

Guro Norset
Sara Storøy
Sigurd Stenbakk Almestrand

Markowitz' porteføljeteori: En tidsbasert analyse av porteføljeoptimalisering i Python

AF3035 Bacheloroppgave i Business Analytics

Bacheloroppgave i Økonomi og Administrasjon
Veileder: Denis Becker
April 2023

Guro Norset
Sara Storøy
Sigurd Stenbakk Almestrand

Markowitz' porteføljeteori: En tidsbasert analyse av porteføljeoptimalisering i Python

AF3035 Bacheloroppgave i Business Analytics

Bacheloroppgave i Økonomi og Administrasjon
Veileder: Denis Becker
April 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for økonomi
NTNU Handelshøyskolen



Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne oppgaven markerer avslutningen for vår bachelor i Økonomi og Administrasjon med fordypning innen Business Analytics, ved NTNU Handelshøyskolen. Å skrive denne oppgaven har vært en lærerik prosess hvor vi har blant annet tilegnet oss kunnskap om teorier knyttet til investering og porteføljer, og finansmarkedet.

I starten av prosessen gikk vi fram og tilbake angående valg av tema og etter hvert problemstilling. Til slutt fant vi ut at det var porteføljeoptimalisering vi synes var mest interessant, og relevant for fremtiden. På dette feltet var det Harry Markowitz (1952) sin moderne porteføljeteori vi ønsket å gå mer inn på.

Vi vil også benytte anledningen til å takke vår veileder Denis Becker for god oppfølging og hjelp underveis i arbeidet med oppgaven. Vi har fått gode råd og tips både gjennom e-post og digitale møter. Dette har vært til stor hjelp for oppgavens fremdrift.

Som gruppe har vi samarbeidet svært godt og hatt regelmessige møter. Vi har hjulpet hverandre og vært ivrige på å komme i mål med et produkt vi alle kan være fornøyde med. Dette har vært en lærerik prosess hvor vi har fått mer kunnskap og økt interesse i et spennende felt.

Innholdet i denne oppgaven står for forfatterens regning.

Sammendrag

Formålet med oppgaven er å se på hvordan optimale porteføljer basert på Markowitz sin teori endres over tid. Dette gjøres ved å svare på følgende problemstilling: Hvordan presterer Markowitz' moderne porteføljeteori over tid? For å besvare problemstillingen vil det bygges porteføljer på data fra 2011 til 2020, og deretter sammenlignes med porteføljer for perioden 2020 til 2023.

Ved sammenligning av porteføljene brukes deres Sharpe ratio til prestasjonsmåling. I tillegg blir de optimale porteføljene sammenlignet med en likevektet portefølje. De optimale porteføljene baseres på Markowitz (1952) sin teori, hvor en portefølje minimerer risiko, neste maksimerer Sharpe ratio, tredje benytter en bestemt risiko, og fjerde benytter et bestemt avkastningskrav. Felles for alle porteføljene er at det tas utgangspunkt i 50 aksjer på Nasdaq-markedet ved porteføljebygging. For å diversifisere er aksjene fordelt på følgende fem sektorer: teknologi, forbrukerdiskresjonær, forbruksvarer, industri og energi. I tillegg tas det hensyn til aksjenes korrelasjons- og betaverdier.

En likevektet portefølje som ikke var optimalisert, presterte på nivå med flere av porteføljene som var optimalisert i henhold til Markowitz sin teori. Dette svekker en påstand om at Markowitz' optimale porteføljer presterer bedre over tid enn tilfeldige porteføljer. Årsaken til dette kan være at Markowitz porteføljeoptimering baserer seg på historiske data og vet ikke noe om fremtidens utvikling. Uforutsette hendelser kan dermed være kritiske for prestasjonen til Markowitz sin teori. Ved en mer dynamisk praktisering av Markowitz' teori kan det føre til et større skille fra porteføljer som ikke er optimalisert.

Abstract

The purpose of the thesis is to look at how optimal portfolios based on Markowitz's theory change over time, by answering the following question: How does Markowitz's modern portfolio theory perform over time? To answer the problem statement, portfolios will be built on data from 2011 to 2020, and then compared with portfolios for the period 2020 to 2023.

When comparing the portfolios, their Sharpe ratio is used to measure performance. In addition, the optimal portfolios are compared with an equally weighted portfolio. The optimal portfolios are based on Markowitz's (1952) theory, where one portfolio minimizes risk, the next maximizes the Sharpe ratio, the third uses a specific risk, and the fourth uses a specific return requirement. All the portfolios have in common that they use 50 shares on the Nasdaq market as a starting point when building the portfolios. To diversify, the shares are divided into the following five sectors: technology, consumer discretionary, consumer goods, industrials, and energy. In addition, the shares' correlation and beta values are considered.

A balanced portfolio that was not optimized performed on par with several of the portfolios that were optimized based on Markowitz' theory. This weakens a statement that Markowitz' optimal portfolios perform better over time than random portfolios. The reason for this may be that Markowitz' portfolio optimization is based on historical data and does not know anything about future developments. Unforeseen events can thus be critical to the performance of Markowitz' theory. A more dynamic application of Markowitz' theory can lead to a greater separation from portfolios that are not optimized.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning	1
2 Teori	2
2.1 Risiko.....	2
2.2 Avkastning	4
2.3 Kovarians.....	4
2.4 Korrelasjon	5
2.5 Diversifisering.....	6
2.6 Moderne porteføljeteori.....	6
2.7 Optimering av "Minimum risiko"-portefølje.....	8
2.8 Sharpe ratio.....	9
2.9 Optimering av «Maksimum Sharpe»-portefølje.....	9
3 Metode	10
3.2 Valg av aktiva	10
3.3 Statistiske beregninger.....	11
3.4 Porteføljebygging med treningsdata.....	11
3.5 Porteføljebygging med testdata	12
3.6 Validitet og reliabilitet	12
4 Datapresentasjon og analyse	13
4.1 Valg av aksjer	13
4.2 Optimalisering av porteføljer	15
4.2.1 «Like vekter»-portefølje i treningsperioden.....	15
4.2.2 «Maksimum Sharpe»-portefølje i treningsperioden.....	16
4.2.3 «Minimum risiko»-portefølje i treningsperioden.....	17
4.2.4 «Ønsket risiko»-portefølje i treningsperioden.....	18
4.2.5 «Ønsket avkastning»-portefølje i treningsperioden.....	19
4.2.6 Effisientfronten i treningsperioden.....	20
4.3 Resultat	20
4.3.1 "Minimum risiko"-porteføljens prestasjon i testperioden	20
4.3.2 "Maksimum Sharpe"-porteføljens prestasjon i testperioden.....	22
4.3.3 "Ønsket risiko"-porteføljens prestasjon i testperioden.....	23
4.3.4 "Ønsket avkastning"-porteføljens prestasjon i testperioden.....	24
4.3.5 "Like vekter"-porteføljens prestasjon i testperioden	25
4.3.6 Effisientfronten i testperioden.....	26
4.4 Oppsummering	26
5 Konklusjon	27

6 Referansliste.....	28
Appendix.....	30
<i>Appendix 1.....</i>	<i>30</i>

Figur- og tabelloversikt

Tabell 1: Oversikt over aksjer

Tabell 2: Korrelasjonsmatrise med aksjen CELH

Tabell 3: Aksjenes beta

Tabell 4: Optimalisert “Like vektor”-portefølje for treningsperioden

Tabell 5: Optimalisert “Maksimum Sharpe”-portefølje for treningsperioden

Tabell 6: Optimalisert “Minimum risiko”-portefølje for treningsperioden

Tabell 7: Korrelasjon mellom aksjene K, KO, PEP og MCD

Tabell 8: Optimalisert “Ønsket risiko”-portefølje for treningsperioden

Tabell 9: Optimalisert “Ønsket avkastning”-portefølje for treningsperioden.

Tabell 10: “Minimum varians”-porteføljen sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

Tabell 11: Optimalisert “Minimum varians”-portefølje for testperioden.

Tabell 12: “Maksimum Sharpe”-porteføljen sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

Tabell 13: Optimalisert “Maksimum Sharpe”-portefølje for testperioden.

Tabell 14: “Ønsket risiko”- porteføljen sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

Tabell 15: “Ønsket avkastning”-porteføljen sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

Tabell 16: “Like vektor”-porteføljen sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

Formel 1: Standardavvik aksje

Formel 2: Varians

Formel 3: Standardavvik portefølje

Formel 4: Beta

Formel 5: Aritmetisk avkastning

Formel 6: Kovarians

Formel 7: Kovariansmatrise

Formel 8: Korrelasjon

Formel 9: Sharpe ratio

Optimeringsproblem 1

Optimeringsproblem 2

Optimeringsproblem 3

Optimeringsproblem 4

Figur 1: Effisientfront for treningsperioden

Figur 2: Effisientfront for testperioden

1 Innledning

Porteføljeoptimalisering handler om å sette sammen en portefølje bestående av ulike aktiva som gir høyest mulig avkastning til en lavest mulig risiko. Harry Markowitz er en økonom blant annet kjent for sitt arbeid knyttet til moderne porteføljeteori (Markowitz, 1952), som er en av de mest populære teoriene for porteføljeoptimering. I 1952 publiserte han artikkelen “Portfolio Selection” med teorien The Modern Portfolio Theory. Før Markowitz publiserte sin teori, fokuserte investorer på hvert enkelt aktiva og dets risiko og avkastning. For å sette sammen en optimal portefølje inkluderte en gjerne de aktiva med høyest avkastning og lavere risiko. Markowitz sin porteføljeteori har en litt annen tilnærming. Den påpeker viktigheten av å diversifisere ved å se på forholdet mellom ulike aktiva, for å skape en optimal portefølje. (Markowitz, 1952)

Oppgavens hensikt er å vurdere i hvilken grad optimale porteføljer, basert på ulike risiko- og avkastningsholdninger, endres over tid. Det innebærer å se på endring i porteføljenes Sharpe ratio. Porteføljene vil ta utgangspunkt i Markowitz sin teori, og med dette som grunnlag skal oppgaven omhandle; Hvordan presterer Markowitz’ moderne porteføljeteori over tid?

Avgrensninger i oppgaven er at shortsalg ikke tillates og det sees bort ifra risikofri rente. Videre er det også foretatt avgrensninger ved valg av aksjer. Aksjene er kun hentet fra Nasdaq-markedet og tidsperioden er avgrenset til 04.01.2011 - 31.12-2022. Da samtlige aktiva er aksjer er det forsøkt å diversifisere ved å hente aksjer fra ulike sektorer hvor følgende fem sektorer er benyttet; teknologi, forbrukerdiskresjonær, forbruksvarer, industri og energi.

Oppgaven er inndelt i fire hovedkapitler; teori, metode, datapresentasjon og analyse, og konklusjon. Oppgaven vil først og fremst omhandle teori om Markowitz sin moderne porteføljeteori og relevante teoretiske begreper. Neste kapittel vil omhandle oppgavens metode. Deretter vil resultatene presenteres og analyseres i et eget kapittel. Avslutningsvis vil det være en konklusjon av hvordan Markowitz’ moderne porteføljeteori presterer over tid.

2 Teori

2.1 Risiko

Alle investeringer krever en avveining mellom avkastning og risiko. En investor har som formål å oppnå høyest mulig avkastning i samsvar med lavest mulig risiko. Høy avkastning oppstår ofte i samsvar med en høyere risiko, men ved hjelp av diversifisering kan man redusere noe av porteføljerisikoen for samme nivå på avkastning. Man kan derimot aldri bli helt kvitt markedsrisikoen, uansett hvor mange aksjer porteføljen består av eller hvor godt man diversifiserer. (AksjeNorge, 2022)

Standardavviket benyttes for å beregne risiko ved en investering. Standardavviket måler spredningen rundt den forventede avkastningen, og desto større spredning, desto mer risiko. Standardavviket beregnes ved å ta kvadratroten av variansen, som vist i formelen nedenfor;

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^m (r_t^i - \mu_i)^2}{m - 1}}$$

Formel 2: Standardavvik aksje

Der,

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^m (r_t^i - \mu_i)^2}{m - 1}$$

Formel 2: Varians

Videre beregnes porteføljens risiko slik:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \omega_i \omega_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

Formel 3: Standardavvik portefølje

Der,

$i, j = \text{Ulike aktiva } (= 1, 2, 3, \dots, n)$

$\omega_{ij} = \text{Vekten til de ulike aktivaene}$

$\sigma_{ij} = \text{Standardavvik}$

$\rho_{ij} = \text{Korrelasjon mellom aktiva } i \text{ og } j$

Den totale risikoen, standardavviket, består av systematisk og usystematisk risiko. Den systematiske risikoen vil alltid være til stede, og er kjent som markedsrisikoen fordi den består av makroforhold som påvirker alle selskapene i markedet. Eksempler på slike hendelser er finanskrisen i 2008, korona-pandemien og Ukraina-krigen i 2022. Den usystematiske risikoen er den spesifikke risikoen for investeringen. Denne risikoen kan man redusere ved å investere i flere aksjer. (Hippe, 2019)

Den systematiske risikoen betegnes som beta. En beta lik 1 tilsvarer risikoeksponeringen til markedet, mens en beta lik 0 tilsvarer en risikofri eksponering. Beta mellom 0 og 1 tyder på en lavere systematisk risiko i forhold til markedet generelt, mens en beta over 1 tyder på høyere systematisk risiko i forhold til markedet. Altså, desto høyere beta, desto mer markedsrisiko. (Hippe, 2019)

$$\beta = \frac{\text{Cov}(r^i, r^j)}{\text{Var}(r^j)}$$

Formel 4: Beta

Se formel 6 for kovarians og formel 2 for varians.

2.2 Avkastning

Avkastning er et mål på lønnsomhet basert på hvordan verdien av en eiendel har endret seg over tid. Når man skal vurdere aksjer, ser man på den forventede avkastningen. Ved bruk av regnestykker og historiske data kan man estimere hvor mye man får tilbake for sine investeringer, og dermed om det er lønnsomt.

Aritmetisk avkastning beregnes ved å summere avkastningen i de ulike tidsperiodene og dividere på antall tidsperioder. Her vektes hver periode likt. Ved å benytte aritmetisk avkastning kan man beregne gjennomsnittlig årlig avkastning. Denne beregningsmetoden er mye brukt i moderne porteføljeteori. I tillegg er metoden forenelig med de lineære modellene som benyttes for å beregne beta og Sharpe ratio. (Banner et al., 2018, s. 3)

$$\text{Aritmetisk avkastning} = \frac{(P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}}$$

Formel 5: Aritmetisk avkastning

Der,

P_t = Pris på tidspunkt t

P_{t-1} = Pris på tidspunkt $t - 1$

2.3 Kovarians

Kovariansen kan si noe om risikonivået til porteføljen ettersom den måler styrken på sammenhengen mellom to aksjer. Hvis de har høy kovarians, betyr det at de har en tendens til å bevege seg i samme retning. Det vil si at dersom en aksje har dårlig avkastning, vil mest sannsynlig den andre også ha det. For å minimere porteføljerisikoen kan det være hensiktsmessig å velge aksjer med lav kovarians.

$$Cov(r^i, r^j) = \sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^m (r_t^i - \mu_i)(r_t^j - \mu_j)}{m}$$

Formel 6: Kovarians

For å beregne kovariansen til porteføljen benyttes kovariansmatrisen. Det er en kvadratisk matrise med dimensjonen $n \times n$, der n er antall aksjer i porteføljen. Først beregnes kovariansen mellom hvert par av aksjer, og deretter summeres matrisen. Dette gir et mål på porteføljens totale risiko og avkastning, og kan dermed benyttes til å optimalisere porteføljen ved å finne den mest effektive sammensetningen av aksjer. (Markowitz, 1991, s. 469-477)

$$\Omega_{n \times n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

Formel 7: Kovariansmatrise

2.4 Korrelasjon

Korrelasjon måler både styrken og retningen av sammenhengen mellom to aksjers avkastning. Verdien angis som et tall mellom -1 og 1. En korrelasjon på 1 anses som høy positiv korrelasjon, og indikerer at aksjene beveger seg i samme retning og at deres avkastning har høy sammenheng. En korrelasjon på -1 anses som høy negativ korrelasjon, og indikerer at aksjene beveger seg i motsatt retning. Videre tilsvarende en verdi på 0,6 som noe korrelasjon, mens en null-korrelasjon betyr at det ikke er noen sammenheng mellom aksjene. (Mjøhlhus, 2017, s. 26)

$$Corr[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X] * Var[Y]}}$$

Formel 8: Korrelasjon

2.5 Diversifisering

Ved å spre investeringene kan en oppnå diversifiseringseffekter. Diversifisering kan blant annet innebære å investere i ulike aksjer eller ulike typer aktivaklasser. Videre kan man diversifisere ytterligere ved å inkludere ulike sektorer. I tillegg kan det være hensiktsmessig å kombinere aksjer med lav kovarians, og korrelasjon nær null. Risikoen til de enkelte aksjene reduseres nemlig i porteføljen på grunn av deres samlede effekt. Hvis det går dårlig med en aksje, vil tapet kunne reduseres som følge av fortjenesten på en annen aksje. Det kan bidra til at den totale svingningen reduseres, som igjen medfører at porteføljens totale risiko reduseres. Oppnår man dette kalles det en diversifiseringsfordel. (Markowitz, 1991, s. 469-477; Greiner, 2021).

2.6 Moderne porteføljeteori

I Markowitz sin moderne porteføljeteori er det flere forutsetninger hvor en av dem omhandler investorers villighet til å ta risiko. Hvordan investorer setter sammen sine porteføljer, avhenger av risikoaversjon. Risikoaverse investorer ønsker helst å unngå risiko. En av modellens antakelser er at investorer ønsker å maksimere avkastning samtidig som de er rasjonelle og ikke ønsker å ta unødvendig risiko, altså de er risikoaverse. Andre antakelser ved modellen er at alle investorer har tilgang til samme informasjon, og at de har samme syn på forventet avkastning. I tillegg forutsettes det at en investor alene ikke påvirker markedsprisene. Modellen tar heller ikke skatt og transaksjonskostnader i betraktning. Avslutningsvis forutsettes det også at avkastningen er normalfordelt og at ubegrensede mengder kapital kan lånes til en risikofri rente. (Anthony, 2022)

I henhold til modellen kan optimering for en gitt avkastning optimeres ved løse optimeringsproblem 1:

$$\text{minimize} \quad \sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i * w_j * \sigma_{ij}}$$

$$\text{subject to:} \quad \sum_{i=1}^n \mu_i * w_i \geq \widehat{\mu}_P$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \text{ (Betingelse som utelukker shortsalg)}$$

Optimeringsproblem 1

Videre kan avkastningen maksimeres for en gitt risiko. Et slikt problem formuleres slik:

$$\text{maximize} \quad \mu_P = \sum_{i=1}^n \mu_i * w_i$$

$$\text{subject to:} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i * w_j * \sigma_{ij}} \leq \widehat{\sigma}_P$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \text{ (Betingelse som utelukker shortsalg)}$$

Optimeringsproblem 2

Der,

$\widehat{\sigma}_p$ = Ønsket Risiko,

w_i = Vekting av aksje i ,

w_j = Vekting av aksje j ,

μ_p = Porteføljens avkastning,

μ_j = Avkastning for aksje j ,

σ_{ij} = Kovarians for aksje i og aksje j

2.7 Optimering av “Minimum risiko”-portefølje

For “Minimum risiko”-porteføljen er hensikten å finne porteføljen med lavest mulig varians. I tillegg krever løsningen at vektene ikke overstiger 100%, samt at vektene er mellom 0 og 1 da modellen ikke tillater shortsalg. I matrisenotasjon ser optimeringsproblemet slik ut:

$$\text{minimize} \quad \sigma_p^2 = w * C * w^T$$

$$\text{subject to:} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$0 \leq w_i \leq 1$$

$$w_i \geq 0 \text{ (Betingelse som utelukker shortsalg)}$$

Optimeringsproblem 3

Der,

σ_p^2 = Porteføljens varians

w = Porteføljens vektor

C = Matrise over aktiavenes kovarians

w^T = Porteføljens vektor (transponert)

2.8 Sharpe ratio

Avveining mellom avkastning og risiko kan måles ved hjelp av Sharpe ratio. Sharpe ratio, eller Sharpe, er et finansielt mål på porteføljens prestasjon utviklet av William Sharpe (1966). Porteføljer med høy Sharpe ratio er bedre sammensetninger av aktiva da det betyr mer avkastning per risiko. Beregningen brukes for å vurdere prestasjonen til en portefølje. Dette tillater sammenligning av ulike porteføljer, eller porteføljer på ulike tidspunkt. Sharpe ratio defineres ved:

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{R_p}{\sigma_p}$$

Formel 9: Sharpe ratio

Der,

R_p = Porteføljens avkastning

σ_p = Porteføljens standardavvik

2.9 Optimering av «Maksimum Sharpe»-portefølje

Porteføljen med maksimum Sharpe ratio gir mest avkastning per standardavvik basert på de historiske avkastningene. Maksimering av Sharpe ratio gjøres ved å skrive om maksimeringsproblemet til et minimeringsproblem, med de samme forutsetningene for vektene som ved “Minimum varians”-porteføljen.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & -\frac{R_p}{\sigma_p} \\ \text{subject to:} \quad & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & 0 \leq w_i \leq 1 \end{aligned}$$

Optimeringsproblem 4

Der,

$R_p = \text{Porteføljens avkastning}$

$\sigma_p = \text{Porteføljens standardavvik}$

$w_i = \text{vekt for aktiva } i$

3 Metode

Undersøkellesdesignet er en deduktiv tilnærming hvor Markowitz (1952) sin teori benyttes som utgangspunkt. Oppgaven tester teoriens prestasjon over tid, og problemstillingen anses dermed som testende. For å besvare denne problemstillingen benyttes en kvantitativ metode hvor det innhentes sekundærdata fra yahoo.finance.com.

3.2 Valg av aktiva

Metoden består av fire deler der første del innebærer valg av aktiva hvor det på forhånd er besluttet at samtlige skal være aksjer. Datasettet i analysen er hentet fra Yahoo Finance, og tar utgangspunkt i 50 utvalgte aksjer fra Nasdaq-indeksen. Disse aksjene er hentet fra ulike sektorer for å oppnå diversifisering, slik Markowitz (1952) påpeker er viktig. Fra sektorene teknologi, forbrukerdiskresjonær, forbruksvarer, industri og energi er det valgt 10 tilfeldige aksjer fra hver sektor. Videre deles datasettet inn i en treningsperiode som strekker seg fra 04.01.2011 til 31.12.2019, og en testperiode fra 02.01.2020 til 31.12-2022. Det dannes så et nytt utvalg bestående av aksjer med en negativ korrelasjonsverdi eller en verdi nær 0 for å diversifisere ytterligere (Nordnet, 2020).

Følgende 50 aksjer ble valgt (appendix 1):

Sektor	Symbol
Teknologi	LOGI, DLB, SAP, ORCL, AAPL, MSFT, ADBE, ASML, NVDA, TYL
Forbrukerdiskresjonær	AMZN, TSLA, TM, SBUX, BKNG, DIS, MA, MCD, NKE, NFLX
Forbruksvarer	TAP, DAR, CELH, K, VOXX, KO, SONY, MNST, PEP, DEO
Industri	TER, TMO, VMI, TRMB, ROK, UNP, JBHT, MMM, PCAR, GD
Energi	BKR, ABB, CTRA, CVX, SM, EQNR, XOM, DVN, HLX, OXY

Tabell 5: Oversikt over aksjer

3.3 Statistiske beregninger

Neste del omhandler aksjenes statistiske data. Det innebærer beregning av hver aksjes daglige avkastning, årlig gjennomsnittlig avkastning, kovarians, beta og korrelasjon. Dette danner grunnlaget for når det senere skal lages ulike porteføljer. Gjennomsnittlig avkastning for aktivaene over en gitt periode beregnes gjennom aritmetisk beregning. Videre vil porteføljens avkastning og risiko beregnes på bakgrunn av de daglige gjennomsnittlige avkastningene. Porteføljens avkastning beregnes årlig, og det er tatt utgangspunkt i 252 trading-dager per år. Porteføljen sin risiko beregnes videre på bakgrunn av aktivaenes kovarians.

3.4 Porteføljebygging med treningsdata

Tredje del innebærer å bygge ulike porteføljer med utgangspunkt i Markowitz sin teori, som skal benyttes i videre analyse. Her konstrueres fem ulike porteføljer basert på historisk data fra treningsperioden. Av de fem porteføljene kalles en "Like vekter" og består av alle de 50 aksjene og alle er likt vektet. De andre fire porteføljene optimaliseres med utgangspunkt i aksjenes beta- og korrelasjonsverdi. I denne oppgaven er det ønskelig med aksjer med betaverdi under

1,6, eller en korrelasjonsverdi nær 0. En av disse porteføljene er laget med utgangspunkt i å maksimere Sharpe ratio og heter “Maksimum Sharpe”. Neste portefølje kalles “Minimum risiko” hvor hensikten er å minimere variansen. Her krever løsningen at vektene ikke overstiger 100%, samt at vektene er mellom 0 og 1 da modellen ikke tillater shortsalg. De siste porteføljene kalles “Ønsket risiko” hvor porteføljen har et risikokrav, og “Ønsket avkastning” hvor porteføljen har et avkastningskrav. I tillegg til å bygge disse porteføljene blir det dannet en effisientfront som også skal benyttes i videre analyse.

3.5 Porteføljebygging med testdata

Fjerde del innebærer å konstruere nye optimale porteføljer. Frem til nå er det benyttet data fra treningsperioden 04.01.2011 - 31.12.2019, mens i denne delen brukes historisk data fra testperioden 02.01.2020 - 31.12-2022. Her benyttes lik fremgangsmåte som i tredje del for å lage fem nye porteføljer. I tillegg optimaliseres “Maksimum Sharpe”-porteføljen og “Minimum risiko”-porteføljen på nytt i samsvar med data fra testperioden. Porteføljene “Ønsket risiko” og “Ønsket avkastning” optimaliseres ikke på nytt i testperioden da det ikke vil bidra til å besvare oppgavens problemstilling. En ny optimalisering innebærer å vurdere porteføljen sin avkastning for et gitt risikonivå, eller hvor mye risiko som må tas for et gitt avkastningsnivå i to forskjellige perioder. Dette blir en sammenligning av to markeder, mer enn en prestasjonsvurdering av Markowitz’ porteføljeteori over tid. Den likevektede porteføljen blir heller ikke optimalisert på nytt da den fremdeles vil inkludere alle aksjene hvor alle er likt vektet. Den benyttes dermed som et referansepunkt. Til slutt sammenlignes de nye “Maksimum Sharpe”- og “Minimum risiko”-porteføljene med porteføljene fra treningsperioden. Når porteføljene sammenlignes brukes deres Sharpe ratio til prestasjonsmåling. I tillegg skal det ses på hvor godt de optimale porteføljene gjør det sammenlignet med en portefølje som vektlegger hver aksje likt. Slik kan man se hvordan Markowitz sin teori gjør det over tid.

3.6 Validitet og reliabilitet

Det er forsøkt å styrke oppgavens validitet og reliabilitet best mulig. Dette er gjort ved å importere data direkte fra Yahoo Finance inn i Python. På denne måten blir registrering av data nøyaktig, gitt at Yahoo Finance sine verdier er korrekte. I tillegg er alle dager i datasettet som mangler verdi fjernet. Likevel eksisterer det faktorer som kan svekke oppgavens validitet og

reliabilitet, som for eksempel valg av tidsperiode. Markowitz sin teori baseres kun på historiske data. Oppgavens datasett består av perioder preget av pandemi og krig, noe som kan svekke porteføljebyggingen etter Markowitz (1952) sin teori. Ved valg av en annen tidsperiode kunne oppgaven eventuelt fått en annen konklusjon. Videre består testdatasettet av en periode på 3 år. Om dette er urealistisk med tanke på at aksjene i porteføljen kan endres hyppigere, vil det kunne svekke validitet og reliabilitet ytterligere.

4 Datapresentasjon og analyse

4.1 Valg av aksjer

Blant de 50 aksjene beregnes korrelasjonsverdier og beta for å selektare aktuelle aksjer til porteføljebygging. Blant aksjene skiller CELH seg spesielt ut, da denne har lavest korrelasjon med samtlige aksjer. Fra korrelasjonsmatrisen (tabell 2) fremkommer det at de laveste korrelasjonsverdiene strekker seg fra om lag -0.028 til 0,030. CELH, VOXX, NFLX, TM, CTRA, K, TSLA, AMZN, TAP og TYL er dermed essensielle aksjer å inkludere for å sikre tilstrekkelig diversifisering.

Aksje 1	Aksje 2	Korrelasjon
NFLX	CELH	-0.027533
TM	CELH	0.004052
ORCL	CELH	0.017504
BKR	CELH	0.021669
TSLA	CELH	0.022004
NKE	CELH	0.025430
K	CELH	0.025431
NVDA	CELH	0.026571
VOXX	CELH	0.030214

Tabell 6: Korrelasjonsmatrise med aksjen CELH

For aksjenes betaverdi er det ønskelig at denne ikke er høy da det relaterer til større grad av risiko. Aksjenes beta er listet i tabell 3. Ved bruk av formelen for beta (formel 4) beregnes verdien 1,54 til å være den høyeste betaen, og tilhører aksjen NVDA. Dersom NASDAQ-

indeksen eksempelvis varierer med 10%, tilsier dette at NVDA varierer med 15,4%. På tross av risikoen knyttet til aksjens beta, har den derimot en lav korrelasjon med aksjen CELH. I denne oppgaven vurderes derfor ikke risikoen som “for høy” til å utelukke aksjen fra porteføljen ettersom CELH også inkluderes i porteføljen. Videre skiller aksjen K seg ut med en svært lav beta på 0,26. Aksjenes beta-verdier strekker seg derfor fra 0,26 til 1,54, og ingen av disse fremstår som for risikable for porteføljebyggingen. Det brede spekteret av betaverdier viser god diversifisering av risiko, og bidrar til jevn avkastning på tross av endringer i markedet.

Aksje	Beta	Aksje	Beta	Aksje	Beta
AAPL	1,053645	HLX	1,274423	ROK	0,958373
ABB	0,821963	JBHT	0,707322	SAP	0,857083
ADBE	1,159049	K	0,263264	SBUX	0,837218
AMZN	1,102494	KO	0,426435	SM	1,385683
ASML	1,209639	LOGI	0,966531	SONY	0,845112
BKNG	0,971455	MA	0,998585	TAP	0,516811
BKR	0,892959	MCD	0,497463	TER	1,324524
CELH	1,020705	MMM	0,644229	TM	0,594168
CTRA	0,680335	MNST	0,731317	TMO	0,809033
CVX	0,717526	MSFT	1,028284	TRMB	1,105047
DAR	0,927296	NFLX	1,150500	TSLA	1,405231
DEO	0,553401	NKE	0,829495	TYL	0,928867
DIS	0,809806	NVDA	1,542916	UNP	0,751229
DLB	0,792042	ORCL	0,815309	VMI	0,793436
DVN	1,055212	OXY	0,935157	VOXX	0,975713
EQNR	0,776157	PCAR	0,794068	XOM	0,618940
GD	0,634579	PEP	0,456473		

Tabell 7: Aksjenes beta

4.2 Optimalisering av porteføljer

Som beskrevet tidligere vil oppgaven sammenligne treningsdata og testdata ved bruk av Sharpe ratio. I tillegg skal disse sammenlignes med en portefølje bestående av aksjer med like vekter.

4.2.1 «Like vekter»-portefølje i treningsperioden

Den likevektede porteføljen inkluderer alle de 50 aksjene, der hver aksje tildeles en vekt på 2%. Porteføljens avkastning for perioden 2011-2020 er 18,49%, med en risiko på 16,76%. Sharpe ratioen blir dermed 1,1 (tabell 4). Porteføljen brukes som et referansepunkt ved vurdering av prestasjonen til de optimaliserte versus en ikke-optimalisert portefølje.

Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt
AAPL	2,0 %	HLX	2,0 %	ROK	2,0 %	DIS	2,0 %
ABB	2,0 %	JBHT	2,0 %	SAP	2,0 %	DLB	2,0 %
ADBE	2,0 %	K	2,0 %	SBUX	2,0 %	DVN	2,0 %
AMZN	2,0 %	KO	2,0 %	SM	2,0 %	EQNR	2,0 %
ASML	2,0 %	LOGI	2,0 %	SONY	2,0 %	NVDA	2,0 %
BKNG	2,0 %	MA	2,0 %	TAP	2,0 %	ORCL	2,0 %
BKR	2,0 %	MCD	2,0 %	TER	2,0 %	OXY	2,0 %
CELH	2,0 %	MMM	2,0 %	TM	2,0 %	PCAR	2,0 %
CTRA	2,0 %	MNST	2,0 %	TMO	2,0 %	UNP	2,0 %
CVX	2,0 %	MSFT	2,0 %	TRMB	2,0 %	VMI	2,0 %
DAR	2,0 %	NFLX	2,0 %	TSLA	2,0 %	VOXX	2,0 %
DEO	2,0 %	NKE	2,0 %	TYL	2,0 %		
GD	2,0 %	PEP	2,0 %	XOM	2,0 %		
Porteføljens avkastning		18,49 %					
Porteføljens risiko		16,76 %					
Sharpe rate		1,1					

Tabell 8: Optimalisert "Like vekter"-portefølje for treningsperioden

4.2.2 «Maksimum Sharpe»-portefølje i treningsperioden

Vektene for porteføljen med maksimal Sharpe ratio ble oppnådd ved å løse fjerde optimeringsproblem. Porteføljen inkluderer 13 aksjer og ekskluderer resterende 37 aksjer. I porteføljen er det 4 aksjer som skiller seg ut. MA, TYL, MCD, og PEP tildeles henholdsvis 19,05%, 17,28%, 14,32% og 10,58% av vektene, som utgjør i overkant av 60% av de totale investeringene. Det kan dermed diskuteres om porteføljen oppfyller nødvendig diversifisering i henhold til Markowitz sin teori ettersom kun fire aksjer utgjør over halvparten av porteføljen. Dette kan anses som minimal diversifisering. Samtidig representerer de fire aksjene tre ulike sektorer, noe som bidrar til diversifisering.

Porteføljen oppnår en årlig avkastning på 32,95%, med en årlig risiko på 17,82%. Sharpe ratio blir dermed 1,85 for denne porteføljen, og er den maksimale Sharpe ratio som er mulig å oppnå med de aksjer og data som er brukt.

Navn	Vekt	Navn	Vekt
AAPL	5,77%	NFLX	5,47%
AMZN	0,29%	NVDA	3,42%
ASML	3,02%	PEP	10,58%
CELH	5,43%	SBUX	2,72%
MA	19,05%	TSLA	5,42%
MCD	14,32%	TYL	17,28%
MNST	7,22%		
Porteføljens avkastning		32,95 %	
Porteføljens risiko		17,82 %	
Sharpe ratio		1,85	

Tabell 5: Optimalisert "Maksimum Sharpe"-portefølje for treningsperioden

4.2.3 «Minimum risiko»-portefølje i treningsperioden

Den effisiente porteføljen med minst mulig risiko finnes ved å løse tredje optimeringsproblem. Løsningen finner vektene blant de 50 ulike aksjene som gir minst mulig risiko basert på de historiske dataene. Porteføljen består av 13 aksjer hvor alle fem sektorer er representert, med en avkastning på 11,92% og en risiko på 11,15%. Porteføljen oppnår en Sharpe ratio på 1,1.

Navn	Vekt	Navn	Vekt
AAPL	2,78%	KO	12,78%
CELH	0,14%	MCD	21,56%
DEO	8,01%	NFLX	0,01%
DLB	3,3%	PEP	22,27%
GD	0,37%	TM	5,64%
JBHT	4,44%	XOM	5,04%
K	13,67%		
Porteføljens avkastning		11,92 %	
Porteføljens risiko		11,15 %	
Sharpe Ratio		1,1	

Tabell 6: Optimalisert "Minimum risiko"-portefølje for treningsperioden

Da målet ved denne porteføljebyggingen er å redusere porteføljens risiko, er det verdt å diskutere porteføljens diversifisering. På den ene siden er alle fem sektorer representert i løsningen. I tillegg investeres det størst andel i PEP, MCD, K og KO, hvor PEP og MCD har høyest andel, og er fra ulike sektorer. Videre har MCD og K en lav korrelasjon på 0,279 (tabell 7). Dette er tre faktorer som bidrar til diversifisering. På en annen side er PEP, KO og K fra samme sektor. I tillegg har PEP og KO en korrelasjon på 0,6559 (tabell 7) som anses som noe positiv korrelasjon. Dette er to faktorer som virker motsigende til en diversifisert portefølje.

Korrelasjon	K	KO	PEP	MCD
K	1,000000	0,414201	0,456742	0,279873
KO	0,414201	1,000000	0,655917	0,424669
PEP	0,456742	0,655917	1,000000	0,396064
MCD	0,279873	0,424669	0,396064	1,000000

Tabell 7: Korrelasjon mellom aksjene K, KO, PEP og MCD

4.2.4 «Ønsket risiko»-portefølje i treningsperioden

Porteføljen med ønsket risiko er satt til en årlig risiko på 22,3%. Risikoen tilsvarer 2 ganger risikoen til “Minimum risiko”-porteføljen. Vektene for denne porteføljen finnes ved å løse optimeringsproblem 2. Porteføljen består av 11 aksjer, der MA og TYL utgjør i overkant av halvparten av porteføljen sine investeringer. For et risikonivå på 22,3% er porteføljens avkastning 40,57%. Dette medfører en Sharpe ratio på 1,82, som er rett i underkant av den maksimale Sharpe ratio for treningsperioden.

Navn	Vekt	Navn	Vekt
AAPL	3,78%	NFLX	7,53%
AMZN	0,17%	NVDA	5,51%
ASML	4,17%	SBUX	1,93%
CELH	7,92%	TSLA	7,94%
MA	28,56%	TYL	22,7%
MNST	9,78%		
Porteføljens avkastning		40,57 %	
Porteføljens risiko		22,3%	
Sharpe ratio		1,82	

Tabell 8: Optimalisert “Ønsket risiko”-portefølje for treningsperioden

4.2.5 «Ønsket avkastning»-portefølje i treningsperioden

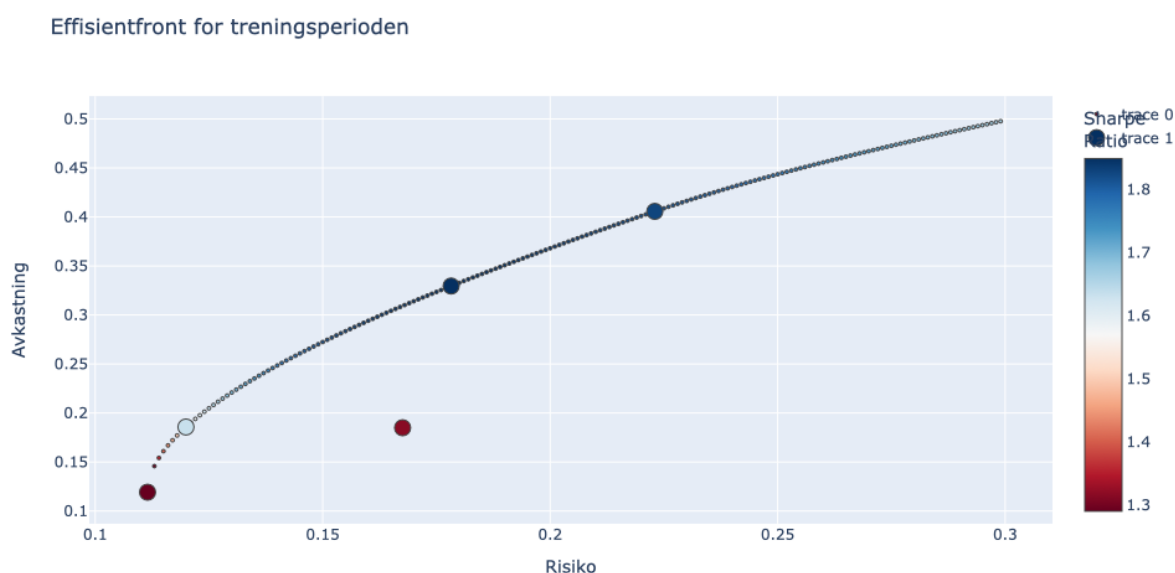
Porteføljen med ønsket avkastning er satt til gjennomsnittlig avkastning for alle aksjene, og vektene er funnet ved å løse optimeringsproblem 1. Gjennomsnittet er 18,57%, og deretter optimaliseres porteføljene ved å minimere risiko for det gitte avkastningsnivået. Vektene for denne porteføljen fordeler seg på 19 ulike aksjer, der ca. 25% investeres i PEP. For avkastningsnivået blir den optimale porteføljen sin risiko på 11,99%, og Sharpe ratio beregnes til 1,55.

Navn	Vekt	Navn	Vekt
AAPL	6,66%	MNST	0,83%
AMZN	0,46%	NFLX	2,38%
CELH	1,72%	NKE	1,75%
DEO	7,64%	NVDA	0,41%
DIS	1,69%	PEP	24,78%
JBHT	3,02%	SBUX	0,38%
K	8,7%	TSLA	1,31%
KO	7,07%	TYL	6,31%
MA	1,57%	UNP	0,08%
MCD	23,23%		
<hr/>			
Porteføljens avkastning	18,57 %		
Porteføljens risiko	11,99 %		
Sharpe ratio	1,55		

Tabell 9: Optimalisert "Ønsket avkastning"-portefølje for treningsperioden.

4.2.6 Effisientfronten i treningsperioden

Av de fem porteføljene som er konstruert i treningsperioden, ble fire optimalisert og vil dermed ligge langs effisientfronten. I figur 1 vises effisientfronten som er basert på treningsperioden. I tillegg vises de konstruerte porteføljene, hvor det fremkommer at den likevektede porteføljen faller under den optimale fronten.



Figur 1: Effisientfront for treningsperioden

4.3 Resultat

I denne delen av analysen vurderes porteføljenes vekter på testdatasettet, som inneholder aksjenes utvikling fra starten av 2020 til slutten av 2022. Formålet er å analysere og illustrere hvor godt de tidligere porteføljene presterer over denne perioden.

4.3.1 “Minimum risiko”-porteføljens prestasjon i testperioden

Tabell 10 viser vektene til den optimale minimum risiko porteføljen fra treningsperioden. Det fremkommer under kolonne «treningsperiode» samme resultat som vist tidligere i tabell 6. Samtidig vises også under kolonnen «testperiode» hvordan denne porteføljen presterte i testperioden. Avkastningen har her økt fra 11,92% til 13,60%. Dette er en liten økning sammenlignet med økning i risiko fra 11,15% til 20,77%. Grunnet en større økning i risiko i forhold til avkastning reduseres Sharpe ratioen fra 1,1 til 0,65.

Testperiode				Treningsperiode			
Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt
AAPL	2,78 %	KO	12,78 %	AAPL	2,78 %	KO	12,78 %
CELH	0,14 %	MCD	21,56 %	CELH	0,14 %	MCD	21,56 %
DEO	8,01 %	NFLX	0,01 %	DEO	8,01 %	NFLX	0,01 %
DLB	3,30 %	PEP	22,27 %	DLB	3,30 %	PEP	22,27 %
GD	0,37 %	TM	5,64 %	GD	0,37 %	TM	5,64 %
JBHT	4,44 %	XOM	5,04 %	JBHT	4,44 %	XOM	5,04 %
K	13,67 %			K	13,67 %		
Avkastning		13,60 %		Avkastning		11,92 %	
Risiko		20,77 %		Risiko		11,15 %	
Sharpe ratio		0,65		Sharpe ratio		1,1	

Tabell 10: "Minimum risiko"-porteføljen sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

Det vil være forhastet å konkludere at dette er en ugunstig økning i risiko. Endringer i markedet påvirker også risikonivået. Ved å optimalisere vektene på nytt, stadfestes en ny «Minimum risiko»-portefølje. Her løses optimeringsproblem 3, der dataen fra testperioden brukes. De nye optimale vektene vises i tabell 11. Porteføljen består av 14 aksjer der 39,23% investeres i K. Det er noe motsigende og lite intuitivt å investere såpass mye i én aksje, da diversifiseringsteori handler om å plassere eggene sine i flere kurver. Det er derfor viktig å understreke at dette er en optimal løsning sett i etterkant, og ikke en løsning som er realistisk å oppnå. Det er en tydelig økning i markedets risikonivå, da minimum risiko i treningsperioden var 11,15%, mens den nå har økt til 18,43%. Dette er noe mindre en risiko på 20,77%, som porteføljen i tabell 10 presterte i testperioden, men vurderes som et godt resultat og en svak økning i risiko.

Navn	Vekt	Navn	Vekt
AMZN	1,82 %	NFLX	1,40 %
CTRA	1,21 %	SONY	2,64 %
DEO	11,05 %	TM	18,78 %
K	39,23 %	TMO	4,44 %
KO	1,55 %	TYL	4,44 %
LOGI	1,51 %	VOXX	0,60 %
MCD	10,62 %	XOM	0,73 %
Porteføljens avkastning	9,20 %		
Porteføljens risiko	18,43 %		
Sharpe ratio	0,5		

Tabell 11: Optimalisert “Minimum varians”-portefølje for testperioden.

4.3.2 “Maksimum Sharpe”-porteføljens prestasjon i testperioden

Fra tabell 12 fremkommer det at “Maksimum Sharpe”-porteføljen i treningsperioden oppnådde en avkastning på 32,95%, med en tilhørende risiko på 17,82%. Dette tilsvarer en Sharpe ratio lik 1,85. Kolonnen “testperiode” viser hvordan denne porteføljen presterer i testperioden. Det fremkommer at den oppnår en gjennomsnittlig årlig avkastning på 25,95%, og en risiko på 28,74%. Dette tilsvarer en reduksjon i avkastningen på 7%, samt en økning i risiko på 10,92%. Resultatet av endringen er en halvering av Sharpe ratio, som i testperioden er 0,9. I tabell 13 fremkommer det at en optimal «Maksimum Sharpe»-portefølje ville oppnådd en avkastning på 84,26% i testperioden. Med en risiko på 46,21%, vil dette resultere i en Sharpe ratio på 1,82. Det nye optimumet er tydelig preget av både høyere risiko og avkastning i markedet. Fra porteføljens allokering utgjør aksjen CELH 38,72%.

Testperiode				Treningsperiode			
Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt
AAPL	5,77 %	NFLX	5,47 %	AAPL	5,77 %	NFLX	5,47 %
AMZN	0,29 %	NVDA	3,42 %	AMZN	0,29 %	NVDA	3,42 %
ASML	3,02 %	PEP	10,58 %	ASML	3,02 %	PEP	10,58 %
CELH	5,43 %	SBUX	2,72 %	CELH	5,43 %	SBUX	2,72 %
MA	19,05 %	TSLA	5,42 %	MA	19,05 %	TSLA	5,42 %
MCD	14,32 %	TYL	17,28 %	MCD	14,32 %	TYL	17,28 %
MNST	7,22 %			MNST	7,22 %		
Porteføljens avkastning		25,95 %		Porteføljens avkastning		32,95 %	
Porteføljens risiko		28,74 %		Porteføljens risiko		17,82 %	
Sharpe ratio		0,9		Sharpe ratio		1,85	

Tabell 12: "Maksimum Sharpe"-porteføljen sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

Navn	Vekt	Navn	Vekt
CELH	38,72 %	TMO	4,90 %
CTRA	6,01 %	TSLA	13,35 %
DVN	1,23 %	VMI	3,82 %
K	16,71 %	VOXX	5,01 %
SM	10,26 %		
Porteføljens avkastning		84,26 %	
Porteføljens risiko		46,21 %	
Sharpe ratio		1,82	

Tabell 13: Optimalisert "Maksimum Sharpe"-portefølje for testperioden.

4.3.3 "Ønsket risiko"-porteføljens prestasjon i testperioden

I denne porteføljen ble avkastning optimalisert med en investors risikotoleranse lik 22,3%. Hensikten var å vurdere hvorvidt denne risikoen vedlikeholdes over tid. Fra resultatet i tabell

14 fremkommer det at porteføljens risiko har økt til 33,18%, nærmere 1,5 ganger den ønskede risikoen. Samtidig har avkastningen sunket fra 40,57% til 30,6%. Dette resulterer i at porteføljens sin Sharpe ratio reduseres fra 1,82 til 0,92. Den betraktelige økningen i porteføljens risiko peker mot at spesifikke porteføljer ikke holder samme risikonivå over tid.

Testperiode				Treningsperiode			
Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt
AAPL	3,78%	NFLX	7,53%	AAPL	3,78%	NFLX	7,53%
AMZN	0,17%	NVDA	5,51%	AMZN	0,17%	NVDA	5,51%
ASML	4,17%	SBUX	1,93%	ASML	4,17%	SBUX	1,93%
CELH	7,92%	TSLA	7,94%	CELH	7,92%	TSLA	7,94%
MA	28,56%	TYL	22,7%	MA	28,56%	TYL	22,7%
MNST	9,78%			MNST	9,78%		
Porteføljens avkastning 30,60 %				Porteføljens avkastning 40,57 %			
Porteføljens risiko		33,18 %		Porteføljens risiko		22,3%	
Sharpe ratio		0,92		Sharpe ratio		1,82	

Tabell 14: “Ønsket risiko”- porteføljens sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

4.3.4 “Ønsket avkastning”-porteføljens prestasjon i testperioden

«Ønsket avkastning»-porteføljens i treningsperioden har en årlig gjennomsnittlig avkastning på 18,57%, som ønsket. Risikoen minimeres for dette avkastningsnivået, og er på 11,99% i samme periode. I testperioden reduseres avkastningen til 16,74%. Denne nedgangen er på under 2%, noe som er svært nær det ønskede avkastningsnivået. I testperioden tilknyttet derimot mer risiko til avkastningen. Dette fremkommer i tabell 15 som viser en økning i risikoen fra 11,99% til 22,11%. Det er en økning på 10,12%, og forårsaker mye av reduksjonen i Sharpe ratio som faller fra 1,55 til 0,76.

Testperiode				Treningsperiode			
Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt	Navn	Vekt
AAPL	6,66%	MNST	0,83%	AAPL	6,66%	MNST	0,83%
AMZN	0,46%	NFLX	2,38%	AMZN	0,46%	NFLX	2,38%
CELH	1,72%	NKE	1,75%	CELH	1,72%	NKE	1,75%
DEO	7,64%	NVDA	0,41%	DEO	7,64%	NVDA	0,41%
DIS	1,69%	PEP	24,78%	DIS	1,69%	PEP	24,78%
JBHT	3,02%	SBUX	0,38%	JBHT	3,02%	SBUX	0,38%
K	8,7%	TSLA	1,31%	K	8,7%	TSLA	1,31%
KO	7,07%	TYL	6,31%	KO	7,07%	TYL	6,31%
MA	1,57%	UNP	0,08%	MA	1,57%	UNP	0,08%
MCD	23,23%			MCD	23,23%		
Porteføljens avkastning 16,74 %				Porteføljens avkastning 18,57 %			
Porteføljens risiko		22,11 %		Porteføljens risiko		11,99 %	
Sharpe ratio		0,76		Sharpe ratio		1,55	

Tabell 15: "Ønsket avkastning"-porteføljens sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

4.3.5 "Like vekter"-porteføljens prestasjon i testperioden

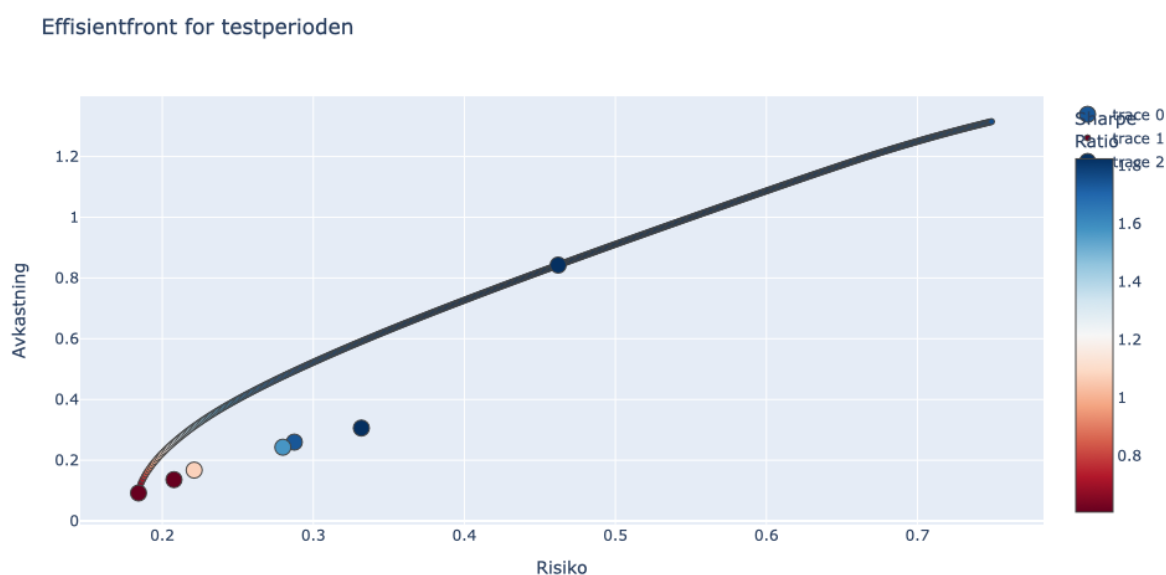
Porteføljens med like vekter oppnår i testperioden en økt avkastning på 24,27%. Dette er en økning fra treningsperioden som kun oppnådde 18,49%. I likhet med samtlige porteføljer viser også denne porteføljens en betydelig høyere risiko i testperioden. En økning i risiko på 11,31% resulterer i en nedgang i porteføljens Sharpe ratio. Av resultatene er det derfor tydelig at økt risiko reduserer porteføljens Sharpe.

Testperiode		Treningsperiode	
Porteføljens avkastning	24,27 %	Porteføljens avkastning	18,49 %
Porteføljens risiko	27,98 %	Porteføljens risiko	16,76 %
Sharpe Ratio	0,77	Sharpe Ratio	1,1

Tabell 16: "Like vekter"-porteføljens sin prestasjon i testperioden vs treningsperioden

4.3.6 Effisientfronten i testperioden

Figur 2 viser den effisiente porteføljefronten for testperioden. Punktet lengst til venstre viser den nye “Minimum risiko”-porteføljen, mens punktet helt til høyre er den nye “Maksimum Sharpe”-porteføljen. Videre er det fem punkter som nå ligger under effisientfronten. Dette er de tidligere optimale porteføljene, som ikke lenger ansees som effisiente. Dette peker mot at utvikling av porteføljer basert på Markowitz krever jevnligere optimalisering.



Figur 2: Effisientfront for testperioden

4.4 Oppsummering

I samtlige av porteføljene er det en betydelig reduksjon i Sharpe ratio for testperioden. En reduksjon vil være naturlig ettersom utgangspunktet er et optimum. Dette gjelder derimot ikke “Like vektor”-porteføljen, da denne ikke optimaliseres i verken av periodene. Reduksjonen kan forklares av at porteføljene, og markedet, har en markant høyere tilknyttet risiko i testperioden. Sett i etterkant kan denne økte risikoen knyttes opp mot effekten av både korona-pandemien og Ukraina-krigen i testperioden.

På tross av den økte risikoen i testperioden, oppnår “Maksimum Sharpe”-porteføljen en Sharpe ratio på 0,9, og årlig avkastning på 25,95%. Utover dette presterer “Ønsket risiko”-porteføljen

bedre med en Sharpe ratio på 0,92. Denne porteføljen hadde også en sterk Sharpe i treningsperioden på 1,82.

“Like vekter”-, “Ønsket avkastning”- og “Minimum risiko”-porteføljene oppnådde i testperioden Sharpe verdier på henholdsvis 0,77, 0,76 og 0,65. Blant dem er det verdt å merke seg at “Minimum risiko”-porteføljen har minst risiko, som den også hadde i treningsperioden. Dette kan indikere at en slik optimering faktisk reduserer risiko over tid. I tillegg presterer “Like vekter”-porteføljen vel så godt som “Ønsket avkastning”-porteføljen, samt bedre enn “Minimum risiko”-porteføljen. Dette indikerer at en optimalisert portefølje på et visst tidspunkt, ikke nødvendigvis presterer bedre over tid, enn porteføljer som ikke er optimalisert.

5 Konklusjon

Ettersom porteføljen med like vekter ikke er en optimalisert portefølje, men likevel presterer på nivå med flere av de optimaliserte porteføljene, vil dette svekke en påstand om at Markowitz’ optimale porteføljer presterer bedre over tid. Markowitz’ porteføljeoptimering baserer seg på et statisk innblikk i markedet på et gitt tidspunkt. Av den grunn presterer nødvendigvis ikke optimaliserte porteføljer bedre over tid, da fremtidens utvikling er ukjent. Ettersom oppgaven i all hovedsak fokuserer på tidsaspektet innen Markowitz sin porteføljeteori er det tydelig nødvendig med hyppigere justeringer av vekter og aksjer ved porteføljebygging. En mer dynamisk praktisering av Markowitz’ teori, ville muligens eliminert noe av tapet. Dette kan også gi resultater som muliggjør antakelser om at Markowitz’ porteføljer i større grad kan skille seg fra porteføljer som ikke er optimalisert. Det statiske innblikket av effisiente porteføljer er derimot et godt verktøy for å gi en pekepinn på markedets utvikling. Likevel er aksjemarkedet meget uforutsigbart, og oppgavens resultat preges av både pandemi og krig. Slike hendelser kan være kritiske for prestasjonen til en portefølje. Markowitz’ porteføljeteori kan derfor være en god grunnmur, men krever hyppig oppfølging for å tilpasse seg endringer i markedet. Samtidig er det også kostnader knyttet til reallokering, og en balanse her vil være essensiell.

6 Referanseliste

AksjeNorge. (2022, 14. februar). Aktuelle risiko-faktorer.

<https://aksjenorge.no/aktuelt/2022/02/14/riskfeb22/>

Anthony, C. Example of Applying Modern Portfolio Theory (MPS).

Investopedia. <https://www.investopedia.com/articles/company-insights/083016/example-applying-modern-portfolio-theory-mps.asp>

Banner, A., Fernholz, R., Papathanakos, V., Ruf, J., Schofield, D. (2018). Diversification, Volatility, and Surprising Alpha. *Arxiv*. <https://arxiv.org/abs/1809.03769>

Greiner. (2021). Hva er diversifisering og kan det redusere risikoen? *Morningstar*.

<https://www.morningstar.no/no/news/216139/hva-er-diversifisering-og-kan-det-reducere-risikoen.aspx>

Hippe, M. (2019). Innføring i risikostyring. *Nordnet*.

<https://www.nordnet.no/blogg/innforing-i-risikostyring/>

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.

https://www.math.hkust.edu.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf

Markowitz, H. (1991). Portfolio theory: A review. *The Journal of Finance*, 46(2), 469-477.

<https://www.jstor.org/stable/2328831?seq=6>

Mjøllhus, J. (2017). 3.4 Risikoreduksjon og porteføljesammensetning. *BI Bank og Forsikring*,

26. [https://mgp-prod.s3.amazonaws.com/pdfapp/Finansmarkeder_kompendium_3-](https://mgp-prod.s3.amazonaws.com/pdfapp/Finansmarkeder_kompendium_3-4_Risikoreduksjon_18aug17.pdf)

[4_Risikoreduksjon_18aug17.pdf](https://mgp-prod.s3.amazonaws.com/pdfapp/Finansmarkeder_kompendium_3-4_Risikoreduksjon_18aug17.pdf)

Nasdaq. (2023). Stock Screener. <https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/screener>

Nordnet. (2020, 26. juni). Hvordan sikre porteføljen – vi ser på korrelasjoner.
<https://www.nordnet.no/blogg/hvordan-sikre-portefoljen-vi-ser-pa-korrelasjoner/>

Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, 39(1), 119–138.
<http://www.jstor.org/stable/2351741>

Yahoo Finance. (2023). <https://finance.yahoo.com/>

Appendix

Appendix 1

Teknologi: Logitech (LOGI), Dolby Laboratories (DLB), SAP (SAP), Oracle (ORCL), Apple (AAPL), Microsoft (MSFT), Adobe Systems (ADBE), ASML Holding NV (ASML), Nvidia (NVDA) og Tyler Technologies Inc. (TYL).

Forbrukerdiskresjonær: Amazon (AMZN), Tesla (TSLA), Toyota (TM), Starbucks (SBUX), The Priceline Group (BKNG), The Walt Disney Company (DIS), Mastercard (MA), McDonald's (MCD), Nike (NKE) og Netflix(NFLX).

Forbruksvarer: Molson Coors Beverage Co Class B (TAP), Darling Ingredients Inc (DAR), Celsius Holdings, Inc.(CELH), Kellogg Company (K), VOXX International Corp (VOXX), The Coca-Cola Company (KO), Sony (SONY), Monster Beverage Corp (MNST), PepsiCo (PEP) og Diageo (DEO).

Industri: Teradyne, Inc. (TER), Thermo Fisher Scientific Inc. (TMO), Valmont Industries, Inc. (VMI), Trimble (TRMB), Rockwell Automation (ROK), Union Pacific Corporation (UNP), J B Hunt Transport Services Inc (JBHT), 3M(MMM), PACCAR (PCAR) og General Dynamics (GD).

Energi: Baker Hughes Co (BKR), ABB (ABB), Coterra Energy Inc (CTRA), Chevron (CVX), SM Energy Co (SM), Equinor (EQNR), ExxonMobil (XOM), Devon Energy Corp (DVN), Helix Energy Solutions Group (HLX) og Occidental Petroleum Corporation (OXY).

