.1 Bruddgrensetilstand - ULS

I bruddgrensetilstand sørger man for at konstruksjonen har tilstrekkelig kapasitet sammenlignet med den ytre belastningen. Kapasiteten er avhengig av tverrsnittsgeometri og materialegenskaper [26]. Belastningen gir oss snittkrefter: moment, skjærkraft og aksialkraft - som brukes til å finne de opptredende spenningene i konstruksjonen. For å sørge for tilstrekkelig kapasitet, er det viktig å dimensjonere konstruksjonen i henhold til gjeldende standarder og retningslinjer. Det benyttes tilnærmede beregningsmetoder for kapasitetskontrollen for blant annet vipping, knekning, tverrstrekk og skjær.

I dimensjonering i bruddgrensetilstand, benyttes det dimensjonerende fasthetsverdier til trevirket for å bestemme den dimensjonerende kapasiteten i ULS. Det gjøres med følgende uttrykk (3.1), hentet fra limtreboka [26]:

$$f_d = k_{mod} k_h \frac{f_k}{\gamma_m} \quad (3.1)$$

der f_d er dimensjonerende fasthet og f_k er karakteristisk fasthet for bøyning, skjær og strekk. Faktoren k_{mod} , kontrollerer den karakteristiske fastheten for virkningen av fuktighet og lastvarighet. Tabell 3.1 i Eurokode 5 gir verdier for modifikasjonsfaktoren, k_{mod} , avhengig av type last og klimaklasse. I ULS regner man med partialfaktorer, som γ_m i ligning (3.1). Tabell 2.3 i Eurokode 5, setter verdien til γ_m lik 1,3 for konstruksjonsvirke, mens det nasjonale tillegget (NA) reduserer verdien til 1,25.

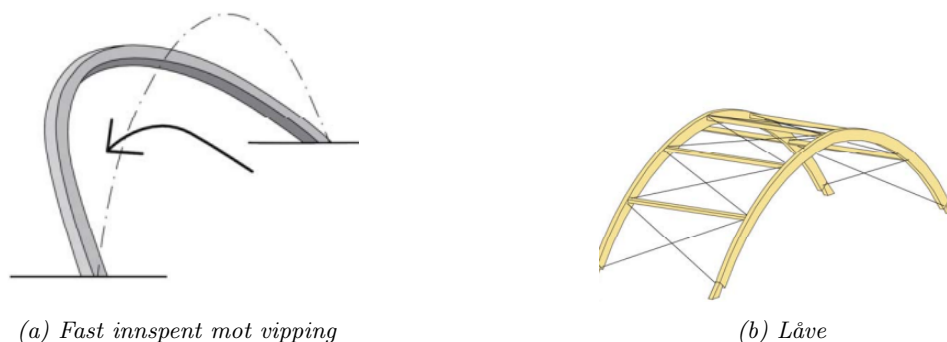
Avsnitt 3.2 (3) i Eurokode 5 uttrykker formelen for høydefaktor:

$$k_h = \min \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{150}{h} \right)^{0,2} \\ 1,3 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

der h er tverrsnitteshøyde i mm. Ligning (3.2) gjelder for konstruksjonstre med høyde mindre enn 150 mm, ellers settes k_h lik 1,0 [10]. Verdien inkluderes kun ved bestemmelse av dimensjonerende bøy- og strekkfasthet, henholdsvis $f_{m,k}$ og $f_{t,0,k}$, som en korreksjon for størrelseseffekt.

Vipping

I buer er det stor fare for vipping, det vil si at buen tipper over sideveis. For å hindre det, er det bestemt å montere et mellomliggende fagverk (åser) mellom to parallelle buer med en lastbredde på 7,2 m, vist i figur 3.1b. Det skal være totalt fire åser med en avstand på 9 meter mellom hverandre. Buen i problemstillingen skal være fastholdt sideveis i fotpunktene, samt i åsene mellom to parallelle buer. Vipping kontrolleres ved formel (3.4), hentet fra EK5-1.

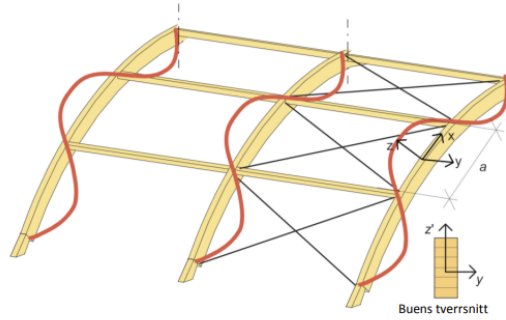


Figur 3.1: Metoder for sideveis avstivning (Limtreboka 2015, kap. 11)

Knekking i og ut av planet

Takelementet i problemstillingen vil være slank og strekke seg over en lang avstand. Det må derfor i enda større grad tas hensyn til knekkingsfaren i dimensjoneringen. Knekking ut av planet er illustrert i figur 3.2. Taket skal ha et såkalt tung-tak-system med en stabiliseringsplate på tvers av buene. Takflaten vil hindre buen fra å knekke ut av planet.

For knekking i buens plan, er det valgt å benytte en lineær statisk analyse som baserer seg på bruk av knekk lengder. Største problemet med denne analysen er derfor å bestemme buens knekk lengde. Det finnes ingen enkel metode for beregning av knekk lengden L_k til en bue, men det er likevel flere analytiske metoder som kan benyttes for å bestemme knekk lengden til en gitt bue for en gitt lastfordeling. Limtreboka introduserer derimot en praktisk og meget konservativ formel for en tre-ledd bue:



Figur 3.2: Knekning ut av planet (Limtreboka 2015, kap. 11)

$$L_k \approx 1,25 \cdot s \quad (3.3)$$

der s er halve buelengden. Formelen (3.3) gir en konservativ verdi for knekk lengden, uavhengig av lastfordelingen. Videre bestemmes k_c -faktorene gjennom EK5-1, og dimensjonene kontrolleres ved hjelp av formel (3.5) og (3.6).

Kontroll mot vipping:

$$\left(\frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} \cdot k_r \cdot f_{m,y,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} \leq 1 \quad (3.4)$$

Kontroll mot knekning, i og ut av planet:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_r \cdot f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (3.5)$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_r \cdot f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (3.6)$$

Her er:

$\sigma_{c,0,d}$	dimensjonerende trykkspenning i fiberretning
$\sigma_{m,i,d}$	dimensjonerende bøyespenning om akse i
$f_{c,0,d}$	dimensjonerende trykkfasthet i fiberretning
$f_{m,i,d}$	dimensjonerende bøye fasthet om akse i
$k_{c,y}$	reduksjonsfaktor for knekning i planet
$k_{c,z}$	reduksjonsfaktor for knekning ut av planet
k_{crit}	reduksjonsfaktor for sideveis utbøyning
k_r	reduksjonsfaktor som tar hensyn til fasthetsreduksjonen pga. lamellenes krumning under produksjonen
k_m	fra uttrykk (6.39) eller (6.40) i Eurokode 5

Tverrstrekk og skjær

I bruddgrensetilstand, er det også blitt kontrollert for tverrstrekk og skjær. Tverrstrekk oppstår her ved en skjevlast når momentet gir strekk i underkant av buen og prøver å jevne ut buen. I et slikt tilfelle vil det, på tvers av fibre, oppstå strekkspenninger [10]. Eurokode 5-1 definerer et uttrykk for kombinert strekk normalt på fiberretningen og skjær

$$\frac{\tau_d}{f_{v,d}} + \frac{\sigma_{t,90,d}}{k_{dis} \cdot k_{vol} \cdot f_{t,90,d}} \leq 1 \quad (3.7)$$

der

$\sigma_{t,90,d}$	dimensjonerende strekkspenning normalt på fiberretning
τ_d	dimensjonerende skjærspenning
$f_{t,90,d}$	dimensjonerende strekkfasthet normalt på fiberretningen
$f_{v,d}$	dimensjonerende skjærfasthet
k_{dis}	faktor som tar i betraktning til spenningsfordelingen i et toppunkt
k_{vol}	volumfaktor, = 1,0 for konstruksjonstre

Kontroll av tverrstrekk og skjær er regnet separat, hvor første leddet i ligning 3.7 er anvendt for skjærkontroll og siste leddet for tverrstrekk. Det er på grunn av at skjærkraften er null ved maks. moment og omvendt. Dermed vil ikke skjær- og tverrstrekkspenningene opptre i samme snitt. Dimensjonerende strekkspenning $\sigma_{t,90,d}$ er beregnet etter ligning 3.9. Her er p_d trykket på bjelken i møneområdet. EK5-1 anbefaler ligning 3.8, men begge uttrykkene er tillatt å bruke etter det norske nasjonale tillegget. Ligning 3.8 og 3.9 er hentet henholdsvis fra EK5-1 ligning (6.54) og (6.55).

$$\sigma_{t,90,d} = k_p \cdot \frac{6 \cdot M_{maks}}{b \cdot h^2} \leq 1 \quad (3.8)$$

eller

$$\sigma_{t,90,d} = k_p \cdot \frac{6 \cdot M_{maks}}{b \cdot h^2} - 0,6 \cdot \frac{p_d}{b} \quad (3.9)$$

Trykkrefter i fundament

I buens opplagre oppstår det store trykkrefter fra ytre belastninger. Trykkreftene videreføres fra bueelementet til fundamentet gjennom buens opplagre, slik at det ikke oppstår deformasjoner eller konstruksjonssvikt i buen. Disse er ofte både horisontale og vertikale krefter, som fundamentet må dimensjoneres for og kunne klare å ta opp. Ved design av fundamentet må det bli tatt hensyn til både horisontale og vertikale krefter som fremtrer på opplagrene. Vertikale krefter kan fundamentet ta direkte opp under støtte fra festeanordninger. Horisontale krefter har imidlertid behov for andre forankringsmetoder, f.eks. i form av strekkstag og/eller forankringsplater [27].

Kreftene i fundamentet overføres videre til jorda under. Det er dermed viktig å ta høyde for en rekke faktorer, som blant annet jordtype og inkonsistenser i undergrunnen, slik at fundamentet har nok kapasitet og pålitelighet [27]. Tennishallen er plassert i et område som består av sandmasser i jordgrunnen, og fundamentet må derfor støttes opp med fundamenteringspæler eller andre fundamentstøtter. I praksis må fundamentet og støttekonstruksjoner dimensjoneres i henhold til opptredende laster og grunnforhold. Det er valgt å ikke ta hensyn til dette i dimensjoneringsprosessen på grunn av tids- og ressursbegrensninger, og heller valgt å fokusere på å utvikle viktige egenskaper og kunnskaper om buer og dimensjoneringsprinsipper.

3.1.2 Bruksgrensetilstand - SLS

Det er i bruddgrensetilstand dimensjoneringen foregår, mens nedbøyningen kontrolleres i bruksgrensetilstand. Bruksgrensetilstand går ut på at konstruksjonen skal fungere som forutsatt under hele levetiden ved normal bruk. I SLS gjøres utregningene basert på hvordan konstruksjonen er i virkeligheten uten noen ekstra sikkerhet i beregningene. Derfor settes partialfaktorer og lastfaktorer lik 1,0 [26].

Ved dimensjonering i bruksgrensetilstand, er det viktig å ta hensyn til fuktighetsinnholdet. Variasjoner i fuktighet kan påvirke dimensjonsstabiliteten og styrken i trevirket, fordi treet er et hygroskopisk materiale [26]. Det kan bidra til langtidsdeformasjonene. For å ta hensyn til disse effektene, innfører Eurokode 5 en deformasjonsfaktor k_{def} . Faktoren er avhengig av klimaklassen.

Det finnes tre ulike lastkombinasjoner i bruksgrensetilstand: karakteristisk, ofte forekommende og tilnærmet permanent [28]. Bruksområdene er avhengig av konsekvensene hos konstruksjonen, se Tabell 3.1. Informasjonen i Tabell 3.1 er hentet fra det nasjonale tillegget i EN-1990, tabell NA.A1 (904) [6]. I denne bacheloroppgaven ble det bestemt å benytte karakteristisk lastkombinasjon, fordi den gir konstruksjonen større verdier for deformasjonen induisert av de variable lastene. På grunnlag av det, brukes karakteristiske verdier for de variable lastene, se Tabell 3.2. Dette er i tråd med at nedbøyningskontrollen er ment for å unngå permanente skader på konstruksjonen [28].

Tabell 3.1: Retningslinjer for bruk av lastkombinasjoner (NS-EN 1990, tabell NA.A1 (904))

Konsekvenser	Lastsituasjon som brukes	Anbefalte største tillatte nedbøyningsverdier
Konstruksjon der nedbøyning fører til skade	<i>karakteristisk</i>	fastsettes i det enkelte prosjektet
Konstruksjoner der det på grunn av bruk eller utstyr stilles krav	<i>ofte forekommende</i>	fastsettes i det enkelte prosjektet
Konstruksjoner med alminnelige brukskrav eller estetiske krav	<i>tilnærmet permanent</i>	L/200 - L/500

Tabell 3.2: Lastfaktorer for SLS, (NS-EN 1990, tabell A1.4)

Lastkombinasjon som skal påvises	Permanent last γ_{Gj} eller γ_P	En variabel last γ_{Q1} eller $\psi_{01}\gamma_{Q1}$	Øvrige var. laster $\psi_{0i}\gamma_{Qi}$
Karakteristisk	1,0	1,0	0,7
Ofte forekommende	1,0	0,7	0,6
Tilnærmet permanent	1,0	0,5	0,5

Nedbøyning, metode

Nedbøyning i trekonstruksjoner er et komplisert tema, som EK5-1 ikke gir et konkret svar på. Deformasjonen kan deles inn i to typer, en umiddelbar og elastisk deformasjon (w_{inst}), og en plastisk deformasjon (w_{krypp}) som forårsakes av krypeffekter. Den øyeblikkelige deformasjonen (w_{inst}) oppstår i en konstruksjon som er påkjent av laster i korte periode og medfører store nedbøyninger. Andre laster varer over en lengre periode, som f.eks. egenlasten, og skaper langtidsdeformasjoner (w_{krypp}) [28].

EK5-1 definerer kryp-deformasjonen som $w_{krypp} = k_{def} \cdot w_{inst}$; dvs. den ikke reverserbare kryp-deformasjonen bestemmes ved å multiplisere den umiddelbare deformasjonen med deformasjonsfaktoren k_{def} . Middelerdiene av elastisitetsmodulen E og skjærmodulen G er viktige parametre som må tas med i beregningen av deformasjonen. Elastisitetsmodulen beskriver treets stivhet, mens skjærmodulen beskriver trevirkets evne til å motstå skjærkrefter. Skjærdeformasjon er ofte viktig å ta hensyn til, men den er vesentlig lavere i forhold til bøyedeformasjonen [28].

Karakteristisk lastkombinasjon er blitt benyttet for bruksgrensetilstand og ga uttrykket 3.10 for relevant belastning med en variabel last q . Som nevnt, er det ikke en enkel oppgave å beregne nedbøyningen for en bue. Det er derfor valgt å betrakte buen som en fritt opplagt bjelke (se vedlegg D). Det antas først at nedbøyningen i bjelken vil være større enn nedbøyningen i buen. Det kommer av at i en bjelke vil all momentet tas opp av opplagrene, mens i en bue vil en stor del av momentet tas opp av normalkraften. Til slutt kontrolleres denne antagelsen ved å benytte samme metode, men for et ferdigberegnet eksempel fra Limtreboka [29]. Ligning 3.11 gir nedbøyning for en bjelke med jevnt fordelt last, jf. Byggforskserien 421.051 [30].

Kombinasjonsfaktorer (ψ_2) skal kompensere for usikkerhet og unøyaktigheter knyttet til de karakteristiske lastene. Den benyttes i SLS til å kombinere ulike belastninger på en konstruksjon for å kalkulere den totale påvirkningen. Verdien på ψ_2 kommer av empiriske resultater [28].

$$p_{fin, kar} = q_k(1 + \psi_2 k_{def}) + g_k(1 + k_{def}) \quad (3.10)$$

$$\delta = \frac{5p_{fin, kar} L^4}{384EI} \quad (3.11)$$

3.2 Valg av tremateriale

I valg av tremateriale er det blitt tatt hensyn til en rekke faktorer, blant annet formål, takets form og størrelse og tilgjengelighet av materiale. Tradisjonelt sett har det vært mest vanlig med gran og furu i norsk byggeindustri, fordi de er rimelige og lette å bearbeide. Begge har mange egenskaper som gjør dem godt egnet til bruk i buede tak. Furu er vanligvis et godt valg i mindre konstruksjoner og konstruksjonselementer, fordi det er lett tilgjengelig og billig.

I bacheloroppgaven er det blitt valgt å bruke gran som materiale i tennishallen. Gran er det trevirket som benyttes mest til massivtrekonstruksjoner. Dette er fordi at gran har høyere styrke og hardhet enn furu, og er bedre egnet til å bære vekten av et stort og langstrakt buet tak [31]. Gran er godt utbredt i Trøndelag, og det vil dermed ikke være et problem med å få tak i dette materialet [32].

3.3 Aktuelle krav i regelverk

Dette delkapittelet beskriver hva Eurokoden er, hvilke Eurokoder er relevante for bacheloroppgaven og begrensninger som Eurokoden setter for konstruksjoner i bruksgrensetilstanden.

Eurokoden er en felles europeisk standard som består av en rekke retningslinjer og krav for utforming, og dimensjonering av konstruksjoner. Eurokodene er delt inn i ti grupper, om blant annet mur-, stål- og betongkonstruksjoner. For denne bacheloroppgaven er de mest relevante standardene; Eurokode 0: Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner, Eurokode 1: Laster på systemer og Eurokode 5: Prosjektering av trekonstruksjoner. Hver Eurokode består av et tilleggskapittel med nasjonale tillegg (NS-EN) som er utarbeidet for det gjeldende landet. Det nasjonale tillegget tar dermed hensyn til ressursutnyttelse, holdbarhet, sikkerhet, klimatiske og strukturelle forhold [26].

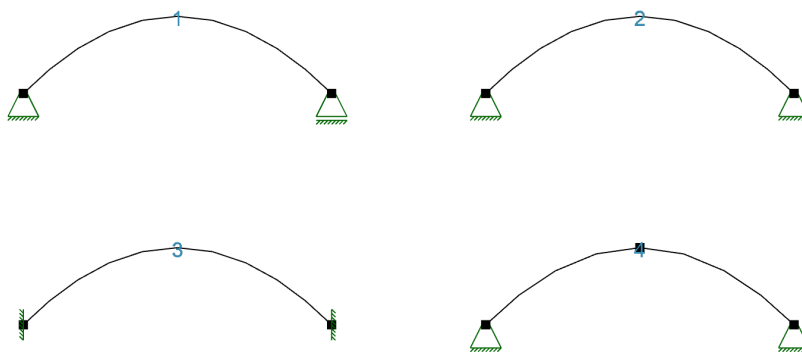
I alle Eurokodene er de ulike bestemmelsene nummerert stigende fra (1), (2) til hvert avsnitt. Bak numrene i bestemmelsene kan det være en P, for eksempel (3)P, der P-en står for *Principle requirement*. Bestemmelser med P bak nummeret betyr at det er et krav som må følges. I bestemmelser uten P, virker bestemmelsen som en anvendelsesregel. Det vil si at regelen er en ordinær regel som er overensstemmende med anbefalingene og følger retningslinjene [26].

Nedbøyningsbegrensning for buer

Nedbøyningen i buer vil være mindre synlige og er som oftest ikke et problem. Krav til maks nedbøyning er vanligvis mellom $L/200$ og $L/500$, der L er spennvidden. Generelt er $L/250$ et vanlig brukt nedbøyningskrav eller en standard, og er derfor valgt som kravet for problemstillingen i bacheloroppgaven. Nedbøyningskravet er blitt bestemt av hensyn til takelementets størrelse, opptredende laster og formålet til bygget.

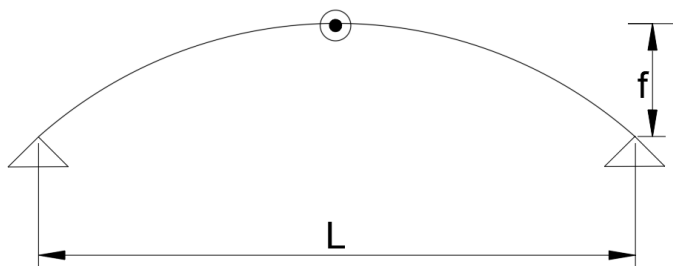
4 Statisk modell

Buede takkonstruksjoner i tre kan opptre forskjellig, avhengig av opplagerbetingelsene. De mest relevante alternativene vises i figur 4.1. Alternativ 1 har en buekonstruksjon med et fast boltelager og et glidelager. Her vil buen fungere som en fritt opplagt bjelke, der systemet er statisk bestemt. I alternativ 2 er det fast boltelager i begge opplegg, som gjør bueelementet statisk ubestemt. Buene i alternativ 1 og 2 regnes som to-ledds buer. Buer med to innspente ender, som i alternativ 3, har størst bæreevne [27], men benyttes sjeldent i lastbærende trekonstruksjoner. Innspente buer og to-ledds buen fra alternativ 2 er statisk ubestemte, som gjør dem mer sensitive ovenfor setninger og temperaturvariasjoner [25].



Figur 4.1: Typiske bæresystemer for buer (Focus Konstruksjon 2023)

For buen i problemstillingen ble det valgt å benytte en tre-ledds bue, illustrert i alternativ 4. En tre-ledds bue er en bue med faste opplegg og et ledd i buetoppen. Buen er statisk bestemt, og er dermed lite følsom for temperaturendringer. Denne buetypen er desidert den mest vanligste for tak i idrettshaller med spenn på opp til 60 meter. På grunn av størrelsen til tennishallen, var en tre-ledds bue mer favorisert over innspente buer og to-ledds buer, fordi den er lettere å transportere. Det skyldes at det er komplisert å konstruere momentstive skjøter i tre, og medfører at slike buer må produseres i en del. Transporten kan derfor sette begrensninger for innspente buer og to-ledds buer [27]. Et mulig problem med en tre-ledds bue er at den får større momenter, med samme last, enn leddfrie buer og to-ledds buer [25]. Det kompenseres ved å velge et tykkere tverrsnitt og et sterkere materialet for buen. Statisk modell av tennishallen er vist i figur 4.2.



Figur 4.2: Statisk modell av tennishall (Autocad 2024)

5 Aktuelle laster i SLS og ULS

Følgende kapittel vil omfatte relevante lastbetraktninger som ligger til grunn for dimensjonering og analyse i bruks- og bruddgrensetilstand av en tennishall konstruksjon i massivtre. Forutsetningene og beregningene videre i oppgaven vil bli gjort og utført i henhold til gjeldende regelverk for trekonstruksjoner, samt NS-EN 1991 Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, NS-EN 1990 Eurokode 0: Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner og NS-EN 1995 Eurokode 5: Prosjektering av trekonstruksjoner. Beregning av relevante laster er presentert i vedlegg A.

5.1 Generelt

Prosjektgruppa vil betrakte alle relevante laster som har innvirkning på konstruksjonen i både bruddgrensetilstand og bruksgrensetilstand. Det har blitt gjort en grundig vurdering og analyse over hvilke laster som vil være mest aktuelle og relevante for denne oppgaven. Selvsagt blir det problematisk å ta for seg absolutt alle mulige laster som konstruksjonen vil bli utsatt for, ettersom en kunne skrive en hel bachelor oppgave kun om f.eks snølast. Samtidig er mange av de mulige lastene ikke så aktuelle i oppgavens tilfelle dog lasttilfeller som jordskjelv o.l, vil være lite sannsynlige i oppgavens sammenheng. Derfor ble det vedtatt av prosjektgruppa å velge de tre mest aktuelle og relevante lastene som vil bli presentert nedenfor.

5.2 Egenlast

Egenlast er definert i hovedregel som alle permanente og konstante laster som har en påvirkning på konstruksjonen. I problemstillingen gitt ved oppgaven, vil egenlasten være vekten til det buede takelementet av massivtre og har betegnelsen g . Denne typen last vil virke stabiliserende for konstruksjonen i virkning med andre lastvirkninger nevnt nedenfor. Egenlasten bestemmes ved å multiplisere de geometriske verdiene med tyngdetettheten til massivtre. Den karakteristiske egenlasten blir fastsatt for hver enkel konstruksjonsdel av takelementet og dermed lagt sammen i henhold til antall konstruksjonsdeler for å finne den totale egenlasten. Egenlasten kan fastsettes enten som en linjelast, punktlast eller en flatelast avhengig av situasjonen og hva som vil passe best for beregningene videre. De tre tilfellene er representert i form av formlene (5.1), (5.2) og (5.3).

$$q_{k.flatelast} = \rho \cdot t \cdot g \quad (5.1)$$

$$q_{k.linje} = \rho \cdot t \cdot b \cdot g \quad (5.2)$$

$$Q_k = \rho \cdot t \cdot b \cdot l \cdot g \quad (5.3)$$

der ρ er densiteten til materialet, b er bredden, t er tykkelsen og l er lengden til konstruksjonsdelen. g er tyngdeakselerasjonen med en verdi på $9,81 \text{ m/s}^2$. For tilhørende beregning i bruddgrensetilstanden vil de gjeldende lastfaktorer bli inkludert for å få den dimensjonerende egenlasten. Massivtre har en tyngdetetthet på $5\text{-}7 \text{ kn/m}^3$ [33]. Dermed blir $\gamma_g = 7 \text{ kn/m}^3$ valgt for å være på den konservative siden. Det ble også valgt å ta tilhørende bidragsverdier fra tek-

niske installasjoner og himling, med i beregningen. Som nevnt tidligere, er det valgt et tung-tak system etter anbefaling fra Trehus. Tak bør alltid dimensjoneres for et slikt taksystem og kan i senere anledning skiftes til lettere taktekning. Det medfører en egenvekt på 1 kN/m^2 [34].

5.3 Snølast

Snølast bestemmes og beregnes fra NS-EN 1991-1-3 Eurokode 1: Allmenne laster. Det kreves ved beregning av snølast å ta hensyn til område, høyde over havet, takform og evt. fonning grunnet geometrien til konstruksjonen og hosliggende bygninger. Snølasten på en takkonstruksjon avhenger ikke bare av klimaforhold, men også takets form, tekningsmateriale og varmegjennomgang. Snølastverdiene for tak finnes i *snølaststandard* (NS-EN 1991-1-3), som er beregnet ut fra en funksjon av områdets klima, elevasjon og landskapsbeskrivelse, samt byggets form og materiale [27]. Verdier for karakteristisk snølast og formfaktorer får man fra NS-EN 1991-1-3. Det nasjonale tillegget til snølaststandard krever at det skal dimensjoneres for to separate lasttilfeller for snølasten, en jevnt fordelt last over hele taket og ett med skjev snølast, i form av en trekantformet snølast [8]. Dette skyldes at buens form gjør den spesielt sårbar for skjevlast [25]. I konstruksjoner med store spennvidder vil slike kritiske situasjoner medføre at det oppstår alvorlige bøyemomenter i buen. Det må derfor tas hensyn til slike alvorlige situasjoner.

5.4 Vindlast

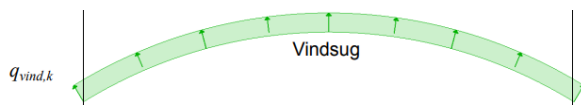
På samme måte som nedbør og snøforholdene, vil vindforholdene også variere en del både regionalt og lokalt. Variasjonene vil avhenge av flere faktorer som lufttetthet, konstruksjonens geometri, plassering, terrengforhold og eksponering. Tennishallen ligger i bydelen Øya, Trondheim. De regelmessige vindretningene om vinteren er fra øst til sør. Trondheimsfjorden skaper en utfallsport for den kalde vinden fra landet innenfor. Vind over liten kuling (vindstyrke 6 i Beauforts vindskala. $10,8\text{--}13,8 \text{ m/s}$) er ca. $10\text{--}20 \%$, mens liten storm (vindstyrke 9. $20,8\text{--}24,4 \text{ m/s}$) utgjør mellom $0,5 - 1,0 \%$. Om sommeren dominerer som regel bakkevinden fra nord, gjerne betegnet som «havgule» [35].

NS-EN 1991-1-4 Eurokode 1: Laster på konstruksjoner gir retningslinjer og beregningsgrunnlag for vindlasten som klassifiseres som øyeblikkslast. Karakteristisk vindlast på en konstruksjon blir i utgangspunktet regnet i henhold til den maksimale vindhastigheten som i gjennomsnitt opptrer hvert 50. år. Denne verdien blir videre kalt som referansevindhastighet og danner grunnlaget for dimensjonering av den endelige vindlasten. Verdien hentes fra standarden nevnt ovenfor. Hva slags verdi for referansevindhastighet som blir brukt, vil også variere da hver enkel kommune har sin egen målte referansevindhastighet. For Trondheim vil referansevindhastigheten $v_{b,0}$ være 26 m/s , jf. NS-EN 1991-1-4.

5.5 Vindsug

Takkonstruksjoner skal dimensjoneres og kontrolleres med hensyn på oppløft. Dette oppløftet oppstår som en følge av vindsug - et fenomen som oppstår når vinden passerer en konstruksjon og skaper et område med lavere trykk på en side av konstruksjonen, og tilsvarende høyere trykk den andre siden. Slike trykkpåkjenninger vil føre til at objektet blir utsatt for høye krefter og spenninger da området med lavere trykk vil trekke til seg luft/vind. På denne måten vil en takkonstruksjon bli "løftet opp" eller forsøkt å bli revet av disse kreftene, og bli påført store skader. For tak kan også undergurten bli utsatt for knekking, særlig sidevies, dersom løftekreftene forårsaket av vindsug overskrider egenlasten. Vindsug er derfor en viktig parameter å ta hensyn til i dimensjonering og beregninger, særlig i høye bygninger som er plassert i områder med relativt mye vind [36] [37].

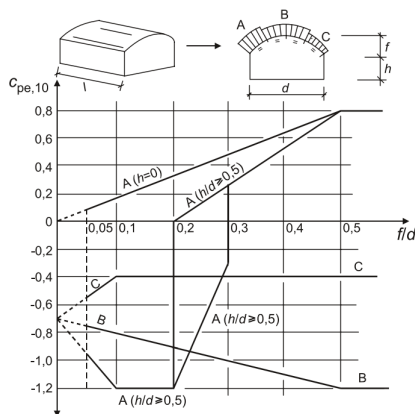
Kontroll og dimensjonering for vindsug inngår i kalkulasjonen av vindlasten, som en oppadrettet nyttelast (fig. 5.1). Vindtrykk/vindsug blir satt sammen av samlede indre og ytre vindkrefter. Den karakteristiske vindlasten blir i form av løftekrefter på grunn av at største netto formfaktor er negativ. Det er derfor betraktning av vind blir kun aktuelt i kontekst med løftekrefter, dvs. utadrettede krefter på taket.



Figur 5.1: Vindsug som en oppadrettet nyttelast (Limtreboka: Beregningseksempler 2015, eks.14)

Beregning av aktuelle løftekrefter foregår i samsvar med pkt. 7.2.8(1) i NS-EN 1991-1-4, hvor en ytre formfaktor for vinden blir fastsatt etter figur 5.2. Med en tilsvarende indre formfaktor c_i , får vi karakteristiske jevnt fordelte, utadrettede vindkraften på taket, etter formelen (5.4).

$$q_{vind,k} = q_p \cdot (c_e - c_i) \cdot a \quad (5.4)$$



Figur 5.2: Anbefalte verdier for utvendige formfaktorer for bueformede tak (NS-EN 1991-1-4, figur 7.11)

5.6 Kryp

Kryp, eller kryptøyninger er en type last som klassifiseres som en deformasjonslast. En typisk kjennetegn for deformasjonslaster er at de er tidsavhengige og opptrer som regel som en følge av en ytre belastning. Kryp refererer til den langsomme og gradvise deformasjonen som forekommer når et objekt blir utsatt for en konstant belastning. Kryp-deformasjonen er kombinert av en forsinket elastisk, og plastisk deformasjon. Alle typer materialer har til en viss grad kryp i seg ved alle belastningsnivåer [38]. Størrelsen på krypdeformasjonen blir vanligvis angitt i form av et kryptall, som er et forholdstall mellom momentan- og krypdeformasjonen som en funksjon av tiden under belastning. Bygningsmaterialer som betong, plast og tre har relativt stort kryp.

Som alt av trevirke vil også massivtre få irreversible krypdeformasjoner når det blir utsatt for belastning over tid, og med økt fuktighet øker deformasjonene. Eurokode 5 betrakter slike deformasjoner gjennom deformasjonsfaktoren k_{def} . For permanente laster, definerer Eurokode 5-1 faktoren k_{def} for tre og trebaserte materialer, som vist i tabell 5.1. Tabell 5.1 er et utdrag fra Eurokoden, med verdier kun for konstruksjonstre. Det er verdt å merke seg at faktoren k_{def} er en funksjon av bare klimaklassen, mao. fuktighetsinnhold. Belastningstiden tas hensyn til gjennom kombinasjonsfaktoren ψ_2 .

Tabell 5.1: Verdier av k_{def} for konstruksjonstre (EK5-1, tabell 3.2)

Klimaklasse	1	2	3
k_{def}	0,60	0,80	2,00

6 Dataverktøy

Dette kapittelet vil ta for seg deler av teorien og prosessen bak modelleringen, og presentere de ulike dataverktøyene som ble brukt under analysen.

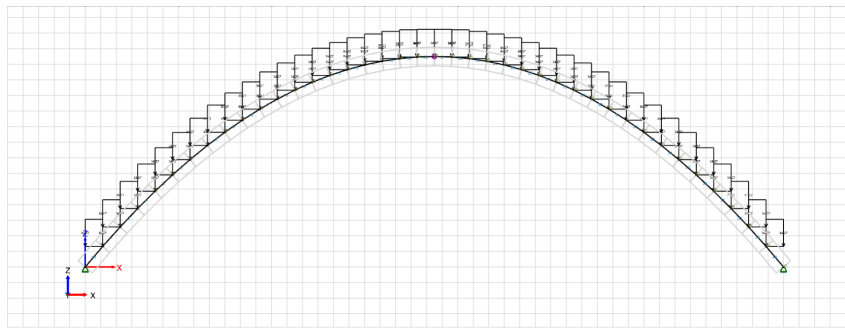
6.1 Focus Konstruksjon

Focus Konstruksjon er et digitalt FEM analyseprogram som bruker elementmetoden for å beregne alt fra simple, til svært kompliserte statiske problemer og konstruksjoner. Prosjektgruppa har blitt kjent med dataverktøyet gjennom emnet *Stålkonstruksjoner 1*, det 5. semesteret av studieforløpet sitt. Programmet har en naturlig simpel oppbygning som gjør det enkelt å ta i bruk og beherske dette verktøyet på et ganske greit nivå, allerede etter kort tid. Focus Konstruksjon lar man modellere i både 2D og 3D med forskjellige materialer, i tillegg til muligheten til å legge inn egne materialtyper med bestemte dimensjoner og egenskaper. Deretter brukes programmet til å gjennomføre en global analyse av modellen i samsvar med Eurokoden og det nasjonale tillegget for både Norge og Sverige.

Dataverktøyet lar brukeren modellere konstruksjoner med rette stav- eller bjelkeelementer, krumme segmenter og skall. Alle segmentene kan ha varierende tversnitt, og brukeren kan selv lage sine egne tversnittstyper ved behov eller hente de fra selve programmet i den store databasen som dekker de fleste relevante tilfellene. Ved analysen gir programmet brukeren en riktig og presis representasjon av lastbildet, og de ulike lastkombinasjonene settes raskt og enkelt opp av lasttilfellene.

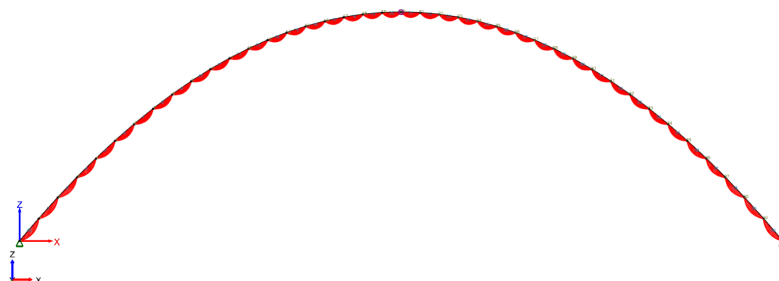
Gruppen har benyttet følgende dataverktøy til å lage en overordnet modell av tre-ledds buen med alle de aktuelle lasttilfellene som ligger til grunn for takkonstruksjonen i prosjektet. Focus Konstruksjon viste seg til å ikke være så velegnet til å lage store og krumme elementer, særlig buer. Dette er grunnet programmets egenskap til å betrakte en slik modell som et felles og stort segment, som gjør det umulig å plassere et ledd på buen for å danne en tre-ledds bue. For å danne et ledd er det nødvendig å ha flere segmenter definert i modellen – noe Focus Konstruksjon ikke betrakter en vanlig krum-bjelkemodell som.

Ovenfornevnte problemet ble løst ved å definere en andregradsligning for en parabel. Ved å løse ligningen, kunne prosjektgruppen lage en tabell med tilhørende verdier langs horisontal- og vertikalaksen som i sin helhet dannet den nødvendige buen. Focus Konstruksjon har en innebygd funksjon som tillater importering av Excel-tabeller inn i programmet. Denne funksjonen ble videre benyttet for å importere en punktliste med tilhørende horisontale- og vertikale koordinater fått fra løsningen av andregradsligningen, og plottet inn som knutepunkter. Prosjektgruppen definerte 40 punkter for parabelbuen, og bundet dem sammen ved å lage tilsvarende segmentliste for knutepunktene av det aktuelle materialet. Resultatet ble en tilnærming til bue-modellen i problemstillingen som ga gruppen en overordnet oversikt over det statiske oppsettet av takkonstruksjonen. Den ferdige modellen med tilhørende aktuelle laster er vist på figur 6.1.



Figur 6.1: Modellen av buete takkonstruksjonen i Focus Konstruksjon

Ved å gjennomføre en statisk analyse av den ferdigstilte modellen, fikk gruppen et momentdiagram for den modellerte konstruksjonen. Momentdiagrammet er vist på figuren under (fig.6.2).



Figur 6.2: Bøyemoment-diagrammet til modellen i henhold til Focus Konstruksjon

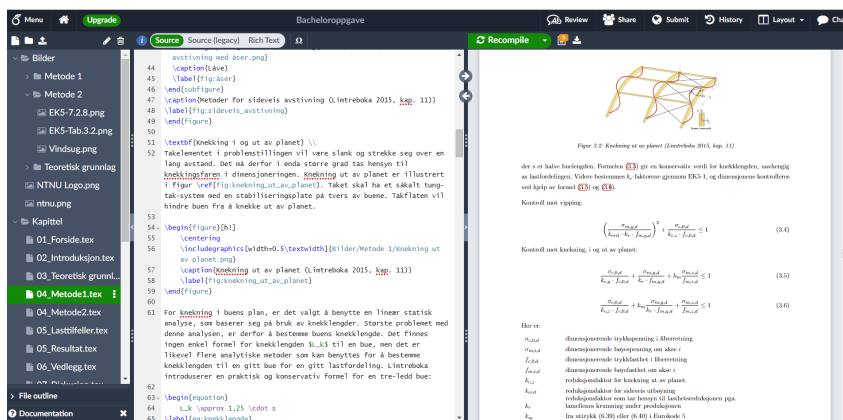
Et slikt momentdiagram vil med det første se urimelig ut. Likevel er det tydelig merkbart at momentet har en nullverdi ved opplagrene og i leddet på toppen. En merker også at momentet starter og slutter med en nullverdi ved hvert knutepunkt i modellen. Ved definisjonen av flere enn 40 knutepunkter for denne parabelen, vil momentet gå nærmere null over hele buen. Dette blir nærmere diskutert i *Kapittel 9: Diskusjon*.

6.2 Overleaf

Overleaf er en nettbasert LaTeX redaktør for skriving, redigering og publisering av vitenskapelige dokumenter [39]. Overleaf samarbeider med et bredt spekter av vitenskapelige utgivere og tilbyr offisielle LaTeX-maler for vitenskapelige tidsskrifter og direkte innsendingslenker. LaTeX er et dokumentbehandlingsprogram som blir brukt for å generere dokumenter av høy kvalitet med både ingeniørteknisk og matematisk innhold. Overleaf passer bra med å sette opp dokumentmaler, har gode kollaborative funksjoner og kan importere/eksportere filer i ulike formater.

Prosjektgruppen har tatt i bruk Overleaf til å generere det endelige utkastet av oppgaven, sette inn figurer og tabeller, samt skape gode og oversiktlige referanse-, tabell-, figur- og indekslistene. Dette verktøyet har vært en veldig nyttig og viktig ressurs for gruppen da det har gjort samarbeidet om prosjektoppgaven enklere. Programmet har forenklet deling av dokumentene med hverandre og ga mulighet til å utføre korrekturer i sanntid.

Det har også gjort et stort bidrag med å tilby gruppen maler som har hjulpet med å formatere dokumentet på en riktig måte, samt forenklet skrivingen av en kompleks oppgave som denne bacheloroppgaven. Figur 6.3 viser en typisk arbeidsgang i Overleaf-programverktøyet.



Figur 6.3: En typisk arbeidsgang i Overleaf LaTeX

6.3 Excel

Microsoft Office Excel er et dataverktøy for å skape og jobbe med regneark, utviklet av Microsoft. Verktøyet er svært vanlig i akademiske oppgaver og gir brukeren muligheten til å analysere store datamengder på en rask og effektiv måte. Prosjektgruppen har benyttet seg av Excel for å lage tabeller, oppføre lange og komplekse formler, og systematisere alle tall og verdier på en oversiktlig måte. Programmet viste seg til å være svært nyttig i oppgavens kontekst. Et av de viktigste funksjonene til Excel i en slik oppgave er at ved oppføring av formler og verdier ved hjelp av disse, vil utregningene endre seg automatisk dersom en skulle f. e. bytte dimensjonene eller endre en variabel (fig. 6.4). Dette har gjort utføring av analysen og justeringer enklere, under arbeidet.

Laster	Laster per areal	Laster per lengde
1	1.0	1.0
2	1.5	1.5
3	2.0	2.0
4	2.5	2.5
5	3.0	3.0
6	3.5	3.5
7	4.0	4.0
8	4.5	4.5
9	5.0	5.0
10	5.5	5.5
11	6.0	6.0
12	6.5	6.5
13	7.0	7.0
14	7.5	7.5
15	8.0	8.0
16	8.5	8.5
17	9.0	9.0
18	9.5	9.5
19	10.0	10.0
20	10.5	10.5
21	11.0	11.0
22	11.5	11.5
23	12.0	12.0
24	12.5	12.5
25	13.0	13.0
26	13.5	13.5
27	14.0	14.0
28	14.5	14.5
29	15.0	15.0
30	15.5	15.5
31	16.0	16.0
32	16.5	16.5
33	17.0	17.0
34	17.5	17.5
35	18.0	18.0
36	18.5	18.5
37	19.0	19.0
38	19.5	19.5
39	20.0	20.0
40	20.5	20.5
41	21.0	21.0
42	21.5	21.5
43	22.0	22.0
44	22.5	22.5
45	23.0	23.0
46	23.5	23.5
47	24.0	24.0
48	24.5	24.5
49	25.0	25.0
50	25.5	25.5
51	26.0	26.0
52	26.5	26.5
53	27.0	27.0
54	27.5	27.5
55	28.0	28.0
56	28.5	28.5
57	29.0	29.0
58	29.5	29.5
59	30.0	30.0
60	30.5	30.5
61	31.0	31.0
62	31.5	31.5
63	32.0	32.0
64	32.5	32.5
65	33.0	33.0
66	33.5	33.5
67	34.0	34.0
68	34.5	34.5
69	35.0	35.0
70	35.5	35.5
71	36.0	36.0
72	36.5	36.5
73	37.0	37.0
74	37.5	37.5
75	38.0	38.0
76	38.5	38.5
77	39.0	39.0
78	39.5	39.5
79	40.0	40.0
80	40.5	40.5
81	41.0	41.0
82	41.5	41.5
83	42.0	42.0
84	42.5	42.5
85	43.0	43.0
86	43.5	43.5
87	44.0	44.0
88	44.5	44.5
89	45.0	45.0
90	45.5	45.5
91	46.0	46.0
92	46.5	46.5
93	47.0	47.0
94	47.5	47.5
95	48.0	48.0
96	48.5	48.5
97	49.0	49.0
98	49.5	49.5
99	50.0	50.0
100	50.5	50.5

(a) Eksempel: Regnearkoppsett i Excel

Laster	Laster per areal	Laster per lengde
1	=Laster/1	=Laster/1
2	=Laster/1.5	=Laster/1.5
3	=Laster/2	=Laster/2
4	=Laster/2.5	=Laster/2.5
5	=Laster/3	=Laster/3
6	=Laster/3.5	=Laster/3.5
7	=Laster/4	=Laster/4
8	=Laster/4.5	=Laster/4.5
9	=Laster/5	=Laster/5
10	=Laster/5.5	=Laster/5.5
11	=Laster/6	=Laster/6
12	=Laster/6.5	=Laster/6.5
13	=Laster/7	=Laster/7
14	=Laster/7.5	=Laster/7.5
15	=Laster/8	=Laster/8
16	=Laster/8.5	=Laster/8.5
17	=Laster/9	=Laster/9
18	=Laster/9.5	=Laster/9.5
19	=Laster/10	=Laster/10
20	=Laster/10.5	=Laster/10.5
21	=Laster/11	=Laster/11
22	=Laster/11.5	=Laster/11.5
23	=Laster/12	=Laster/12
24	=Laster/12.5	=Laster/12.5
25	=Laster/13	=Laster/13
26	=Laster/13.5	=Laster/13.5
27	=Laster/14	=Laster/14
28	=Laster/14.5	=Laster/14.5
29	=Laster/15	=Laster/15
30	=Laster/15.5	=Laster/15.5
31	=Laster/16	=Laster/16
32	=Laster/16.5	=Laster/16.5
33	=Laster/17	=Laster/17
34	=Laster/17.5	=Laster/17.5
35	=Laster/18	=Laster/18
36	=Laster/18.5	=Laster/18.5
37	=Laster/19	=Laster/19
38	=Laster/19.5	=Laster/19.5
39	=Laster/20	=Laster/20
40	=Laster/20.5	=Laster/20.5
41	=Laster/21	=Laster/21
42	=Laster/21.5	=Laster/21.5
43	=Laster/22	=Laster/22
44	=Laster/22.5	=Laster/22.5
45	=Laster/23	=Laster/23
46	=Laster/23.5	=Laster/23.5
47	=Laster/24	=Laster/24
48	=Laster/24.5	=Laster/24.5
49	=Laster/25	=Laster/25
50	=Laster/25.5	=Laster/25.5
51	=Laster/26	=Laster/26
52	=Laster/26.5	=Laster/26.5
53	=Laster/27	=Laster/27
54	=Laster/27.5	=Laster/27.5
55	=Laster/28	=Laster/28
56	=Laster/28.5	=Laster/28.5
57	=Laster/29	=Laster/29
58	=Laster/29.5	=Laster/29.5
59	=Laster/30	=Laster/30
60	=Laster/30.5	=Laster/30.5
61	=Laster/31	=Laster/31
62	=Laster/31.5	=Laster/31.5
63	=Laster/32	=Laster/32
64	=Laster/32.5	=Laster/32.5
65	=Laster/33	=Laster/33
66	=Laster/33.5	=Laster/33.5
67	=Laster/34	=Laster/34
68	=Laster/34.5	=Laster/34.5
69	=Laster/35	=Laster/35
70	=Laster/35.5	=Laster/35.5
71	=Laster/36	=Laster/36
72	=Laster/36.5	=Laster/36.5
73	=Laster/37	=Laster/37
74	=Laster/37.5	=Laster/37.5
75	=Laster/38	=Laster/38
76	=Laster/38.5	=Laster/38.5
77	=Laster/39	=Laster/39
78	=Laster/39.5	=Laster/39.5
79	=Laster/40	=Laster/40
80	=Laster/40.5	=Laster/40.5
81	=Laster/41	=Laster/41
82	=Laster/41.5	=Laster/41.5
83	=Laster/42	=Laster/42
84	=Laster/42.5	=Laster/42.5
85	=Laster/43	=Laster/43
86	=Laster/43.5	=Laster/43.5
87	=Laster/44	=Laster/44
88	=Laster/44.5	=Laster/44.5
89	=Laster/45	=Laster/45
90	=Laster/45.5	=Laster/45.5
91	=Laster/46	=Laster/46
92	=Laster/46.5	=Laster/46.5
93	=Laster/47	=Laster/47
94	=Laster/47.5	=Laster/47.5
95	=Laster/48	=Laster/48
96	=Laster/48.5	=Laster/48.5
97	=Laster/49	=Laster/49
98	=Laster/49.5	=Laster/49.5
99	=Laster/50	=Laster/50
100	=Laster/50.5	=Laster/50.5

(b) Innlegging av formler i Excel regneark

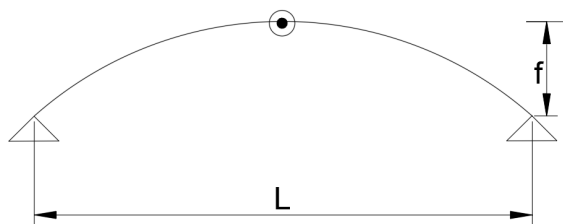
Figur 6.4: Utklipp av Excel-ark

6.4 AutoCAD

AutoCAD er en flerdimensjonal programvare og et dataverktøy som brukes til modellering og teknisk tegning. Programmet er utarbeidet av det amerikanske selskapet Autodesk og har den sisten tiden blitt en standard. AutoCAD brukes i en rekke sektorer, inkludert arkitektur, ingeniørvitenskap, interiørdesign og bygg- og anleggsbransjen. AutoCAD er en data-systematisert

prosjekteringsverktøy (*CAD - Computer Aided Design*) som lar brukeren lage modeller og tegne i både 2D og 3D i det utbredte dwg.-formatet. AutoCAD lar brukeren lage svært nøyaktige og detaljerte ingeniørtegninger, modeller og 3D-visualiseringer, og kan eksportere disse filene i ulike formater for å bli brukt i andre dataverktøy sammen med muligheten for å rendere/endre modeller på nettet; helt uten å bruke datamaskinens prosesseringskraft eller lagringsplass.

Prosjektgruppen har benyttet seg av AutoCAD til å lage tekniske tegninger av den statiske modellen for tre-ledds-buekonstruksjonen (fig. 6.5). Dette har bidratt med å visualisere konseptet og forstå hvordan den statiske modellen vil bli i praksis.



Figur 6.5: Prosjektgruppens bruk av AutoCAD (AutoCAD 2024)

7 Dimensjonering av tre-ledd bue

I følgende kapittel vil de relevante last- og dimensjoneringsberegningene som ligger til grunn for dimensjonering og analyse i SLS og ULS presenteres. Alle antagelser og beregninger, samt valg av dimensjonene er utført i henhold til Eurokode 5:NS-3N 1995 Prosjektering av trekonstruksjoner og Eurokode 1: NS-EN 1991 Laster på konstruksjoner.

7.1 Forhåndsdimensjonering

Problemstillingen går ut på å finne den største bueformen takkonstruksjonen kan ha uten at kapasiteten overskrides. Ved valg av dimensjoner er det vanlig å ta i bruk anbefalte og standard dimensjoner. Det er derfor blitt tatt betraktning til anbefalte verdier for bestemmelse av viktige parametere. I en bue er spennvidden L og (pil-) høyden f viktige parametere. Pilhøyden er en sentral parameter i strukturer, på grunn av effekten den har på formen og dimensjonene til buen. Limtreboka gir en minimumsverdi for pilhøydetallet på $f \geq 6,43m$ for $L = 45$ m [25]. Høyde-spennvidde forholdet er en viktig verdi som kan benyttes for å avgjøre bueformen til takelementet. I praksis er det vanlig å ha en høyde-spennvidde forhold rundt 0,14 og 0,30, dvs. $0,14 \leq f/L \leq 0,30$. For $L = 45$ m, får vi at maks. anbefalt pilhøyde er $f = 13,5m$, som bachelorgruppen gikk videre med.

For å fastslå største bueformen i elementet, uten å endre på pilhøyden, måtte bachelorgruppen utforske med forskjellige styrkeklasser og tverrsnittsdimensjoner. Det ble først valgt å bruke tverrsnittsdimensjonene 400 x 1200 mm, som er vanlig for buer, og styrkeklasse T30. Det ble utført kapasitetskontroll på buelementet, hvor buen hadde tilstrekkelig kapasitet. For å bestemme største grad av bueform, ble det kjørt ulike variasjoner av systemet på Excel, ved å endre på buedimensjonene og styrkeklassen. Målet var å finne den varianten som maksimerte kapasitetsutnyttelsen. Analysen resulterte i at dimensjonene 400 x 1500 mm og styrkeklasse T21 ga maksimal kapasitetsutnyttelse. Buevinkelen ble 53 °.

De valgte dimensjonene er standard for bjelker av massivtre. Limtreboka angir erfaringsbaserte verdier for tverrsnittshøyden i tre-ledds buer ved rundt 900 og 1500 mm [25]. Ved valg av dimensjoner henvendte prosjektgruppen seg til flere leverandører som Splitkon og Massivtre AS. Splitkon presenterte et massivtreelement med en totaltykkelse på 300 mm, bestående av 6 sjikt på 50 mm. Ved å stable fem slike elementer oppå hverandre, nådde prosjektgruppen foretrekket høyde på 1500 mm. I tillegg kontaktet prosjektgruppen andre organisasjoner som Sintef og Treteknisk for råd og anbefalinger om dimensjoneringsprosessen.

7.2 Statisk analyse av buelementet

Valg av lasttilfeller sammen med tilhørende utregninger baserer seg på boka den interne veilederen anbefalte, *Limtreboka 2015*. Læreboka ble brukt som en inspirasjon til beregning av lasttilfeller og kontrollert med egne statikkberegninger basert på ferdigheter gruppen hadde tilegnet seg gjennom studieforløpet sitt. Alt som er redegjort for i dette delkapittelet er presentert i vedlegg B.

Lastkombinasjonene som er ofte dimensjonerende for en tre-ledd bukonstruksjon er:

- Permanente laster + jevnt fordelt last
- Permanente laster + trekantformede fordelte laster

I limtreboka er det oppgitt anbefalte uttrykk for beregning av ordinaten y_0 til buens senterlinje og vinkelen α i det kritiske snittet. Disse formlene ga ufornuftige verdier for det maksimale momentet i det kritiske snittet og skjærkraften i opplegget:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \frac{3}{4} \cdot f \\ \alpha = \frac{180}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot f}{l}\right) \end{array} \right. \quad \text{for parabel-buer}$$

(a) *Limtreboka: Ordinaten til buens senterlinje ved fjerde-dels punkt* (b) *Limtreboka: Vinkelen i det kritiske snittet*

Prosjektgruppen bestemte derfor seg å definere et funksjonsuttrykk for en slik parabel. Dette kjenner gruppa til gjennom andregradsfunksjonen (7.1)

$$y(x) = ax^2 + bx + c \quad (7.1)$$

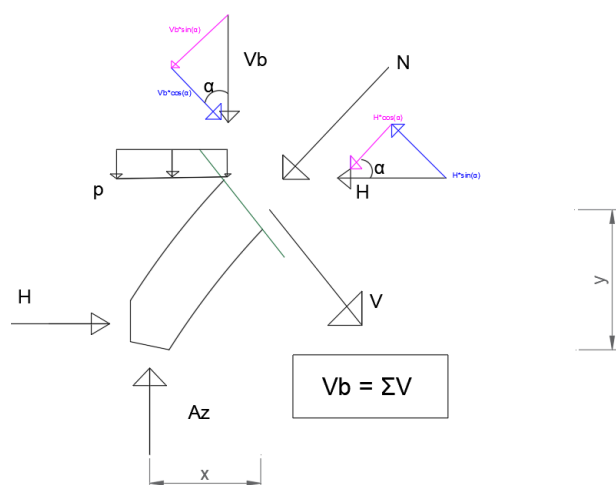
Variabelen x er i dette tilfelle avstanden fra venstre opplegg, og variabelen y høyden på buen i avstand x . Parameteren c ble satt lik null, og uttrykket endte opp i form av to ligninger med to ukjente. Ved hjelp av CAS-kalkulatoren, ble ligningssettet løst og gruppen endte opp med numeriske verdier for a og b som en funksjon av posisjonen x . Deretter ble trigonometriske funksjoner benyttet til å bestemme vinkelen mellom tangentlinjen til buen og den horisontale x -aksen.

Følgende lasttilfeller ble valgt av prosjektgruppen å beregne for i grensetilstandene:

1. Egenlast + symmetrisk snølast
2. Egenlast + skjev snølast (Eurokode 1)
3. Egenlast + skjev snølast (NS-EN)
4. Egenlast + vindsug

Det kritiske snittet for en tre-ledds bue er som regel i fjerdedels-punktet, fordi den høyeste belastningen oppstår som oftest der [25]. I tillegg, kan det oppstå betydelige skjær- og aksialkrefter i buetoppen og oppleggene. De indre kreftene er en konsekvens av opptredende laster i buen (snølast, egenlast og vindlast), vist i vedlegg A. Buen håndterer kreftene i form av indre krefter, og må ha tilstrekkelig styrke for å klare å overføre dem videre til opplagrene. Bachelorgruppen bestemte seg for å beregne de indre kreftene i venstre opplegg, i buens fjerdedels-punkt og ved buetoppen.

Opplagerreaksjonene ble beregnet ved å benytte likevektsligningene $\sum M = 0$, $\sum F_x = 0$ og $\sum F_z = 0$. Bachelorgruppen har basert seg på de generelle formlene for lasttilfelle 1, 2 og 3 oppgitt i Limtreboka, ved beregning av indre krefter. Beregningsuttrykkene i Limtreboka ble sjekket opp mot beregningseksempel 14 i Limtreboka: Beregningseksempler. Resultatet er vist i vedlegg D, der bachelorgruppen endte opp med omtrent samme verdier som beregningseksemplet. Beregningsuttrykkene som Limtreboka oppgir, baserer seg på generell likevektsbetraktning i et vilkårlig snitt (se fig. 7.2).



Figur 7.2: Indre krefter i et vilkårlig snitt (AutoCAD 2024)

Momentet er null i oppleggene og størst i buens fjerdedels-punkt. Skjærkraften er også null i buens fjerdedels-punkt på grunn av det maksimale bøyemomentet som oppstår der. Aksialkraften (N) og skjærkraften (V) i et punkt er avhengig av vinkelen mellom tangenten og linjen mellom oppleggspunktene:

$$N = -H \cos(\alpha) - \sum V \sin(\alpha) \quad (7.2)$$

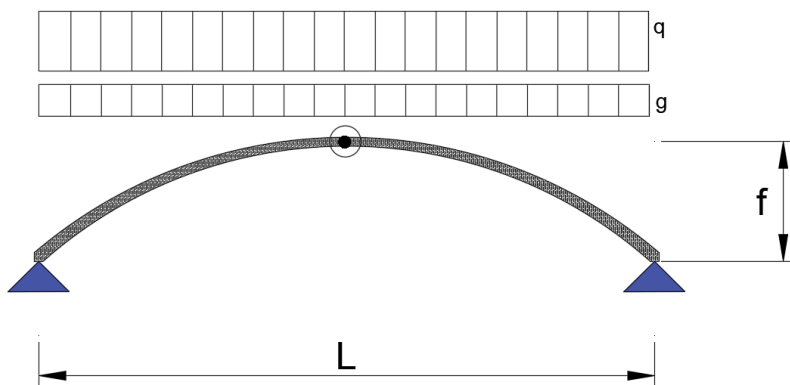
$$V = -H \sin(\alpha) + \sum V \cos(\alpha) \quad (7.3)$$

der H er horisontal opplagerkraft og $\sum V$ er total vertikal kraft til venstre for snittet (se fig. 7.2).

Følgende laster og lastkombinasjoner er brukt (se vedlegg B):

Lasttilfelle 1 - Egenlast + jevnt fordelt snølast, se figur 7.3

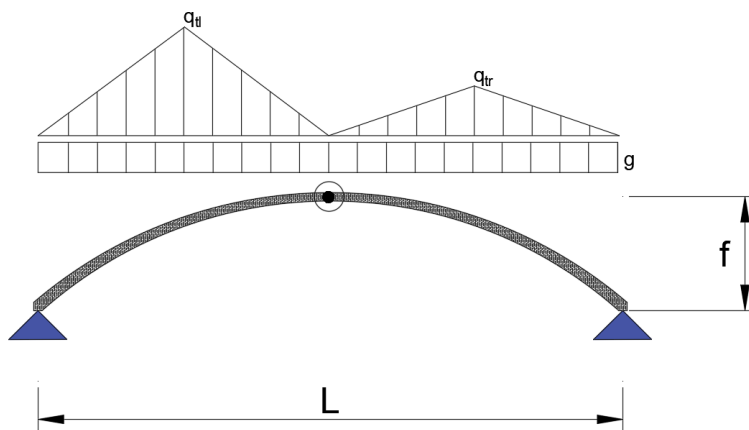
Denne type lastkombinasjon må dimensjoneres for, jf. Eurokode 1-3. Symmetrien i buegeometri og lasfordeling gjør at de indre kreftene blir symmetrisk om buetopp. Det er kjent at dette lasttilfellet innebærer maksimal bøyemoment i buens fjerdedels-punkt, og maksimal skjær- og aksialkraft ved opplageret. Dette er kjent gjennom tidligere beregningseksempler i Limtreboka. Momentfordelingen gir strekk på oversiden, aksialkraften skaper trykk, og skjærkraften roterer elementet med klokken.



Figur 7.3: Tre-ledds bue belastet av egenlast + jevnt fordelt snølast (AutoCAD 2024)

Lasttilfelle 2 - Egenlast + skjev snølast (Eurokode), se figur 7.4

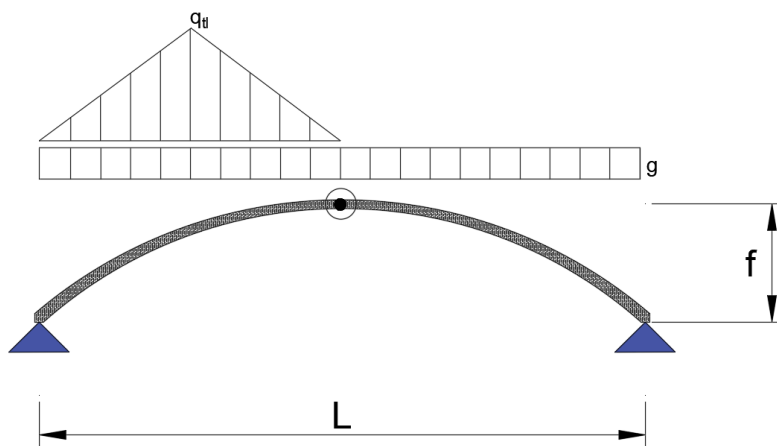
I Eurokode 1-3 er det angitt en spesifikk skjevlastfordeling for snølaster på buede tak. Denne skjevlastfordelingen følger en trekantform med maksimal trekantlast på en buehalvdel og halvparten av maksimal trekantlast på andre buehalvdel. Denne lastkombinasjonen tar hensyn til at en del av taket vanligvis kan få mindre snøoppbygging og følgelig påvirkes av mindre snølaster. Største momentverdien vil fortsatt forekomme i buens fjerdedels-punkt, men største skjærkraft opptrer nå i buetopp. Dette resulterer i strekk på undersiden av buens venstre halvdel, og strekk på oversiden av buens høyre halvdel.



Figur 7.4: Tre-ledds bue belastet av egenlast + trekantlast (AutoCAD 2024)

Lasttilfelle 3 - Egenlast + skjev snølast (Norsk Standard), se figur 7.5

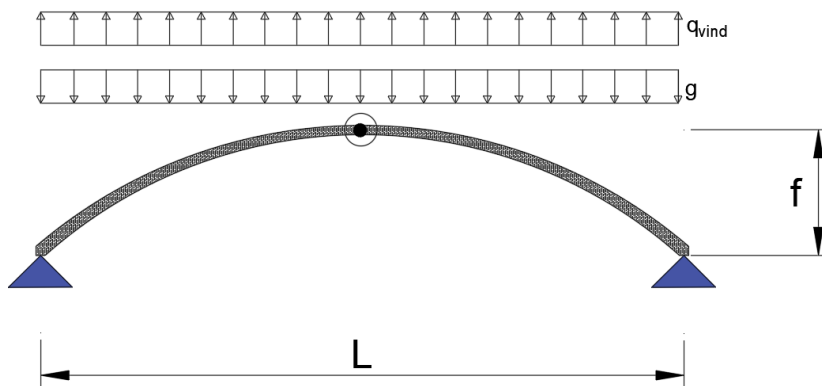
Dette er et særnorsk tilfelle, etter Norsk Standard (NS-EN). Denne skjevlastfordelingen følger også en trekantform med maksimal trekantlast på en buehalvdel og ingen last på andre buehalvdel. Ved å inkludere dette tilfellet, sikrer man at takelementet er tilfredsstillende sikret under påvirkning av snølast. Som lasttilfellene ovenfor, vil følgende tilfelle på samme måte ha et maksimalt moment ved buens fjerdedels-punkt. Buekonstruksjonen får strekk på undersiden i venstre halvdel av buen, og strekk på oversiden i høyre halvdel. Normalkraften forekommer størst i opplageret og forblir tilnærmet uendret for resten av buen i form av trykkrefter. Dimensjonerende skjærkraft roterer elementet med klokken. Opptrædende momenter vil være vesentlig større enn for tilfelle 1 og 2.



Figur 7.5: Tre-ledds bue belastet av egenlast + ensidig trekantlast (AutoCAD 2024)

Lasttilfelle 4 - Egenlast + vind sug, se figur 7.6

I dette tilfellet utsettes buekonstruksjonen for løftekrefter fra vindlasten. Dette er et problem som er tilstrekkelig å ta hensyn til i bruddgrensetilstand.



Figur 7.6: Tre-ledds bue belastet av egenlast + vind sug (AutoCAD 2024)

8 Resultat

Nedenfor følger en oppsummering av resultatene til dimensjoneringsprosessen, presentert i vedlegg B, C og D.

8.1 Bruddgrensetilstand

Oppsummering av resultater for bruddgrensetilstand.

- Største opptredende indre krefter i hvert lasttilfelle

Tabell 8.1: Største indre krefter i lasttilfellene

Lasttilfeller	Moment (M) kNm	Aksialkraft (N) kN	Skjærkraft (V) kN
1. Egenlast + symmetrisk snølast	349,99	1284,66	76,57
2. Egenlast + skjev snølast (EK1)	1730	1314	106
3. Egenlast + skjev snølast (NS-EN)	2253	1123	213

- Dimensjonerende snittkrefter for buen i ULS

Tabell 8.2: Dimensjonerende krefter i bueelementet

Indre krefter	Verdi	Beliggenhet
M [kNm]	2253	Tilfelle 3, 1/4-punkt
N [kN]	1314	Tilfelle 2, opplager
V [kN]	213	Tilfelle 3, Buetopp

- Kapasitetskontroll

Tabell 8.3: Kapasitetskontroll i bruddgrensetilstand

Kontroll	Uttrykk	Verdi	Kommentar
Knekning i buens plan	$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_r \cdot f_{m,y,d}} \leq 1$	0,99	Tilstrekkelig kapasitet
Vipping	$\left(\frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} \cdot k_r \cdot f_{m,y,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} \leq 1$	0,80	Tilstrekkelig kapasitet
Tverrstrekk	$\frac{\sigma_{t,90,d}}{k_{dis} \cdot k_{vol} \cdot f_{t,90,d}} \leq 1$	0,23	Tilstrekkelig kapasitet
Skjær	$\frac{\tau_d}{f_{v,d}} \leq 1$	0,28	Tilstrekkelig kapasitet

8.2 Bruksgrensetilstand

Oppsummering av resultater fra bruksgrensetilstand.

- Dimensjonerende snittkrefter i SLS. Her ble lasttilfelle 3 (egenlast + ensidig skjev snølast) den dimensjonerende.

Tabell 8.4: Kapasitetskontroll i bruksgrensetilstand

Dimensjonerende verdier for lasttilfelle 3	
Karakteristisk egenlast	11,54 kN/m
Karakteristisk snølast i venstre buehalvdel	50,4 kN/m
Karakteristisk snølast i høyre buehalvdel	0
Dimensjonerende moment	1833 kNm
Beregnet nedbøyning	177 mm
Nedbøyningskrav	$L/250 = 180$ mm
Kommentar	Buen overskrider ikke nedbøyningskravet.

8.3 Sluttresultat

Oppsummering av de valgte verdiene for buens geometri og materiale.

Tabell 8.5: Valgt geometri og materiale

Paramater	Verdi
Styrkeklasse	T21
Spennvidde	45 m
Pilhøyde	13,5 m
Bredde x Høyde	400 x 1500 mm
Buevinkel	53 °

9 Diskusjon

I dette kapittelet blir resultatet og metodikken diskutert og reflektert. Avslutningsvis blir det gått gjennom eventuelle usikkerheter i resultatene og analysen.

9.1 Forhåndsdimensjonering

Det er vanlig for en ingeniør å benytte seg av anbefalte verdier ved valg av geometriske verdier. Dette ble spesielt vektlagt ved bestemmelsen av største grad av bueform. I Limtreboka fantes det standardiserte verdier for pilhøyden i buede tre-elementer, som er avhengige av spennvidden L og som er vanlige å bruke i praksis. Av den grunn endte prosjektgruppen opp med en maksimal anbefalt verdi for pilhøyde på $f = 13,5m$. Det er verdt å merke seg at det var mulig å velge en større pilhøyde, men det ble heller valgt å ta utgangspunkt i erfaringsbaserte verdier. Pilhøydeverdien, altså bueformen til parabelelementet, ble dermed bestemt.

Det gjenstående nå, var å finne den beste mulige kombinasjonen for å få tverrsnittsdimensjonene og styrkeklassen i et samsvar. De anbefalte verdiene for tverrsnittshøyden ifølge Limtreboka var på mellom 900 og 1500 mm. Vi besluttet først å velge 1200 mm for tverrsnittshøyden, ettersom det er en vanlig dimensjon i buede elementer. Det ble fort merket at en høyde på 1200 mm, selv med den største tilhørende styrkeklassen T30, førte til at kapasiteten ble overskredet. Dette resulterte i en ugyldig kapasitetsbetraktning, som førte til at gruppen ble nødt å øke tverrsnittshøyden til 1500 mm, med en lavere fasthetsklasse, for å oppnå tilstrekkelig kapasitet. Dette stemte godt med de erfaringsbaserte verdiene oppgitt i Limtreboka. Gruppen kom frem til dette ved hjelp av Excel-regneark, der ulike varianter av systemet ble testet ut. På denne måten fant vi den konfigurasjonen som maksimerte kapasitetsutnyttelsen på en tilfredstillende måte. Den endelige valgte tverrsnittsdimensjonen ble dermed 400 x 1500 mm med en styrkeklasse T21.

9.2 Laster og lastkombinasjoner

I dimensjoneringen var det først nødvendig å redegjøre aktuelle laster for bueelementet. Egenlasten var nødvendig å inkludere. Med et tung-tak system, fikk vi en meget konservativ verdi for den totale egenlasten til strukturen. Det å ha dimensjonert for et tung-tak system gjør det mulig å skifte til lettere takteknning i en senere anledning, uten behov for forsterkninger. Utregningen av vindsuget og snølasten var tatt utgangspunkt i kravene i Eurokode 1. Bachelorgruppen har ikke jobbet med vindlast før, og som anbefaling fra veilederen bestemte å ta hensyn til vindlasten på en forenklet måte. Imidlertid, ved å ikke dimensjonere for en horisontal trykkraft forårsaket av vindlasten, er det ikke tatt hensyn til alle mulige scenarier.

Lastkombinasjonene som ble valgt i bacheloroppgaven er ofte de dimensjonerende for en tre-ledds bue [25]. Vi valgte derfor å begrense antallet lastkombinasjoner til de fire mest aktuelle for oppgavens formål. Dette ble gjort i henhold til retningslinjer og krav fra relevante standarder. Selv om det var flere mulige lastkombinasjoner med de valgte lastene, ble de resterende kombinasjonene

ikke inkludert for å unngå å gjøre regnestykket unødige komplisert. Vår beslutning om å fokusere på de fire tilfellene var heller basert på ønsket om å gi leseren bedre forståelse av de valgte lastkombinasjonene, enn å forvirre leseren med en overflod av informasjon. Det å inkludere flere laster og lastkombinasjoner kunne ha gitt en mer nøyaktig vurdering av takstrukturen. Antall lastkombinasjoner ble også begrenset med hensyn på tid og rapportens omfang.

Vi var usikre på hvor nøyaktige beregningene ville bli ved å anvende Limtrebokas uttrykk for indre krefter og opplagerreaksjoner. Uttrykkene i Limtreboka kommer av generelle statikkberegninger for lastkombinasjoner med en jevnt fordelt snølast eller trekantformede snølaste med ulik størrelse på hver buedel. Vi ønsket derfor å undersøke hvor nøyaktige beregningene våre ville være. Det ble først gjennomført en full global analyse av buekonstruksjonen i Focus, noe programmet ikke var godt egnet til å gjøre. Dette vil bli diskutert mer detaljert senere. Videre valgte vi å kontrollere beregningsmetoden med beregningseksempel 14 tatt fra Limtreboka Beregningseksempler. Vedlegg D, viser et utklipp av kontrollen som ble gjennomført i Excel. Vedlegget viser tydelig at de indre kreftene og opplagerreaksjonene som vi beregnet, gir tilnærmet like verdier som de som er oppgitt i Limtreboka. Det vil si at de indre kreftene vi fant for buen i problemstillingen vår er ganske troverdige.

9.3 Bruddgrensetilstand

Buetaket er dimensjonert for lasttilfeller 2 og 3. Det største momentet og skjærkraften opptrer i tilfelle 3, som benytter skjev lastfordeling i henhold til Norsk Standard. Normalkraften er derimot litt større i lasttilfelle 2 (ihht. Eurokode 1). Tabell 8.2 viser buens dimensjonerende indre krefter i ULS, mens tabell 8.3 viser de ulike kapasitetskontrollene gjennomført for buen. Vi ønsket å utnytte buens kapasitet til det fulleste, hvor knekning i buens plan var akkurat på kanten med en verdi på 0,99. Videre hadde buen tilstrekkelig kapasitet med hensyn på vipping, tverrstrekk og skjær. I tillegg er det også tatt betraktning til løftekrefter fra vindlasten. Buekonstruksjonen utsettes for løftekrefter som vil forsøke å rive av taket. For at taket skal hindre dette, må vekten av takkonstruksjonen være større eller lik vindsuget. Løftekreftene var ikke et problem for buen, ettersom egenlasten nøytraliserte vindsuget helt, som vist i vedlegg C.

I dimensjoneringsprosessen ble det valgt å ikke dimensjonere fundamentet for trykkrefter. Trykkrefter i fundamentet er likevel et meget aktuelt problem i bruddgrensetilstand, og som vanligvis må dimensjoneres for i en konstruksjon. Dette kommer av at man ønsker å sikre glatt overføring av krefter fra opplagret til buen, uten unødvendige friksjoner eller hindringer. Det bidrar med å holde buen stabil og hindrer den fra å deformere. Å inkludere fundamentet i dimensjoneringen ville ha vært tids- og ressurskrevende, da man først måtte ha definert hvordan de horisontale og vertikale kreftene i opplagrene skal bli tatt opp. Videre ville det ha vært nødvendig å undersøke undergrunnen og vurdere om den er sterk nok til å gi konstruksjonen tilfredsstillende stabilitet. Vi valgte å heller fokusere på å bedre forståelsen vår av buer og dimensjoneringsprinsipper for slike konstruksjonstyper.

9.4 Bruksgrensetilstand

I bruksgrensetilstand er buetaket dimensjonert for lasttilfelle 3, siden maksimal moment opptrer i det tilfellet. Tabell 8.4 viser dimensjonerende verdier for lasttilfelle 3 og nedbøyning på grunn av opptredende laster. Det at momentet var størst i lasttilfellet 3, var ikke overraskende med tanke på den asymmetriske belastningen. Nedbøyningsberegning i en bue er svært komplisert, og mange professorer på instituttet hadde ikke god nok erfaring med akkurat dette. Vi ble anbefalt av professor Bjørn Skallerud ved Institutt for konstruksjonsteknikk å heller betrakte buen som en fritt opplagt bjelke (se vedlegg D).

Som nevnt, er nedbøyning for en bue ikke enkelt å beregne, og Eurokode 5 gir heller ingen anvisning for nedbøyningskontroll. Vi ser ut fra tabell 8.4 at verdien vi fikk fra nedbøyningskontrollen var meget konservativ. Vi får en veldig høy nedbøyning med denne metoden, og det er viktig å merke seg at den egentlige nedbøyningen vil være mye mindre enn den kunstige verdien vi har funnet. Dette er vist i vedlegg D, hvor vi benyttet den samme metoden på det samme ferdigberegnete eksemplet fra Limtreboka. Vi så at den kunstige verdien til bjelken i beregnings-eksemplet var tre ganger så stor som den egentlige verdien de hadde funnet. Det finnes alternative metoder for nedbøyningsberegning i krumme strukturer, men dette er en like aktuell metode. Nedbøyningen ble likevel rett under kravet, og buen hadde dermed tilstrekkelig kapasitet.

Skjærdeformasjoner ble heller ikke inkludert, ettersom de ofte er relativt små i forhold til andre deformasjoner som konstruksjonen er utsatt for [28]. Med den unike metoden, endte vi opp med en tre ganger så stor verdi for nedbøyningen som den egentlige verdien til beregningseksemplet. Vi mente det ikke var nødvendig å inkludere skjærdeformasjonen, da verdien allerede var veldig konservativt. Dessuten er nedbøyning ofte ikke et problem i buer. På den andre side er skjærdeformasjoner meget komplisert å beregne og modellere nøyaktig. Ved å heller sette fokus på de mest vesentlige deformasjonene, oppnår man en mer produktiv og funksjonell tilnærming uten å svekke bæreevnen og sikkerheten til konstruksjonen.

Eurokode 5 understreker flere kontroller som kan bli gjort for å sikre at konstruksjonen er tilstrekkelig dimensjonert. Aktuell kontroll kunne ha vært å vurdere risikoen for belastninger fra vibrasjoner. Dette ble ikke valgt å inkludere i dimensjoneringsprosessen, da det var tilstrekkelig å dimensjonere kun for nedbøyninger.

Vibrasjoner i takkonstruksjoner er et vanlig bruksgrenseproblem [28]. Det kommer av at de ofte ikke leder til øyeblikkelig konstruksjonssvikt eller konstruksjonsskade, men kan resultere i økt slitasje og deformasjon over tid. Vibrasjoner kan være forårsaket av for eksempel trafikk eller vind. Dette er et område som har blitt godt undersøkt, hvor man har oppdaget gode tekniske løsninger som er optimale for å håndtere disse problemene. Selv om vibrasjoner i massivtre er et krevende problem, har det blitt utviklet bedre forståelse om hvordan det kan håndteres. Derfor valgte vi å utelukke vibrasjonsbetraktninger i bruksgrensekontrollen. Vi har istedet vurdert flere aktuelle løsninger som gips- og akustikkhimlinger [40]. I tillegg er området lite eksponert for

trafikk. Ut fra analysen vår, kom vi fram til beslutningen at å inkludere vibrasjoner er ikke nødvendig for problemstillingen vår.

9.5 Focus Konstruksjon

Implementeringen av en parabelformet tre-ledds bue i Focus Konstruksjon, viste seg å være en svært kompleks oppgave. Prosjektgruppen støttet på denne vanskeligheten og tilpasset problemstillingen i tråd med mulighetene og egenskapene til dataverktøyet.

Hovedproblemet oppstår fordi at selve dataverktøyet ikke er særlig egnet til å lage krumme flerledds-elementer, spesielt buer. I utgangspunktet har programmet en innebygd funksjon for å modellere segmentelementer i form av en krumbjelke. Allikevel, hvis man prøver å lage en parabelformet bue med denne funksjonen, blir hele modellen/buen behandlet som ett enkelt segment. En slik definisjon gjør det umulig å plassere et rotasjonsledd i midtpunktet av buen for å kunne danne en tre-ledds bue som vi egentlig har definert i vår oppgave. Plassering av et rotasjonsledd i Focus Konstruksjon er kún mulig dersom en først etablerer et knutepunkt som leddet skal plasseres på. Selv etter at vi har opprettet et knutepunkt i midten av buen, ga programmet en feilmelding ved plassering av ledd. Feilmeldingen indikerer at «*Det er for få segmenter til å opprette et ledd*», noe som kommer av Focus sin betraktning av hele parabelbuen som kun et enkelt segment.

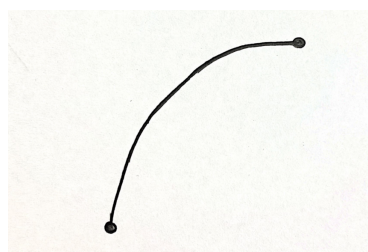
Løsningen på dette problemet ble funnet gjennom grundige samtaler med professorer ved Instituttet for konstruksjonsteknikk. Først henvendte vi oss til veilederne våre for en konsultasjon. Dessverre hadde de ikke god erfaring i spesifikt modellering av buer i Focus Konstruksjon, da dette dataverktøyet er ikke særlig brukt i arbeidslivet. Senere i prosessen har gruppen henvendt seg til en annen professor ved nevnte instituttet – Arne Aalberg, som prosjektgruppen har hatt i undervisningen av faget «Stålkonstruksjoner 1» hvor følgende program ble først introdusert. Arne Aalberg har bekreftet at Focus Konstruksjon ikke egner seg særlig godt til å lage buer med flere ledd, og at den valgte problemstillingen til prosjektgruppen er interessant og komplisert. Professoren sendte en e-post med vår henvendelse til Kolbein Bell – en tidligere professor ved Institutt for konstruksjonsteknikk som har vært med på å skape dette dataverktøyet. Kolbein Bell har bekreftet at det har vært problematikk med å egne Focus Konstruksjon til å betrakte flerledds krumme elementer, da disse blir ansett som ett enkelt segment. Sammen med Arne Aalberg anbefalte han oss å heller definere en matematisk funksjon for en parabelbue, og benytte den til å sette opp en knutepunktsliste med tilhørende horisontale- og vertikale koordinater til buemodellen.

Funksjonsligning for en parabelbue er godt kjent fra matematikkemnene: $y = ax^2 + bx + c$. Ved å løse følgende funksjonsuttrykk tilpasset vårt tilfelle, har vi utarbeidet en lang punktliste med x - og z koordinater for vår bue. Videre ble denne listen innlagt i Excel regneark og importert over til Focus Konstruksjon som en knutepunktsliste, gjennom dataverktøyets funksjon som lar brukeren importere tabeller fra Excel. Slik fikk vi en modell bestående av mange knutepunkter

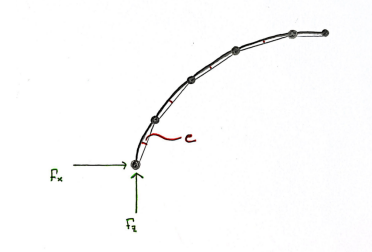
som i sin helhet utgjorde en parabelform. Disse knutepunktene ble deretter koblet sammen med hverandre ved hjelp av mange rette bjelkesegmenter. Resultatet ble en godt tilnærmet modell av parabelbuen som nå lot oss å plassere et ledd i midtpunktet, ettersom modellen var ikke en krumbjelkemodell, men heller en knutepunktliste koblet sammen til en parabelbue. Den endelige modellen, med jevnt fordelt last på hele elementet er vist i figur 6.1. Figuren er modellert ved å koble sammen mange knutepunkter som følger den matematiske ligningen for buen vår, med rette segmenter av det aktuelle materialet. Buen blir selvfølgelig ikke en perfekt geometrisk bue, men det er en akseptabel tilnærming i denne problemstillingen.

Et av de analyserte lasttilfellene i oppgaven er en jevnt fordelt rektangulær last over hele buen jf. figur 6.1. Ved påføring av et slikt lasttilfelle i modellen, vil momentfordelingen se ut som vist på fig. 6.2. Ved første øyekast kan et slikt resultat virke urimelig. I henhold til statikkteorien skal momentene i en tre-ledds bue være lik null over hele figuren. Likevel viser figuren at momentene fordeler seg som små bølger mellom hvert knutepunkt i modellen. Vi syntes dette virket svært urimelig og henviste oss enda en gang til professorene ved instituttet. Av både Arne Mathias Selberg og Jan Arne Øverli fikk vi bekreftet at en tre-ledds bue ikke skal ha moment, og Arne Aalberg har forklart oss bakgrunnen til hvorfor Focus Konstruksjon gir et følgende diagram.

Følgende momentdiagram kommer nemlig av vår egen modellering av en slik tre-ledds bue i Focus Konstruksjon. Ettersom teorien betrakter en helt ideell parabelbue som vist i fig.(9.1a), er det ikke en slik perfekt-geometrisk bue vi har modellert. Buen vi har designet i Focus Konstruksjon ligner mer på det som er vist i figur (9.1b). Som nevnt ovenfor er det mange rette bjelkesegmenter som er koblet sammen mellom knutepunktene. Knutepunktene som ble definert av det matematiske funksjonsuttrykket, følger jo den teoretiske perfekte buen, men segmentene som kobler sammen disse punktene danner en eksentrisitet i midten av hvert bjelkesegment. Denne eksentrisiteten blir nemlig den feilen/tilnærmingen som resulterer i det nevnte momentdiagrammet. Denne feilen - e , som oppfører seg som en arm, blir multiplisert med opplagerreaksjonene og danner et maksimalt moment i midten av hvert bjelkesegment over hele parabelen, derav kommer det bølgete momentdiagrammet.



(a) En perfekt geometrisk parabelbue



(b) Tilnærmingen utført i Focus

Figur 9.1

Det ble videre bekreftet av professorene Arne Aalberg og Arild Holm Clausen, at modellen vi kom frem til med det tilhørende M-diagrammet, er riktig utført. En slik illustrasjon av momentdiagrammet i Focus, skyldes antallet knutepunkter vi har definert. Ved løsning av den matematiske formelen til en parabelbue, definerte vi en liste på 40 punkter. Øker vi definisjonsrekkevidden til f.e. 1000 eller 10000 punkter, vil momentet i buen gå nærmere null og bli mer lik den teoretiske betraktningen. Dette kan gjøres helt frem til et svært stort antall med knutepunkter som til slutt vil ligge så tett inntil, at buen blir tilnærmet den «perfekte-geometriske» formen med det tilhørende null-momentet over hele parabolen. Dette vil selvsagt kreve unødvendig masse arbeid i følgende dataverktøyet ettersom alle lastene må legges inn manuelt for hvert buesegment.

Selv om teorien betrakter at en tre-ledds bue skal ha null moment over hele konstruksjonen, vil det aldri være helt perfekt bue i et reelt prosjekt. I virkeligheten vil det alltid være momenter som oppstår, men i det store bilde – i forhold til for eksempel normalkraften, vil det utgjøre en ubetydelig liten andel.

9.6 Styrke og stivhet

Valget av massivtre som hovedmaterialet for følgende oppgaven, mener vi er et strategisk godt og lurt valg. Massivtre er et materiale som er blitt stadig mer brukt og utbredt den siste tiden. Mange funksjonelle og arkitektonisk innovative bygg er realisert de siste årene nemlig i massivtre. Bygging i massivtre har flere fordeler fremfor alternative materialer. I dagens aktuelle miljødebatt, hvor flere ønsker å satse på grønnere og mer bærekraftige valg, spiller dette materialet en sentral rolle. Massivtre er det eneste miljøvennlige materialet definert som CO₂-nøytral. [41]. Dets store styrke gjør den godt egnet for bruk i både bærende vegger, gulv og tak i høye bygg. I kombinasjon med at det blir ofte fremstilt som store prefabrikkerte elementer, reduserer det både byggetid og potensiell avfallsmengde på byggeplassen. I tillegg yter det en høyere resistens mot brann enn tradisjonelle trekonstruksjoner, og sikrer en god naturlig luftkvalitet og innneklima. Massivtre som det gjeldende materiale for følgende oppgaven egner seg også svært godt for buekonstruksjoner, siden det kan produseres i krumme former med varierende dimensjoner uten særlig store merkostnader. Basert på disse egenskapene supplert med det skrevne om materialet i teoridelen av rapporten, står vi for valget av massivtre for problemstillingen i oppgaven vår.

9.7 Usikkerhetsmomenter

Andregradsfunksjonen brukt til å beskrive buens geometri er et interessant aspekt ved rapporten, siden vi måtte inkludere et lite avvik i funksjonen. Funksjonen ble videre brukt til å bestemme de indre kreftene i konstruksjonen. Når vi anvendte alle desimalene til konstantene i funksjonsuttrykket (a , b og c), resulterte det i at momentet ble null. Dette var i samsvar med den generelle forståelsen av hvordan momentet oppfører seg i en buekonstruksjon, nemlig at en perfekt utformet bue ikke skal ha moment. Funksjonsuttrykket med alle desimalene beskrev dermed en perfekt parabelformet bue. På den andre siden er dette kun en teoretisk antakelse, da det er fysisk umulig å oppnå en helt perfekt bue. I virkeligheten vil det alltid være momenter som oppstår på grunn av randbetingelser, konstruksjonsavvik og eventuelle asymmetriske laster. Derfor bestemte vi oss for å redusere antallet desimaler i funksjonsuttrykket for å gi buen et visst avvik.

Det at en liten reduksjon i funksjonsuttrykket kan medføre til drastiske forskjeller mellom resultatene, gjør det til et typisk dårlig-kondisjonert problem [42]. Det antyder at systemet er sensitivt ovenfor endringer i inngangsdataen. Dette kan man se når vi bruker et perfekt teoretisk system, og deretter begynner å anvende realistiske tall som gjør at modellen faller sammen. Avrundinger som er gjort underveis i beregningsgangen kan også påvirke det endelige resultatet, og er et viktig usikkerhetsmoment i oppgaven. I dimensjoneringen beregnes ulike verdier, som bl.a. fasthetsverdier. Disse benyttes videre i beregning av andre verdier, som deretter blir brukt i kapasitetskontrollen.

10 Konklusjon og videre arbeid

10.1 Konklusjon

Formålet med følgende oppgave har vært å øke kunnskapen om og få en dypere forståelse for dimensjonering og design av trekonstruksjoner, samt bli kjent med andre relevante mulige løsninger for krumme/buede konstruksjonsdeler. Problemstillingen var å se på dimensjonering og design av en tre-ledds bue utført i massivtre, og bestemme dimensjonene som tilfredsstillende de aktuelle kravene i bruks- og bruddgrensetilstand. En twist prosjektgruppen har valgt å legge til i den gitte problemstillingen, var å bestemme den største graden av bueform en slik bue for et idrettsanlegg kan ha, uten å overskride de gitte kravene i regelverket og tilfredsstillende brudd- og bruksgrensekravene.

Ettersom formålet og hovedtemaet for oppgaven var å generelt tatt lære mer om tre-konstruksjoner – et helt nytt tema som ikke inngår i studieforløpet vårt, og se på krumme/buede elementer og deres statikk, var det hensiktsmessig av gruppa å ikke inkludere slike punkter som: prisbetraktning, fundamentering, og dimensjonering av knute- og forbindelsespunkter som ville ellers inngå i et reelt byggeprosjekt. Disse må fortrinnsvis utføres i videre arbeid. Gruppen har heller tatt valget å se på kun massivtrebuen (i kontekst med at det skal være en takkonstruksjonsdel for en tennishall) og vitenskapen bak denne tittelen, etter råd og samtaler med den interne veilederen.

Oppgaven ble gjennomført ved å utføre kapasitetskontroller for ulike lasttilfeller, etter gjeldende Eurokoder, samt velge riktige dimensjoner som tilfredsstillende kapasitetskrav i brudd- og bruksgrensetilstand etter Norsk Standard. Det ble modellert en statisk modell av buen med de aktuelle lastene i Focus Konstruksjon, og kontrollert kapasitet. Modelleringen ble gjennomført ved å sette opp en andregradsligning for en parabelbue, og løse denne med hensyn på å fastslå de tilsvarende funksjonsverdiene i horisontal- og vertikalaksen.

Etter å ha foretatt endringer og eksperimentert med de geometriske dimensjonsverdiene for buen, og innlemmet dem i formelsettet som dannet grunnlaget for dimensjoneringen og kapasitetsberegningen, har vi identifisert de maksimale verdiene som gir tilstrekkelig kapasitet. Gjennom denne tilnærmingen har vi konkludert den største graden av bueform en slik massivtre bue kan ha samtidig som alle kapasitetskravene tilfredsstillende.

Resultatet ble en tre-ledds bue av massivtre med en spennvidde på 45 meter – forutsatt for en tennishall med 2 tennisbaner, med en pilhøyde på 13,5 meter. Tvernsnittdimensjonene for massivtreelementet ble 400 x 1500 mm, og den valgte styrkeklassen fastslått til T21. Buevinkelen på en slik tre-ledds buet takelement ble 53 grader.

10.2 Forslag til videre arbeid

Med et stramt tidsintervall blir også arbeidsomfanget begrenset. Det er viktig å merke seg at det finnes flere relevante punkter og forutsetninger som ikke ble behandlet i følgende oppgave, men som ville være essensielle og viktige i et ekte byggeprosjekt.

I denne oppgaven har vi fokusert utelukkende på en buelement i massivtre som en konstruksjonsdel i seg selv, og heller sett på dens statiske struktur og hvordan de valgte lasttilfellene vil påvirke dens kapasitet og geometriske parametere. På grunnlag av dette har vi bestemt tverrsnittsdimensjonene og geometrien til buen som tilfredsstillende gjeldende krav i regelverket for både bruks- og bruddgrensetilstand. Dette blir selvsagt en svært grov tilnærming til den virkelige situasjonen som hadde funnet plass i en reell situasjon.

Ved dimensjonering av en tre-ledds parabelbuet konstruksjon som er ment å være en takelement til en tennishall, er det hensiktsmessig å ta hensyn til fundamentet og dets fordeling/opptak av krefter. Det vil også være nødvendig å nøye vurdere dimensjoneringen av forbindelser og knutepunkter, da disse ofte betraktes som svake punkter i en trekonstruksjon og er avgjørende for konstruksjonens bæreevne. Forbindelsene skal ikke bare ha tilfredsstillende styrke, men også stivhet, og det er en del spesielle forhold som det må tas hensyn til. På grunnlag av oppgavens hovedidé og begrensede tidsramme, har vi ikke inkludert dette i rapporten.

Det ble kun vurdert de lastene som prosjektgruppen mente var mest relevante og aktuelle for oppgavens primære fokus. Det er imidlertid viktig å merke seg at det er mange andre laster som bør tas i betraktning under dimensjoneringen, for eksempel brannlast, seismiske laster, horisontale vindlaster osv.

Når en utfører dimensjonering og design av en takkonstruksjon i en reell situasjon, er det hensiktsmessig å velge en mer kostnadseffektiv løsning enn det vi har presentert i oppgaven. Tverrsnittsdimensjonene til et parabelformet buetak vil ofte variere avhengig av hvilken del av taket man ser på. Å ha en slik stor og massiv tverrsnittsdimensjon over hele takelementet, vil resultere i et svært kostbart prosjekt.

Et annet viktig punkt å ta med er at ved dimensjonering av et takelement for en spesifikk bygning, må man også dimensjonere tilstøtende elementer. Dette kan for eksempel være søylene på fronten av tennishallen, som takelementet ligger på. Da er det nødvendig å ta snitt der for å sjekke om de indre kreftene oppfyller ønskede verdier og kapasitet.

Referanser

- [1] Mari Gisvold Solberg. *Betong står for 5 prosent av Verdens CO₂-UTSLIPP. Slik Skal forskerne lage en renere variant som varer lenger*. Mai 2016. URL: <https://www.tu.no/artikler/betong-star-for-5-prosent-av-verdens-co2-utslipp-slik-skal-forskerne-lage-en-sterkere-og-renere-variant/347625>.
- [2] Jan. 2023. URL: <https://kontrollbetong.no/artikler/betongens-historie/>.
- [3] Catharina Fjeldstad. *Massivtre Fra Splitkon*. Sep. 2022. URL: <https://splitkon.no/massivtre/hvorfor-bygge-med-massivtre/>.
- [4] URL: <https://c.ramboll.com/no-no/massivtre>.
- [5] Knut Randem. *I Trebyen Trondheim Vurderes Alltid Massivtre Først*. Apr. 2021. URL: <https://www.treteknisk.no/aktuelt/i-trebyen-trondheim-vurderes-alltid-massivtre-forst>.
- [6] Standard Norge. *NS-EN 1990:2002+A1:2005+AC:2010+NA:2016: Eurokode — Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner*. Brussel: Den europeiske standardiseringsorganisasjonen (CEN), 2016.
- [7] Standard Norge. *NS-EN 1991-1-1:2002+NA:2019: Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, Del 1-1: Allmenne laster, Tetthet, egenvekt og nyttelaster i bygninger*. Brussel: Den europeiske standardiseringsorganisasjonen (CEN), 2019.
- [8] Standard Norge. *NS-EN 1991-1-3:2003+A1:2015+NA:2018 Eurokode 1: Laster på konstruksjoner - Del 1-3: Allmenne laster - Snølaster*. Brussel: Den europeiske standardiseringsorganisasjonen (CEN), 2018.
- [9] Standard Norge. *NS-EN 1991-1-4:2005+NA:2009: Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, Del 1-4: Allmenne laster, Vindlaster*. Brussel: Den europeiske standardiseringsorganisasjonen (CEN), 2009.
- [10] Standard Norge. *NS-EN 1995-1-1:2004+A1:2008+NA:2010: Eurokode 5: Prosjektering av trekonstruksjoner, Del 1-1: Allmenne regler og regler for bygninger*. Brussel: Den europeiske standardiseringsorganisasjonen (CEN), 2010.
- [11] Standard Norge. *NS-EN 338:2016: Konstruksjonstrevirke - Fasthetsklasser*. Brussel: Den europeiske standardiseringsorganisasjonen (CEN), 2016.
- [12] Kjersti Lindheim. «Tre som materiale i urban kontekst / Essay». I: (2014). URL: https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/bitstream/handle/11250/279485/Essay_AAR4853.pdf?sequence=5&isAllowed=y.
- [13] Thomas Bedin, Knut Grønvold og Hallstein Berre. *Tre som materiale*. Sep. 2022. URL: <https://ndla.no/nb/subject:1:48d5ff11-d459-4327-bbe5-8dd313e9dcbf/topic:1:e44fb5d1-ae7e-4e74-802e-a0ff04fc8426/resource:edf77245-b6f9-4b37-b414-d0eb6765f97d>.
- [14] *Tre Som Materiale*. Okt. 2021. URL: <https://www.byggmakker.no/rad-og-guider/terrasse-og-uterom/tre-som-materiale>.

- [15] Adne. *Derfor er Trefiberbaserte Byggematerialer et smart valg*. Mar. 2022. URL: <https://www.hunton.no/alle-gode-ting-er-tre/derfor-er-trefiberbaserte-byggematerialer-et-smart-valg/>.
- [16] Håkansson Michael og Anna Nor dwall. *Skogsencyklopedin: 8400 Artiklar och Ordförklaringar*. Sveriges skogsvårdsförbund, 2000.
- [17] *Massivtre*. URL: <https://www.mnmas.com/massivtre>.
- [18] *treet Verdens Høyeste trehus er Nå åpnet i Bergen*. URL: <https://www.innovasjon Norge.no/no/om/nyheter/2015/treet---verdens-hoyeste-trehus-er-na-apnet-i-bergen/>.
- [19] *Byggesystemer*. Jan. 2023. URL: <https://splitkon.no/byggesystemer-i-massivtre-og-limtre/>.
- [20] Mai 2020. URL: <https://norskmassivtre.no/elementer/#:~:text=Massivtre%20har%20gode%20egenskaper%20i%20forhold%20til%20brann.&text=Dette%20da%20elementer%20av%20massivtre,opprettholder%20sine%20stivhets%2D%20og%20fasthetsegenskaper..>
- [21] Helen Sterud. *Mål, krav og veiledere*. URL: https://www.tennis.no/for-klubber/anlegg/mal-og-krav?fbclid=IwAR3eXAFALo40J-1cSxH-4xhf7YoTrDbMPj_nbmj90T1BgxB7z1NG0nPY1o.
- [22] Marina Prusac Lindhagen. *Pont du Gard*. Mai 2020. URL: https://snl.no/Pont_du_Gard.
- [23] *THE ULTIMATE GUIDE TO CURVED ROOFS: PROS, CONS, COST*. Aug. 2019. URL: <https://legacyusa.com/blog/curved-roof/>.
- [24] Eva Frühwald Hansson. «3. Buer». I: *Limtreboka*. Red. av Roberto Editor Crocetti. 2. utg. Bd. 2. Norske Limtreprodusenters Forening, 2015, s. 49–50.
- [25] Roberto Crocetti. «11. Buer». I: *Limtreboka*. Red. av Roberto Editor Crocetti. 2. utg. Bd. 2. Norske Limtreprodusenters Forening, 2015, s. 183–197.
- [26] Robert Kliger. «2. Dimensjoneringsmetoder». I: *Limtreboka*. Red. av Roberto Editor Crocetti. 2. utg. Bd. 2. Norske Limtreprodusenters Forening, 2015, s. 27–38.
- [27] Per Kristian Larsen. *Konstruksjonsteknikk - Laster og bæresystemer*. 2. utg. Tapir Akademisk Forlag, 2008.
- [28] Annika Mårtensson. «6. Bruksgrensetilstand». I: *Limtreboka*. Red. av Roberto Editor Crocetti. 2. utg. Bd. 2. Norske Limtreprodusenters Forening, 2015, s. 95–116.
- [29] Kolbein Bell og Harald Liven. «Eksempel 14: Treleddsue». I: *Limtreboka Beregningseksempler*. 3. utg. Norske Limtreprodusenters Forening, 2018, s. 157–171.
- [30] *Byggforskserien 421.051: Statikkformler for bjelker*. Sep. 2019.
- [31] Lars Grøtta. *Gran og furu - våre råvarer*. URL: <https://www.moelven.com/no/produkter-og-tjenester/gran-og-furu--vare-ravarer/>.
- [32] Oda Otilie Holltrø Spongsveen. *Gran*. Jun. 2021. URL: <https://www.nibio.no/tema/skog/skoggenetiske-ressurser/treslag-i-norge/gran>.

- [33] *Egenlaster for Bygningsmaterialer, Byggevarer og Bygningsdeler*. Aug. 2013. URL: https://www.byggforsk.no/dokument/215/egenlaster_for_bygningsmaterialer_byggevarer_og_bygningsdeler.
- [34] Knut Ivar Edvardsen og Trond Ramstad. «Tak». I: *Trehus*. 9. utg. Norges byggforskningsinstitutt, 2007, s. 239–269.
- [35] Petter Dannveig. *Trøndelag – Klima*. Mar. 2020. URL: https://snl.no/Tr%C3%B8ndelag_-_klima.
- [36] Nancy Hall. *What is lift? - Glenn research center*. Jul. 2022. URL: <https://www1.grc.nasa.gov/beginners-guide-to-aeronautics/what-is-lift/>.
- [37] *Lift(force)*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lift_%28force%29.
- [38] Runald Walter Meyer. *Kryp – Konstruksjonsteknikk*. Sep. 2021. URL: https://snl.no/kryp_-_konstruksjonsteknikk.
- [39] Wikipedia. *Overleaf*. Jan. 2023. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Overleaf>.
- [40] Nicolai Hildre, Hanne Leiknes og Grete Morseth. *Massivtre som bærende konstruksjon i store bygg*. Mai 2021.
- [41] Nov. 2021. URL: <https://gudbrandsdalmassivtre.no/hvorfor-massivtre/>.
- [42] Rick Durrett. *Condition and stability*.

11 Vedlegg

A Lastkombinasjoner

B Kapasitetskontroll i ULS

C Kapasitetskontroll i SLS

D Excelutklipp, Limtreboka: Eksempel 14

Vedlegg: A

Beregning av egenlast, snølast og vindlast i henhold til Eurokode 1: Laster på konstruksjoner.

Egenlast

Geometriske verdier:

$L = 45 \text{ m}$; $b \times h = 400 \times 1500 \text{ mm}$

- Avstand mellom buer: $a = 7,2 \text{ m}$
- Massivtre har en tyngdetetthet på 5-7 kn/m^3 , jf. Byggforsk 471.031.
- Tung-tak system, gir en egenvekt på $1,0 \text{ kN/m}^2$, jf. Trehus.

$$g_{k,bue} = \gamma_g \cdot A = 7 \text{ kn/m}^3 \cdot (400 \cdot 1500 \text{ mm}^2)10^{-6} = 4,2 \text{ kn/m} \quad , \text{ der } A = bh$$

$$g_{k,tak} = 1,0 \text{ kN/m}^2 \cdot 7,2 \text{ m} = 7,2 \text{ kN/m}$$

$$\text{Det gir: } g_k = g_{k,bue} + g_{k,tak} = 11,4 \text{ kN/m}$$

Snølast (NS-EN 1991-1-3)

Benytter Focus konstruksjon for å beregne karakteristisk snølast.

Snølast på marka: $S_k = 3,5 \text{ kN/m}^2$

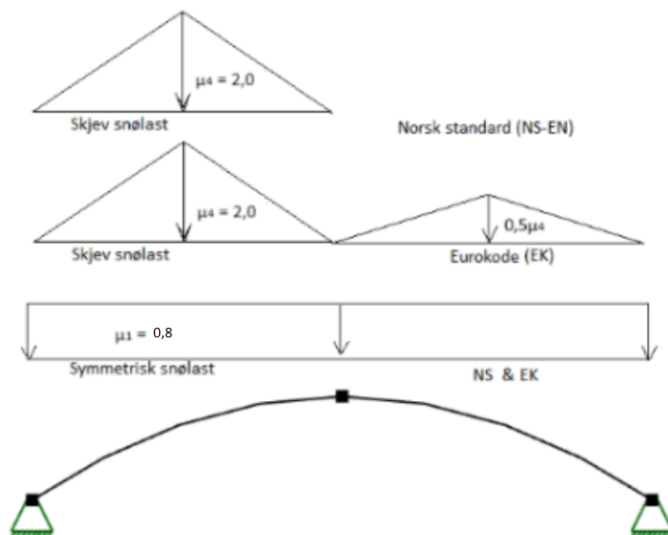
Eksponeringsfaktor: $C_e = 1,0$

Termisk faktor: $C_t = 1,0$

Formfaktor: $\mu_1 = 0,8$, $\mu_4 = 2,0$

Tre lasttilfeller for snølast:

1. Symmetrisk snølast
2. Skjev snølast på begge sider av buen, i henhold til Eurokode 1: Snølast.
Trekantformede fordelte snølaster med forskjellige størrelser på hver side.
3. Skjev snølast på en bueside (NS-EN)



1. Verdi for symmetrisk snølast:

Formfaktor: $\mu_1 = 0,8$

$q_{s1,k} = \mu_1 \cdot S_k \cdot a = 0,8 \cdot 3,5 \cdot 7,2 = 20,16 \text{ kN/m}$, der a er avstand mellom bue.

2. Verdi for skjev snølast på begge sider av buen:

Formfaktor: $\mu_1 = 2,0$

Maks på venstre halvdel: $q_{s2,l,k} = \mu_4 \cdot S_k \cdot a = 2,0 \cdot 3,5 \cdot 7,2 = 50,4 \text{ kN/m}$

Halv av maks.: $q_{s2,r,k} = 0,5\mu_4 \cdot S_k \cdot a = 0,5 \cdot 2,0 \cdot 3,5 \cdot 7,2 = 25,2 \text{ kN/m}$

3. Verdi for skjev snølast på en side:

Formfaktor: $\mu_1 = 2,0$

Maks på venstre halvdel: $q_{s3,k} = \mu_4 \cdot S_k \cdot a = 2,0 \cdot 3,5 \cdot 7,2 = 50,4 \text{ kN/m}$

Vindlast, (NS-EN 1991-1-4)

Referansevindhastighet: $v_{b,0} = 26 \text{ m/s}$

NA.4(901.1)

$$v_b = c_{dir} \cdot c_{season} \cdot v_{b,0} = 26 \text{ m/s}$$

NA.4.1, formel

$$c_{dir} = c_{season} = 1,0$$

jf. 4.2

Terrengkategori III

$$\rightarrow z_o = 0,3; z_{min} = 8 \text{ og } k_r = 0,22$$

Tabell NA.4.1

Formel for vindhastighetstrykket bestemmes fra: ($z = 13,5 \text{ m}$)

$$q_p(z) = [1 + 2 \cdot k_p \cdot I_v(z)] \cdot q_m(z)$$

NA.4.5

k_p er en toppfaktor som settes lik 3,5.

Stedsvindhastighetstrykket:

$$q_m(z) = 0,5 \cdot \rho \cdot v_m^2(z) = 0,5 \cdot 1,25 \text{ kg/m}^3 \cdot (21,77 \text{ m/s})^2 = 296,32 \text{ Nm}^{-2}$$

Stedsvindhastigheten:

$$v_m(z) = c_r(z) \cdot c_0(z) \cdot v_b$$

Lign. 4.3

Terrengformfaktoren:

$$c_0(z) = 1,0$$

4.3.3

Flatt terreng (mindre enn 3 grader).

Kontrollert med høydedata og google maps.

Ruhetsfaktoren:

$$c_r(z) = k_r \cdot \ln(z/z_o) = 0,22 \cdot \ln(13,5/0,3) = 0,84$$

4.3.2

Det gir oss:

$$v_m(z) = 0,84 \cdot 1,0 \cdot 26 \text{ m/s} = 21,77 \text{ m/s}$$

Turbulensintensiteten:

$$I_v = \frac{k_l}{c_0 \cdot \ln(z/z_o)} = \frac{1,0}{1,0 \cdot \ln(13,5/0,3)} = 0,26$$

NA.4.4

Vindhastighetstrykket blir dermed:

$$q_p(13,5) = [1 + 2 \cdot 3,5 \cdot 0,26] \cdot 296,32 \text{ Nm}^{-2} = 0,841 \text{ kNm}^{-2}$$

Beregner utvendig og innvendig formfaktor:

$$c_{pe} = c_{pe,10} \quad \text{for } A \geq 10 \text{ m}^2.$$

7.2.9, merknad 2:

“Der det ikke er mulig, eller der det ikke kan anses forsvarlig å beregne μ for et bestemt tilfelle, bør normalt c_{pi} settes lik det ugunstigste av +0,2 og -0,3.”

Tilfelle 1	A	B	C
c_{pe} (fig. 7.11)	0,5	-1,0	-0,4
c_{pi} (undertrykk)	-0,3	-0,3	-0,3

Tilfelle 2	A	B	C
c_{pe}	0,5	-1,0	-0,4
c_{pi} (overtrykk)	0,2	0,2	0,2

Av tabellene ovenfor, ser vi at innvendig overtrykk krysses med utvendig formfaktor i sone B gir størst netto formfaktor.

Lastbredden er buenes avstand. Velger $a = 7,2 \text{ m}$

Samlet vindtrykk får man av å legge sammen ytre og indre vindkrefter. Vi ser her at vind kun er aktuelt i forbindelse med eventuelle løftekrefter (vindsug). Dermed får vi en karakteristisk, jevnt fordelt, vindsug på taket:

$$q_{vind,k} = q_p (c_e - c_i) \cdot a = 0,841 \text{ kNm}^{-2} (-1,0 - 0,2) \cdot 7,2 \text{ m} = -7,27 \text{ kN/m}$$

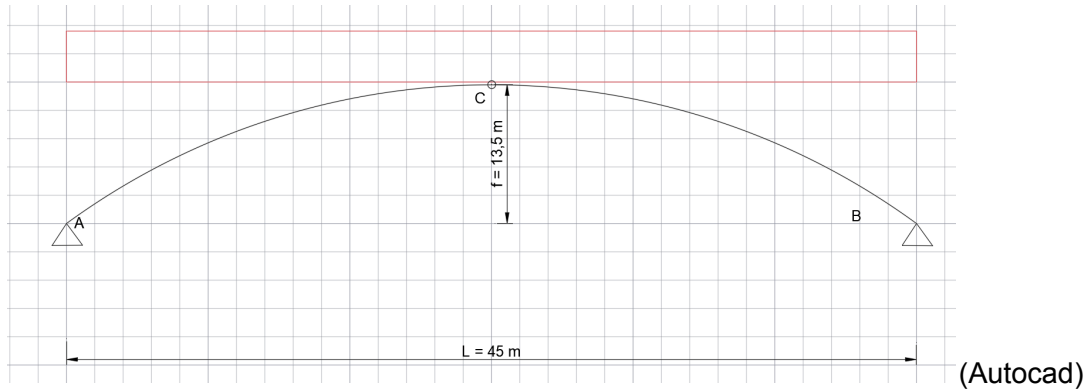
Negativ verdi \rightarrow utadrettede krefter på taket.

Vedlegg: B

Beregning av relevante lasttilfeller i ULS:

1. Egenlast + symmetrisk snølast
2. Egenlast + skjev snølast på begge buchalvdel (Eurokode 1)
3. Egenlast + ensidig skjev snølast (NS-EN)

Geometriske verdier



Vi har:

$$f = 13,5 \text{ m}; L = 45 \text{ m}$$

der

f er pilhøyden

L er lengden av buen

y_c er høyden ved punkt c (samme som pilhøyden)

x er horisontal ordinat

Buens form er som en parabel, og kan uttrykkes som en funksjon

$y = ax^2 + bx + c$, der x er horisontal avstand fra opplager A og y er høyde i x

Vi har initialbetingelsene: $y(0) = 0$; $y(L/2) = f$; $y'(L/2) = 0$,

for å få en verdi for a , b og c .

$$y' = 2ax + b$$

$$y(0) = c = 0 \text{ ok!}$$

$$I: \quad y(L/2) = \frac{1}{4}aL^2 + \frac{1}{2}bL = f$$

$$II: \quad y'(L/2) = aL + b = 0$$

Vi har et likningssett, I og $II \rightarrow$ løser på Geogebra

1	f:=13.5 <input type="radio"/> $\approx f := 13.5$
2	L:=45 <input type="radio"/> $\approx L := 45$
3	yc:=f <input type="radio"/> $\approx yc := 13.5$
4	$\frac{1}{4}aL^2 + \frac{1}{2}bL = f$ <input type="radio"/> $\sqrt{\frac{1}{4}aL^2 + \frac{1}{2}bL} = f$
5	$aL + b = 0$ <input type="radio"/> $\sqrt{aL + b} = 0$
6	{\$4, \$5} <input type="radio"/> NLøs: {a = -0.03, b = 1.2} (Geogebra)

Den generelle likningen for en parabel er funnet til å være:

$$y(x) = -0,03x^2 + 1,2x \quad (1)$$

Deriverer likning (1) mhp. x

$$\frac{dy}{dx} = y' = -0,06x + 1,2 \quad (2)$$

Fra trigonometri, kan vi definere at:

$$\sin(\theta) = \frac{y'}{[1+(y')^2]^{1/2}} \quad (3)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{[1+(y')^2]^{1/2}} \quad (4)$$

Kjører formlene ovenfor i Excel, og får ut verdier for posisjon og trigonometriske verdier i opplagret ved (x, y) = (0,0) og i buens fjerdedels-punkt ved (11,25 ; 9,7):

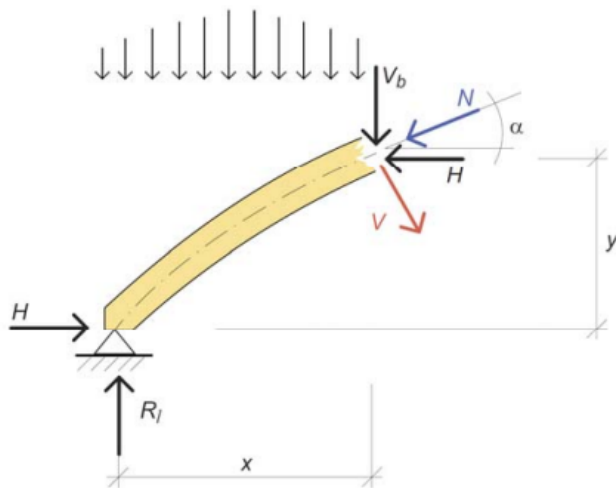
25								
26								
27								
28	Geometriske parametere:							
29	Punkt	x[m]	y[m]	y'		sin(a)	cos(a)	
30	A	0	0,0	1,200	1,562	0,8	0,6	
31	Punkt 1	11,25	9,7	0,525	1,129	0,5	0,9	

Normalkraften (N) og skjærkraften (V) i et punkt i buen er avhengig av vinkelen α mellom tangenten og linjen mellom oppleggspunktene:

$$V = -H \sin(\alpha) + \sum V \cos(\alpha), \text{ der } H = Ax$$

$$N = -H \cos(\alpha) - \sum V \sin(\alpha)$$

her er $\sum V$ summen av kreftene til venstre for snittet, og H er den horisontale opplagerkraften i buen.



(Limtreboka 2015)

Kritisk snitt for en bue er normalt i nærheten av buens fjerdedels-punkt, dvs. ved $x = L/4 = 45/4 = 11,25 \text{ m}$. Maks. moment vil være i det punktet, og skjærkraften vil være lik null.

Ordinaten y_0 til buens senterlinje i fjerdedels-punktet:

$$y_0 = y(11,25) = -0,03 \cdot 11,25^2 + 1,2 \cdot 11,25 = 9,7 \text{ m}$$

Vinkel i fjerdedels-punktet, P1:

$$\alpha_{p1} = \arcsin(0,5) = 0,52$$

Vinkel i opplager, A (Utklipp fra excel ark):

$$\alpha_A = \arcsin(0,80) = 0,93$$

Lasttilfelle 1: Egenlast + symmetrisk snølast

Karakteristisk laster: $g_k = 11,4 \text{ kN/m}$; $q_{s,k} = 20,16 \text{ kN/m}$

Dimensjonerende last: $p_d = 1,2 g_k + 1,5 q_{s,k} = 43,92 \text{ kN/m}$

Beregner opplagerkreftene:

$$\sum Ma = 0: \quad -B_z \cdot L + \frac{1}{2} \cdot p_d \cdot L^2 = 0$$

$$Az = Bz = \frac{1}{2} p_d L = \frac{1}{2} \cdot 43,92 \cdot 45 = 988,20 \text{ kN}$$

$$Ax = \frac{p_d \cdot L^2}{8 \cdot f} 0,5 = \frac{43,92 \cdot 45^2}{8 \cdot 13,5} = 832,50 \text{ kN};$$

$$Bx = -832,50 \text{ kN}$$

Snittkrefter i buens fjerdedels-punkt:

$$M_{P1} = \frac{p_d \cdot L^2}{32} \left(3 - 4 \cdot \frac{y_0}{f} \right) = \frac{43,92 \cdot 45^2}{32} \left(3 - 4 \cdot \frac{9,7}{13,5} \right) = 349,99 \text{ kNm}$$

$$N_{P1} = H \cdot \cos(\alpha_{P1}) + \frac{p_d L}{4} \sin(\alpha_{P1})$$

$$= 832,50 \cdot \cos(0,52) + \frac{43,92 \cdot 45}{4} \cdot \sin(0,52)$$

$$N_{P1} = 960,16 \text{ kN}$$

$$V_{P1} = 0$$

Snittkrefter i buens venstre opplager: $\sum V = Az$

$$M_A = 0$$

$$N_A = -H \cdot \cos(\alpha_A) - Az \cdot \sin(\alpha_A) = -832,50 \cdot \cos(0,93) - 988,20 \cdot \sin(0,93)$$

$$N_A = -1284,66 \text{ kN (Trykk)}$$

$$V_A = -H \sin(\alpha_A) + Az \cos(\alpha_A) = -832,50 \cdot \sin(0,93) + 988,20 \cdot \cos(0,93) = -76,57 \text{ kN}$$

Snittkrefter i buetopp:

$$M_c = 0 \quad V_c = 0$$

Dimensjonerende for lasttilfelle 1:

$$M_1 = 349,99 \text{ kNm} \quad (\text{fjerdedels-punkt})$$

$$N_1 = 1284,66 \text{ kN} \quad (\text{opplager})$$

$$V_1 = 76,57 \text{ kN} \quad (\text{opplager})$$

Lasttilfelle 2: Egenlast + Skjev snølast ihht. EK1

$$g_k = 11,4 \text{ kN/m} \quad \rightarrow \quad g_d = 1,2 \cdot 11,4 = 13,68 \text{ kN/m}$$

$$q_{sl,k} = 50,4 \text{ kN/m}; \quad \rightarrow \quad q_{sl,d} = 1,5 \cdot 50,4 = 75,60 \text{ kN/m}$$

$$q_{sr,k} = 25,2 \text{ kN/m} \quad \rightarrow \quad q_{sr,d} = 1,5 \cdot 25,2 = 37,80 \text{ kN/m}$$

Beregner opplagerkreftene:

$$Az = (3q_{sl,d} + q_{sr,d}) \frac{L}{16} + \frac{1}{2} g_d L = (3 \cdot 75,60 + 37,80) \cdot \frac{45}{16} + \frac{1}{2} \cdot 13,68 \cdot 45 = 1051,99 \text{ kN}$$

$$Bz = (q_{sl,d} + 3q_{sr,d}) \frac{L}{16} + \frac{1}{2} g_d L = (75,60 + 3 \cdot 37,80) \cdot \frac{45}{16} + \frac{1}{2} \cdot 13,68 \cdot 45 = 839,36 \text{ kN}$$

$$H = Ax = (q_{sl,d} + q_{sr,d}) \frac{L^2}{32f} + \frac{g_d L^2}{8f} = (75,60 + 37,80) \cdot \frac{45^2}{32 \cdot 13,5} + \frac{13,68 \cdot 45^2}{8 \cdot 13,5} = 788,06 \text{ kN}$$

Snittkrefter i buens fjerdedels-punkt:

$$\begin{aligned} M_{P1} &= (7q_{sl,d} + 3q_{sr,d}) \frac{L^2}{192} - (q_{sl,d} + q_{sr,d}) \frac{L^2}{32} \frac{y_0}{f} + \frac{g_d L^2}{32} \left(3 - 4 \frac{y_0}{f} \right) \\ &= (7 \cdot 75,60 + 3 \cdot 37,80) \frac{45^2}{192} - (75,60 + 37,80) \frac{45^2}{32} \frac{9,7}{13,5} + \frac{13,68 \cdot 45^2}{32} \left(3 - 4 \cdot \frac{9,7}{13,5} \right) \\ &= 1730,28 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{P1} &= \frac{L}{16} (q_{sl,d} + q_{sr,d} + 4g_d) \cdot \left(\frac{L}{2f} \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \right) \\ &= \frac{45}{16} (75,60 + 37,80 + 4 \cdot 13,68) \cdot \left(\frac{45}{2 \cdot 13,5} \cdot \cos(\alpha_{P1}) + \sin(\alpha_{P1}) \right) \\ &= 918,84 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$V = 0$$

Snittkrefter i buens venstre opplager:

$$M_A = 0$$

$$N_A = -H \cos(\alpha_A) - Az \sin(\alpha_A) = -788,06 \cdot \cos(0,93) + 1051,99 \cdot \sin(0,93) = -1314,43 \text{ kN}$$

$$V_A = -H \sin(\alpha_A) + Az \cos(\alpha_A) = -788,06 \cdot \sin(0,93) + 1051,99 \cdot \cos(0,93) = 0,74 \text{ kN}$$

Snittkrefter i buetopp:

$$M_C = 0;$$

$$V_C = \frac{q_{sl,d} - q_{sr,d}}{16} L = \frac{75,60 - 37,80}{16} \cdot 45 = 106,31 \text{ kN}$$

Dimensjonerende for lasttilfelle 2:

$$M_2 = 1730 \text{ kNm} \quad \text{(fjerdedels-punkt)}$$

$$N_2 = 1314 \text{ kN} \quad \text{(opplager)}$$

$$V_2 = 106 \text{ kN} \quad \text{(buetopp)}$$

Lasttilfelle 3: Egenlast + ensidig trekantformet snølast (NS-EN)

Beregningsgangen er lik lasttilfelle 2.

$$g_k = 11,4 \text{ kN/m} \quad \rightarrow \quad g_d = 1,2 \cdot 11,4 = 13,68 \text{ kN/m}$$

$$q_{sl,k} = 50,4 \text{ kN/m}; \quad \rightarrow \quad q_{sl,d} = 1,5 \cdot 50,4 = 75,60 \text{ kN/m}$$

$$q_{sr,k} = 0 \text{ kN/m} \quad \rightarrow \quad q_{sr,d} = 0 \text{ kN/m}$$

Beregner opplagerkreftene:

$$Az = (3q_{sl,d} + q_{sr,d}) \frac{L}{16} + \frac{1}{2} g_d L = 945,68 \text{ kN}$$

$$Bz = (q_{sl,d} + 3q_{sr,d}) \frac{L}{16} + \frac{1}{2} g_d L = 520,43 \text{ kN}$$

$$H = Ax = (q_{sl,d} + q_{sr,d}) \frac{L^2}{32f} + \frac{g_d L^2}{8f} = 610,88 \text{ kN}$$

Snittkrefter i buens fjerdedels-punkt:

$$M_{P1} = (7q_{sl,d} + 3q_{sr,d}) \frac{L^2}{192} - (q_{sl,d} + q_{sr,d}) \frac{L^2}{32} \frac{y_0}{f} + \frac{g_d L^2}{32} \left(3 - 4 \frac{y_0}{f}\right) = 2252,98 \text{ kNm}$$

$$N_{P1} = \frac{L}{16} (q_{sl,d} + q_{sr,d} + 4g_d) \cdot \left(\frac{L}{2f} \cos(\alpha) + \sin(\alpha)\right) = 712,25 \text{ kN}$$

$$V = 0$$

Snittkrefter i buens venstre opplager:

$$M_A = 0$$

$$N_A = -H \cos(\alpha_A) - Az \sin(\alpha_A) = -1123,07 \text{ kN}$$

$$V_A = -H \sin(\alpha_A) + Az \cos(\alpha_A) = 78,70 \text{ kN}$$

Snittkrefter i buetopp:

$$M_C = 0;$$

$$V_C = \frac{q_{sl,d} - q_{sr,d}}{16} L = 212,63 \text{ kN}$$

Dimensjonerende for lasttilfelle 3:

$$M_3 = 2253 \text{ kNm} \quad \text{(fjerdedels-punkt)}$$

$$N_3 = 1123 \text{ kN} \quad \text{(opplager)}$$

$$V_3 = 213 \text{ kN} \quad \text{(buetopp)}$$

Dimensjonerende snittkrefter for buen i bruddgrensetilstand:

$$M_{dim} = 2253 \text{ kNm} \quad \text{(fjerdedels-punkt, tilfelle 3)}$$

$$N_{dim} = 1314 \text{ kN} \quad \text{(opplager, tilfelle 2)}$$

$$V_{dim} = 213 \text{ kN} \quad \text{(buetopp, tilfelle 3)}$$

Vedlegg: C

Kapasitetskontroll i ULS og kontroll av lasttilfelle 4: Egenlast + løftekrefter.

Kapasitetskontroll i ULS

Nødvendige parametere:

Dimensjoner på tverrsnitt: $b \times h = 400 \times 1500 \text{ mm}$

Lamelltykkelsen: $t = 50 \text{ mm}$

Pil høyde: $f = 13,5 \text{ m}$

Buelengde: $L = 45 \text{ m}$

Avstand mellom buer: $a = 7,2 \text{ m}$

Velger T21

Dimensjonerende krefter i bruddgrensetilstand

$M = 2253 \text{ kNm}$ (¼ - dels punkt)

$N = 1314 \text{ kN}$ (opplager)

$V = 213 \text{ kN}$ (buetopp)

Klimaklasse 1

$\gamma_M = 1,25$ for konstruksjonstre

$k_{mod} = 0,90$ for korttidslast (tabell 3.1, EK5)

Karakteristiske verdier for fasthet, T21 (NS-EN 338:2016):

$f_{m,k} = 29 \text{ MPa}$

$f_{c,0,k} = 25 \text{ MPa}$

$f_{t,90,k} = 0,4 \text{ MPa}$

$f_{v,k} = 4 \text{ MPa}$

I henhold til gjeldende regler i EK5, skal bøye- og strekkfasthet korrigeres for størrelseseffekt.

Høydefaktor, EK5-3.2 for konstruksjonstre:

$k_h = 1,0$ fordi $h > 150 \text{ mm}$

Formel for dimensjonerende fasthet: $f_d = k_{mod} \cdot \frac{f_{m,k}}{\gamma_M}$

Dimensjonerende fastheter:

$f_{m,d} = 0,90 \cdot \frac{29}{1,25} = 20,88 \text{ MPa}$

$f_{c,0,d} = 0,90 \cdot \frac{25}{1,25} = 18 \text{ MPa}$

$f_{t,90,d} = 0,90 \cdot \frac{0,4}{1,25} = 0,288 \text{ MPa}$

$f_{v,d} = 0,90 \cdot \frac{4}{1,25} = 2,88 \text{ MPa}$

Indre radius, r_{in} :

Formelen for en elliptisk bue vil gi radiusen til buelementet vårt, benytter oss av "Pythagoras theorem"

$$r = \frac{a^2 + b^2}{2a} = 25,5 \text{ m} \rightarrow r_{in} = r - h/2 = 25,5 - 0,75 = 24,75 \text{ m}$$

der $a = 13,5 \text{ m}$, pilhøyden til buen

$b = 22,5 \text{ m}$, halve lengden av buen

For krumme bjelker, i henhold til EK5-1 lign. (6.49), får vi en verdi for k_r :

$$\text{Vi har } \frac{r_{in}}{t} = 495 > 240 \rightarrow k_r = 1,0$$

EK5-1 lign. (6.43):

$$k_l = k_1 + k_2 \left(\frac{h_{ap}}{r} \right) + k_3 \left(\frac{h_{ap}}{r} \right)^2 + k_4 \left(\frac{h_{ap}}{r} \right)^3$$

$$\alpha_{ap} = 0 \text{ (EK5} \rightarrow \text{fig. 6.9)}$$

h_{ap} er høyden til tverrsnittet i toppunktet $\rightarrow h_{ap} = 1800 \text{ mm}$

$$r = 25500 \text{ mm}$$

$$k_1 = 1 + 1,4 \tan(\alpha_{ap}) + 5,4 \tan^2(\alpha_{ap}) = 1$$

$$k_2 = 0,35 - 8 \tan(\alpha_{ap}) = 0,35$$

$$k_3 = 0,6 + 8,3 \tan(\alpha_{ap}) - 7,8 \tan^2(\alpha_{ap}) = 0,6$$

$$k_4 = 6 \tan^2(\alpha_{ap}) = 0$$

Det gir oss:

$$k_l = 1 + 0,35 \left(\frac{1500}{25500} \right) + 0,6 \left(\frac{1500}{25500} \right)^2 + 0 = 1,023$$

Kombinert bøyning og aksialkraft (EK5-1, pkt. 6.3.2):

$$M_{y,d} = 2253 \text{ kNm} \rightarrow \sigma_{M,y,d} = \frac{k_l \cdot M_{y,d}}{W} = \frac{1,023 \cdot 2253 \cdot 10^6}{1/6 \cdot 400 \cdot 1500^2} = 15,36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{M,z,d} = 0$$

$$N_d = 1314 \text{ kN} \rightarrow \sigma_{c,0,d} = \frac{N}{A} = \frac{1314 \cdot 10^3}{400 \cdot 1500} = 2,19 \text{ MPa}$$

Lineær statisk analyse:

$$L_{k,y} \approx 1,25 \cdot s, \text{ der } s \text{ er halve buelengden. } s = 26,6 \text{ m}$$

Knekk lengde om sterk akse:

$$L_{k,y} = 1,25 \cdot 26,6 \text{ m} = 33,25 \text{ m}$$

Knekning i buens plan om sterk akse (y-akse):

$$\text{Slankhet: } \lambda_y = \frac{L_{ky}}{i_y} = \frac{33,25 \text{ m}}{0,289 \cdot 1,5 \text{ m}} = 76,701$$

$$\text{der } i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1/12 \cdot b h^3}{b h}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0,289 h$$

$$E_{0,05} = 8700 \text{ MPa}$$

$$f_{c,0,k} = 25 \text{ MPa}$$

$$\text{EK5-1, lign. (6.21)} \rightarrow \lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = \frac{76,701}{\pi} \sqrt{\frac{28}{8700}} = 1,31$$

$$\beta_c = 0,2 \text{ for konstruksjonstre}$$

$$\text{EK5-1, lign. (6.27)} \rightarrow k_y = 0,5 [1 + 0,2 (1,31 - 0,3) + 1,31^2] = 1,46$$

$$k_{c,y} = \frac{1}{k_y + \sqrt{k_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}} = \frac{1}{1,46 + \sqrt{1,46^2 - 1,31}} = 0,48$$

$$k_m = 0,7 \text{ for konstruksjonstre med rektangulært tverrsnitt, iht. EK5-1 pkt. 6.1.6.}$$

$$k_r = 1,0$$

Kontroll for knekning (EK5-1 lign. (6.23)):

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_r f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1,0$$

$$\frac{2,19}{0,48 \cdot 18} + \frac{15,36}{1,0 \cdot 20,88} + 0 = 0,99 \leq 1,0$$

OK!

Vipping med aksialkraft (EK5-1, pkt. 6.3.3):Lastbredde: $a = 7,2 \text{ m}$

Forutsetning: fastholdt sideveis i fotpunktene.

Forutsetning: buens tverrsnitt er fastholdt mot rotasjon om buens akse i de 4 åsene inne på buen med en avstand på 9 meter.

$$\rightarrow L_{ef} = 9000 \text{ mm}$$

For bartre med fast rektangulært tverrsnitt (EK5-1, lign. (6.32)):

$$\sigma_{m,crit} = \frac{0,78 b^2}{h L_{ef}} E_{0,05}$$

Dette gir:

$$\sigma_{crit} = \frac{0,78 \cdot 400^2}{1500 \cdot 9000} \cdot 8700 = 80,427 \text{ MPa}$$

og

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,crit}}} = \sqrt{\frac{29}{80,427}} = 0,60$$

For $\lambda_{rel,m} \leq 0,75$ (EK5, lign. (6.34))

$$\Rightarrow k_{crit} = 1,0$$

Fra tidligere:

$$\sigma_{m,y,d} = 15,36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,0,d} = 2,19 \text{ MPa}$$

$$f_{m,d} = 20,88 \text{ MPa}$$

$$f_{c,0,d} = 18,00 \text{ MPa}$$

$$\text{Kontroll: } \left(\frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} \cdot k_r \cdot f_{m,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} \leq 1$$

EK5-1: Lign. (6.35)

$$\left(\frac{15,36}{1,0 \cdot 1,0 \cdot 20,88} \right)^2 + \frac{2,19}{0,46 \cdot 18,00} = 0,80 \leq 1$$

OK!

Kontroll av tverrstrekk:

EK5-1, lign. (6.54):

$$\sigma_{t,90,d} = k_p \cdot \frac{6M}{b \cdot h^2} = 0,6 \frac{p_d}{b}$$

der p_d er det fordelte trykket på toppen av bjelken i møneområdet.

$$p_d = 1,2 \cdot g_{k,tak} \cdot 1,5 \cdot q_{s,k} = 1,2 \cdot 7,2 + 1,5 \cdot 50,4 = 84,24 \text{ kN/m}$$

$$k_p = 0,25 \cdot \frac{h}{r} = 0,25 \cdot \frac{1,5}{25,5} = 0,0147$$

Det gir oss:

$$\sigma_{t,90,d} = 0,0147 \cdot \frac{6 \cdot 2253 \cdot 10^6}{400 \cdot 1500^2} = 0,6 \cdot \frac{84,24}{400} = 0,0945$$

Kontroll for tverrstrekk: EK5-1, ligning (6.53)

$$\frac{\tau_d}{f_{v,d}} + \frac{\sigma_{t,90,d}}{k_{dis} \cdot k_{vol} \cdot f_{t,90,d}} \leq 1,0$$

$$k_{dis} = 1,4 \text{ for en krum komponent}$$

$$k_{vol} = 1,0 \text{ for konstruksjonstre}$$

Maksimum moment opptrer i buens fjerdedels-punkt. I det punktet er skjærkraften null, og vi kan se bort fra skjærspenningen.

$$\frac{\sigma_{t,90,d}}{k_{dis} \cdot k_{vol} \cdot f_{t,90,d}} = \frac{0,0945}{1,4 \cdot 1,0 \cdot 0,288} = 0,23 < 1,0$$

OK!

Skjærkontroll (EK5-1, pkt. 6.1.7)

Fra tidligere har vi at:

$$V = 213 \text{ kN}$$

$$f_{v,d} = 2,88 \text{ MPa}$$

Maksimum skjær opptrer i buetoppen.

I det punktet er momentet null, og vi kan se bort fra bøyespenningen.

Det gir dimensjonerende skjærspenning:

$$\tau_d = \frac{3 \cdot V_d}{2 \cdot k_{cr} \cdot b \cdot h} = \frac{3 \cdot 213 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,67 \cdot 400 \cdot 1500} = 0,795 \text{ MPa}$$

der $k_{cr} = 0,67$ for konstruksjonstre.

$$\frac{\tau_{v,d}}{f_{v,d}} = \frac{0,795}{2,88} = 0,28 \leq 1,0$$

OK!

Kontroll av lasttilfellet 4: Egenlast + vindsug

Hvis egenlasten til taket nøytraliserer vindsuget, er det tilstrekkelig kapasitet.

$$\text{Altså, } 1,2 \cdot (g_{k,bue} + g_{k,tak}) - 1,5 \cdot q_{k,vind} \geq 0$$

$$g_{k,bue} = 4,2 \text{ kN/m}$$

$$q_{k,vind} = -7,27 \text{ kN/m}$$

$$g_{k,tak} = 7,2 \text{ kN/m}$$

Det gir oss:

$$1,2 \cdot (4,2 + 7,2) - 1,5 \cdot 7,27 = 2,775 \text{ kN/m} \geq 0$$

OK!

Vedlegg: D

Kapasitetskontroll i SLS.

Kapasitetskontroll i SLS

$$p_{fin, kar} = q_k (1 + \psi_2 k_{def}) + g_k (1 + k_{def})$$

For klimaklasse 1 er $k_{def} = 0,6$, jf. tabell 3.2 i EK5-1.

$\psi_2 = 0,3$, jf. tabell 3.4 i "Konstruksjonsteknikk - Laster og bæresystemer". ψ er en kombinasjonsfaktor for variable påkjenninger.

Lasttilfelle 1:

$$g_k = 11,4 \text{ kN/m}$$

$$q_k = 20,16 \text{ kN/m}$$

$$p_{fin, kar} = 20,16 \cdot (1 + 0,3 \cdot 0,6) + 11,4 \cdot (1 + 0,6) = 42 \text{ kN/m}$$

Ved å benytte de samme formlene fra ULS, får vi:

$$M_1 = 335 \text{ kNm} \quad (\frac{1}{4} - \text{punkt})$$

Lasttilfelle 2:

$$g_k = 11,4 \text{ kN/m}$$

$$q_{sl, k} = 50,4 \text{ kN/m}$$

$$q_{sr, k} = 25,2 \text{ kN/m}$$

$$g_d = g_k (1 + k_{def}) = 18,24 \text{ kN/m}$$

$$q_{sl, d} = q_{sl, k} (1 + \psi_2 \cdot k_{def}) = 59,5 \text{ kN/m}$$

$$q_{sr, d} = q_{sr, k} (1 + \psi_2 \cdot k_{def}) = 29,7 \text{ kN/m}$$

Det gir oss:

$$M_2 = 1422 \text{ kNm} \quad (\frac{1}{4} - \text{punkt})$$

Lasttilfelle 3:

$$g_k = 11,4 \text{ kN/m}$$

$$q_{sl, k} = 50,4 \text{ kN/m}$$

$$q_{sr, k} = 0$$

$$g_d = 18,24 \text{ kN/m}$$

$$q_{sl, d} = 59,5 \text{ kN/m}$$

$$q_{sr, d} = 0$$

Det gir oss:

$$M_3 = 1833 \text{ kNm} \quad (\frac{1}{4} - \text{punkt})$$

Dimensjonerende moment:

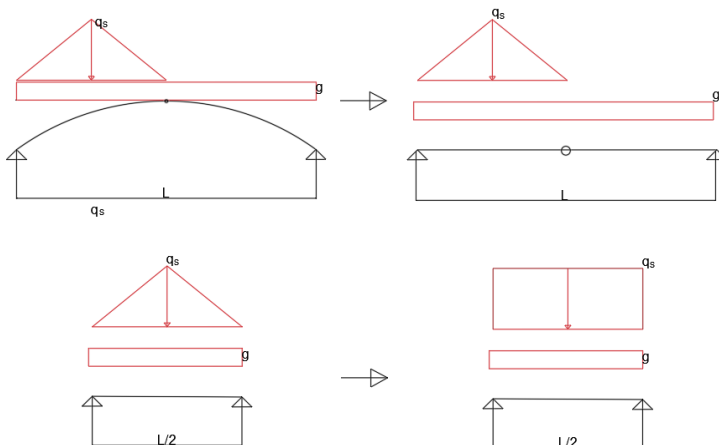
$$M_d = 1833 \text{ kNm} \quad (\text{Lasttilfelle 3})$$

Nedbøyning

Viktige parametre:

$$E = 14000 \text{ MPa}$$

$$I_y = 1/12 \cdot bh^3 = 1/12 \cdot 400 \cdot 1500^3 = 1,125 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4$$



(Autocad)

Nye verdier:

$$p_d = 18,24 + 59,5 = 77,74 \text{ kN/m}$$

$$L_{1/2} = 22,5 \text{ m}$$

Byggforsk 421.051:

$$\delta_{tot} = \frac{5 p_d L_{1/2}^4}{384 EI} = \frac{5 \cdot 77,74 \cdot 22,5^4}{384 \cdot 14000 \cdot 1,125 \cdot 10^{11}} = 177 \text{ mm}$$

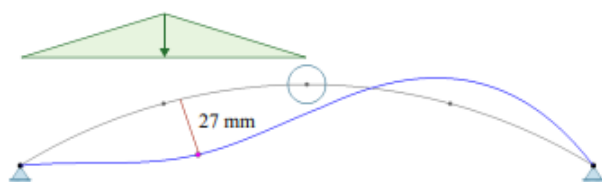
Nedbøyningkrav:

$$L / 250 = 180 \text{ mm} > \delta_{tot} \quad \text{OK!}$$

Kommentar: Svært konservativ verdi.

Kontroll av metode

Undersøker om metoden gir en konservativ verdi. Utfører samme beregningsgang for eksempel 14 i Limtreboka. Nedbøyningen på grunn av en jevnt fordelt egenlast og ensidig trekantformet snølast er 27 mm.



Limtreboka - Beregningseksempler, eksempel 14

Viktige verdier fra eksemplet:

$$g_k = 6,4 \text{ kN/m}$$

$$q_{s,k} = 46,1 \text{ kN/m}$$

$$L = 50 \text{ m}$$

$$p_{w,fin} = 1,6 \cdot g_k + 0,32 \cdot q_{s,k}$$

Nye verdier:

$$L_{1/2} = 25 \text{ m}$$

$$p_d = 1,6 \cdot 6,4 + 0,32 \cdot 46,1 = 24,992 \text{ kN/m}$$

$$E = 13000 \text{ MPa}$$

$$I_y = 1,21 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4$$

Det gir oss:

$$\delta_{tot} = \frac{5 p_d L_{1/2}^4}{384 EI} = \frac{5 \cdot 24,992 \cdot 25000^4}{384 \cdot 13000 \cdot 1,21 \cdot 10^{11}} = 81 \text{ mm} > \delta_{reell} = 27 \text{ mm}$$

OK!

Vedlegg: E

Excel-utklipp som viser kontroll av beregningsmetoden brukt for beregning av indre krefter i en bue, gjennomført med verdier fra eksempel 14 i Limtreboka: Beregningseksempler.

Valgte dimensjoner			Lasttilfeller (forhåndsdimensjonering)				SJEKK: OK		SJEKK: OK			
Lengde	L	50 m	Egenlast + symmetrisk snølast	Dimensjonerende last q_d	42,18	kN/m	Egenlast + trekantformede snølast med ulik størrelse på hver side	7,68	kN/m	Egenlast + ensidig skjev snølast	7,68	kN/m
Pil høyde	f	7 m				kN/m	Dim. maks snølast på venstre halvdel	69,15	kN/m		69,15	kN/m
Lastbredde (avst. mellom bua)		7,2 m				kN/m	Dim. halv snølast på høyre halvdel	34,58	kN/m		0,00	kN/m
Tverrsnittdimensjoner			Vertikal, venstre opplager kraft R_l	R_l	1054,50	kN	Vertikal, venstre opplager kraft R_l	948,33	kN	R_l	840,28	kN
Bredde	b	215 mm	Vertikale, høyre opplager kraft R_r	R_r	1054,50	kN	Vertikale, høyre opplager kraft R_r	732,23	kN	R_r	408,09	kN
Høyde	h	1890 mm	Horisontal opplagerkraft H	H	1883,04	kN	Horisontal opplagerkraft H	1500,50	kN	H	1114,62	kN
Lastfaktor egenlast	yg	1,2	Max normalkraft i buens 1/4-punkt N	$N_{1/4\text{-punkt}}$	1955,46	kN	Max normalkraft i buens 1/4-punkt N	1558,21	kN	$N_{1/4\text{-punkt}}$	1157,49	kN
Lastfaktor nyttelast	ys	1,5	Normalkraft ved opplagg (x=0)	N_{opplegg}	2157,23	kN	Normalkraft ved opplagg (x=0) N_{oppl}	1774,58	kN	N_{oppl}	1388,10	kN
Laster (karakteristisk):			Bøyemoment i 1/4-punkt M	M	-282,46	kNm	Bøyemoment i 1/4-punkt M	1350,61	kNm	M	2083,78	kNm
Egenlast:	g_k	6,4 kN/m	Skjærkraft ved opplagg (x=0) V_{oppl}	V_{oppl}	-64,59	kN	Skjærkraft ved opplagg (x=0) V_{oppl}	41,18	kN	V_{oppl}	147,07	kN
Snølast:			Skjærkraft i toppunkt V_{topp}	V_{topp}	0,00	kN	Skjærkraft i toppunkt V_{topp}	108,05	kN	V_{topp}	216,09	kN
Tilfelle 1	$q_{s1,k}$	23 kN/m	Verdier fra beregningseksempel i Limtreboka, eksempel 14 - Treleddsue									
Tilfelle 2	$q_{s2,l,k}$	46,1 kN/m	Vertikal, venstre opplager kraft R_l	R_l	1065,00	kN	Vertikal, venstre opplager kraft R_l	957,00	kN	R_l	849,00	kN
	$q_{s2,r,k}$	23,05 kN/m	Vertikale, høyre opplager kraft R_r	R_r	1065,00	kN	Vertikale, høyre opplager kraft R_r	745,00	kN	R_r	418,00	kN
Tilfelle 3	$q_{s3,k}$	46,1 kN/m	Horisontal opplagerkraft H	H	1886,00	kN	Horisontal opplagerkraft H	1502,00	kN	H	1117,00	kN
Kritisk snitt			Max normalkraft i buens 1/4-punkt N	$N_{1/4\text{-punkt}}$	Ikke oppgitt	kN	Max normalkraft i buens 1/4-punkt N	1557,00	kN	$N_{1/4\text{-punkt}}$	1395,00	kN
Ordinat	y_0	5,4 m	Normalkraft ved opplagg (x=0)	N_{opplegg}	2162,00	kN	Normalkraft ved opplagg (x=0) N_{oppl}	Ikke oppgitt	kN	N_{oppl}	1152,00	kN
	x_0	12,5 m	Bøyemoment i 1/4-punkt M	M	246,00	kNm	Bøyemoment i 1/4-punkt M	1437,00	kNm	M	2150,00	kNm
	α	0,27 rad	Skjærkraft ved opplagg (x=0) V_{oppl}	V_{oppl}		kN	V_{maks}	158,00	kN	V_{oppl}	146,00	kN
Ved opplagg	α	0,54 rad	Skjærkraft i toppunkt V_{topp}	V_{topp}	0,00	kN			kN	V_{topp}	237,00	kN
1	$a^2 25^2 + b^2 25 = 7$ → $625 a + 25 b = 7$		Geometriske parametere:									
2	$2^2 a^2 25 + b = 0$ → $50 a + b = 0$		Punkt	x[m]	y[m]	y'	$\sqrt{1 + (y')^2}$	sin(α)	cos(α)			
3	{S1, S2}		A	0	0,0	0,600		1,166	0,51	0,86		
	NL:es: {a = -0.01, b = 0.56}		Punkt 1	12,5	5,4	0,280		1,038	0,27	0,96		
4	$k(x) = -0.01 \cdot x^2 + 0.56 \cdot x$ → $k(x) := -0.01 x^2 + 0.56 x$											