Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Eva Nyhus Reppe og Ingrid Abelsen

Kombinatorikk og argumentasjon i begynneropplæringen

En kvalitativ studie av elevers strategier og argumentasjon i kombinatorikk på 2. trinn

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Marit Buset Langfeldt
Mai 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Eva Nyhus Reppe og Ingrid Abelsen

Kombinatorikk og argumentasjon i begynneropplæringen

En kvalitativ studie av elevers strategier og argumentasjon i kombinatorikk på 2. trinn

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Marit Buset Langfeldt
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne kvalitative studien ønsker vi å utforske og belyse temaene kombinatorikk og argumentasjon i begynneropplæringen. Hensikten med forskningen er å undersøke hvilke strategier elever på 2. trinn bruker i problemløsningsoppgaver innen kombinatorikk, og på hvilke måter de argumenterer for sine resultater. For å kategorisere og analysere elevenes strategier og argumenter, tar vi utgangspunkt i English (1991) sitt rammeverk for strategier i kombinatorikk, og Toulmin (2003) sitt rammeverk for argumentasjon. Med English (1991) kan vi plassere elevene sine strategier inn i seks forskjellige nivåer av økende sofistikasjon. Toulmin (2003) sitt rammeverk bruker vi for å systematisere elevenes argumenter, slik at vi videre kan analysere dem.

Vi har en kvalitativ studie, som baserer seg på observasjoner av elevarbeid gjennom et oppgavebasert intervju. Vi har filmet og transkribert til sammen ti utprøvinger av to forskjellige problemløsningsoppgaver, hvor til sammen femten elever gjennomførte opplegget. Resultatet vårt viser hvordan elever helt nede på 2. trinn kan løse oppgaver innen kombinatorikk, og gjerne på svært sofistikerte måter. Dette kan derimot være svært avhengig av hva slags kombinatorikkoppgave de løser, og hvilke representasjoner de har tilgjengelig som hjelpemidler. Vi har sett hvordan bruken av konkreter og virkelighetsnære kontekster ikke bare gjør det mulig for elevene å løse oppgaven, men også fasiliterer for avanserte strategier. Argumentasjon spilte også en rolle i utviklingen av elevers strategier. Gjennom studien kom det frem at ved å etterspørre en forklaring for elevenes løsning, var det flere som endret strategi for å rettferdiggjøre sine resultater.

Abstract

In this qualitative study, we want to explore and shed light on the topics of combinatorics and argumentation in the earlier stages of education. The purpose of the research is to investigate which strategies pupils in 2nd grade use in problem-solving tasks in combinatorics, and in which ways they argue for their results. In order to categorize and analyze the students' strategies and arguments, we will use English's (1991) framework for strategies in combinatorics, and Toulmin's (2003) framework for argumentation. With English (1991), we can place students' strategies into six different levels of increasing sophistication. We use Toulmin's (2003) framework to systematize the students' arguments, so that we can further analyze them.

We have a qualitative study, which is based on observations of student work through a task-based interview. We have filmed and transcribed a total of ten trials of two different problem-solving tasks, where a total of fifteen students completed the scheme. Our results show how pupils already in 2nd grade can solve problems in combinatorics, and often in very sophisticated ways. However, this can be very dependent on the kind of combinatorics task they solve, and which representations they have available as aids. We have seen how the use of concrete representations and realistic contexts not only enables students to solve the task, but also facilitates advanced strategies. Argumentation also played a role in the development of students' strategies. Through the study, we discovered that by asking for an explanation for the students' solution, several students changed their strategy to justify their results.

Forord

Veien til masteroppgaven har vært en lærerik og spennende prosess. Det har vært krevende og mye jobb, men vi sitter igjen med mange gode erfaringer og refleksjoner som vi tar med oss videre. Masteroppgaven markerer slutten på fem fine år på NTNU, som har gitt oss gode venner, interessante diskusjoner og relevante erfaringer vi kan ta med oss videre inn i jobben som grunnskolelærere.

Det har vært både gunstig, lærerikt og morsomt å arbeide i par for å gjennomføre denne masteroppgaven. Å skrive sammen har gitt oss kontinuerlige muligheter for å diskutere og reflektere i fellesskap over essensielle valg underveis i skrivingen, og vi har kunnet vært både en støtte og en drivfaktor for hverandre hele veien.

Vi vil rette en stor takk til vår veileder Marit Buset Langfeldt, som har hjulpet oss gjennom hele perioden. Vi takker også skolen som tok oss imot, og ga oss et sted for å utforske problemstillingen vår. Til slutt vil vi takke gode venner, som ikke bare gjennom masterskrivingen, men gjennom hele studieløpet har gitt oss motivasjon og engasjement til å stå på. De har stilt opp når vi trengte nye innspill, eller bare en god pause.

Trondheim, 2023

Eva Nyhus Reppe og Ingrid Abelsen

Innhold

Figurer

1.0 innledning

Argumentasjon og kombinatorikk er to tema som har hatt lite oppmerksomhet i matematikkfagets historie, særlig på lavere alderstrinn. Ifølge English (1991) er kombinatorikk et av de minst anerkjente temaene på barneskolen, til tross for å være et av de mest allsidige, og det er ikke utført tilstrekkelig forskning rundt temaet (Kaput, 1970, som referert i Lockwood et al., 2020, s. 33). Argumentasjon, som inntil nylig har vært et tema forbeholdt eldre klassetrinn, har derimot fått en oppblomstring i nyere tid, og har fått en sentral plass i læremålene i begynneropplæringen av matematikk (Russell et al., 2017, s. x). Russell et al. (2017) beskriver virkningene av dette nye fokuset, og hvordan de fleste barneskolelærere ikke har mye erfaring med matematisk argument, eller hvordan man skal innarbeide det i undervisningen. Det gjør det utfordrende for lærere å legge opp undervisning i kombinatorikk, eller å implementere argumentasjon, når det ikke er tilstrekkelig kunnskap om hvordan dette kan gjøres. I lys av dette ønsker vi å kartlegge hvilket nivå norske 2. klassinger ligger på i strategier av kombinatorikk, og på hvilken måte de argumenterer. På denne måten kan lærere få et innblikk i hvilke strategier elevene bruker på dette nivået, og hvordan argumentasjon fremstår i dette temaet. For å utforske dette, har vi denne problemstillingen:

«Hvilke strategier bruker elever på 2. trinn når de løser oppgaver innen kombinatorikk, og hvordan argumenterer de for sine løsninger?»

For å svare på dette spørsmålet, har vi laget tre forskningsspørsmål:

- Hvilke strategier bruker elevene, og hvordan påvirker oppgaven hvilke strategier elevene bruker?
- Hvordan argumenterer elevene for sine løsninger, og er det en sammenheng mellom hvordan de argumenterer og hvilken oppgave de jobber med eller strategi de bruker?
- Hvordan bruker elevene de tilgjengelige konkretene for å løse oppgaven, og påvirker konkretene hvilken strategi elevene velger å bruke?

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Flere forskere har vist hvordan elever på barneskolen er i stand til arbeide med kombinatorikk. I 2020 kom den nye læreplanen, og vi fikk nye føringer om hva matematikkfaget skulle inneholde. Noe som er sentralt i den nye læreplanen, i matematikkens kjerneelementer, er resonnering og argumentasjon i tillegg til utforskning og problemløsing (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 2-3). Det innebærer at disse aspektene skal komme frem i alle temaene elevene skal arbeide med i matematikk, og betyr at også elever i begynneropplæringen skal jobbe på måter som får frem både problemløsing og argumentasjon (Valenta & Enge, 2020, s. 2). I litteratursøk og lesing av artikler om argumentasjon i skolen, oppdaget vi at et stort flertall av forskning angående argumentasjon er blitt gjort på mellomtrinnet og oppover. Både Stylianides (2008) og Carpenter et al. (2003) presiserer hvordan bevis og argumentasjon ikke kommer inn i skolematematikken før etter barneskolen, og gjerne ikke før på videregående. Vi fant lite angående elevers argumentasjonsformer i begynneropplæringen. Ettersom resonnering og argumentasjon tydelig er blitt mer sentral i den nye læreplanen, ser vi mangelen på teori og data rundt dette temaet i begynneropplæringen som et mulig hull i lærerkunnskapen. Vi ønsket derfor å bidra med å utvide kunnskapen rundt dette temaet. For å begynne å få mer innsikt i hvordan elever argumenterer på småtrinnet, ønsket vi å observere hvordan 2. trinns elever arbeider med problemløsningsoppgaver.

Et element som ble fjernet fra å eksplisitt nevnes i læreplanen er kombinatorikk. LK06 nevnte kombinatorikk som et av hovedområdene i matematikk på årstrinnet 8.-10. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 3), men dette er ikke med i den nye læreplanen. Det er andre temaer og læremål i LK20 hvor kombinatorikk gjerne inngår eller enkelt kan implementeres, men som Lockwood et al. (2020) forklarer blir dette valgfritt. Særlig i tema som sannsynlighet, som er eksplisitt nevnt i læreplanen, er kombinatorikk en naturlig del (English, 1996, s. 87). Men også i aspekter som mønster, problemløsning og bruk og valg av representasjoner vil kombinatorikk være et hensiktsmessig tema å ta utgangspunkt i. Siden kombinatorikk ikke nevnes spesifikt i læreplanen, vil effekten av dette kunne bli at lærere begynner å se bort ifra dette temaet. Både fordi det ikke blir eksplisitt nevnt, men også fordi det tidligere var forbeholdt eldre klassetrinn (ifølge læreplanen). Denne oppgaven vil belyse om elever, allerede i en alder av 7 år, er i stand til å løse oppgaver innen kombinatorikk. På denne måten kan vi bidra til å ufarliggjøre temaet.

1.2 Tidligere forskning

Flere forskere har vist hvordan elever på barneskolen er i stand til arbeide med kombinatorikk, og får til å demonstrere utfallsrom med hjelp av konkreter (Lockwood et al., 2020, s. 11; English, 1991; Maher et al., 2011). Likevel mener også flere forskere at det ikke er gjort tilstrekkelig forskning rundt dette temaet, særlig på lavere alderstrinn (English, 1991; Lockwood et al., 2020; Maher et al., 2011). I 2020 publiserte Lockwood, Wasserman og Tillema en artikkel med tittelen: «A case for combinatorics: A research commentary». I denne artikkelen påpeker de mangelen på fokuset på kombinatorikk i læreplanen, særlig i USA. De henviser til Kaput (1970) sin appell for mer forskning rundt kombinatorikk, som de mener fortsatt er relevant den dag i dag. De påpeker hvordan kombinatorikk har nærmest blitt fjernet fra læreplanen, noe vi kan kjenne igjen i den norske læreplanen i matematikk.

Maher (2011) og English (1991, 1996) er forskere som har sett på arbeid med kombinatorikk på lave alderstrinn. Carolyn A. Mahers (2011) sin forskning viser hvordan elever kan løse kombinatorikkoppgaver allerede i 3. klasse. Hun viser at elevene, selv om de er unge, kan jobbe med å argumentere og bevise sine påstander. I arbeid med kombinatorikk på 2. og 3. trinn brukte hun oppgaven «Shirts and Jeans»: «Stephen har en hvit skjorte, en blå skjorte og en gul skjorte. Han har et par blå bukser og et par hvite bukser. Hvor mange forskjellige antrekk kan han lage?» (Maher, 2011, s. 11. Direkte oversatt). Hennes forskning viser hvordan elever på 2. trinn ikke klarte å komme frem til riktig antall antrekk. Hun påpeker også hvordan elevene arbeidet i grupper, og kom frem til forskjellige svar innad i de gruppene. Dette fremsto derimot uproblematisk for elevene at løsningene varierte mellom tre og syv antrekk (Maher, 2011). I beskrivelsen av på hvilke måter elevene løste oppgaven, trekker hun frem tegninger av antrekkene, tegne linjer mellom skjorter og bukser, og laging av lister av antrekk som fremgangsmåter de brukte. Hun trekker også frem et eksempel av en elev som avviste enkelte kombinasjoner, på bakgrunn av at disse ikke var «fashionable» (moteriktige) (Masher, 2011, s. 11). Maher

(2011) påpeker at selv om ingen kom til riktig resultat, gav fremgangsmåten deres bevis for at de hadde strategier som kunne utgjøre noen eller også alle mulige antrekk.

Lyn D. English har gjennom mange år forsket på kombinatorikk på lave alderstrinn (English, 1991, 1996, 2005). Hun påpeker hvordan det ikke er gjort mye forskning som tar for seg elevers evne til problemløsning innen kombinatorikk, med unntak av forskning gjort av Inhelder og Piaget (1958) (English, 1991, s. 451). English (1991) forsket mer spesifikt på unge elevers (4-9 år) strategier i kombinatorikk, og beskrev seks ulike strategier av varierende sofistikasjon. Hun skriver også om nyere forskning som har oppdaget at med tilpassede representasjoner og meningsfulle oppgaver, kan unge barn få mulighet til å bygge systemer og være i stand til å systematisk finne alle mulige kombinasjoner i kombinatorikkoppgaver (English, 1991, som referert i English 2005). Hun påpeker at tilnærmingen med virkelighetsnære oppgaver innen kombinatorikk vil gjøre at problemene blir mer tiltalende og meningsfulle for elevene (English 2005). English (2005, s. 130) påpeker at elever i hennes forskning, som var mellom 7 til 9 år, var i stand til å utvikle mer systematiske måter å jobbe med kombinatorikkoppgaver. Samtidig beskriver hun at det skjedde lite utvikling i metodene til barna mellom 4 til 6 år. Videre skriver English (2005, s. 130) om at elevene først utviklet den mest effektive strategien (odometerstrategien) når de skulle verifisere problemløsningen sin, og ikke når de skulle løse selve oppgaven. Altså de brukte en mindre sofistikert strategi når de løste oppgaven, enn når de måtte rettferdiggjøre at de hadde løst den på riktig måte.

1.3 Oppgavens oppbygging

Denne studien inneholder 6 kapitler som sammen skal være med å forklare studien og svare på problemstillingen vår: Innledning, teori, metode, analyse, diskusjon og konklusjon. I innledningen har vi beskrevet oppgavens formål og bakgrunn for problemstillingen, i tillegg til å belyse tidligere forskning gjort rundt disse temaene. I teorikapittelet skal vi redegjøre for begreper som inngår i denne forskningen (som argument, problemløsning og representasjoner), i tillegg til å presentere rammeverket for å kategorisere elevers strategier i kombinatorikk og utformingen av deres argumenter. I metodekapittelet vil vi beskrive hvordan forskningen ble gjennomført, samt reflektere over forskningens pålitelighet, gyldighet og overførbarhet, og etiske betraktninger til oppgaven. I analysen presenterer vi ti episoder hentet fra utprøvingene våre i skolen, og vi vil i diskusjonskapittelet se disse i lys av rammeverket og problemstillingen. Diskusjonskapitelet er inndelt i tre delkapitler, som hver tar for seg et forskningsspørsmål. Til slutt vil vi oppsummere hva vi har kommet frem til gjennom denne forskningen, gi kritikk av metoden, hvilken pedagogisk implikasjon studien har, og gi forslag til videre forskning.

1.4 Avgrensning av oppgaven

Sriraman & Umland (2020, s. 63) definerer argumentasjon i matematikkundervisning på to måter: en med læreren og eleven i fokus, og en med forskeren i fokus. Vi legger i vår oppgave vekt på deres definisjon med læreren og eleven i fokus i det matematiske klasserommet. De sier at denne definisjonen av argumentasjon i matematikkundervisningen omhandler de matematiske argumentene produsert i det matematiske klasserommet av læreren og elevene sammen, og at de ser på matematiske argument som en rekke med resonnement som har til hensikt å forklare hvorfor et matematisk resultat er sant (Sriraman

& Umland, 2020, s. 63). I denne forskningen kommer vi ikke til å se på det matematiske argumentets gyldighet eller om de klarer å lage et bevis, siden dette ikke er hensikten med oppgaven. Vi ønsker først og fremst å kartlegge hvordan elever, uten veiledning fra en lærer, argumenterer for sine løsninger i kombinatorikkoppgaver.

2.0 Teori

Vår master handler om elevers argumentasjon og strategier når de jobber med problemløsing av kombinatorikkoppgaver. English (1991, 1996) beskriver ulike faser og strategier innenfor kombinatorikk, og vi har valgt å bruke hennes rammeverk for å kunne identifisere og kategorisere de ulike strategiene elevene tar i bruk når de jobber med kombinatorikk. I tillegg har vi valgt å bruke Toulmins diagram (2003) for å analysere elevenes argumenter. En stor del av elevenes strategier og argumentasjoner går ut på å bruke de representasjonene som de har tilgjengelig. Derfor har vi i tillegg valgt å trekke inn teori om representasjoner, som vi senere vil bruke til å diskutere elevenes strategier og argumentasjon gjennom bruk av representasjoner som er tilgjengelige.

2.1 Problemløsning

Polya (1981, s. 117) i sin definisjon av problemløsning begynner med å beskrive hva et problem faktisk innebærer. Han påpeker hvordan et problem må inneholde en form for utfordring med å finne en løsning. Hvis du har et potensielt problem, men løsningen kommer til tankene umiddelbart, er det dermed ikke et problem. Et problem er altså noe man i utgangspunktet ikke vet hvordan man skal løse. Polya definerer «å ha et problem» på denne måten: «å søke bevisst etter en handling som er egnet for å oppnå et klart tenkt, men ikke umiddelbart oppnåelig, mål» (Polya, 1981, s. 117. Direkte oversatt). Problemløsningen blir dermed å finne denne handlingen. Det vil si at arbeid med oppgaver elevene umiddelbart vet hvordan de skal gå frem med, regnes ikke som problemløsning. Palmér & Bommel (2018, s. 1778) presiserer hvordan en oppgave som kan defineres som en problemløsningsoppgave for én elev, trenger ikke å være det for en annen.

«Utforsking og problemløsing» er også kommet inn som et kjerneelement i den nye læreplanen, hvor strategier og fremgangsmåter står i fokus, og hvor vurdering av løsningenes gyldighet trekkes frem (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). Problemløsning kan utføres alene, men Johnson et al. (2004) påpeker fordelene av samarbeid med medelever. Det er nemlig god læring i det å lytte til andre elever sine ideer, og det å måtte formidle sine egne ideer til andre (Johnson et al., 2004). Palmér & Bomer (2018) har forsket på problemløsning i begynneropplæringen, og resultatet indikerer at problemløsning egner seg godt på de laveste trinnene i barneskolen. Forskningen antyder at elevene ikke bare er i stand til å kunne jobbe med problemløsning, men at de også opplever det som gøy å arbeide med (Palmér & Bomer, 2018, s. 1789). Ikke bare viser de forståelse for selve problemløsningen, men også det å reflektere over oppgaven og egen læring (Palmér & Bommel, 2018, s. 1789).

2.2 Representasjoner

Ifølge Maher (2011, s. 18) kan elever bruke representasjoner for å skape mening til matematikken som de jobber med. Russell et al. (2017, s. 2) skriver også om representasjoner, og beskriver dem som verktøy elever kan benytte ved tenking og kommunikasjon, og for konstruksjoner av matematiske argumenter. Russell et al. (2017, s. x) påpeker hvordan bruken av representasjoner er sentral i argumentasjon på barneskolen. Elever bruker matematiske redskaper og representasjoner, som inkluderer blant annet matematisk notasjon, muntlig eller skriftlig språk, fysiske modeller (som konkreter), tegninger, diagrammer (som tallinjer eller matriser), eller regnefortellinger (Davis og Maher, 1997, som referert i Maher 2011; Russell et al., 2017). Representasjoner kan hjelpe elever både å gjenkjenne og rettferdiggjøre hvordan noe de har oppdaget fungerer (Russell et al., 2017, s. 9-10).

Konkreter er matematiske redskaper som kan visualisere matematiske konsepter, og dermed gjøre de mer håndgripelige (Klaveness, 2010, s. 27). English (1991) sin forskning viser hvordan konkreter gir elever i begynneropplæringen mulighet til å symbolisere alle utfall i en kombinatorikkoppgave på en suksessfull måte. For at bruken av konkretiseringsmateriell skal være hensiktsmessig i matematikkundervisningen, burde elevene være kjent med objektene fra før av (Klaveness, 2010, s. 28). Vi kan altså ikke legge frem konkreter som et hjelpemiddel til en oppgave, og forvente at elevene automatisk vet hva de skal gjøre med dem. Konkreter er noe som må introduseres, og videre arbeides kontinuerlig med (Kalveness, 2010, s. 29).

2.3 Kombinatorikk

Kombinatorikk er et felt innen matematikken som innebærer å finne og telle alle mulige kombinasjoner av mulige hendelser som har et begrenset antall set (English, 2005; Lockwood et al., 2020). Eksempler på kombinatorikkoppgaver kan være: «du har to bukser og tre overdeler. Hvor mange antrekk kan du lage?» eller «dere er fem personer i rommet. Hvor mange håndtrykk må skje for at alle skal ha hilst på hverandre?». English (1996, s. 87) beskriver kombinatorikk som utvelgelse og strukturering av objekter i et endelig antall set. Hun beskriver at oppgaver i kombinatorikk er problemløsningsoppgaver som ofte er både utfordrende og meningsfulle for elever (English, 1996, s. 87). English (2005, s. 182) skriver at kombinatorikkproblemer gir mulighet til å utvikle ulike aspekter av matematisk kunnskap. Blant annet utvikle forståelse for antagelser, generaliseringer og systematisk tenking. I lys av dette påpeker hun hvordan kombinatorikk derfor har en viktig rolle i læreplanen i barneskolematematikk (English, 2005, s. 138). Sriraman & English (2004) beskriver flere muligheter som arbeid med kombinatorikkoppgaver i skolen kan gi elevene. Det kan fostre selvstendig tenking ved at elevene utforsker mulige løsninger selv, og ved at de deretter må forklare og begrunne løsningene de har kommet frem til. Da får de også muligheten til å justere eller avise sine egne ideer (Sriraman & English, 2004, s. 184). De oppfordrer også elevene til å dele løsningene sine med hverandre, hvor de kan dele konstruktive tilbakemeldinger (Sriraman & English, 2004, s. 188). English spesifiserer hvordan kombinatorikk gir et godt grunnlag for problemløsning (Varga, 1969, som referert i English, 1991, s. 451), hvor man enkelt kan lage oppgaver tilpasset yngre elever. Arbeid med kombinatorikkproblemer gir også fleksibilitet ved at det er mulighet for flere løsningsstrategier, og at elevene har friheten til å velge selv hvilken fremgangsmåte de benytter. Sriraman og English (2004, s. 185) påpeker at det er mange ulike strategier som ofte kommer frem, og at de kan variere fra tilfeldig valg av kombinasjoner og til å danne et systematisk mønster. Sriraman og English (2004, s. 187) påpeker også at å gi elevene mulighet til å jobbe med kombinatorikkoppgaver kan støtte elevenes valg og begrunnelse av strategier.

2.4 Kategorier av ulike strategier i kombinatorikk

Et viktig utgangspunkt for vår studie er forskningen på små barns arbeid med kombinatorikk gjort av English (1991, 1996). Hennes forskning på barn i en alder av fire til ni år har gitt et rammeverk for å kategorisere elevers strategier innen kombinatorikk. Alt fra tilfeldig utvelgelse av kombinasjoner, til systematisk gjennomgang av alle utfall. Rammeverk består av seks løsningsstrategier. De er rangerte fra A til F, med økende sofistikasjon. I English (1996) har hun komprimert disse seks strategiene ned til tre faser: den uplanlagte fasen (nonplanning stage), overgangsfasen (transitional stage) og odometerfasen (the odometer stage) (English, 1996, s. 94). Vi kan identifisere English (1991) sine seks strategier inn i disse tre fasene, hvor A-B befinner seg i den uplanlagte fasen, C-D i overgangsfasen og E-F er i odometerfasen. Denne sammenlikningen av English 1991 og English 1996 kan vi også se i masteroppgaven til Larssen (2019), og vi har lat oss inspirere av henne til å se rammeverkene i sammenheng. Vi mener English (1991) gir en mer detaljert beskrivelse av mulige strategier elever kan bruke, og egner seg bedre til å skille de forskjellige strategiene. Denne vil derfor stå mest sentralt i analysen av datamaterialet. Nedenfor vil vi beskrive de forskjellige fasene, og de tilhørende strategiene.

I hennes gjennomgang av strategiene bruker hun ordet «item» for å beskrive hver enkeltdel som inngår i kombinasjonene, og «items» for å beskrive kombinasjoner. For eksempel en genser er et «item» i en oppgave om å kombinere bukser og gensere, og kombinasjonen bukse og genser et «items». Vi kommer til å bruke ordet «enhet» i vår oversettelse av hennes rammeverk, hvor enhet er «item» og enheter er «items».

Den uplanlagte fasen

Denne fasen innebærer en prøv og feil tilnærming til oppgaven. Utvelgelsen og rekkefølgen enhetene oppstår i fremstår vilkårlig, og det er tilsynelatende ingen planlagt fremgangsmåte for utprøvingen (English, 1996, s. 954).

Strategi A innebærer tilfeldig utvelgelse av enheter, hvor eleven unngår å avvise gjentakende kombinasjoner. Elever med denne strategien kan identifiseres ved at de ofte ikke prøver å løse oppgaven, men heller bare lager forskjellige kombinasjoner (uten hensyn til oppgavens rammer). Dette kan beskrives som en utkledningsstrategi, som baserer seg mer på lek med de forskjellige enhetene, fremfor fullføring av oppgaven. Dette fører til at enheter ofte blir gjentatt, og oppgaven ikke blir løst (English, 1991, s. 458).

Strategi B kan også identifiseres ved at utprøvingen virker rent prøv og feil-tilnærmet. Enheter er utvalgt tilfeldig, noe som tolkes ut ifra at det er ingen identifiserbar rekkefølge i utvelgelsen. Når enheter er laget, vil eleven deretter velge å beholde eller avvise kombinasjonen. Dette vil være avhengig av om utfallet er forskjellig fra de som allerede er laget eller ikke (English, 1991, s. 458). Denne vurderingen skiller strategi B fra strategi A.

Overgangsfasen

I denne fasen kan man begynne å gjenkjenne et mønster i utvelgelsen av enheter, men mønsteret er ikke nødvendigvis den mest hensiktsmessige for å løse oppgaven (English, 1996, s. 94). Dette kan føre til at de går tilbake til et utprøvingsstadie.

I strategi C begynner det å fremtre et identifiserbart mønster i valg av enhetene. Dette nivået markerer en overgang fra en prøv og feil metode, til mer algoritmiske prosedyrer. «Algoritmisk» betyr i denne sammenhengen at kombinasjonene er valgt i en identifiserbar rekkefølge eller mønster (English, 1991, s. 458-459). Elevene begynner å se etter et system for å generere alle løsningene. Dette mønsteret er derimot ikke konsekvent brukt gjennom hele problemløsningen, og elevene faller ofte tilbake på en prøv og feil strategi (English, 1991, s. 458-459). Det kan komme av at mønsteret ikke er den mest effektive for problemløsningsoppgaven (English, 1996, s. 94).

Strategi D er den første av de rent algoritmiske prosessene, og viser en fullstendig overgang fra en prøv og feil-metode. Elever med denne strategien vil også kunne avvise gjentakende kombinasjoner. Den skiller seg fra strategi C ved at den følger et konsekvent og systematisk mønster i utvelgelse av enheter. Ved å bruke dette mønsteret, er det mulig å finne alle mulige løsninger (English, 1991, s. 459).

Odometerfasen

Odometerfasen er det mest sofistikerte stadiet i English (1996) sitt rammeverk, og beskriver strategier som innebærer at elevene lager prosedyrer som kan løse oppgaven. Den opprettholder et systematisk mønster som beskrevet i overgangsfasen, men den må inneholde et odometer-mønster i utvelgelse av enhetene. Det gjøres ved at en enhet blir satt som en «konstant», og alle mulige kombinasjoner som inneholder den konstanten blir gjennomført og telt (før de videre går over til en ny konstant) (English, 1996, s. 94). Denne fasen inneholder de mest effektive strategiene.

Strategi E regnes som den andre algoritmiske strategien, og innebærer et fremtredende odometer-mønster i utvelgelsen av enheter. Man holder på en enhet til alle (tilsynelatende) mulige kombinasjoner som inneholder denne enheten er utført, og dermed går over til en ny enhet og gjentar prosessen. Det odometriske mønsteret som fremkommer i denne strategien er derimot ufullstendig, som kan ha flere årsaker. Elevene kan gjenta kombinasjoner eller unnlate å gjennomføre alle mulige kombinasjoner for en enhet/konstant. De kan også unnlate å gjenkjenne at de har gjennomført alle mulige kombinasjoner, og dermed fortsetter å prøve å lage nye (English, 1991, s. 460-461).

Strategi F innebærer et fullstendig gjennomført odometer-mønster i enhet-utvelgelse, og er den mest sofistikerte strategien. De spesifikke enhetene blir valgt ut etter hverandre, og alle tilhørende mulige kombinasjoner blir gjennomført. Det er ikke behov for godkjennelse eller avvisning av mulige gjentakende kombinasjoner, fordi en fullstendig odometrisk strategi gjør at det ikke er behov for slikt. En annen identifikasjon på denne strategien, er hvordan elevene kan identifisere at alle mulige kombinasjoner er utført, og markerer at oppgaven er avsluttet. Ofte viser elevene dette ved å rettferdiggjøre at det ikke er flere muligheter (English, 1991, s. 461). Et eksempel på dette kan være: «jeg kan ikke lage flere, fordi jeg har satt sammen hver topp med hver bukse, og det er ikke flere topper» (ved «Shirts and Jeans»-oppgaven til Maher, 2011).

2.5 Argumentasjon

Argumentasjon i matematikk handler ifølge kjerneelementene i læreplanen for matematikk om at «elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige» (Utdanningsdepartementet, 2019, s. 2-3). Umland & Sriraman (2020) beskriver argumentasjon som en aktivitet hvor man skal argumentere, noe som videre betyr å dra konklusjoner basert på en rekke resonnementer. I konteksten av det matematiske klasserommet vil et matematisk argument, som tidligere nevnt, være en rekke resonnement som er bygd opp med hensikt å vise hvorfor et matematisk resultat er sant (Sriraman & Umland, 2020, s. 63). Ifølge definisjonen til Reid og Knipping (2010) kan et argument betraktes som alt som blir brukt til å forsvare eller avvise en påstand. Dette kan være å gjengi fakta, vise til resultater av et eksperiment, å gi et eksempel eller en definisjon, eller å gi et moteksempel (Reid og Knipping, 2010, s. 155). Med bakgrunn i disse definisjonene, bruker vi begrepet «argumentasjon» for å vise til hvordan elevene begrunner påstandene sine.

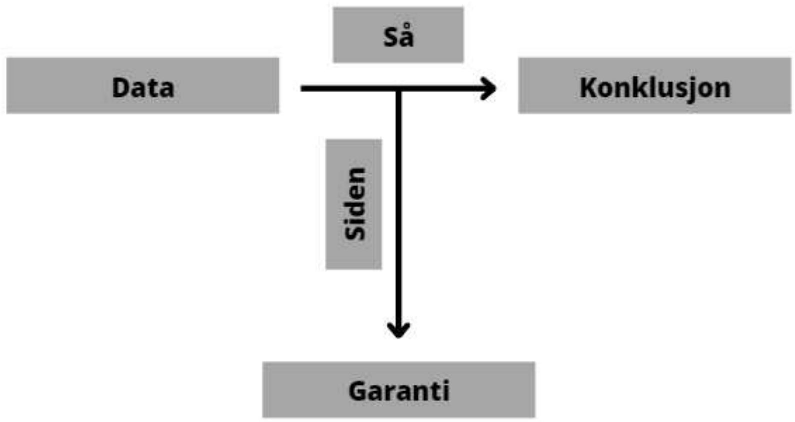
I matematikkfeltet er argumentasjon ofte blindt knyttet til konseptet bevis (Krummheuer, 1995, s. 235). I en klasseromssammenheng belyser Krummheuer (1995, s. 235) hvordan analyse av argumentasjon kan da bli misforstått som en avhandling av bevis. Læreren sitt fokus kan da rettes mot å se på gyldige måter å rettferdiggjøre for sine påstander, fremfor alle typer argumentasjonsformer. Krummheuer (1995) påpeker derimot hvordan argumentasjon ikke bare inngår i konstruksjon av bevis. Han beskriver hvordan argument ikke trenger å være knyttet til formell logikk, og hvordan mer «menneskelige handling og innsats» kan være argumentativ (Krummheuer, 1995, s. 235). I forskning på småtrinnet vil argumentasjon som ikke kommer frem til et bevis være mer sentralt, siden elevene ofte baserer seg på empiriske argument (Stylianides, 2016). I lys av dette, retter vi oppmerksomheten mot alle elevers forsøk på rettferdiggjøringen av sine konklusjoner.

I dette avsnitte ønsker vi å rette oppmerksomheten mot oppgaver hvor argumentasjon er relevant. Selv om vi ikke er interessert i at elevene kommer frem til et gyldig argument/bevis, så tenker vi at oppgaver som legger til rette for å utforske dette vil være en måte å fasilitere for argumentasjon på. Vi har valgt å se på Stylianides (2016) sine bevisoppgaver. Stylianides (2016) beskriver hvordan bevisoppgaver kan bestå av enten en, flere (endelig) eller uendelige antall caser. Vårt datamateriale er basert på to oppgaver som kan plasseres under bevisoppgaver med et endelig antall kombinasjoner. Han beskriver hvordan slike oppgaver kan engasjere elevene til å finne alle mulige utfall som er involvert i situasjonen. I tillegg må de argumentere for at alle muligheter er blitt funnet. Han beskriver at elever på barneskolen, og spesielt de som akkurat har blir introdusert for konseptet bevis, mest sannsynlig vil gi empiriske argument. De empiriske argumentene kommer med lite tanke på betydningen av å lage regler for å systematisere hvordan alle muligheter er funnet (Stylianides, 2016). Stylianides (2016, s. 96) beskriver noen bevisoppgaver som handler om å finne alle mulige kombinasjoner av et begrenset antall enheter, hvor det er relativt få muligheter. Noe han skriver at gjør oppgavene tilgjengelige for elever på barneskolen, som kan løse disse problemene ved systematisk opptelling av alle muligheter.

2.6 Toulmins diagram

Stephen Toulmin presenterte i 1958 i boken sin «The Uses of Argument» en argumentasjonsmodell (Jørgensen & Onsberg, 2008, s. 15). Den beskriver fellestrekk i forsøk på å lage argumenter, og gir et forslag til et «oppsett» av hvordan et argument kan se ut (Krummheuer, 1995, s. 239; Toulmin, 2003). Modellen beskriver hvordan argumenter er bygd opp, delene den består av, og relasjonen mellom disse. Den skal kunne anvendes som en analysemodell på nærmest alle argumenter (Jørgensen & Onsberg, 2008, s. 15-16).

Analysemodellen består av seks elementer, hvor tre av dem er obligatoriske og utgjør «grunnmodellen». De andre tre elementene utgjør en «utvidet modell». Den utvidede modellen innebærer elementer som ikke alltid inngår i et argument (Jørgensen & Onsberg, 2008, s. 16). Vi kommer til å se på argumenter i lys av grunnmodellen, og vil derfor ikke legge mye fokus på den utvidede modellen. Basert på grunnmodellen, kan man alltid dele et argument inn i tre elementer: konklusjon (claim), data og garanti (warrant) (Jørgensen & Onsberg, 2008, s. 16). Modellen kan se slik ut:



Figur 1: Toulmins (2003) diagram (grunnmodell)

Denne modellen representerer det Toulmin beskriver som den ideelle modellen av et innholdsrikt argument (Krummheuer, 1995, s. 239). Oppsettet er en måte å trekke ut hvilken betydning forskjellige utsagn har i konstruksjonen av et argument, slik at de videre kan analyseres (Jørgensen & Onsberg, 2008). Videre skal vi beskrive de forskjellige delene av et argument, og i metodedelen vil vi gå mer inn på hvordan vi vil identifiserer hver del av argumentet.

Data er i et argument informasjonen som ligger til grunn for konklusjonen, og må være mulig å akseptere umiddelbart (Jørgensen & Onsberg, 2008, s. 18). Data er altså fakta som støtter opp konklusjonen din og gjør den pålitelig. Dersom konklusjonen er laget på en «ansvarlig» måte, vil den vanligvis ha noe data (Toulmin, 2003, s. 90). «Ansvarlig» innebærer at påstanden ikke kommer ut av intet, eller oppleves «vill» ifølge Toulmin (2003). *Konklusjonen* i et argument er det som skal bestemmes ved hjelp av de andre elementene i argumentasjonsmodellen. Konklusjonen uttrykker avsenderen sine synspunkt, hvor hensikten er å få mottakeren til å akseptere konklusjonen (Jørgensen & Onsberg, 2008, s. 18). Det kan være en påstand eller et svar på et spørsmål (Nordin & Boistrup, 2018, s. 18). Som vi kan lese i Nordin og Boistrup (2018), så skal konklusjonen være underbygget av både dataen og garantien. *Garantien* er det som forbinder data med konklusjonen. Den skal fungere som en bro eller bindeledd mellom dataen som ligger til grunn og konklusjonen som er produsert (Toulmin, 2003; Nordin & Boistrup, 2018). Garantien gjør at en mottaker kan akseptere konklusjonen som følge av data (Jørgensen & Onsberg, 2008, s. 18). Garantien kan ofte være implisitt (Jørgensen & Onsberg, 2008, s. 18).

Toulmin sin argumentasjonsmodell gir en god metode for å skille ut elementer av et argument, men den er ikke spesifikt tilpasset matematiske argumenter (selv om man kan identifisere hvert element fra grunnmodellen også i slike argument). Nordin og Boistrup (2018) benytter seg av en redusert utgave av Toulmins diagram for argumentasjon, som er basert på Krummheuer (1995). Det som skiller Nordin og Boistrup og Toulmin, er hvordan førstnevnte er tilpasset matematiske argument. Deres utgave likner på den Jørgensen og Onsberg (2008) beskriver som «grunnmodell», altså bestående av minst tre deler: data, konklusjon og garanti. Denne avgrensede modellen, som ifølge dem ikke er god nok til å brukes av matematikere, er sett på som tilstrekkelig å bruke på skolenivå (Nordin & Boistrup, 2018, s. 16). Nordin og Boistrup (2018) bruker en steg for steg-fremgangsmåte når de skal analysere argumenter. Der starter de først med å lete etter matematiske konklusjoner, før de ser etter hvilke data disse matematiske konklusjonene er bygd på. Når de hadde funnet både en konklusjon og data som støttet denne, begynte de å se etter garantien som skulle legitimere at denne dataen støttet konklusjonen. Vi har valgt å ta i bruk denne metoden når vi skal analysere andretrinnselevers argumentasjoner i kombinatorikkoppgaver. Vi bruker altså Toulmins (2003) diagram, og benytter oss av Nordin og Boistrups (2018) steg for steg-metode for å identifisere de ulike delene. Dette vil vi komme tilbake til i metodedelen hvor vi diskuterer analyseprosessen.

3.0 Metodekapittel

Metodekapittelet er den delen av forskningsarbeidet hvor vi forsøker å synliggjøre hvordan forskningen er blitt gjennomført. Vi begynner med å gjøre rede for vårt forskningsdesign ved en kvalitativ tilnærming, og beskriver vårt valg av metode ved et oppgavebasert intervju. Videre kommer vi til å forklare hvordan vi har innhentet data ved bruk av videoopptak, og hvordan vi har analysert funnene våre. Vi redegjør også for de etiske betraktningene gjort i forkant av datainnsamlingen, samt våre refleksjoner over studiens troverdighet.

3.1 Forskningsdesign

Et forskningsdesign skal ifølge Clark et al. (2021, s. 39) gi et rammeverk for innsamling og analyse av data, og vi har valgt vårt forskningsdesign med tanke på at det skal reflektere problemstillingen vår. Postholm og Jacobsen (2018, s. 61) skriver at det er grunnleggende i empirisk forskning at man skal velge det forskningsdesignet som passer best for å belyse problemstillingen. Vårt forskningsdesign baserer seg på en kvalitativ metode. Sandelowski (2004, s. 893) definerer kvalitativ forskning ved å presisere hvordan det innebærer forskningsmetoder som leder til innsikt i hvordan mennesker opplever, forstår og tolker den sosiale verden. På grunn av at vi er interesserte i å forske på elever som individer, og er interessert i tankene deres knyttet til et spesifikt tema (kombinatorikk og argumentasjon), vil en kvalitativ metode være hensiktsmessig. Clark et al. (2021, s. 350) skriver at en kvalitativ forskningsstrategi er en strategi som legger vekt på bilder, ord og objekter (fremfor kvantifiserbare verdier). Gjennom denne metoden vil man få en dypere forståelse for spesielle tema gjennom å involvere steder og sosiale aktører (Clark et al., 2021, s. 350). Dette kommer frem gjennom vår master ved at vi fokuserer på hva elevene sier, gjør og tegner når de løser oppgavene. Gjennom studien vi har gjort har vi hatt fokus på hvordan elevene i den spesifikke 2. klassen på denne dagen løser oppgavene og argumenterer for sine løsninger. Det vil si at studien vår begrenses til å kunne si noe om akkurat disse elevene, og hvordan de samsvarer med det teori og tidligere forskning sier om temaet fra før. Selv om oppgaven er begrenset, har den sin nytteverdi. Man kan for eksempel bruke forskningen for å sammenlikne funnene med andre elever andre steder i Norge, eller andre deler av verden, og se om resultatene samstemmer. Denne studien kan ikke brukes for å si noe generelt om alle 2. trinns elever i hele Norge, men forskningen gir innsikt til hvordan elever på 2. trinn *kan* løse oppgaver innen kombinatorikk og vise måten de argumenterer på. Dermed gir denne forskningen også et grunnlag for lærere å tilpasse omtrentlig hvilken vanskelighetsgrad en oppgave i kombinatorikk kan ha på dette alderstrinnet.

Vi har en abduktiv forskningsstrategi. Postholm og Jacobsen (2018, s. 103) beskriver at en abduktiv tilnærming handler om at man ser på forskningen som en pågående prosess der empiri og teori henger kontinuerlig sammen, og hvor man veksler mellom dem. Der kan funn lede til at man finner nye utfordringer, hvor nye utfordringer leder til nye spørsmål som må svares på (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 103). Gjennom vår datainnsamling gikk vi inn med en problemstilling som vi ønsket å finne svaret på, noe som ble grunnlag for lesing av teori i forkant av utprøvingen. Gjennom datainnsamlingen kom det frem nye aspekter som ble grunnlag for å hente inn ny teori. Denne vekslingen og pragmatiske tilnærmingen til forskningen gjør at vi har en abduktiv tilnærming. Postholm og Jacobsen (2018, s. 103) beskriver videre at man gjennom den abduktive tilnærmingen burde diskutere hvor åpen eller lukket datainnsamlingen er. Dette handler om hvilke begrensninger forskeren legger på datainnsamlingsprosessen, og hvor sterke føringer man legger for informasjonen som skal samles inn (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 103). Ved intervju som metode omhandler dette hvor strukturert intervjuet er lagt opp, noe vi kommer nærmere inn på i kapittel 3.2.

3.2 Oppgavebasert intervju som metode

For å kunne undersøke elevers strategier og argumentasjon i arbeid med kombinatorikkoppgaver, benytter vi metoden Goldin (1997) omtaler som et oppgavebasert intervju. Før vi går nærmere inn på prinsippene ved denne metoden, vil vi først beskrive intervju som metode generelt og intervjuets struktur.

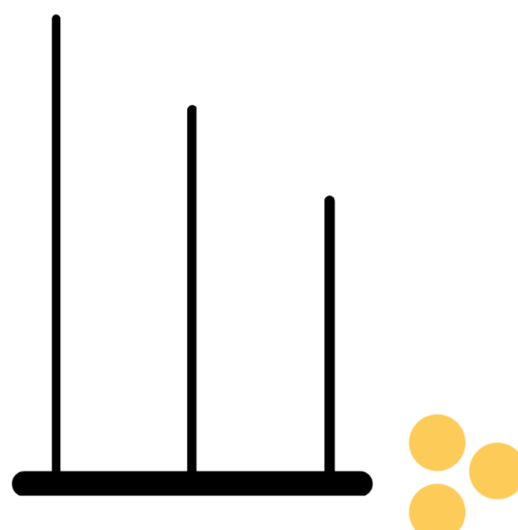
Intervju er en metode som inkluderer et bredt spekter av ulike innfallsvinkler som innebærer at forskeren samtaler med deltakeren (Clark et al., 2021, s. 425). Det er derimot ikke en hvilken som helst samtale som kan kalles et intervju. I et forskningsintervju vil intensjonen være å skape kunnskap om et spesielt tema, i vårt tilfelle kombinatorikk og argumentasjon, og forskeren vil lede intervjuet i retning av temaet og problemstillingen (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 117). Intervjuet vil dermed være mer knyttet til det bestemte temaet samtalen omhandler enn en dagligdags samtale. Man skiller mellom ulike typer intervju, hvor forskjellen baserer seg på hvor strukturert intervjuet er (Clark et al., 2021). Et intervju kan være strukturert, semi-strukturert eller ustrukturert (Clark et al., 2021). Dette vil også ifølge Postholm og Jacobsen (2018, s. 103) si noe om hvor åpen eller lukket datainnsamlingen er. Ustrukturerte intervju er åpne og svært fleksible, mens strukturerte og semi-strukturerte intervju er mer lukket og har sterkere føringer for hvordan intervjuet skal gjennomføres (Clark et al., 2021, s. 428; Postholm & Jacobsen, 2018, s. 103). I semi-strukturerte intervju, som befinner seg et sted mellom åpen og lukket tilnærming til datainnsamling, bruker man vanligvis en intervjuguide. En intervjuguide er vanligvis en liste med tema eller spørsmål intervjueren ønsker å ha vært gjennom i løpet av intervjuet, men det er mye fleksibilitet med tanken på hvordan intervjuet kan gjennomføres (Clark et al., 2021, s. 428). I et semi-strukturert intervju trenger man ikke spørre spørsmålene akkurat slikt de ble formulert i intervjuguiden, og man kan også gå helt bort fra guiden ved å spørre spørsmål som er tilpasset enkeltsituasjoner som oppstår i intervjuet (gjerne påvirket av intervjuobjektet) (Clark et al., 2021, s. 426). I et semi-strukturert intervju burde man legge opp spørsmålene i en rekkefølge som gir mening og skaper flyt, men i utprøvingene må forskeren være forberedt på å stille spørsmålene i varierende rekkefølge (Clark et al., 2021, s. 429). Spørsmålene skal gjerne ikke være for spesifikke i utgangspunktet, og legge opp for refleksjon hos intervjuobjektet. Det er også viktig at spørsmålene ikke er ledende (Clark et al., 2021, s. 429).

Vi hadde et semi-strukturert intervju i utprøvingen vår, som tok utgangspunkt i en intervjuguide. Intervjuguiden, som vi kommer tilbake til senere i kapittelet, inneholdte blant annet oppgaveformuleringene, i tillegg til spørsmål som kunne fremme refleksjoner hos eleven og rettferdiggjørelser av elevsvar. Oppgaveformuleringene ble opprettholdt gjennom alle utprøvingene, mens formuleringen av oppfølgingsspørsmålene kunne variere mer fra gruppe til gruppe (avhengig av hvordan elevene forholdte seg til oppgaven). Vi kunne også stille spørsmål utenom de i intervjuguiden, dersom situasjonen la opp til dette. Intervjuet var på den måten svært fleksibel, selv om vi hadde et spesifikt mål for samtalen. Selv om et semi-strukturert intervju er fleksibelt på denne måten, burde intervjueren prøve å holde seg til intervjuguiden og formulere spørsmålene på omtrentlig samme måte (Clark et al., 2021, s. 428). Det bidrar til å skape sammenheng mellom intervjuene, og er en fordel for analysedelen av oppgaven hvor sammenlikning av forskjellige elevsvar står sentralt (Clark et al., 2021, s. 428).

Vi vil nå gå gjennom de to oppgavene vi brukte i forskningen, og begrunne valget av disse, før vi kommer tilbake til kriterier for oppgavebaserte intervjuer og hvorfor vi mener vårt intervju er et oppgavebasert intervju.

3.2.1 Oppgave 1 (Kulerammeoppgave)

Den første oppgaven elevene skulle løse gikk ut på at de skulle finne ut hvor mange ulike tall/kombinasjoner de kunne lage på en kuleramme. Kulerammen de hadde tilgjengelig så ut som den illustrert i figur 2. Den besto av tre staver som kan representere et posisjonssystem, som de kunne plassere kuler på. Stavene var plassert i stigende høyde, hvor den laveste representerte enerplassen og den midterste representerte tierplassen. Den lengste staven inkluderte vi ikke i oppgaven. Elevene begynte med tre kuler, og kunne også prøve med fire og videre fem kuler dersom de ble ferdige. Et eksempel på et tall elevene kunne lage med tre kuler er 21, ved å plassere en kule på enerplassen og to kuler på tierplassen. Oppgaveteksten var som følgende:



Figur 2: Illustrasjon av kulerammen

«Hvor mange tall kan dere lage med disse kulene, dersom dere får lov til å sette dem på tierplassen og enerplassen»

Elevene fikk kulerammen, antall kuler de skulle bruke, og ark og blyanter med ulike farger tilgjengelig når de skulle jobbe med oppgaven. Vi visste at elevene hadde jobbet med slike kulerammer tidligere når de jobbet med posisjonssystemet, men vi valgte likevel å starte samtalen med å høre om alle elevene forsto hva enerplassen og tierplassen betydde, og hvordan dette kan representeres på kulerammen. Her støtter vi oss på Klaveness (2010, s. 28-29) som påpeker at kunnskap om hvordan konkretene kan brukes er en forutsetning for at elevene skal kunne bruke dem på en hensiktsmessig måte.

Når vi tenkte at elevene hadde jobbet nok med tre kuler, og vi hadde fått stilt spørsmålene vi ønsket, så økte vi med en kule. Etter hvert som elevene fikk flere kuler å jobbe med ble det mer utfordrende å bevise hvorfor det ikke var flere kombinasjoner. På denne måten fikk vi frem nye typer argumentasjonsformer og strategier hos elevene. Når oppgavene ble mer utfordrende, ble behovet for å organisere kulene og sortere tallene mer tydelig. Derfor valgte vi å teste ut med flere kuler enn vi først hadde tenkt. Dette så vi allerede hos den første gruppen vi hadde (som vi ikke filmet). På denne måten ble opplegget vårt endret litt underveis i datainnsamlingsprosessen.

Oppgaven 1 er inspirert av en oppgave funnet på matematikksenteret sine sider, som er utviklet av NRICH. I denne oppgaven er det en kuleramme med to staver, en tierplass og en enerplass. Oppgavene er som følger: «Hvis du setter tre perler på ei tier/ener-kuleramme kan du lage tallene 3, 30, 12 eller 21. Undersøk hvilke tall du kan lage dersom du har seks perler» (Matematikksenteret, 2021). Det er to oppfølgingsspørsmål: «Kan du finne alle mulighetene du kan bruke seks perler på?» og «Hvordan vet du at du har funnet alle mulighetene?» (Matematikksenteret, 2021). Vi valgte å bruke en svært liknende oppgave fordi elevene på 2. trinn, som nevnt, skal ha jobbet med posisjonssystemet og denne kulerammen tidligere. Ved å begynne med et fåtall antall kuler, begrenser vi også størrelsen på utfallsrommet til oppgaven, noe som gjør oppgaven mer tilgjengelig for yngre elever (Stylianides, 2016). Matematikksenteret skriver at oppgaven er fin til å jobbe med for både læring av posisjonssystemet og tallkunnskaper, i tillegg til at den gir gode muligheter for å jobbe med problemløsing, resonering og argumentasjon (Matematikksenteret, 2021). Oppgaven kan også kategoriseres som en kombinatorikkoppgave, siden den etterspør å finne alle mulige kombinasjoner av kuler på de forskjellige stavene. Dette er grunnen til at vi i samråd med veiledere mener denne oppgaven ville passe godt til å undersøke hvordan elever argumenterer og resonnerer over sine strategier og løsninger.

3.2.2 Oppgave 2 (Antrekkoppgave)

Denne oppgaven ble gjennomført to måneder etter den første datainnsamlingen. Gjennom analyse av den første innhentingen av data, oppdaget vi at vi hadde bruk for å utfylle datamaterialet vårt. Vi innså i analysering av datamaterialet hvordan oppgave 1 ikke la opp til at elevene kunne bruke strategier i odometerfasen. Det er fordi vi forholdte oss til kun to plasseringer for kulene, og det var ikke mulighet å holde en enhet konstant for å teste alle kombinasjoner med den. Vi bestemte oss derfor for å dra tilbake til den samme skolen for å se på hvordan elevene løste enda en oppgave i kombinatorikk. Vi utførte opplegget i den samme klassen, og elevene ble delt inn i de samme gruppene som ble brukt til oppgave 1.

Antrekkoppgaven gikk ut på at elevene fikk bilder av tre gensere og to bukser, som var laminerte og klippet ut. De fikk i oppgave å finne ut hvor mange antrekk de kunne lage med disse plaggene. Bildene kunne de benytte ved å bevege og arrangere de i forskjellige kombinasjoner. I tillegg ga vi ut ark og blyanter med ulike farger som de alternativt kunne bruke dersom de ønsket det.

Figur 3: Plagg brukt i antrekkoppgaven

Oppgaveteksten var som følgende:

«Else har tre gensere og to bukser med seg i kofferten. Hvor mange ulike antrekk kan hun lage med disse plaggene, dersom et antrekk skal bestå av en genser og en bukse»

Denne oppgaven er basert på en oppgave hentet fra Stylianides (2016), men vi finner den også i Maher (2011) sin forskning på kombinatorikk på 2.-3.trinn. Stylianides (2016) brukte denne oppgaven på 4. trinn, hvor de skulle kle ut en professor med ulike kjoler og hatter: «*Antrekk problem*: Hvor mange forskjellige måter finnes det å kle professor McGonagall? Hun har 3 forskjellige kjoler og to forskjellige hatter.» (Stylianides, 2016, s. 97. Direkte oversatt). Han påpeker at det var underforstått at elevene ikke bare skulle finne antallet forskjellige måter å kombinere enhetene på, men de måtte også bevise svaret sitt.

Stylianides (2016) kategoriserer oppgave 2 innenfor bevisoppgaver med endelig antall caser. Vi vil også plassere den første oppgaven innenfor denne kategorien. Avhengig av hvor mange kuler elevene fikk i oppgave 1, eller hvor mange klesplagg elevene fikk i oppgave 2, vil vi få et endelig antall caser i begge oppgavene. I diskusjonsdelen kommer vi til å gjøre rede for om disse oppgavene kan klassifiseres som problemløsningsoppgaver for elevene vi studerte, ved å reflektere over om elevene viste utfordringer med å finne løsninger.

3.2.3 Prinsipper for et oppgavebasert intervju

Forskningsmetoden vår baserer seg på et oppgavebasert intervju, med utgangpunkt i kuleramme- og antrekksoppgaven. Oppgavebaserte intervjuer er hensiktsmessige i kvalitativ forskning, hvor man ønsker å observere problemløsing i matematikk (Goldin, 1997). Goldin (1997, s. 61-62) beskriver fem prinsipper som burde inngå i konstruksjonen av et oppgavebasert intervju: Tilgjengelighet, rik representasjonsstruktur, fri problemløsning, eksplisitte kriterier og interaksjon med læringsmiljøet. Vi vil nå gjennomgå disse prinsippene, og redegjøre underveis hvorfor vi mener vår datainnsamling er basert på oppgavebaserte intervju.

1. Tilgjengelighet

Det første prinsippet handler om at oppgaven som gjennomføres skal være tilpasset og tilgjengelig for elevene som skal løse den (Goldin 1997, s. 61). Oppgaven må altså være tilpasset elevenes alder og nivå, slik at det skal være mulig å løse den. Den første oppgaven vi valgte (kulerammeoppgaven) var tilpasset elevene ved at vi visste at de hadde jobbet med posisjonssystemet ved bruk av en liknende kuleramme tidligere. Den andre oppgaven (antrekkoppgaven) var også svært tilgjengelig for dem, ved at den var så virkelighetsnær. Alle har erfaring med å sette sammen et antrekk. Felles for begge oppgavene er hvordan vi la opp til få mulige kombinasjoner. Ved å gi de tilgang på bare tre gensere og to bukser, og 3-5 kuler, begrenset vi antallet mulige kombinasjoner som er mulig å lage. Stylianides (2016, s. 96) forklarer at et lite utfallsrom gjør oppgavene mer tilgjengelige på barneskolen. Begge oppgavene ga mulighet for å arbeide med konkreter, noe som bidro til å gjøre oppgaven tilgjengelig for alle elevene.

2. Rik representasjonsstruktur

Dette prinsippet beskriver hvordan oppgaven burde inneholde konsepter og begreper som kan representeres billedlig, symbolsk, og ved matematisk notasjon, og muligheten til å se disse i sammenheng (Goldin, 1997, s. 61). Oppgavene burde legge opp til tenking og planlegging, og åpne for komplekse strategier. Elevene burde også få muligheten til å reflektere over egne løsninger (Goldin, 1997, s. 61). Begge oppgavene innebærer konsepter som kan representeres på ulike måter, hvor representasjon i form av konkreter var mest sentral i vår oppgave (kulerammen og de laminerte antrekkene). Elevene fikk også tilgang på andre hjelpemidler, som ark og fargeblyanter, slik at de kunne løse oppgaven på andre måter. I analysen (kapittel 4) kommer vi til å se på episoder hvor elevene bruker varierende typer representasjoner, som å representere antrekkoppgaven symbolsk eller ved tegning. Siden begge oppgavene kan kategoriseres som problemløsningsoppgaver, vil de legge opp til tenking. Begge oppgavene åpner også for komplekse strategier, særlig oppgave 2 som legger til rette for en odometerstrategi. Vi har spesifikt hatt fokus på å la elevene reflektere over egne løsninger, hvor oppfølgingsspørsmålene i intervjuguiden står sentralt for å oppnå dette.

3. Fri problemløsning

Det tredje prinsippet handler om å la elevene jobbe fritt med oppgaven, for å fasilitere for spontane handlinger og individuelle valg av elevene (Golding, 1997, s. 61). De skal kunne løse oppgaven slik de mener passer best, uten påvirkning eller veiledning fra en lærer. Vi startet oppgavene med å forklare hva vi ønsket de skulle finne ut av, for så å la de begynne å løse oppgaven uten at vi innblandet oss. Da de begynte å komme med løsninger, stilte vi de spørsmål angående hvordan de hadde tenkt. Dette la opp til at elevene kunne finne sine egne måter å løse oppgaven på, noe som resulterte i mange ulike strategier. I etterkant ser vi hvordan tilgangen på representasjoner (i form av konkreter) kan ha gitt oppgaven litt mer føringer enn det vi ønsket. Det var flere hjelpemidler tilgjengelig, og elevene kunne fritt ha valgt disse til å utføre oppgaven, men alle begynte rett på konkretene. Dette kan ha gjort oppgaven mindre «fri», men vi oppfatter fortsatt oppgaven som å inneholde fri problemløsning.

4. Eksplisitte kriterier

Det fjerde prinsippet handler om at uforutsette handlinger skal være adressert i intervjudesignet, noe som vil være viktig for studiens replikerbarhet og overførbarhet (Goldin, 1997, s. 62). Det innebærer å være forberedt på forskjellige elevsvar, både korrekte og feile. Vi hadde på forhånd laget en «intervjuguide» (se kapittel 3.2.4 og vedlegg 1). Denne forklarer blant annet hvordan vi skulle introdusere oppgavene for elevene, slik at de ble presentert på samme måte til alle gruppene. Den beskrev også hvilke spørsmål vi kunne stille underveis, slik at vi kunne fremheve argumentasjon (uten å veilede elevene til svaret). Disse spørsmålene måtte vi vurdere når vi ønsket å stille, fordi vi måtte se når de passet inn med elevenes oppgaveløsning. I intervjuguiden har vi også beskrevet ulike elevsvar som vi forventet ville komme opp i utprøvingen for å forberede oss på disse.

5. Interaksjon med læringsmiljøet

Det siste prinsippet handler om elevenes tilgang på eksterne representasjoner og hvordan det blir lagt til rette for elevenes interaksjon med læringsmiljøet (Goldin, 1997, s. 62). Dette punktet fulgte vi ved å legge frem ulike hjelpemidler/representasjoner for oppgaveløsningen, som tilgang til konkreter, ark og fargeblyanter. En kort introduksjon/oppfriskning av hvordan konkretene kunne brukes ble gitt før oppgaven startet. Denne tilgangen på konkreter gjør problemløsningen «observerbar» ved at de håndterer fysiske objekter, noe som kan gi oss et innblikk i elevenes indre tanker og representasjoner (Goldin, 1997, s. 62). Det ble derimot ikke sagt at de måtte ta i bruk disse konkretene i oppgaveløsningen, noe som åpner for flere løsninger.

Disse fem prinsippene utgjør til sammen det Goldin (1997) beskriver som kriterier som er med på å skape best mulig grunnlag for forskningen gjennom det oppgavebaserte intervjuet. Vi har derfor forsøkt å følge disse prinsippene som Goldin (1997) beskriver. Vi vil videre beskrive intervjuguiden, og begrunne de valgene vi tok i prosessen med å lage denne guiden.

3.2.4 Intervjuguide

For å gjennomføre det oppgavebaserte intervjuet, hadde vi planlagt fremgangen av hva som skulle skje fra elevene kom inn på grupperommet til de dro. Vi laget en intervjuguide som inneholdte oppgaveformuleringene, og mulige elevsvar og oppfølgingsspørsmål. Denne intervjuguiden veilede oss gjennom alle utprøvingene, og holde oss mest mulig konsekvente på tvers av gruppene.

Vi startet intervjuene med å introdusere oss selv, og ba de sette seg på plassene ovenfor oss. De ble igjen informert om videotakningen før selve oppgaven begynte. Deretter introduserte vi den første oppgaven: kulerammen. Intervjuguiden var skrevet ut og lå skjult for elevene, slik at situasjonen skulle føles minst mulig kunstig. På arket stod blant annet oppgaveformuleringen, slik at vi kunne introdusere oppgavene likt for alle gruppene, men også spørsmål vi ønsket å stille på forhånd. I kulerammeoppgaven var det eksempelvis hensiktsmessig å spørre elevene om de husker hvordan man bruker en kuleramme. Vi spurte om de visste forskjellen på tiere og enere, og hvilken stav som tilhørte hver verdi. Vi testet også ut med en kombinasjon (to kuler på tierplassen og en på enerplassen), for å sjekke om de i praksis kunne forstå hva det betydde. Da vi kom tilbake for oppgave 2 (antrekkoppgaven), gjennomførte vi intervjuet på nærmest samme måte. I motsetning til kulerammeoppgaven, var det ikke like mye rammefaktorer å ta hensyn til med tanken på om elevene forsto oppgaven. Det vi derimot forsikret oss om, var at elevene forsto begrepet «antrekk». Vi spurte først hva de trodde ordet betyr, og deretter forklarte at for denne oppgaven betyr et antrekk «en genser og en bukse».

Vi hadde i forkant av datainnsamlingen planlagt hvilke spørsmål vi i løpet av oppgaven ønsket å stille elevene, og hvilke spørsmål vi ønsket å unngå. Vi ville la elevene jobbe mest mulig selvstendig, men samtidig få frem hva de tenkte underveis i jobbingen. Siden hensikten med denne oppgaven er å se hvordan elevene arbeider og argumenterer, er det ikke et mål at elevene skal finne riktig løsning. Vi måtte derfor bestemme oss for spørsmål som ikke veiledet elevene til løsningen, men heller fikk de til å reflektere over valgene sine av strategi. Ifølge Carpenter et al. (2003, s. 96) er det noen spørsmål som kan være nyttige å stille for å få frem elevers argumentasjon: «Er det alltid sant?», «hvordan vet du at det er sant for alle tall?» eller «ok, så vi vet at det funker for mange tall, men hvordan vet vi at det ikke er et tall, kanskje et veldig, veldig stort tall, som det ikke vil fungere for?» (Carpenter et al., 2003, s. 96. Direkte oversatt). Vi har valgt å ta utgangspunkt i disse spørsmålene og få dem til å passe med oppgaver i kombinatorikk med et endelig antall løsninger, men hvor generalisering ikke er like sentralt. Vi valgte å stille spørsmål som: «hvordan vet du at du har funnet alle?», «kan du være sikker på at det ikke er en du har glemt?», og «hva tenkte du her?». Intervjuguiden vår besto altså av introduksjon og forklaring av oppgaven, i tillegg til spørsmålene vi på forhånd hadde laget, slik at vi kunne stille disse spørsmålene der de måtte passe med elevenes arbeid. Vi la frem ark som elevene kunne bruke for å både holde orden på oppgavene og tegne på om det var noe de syntes var hensiktsmessig å vise med tegning. Vi valgte å ikke gi noen føringer for arkene vi brukte som konkreter i oppgaven. Noen av gruppene valgte selv å ta i bruk arkene, og alle gruppene valgte å bruke kulerammen for å jobbe med oppgave 1, og de laminerte bildene av klesplagg for å jobbe med oppgave 2.

3.3 Datainnsamlingsprosess og videoopptak

Dataen vi har innhentet er samlet inn i en 2. klasse på en norsk skole. Skolen ligger i distriktet og kan betraktes som en liten skole. Vi fikk tilgang på denne skolen gjennom bekjente, noe som vil si at vi har kjennskap til skolen og mange av de som jobber der fra før. 2. klassen på skolen var derimot ikke kjent for noen av oss, da det var over to år siden vi hadde vært der. I tillegg var kontaktlæreren ukjent for oss, da hun bare hadde jobbet der i ett år. Både elevene og kontaktlæreren var altså ukjente for oss da vi kom til skolen den dagen vi skulle utføre den første datainnsamlingen vår.

Før vi dro til skolen var vi i kontakt med kontaktlæreren for å få oppklart noen spørsmål. Vi fikk vite hvor mange elever det er i klassen. Vi spurte også om det var et grupperom i nærheten av klasserommet tilgjengelig for oss. Noe det var. Vi forsikret oss også om at elevene hadde arbeidet med kulerammen i oppgave 1, slik at vårt møte med dem ikke ble deres første møte med kulerammen. Før vi kunne gjennomføre datainnsamlingen måtte vi også sende et samtykkeskjema til læreren, som hun videre gav til alle foresatte. Den måtte bli signert i forkant for at vi skulle kunne ta video av elevene. I klassen var det 18 elever, og de ble på forhånd delt inn i grupper på tre av kontaktlæreren. Siden tre elever ikke sendte inn signert samtykkeskjema, var det 15 av de 18 elevene som deltok. Dette vil si at datamaterialet vårt er basert på fem grupper med tre elever på hver gruppe, hvor hver gruppe var med på begge rundene med oppgavebasert intervju. Læreren prøve å fordele elevene slik at det var mest mulig jevnt med tanken på prestasjon i matematikk og muntlig aktivitet. Hun passet også på at alle elevene som ikke hadde gitt samtykke til filming var i samme gruppe, slik at vi enkelt kunne unngå å filme dem. Denne gruppa ble da brukt som en «pilotundersøkelse», hvor vi fikk testet ut, og diskutert hvordan det hadde fungert før elevene vi skulle filme fikk begynne. På denne måten fikk vi en indikator på om oppgaven var omtrentlig passende vanskelighetsgrad og forståelig forklart, og fikk innsikt i om vi burde gjøre noen små endringer før den virkelige datainnsamlingen startet.

Vi valgte å bruke videoopptak da vi samlet inn vårt datamateriale. Dette kan ifølge Fangen (2010, s. 183) være en fordel fordi du får muligheten til å studere handlingsforløpet flere ganger, også i etterkant av datainnsamlingen. På denne måten kan man lettere studere små detaljer, og hendelser man har oversett eller glemt kan komme tydeligere frem. Fangen (2010, s. 183) påpeker også at man må være bevisst flere ting når man velger å bruke videoopptak for å samle inn data. Filming kan i stor grad påvirke deltakerne i datainnsamlingen, og den naturlige settingen vil kunne være vanskeligere å studere. Samtidig skriver Fangen (2010, s. 183) at barn og unge ikke lar seg påvirke av filming i like stor grad som voksne. Elevene i vår datainnsamling var klare over videokameraet, og vi startet samtalen med å informere om at vi skrur på kamera, og at vi blir filmet. Videokameraet var plassert et par meter fra der elevene satt, men det var svært lite oppmerksomhet rundt kameraets tilstedeværelse under problemløsningen.

3.4 Forskningens troverdighet

I dette delkapittelet vil vi gå inn på hvordan våre valg som forskere kan ha påvirket studien vår, og hva vi har gjort for å sikre pålitelighet og gyldighet i studien. Postholm og Jacobsen (2018 s. 219-220) skriver at kvaliteten på forskningen blant annet handler om at forskeren på en kritisk måte må være i stand til å beskrive hvordan kunnskapen i forskningen er skapt. Postholm og Jacobsen (2018) beskriver ulike faktorer som er med på å påvirke forskningens troverdighet: pålitelighet, gyldighet og overførbarhet.

Det første begrepet vi ønsker å trekke frem for å beskrive vår forsknings troverdighet er pålitelighet. Pålitelighet, også omtalt som «reliabilitet», handler om at forskningen som gjennomføres skal være konsistent, og at det er mulig for andre forskere å reprodusere det resultatet som forskningen har fått (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 223). Vår forskning er knyttet til to oppgavebaserte intervju i en spesifikk klasse, og det er ikke sikkert disse intervjuene hadde utspilt seg på samme måte dersom det hadde blitt gjennomført i en annen klasse, av andre forskere eller en annen dag. Det kan altså bli vanskelig å kunne reprodusere det samme resultatet som vi har fått. Postholm og Jacobsen (2018, s. 223-224) støtter dette når de sier at en kvalitativ studie kan være vanskelig å replikere på grunn av at møtet mellom forskeren, forskerfeltet og deltakerne kan utspille seg på ulike måter. Postholm og Jacobsen (2018, s. 224) knytter i stedet pålitelighet til hvordan vi som forskere reflekterer over hvordan vi påvirker studien og resultatet, og hvordan vi synliggjør forskningsprosessen på en slik måte at andre også kan reflektere over denne påvirkningen. Dette omhandler studiens transparens, hvor vi prøver å gi innsyn i alle deler av studien (Tjora, 2021). Dette innebærer redegjørelse for hvorfor studien er gjennomført, metoden for gjennomføringen, valg tatt underveis (som valg av deltakere), analyseprosessen for datamaterialet og opplyse om problemer som oppsto underveis (Tjora, 2021, s. 264). Tjora (2021, s. 260) beskriver transparens som et middel til pålitelighet. Gjennom hele metoden forsøker vi å gi et mest mulig korrekt bilde av hvordan vår studie ble gjennomført, både det som fungerte og problemene som oppstod, for å opprettholde studiens pålitelighet (og derved troverdighet).

I dette avsnittet ønsker vi å beskrive våre refleksjoner over valg vi har gjort underveis i studien, med fokus på tiltak for å unngå subjektivitet, og hvordan det kan ha påvirket forskningen. Subjektivitet kan være et problem i datainnsamlingen, ved at det er begrenset hvor mye en person kan observere om gangen. Fangen (2010, s. 183) beskriver at man gjennom å bruke videoopptak kan begrense denne subjektiviteten. Videoopptak har gitt oss mulighet til å se tilbake på datainnsamlingen, og observere det som skjedde flere ganger. Det ga oss mulighet til å se om det vi observerte første gang faktisk var det som skjedde, og gjorde at vi kunne inkludere flere detaljer fra observasjonen inn i transkripsjonen. Ved videoopptak kunne vi også gjennomgå alle opptakene sammen, og reflektere og diskutere hva som skjedde i forskjellige episoder. Det at vi er to forskere som samarbeider om denne studien, mener vi også har begrenset subjektiviteten. Ved at begge gjennomgikk datamaterialet, blir ikke observasjonene basert på hva kun en person har sett og hørt. Hva man vektlegger som interessant i filmene, og hvordan vi tolker det elevene gjør, vil være avhengig av vår subjektivitet. Vi kommer til forskningsfeltet med våre egne erfaringer og interesser, noe som vil være med på å påvirke hva som blir gjort i forskningen og hva som blir analysert. Igjen vil det være en fordel å være to forskere, hvor vi må bli enig om hva som er interessante funn i datainnsamlingen. For å begrense vår subjektivitet har vi først transkribert nøye det som ble sagt og gjort i videoene, noe vi vil beskrive mer i analyseprosessen. Dette gjør at rommet for at vi tolker noe på feil måte blir mindre. Vi ønsker også å fremheve vårt valg om å samle inn ny data for å tilføye mer relevant innhold til datamaterialet, noe som påvirket studien betydelig. Dette valget påvirket studien ved at vi fikk mulighet til å observere og analysere strategier og argumenter tilknyttet en oppgave hvor alle English (1991) nivåer for kombinatorikkstrategier kunne oppstå. Uten denne informasjonen ville datamaterialet blitt begrenset til å vise kun de fire først kategoriene, og vi ville ikke visst om elever på 2. trinn kan bruke strategier i odometer fasen.

Et annet begrep som Postholm og Jacobsen (2018) beskriver når de omtaler studiens troverdighet er gyldighet. De deler gyldighet inn i to deler: indre og ytre gyldighet. Indre gyldighet handler ifølge Postholm og Jacobsen (2018, s. 229) om forholdet mellom virkeligheten og det vi studerer. Før vi samlet inn data ble det brukt mye tid på å undersøke hvordan vi på best mulig måte kunne finne ut det vi lurer på. Postholm og Jacobsen (2018, s. 229) skriver at dette er viktig for å kunne knytte virkeligheten til den studien og analysen vi har gjort. Etter den første datainnsamlingen og analyse av den, så vi behovet for å hente mer data, da den første dataen ikke ble nok for å svare på spørsmålet vårt på en tilfredsstillende måte. Det er viktig at vi er sikre på at vi faktisk undersøker det vi lurer på, slik at spørsmålene og dataen henger sammen. Dette gjorde vi altså ved å se på om det var sammenheng mellom teori, datainnsamling og det vi ønsket å undersøke. Ytre gyldighet, eller overførbarhet som Postholm og Jacobsen (2018, s. 238) også omtaler det, handler om i hvilken grad funnene våre kan overføres til andre kontekster. De skriver at i skolesammenheng kan dette handle om at man forsker på noe på en skole, og så er spørsmålet om dette kan overføres til en annen skole. Vi tenker at vår forskning kan se på denne studiens deltagere sine strategier og argumentasjoner, men som nevnt tidligere kan det bli andre resultater med andre elever. Elever på andre skoler vil ikke nødvendigvis gi de samme resultatene på grunn av at elevene er forskjellige. I Norge har vi en læreplan, som sier noe om hva elever skal ha jobbet med i de ulike klassene. Dette betyr at elevene i Norge skal ha jobbet med de samme temaene, selv om lærere har stor frihet til å legge opp undervisningen slik de mener det passer best for sine elever. Dette betyr at vi kan forvente at elevene i Norge er på noenlunde samme sted, men at de kan ha jobbet på ulike måter og derfor forstå oppgaver og representasjoner forskjellig. Som sagt tidligere er ikke kombinatorikk i seg selv en del av læreplanen i Norge, noe vi tenker kan være med på å skape et sprik mellom elever i Norge innen dette temaet.

3.5 Etiske betraktninger

Sosial forskning er ifølge Clark et al. (2021, s. 4) viktig for å kunne skape ny forståelse av det moderne sosiale liv. Dette medfører forskning på det sosiale livet og mennesker. Når man skal forske på mennesker er det mange etiske hensyn som må tas, noe vi har vurdert gjennom hele vår forskning. Vår studie er også rettet mot barn, noe som gir noen ekstra betraktninger som vi vil komme inn på. Postholm og Jacobsen (2018, s. 247) skriver om tre grunnleggende krav som sosial forskning skal ta hensyn til. Disse tre kravene handler om forholdet mellom den som utfører forskningen, og de som blir forsket på. Kravene handler om informert samtykke, krav til privatliv og krav om å bli gjengitt korrekt (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 247). Disse tre kravene har vi tatt hensyn til i vår forskning, og vi vil videre i dette kapittelet beskrive hvordan vi har gjort det.

Vi vil i dette avsnittet beskrive hva vi har gjort for å bevare det første kravet Postholm og Jacobsen (2018) beskriver om informert samtykke. For å få lov til å bruke elevene som våre forskningsdeltakere, måtte vi først søke om godkjenning gjennom NSD. Der beskrev vi forskningen, hvem som skulle delta, hvordan vi skulle ta vare på personvern og hvordan vi skulle hente inn godkjennelse fra deltakerne. Siden vi skulle forske på barn, måtte vi også hente inn godkjennelse fra deres foresatte. Vi har ved hjelp av NSDs mal utformet et samtykkeskjema (se vedlegg 2), som foreldrene til elevene som skulle delta kunne velge å skrive under på. Foreldre som ikke ønsket at barnet deres skulle bli filmet, og dermed ikke være en del av forskningsprosjektet, skrev ikke under samtykkeskjemaet. Dette er noe vi som forskere på barn burde tenke på. Har elevene egentlig godkjent å være med på forskningen, eller har de foresatte tatt valget for dem? Et av kravene til forskningen er som sagt «informert samtykke», og dette handler om at den man forsker på skal delta frivillig og være klar over hva forskningen kan bety for dem (Postholm og Jacobsen, 2018, s. 247). I tillegg til at vi fikk godkjennelse fra de foresatte til de elevene som ble med på forskningen, var det også viktig for oss at elevene mente det var greit før vi slo på videokamera. Det kan være skremmende for elever å møte fremmede, og for oss var det viktig at elevene kjente seg trygge og ivaretatt gjennom studien. Derfor hadde kontaktlæreren deres informert elevene godt på forhånd om hva som skulle skje, slik at de fikk mulighet til å snakke med en kjent voksen om opplegget først. Slik kunne også kontaktlæreren forsikre seg om at alle elevene ønsket å delta på studien. Selv om ikke alle elevene hadde et signert samtykkeskjema, fikk alle gjennomføre opplegget. Dette gjorde vi på grunn av at ingen av elevene skulle føle seg utenfor eller annerledes, og for at elevene skal ha samme mulighet for læring. Forskningsdeltakerne og foresatte har også mulighet til å trekke samtykke i etterkant av filmingen. Da vil vi ikke bruke datamaterialet som involverer disse elevene. Det var ingen av elevene i forsøket som ga uttrykk for å ikke ville være med, men vi hadde på forhånd snakket med kontaktlæreren og ble enig om at elever som viste tegn til dette skulle få lov til å gå, og da skulle også den eventuelle videoen slettes. På denne måten tok vi mange forhåndsregler for å skape trygghet for elevene og informert samtykke i forskningen.

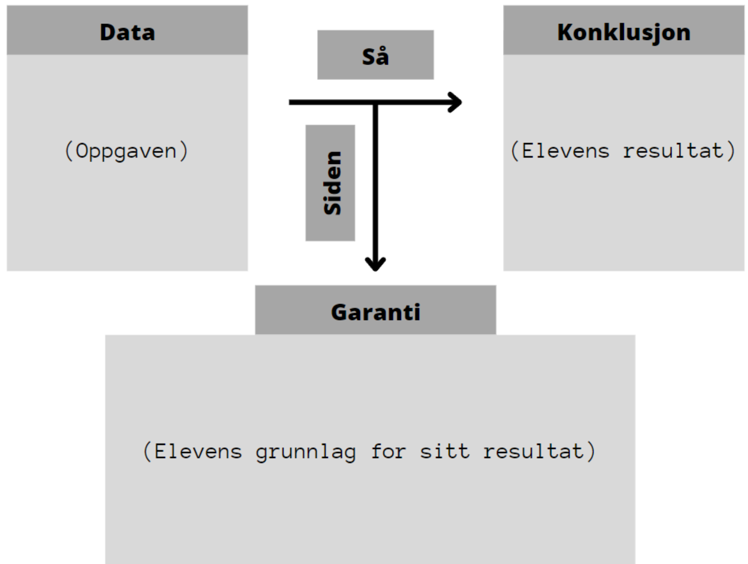
I dette avsnittet vil vi gjøre rede for hvilke hensyn vi har tatt med tanke på deltakernes personvern. I transkripsjonen av videoen trekker vi ikke frem noen gjenkjennende trekk ved elevene, og navnene deres er anonymisert. Et kodeark blir brukt av oss for å kunne gjenkjenne elever fra transkripsjon til video. Dette kodearket har kun vi tilgang på, og vil også slettes i etterkant av innleveringen av denne masteroppgaven. Vi har valgt å «oversette» transkripsjonen vår til bokmål, på denne måten kan ikke elevene kjennes igjen på dialekt eller spesielle ord, i tillegg skaper dette et bedre og enklere språk i teksten. På grunn av personvern og flyt i oppgaven, har vi valgt å anonymisere elever ved å lage pseudonymer til alle som deltok i forskningen. Vi har også valgt å se bort ifra hvilket kjønn elevene har. Det vil si at selv om en elev i analysen og diskusjonen blir omtalt som ei jente, er det ikke sikkert dette egentlig er ei jente. På denne måten gjør vi det vanskeligere å gjenkjenne elevene som har vært med i vår forskning. I tillegg har all skrift eller tegning som elevene lagde blitt kopiert av en av forskerne. På denne måten kan man ikke gjenkjenne eleven på håndskrift eller på hvordan eleven tegner. Dette er betraktninger vi har tatt som er med på å ivareta elevenes personvern, noe som omhandler det andre kravet til forskningsetikk som Postholm og Jacobsen (2018, s. 249) beskriver (kravet til privatliv). Personvern har stått sentralt i opprettholdelse av datamaterialet. Alle videoene er tatt med videokamera utlånt av NTNU, og ble overført og lagret i henhold til NTNU sine retningslinjer for informasjonssikkerhet. Videoen på selve kameraet ble slettet ved tilbakelevering av kameraet, og de lagrede videoene ble slettet ved innleveringen av denne masteroppgaven.

Det siste kravet til forskning som Postholm og Jacobsen (2018, s. 251) beskriver er krav til å bli gjengitt på riktig måte. Dette handler om at den dataen som er samlet inn skal være riktig presentert. Dette har vi tatt hensyn til gjennom hvordan vi har transkribert datamaterialet, blant annet gjennom at vi er to personer som kan kontrollere transkriberingen. Dette er noe vi har diskutert grundig i kapitel 3.4, og vi vil komme mer inn på dette i neste delkapittel.

3.6 Analyseprosessen

I etterkant av datainnsamlingsprosessen startet en ny prosess av å transkribere og analysere datamaterialet. Vi valgte å først se på filmene hver for oss og transkribere dem på egen hånd. På forhånd hadde vi blitt enige om hvordan transkripsjonen skulle utformes, slik at episodene ble beskrevet på omtrentlig samme måte. F.eks. at begge brukte parenteser for å beskrive handlinger. Etter transkriberingen gikk vi sammen for å sammenligne transkripsjonene vi hadde gjort, og så på videoene sammen for å avgjøre om vi var enige i hva vi hadde observert. Gjennom å transkribere virkeligheten over til tekst på et ark vil vi stå i fare for å miste betydningen av det vi har observert. Ifølge Nilssen (2012, s. 46) vil ikke tekstene som blir produsert av forskerne bli helt nøyaktig. Hun skriver at vi gjennom transkribering tolker hva som er det viktige i det vi observerer, og vi vil dermed legge mer vekt på dette i transkripsjonen. Noe annet Nilssen (2012, s. 46) påpeker er at man også vil miste ting man kan observere i videoen, som elevenes mimikk, tonefallet de bruker og kroppsspråket. Selv om man kan transkribere slike observasjoner med tegn og tekst, så vil mye av denne typen observasjoner være vanskelig å få med.

I forskningen vår ønsker vi å se på både elevers strategier i kombinatorikkoppgaver, i tillegg til elevenes argumentasjon basert på disse strategiene. Vi startet da med å se etter sammenhenger og mønstre i datamaterialet (Nilssen, 2012), som vi kunne bruke til å si noe om elevenes strategier og argumentasjon. Vi trengte et rammeverk som kunne hjelpe oss å analysere både strategier og argumentasjon. Vi har analysert dataene først ved å se på elevenes strategier og sammenlignet dem med English (1991, 1996) sine nivåer av strategier for oppgaver i kombinatorikk. Vi har sett på alle casene hvor elevene på en eller annen måte jobber med oppgaven, og plassert elevene i hver sin kategori. Strategiene ble plassert inn i en av kategoriene som går fra A-F, der F er den mest sofistikerte strategien. Deretter har vi satt elevenes tilhørende argumentasjon inn i Toulmins (2003) diagram for å analysere elevenes argumenter. Vi har da delt argumentet inn i data, konklusjon og garanti. Vi har altså forsøkt å identifisere disse tre delene av elevenes argumentasjon. Vi har blitt inspirert av Nordin og Boistrups (2018) metode for å identifisere og analysere de forskjellige delene av argumentet. De bruker som tidligere nevnt en steg for steg-tilnærming. Vi startet med å lage en modell av Toulmins diagram som står tomt. Det første steget er å identifisere en matematisk konklusjon som elevene kommer med. En slik konklusjon kan identifiseres når elevene uttrykker at de har et resultat for oppgaven. Eksempelvis å si at det er fem mulige tallkombinasjoner å lage i oppgave 1, eller fire forskjellige antrekk i oppgave 2. Når vi identifiserer en slik konklusjon, og den er skrevet inn på riktig sted i Toulmins diagram, kan vi lete etter data som elevene har bygget denne konklusjonen på. I vårt tilfelle vil data alltid være oppgaven elevene tar utgangspunkt i. Til slutt ser vi etter om elevene underbygger konklusjonen med en garanti. Dette vil være alle former for rettferdiggjøringer eller forsøk på forklaringer som beskriver hvorfor resultatet (i deres øyne) stemmer.



Figur 4: Tomt Toulmins diagram

4.0 Analyse

I dette kapittelet skal vi beskrive episoder som eksemplifiserer elevenes strategier og resonnering, og analysen blir utført på bakgrunn av hvordan dette demonstreres. Vi har valgt ut episoder fra datamaterialet som vi mener viser hovedfunnene i studien. Vi begynner med å beskrive situasjonen, for så å kategorisere strategiene basert på English (1991, 1996) sitt rammeverk. Deretter setter vi det inn i Toulmins (2003) diagram for argumentasjon, ved å identifisere hvert element av argumentene. Vi presenterer først fem episoder fra oppgave 1 (kulerammeoppgaven), for så presentere fem episoder fra oppgave 2 (antrekkoppgaven).

4.1 Kulerammeoppgave

Kulerammeoppgaven la opp til at elevene kunne ta i bruk de fire første kategoriene av strategier som English (1991) forklarer: strategi A-D. Når elevene jobbet med denne oppgaven la vi merke til at samtlige elever startet med en strategi i den uplanlagte fasen. Mange av elevene endret strategi etter hvert i problemløsningen, men alle begynte altså med enten strategi A eller strategi B. Episodene vi beskriver her vil variere i strategier, og viser at noen elever greide å lage mønster slik at de kunne beskrive sikkerheten av at alle mulige kombinasjoner var funnet. Vi har vist hvordan elevene har plassert kulene på kulerammen gjennom en illustrasjon som kommer til syne i diagrammet for deres argumentasjon. I denne illustrasjonen vil elevenes utprøving komme i rekkefølge, fra venstre til høyre, etter hvilken kombinasjon de laget først. Når elevene plasserer kulene fysisk vil det være gule kuler avbildet i illustrasjonen, men ved episoder hvor elevene enten peker eller bare snakker om kulenes plassering, vil kulene være representert med gjennomsiktige kuler.

4.1.1 Episode 1

I denne episoden jobbet elevene med kulerammen og hadde fire kuler tilgjengelig. De begynte problemløsningen med å plassere kulene tilfeldig rundt på de to stavene for å generere forskjellige kombinasjoner. Vi identifiserer denne utprøvingen som tilfeldig ved at de blant annet byttet på hvem som skulle legge på en og en kule for hver kombinasjon. De hadde derimot kontroll på hvilke kombinasjoner de allerede hadde funnet, og unngikk å gjenta dem. Etter de hadde funnet fire forskjellige kombinasjoner stoppet Markus opp, og konkluderte med at det ikke er flere mulige nye måter å fordele kulene på.

Eva: Ja, da har dere laget hvor mange tall?

Markus, Helene og Velma: 4!

Eva: Går det an å lage flere eller?

Markus: Neeeei

Eva: Helt sikker?

Helene: Nei, jeg er ikke helt sikker

Eva: Hvordan kan vi finne ut om dere har lagd alle?

Velma: Vi kan prøve det på nytt, og gjøre alle som vi har gjort, og se om vi klarer å lage en annen

Eva: ok

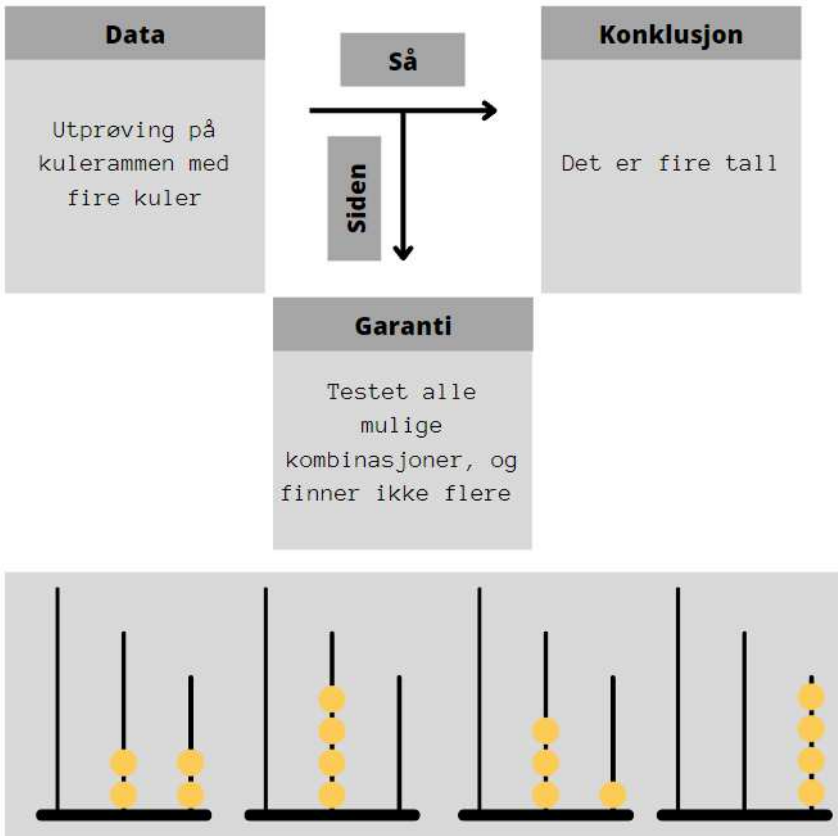
Velma: (lager 13)

Markus: Det der var den jeg tenkte på!

Eva: Og hva ble det?

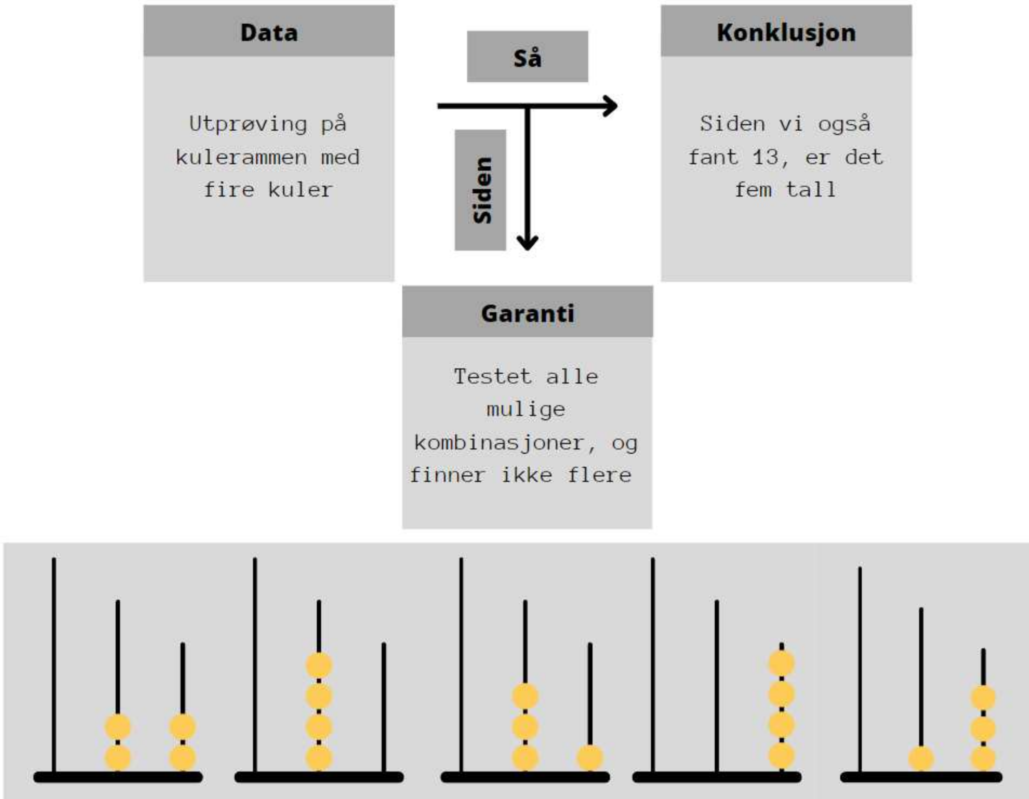
Markus: 13

I denne episoden kan vi se at Markus avviser at det er flere mulige kombinasjoner etter å ha funnet fire, selv om det er en kombinasjon som ikke enda er funnet. Helene og Velma ønsker å utforske mer, og benytter fortsatt samme strategi ved tilfeldig utprøving. De behøver ikke å avvise gjentakende kombinasjoner, siden de unngår å lage dem. Noe som tyder på at de har kontroll over hvilke kombinasjoner som er laget. I tillegg kan vi se på det Velma sier: «vi kan teste ut, og se om det dukker opp noen nye». Her spesifiserer hun at det er nye tall de ser etter. Vi plasserer dem dermed i strategi B.



Figur 5: Markus sin argumentasjon med fire kuler

Vi har valgt å dele denne sekvensen inn i to diagrammer, fordi vi kan identifisere flere argument. Først ser vi på Markus som ikke tror det er flere mulige kombinasjoner. Elevene har da sammen funnet fire ulike kombinasjoner. Vi identifiserer konklusjonen hans ved at Eva spør om han tror det er flere, og han sier nei. Han mener altså at det er fire ulike tall som kan lages. Dataen han har basert dette på er en tilfeldig utprøving på kulerammen, hvor elevene har byttet på å legge på kuler. Garantien hans blir dermed at de har prøvd, og at de ikke klarer å finne flere. Denne garantien er implisitt fordi den ikke kommer direkte til syne gjennom en muntlig forklaring, men kan antydes ut fra utprøvingen.



Figur 6: Markus og gruppens oppfølgende argumentasjon

Det neste argumentet vi identifiserer her er når elevene oppdager et nytt tall. Det er Velma som lager det nye tallet, 13. Markus kommenterer at han tenkte også på dette tallet. Konklusjonen her identifiserer vi ved at de ser at vi kan lage tallet 13, og at de konkluderer med at det var det siste tallet de manglet. Dataen blir den samme som i det første diagrammet, altså tilfeldig utprøving på kulerammen med de fire kulene. Garantien de gir blir også litt lik det første diagrammet siden de ikke har endret strategi siden den første konklusjonen kom, men denne gangen er 13 inkludert.

4.1.2 Episode 2

I denne episoden har elevene Velma, Markus og Helene jobbet med kulerammeoppgaven, og fem tilgjengelige kuler. De jobber med oppgaven og bytter på å plassere kuler. I tillegg til å plassere kuler, bruker de et ark hvor de noterer ned tallene de lager. Tallene blir notert i den rekkefølgen de blir konstruert, og blir ikke systematisert på noen måte. Etter de hadde funnet seks kombinasjoner, trodde de det var en mulighet for å finne flere. De foreslo å lage kombinasjonen 32, men avvise ideen raskt etter å ha henvist seg til oversikten sin. Etter dette var de sikre på at det bare fantes 6 mulige tall. Denne dette, oppstod denne samtalen:

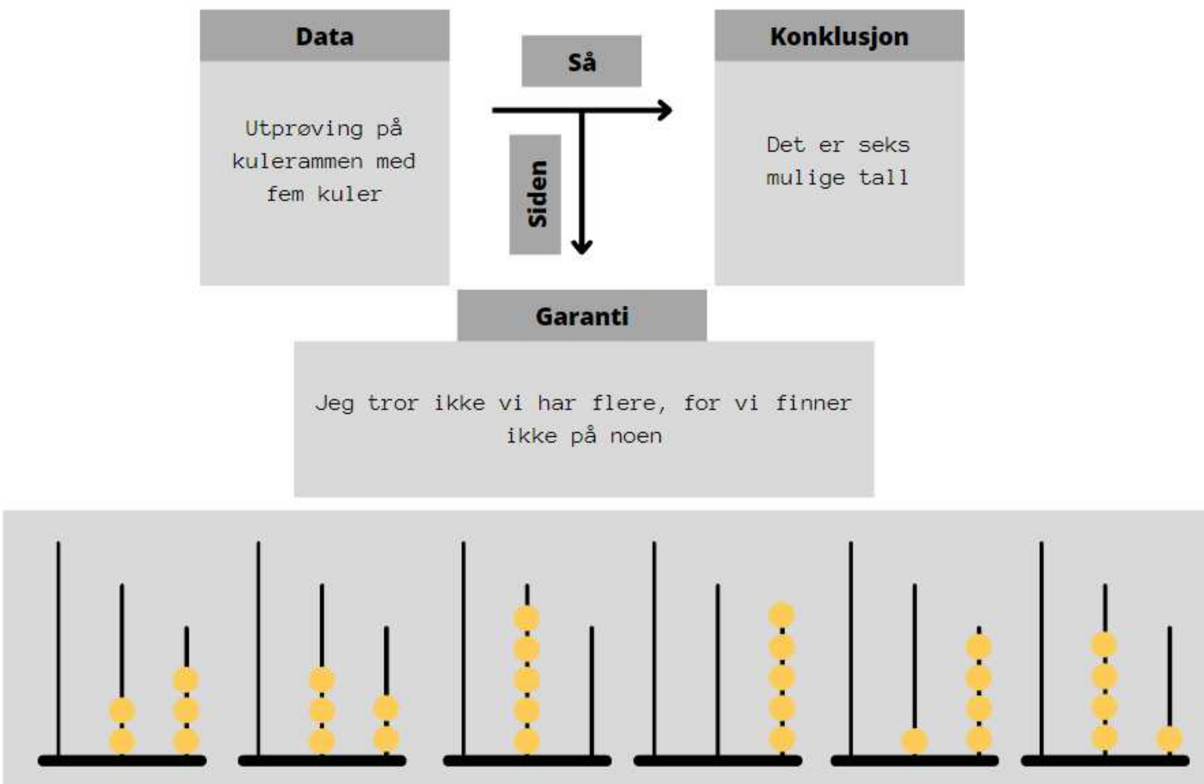
Eva: Hvordan kan dere bevise at dere har tatt alle, om dere tror det da?

Markus: Fordi at jeg prøver jo noen som vi ikke, men så kommer det jo bare mulige som å kanskje 23, men det har vi jo tatt så jeg vet ikke om vi har

Velma: Jeg tror...

Markus: Jeg tror ikke vi har flere, for vi finner ikke på noen.

Elevene har brukt en prøv og feil-strategi, hvor de har avvist de tallene de allerede har funnet. De gjorde dette ved å skrive ned de nye tallene de fant, og sjekket opp mot denne oversikten for å se om de hadde tallet fra før. Dette gjorde de hver gang de trodde de hadde funnet et nytt tall. Dette viser at elevene har strategi B, som handler om å prøve og feile, med avvisning av gjentakende kombinasjoner. Ved å analysere dette nærmere, kan vi argumentere for at disse elevene har en mer sofistikert strategi enn den som kommer frem. Vi ser at annenhver kombinasjon er speilvendt av hverandre. De har altså laget et tall og deretter byttet på antallet kuler som var på enerplassen og tierplassen. Så 23 blir til 32, 50 blir til 5, og 14 blir til 41. Dette mønsteret er noe som kan identifiseres fra utprøvingen, men den kommer ikke frem i forklaringen deres. Dersom mønsteret var bevisst, kunne vi ha plassert dem i overgangsfasen. Siden utprøvingen fremsto tilfeldig, og usikkerheten om når oppgaven er ferdig, kategoriserer vi dem fortsatt i strategi B.



Figur 7: Markus sin argumentasjon med 5 kuler

Vi identifiserer konklusjonen til Markus, som er at han tror de har funnet alle tallene som er mulig å finne. Dataen han har bygget denne konklusjonen på identifiserer vi som den tilfeldige utprøvingen på kulerammen med fem kuler tilgjengelig som elevene sammen har gjort. Garantien han gir er basert på strategien de har brukt for å løse oppgaven, altså at han ikke finner flere og at han derfor ikke tror det er flere.

4.1.3 Episode 3

Denne situasjonen er tatt fra en episode hvor elevene har kommet frem til konklusjonen om at det var fire mulige løsninger når de har tilgang på tre kuler. De kom frem til denne konklusjonen ved å samarbeide om å teste ut forskjellige plasseringer av kulene. De laget først tallene 12, 21 og 30. Deretter var det en kort pause hvor de reflekterte over om de hadde funnet alle, for så å finne det siste tallet (3). De laget aldri gjentakende kombinasjoner, fordi de husket hvilke tall som allerede var laget:

Karu: (legger en kule på enerplassen, og en kule på tierplassen)

Jonas: Den siste og

Eva: Hvor vil du ha den siste?

Arne: Om du setter den der (peker på tierplassen) blir det 21 igjen.

Her ser vi et eksempel som viser at de husker hvilke kombinasjoner de har gjort tidligere, og prøver å unngå å gjenta de. Da de fant det fjerde tallet, 3, var spesielt Karu veldig sikker på at de nå var ferdige med oppgaven. Idet de blir spurt om hvordan de kan være sikre på at det ikke er flere, demonstrerer og forklarer Karu det på denne måten:

Karu: Da har vi alle tallene

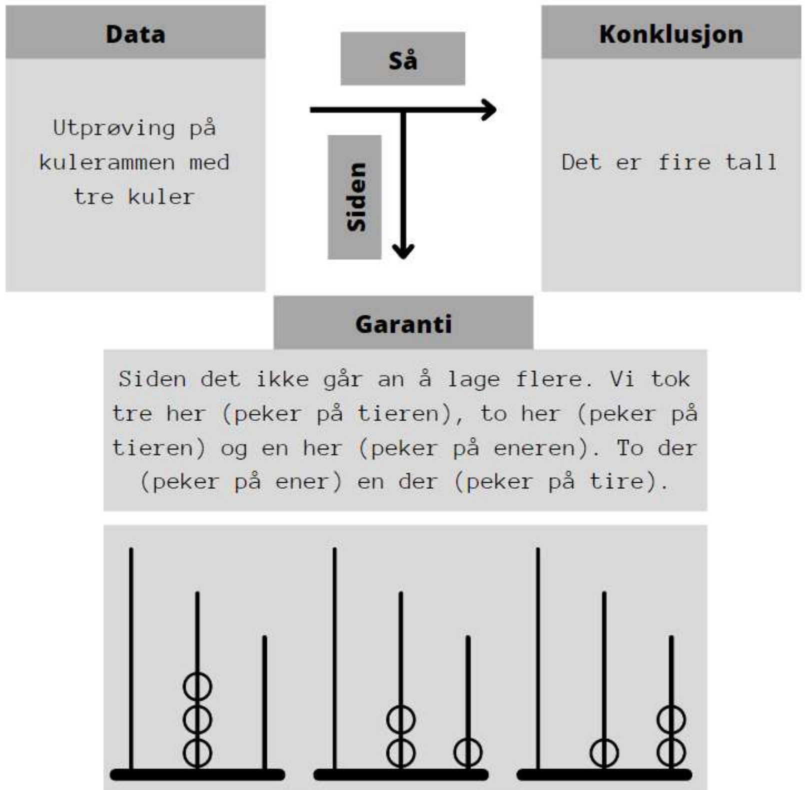
Eva: Hvordan vet dere at det er alle?

Karu: Siden det ikke går an å lage flere. Vi tok tre her (peker på tieren), to her (peker på tieren) og en her (peker på eneren). To der (peker på ener) en der (peker på tire).

Eva: Ja, så alle mulige er tatt? Og vi kan være sikre på det?

Arne: Ja

I sin forklaring kan vi se hvordan Karu beskriver en systematisk strategi for å finne ut hvor mange kombinasjoner med tall det er mulig å lage, og at Arne sier seg enig i Karus resonnement. Karu begynner med å si at det ikke går an å lage flere kombinasjoner, og begrunner dette med at hun har prøvd med tre kuler på tieren (30), to på tieren og en på eneren (21), og til slutt to på eneren og en på tieren (12). Vi kan her se at hun glemmer å beskrive at hun har tatt tre på enerstaven (3), selv om elevene har vært innom dette tallet tidligere. Det kan tenkes at elevens system gjør at det er lett å glemme noen kombinasjoner. Vi plasserer elevens strategi på strategi C, som handler om at eleven delvis har utviklet et mønster, men ikke klarer å holde mønsteret helt ut (English, 1991). Det kan også tenkes at eleven mener det var åpenbart at det skulle også være tre kuler på enerstaven, men glemte eller unngikk å si det, hvor hun i dette tilfellet ville vært plassert på nivå D. Siden elevene allerede har sagt at det er fire mulige kombinasjoner, kan vi antyde at dette var tilfellet.



Figur 8: Karu sin argumentasjon med tre kuler

I elevens argument kan vi identifisere de tre delene som må være med i et argument. Vi starter med å identifisere elevens konklusjon, som er at de har funnet alle mulige kombinasjoner av kulene som går an å finne. Dataen eleven har basert denne konklusjonen på er at hun, sammen med de to andre elevene, har testet ut med tre tilgjengelige kuler på kulerammen. Når hun skal gi en garanti for konklusjonen sin refererer hun til kulerammen når hun forklarer. Hun viser ved å peke på de forskjellige stavene og forklarer at hun har prøvd alle muligheter som finnes med de kulene hun har tilgjengelig. Garantien hun gir virker her som et bindeledd mellom dataen eleven har, og konklusjonen hun lager. Garantien blir gitt på en systematisk måte hvor hun peker på stavene når hun ramser opp kombinasjonene, selv om en kombinasjon blir glemt i forklaringen.

4.1.4 Episode 4

Elevene Silje, Pernille og Alma jobbet sammen med kulerammeoppgaven og tre tilgjengelige kuler, og noterer ned tallene de lager på et ark. De har allerede laget 30, 21 og 12, og de er skrevet ned på arket. For hvert nye tall de lager, blir det sjekket opp på arket elevene noterer på.

Ingrid: Har vi laget 3 fra før av?

Silje: Nei

I: Nei

Eva: Kan vi lage flere nå, da?

Silje: (Begynner å ta alle kulene over på tierplassen)

Alma: 30, det har vi laget

Silje: (Legger en kule over på enerplassen, slik at det blir 21)

Alma: 21 har jeg laget

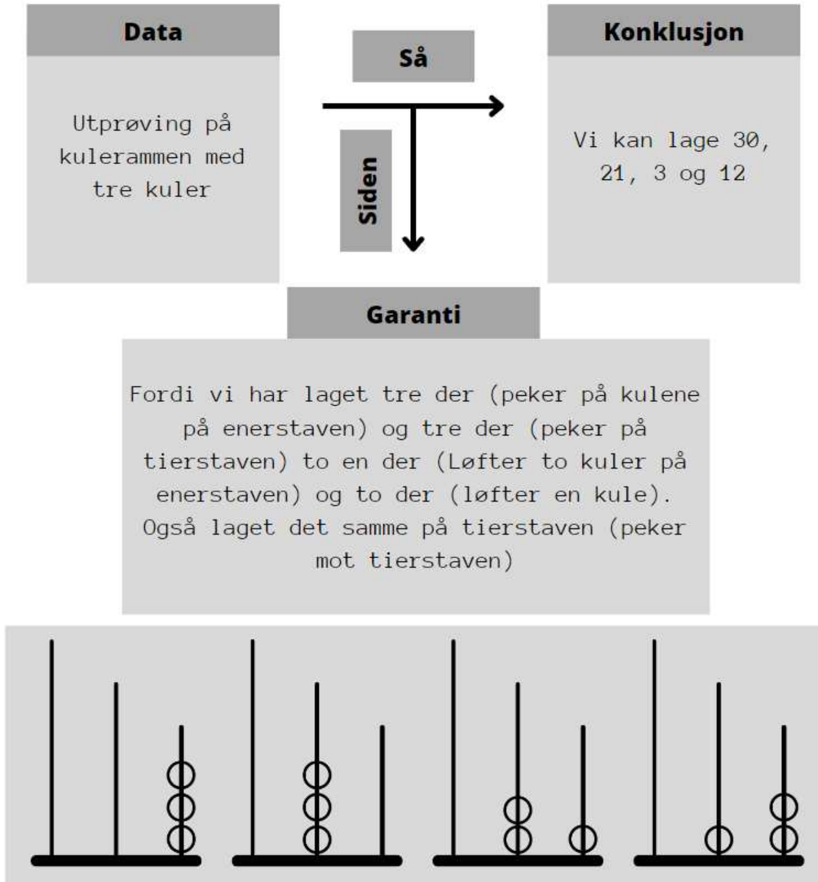
Vi kan se at disse elevene tydelig har forstått at de må avvise gjentagende kombinasjoner, og har funnet en god strategi for dette. Elevene tar i bruk en prøv og feil strategi, noe som gjør at kombinasjonene gjentar seg mange ganger før de konkluderer med at de har funnet alle. Vi plasserer elevene i strategi B etter denne utprøvingen. Videre når elevene blir spurt om de kan være sikre på at de har funnet alle, kommer Silje med denne forklaringen:

Silje: Fordi vi har laget tre der (peker på kulene på enerstaven) og tre der (peker på tierstaven) to en der (løfter to kuler på enerstaven) og to der (løfter en kule)

Eva og Ingrid: Jaa

Silje: Også laget det samme på tierstaven (peker mot tierstaven)

Selv om elevene har plassert kulene tilsynelatende tilfeldig på kulerammen, viser Silje en mer systematisk forklaring på hvorfor alle mulige kombinasjoner er funnet. Hun forklarer på en systematisk måte hvordan alle tallene blir laget. Først ved å plassere alle tre kulene på hver stav, for så å forklare hvordan enerstaven skal også ha et tall med bare en kule og et tall med bare to, og at det blir det samme på tieren. Vi vil derfor plassere hennes forklaring i strategi D. Hun gjennomgår systematisk alle mulighetene, uten å gjenta noen kombinasjoner.



Figur 9: Silje sin argumentasjon med tre kuler

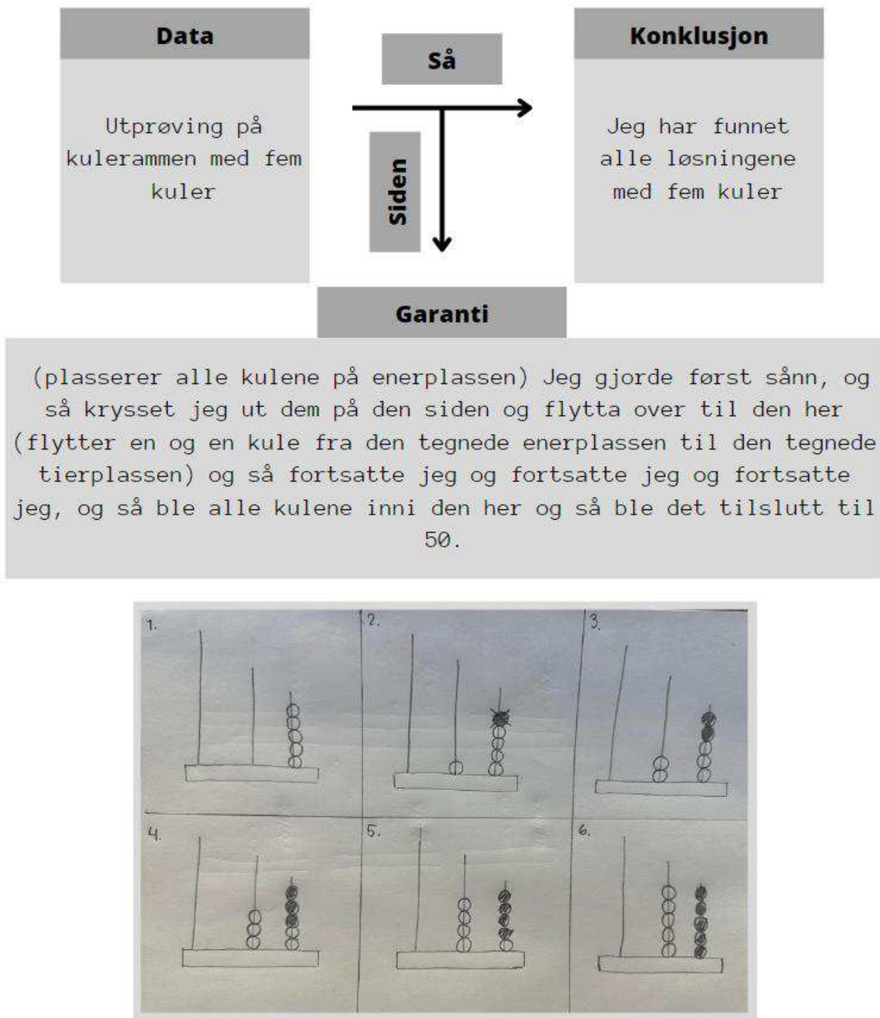
Vi kan identifisere konklusjonen til Silje, som er at hun har laget tallene 30, 21, 12 og 3. Dataen som konklusjonen er basert på kan vi identifisere som først en tilfeldig utprøving på kulerammen med tre tilgjengelige kuler. Selv om dataen vi kan identifisere er tilfeldig plassering, er garantien Silje gir en systematisk gjennomgang av alle mulige kombinasjoner.

4.1.5 Episode 5

Arne, Jonas og Karu har videre fått jobbet med fem kuler. Karu hadde en ganske systematisk måte å løse oppgaven på med tre kuler. Når de får jobbe med fem kuler derimot, så starter de igjen med en tilfeldig plassering på kulerammen hvor de bytter på å sette på kuler. Etter hvert foreslår Arne at de kan tegne det ned for å finne ut om de har funnet alle. Karu tenger en tegning av kulerammen, og så begynner hun å tegne kuler på enerstaven. Hun tegner fem kuler på enerstaven. Så begynner hun å krysse ut en kule på enerstaven, og tegne på en kule på tierstaven. Dette gjentar hun helt til det ikke er noen igjen å krysse ut på enerstaven, og det er fem kuler på tierstaven. Når vi spør hvordan hun vet at alle er funnet ved bruk av denne metoden forklarer hun slik:

Karu: (plasserer alle kulene på enerplassen) Jeg gjorde først sånn, og så krysset jeg ut dem på den siden og flytta over til den her (flytter en og en kule fra den tegnede enerplassen til *den tegnede tierplassen) og så fortsatte jeg og fortsatte jeg og fortsatte jeg, og så ble alle kulene inni den her og så ble det til slutt til 50.*

I denne episoden ser vi en elev som systematisk går gjennom alle mulige tall hun kan lage ved å starte med alle kulene på den ene staven først, for så å flytte over en og en kule helt til alle var gjennomgått. Denne systematiske gjennomgangen viser hun først når hun tegner det ned. Før hun tegner er plasseringen av kulene mer tilfeldig, men med en gang hun tegner kulerammen og kulene blir utprøvingen systematisert. Denne strategien tilsier at eleven er på nivå D. Hun bruker mønsteret sitt konsekvent gjennom demonstrasjonen. Siden strategien hennes har et så tydelig mønster, legger den ikke opp til gjentakende kombinasjoner. Hun viser også tydelig når hun mener hun har gått gjennom alle. Derfor mener vi dette eksempelet demonstrerer at hun er på nivå D fremfor nivå C.



Figur 10: Karu sin argumentasjon med fem kuler

Vi kan identifisere de tre delene av Karus argument. Først finner vi konklusjonen som er at hun har funnet alle løsningene med fem kuler. Hun sier ikke så mye om det totale antallet kombinasjoner, men at hun mener at hun har funnet alle. Dataen hun har hentet dette fra er en utprøving på kulerammen med tilgang på fem kuler, sammen med en systematisering gjennom tegning av kulerammen og kulene. Garantien hun gir er basert på den tegningen hun har laget. Garantien hennes fungerer som et bindeledd mellom dataen og konklusjonen, og blir representert ved hjelp av ei tegning. Karu fokuserer ikke på hvor mange kombinasjoner hun har funnet, og hvilke tall kulene representerer, men heller på hvordan de er funnet ved hjelp av representasjonene.

4.2 Antrekkoppgaven

I motsetning til oppgave 1, startet elevene med varierende strategier i denne oppgaven. Vi har valgt ut noen episoder fra datamaterialet som kan representere de ulike strategiene English (1991) forklarer, og hvordan mange elever endret strategiene sine. Vi har valgt å illustrere hvordan elevene arbeidet med de laminerte plaggene i problemløsningen, ved å selv avbilde hver kombinasjon de laget i den rekkefølgen de oppstod. Dette kan vi se i bildet som kommer til syne i Toulmins diagram (i garantien). Man kan lese bildene fra venstre til høyre i hver rekke.

4.2.1 Episode 6

I dette korte utdraget, ser vi hvordan Alma tester muligheter basert på hvilke kombinasjoner av gensere og bukser som passet best sammen. Hun har tatt til side og leker litt for seg selv med antrekkene, og bruker bare de hun synes er fine sammen.

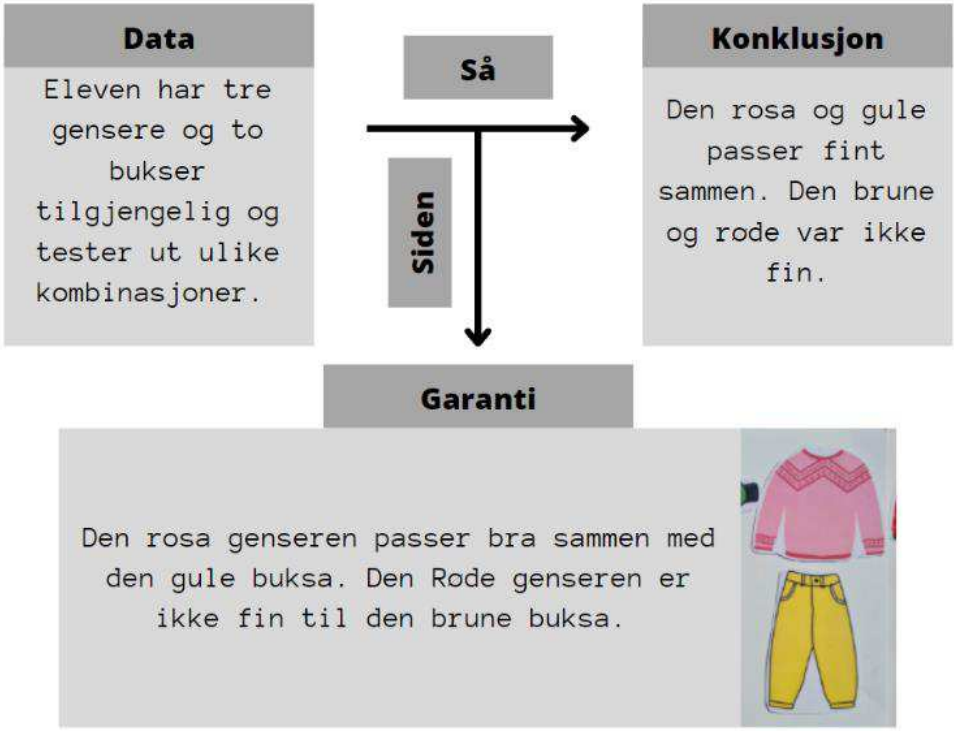
Eva: Hva tenker du da?

Alma: Jeg synes at den rosa og den gule passer fint sammen

Eva: Ja de var fine

Alma: Mamma synes også at gult og rosa er fint sammen. Den brune og røde var ikke fin, den vil jeg ikke ha.

Denne elevens utsagn vil vi plassere på strategi A. Vi kan her tydelig se at eleven leker utkledning, noe English (1991) beskriver som vanlig i denne fasen. Eleven er interessert i å finne antrekk som er moteriktige, og anser ikke alle antrekkene som mulige fordi de ikke ser fine ut sammen. Noe som beskriver noen elevers strategi i denne fasen.



Figur 11: Alma sin argumentasjon i antrekkoppgaven

Elevens konklusjon finner vi ved å se på hvilke kombinasjoner hun lager. Hun velger ut et antrekk som hun liker ekstra godt, og fortsetter egentlig ikke så mye etter det. I tillegg påpeker hun også at et antrekk ikke passer sammen, og at hun ikke vil lage den kombinasjonen. Konklusjonen hennes for disse påstandene er at hun synes den ene passer veldig bra, og at mammaen hennes også ville likt den, i tillegg til at den ene kombinasjonen ikke er noe fin.

4.2.2 Episode 7

Silje, Alma og Pernille jobber sammen og lager kombinasjoner ved å tilfeldig flytte rundt og sette sammen gensere med bukser. De kommer til slutt frem til at det er ni kombinasjoner av ulike antrekk når det er tre gensere og to bukser. De har altså en strategi som går ut på tilfeldig utvelgelse uten avvisning av gjentakende kombinasjoner. De tar blant annet kombinasjonen av en rød genser og en brun bukse tre ganger. Litt etter bruker Silje odometerstrategi hvor hun først gjør ferdig en bukse, så den andre buksen. Hun viser da at hun er på strategi E, hvor det virker fortsatt som om hun tror det skal være ni kombinasjoner, men med odometerstrategien får hun bare seks. Hun virker usikker, og de andre jentene sier at hun må teste videre. Det ender med at hun lager kombinasjoner som hun allerede har laget (selv om hun ser tvilsom ut med tanke på å lage flere).

Elevene begynner å tegne for å finne ut om de har funnet alle kombinasjoner av antrekk. Silje begynner å tegne ringer. Tre ringer, en for hver genser, og to ringer under de tre, en for hver bukse. Hun tegner streker fra ringene som representerer bukser, til ringer som representerer gensere. Dialogen og bildet under viser hva som skjedde i situasjonen.

Eva: Tegner du ringer?

Silje: (tegner sirkler etter mønsteret som klærne lå i. Tre ringer for de tre genserne og to ringer for de to buksene)

Silje: ja

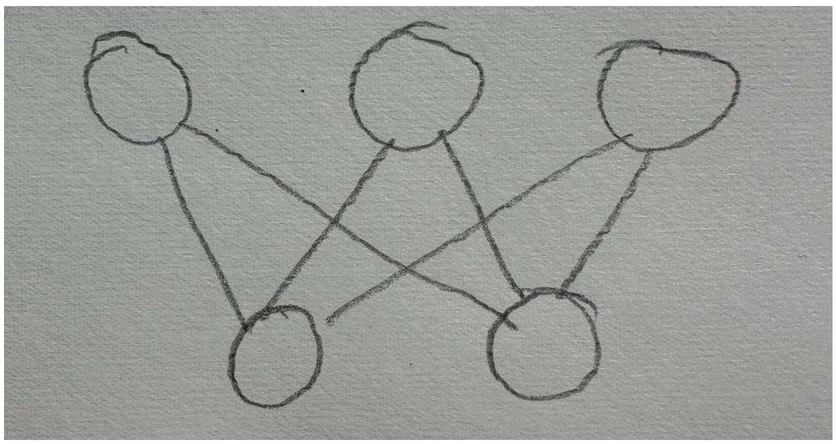
Eva: Hva tenker du da? Hvorfor har du lagd slike streker?

Silje: For å sette dem sammen (peker på genserne og buksene)

Eva: Åja, du setter dem sammen

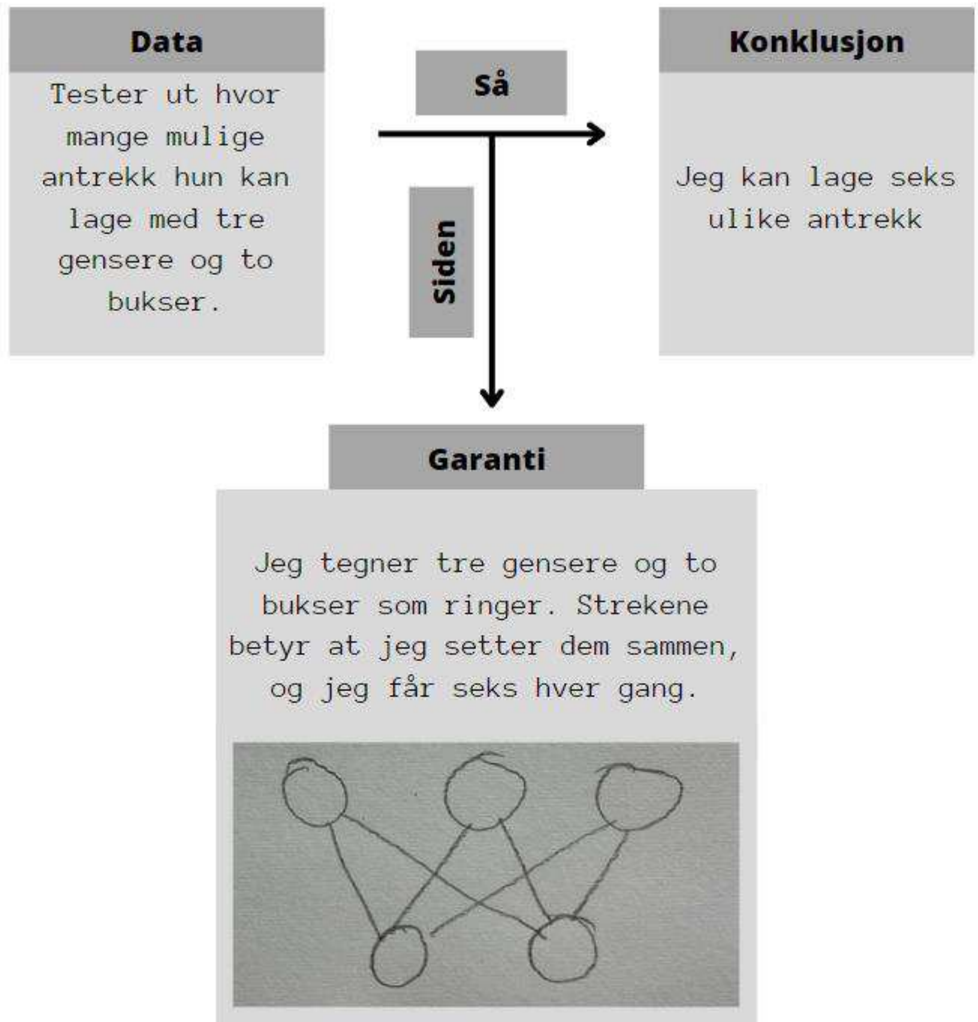
[2 min, hvor Silje tenker og tegner]

Silje: Jeg får seks hver gang jeg tegner opp alle.



Figur 12: Kopi av Siljes tegning av antrekkoppgaven

I figur 12 ser vi en kopi av Siljes tegning av oppgaven. Her kan vi se at Silje har tegnet en symbolsk representasjon for at hun har funnet alle de mulige kombinasjonene med tre gensere og to bukser. Det kommer frem i tegningen at hun har satt sammen alle buksene med alle genserne, noe hun forklarer mens hun arbeider. Vi kan her se at Silje klarer å løse oppgaven når hun tegner ned det som skjer. Dette er et eksempel på en strategi som vi ikke kan plassere inn i English (1991) sitt rammeverk. Det er en sofistikert strategi, men vi kan ikke kalle den odometrisk.



Figur 13: Silje sin argumentasjon i antrekkoppgaven

Her ser vi at eleven argumenterer ved bruk av tegningen sin for at hun har funnet alle kombinasjoner av antrekk. Garantien som støtter konklusjonen om at det er seks ulike antrekk går ut på at hun ser at det blir seks streker mellom ringene som representerer gensere og ringene som representerer buksene. En strek representerer et fullt antrekk. Hun viser at hun forstår at det kun skal være en strek fra en genser til en bukse, og at alle buksene må ha en strek til hver genser.

4.2.3 Episode 8

I denne gruppen er det også tre elever som deltar, Jonas, Arne og Karu. Det begynner med at Arne lager kombinasjoner mens de andre ser på og hjelper:

Arne: (setter sammen kombinasjoner: Rosa genser og brun bukse og grønn genser og gul bukse)

Eva: Hvor mange har du laget nå, Arne?

Arne: 2 (fortsetter å sette sammen: rød genser og gul bukse og grønn genser og brun bukse)

Eva: Hvor mange har du nå?

Arne: Fire, nei fem, nei tre, fordi jeg gjorde den i stad (peker på grønn genser og brun bukse)... Neeei, fordi jeg tok motsatt (peker med to fingre på buksene).. fordi jeg tok den der (flytter den brune buksen litt mot den rosa genseren). (setter sammen rosa genser og gul bukse)

Eva: Hvor mange har dere laget nå?

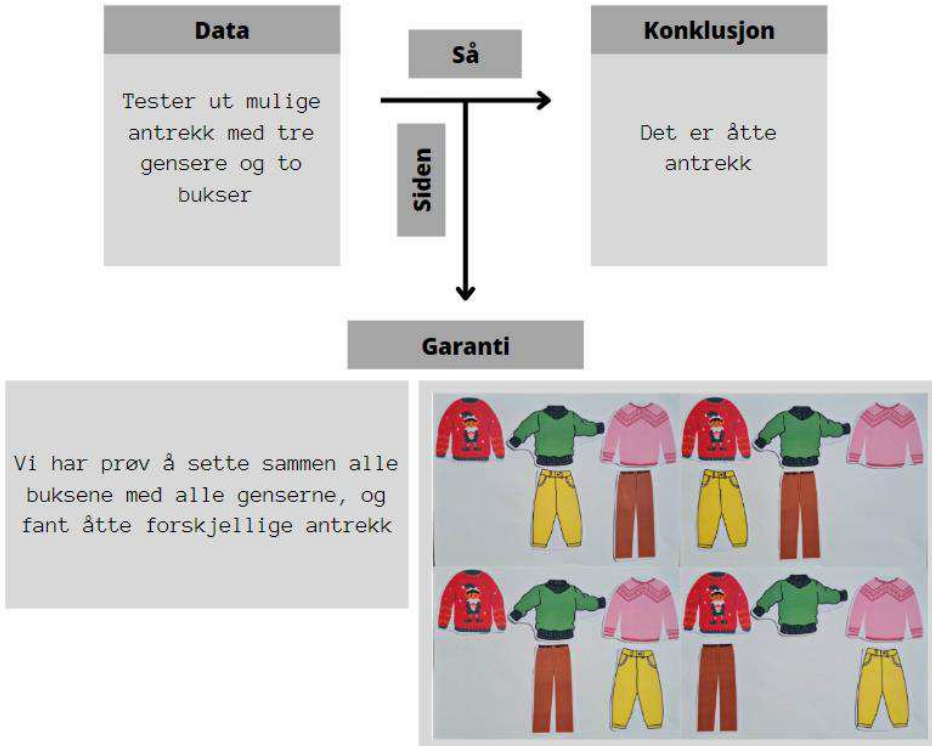
Arne: Syv tror jeg

Jonas: Også kan du ta den der (flytter den brune buksen til den røde genseren)

Ingrid: Og da har dere syv, sier du?

Jonas: Åtte (ser på Arne, og peker deretter på rød genser og brun bukse-kombinasjonen)

Gjennom diskusjonen som foregår mellom elevene kan det virke som om de har en strategi som ikke fungerer helt. Grunnen til dette er at elevene teller feil når de plasserer buksene til genserne. Til tross for dette har de et slags system i hvordan de plasserer buksene. De bruker begge buksene samtidig, og flytter dem rundt i et mønster. I starten kan det virke som om de tester ut kombinasjoner av gensere og bukser litt tilfeldig. Det kommer blant annet av at de blir litt usikre på kombinasjonene de har gjort. Dersom vi analyserer nærmere akkurat hvilke kombinasjoner de har gjennomgått, kan vi identifisere et tydelig mønster. De arbeider med to bukser samtidig, og flytter seg bortover rekken med gensere. De viser også god forståelse for at de ikke skal gjenta kombinasjoner, og ser tilbake på det de har gjort tidligere for å verifisere at de nye kombinasjonene ikke er gjort. Dette tyder på at de er på nivå D. Dette er fordi de har et gjennomgående syklisk mønster, og avviser gjentakende kombinasjoner. Det som gjør at de får feil svar, og svarer åtte i stedet for seks, er feil i tellingen av antall kombinasjoner de har gjort. De begynner å rote med antallet idet de sjekker om kombinasjonene er gjort eller ikke.



Figur 14: Arne og Jonas sin argumentasjon i antrekkoppgaven

Konklusjonen til elevene er at det blir åtte antrekk til sammen. Denne konklusjonen er basert på at de har testet ut med ulike buksene og genserne. Garantien som skal knytte sammen dataen og konklusjonen er basert på at de mener de har gått gjennom alle kombinasjonene som fantes.

4.2.4 Episode 9

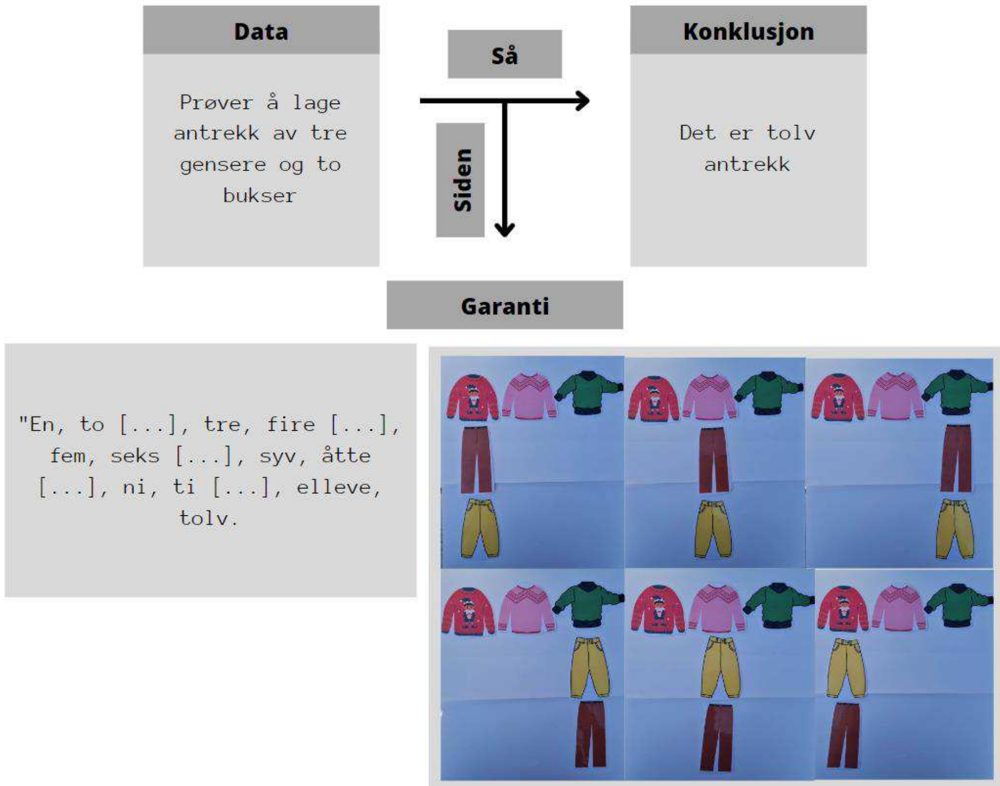
Denne episoden handler om Arne, Jonas og Karu. Arne mener han har løst oppgaven, og at det er tolv antrekk han kan lage av tre gensere og to bukser.

Eva: Hvor mange antrekk kan du lage?

Arne: Jeg tar buksene sånn. Først er den brune øverst (plasserer buksene under den røde genseren), og så teller jeg en, to[...] (plasserer buksene under rosa genser) tre, fire[...] (plasserer buksene under grønn genser) fem, seks. (Han bytter om plass på buksene, slik at den gule er øverst). Syv, åtte [...] (plasserer buksene under rosa genser), ni, ti [...] (plasserer buksene under rød genser) elleve, tolv.

Arne prøver å løse oppgaven ved å teste ut alle mulighetene ved bruk av utklippene. Han lar genserne ligge på en fast plass ved siden av hverandre, og flytter buksene for å lage forskjellige antrekk. Han flytter alltid to bukser om gangen, hvor den ene ligger over den andre. Han begynner med å løse oppgaven ved bruk av en odometerstrategi. Han legger begge buksene (hvor den brune ligger øverst) ved hver genser, og teller for hver genser: «en, to… tre, fire… fem seks». Deretter bytter han om på rekkefølgen på buksene, slik at gul nå ligger øverst, og gjentar forflytningen mellom de tre genserne. Han teller samtidig:

«syv, åtte… ni, ti… elleve, tolv». Arne har en odometerstrategi på nivå E. Han holder en konstant (de to buksene i en spesifikk rekkefølge) og «bruker den opp» før han går videre til neste (den andre rekkefølgen av buksene). Grunnen til at han er på strategi E og ikke F, er at han ikke vet at han er ferdig etter å ha testet ut alle mulighetene. Etter den første runden med buksene, som endte opp med seks forskjellige kombinasjoner, har han egentlig funnet alle løsningene. Han fortsetter derimot å teste ut slik at han får tolv kombinasjoner av antrekk.



Figur 15: Arne sin argumentasjon i antrekkoppgaven

Arne støtter denne strategien ved å vise til at rekkefølge har noe å si. Det ser ut som at Arne har gått litt bort fra oppgavens rammer, og lager antrekk som inneholder to bukser samtidig. Vi kan her se at Arne argumenterer for at man må bytte om på rekkefølgen på buksene, og at vi på den måten får tolv antrekk. Dette bruker han som sin garanti for at dette stemmer, men hans garanti legger opp til at konklusjonen hans gir et dobbelt sett med antrekk.

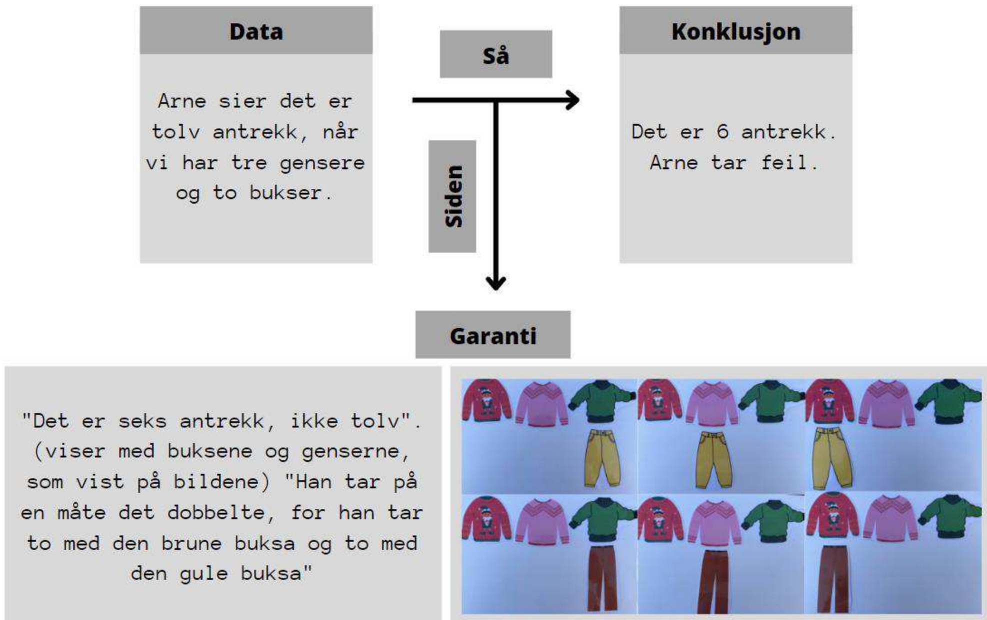
Jonas har observert hvordan Arne har løst oppgaven, og prøver å overbevise Arne om at det bare er seks kombinasjoner av klærne, og at Arne sin feil er at han tar alle antrekkene to ganger. Jonas viser sin strategi. Han, som Arne, lar genserne ligge fast etter hverandre. Han viser deretter alle kombinasjoner av antrekk med den ene buksen før han bytter til neste bukse og lager alle kombinasjoner av antrekk med den andre buksen.

Eva: Men Jonas, kan du prøve å overbevise Karu og Arne hvorfor du mener det bare er seks, ikke tolv?

Jonas: (Puster skarpt ut og smiler). Det er jo ganske lett da. Jeg tror at de tar med dem (peker på genserne). Og så går det an sånn her for å få seks: en, to, tre (flytter den gule buksen mellom alle genserne) fire, fem, seks (flytter den brune buksen mellom alle genserne).

Eva: Og da har du laga alle som går an?

Jonas: Ja



Figur 16: Jonas sin argumentasjon i antrekkoppgaven

Jonas sin argumentasjon er bygd opp ved at han har først observert hva Arne har tenkt, for så å argumentere for hvorfor han mener at det ikke blir riktig ved å vise hvordan han selv har tenkt. Hans garanti går ut på at han først «bruker opp» en bukse, før han går over til neste bukse og bruker opp den. Hans konklusjon er derfor at Arne har feil, fordi han får dobbelt så mange antrekk. Vi kan se at Jonas har en tydelig odometerstrategi. Han bruker hver bukse som en konstant, og utfører alle mulige kombinasjoner med den ene før han går over til den andre. Han viser også god kontroll på når han er ferdig med å lage forskjellige antrekk, og at det ikke finnes flere. Dette eksempelet viser at Jonas sin strategi kan plasseres i strategi F.

4.2.5 Episode 10

Frank har funnet ut at det går an å lage seks antrekk når han har tre gensere og to bukser. Han finner ut dette umiddelbart etter vi har gitt oppgaven. Denne dialogen viser hans argumentasjon for at det ikke finnes flere kombinasjoner av antrekk.

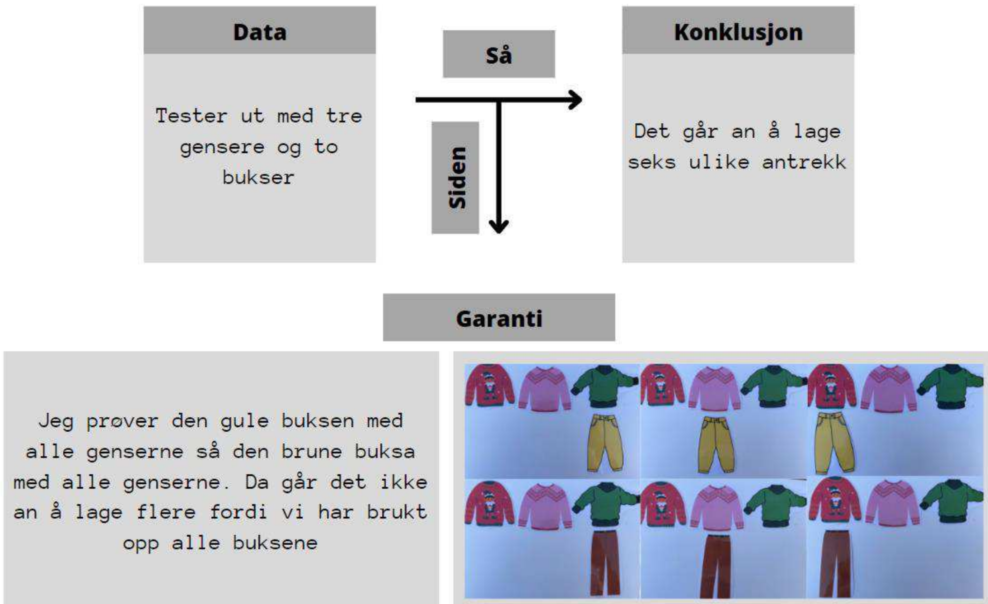
Eva: Hvordan vet du at du har tatt alle som finnes?

Frank: Fordi jeg gjorde sånn, og sånn, og sånn med den buksen (setter sammen den gule buksen med alle genserne). Og så gjorde jeg sånn, og sånn, og sånn, med den andre buksen. (setter sammen den brune buksene med alle genserne). og da går det ikke an å lage flere når man har brukt opp alle

Eva: Du har brukt opp alle? brukt opp alle hva for noe?

Frank: Bruk opp alle buksene.

Frank har her en tydelig odometerstrategi, hvor det er tydelig at han vet når han har laget alle kombinasjoner av antrekk som finnes. Han beskriver dette som at han har brukt opp alle buksene. Frank startet oppgaveløsingen med denne strategien, det betyr at han løste oppgaven med en gang med en odometerstrategi uten å teste ut på andre måter først. Frank sin strategi er et eksempel som illustrerer odometerstrategi F.



Figur 17: Frank sin argumentasjon i antrekkoppgaven

Frank argumenterer for at det ikke finnes flere kombinasjoner av antrekk fordi han har brukt opp alle buksene. Hans konklusjon er at det går an å lage seks antrekk. Dataen han har brukt for å lage denne konklusjonen er at han har brukt konkretene med tre gensere og to bukser og plassert dem sammen. Han har en garanti som fungerer som et bindeledd mellom dataen han har og konklusjonen han har lagd. Garantien går ut på at han plasserer først en bukse med alle genserne, så den andre buksen med alle genserne, før han påpeker at han har brukt opp buksene. Når han har brukt opp buksene er det ikke flere å lage antrekk av. I tillegg til den muntlige forklaringen bruker han også representasjonene med plaggene når han forklarer. På bildet i diagrammet viser vi hvordan han plasserte buksene og genserne sammen samtidig som han forklarte.

5.0 Diskusjon

I dette kapittelet skal vi få frem hvilke strategier som kom ut av datamaterialet, og hvordan elevene argumenterte i forhold til disse. Ved hjelp av forskningsspørsmålene skal vi se nærmere på hvorfor akkurat disse strategiene og argumentene oppstod, og i hvilken grad selve oppgaven og tilgjengelige representasjoner påvirker hvordan elevene forholder seg til problemløsningen.

5.1 Hvilke strategier bruker elevene, og hvordan påvirker oppgaven hvilke strategier elevene bruker?

I dette delkapittelet ønsker vi å beskrive hvilke strategier elevene i studien tok i bruk i hver av oppgavene. Vi vil begynne med å beskrive strategiene i oppgave 1, og deretter beskrive strategiene i oppgave 2. De to oppgavene er forskjellige og legger opp til ulike aspekter ved løsning av oppgaver i kombinatorikk, og vi vil etterpå beskrive hvordan og hvorfor oppgaven påvirket elevenes strategier. Vi kommer også til å kommentere for hver oppgave om de kan, på bakgrunn av datainnsamlingen, kategoriseres som problemløsningsoppgaver.

5.1.1 Strategier i kulerammeoppgaven

Oppgaven med kulerammen var den første oppgaven elevene fikk jobbe med. I denne oppgaven kunne vi identifisere de fire første kategoriene (A-D) som vi finner i English (1991) sitt rammeverk. Et fellestrekk ved den innledende løsningsstrategien til alle gruppene, var at alle startet med å plassere kuler tilsynelatende tilfeldig på kulerammen. Det vil si at alle elevene begynte i den uplanlagte fasen, hvor de hadde en prøv og feil tilnærming både med og uten avvisning av gjentakende kombinasjoner (strategi A og B). Som vi tidligere har påpekt kan denne oppgaven, i likhet med oppgave 2, gå under det Stylianides (2016) kaller bevisoppgaver med endelig antall løsninger. Han beskriver at elever ofte kan ha en usystematisk tilnærming til slike problemer, ved at eleven ofte kan påstå å ha funnet alle muligheter etter å ha prøvd mange ganger, og bare fått det samme. Noe som stemmer godt med elevenes innledende problemløsning av denne oppgaven. Det at ingen elever indikerte at de visste hvordan de kunne løse oppgaven umiddelbart, tyder på at dette er en problemløsningsoppgave for dem (Polya, 1981). Siden løsningen ikke er åpenbar, virker det naturlig at elevene begynner med en tilfeldig utprøving for å utforske oppgaven. Vi opplevde også at elevene synes det var morsomt å utforske mulighetene med kulerammen. I den tilfeldige utprøvingen alle hadde i starten, var det flere tilfeller hvor utprøvingen virket mer som en lek. I disse situasjonene var det større fokus på å utforske kulerammen, enn fokus på å løse selve oppgaven. Det førte til at mange glemte å telle antall forskjellige kombinasjoner de hadde laget i starten. Idet vi begynte å spørre dem hvor mange tall de hadde funnet, ble fokuset mer rettet mot oppgaven. Da var det flere grupper som begynte på nytt, og laget alle kombinasjonene de allerede hadde laget om igjen. Denne gangen derimot, begynte de å telle antall kombinasjoner fra starten.

Noen av elevene utviklet en mer sofistikert strategi etter hvert i oppgaveløsningen. Etter at elevene ble stilt spørsmål om hvilken garanti de hadde for sin konklusjon, var det noen grupper som utviklet sin strategi fra den uplanlagte fasen til overgangsfasen, hvor et system begynte å fremtre i deres løsninger. Dette kan vi se et eksempel på i episode 5, hvor Karu forklarer mens hun demonstrerer på en tegnet kuleramme. Hun begynner med alle kulene på enerplassen, og flytter en og en over til tierplassen. På denne måten viser hun hvordan hun systematisk går gjennom alle mulige kombinasjoner, og markerer at hun er ferdig med oppgaven ved å stoppe etter den sjette kombinasjonen. Før denne sofistikerte løsningen (strategi D), var Karu også tilsynelatende i den uplanlagte fasen. Det var ikke før vi spurte henne om hvordan hun visste det kunne være seks kombinasjoner (å gi garanti for konklusjonen sin), at denne strategien kom til syne. Vi kan her se at et krav om å gi en garanti for løsningen påvirket strategien som ble brukt i oppgaven, og førte til en mer sofistikert strategi. Noe vi derimot ikke fikk se i denne oppgaven, var elever som brukte en strategi i odometerfasen (strategi E og F). Dette er fordi oppgaven ikke legger opp til slike strategier, noe som gjør at løsninger i overgangsfasen blir de mest avanserte.

Selv om de fleste gruppene endte opp med riktig antall mulige kombinasjoner, viste de fleste tegn til usikkerhet angående når de var ferdige med oppgaven. De fleste fant alle kombinasjonene raskt (ofte etter noen avvisninger av gjentakende kombinasjoner), men fortsatte å lete etter nye kombinasjoner. Denne letingen fortsatte til kombinasjonene gjentok seg så ofte at de ble overbevist om at det ikke kunne finnes flere. Både episode 1, 2 og 4 viser denne tendensen. Dette er vanlig i den uplanlagte fasen (English, 1991, s. 458).

Flere av strategiene endte opp med å implementere bruken av ark og blyant for å løse oppgaven. Bruken av disse hjelpemidlene innebar oftest å notere kombinasjoner som ble laget. Innledningsvis var det svært få grupper som utnyttet ark og blyant, og forholdte seg kun til selve kulerammen. Flere begynte derimot å bruke arkene idet et høyere antall kuler skulle brukes på rammen. Uten mulighet for å notere utprøvde kombinasjoner, oppstod det utfordringer med å godta eller avvise dem. Det er fordi de ikke husket om de allerede var laget. Idet de begynte å notere, brukte mange denne oversikten som oppstod for å verifisere at en eventuell ny kombinasjon ikke har blitt laget tidligere. Ingen som brukte denne tilnærmingen laget et system av tallene de skrev ned. Tallene ble bare skrevet ned i rekkefølge ut ifra når de oppstod i utprøvingen. Altså førte mer kompliserte oppgaver og større utfallsrom til at elevene måtte implementere bruken av ark og blyant i sine strategier.

5.1.2 Strategier i antrekkoppgaven

I denne oppgaven fikk elevene tre gensere og to bukser, og skulle finne ut hvor mange ulike antrekk som kunne lages. I utgangspunktet tenker vi at dette også er en oppgave som kan gå innenfor problemløsning, hvor løsningsstrategien ikke kommer til tankene umiddelbart (Polya, 1981). Finner man løsningen umiddelbart, er det altså ikke et problem. I denne oppgaven var det en elever som så løsningen med en gang, og utførte med en odometerstrategi, som vi kan se i episode 10. Dette kan tyde på at denne oppgaven ikke kan telles som problemløsning for denne eleven. For de fleste elevene derimot, som ikke løste oppgaven umiddelbart, kan vi regne denne oppgaven som problemløsning. Dette samstemmer med det Palmér og Bommel (2018, s. 1778) skriver om elevers løsning av oppgaver, hvor samme oppgave kan oppleves som problemløsning for en elev og ikke for en annen.

I oppgave 2 kunne vi identifisere flere elever med mer sofistikerte strategier. I denne oppgaven var det også en del elever som startet med strategier i den uplanlagte fasen, hvor utprøving og lek med enhetene var fremtredende. De fleste gikk i motsetning til oppgave 1 raskt over til mer sofistikerte strategier, hvor noen elever viste en odometer-strategi (E og F) svært tidlig. I denne oppgaven befant de fleste elevene seg enten i den uplanlagte fasen eller i odometerfasen. Det var få tilfeller, med unntak av episode 8, av elever i overgangsfasen. Dersom de brukte en mer avansert strategi enn en prøv og feil-metode, var den ofte odometrisk. Vi fikk altså en større variasjon av hvilke strategier som ble tatt i bruk i denne oppgaven, og mer sofistikerte løsninger.

I denne oppgaven ser vi også hvordan strategien forandret seg idet elevene ble bedt om å forklare eller utdype resultatet sitt. I episode 7 ser vi hvordan Silje (i samarbeid med resten av gruppen sin) befinner seg på nivå A i begynnelsen, hvor de etter tilfeldig utprøving mener det er ni mulige kombinasjoner (hvor det egentlig bare er seks mulige). Jo mer de blir bedt om å forklare hvordan de kom frem til dette resultatet, jo mer usikker blie Silje. På et tidspunkt løser hun oppgaven med en odometerstrategi. Idet hun har fått alle seks mulige kombinasjoner derimot, lager hun litt nølende tre antrekk til (som allerede er laget). Det er ikke før hun bruker ark og blyant for å tegne opp diagrammet, med streker mellom hver enhet, at hun konkluderer med at det må være bare seks (se figur 12).

Færre elever tok i bruk arkene, og forholdt seg mest til konkretene. I Maher (2011) sin forskning kan vi lese om flere strategier for en tilsvarende oppgave hvor 2. klassinger tar i bruk ark og blyanter. Her finner vi tilfeller hvor elever både tegner antrekk, tegner streker mellom enheter og lager lister for hvilke antrekk som er laget. Det eneste tilfellet hvor en slik strategi fremstår, er i episode 7 hvor Silje tegner diagrammet for alle de forskjellige mulighetene. Med konkreter tilgjengelig, i motsetning til Maher (2011) sin oppgave, fremstår ikke muligheten for å notere og tegne seg like nyttig for elevene. Det var mindre behov for å holde oversikt over hvilke kombinasjoner som var laget fra før. Dette er en naturlig utvikling i odometerfasen, strategi F, hvor utprøvingen er så systematisk at den ikke legger opp til mulige gjentatte kombinasjoner (English, 1991).

5.1.3 Hvordan påvirker oppgaven elevenes strategier?

Vi kan tydelig se et skille i hvilke strategier som ble brukt i de to oppgavene, og ved det kan vi tolke at oppgaven har stor påvirkningskraft på hvilken strategi elevene tar i bruk. I den første oppgaven la vi merke til at alle elevene startet i den uplanlagte fasen (strategi A eller B), hvor noen grupper etter hvert gikk over til overgangsfasen i form av en mer systematisk strategi (strategi C eller D). Mange elever holdt seg også til den uplanlagte fasen gjennom hele oppgaveløsingen. I oppgave 2 derimot la vi merke til at raskt etter en innledende fase med utprøving, begynte elevene med veldig ulike strategier som spenner seg over hele rammeverket til English (1991). Et fellestrekk for begge oppgavene er hvordan strategiene utviklet seg idet elevene blir bedt om å forklare resultatet sitt, som i episode 1, 5 og 7. Grunnen til at oppgavene legger opp til forskjellige strategier, er fordi de er bygd opp på ulike måter. Oppgave 1 (kulerammen) ga ikke elevene rom for å vise at de kunne bruke en odometerstrategi. Her fikk vi se at mange elever brukte en prøv og feil-strategi. I oppgave 2 derimot, som ga mulighet for en odometerstrategi, var odometerfasen den mest fremtredende.

Med bakgrunn i dataen fra begge oppgavene kunne vi se at samme elev ofte tok i bruk ulike strategier i de to oppgavene. Flere elever som tok i bruk en prøv og feil-strategi i starten av oppgave 1, brukte en odometerstrategi i oppgaven 2 (som elevene fra episode 9 og 10). Det vil si at de hoppet fra strategi A eller B på oppgave 1, og helt opp til strategi E eller F på oppgave 2. Det er derfor grunn til å si at oppgavens oppbygning og egenskaper er viktig for hvordan elever løser oppgaven. Dette kan vi se i sammenheng med English (2005) som skriver at unge barn kan være i stand til å løse kombinatorikkoppgaver, særlig dersom de er satt inn i en kontekst som er passende og som de kan relatere seg til. Det kan tenkes at elevene i vår data klarer å relatere seg bedre til oppgave 2 enn oppgave 1. Oppgave 2 innebærer en kontekst som kan oppstå i den virkelige verden. Noe English (2005) mener gjør at oppgaven kan virke mer virkelighetsnær og relaterbar. I tillegg var denne oppgaven veldig konkret og visuell med tanke på at elevene fritt kunne sette sammen antrekkene med gensere og bukser, og manipulere dem som de ville. Oppgave 1 derimot er en oppgave hvor man skal representere tall på en annen måte enn man representerer dem til vanlig. Dette kan gjøre at oppgaven blir mindre virkelighetsnær og dermed vanskeligere å relatere seg til. Vi tenker altså at konteksten bak antrekkoppgaven var viktig for at elevene kunne jobbe med dem på det nivået de gjorde, samtidig som at kulerammeoppgaven ble mer abstrakt for at elevene enklere kunne komme ut av den uplanlagte fasen.

5.2 Hvordan argumenterer elevene for sine løsninger, og er det en sammenheng mellom hvordan de argumenterer og hvilken oppgave de jobber med eller strategi de bruker

I dette delkapittelet ønsker vi å beskrive hvordan elevene argumenterer i arbeidet med kombinatorikk. Gjennom Toulmins (2003) diagram har vi analysert argumentene i de 10 utvalgte episodene. Vi kommer til å se nærmere på garantiene de har gitt for konklusjonene sine, og se etter fellestrekk i forskjellige aspekter av utprøvingen. Først ser vi på argumentasjon i forhold til de forskjellige oppgavene, deretter ser vi nærmere på argumentasjonen i de forskjellige strategiene.

Toulmin (2003) beskriver at det vil dukke opp et behov for å underbygge påstandene sine idet noen utfordrer eller stiller spørsmål til det du har kommet frem til. Dette så vi som et fellestrekk hos alle gruppene i datamaterialet, men i varierende grad. På tvers av oppgavene var det få elever som innledningsvis ga muntlige garantier for sine løsninger. Elevene brukte ofte selve utprøvingen de hadde gjort på konkretene som grunnlag når de skulle gi en garanti for sin konklusjon. Gjennom at vi stilte spørsmål til deres konklusjon for å få en videre forklaring, utviklet mange av elevene garantien sin til en muntlig forklaring. Dette samstemmer med Toulmins (2003) beskrivelse. Vi fikk ulike resultater når vi forsøkte å få frem elevenes tankegang ved oppfølgingsspørsmålene vi stilte, som «hva tenkte du nå?» eller «hvorfor er du sikker på at du har alle?». De forholdte seg forskjellig til spørsmålene i de forskjellige oppgavene. I oppgave 1 opplevde vi at elevene virket usikre på løsningene sine når vi ba dem gi en forklaring. Flere fortsatte med en prøv og feil-strategi for å se om de hadde glemt noen kombinasjoner, men mange svarte også bare «vet ikke» eller «jeg finner ikke flere». «Vet ikke» regner vi som å ikke gi en garanti for påstanden sin, og det kan tolkes som at de ikke er sikre på svaret sitt. «Jeg finner ikke flere» regner vi som en garanti for et empirisk argument, noe Stylianides (2016) beskriver som vanlig av elever når de løser oppgaver med et endelig antall caser. Likevel opplevde vi at oppfølgingsspørsmålene la opp til mer refleksjon og forklaringer hos elevene i oppgave 1, som i episode 5 og 4, hvor forklaringene skilte seg betydelig fra utprøvingene. Vi observerte at når noen elever ble bedt om å underbygge konklusjonen sin med en garanti, argumenterte de for en helt annen strategi enn de tilsynelatende hadde brukt i utprøvingen. Disse resultatene kan sammenliknes med det English (2005) beskriver, når elevene i hennes forskning brukte en mer sofistikert strategi for å godkjenne løsningen sin enn de hadde brukt for å løse selve oppgaven. Vi kan se dette i episode 4 hvor jentene ser ut til å teste tilfeldige kombinasjoner, og avviser de som er gjentatt. Deres strategi virket på dette punktet å være på nivå B. Derimot, da vi spurte dem hvordan de kunne være sikre på at de hadde funnet alle kombinasjonene, gir Silje en forklaring som tyder på at hun i det minste er i overgangsfasen. Hun beskriver en systematisk gjennomgang som tydelig beskriver alle mulige kombinasjoner, uten å måtte demonstrere hvert utfall. Denne garantien hun beskriver, samstemte ikke med den strategien vi hadde observert når de løste oppgaven. Dette kan vi også se et eksempel på i episode 7, med de samme elevene som løser antrekkoppgaven. Der bruker elevene først en tilfeldig strategi hvor de ender opp med tre gjentakende kombinasjoner, men når vi etterspør en begrunnelse endrer Silje strategi og bruker en odometerstrategi. I tillegg bruker hun etterpå tegning for å bli helt sikker på oppgaveløsningen. Vi ser her at Silje endrer strategi når hun må bekrefte, altså gi en garanti for konklusjonen sin, i både oppgave 1 og oppgave 2, noe som stemmer med det English (2005) beskriver. Hos noen elever observerte vi lite utvikling i garantien elevene ga for påstandene sine ved slike spørsmål. Idet de ble spurt oppfølgingsspørsmålene, henviste de ofte tilbake til utprøvingen de hadde gjort. Som i episode 9, hvor Jonas sier: «Det er jo ganske lett da», idet han blir bedt om å forklare til de andre hvordan han tenker. Videre går han raskt gjennom alle kombinasjonene ved strategi F, på samme måte som han hadde gjort tidligere. Det var generelt mindre usikkerhet rundt når alle kombinasjonene var utprøvd eller ikke, noe som førte til at garantiene deres fremsto mer avanserte og sikker i oppgave 2 enn i oppgave 1.

Utprøving med konkretene viste seg å stå sentralt når elevene skulle resonnere og argumentere innen oppgavene i kombinatorikk. Det virket som og elevene mener utprøvingen deres beviste påstanden deres, uten å måtte gi en nærmere forklaring eller beskrivelser av strategien. Dette kunne vi se gjennom at elevene stoppet opp og forsto ikke helt hva vi ville da vi etterspurte mer forklaring. For de fleste episodene, særlig i oppgave 2, ser vi hvordan selve utprøvingen er satt som garantien. Som nevnt tidligere var det litt mer muntlig argumentasjon i oppgave 1, men der og ble det ofte henvist til utprøvingen. Elevene som forklarer: «vi har prøvd, og finner ikke flere», som i episode 2, gir eksempelvis en muntlig garanti for påstanden sin. Selv om det ikke gir en overbevisende eller tydelig forklaring på hvorfor de har funnet alle kombinasjonene, ser vi fortsatt på dette som en del av deres forklaring/garanti for konklusjonen deres. Det er en kommentar som også henviser sterkt til utprøvingen deres. Grunnen til at selve utprøvingene virker så sentrale i elevenes argumentasjon, kan være fordi oppgaven legger opp til slik argumentasjon. Dette er fordi konkretene er svært fremtredende. Vi kommer nærmere inn på konkretenes påvirkning av problemløsningen i kapittel 5.3.

Vi opplevde at de fleste som brukte en odometerstrategi hadde mindre behov for å argumentere for at sin løsning var riktig. Dette kan vi blant annet se i episode 9, hvor Jonas tilsynelatende oppgitt påstår at «det er jo lett da». Dette sa han da vi spurte om han kan prøve å overbevise de andre i gruppen som er uenig med han, før han raskt gjentok metoden han brukte. Vi kunne se at elevene med odometerstrategi brukte konkretene på en annen måte enn de som hadde en tilfeldig strategi eller de som brukte en systematisk strategi. De forholdte seg nærmest kun til konkretene i argumentasjonen sin. Idet de ble spurt om å forklare tankegangen sin nærmere, gikk de gjerne bare raskt gjennom alle kombinasjonen en gang til. De viste ikke behov for å benytte seg av en muntlig forklaring. Noen elever, ved en rask repetisjon av alle kombinasjonene, endte løsningen ved å si «nå har jeg ikke flere» eller «nå har jeg brukt opp alle» (som i episode 10). Ikke bare underbygget dette utsagnet at de bruker en odometerstrategi, hvor en enhet holdes konstant (English 1996), men den viser også hvordan eleven tydelig demonstrerer at oppgaven er avsluttet.

I den uplanlagte fasen observerte vi lite argumentasjon. Det var for elever med strategi A eller B hvor forklaringer som «vet ikke» eller «det går ikke an å lage flere» var mest fremtredende (som i episode 2). Elevene som brukte strategi A, argumenterte også med å si at de hadde funnet det fineste antrekket (episode 6). Disse bruker altså en utkledningsstrategi, som går ut på at de egentlig går bort i fra oppgaven og heller «leker seg» med de ulike antrekkene (English, 1991, s. 458). Dette er noe også Maher (2011) opplevde i sin forskning da en elev mente enkelte kombinasjoner ikke var mulige fordi klærne ikke passet sammen. Selv om et slikt argument ikke gir pålitelighet til konklusjonen, er det en av de mest tydelige muntlige begrunnelsene gjennom studien.

Elever med mer sofistikerte strategier legger større vekt på selve strategien i argumentasjonen sin. Vi ser i begge oppgavene hvordan hver enkeltkombinasjon betyr mindre jo mer avansert strategi de har. Elevene i den uplanlagte fasen legger mye vekt på å vise frem hver kombinasjon. De legger enten kulene på utvalgte staver, eller setter sammen et spesifikt antrekk, og uttrykker etter hver utprøving at de har funnet en ny kombinasjon. Elevene i overgangsfasen og odometerfasen kunne også gå gjennom hver kombinasjon, men de ga ikke mye oppmerksomhet til hvert utfall. De med odometerstrategi i antrekk-oppgaven tok gjerne bare og flyttet en og en bukse bortover rekken med gensere, og telte raskt mens de flyttet. I kulerammeoppgaven ser vi hvordan både Karu (episode 3 og 5) og Silje (episode 4) ikke en gang bruker kulerammen for å vise alle kombinasjonene, men heller bare beskriver hvordan hver kombinasjon oppstår. I episode 2 gjør Karu dette ved å peke på stavene og sier et antall kuler, f.eks. «*to her (peker på tieren) og en her (peker på eneren)*». Hun sier ikke hvilket tall hun lager (i dette tilfellet 21), men heller bare antall kuler for hver stav. Elevene i den uplanlagte fasen la altså mer vekt på å bevise hver enkeltkombinasjon i argumentasjonen sin, mens de i odometerfasen og overgangsfasen la mer vekt på selve strategien.

5.3 Hvordan bruker elevene de tilgjengelige konkretene for å løse oppgaven, og påvirker konkretene hvilken strategi elevene velger å bruke?

Vi hadde med ulike representasjoner i oppgavene, som var tilgjengelige for elevene. Både oppgave 1 og oppgave 2 ble lagt opp slik at elevene kunne ta i bruk de representasjonene vi hadde med, altså kulerammen og de laminerte plaggene. Oppgaveteksten sa ikke direkte at de måtte ta dem i bruk, men siden vi brukte dem når vi snakket om oppgaven, ble dette en naturlig måte å utforske oppgaven på for elevene. I tillegg fikk elevene ark og blyanter i ulike farger, som noen elever valgte å ta i bruk. Alle gruppene med elever tok i bruk konkretene vi hadde med når de forsøkte å løse oppgavene. Noen elever brukte konkretene til å leke med, særlig innledningsvis, men de fleste brukte dem til selve oppgaveløsingen. I oppgave 1, med kulerammen, opplevde vi at mange elever brukte konkretene til å plassere kuler tilfeldig. Dette førte til at mange elever endte med å bruke en strategi i den uplanlagte fasen på nivå A eller B (English 1991). I tillegg ble det vanskelig for mange elever å huske hvilke kombinasjoner som allerede var prøvd, noe som førte til gjentakende kombinasjoner.

Vi tenker at denne oppgaven la opp til en prøv og feil-strategi, fordi utprøvingen på kulerammen ble hovedfokuset i oppgaven.

Gjennom forskningen til Maher (2011) kan vi se at mange elever på 2. trinn hadde vanskeligheter med å løse den samme oppgaven som vi ga i oppgave 2. Ved å sammenlikne Mahers resultater med våre, kan vi se at vi får andre resultater. Mange av elevene i vårt datamateriale utførte en tilsvarende oppgave på en systematisk måte, hvor de fleste var i stand til å finne alle mulige kombinasjoner. Noen elever viste også svært sofistikerte strategier, ved at de utførte oppgaven ved en odometerstrategi umiddelbart. Elevene i Mahers forskning hadde ikke de samme konkretene tilgjengelig, noe som kan være grunnen til de ulike resultatene i disse to studiene. Med fysiske avbildninger er det veldig oversiktlig og forståelig å holde et plagg «konstant», og teste alle muligheter med denne, noe som er essensielt for strategier i odometerfasen (English 1991, 1996). Blant elevene i datamaterialet, var det altså mange som fikk til oppgaven ved bruk av konkretene, gjerne med bruk av strategi E og F. Dette tyder på at elever på 2. trinn har større bruk for konkreter når de jobber med slike oppgaver. Uten konkretene i denne oppgaven kan det tenkes at vi ville fått det samme resultatet som Mahers (2011) forskning, hvor elevene bare fikk ark og blyanter. Representasjoner kan ifølge Russell et al. (2017) være med på å hjelpe elever med å både gjenkjenne og rettferdiggjøre hvordan matematikken «fungerer», og kan virke som et verktøy for tenking og kommunikasjon. Vi kan derfor tenke oss at representasjonene elevene fikk tilgang på, var en forutsetning for at 2. trinns elevene fra vårt datamateriale løste oppgaven på en så sofistikert måte, som andreklassingene i Mahers (2011) datamateriale ikke klarte på samme måte. Dette eksempelet kan vi se i sammenheng med det English (2005) sier om at elever får større mulighet til å bygge systemer når de får meningsfulle representasjoner og oppgaver å jobbe med.

Det var mange elever som valgte å bruke ark for å både skrive og tegne sine matematiske representasjoner av oppgaven. Tegningene elevene lagde var i noen tilfeller representasjoner som hjalp elevene med å løse oppgaven, men i noen tilfeller så vi at tegningene ikke var med på å løse oppgaven. Noen elever brukte også tegningene for å gi en garanti for det de hadde gitt som konklusjon. Et eksempel på dette er i episode 5, hvor Karu tegner selve kulerammen og krysser ut en og en kule på enerstaven samtidig som hun tegner en og en kule på tierstaven. Hun forklarer at hun vet at hun har funnet alle tallene fordi hun har flyttet en og en, og da er det ikke flere igjen å flytte. Tegningen hennes er her med på å strukturere og rettferdiggjøre hvorfor hun mener hun har funnet riktig løsning.

Representasjonene kan være en del av elevenes garanti for sine konklusjoner. I mange tilfeller var bruken av representasjoner med i elevenes forklaring om hvorfor løsningen deres var riktig. Dette samstemmer med det Russell et al. (2017) skriver om at representasjoner kan hjelpe elever med å rettferdiggjøre sine matematiske påstander. Vi kan se dette i episode 7, hvor Silje ikke var sikker på resultatet før hun hadde tegnet. Tegningen hjalp henne med å strukturere oppgaven på en ny måte, slik at hun forsto at det ikke var flere enn seks kombinasjoner av antrekk. Elevene kan altså lage sine egne representasjoner, selv om vi hadde med representasjoner vi tenkte var mest hensiktsmessige. Mange elever (spesielt i odometerfasen) bygde forklaringene sine på manipulering av konkretene som var tilgjengelig. De muntlige forklaringene ble ofte «jeg har gjort sånn, og sånn, og sånn, og da er det ikke flere», vi må derfor se på hvordan de manipulerer konkretene dersom vi skal kunne forstå argumentet deres. Disse konkretene ble altså brukt av elevene for å gi en garanti for konklusjonen sin. Dette observerte vi i episode 10, hvor Frank manipulerte de tilgjengelige konkreten for å raskt gjennomgå alle mulige kombinasjoner. Disse resultatene kan vi se samstemmer med det Russell et al. (2017) skriver om at representasjoner kan hjelpe elever både med å gjenkjenne og rettferdiggjøre for matematiske løsninger, og her kan vi se at elevene bruker konkretene til begge deler. Først jobber de med konkretene for å løse oppgaven, deretter bruker de dem for å vise hvorfor det de har gjort er riktig.

6.0 Konklusjon

I konklusjonen ønsker vi å trekke frem våre hovedfunn, som er de funnene vi tenker er med på å svare på problemstillingen vår: *«Hvilke strategier bruker elever på 2. trinn når de løser oppgaver innen kombinatorikk, og hvordan argumenterer de for sine løsninger?»*. Vi ønsker også å si noe om hvilke pedagogiske implikasjoner disse funnene kan ha for lærere og lærerstudenter, slik at forskningen på denne måten kan være med på å utvikle lærerprofesjonen. Vi har også noen tanker rundt metoden, og har kommet frem til noen kritiske punkter, noe andre senere kan ta hensyn til. Gjennom forskningen og skrivingen av denne studien har det dukket opp en del nye spørsmål og temaer som vi tenker burde bli belyst i større grad. Dette vil komme frem i våre refleksjoner og forslag til videre forskning.

Et av de sentrale funnene i studien vår viser at elever på 2. trinn er i stand til å benytte seg av sofistikerte måter å løse oppgaver i kombinatorikk på. Dette kan vi se i sammenheng med det English (2005 s. 130) skiver om sin forskning på barn fra fire til ni år. Han skriver at elevene mellom 7 til 9 år ble i stand til å bruke sofistikerte og systematiske måter å løse kombinatorikkoppgaver på. Vi har funnet ut at dette skiller seg fra resultatene i Mahers (2011) forskning, hvor elevene ikke klarte å løse en tilsvarende oppgave, men at dette kan skyldes vår bruk av representasjoner i oppgaveløsningen. Dette kan vi si fordi de fleste elevene etter hvert benyttet seg av odometerstrategi i oppgaven med å kombinere antrekk. Dette kan vi se i motsetning til andreklassingene fra Mahers (2011) forskning, som ikke klarte å finne alle mulige antrekk med en oppgave med samme antall gensere og samme antall bukser. Dataene fra studien viser også at elevene i vårt datamateriale ofte endrer strategi til en mer sofistikert måte, når de blir bedt om å gi en garanti for sin konklusjon. Lærere kan få frem slike strategier ved å stille oppfølgingsspørsmål til elevenes innledende konklusjoner, som åpner for refleksjon over fremgangsmåte og resultater. Vår konklusjon er at elevene ofte bruker varierende strategier for å løse oppgaver i kombinatorikk, og at noen elever som er i den uplanlagte fasen kan ved hjelp av lærer eller medelever bli i stand til å bruke odometerstrategi, i tillegg til at en virkelighetsnær oppgave som er lett å relatere seg til vil ha en innvirkning på om eleven bruker en mer sofistikert strategi. Representasjonene elevene hadde tilgjengelig under oppgaveløsningen ble ofte grunnlaget for både strategien og argumentasjonen til elevene. Dette så vi gjennom at elevene baserte mye av både oppgaveløsingen og konklusjonen sin på manipulasjon av representasjonene.

6.1 Pedagogisk implikasjon

Det vi har sett gjennom denne studien, er hvordan elever på småtrinnet tydelig er i stand til å løse kombinatorikkoppgaver. Studien bidrar dermed med å belyse hvordan temaet kombinatorikk ikke behøver å være forbeholdt eldre klassetrinn, men kan bli mer benyttet i begynneropplæringen. Dette samstemmer med det English (1991, 1996), Maher (2011) og Lockwood et al. (2020) skriver i sine forskninger. Vi håper denne studien bidrar til å ufarliggjøre temaet kombinatorikk, og belyser nytten av å bruke det i problemløsning. Dersom lærere ønsker å implementere kombinatorikk i undervisningen sin, har vi noen forslag vi ønsker å trekke frem som nyttig ved planlegging av opplegg med kombinatorikk i fokus.

Som denne studien viser, burde lærere være oppmerksomme på hvilke oppgaver de velger, og hvilke representasjoner elevene får ha tilgjengelig når de arbeider. Skal man lage undervisningsopplegg på lave alderstrinn, burde oppgavene være mer virkelighetsnære og gjerne ha mindre utfallsrom (mulige kombinasjoner) enn på eldre alderstrinn. Å ha representasjoner eller konkreter tilgjengelig vil også være svært hensiktsmessig, særlig hvis målet er at alle elevene skal få til å løse oppgaven. Vi tenker også denne studien belyser hvordan unge elever kan utføre kombinatorikk med en odometerstrategi, og hvordan det derfor kan være nyttig å velge oppgaver hvor dette er mulig. Vi ser også nytten av å utfordre elevenes innledende løsninger, og be de beskrive hvordan de er sikre på at resultatet deres stemmer. Det får elevene til å revurdere resultatene sine, og tenke gjennom strategien. Det leder gjerne til nye utprøvinger, og mer sofistikerte løsningsstrategier.

6.2 Metodekritikk

Vi valgte å samle inn ny data omtrent to måneder etter første innsamling. Denne gangen fikk elevene en ny oppgave å arbeide med, og vi fikk da andre resultater enn ved første utprøving. Vi har reflektert og anslått at dette er forårsaket av de forskjellige oppgavene, både med selve oppgaveformuleringen, mulighetene i oppgaven og hvor virkelighetsnær oppgaven er for elevene. Samtidig kan det skje mye med 2. klassinger på to måneder. Det kan tenkes at klassen har jobbet med kombinatorikkoppgaver i løpet av disse to månedene, og derfor jobbet elevene på en annen måte denne gangen. Gjennom analyse av den første oppgaven (kulerammen) oppdaget vi at vi ikke kunne si noe om odometerstrategien fordi den ikke la opp til at elevene kunne benytte denne strategien i oppgaven. Det var altså grunnen til at vi valgte å teste ut en gang til, hvor vi ønsket å finne ut enda mer om elevenes strategier og argumentasjon enn vi kunne finne ut gjennom den første innsamlingen.

Vi opplevde at elevene i stor grad ble påvirket av hverandre da de arbeidet med oppgavene. Noen elever har en mer fremtredende personlighet eller er mer sikre i sine slutninger, og har dermed lettere for å ta ordet. I noen tilfeller førte dette til at det bare var en elevs strategi som kom tydelig frem i gruppearbeidet, selv om det kunne virke som elevene rundt ønsket å gjøre ting på en annen måte. Det var ofte elevene med de mest sofistikerte strategiene, som var mest fremtredende i samtalen. Da de først hadde presisert sitt synspunkt, sa de andre elevene ofte bare seg enige eller ble stille resten av utprøvingen. Dette kan ha ført til at elevene, særlig de med strategier i den uplanlagte fasen, ikke kom til syne. Vi tenker at i vår oppgave, hvor elevenes læringsutbytte ikke var i fokus, så kunne elevene fått jobbet mer selvstendig. Da kunne vi enklere kartlagt hver enkeltelevs egne strategier og rettferdiggjøringer. Dette ville derimot gjort studien betydelig mer tidkrevende. Samtidig kan det å sitte alene med to fremmede voksne skape et utrygt miljø for enkelteleleven, og ført til mindre deltagelse i oppgaven.

Gjennom NSD hadde vi søkt om å få lov til å forske på elevene, og bruke videokamera for å filme intervjuet. Vi hadde derimot ikke søkt om å kunne samle inn og bruke elevenes egne håndskrevne og tegnede representasjoner. Dette førte til at de måtte bli etterliknet av oss, ved at vi tegnet selv hva de hadde laget. I ettertid ser vi fordelene av å kunne bruke de originale arkene, fremfor vår etterlikning av dem. Våre kopier vil være preget av hvordan vi har tolket hvordan eleven produserte dem, selv om vi i høyeste grad forsøker å etterlikne de. Det kan være vi har misforstått tegningen, eller måten de forklarer den. Dersom vi hadde brukt originalene, kunne leseren selv reflektert nærmere over hva tegningen forteller. Det kunne derfor vært hensiktsmessig å søke til NSD om å kunne bruke elevers skriftlige arbeid i tillegg til å ha videopptak. Dette vil igjen skape flere hensyn å ta med tanke på personvern og kravet om privatliv.

Kulerammeoppgaven dreide seg om å plassere kuler på to staver som representerte en tierplass og enerplass i posisjonssystemet. På kulerammen vi brukte var det også en tredje stav som representerte hundrerplassen. Denne staven skulle ikke benyttes, noe som ble eksplisitt sagt i introduksjonen av oppgaven. Hundrerstaven ble uheldigvis en distraksjon for mange av elevene. Særlig da elevene begynte å nærme seg alle mulige kombinasjoner, og vi spurte om de var sikre på at det ikke finnes flere, henviste mange seg til hundrerstaven. Fokuset ble mer rettet mot mulighetene for nye kombinasjoner dersom hundrerstaven teltes, enn å prøve å finne nye kombinasjoner med en- og tierstaven. En løsning på dette hadde vært å ha en kuleramme hvor man bare har to staver, en for tierplassen og en for enerplassen.

6.3 Videre forskning

For videre forskning ser vi generelt hvordan kombinatorikk er noe som burde forskes mer på i barneskolen. Både hvordan elever løser problemer innenfor temaet, men også hvordan man kan bruke det i undervisning. Vi ser særlig nytten av mer forskning på bruk av konkreter i problemløsning med kombinatorikk, og hvordan de påvirker hvordan elevene løser oppgavene og eventuelt hvordan læringsutbytte påvirkes. Det hadde vært interessant å se om de norske 2. klassingene hadde klart å løse oppgaven dersom konkretene ikke var tilgjengelige, mer lik Maher (2011) sin forskning. Det kan også tenkes at dette ville vært mer hensiktsmessig for å få frem deres argumentasjoner, siden de må velge representasjoner for sine løsninger selv. Da er det også hensiktsmessig å måtte forsvare disse valgene. Vi tenker også at denne studien, hvor vi ønsket å analysere hvordan elevene argumenterer, hadde vært hensiktsmessig å teste på høyere alderstrinn. Maher (2011) sin forskning viste at elever på 3. trinn argumenterte mer for sine strategier enn de på 2. trinn. Derfor vil det å utføre denne studien på 3.-4. trinns elever kunne være hensiktsmessig dersom argumentasjon står i fokus.

Litteratur

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003) *Thinking mathematically*. Heinemann.

Clark, T., Foster, L., Sloan, L., & Bryman, A. (2021). *Bryman's Social Research Methods* (6. Utg). Oxford University Press.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational studies in Mathematics 22(5)*, 451-474. https://doi.org/10.1007/BF00367908

English, L. D. (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *The Journal of Mathematical Behavior 15(1)*, 81-112. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90042-5

English, L.D. (2005). Combinatorics and the Development of Children's Combinatorial Reasoning. I G. A. Jones (Red.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (121-141). Mathematics Education Library, vol 40. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_6

Fangen, K. (2010). *Deltagende observasjon* (2. Utg.). Fagbokforlaget

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *9*, 40–177. https://doi.org/10.2307/749946

Jeanotte og Kieran (2017) Jeannotte, D., Kieran, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educ Stud Math* 96, 1–16 (2017). https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Johnson, K., Herr, T. & Kysh, J. (2004). *Crossing the River with Dogs. Problem Solving for College Students*. Emeryville, CA: Key College Publishing

Jørgensen, C. & Onsberg, M. (2008). *Praktiske argumentation* (3. utg.). Retorikförlaget.

Klaveness, E. (2010). Konkretiseringsmateriell og abstraksjonsmateriell. Tangenten, 1, 27-53.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Red.), The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures (s. 229-269). Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2007) Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior, 26(1),* 60-82. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Larssen R., S. (2019) Kan kombinatorikk tegnes?: En kvalitativ stuide av andretrinnselevers tegninger og strategier i kombinatorikk [Masteroppgave]. Norges teknisk-naturvitenskapelige universistet

Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema, E. S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior, 59,* 100783. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783

Maher, C. A., Powell, A. B. & Uptegrove, E. B. (2010). *Combinatorics and Reasoning*. Springer Science + Business Media.

Matematikksenteret. (2021). *Seks perler.* Mattelist. https://www.mattelist.no/554

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse I kvalitative studier: den skrivende forskeren.* Universitetsforlaget.

Nordin, A. & Boistrup, L. B. (2018). A framework for identifying mathematical arguments as supported claims created in day-to-day classroom interactions. *The Journal of Mathematical Behavior, 51,* 15-27. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.005

Palmér, H. & Bomer, J. V. (2018). Problem Solving in Early Mathematics Teaching – A Way to Promote Creativity? *Creative Education, 9,* 1775-1793. https://doi.org/10.4236/ce.2018.912129

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving.* John Wiley & Sons inc.

Postholm, M. B. & Jacobsen D. I. (2018). F*orskningsmetode for masterstudenter I lærerutdanningen.* Cappelen Damm akademisk.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education.* BRILL.

Russell, S. J., Schifter, D., Kasman, R., Bastable, V. & Higgins, T. L. H. (2017). *But why does it work?: mathematical argument in the elementary classroom.* Heinemann.

Sandelowski, M. (2004). Using Qualitative Research. *Qualitative Health Research*, 14(10), 1366–1386. https://doi.org/10.1177/1049732304269672

Sriraman, B., & English, L. D. (2004). Connecting Research to Teaching: Combinatorial Mathematics: Research into Practice. *The Mathematics Teacher*, 98(3), 182–191. https://doi.org/10.5951/MT.98.3.0182

Sriraman, B., Umland, K. (2020). Argumentation in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_11

Stylianides, A, J. (2016). *Proving in the Elementary Mathematics Classroom*. Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198723066.001.0001

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 10(2),* 103–133. https://doi.org/10.1080/10986060701854425

Tjora, A. (2021). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (4. utgave. utg.). Gyldendal Akademisk.

Toulmin S. E. (2003) Uses of argument (2. Utg.) Cambridge university press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Umland, K., & Sriraman, B. (2020). Argumentation in Mathematics. I S. Lerman (Red.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_10

Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag. (MAT1-04). Hentet fra https://data.udir.no/kl06/mat1-04.pdf?lang=http://data.udir.no/kl06/nob

Utdanningsdirektoratet. (2019). Læreplan i matematikk 1.-10. (MAT01-05). Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Valenta, A., & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden*, *14*(3), 18 sider. https://doi.org/10.5617/adno.8195

Vedlegg

Vedlegg 1: Intervjuguide

Intervjuguide

Oppgave 1: kulerammeoppgaven

Forhåndsspørsmål:

- Husker dere hva dette er? (kulerammen)
- Hva betyr de forskjellige stavene?
- Hvilket tall er dette? (viser tallet 21 på kulerammen)

Oppgaveformulering:

"Hvor mange tall kan dere lage med disse kulene, dersom dere får lov til å sette dem på tierplassen og enerplassen"

Mulige elevløsninger:

- Det er 4 tall (gir ikke forklaring)
- Elevene tester ut mange ganger og mener på bakgrunn av dette at alle kombinasjoner er funnet.
- Elevene går systematisk gjennom alle kombinasjonene, og mener med bakgrunn i dette at alle kombinasjoner er funnet.
- Noen elever kan bruke andre metoder for å løse oppgaven. De får også ark og blyanter. Notering og tegning kan bli brukt for å finne kombinasjoner.

Oppgave 2: Antrekkoppgaven

Forhåndsspørsmål:

- Vet dere hva et antrekk er?

Oppgaveformulering:

"Else har tre gensere og to bukser med seg i kofferten. Hvor mange ulike antrekk kan hun lage med disse plaggene, dersom et antrekk skal bestå av en genser og en bukse"

Mulige elevløsninger:

- Den gule buksen passer ikke den grønne toppen
- Tester ut enkelte kombinasjoner
- Tester ut forskjellige kombinasjoner (med eller uten avvisning av gjentakende kombinasjoner). Kan glemme noen.
- Elevene har gått gjennom alle mulige antrekk med et syklisk mønster og mener med bakgrunn i dette at alle kombinasjoner av antrekk er funnet.
- Elevene bruker et odometermønster for å gjennomgå alle antrekkene (fullstendig eller ufullstendig)
- Elevene kan tegne alle mulige antrekk

Oppfølgingsspørsmål for oppgavene:

Få frem refleksjon over løsninger:

Hvordan tenkte du når du fant ut det?

Hvordan vet du at du har funnet alle tallene/antrekk som går an?

Hvordan vet du at det ikke er flere?

For å gjøre forklaringene tydeligere:

Kan du gjenta det du forklarte nå?

Kan du prøve å overbevise de andre på gruppa om dette?

Hvorfor sier du det?

Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Master i begynneropplæring i matematikk"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke andreklassingers strategier og argumentasjosformer i problemløsning. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Vi skal skrive en master i matematikk på grunnskolen som omhandler hvordan andreklassinger argumenterer for løsningsmetodene sine i arbeid med problemløsningsoppgaver i kombinatorikk.

Problemstilling: **"**hvordan argumenterer elever på andre trinn for sine strategier i problemløsning med oppgaver i kombinatorikk?".

For å svare på denne problemstillingen ønsker vi å observere elever i 2. klasse for å innhente data om hvordan de argumenterer når de løser en kombinatorikkoppgave. Gjennom observasjonen ønsker vi å ta video og lydopptak av elevene i arbeid, slik at vi har mulighet til å transkribere etter utprøvingen, slik at deres strategier og argumenter videre kan analyseres grundig.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU er ansvarlig for prosjektet.

Vår veileder for prosjektet er Marit Buset Langfeldt. Hun er universitetslektor på matematikkseksjonen på instituttet for lærerutdanning, ved NTNU.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Vi ønsker å undersøke elever på småtrinnet, mer spesifikt andretrinn, for å svare på problemstillingen vår. Utvalget av skole og klasse er gjort gjennom tidligere samarbeid i form av vikartimer, og kjennskap til skolen, lærere og elevene. Derfor er ditt barn valgt ut til å ta del i dette prosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?

Dersom du velger å delta i prosjektet, innebærer det at barnet ditt er med på en skoletime der vi jobber med en kombinatorikkoppgave i grupper. Vi kommer til å ha en deltagende observasjonsrolle, hvor vi gir gruppene oppgaven, og stiller noen spørsmål underveis for å få frem deres tankegang. Vi vil filme hver gruppe mens de jobber med oppgaven, og videoen vil bli transkribert og anonymisert når vi skal bruke dette videre. Alle elevene i klassen som ønsker å delta i prosjektet vil få den samme oppgaven, og vil delta på lik linje med de andre. Ved å ta kontakt med oss kan dere se oppgaven vi ønsker at elevene skal jobbe med. Kameraet som filmer elevene vil filme kontinuerlig den tiden elevene jobber med oppgaven. Den vil da ta opptak av det elevene gjør og sier i perioden oppgaven varer.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Dersom du ikke ønsker at ditt barn skal delta i dette prosjektet, vil eleven fortsatt gjennomføre oppgaven, men vil ikke bli tatt video av eller inkludert i selve prosjektet. Dette prosjektet vil altså ikke skille barnet fra resten av klassen, dersom du velger å delta eller ikke. Filmingen vil foregå på ett eget rom ved siden av, og på de gruppene der det er elever som ikke ønsker å delta vil vi ikke skru på kamera for å filme. Slik vil vi sørge for at elever som ikke skal delta i prosjektet ikke vil bli med på opptak.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Navnet og kontaktopplysningene til ditt barn vil vi erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Det er kun oss to lærerstudenter, Ingrid Abelsen og Eva Nyhus Reppe, i tillegg til vår veileder Marit Buset Langfeldt, som vil ha tilgang på disse kodene. Deres barn vil ikke kunne gjennkjennes i publikasjon av vår masteroppgave. Videoen vi tar vi bli tatt opp på NTNUs egne kameraer, som er sikret slik at opptakene ikke vil være tilgjengelige for andre en oss.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes 25. mai, og vurdering vil komme i løpet av høsten 2023. Ved prosjektslutt vil video, lydopptak og eventuelle personopplysninger (som kodeark) slettes.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med: NTNU ved Marit Buset Langfeldt, på mail: marit.b.langfeldt@ntnu.no. Eller studentene som er forskere av dette masterprosjektet: Ingrid Abelsen på mail: ingrid.abelse@gmail.com. Eva Nyhus Reppe på mail: eva.reppe@hotmail.com

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

> NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.
>
> Personvernombud for NTNU Thomas Helgesen på epost: thomas.helgesen@ntnu.no eller telefon: 93079038

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig Studenter

(Veileder)

Marit Buset Langfeldt Eva Nyhus Reppe

Ingrid Abelsen

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *master i begynneropplæring i matematikk*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- at barnet mitt deltar i prosjektet med video og lydopptak.

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3: Godkjennelse fra NSD

Sikt

Meldeskjema / Master i begynneropplæring i matematikk / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
410202	Standard	02.01.2023

Prosjekttittel
Master i begynneropplæring i matematikk

Behandlingsansvarlig institusjon
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig
Marit Buset Langfeldt

Student
Eva Nyhus Reppe

Prosjektperiode
15.11.2022 - 25.05.2023

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 25.05.2023.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Sikt har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

UTDYPENDE OM LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

BARN I FORSKNING
Husk at barns deltakelse i forskning skal være frivillig, selv om foresatte samtykker. Barnet bør derfor få alderstilpasset informasjon om prosjektet. Dere må også sørge for at barnet forstår at det kan trekke seg når som helst dersom det ønsker det.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Vi har vurdert at du har lovlig grunnlag til å behandle personopplysningene, men husk at det er institusjonen du er ansatt/student ved som avgjør hvilke databehandlere du kan bruke og hvordan du må lagre og sikre data i ditt prosjekt. Husk å bruke leverandører som din institusjon har avtale med (f.eks. ved skylagring, nettspørreskjema, videosamtale el.)

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Se våre nettsider om hvilke endringer du må melde: https://sikt.no/melde-endringar-i-meldeskjema

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Lykke til med prosjektet!

NTNU
Kunnskap for en bedre verden