Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Ingrid Trøstheim

Matematisk modellering - med blikket rettet mot valideringsprosessen

En casestudie om hvordan en gruppe 10. trinnselever løser valideringsprosessen, og hvordan læreren støtter arbeidet

Masteroppgave i Master i lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 8-10.trinn.
Veileder: Hermund André Torkildsen
September 2021

NTNU
Norwegian University of Science and Technology

Ingrid Trøstheim

Matematisk modellering - med blikket rettet mot valideringsprosessen

En casestudie om hvordan en gruppe 10.trinnselever løser valideringsprosessen, og hvordan læreren støtter arbeidet

Masteroppgave i Master i lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 8-10.trinn.
Veileder: Hermund André Torkildsen
September 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Matematisk modellering er et eget kjerneelement i læreplanen (LK20) og skal være med på å prege matematikkundervisningen. Forskning tilsier at det gjennomføres langt mindre modellering i internasjonale og nasjonale klasserom enn hva som er anbefalt. En grunn til det er at modellering oppleves utfordrende både for elever og for lærere. Modelleringssyklusens valideringsprosess trekkes frem som spesielt vanskelig for elevene. I denne studien har jeg derfor valgt å rette blikket mot elevens valideringsprosess, og hvordan læreren støtter elevene i valideringsarbeidet. Hensikten med studien var å få innblikk i og kunnskaper om elevenes valideringsprosess og hvordan læreren kan støtte denne prosessen. For å søke svar på dette utviklet jeg følgende forskningsspørsmål:

(1) *Hvilke valideringer gjør elevene i en modelleringsaktivitet?*
(2) *Hvilke grep gjør læreren for å sette elevene i posisjon for å gjøre valideringer?*

For å besvare forskningsspørsmålene gjennomførte jeg en kvalitativ casestudie der jeg observerte hvordan to lærere ledet en modelleringsaktivitet med en gruppe elever tilhørende tiende trinn. Det ble gjort et grundig forarbeid sammen med lærerne som skulle lede aktiviteten, slik at jeg som forsker kunne ta en «observatør-som-deltager-rolle» (Gold, 1958). Modelleringsaktiviteten ga meg et datamateriale bestående av observasjoner, elevbesvarelser og intervjuer som ble transkribert og systematisk analysert ved hjelp av *den konstant komparative analysemetoden* (Postholm, 2020). Analysen av datamaterialet ga meg tre funn.

Jeg fant at elevene sammenlignet arbeid fra ulike deler av modelleringsprosessen i sitt valideringsarbeid. De fleste elevene validerte uproblematisk innenfor den matematiske verden, men mange fikk problemer med å knytte resultatet til det virkelige problemet. Dette problemet ble identifisert som hindringer knyttet til elevenes manglende forståelse av problemets kontekst. Denne begrensede forståelsen av problemet resulterte i at elevene ikke så behovet for, eller manglet motivasjon for å gjøre nødvendige valideringer for en tilstrekkelig modell. Læreren gjorde en rekke adaptive og strategiske inngrep, men når responsen uteble, tok læreren i bruk informative og organisatoriske inngrep.

Konklusjonen i denne studien er at elevene trenger støtte fra læreren for å gjøre nødvendige valideringer for en tilstrekkelig modell. I tillegg kreves det mye av læreren å foreta de riktige grepene i de aktuelle situasjonene. Det er derfor avgjørende at læreren gjør et grundig forarbeid for å være forberedt på de ulike retningene en aktivitet kan ta.

Abstract

Mathematical modeling is a separate core element in the curriculum (LK20) and should help shape the teaching of mathematics. Research indicates that far less modeling is carried out in international and national classrooms than what is recommended. The reason for this is that modeling is perceived as difficult for both students and teachers. For students the validation process of the modeling cycle is highlighted as particularly difficult. In this study, I have therefor chosen to focus on how the students approach the validation process, and how the teacher supports the students in their effort to validate their model. The purpose of this study was to gain insight into, and knowledge about, the students' process of validation and how the teacher best can support this process. To find answers, I developed the following research questions:

1. What kind of validations are the students making in a modeling activity?
2. What kind of steps are the teacher taking to help put students in a position for making validations?

To answer my research questions, I conducted a qualitative case study in which I observed how two teachers led a modeling activity in a group of tenth grade students. A thorough preparation was made together with the teachers who were to lead the activity, so that I, as a researcher, could take on an "observer-as-participant-role" (Gold, 1958). The modeling activity provided me with data consisting of observations, student answers and interviews that were transcribed and systematically analyzed using constant comparative analysis method (Postholm, 2020). The analysis of the data material gave me three findings.

I found that the students compared work from different parts of the modeling process in their validation work. Most students validated without problems within the world of mathematics, but many found it difficult to validate the results in connection to reality. This problem was identified as an obstacle connected to the students' lack of understanding of the context of the problem. This limited understanding of the problem resulted in the students not seeing the need for, or lacking the motivation to do, necessary validations to make an adequate model. The teacher made a number of adaptive and strategic interventions, but when the response failed, the teacher used informative and organizational interventions.

The conclusion of this study is that students need the support of the teacher to make the necessary validations to reach an adequate model. In addition, a lot is required of the teacher to make the right moves in the different scenarios. It is therefore crucial that the teacher make thorough preparations in order to be prepared for the different directions an activity may take.

Forord

Med denne masteroppgaven avslutter jeg en treårig videreutdannelse i lærerspesialist – matematikkdidaktikk 8.-10. ved NTNU. I den forbindelse ønsker jeg å rette en takk til de som har støttet og hjulpet meg underveis i mitt masterarbeid.

Først vil jeg takke mine kolleger og elever som stilte opp som deltagere i undersøkelsen min. Selv om temaet matematisk modellering var utenfor deres komfortsone, tok dere utfordringen på strak arm.

Takk til veilederen min, Hermund, som har vært en god støttespiller og gitt konstruktive tilbakemeldinger.

Takk til ledelsen på arbeidsplassen min som har lagt til rette slik at jeg har fått gjennomføre denne studien.

Takk til Gunn, Silje og Heidi som har bidratt med gode innspill og korrekturlesing.

Takk til familie, venner og kolleger som har holdt ut med meg mens mitt fokus har vært på studiet.

Takk til medstudent og venninne Henny Helen for mange gode samtaler der vi har diskutert fag, delt frustrasjoner og funnet løsninger. Spesielt setter jeg pris på skrivehelgene vi har hatt på Haukelifjellet. Vi kommer alltid i mål!

Og til slutt, en takk til mannen min Hans og til jentene våre Ingeborg, Johanne og Fredrikke som har gitt meg klemmer og heiet på meg hver gang jeg har satt meg ned, eller dratt på fjellet for å skrive. Nå skal vi på fjellet sammen!

Ingrid Trøstheim
Nes, september 2021

Innhold

Figurer

Tabeller

1 Innledning

1.1 Matematisk modellering

Matematisk modellering handler om å løse problemer fra virkeligheten ved hjelp av matematikken. Det virkelighetsnære problemet oversettes til et matematisk problem som løses og tolkes tilbake til virkeligheten (Blum, 2015). Ifølge Blomhøj (2006) handler det om å anvende matematikk for å beskrive, beregne eller forklare forhold utenfor matematikken ved hjelp av en matematisk modell. En matematisk modell kan ses på som en matematisk representasjon av virkeligheten (Czocher, 2018). En slik beskrivelse vil aldri være et perfekt speilbilde av virkeligheten, men et verktøy for å beskrive eller forutse en situasjon eller et problem. Daglig bruker vi værmeldingen til å forutse hvordan været bli de neste dagene. Det er ikke alltid den stemmer, men det er en beskrivelse som hjelper oss å forutse og å forstå.

1.2 Bakgrunn

Mange argumenter og avgjørelser i samfunnet er basert på matematiske modeller som har til hensikt å forutse framtiden (Blomhøj, 2006). Det er for eksempel samfunnsmessig avgjørende med modeller som estimerer smittespredning for å kunne håndtere virusutbrudd på en god måte. Det er også nødvendig med modeller som forutser økonomiske utviklinger slik at samfunnet kan planlegge både nære og langsiktige mål på en sikker måte. For å forberede elevene til kritisk å kunne lese og løse problemer fra virkeligheten, er det viktig at de får erfaringer med modellering i skolen. I følge Barbosa (2006) skal matematikkopplæringen bidra med å utvikle elevene til å bli kritiske og engasjerte borgere gjennom matematisk modellering. Barbosa påpeker at matematisk modellering skal være en læringssituasjon der elevene får et hverdagsrelatert problem som de skal løse ved hjelp av referanser fra virkeligheten og den vitenskapelige matematikken.

Matematisk modellering som tema har blitt stadig viktigere i det matematiske forskningsfeltet, og er nå implementert i mange lands læreplaner (Blum & Ferri, 2009). Modellering skal ved innføring av ny læreplan (LK20) også være en del av den norske matematikkundervisningen. Læreplanen i matematikk (MAT01-05) har seks kjerneelementer som skal gjennomsyre matematikkopplæringen. Ett av kjerneelementene er *Modellering og anvendelse,* det innebærer at elevene skal bruke og lage modeller for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet. I tillegg skal elevene utvikle evnen til kritisk å vurdere egne og andres modeller opp mot den virkelige situasjonen (Utdanningsdirektorartet, 2019).

Utfordringen er at det praktiseres langt mindre modellering i klasserommene enn det som er ønskelig, fordi både elever og lærere opplever modellering som vanskelig (Blum & Ferri, 2009). Blum & Ferri hevder en årsak til dette er den kognitive kompetansen som kreves ved modelleringsoppgaver. I tillegg til matematisk kompetanse må elevene både lese, kommunisere, designe og anvende problemløsningsstrategier. Blum (2015) mener mange elever mangler strategier for å løse virkelige problemer, fordi det er utfordrende å overføre skolekunnskapen til den virkelige verden. Blum & Ferri (2009) viser i sitt eksempel 1, «Gigant`s shoes», hvordan elevene henter ut tall og fakta fra oppgaveteksten og gjør kjente beregninger slik de ville gjort i de fleste tradisjonelle tekstoppgaver. Løsningen blir urimelig fordi elevene overser oppgavens kontekst som har en sentral rolle for problemet.

Når det gjelder lærernes opplevde utfordringer med modellering, hevder Doerr (2007) hovedårsaken kan knyttes til manglende kunnskaper om hvordan undervise i modellering. Ifølge Blum (2015) kan hovedbarrieren være at modelleringsoppgavene er mer åpne enn tradisjonelle oppgaver, noe som også gjør vurderingene mer komplekse. På grunn av de åpne og uforutsigbare undervisningssituasjonene, er det ikke tilstrekkelig med fagkunnskap alene. Det er behov for en bred og dyp forståelse av ulike tilnærminger elevene kan ha i en modelleringsoppgave. Studien til Doerr (2007) viser hvordan elevenes ulike tilnærminger utfordrer læreren, og hvordan læreren kan håndtere de ulike tilnærmingene.

En modelleringsprosess er sammensatt og kompleks nettopp fordi den inneholder mange prosesser. For å kunne gjøre kognitive analyser av en modelleringsprosess kan en modelleringssyklus være et nyttig verktøy. Det finnes mange modelleringssykluser, hvor modellen til Blum & Leiβ (2007) er en av dem. Syklusen har syv steg, eller prosesser, *konstruere, forenkle, matematisere, jobbe matematisere, tolke, validere* og *presentere*. Det stilles ulike krav i de ulike stegene for å meste overgangen til neste prosess. En av overgangene er å *validere* det matematiske resultatet. Det matematiske resultatet valideres opp mot konteksten til det reelle problemet, en overgang mellom den matematiske og den virkelige verden. Valideringen kan skape behov for å gjøre endringer og dermed en ny runde i syklusen, eller den kan resultere i oppnådd gyldighet og er dermed klar til å presenteres. Syklusen blir nærmere beskrevet i kapittel 2.4.2.

Den sykliske modellen krever hele tiden evnen til å vurdere, validere og mulig justere det matematiske resultatet opp mot det virkelige problemet. Når en er i stand til å utføre alle prosessene i en modelleringsprosess, og å kritisk validere egne og andres modeller, har en utviklet modelleringskompetanse (Ferri, 2018).

Forskning viser at valideringsprosessen er spesielt utfordrende for elevene (Blum & Ferri, 2009). Dette kan ifølge Ferri (2018) skyldes elevenes arbeid med tradisjonell oppgaveløsning der det sjelden stilles krav om å validere resultatene. Valideringen er en viktig del av syklusen, fordi elevene kritisk bør validere modellens gyldighet opp mot det virkelige problemet for å kunne avgjøre om resultatet er gyldig, eller om det er behov for å gjøre endringer (Blum & Ferri, 2009). Eksempelvis viser studien til Ferri (2018), hvordan noen elever beregner en rundballs høyde til å være 123 meter, elevene kom frem til en løsning var fornøyde med det. Når læreren stilte spørsmål om resultatet, ble elevene oppmerksomme på svarets urimelighet og så derfor behovet for å gjøre nye beregninger. Dette problemet samsvarer med egen erfaring i både modelleringssituasjoner og matematikk generelt, elevene er ofte fornøyde med løsningen uten å validere dens gyldighet opp mot problemets kontekst. Eksempelet til Ferri viser også at et strategisk inngrep fra læreren kan være nok til å sette elevene i stand for å validere modellen sin.

1.3 Forskningsspørsmål

Sett i lys av situasjonen over, vet jeg nå at det praktiseres lite matematisk modellering i klasserommene fordi det oppleves utfordrende både for lærere og elever. Det jeg derimot vet lite om er hvordan elevene validerer underveis i modelleringsprosessen. Videre i denne studie vil jeg derfor se nærmere på valideringsprosessen med den intensjon å få innsikt i og kunnskaper om hvilke valideringer elevene gjør, og hvordan læreren veileder dette arbeidet. Formålet med studien er å bidra med kunnskap innen matematisk modellering og valideringsprosessen i utviklingsarbeidet på egen skole og på kommunalt plan.

Jeg har utviklet følgende forskningsspørsmål:

(1) *Hvilke valideringer gjør elevene i en modelleringsaktivitet?*
(2) *Hvilke grep gjør læreren for å sette elevene i posisjon for å validere?*

Med forskningsspørsmålet *hvilke valideringer gjør elevene i en modelleringsaktivitet?* mener jeg situasjoner der elevene bevisst eller ubevisst validerer arbeidet sitt underveis i en modelleringsprosess.

Men forskningsspørsmålet *hvilke grep gjør læreren for å sette elevene i posisjon for å validere?* mener jeg hva læren gjør eller sier for å rette elevenes oppmerksomhet mot en nødvendig validering for en vellykket modell.

For å besvare disse forskningsspørsmålene vil jeg gjennomføre en instrumentell casestudie tilknyttet en gruppe 10.trinnselevener og deres lærere på egen skole.

1.4 Studiens oppbygning

Denne masteroppgaven inneholder seks kapitler: *innledning, teoretisk rammeverk, metode, resultater, diskusjon,* og *avslutning.*

I neste kapittel vil jeg presentere det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for forskningen. I metodedelen vil jeg redegjøre metodologien for forskningen, og forklare og begrunne valgene som er tatt for gjennomføringen og analysen. Videre vil jeg legge frem mine analyser og resultater. Deretter vil funnene blir diskutert opp mot det teoretiske rammeverket for forskningen. I siste kapittel vil jeg oppsummere, konkludere og avslutte min forskning.

2 Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet vil jeg presentere det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for å besvare mine forskningsspørsmål: *(1) Hvilke valideringer gjør elevene i en modelleringsaktivitet, og (2) hvilke grep gjør læreren for å sette elevene i posisjon for å validere?*

Begrepet modellering kan ha flere ulike betydninger, derfor vil jeg begynne med å redegjøre for hva matematisk modellering er. Deretter vil jeg argumentere for modelleringen sin plass i skolen. Jeg vil videre presentere Kaiser & Sriraman (2006) sine ulike perspektiver på matematisk modellering for å belyse hvorfor denne studien har et kognitivt perspektiv. For å kunne analysere elevenes arbeid med en modelleringsaktivitet har jeg valgt å benytte modelleringssyklusen til Blum & Leiβ (2007) som et verktøy, jeg vil derfor gi en grundig redegjørelse for modelleringssyklusen. Videre vil jeg legge frem hva tidligere forskning sier om elevenes utfordringer i modellering. Deretter vil jeg se nærmere på teori om valideringsprosessen, og rammeverket til Czocher (2018) som jeg benyttet for å kategorisere elevenes valideringer i modelleringsaktiviteten. Til slutt vil jeg rette fokuset mot læreren. For å kunne forstå hvilke grep læreren gjør for å sette elevene i posisjon for å gjøre valideringer, vil jeg se nærmere på hva forskningen sier om lærerens rolle i modelleringsaktiviteter. Til dette har jeg valgt å benytte Doerr (2007) og Blum & Ferri (2009) som rammeverk.

2.1 Matematisk modellering

Det finnes flere ulike perspektiver på matematisk modellering, imidlertid er det sterk enighet om at matematisk modellering kan beskrives som en aktivitet som innebærer overganger frem og tilbake mellom virkeligheten og matematikken (Ferri, 2018). Blum (2015) presiserer at den virkelige verden skal inneholde et problem som oversettes til matematikken før det tolkes tilbake til det virkelige problemet. Dette problemet skal ifølge Barbosa (2006) være et hverdagsrelatert problem som eleven kan gjenkjenne seg i. I tillegg til relasjonen mellom virkeligheten og matematikken legger Blomhøj (2006) vekt på relasjonene som etableres innad i matematikken, mellom objekter og symboler, og innad i virkeligheten, mellom størrelser og sammenhenger. Det handler ikke bare om å lage modeller, modellering innebærer også å systematisk kunne beskrive, forstå, gjennomføre og kritisere anvendelser av matematikk utenfor matematikken (Blomhøj, 2006).

En matematisk modell er en relasjon mellom en oppfattelse av den virkelige verden og de matematiske objektene, og deres innbyrdes sammenhenger (Blomhøj, 2006). I følge Doerr & English (2003) kan modeller ses på som systemer bygget opp av elementer, operasjoner, relasjoner og regler som brukes til å beskrive, forklare eller forutsi en situasjon, eller andre lignede situasjoner. Oppfattelsen av virkeligheten og fokuset på matematiske objekter kan være individuell, og det vil derfor kunne utvikles ulike modeller med bakgrunn i samme problem (Blomhøj, 2006). Fra denne teorien kan vi tenke på en modell som en forenkling av virkeligheten, et hjelpemiddel for å forstå en situasjon. For at en modell skal være vellykket må den samsvare med det reelle problemet, være delbar (kunne benyttes av andre), og være gjenbrukbar (generalisert) for andre lignende situasjoner (Lesh & Caylor, 2007).

2.2 Modellering i skolen

Høsten 2020 begynte innføringen av LK20, og matematisk modellering skal nå være en del av undervisningen i norsk skole. Læreplanens (MAT01-5) første setning er som følger: «Matematikk er et sentralt fag for å kunne forstå mønster og sammenhenger i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvendelser». (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Her vektlegges modellering og anvendelse av matematikk som en måte å forstå samfunnet og naturen på en bedre måte. Hva som ligger i begrepet modellering er nærmere definert i ett av læreplanens kjerneelement, *Modellering og anvendelse*:

> En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk handler om å lage slike modeller. Det handler også om å kritisk vurdere om modellene er gyldige, og hvilke begrensninger de har, vurdere modellene i lys av de opprinnelige situasjonene og vurdere om de kan brukes i andre situasjoner. Anvendelser i matematikk handler om at elevene skal få innsikt i hvordan de skal bruke matematikk i ulike situasjoner, både i og utenfor faget. (Utdanningsdirektoratet, 2019)

Ferri (2018) oppsummerer i sin artikkel at mange forskere påpeker hvordan både elever og lærere får mulighet til å se på matematikk med et annet og bredere perspektiv gjennom modellering. Blum (2011) hevder modellering ikke bare gir en dypere forståelse for faget, men også et bidrag til en generell utdanning. Han har følgende fire argumenter for modellering basert på generelle mål rettet mot matematikkundervisningen:

1) *Den pragmatiske begrunnelsen*: Elevene må lære å overføre virkelighetsproblemer til matematikk for å mestre hverdagen. Dette vil hjelpe elevene å bedre forstå verden.

2) *Den formative begrunnelsen*: Elevene utvikler ulike kompetanser innenfor matematikk, vitenskap, modelleringskompetanse og argumentasjonskompetanse.

3) *Den kulturelle begrunnelsen*: Bidragene fra den virkelige verden kan være med på å gi elevene et bredere bilde av hva vitenskapelig matematikk er. Matematikk oppleves mer meningsfylt når det knyttes til virkelige situasjoner.

4) *Den psykologiske begrunnelsen:* Eksempler fra den virkelige verden bidrar til at elevene opplever økt interesse for matematikk og kan gi dem motivasjon til å bedre forstå det matematiske innholdet.

Felles for disse begrunnelsene er relasjonen mellom en virkelighet og matematikken. Forskjellen er at de har ulike mål for modelleringsaktiviteten. Ferri (2018) poengterer at elevene må jobbe jevnlig med modellering for å oppnå målene innenfor de fire argumentene til Blum (2011). I praksis betyr dette at modelleringsaktiviteter skal være med å prege matematikkundervisningen gjennom hele skoleåret.

English (2006) identifiserer fire litt andre aspekt som er gode argumenter for modellering i skolen. Hun vektlegger fordelene med at de *(1) åpne oppgavene* kan løses med ulike tilnærminger og representasjoner, og inkluderer derfor alle prestasjonsnivåer, det fremmer evnen til å jobbe i *(2) team*, teamarbeid er med på å utvikle elevenes *(3) matematiske kommunikasjonsferdigheter*, og å gi elevene mulighet til å drive *(4)* *formativ vurdering av seg selv og andre* gjennom verbal kommunikasjon. English påpeker at utvikling av modelleringskompetanse er med på å gjøre elevene rustet for å løse problemer også utenfor skolen. Elevenes evner til å jobbe i team for å planlegge, observere, se sammenhenger og å kommunisere dette, er kriterier for suksess (English, 2006).

2.3 Ulike perspektiv på matematisk modellering

Det finnes mange synspunkter og ulike tilnærminger til matematisk modellering (Ferri, 2018). Basert på analyser, litteratur og publikasjoner har Kaiser & Sriraman (2006) klassifisert ulike perspektiv fra deres sentrale mål:

- *Realistisk eller anvendt perspektiv* innebærer pragmatiske og nyttige mål. Hensikten er å forstå og å mestre reelle problemer i tillegg til å utvikle modelleringskompetanse.

- *Kontekstuelt perspektiv* inneholder fagrelaterte og psykologiske mål. Det psykologiske målet innebærer å utvikle aktiviteter som motiverer slik at elevene naturlig når det faglige målet, og å utvikle matematikken som er nødvendig for å gi konteksten mening, både for denne og for nye lignede situasjoner.

- *Pedagogisk perspektiv* er videre delt inn i *didaktisk* og *begrepsmessig.* Det *didaktiske* innebærer strukturering av læreprosesser i modelleringsaktiviteter, som for eksempel å utvikle og evaluere en leksjon med modellering. Mens det *begrepsmessige* perspektivet omhandler innføring eller videreutvikling av et matematisk konsept gjennom modellering og utvikling på meta-nivå. Dette perspektivet på modellering har sterke pedagogiske og fagrelaterte mål.

- *Sosialkritisk perspektiv* er et samfunnskritisk perspektiv som har som mål å tydeliggjøre matematikkens rolle i samfunnet. Elevene skal utvikle kritisk tenkning om den virkelige verden.

- *Epistemologisk eller teoretisk perspektiv* brukes som verktøy for å utvikle teoretiske mål, framfor å øve modelleringskompetanse. Altså et verktøy for å forstå matematikk som vitenskap.

- *Kognitivt perspektiv* har et meta-kognitivt perspektiv og egner seg godt til å gjøre analyser av modelleringsprosesser, eller ulike modelleringssituasjoner. Det kan være analyser av deler av prosessen, som for eksempel hvordan eleven validerer resultatet sitt eller hvert steg i prosessen. Målet er å kunne rekonstruere elevens modelleringsrute, eller individuelle barrierer og vanskeligheter eleven møter i en modelleringsaktivitet.

I denne studien vil perspektivet i hovedsak være kognitivt. Det benyttes kognitive analyser av prosesser knyttet til elevenes modelleringsprosess, og da spesielt valideringsprosessen. I kapittel 2.4.2 presenteres modelleringssyklusen jeg vil bruke som verktøy for de kognitive analysene.

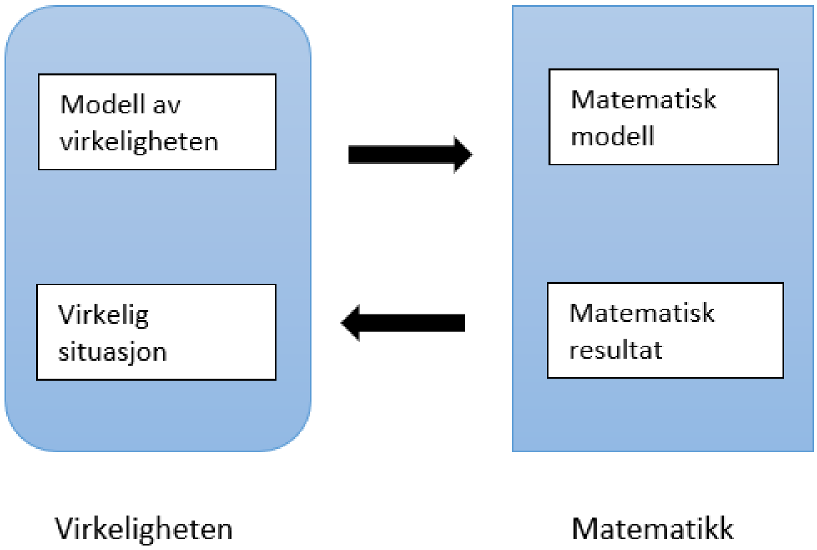
2.4 Modeller for modelleringssykluser

En modelleringsprosess innebærer flere prosesser, der utgangspunktet er en situasjon fra virkeligheten som oversettes til et matematisk problem, løses og tolkes tilbake til det virkelige problemet (Blum, 2015). Modelleringssyklusene er teoretiske og karakteriserer de ulike prosessene i syklusen, de fungerer derfor som gode verktøy når lærere skal gjøre kognitive analyser av elevenes modelleringsarbeid (Ferri, 2018). Modelleringssyklusene fremstår som lineære beskrivelser av modelleringsprosessen, noe de ikke er. Prosessen er syklisk, derav navnet modelleringssyklus (Ferri, 2018). Empiriske bevis for dette finnes blant annet i studiene til Blum & Ferri (2009) og Galbraith & Stillman (2006) som illustrerer elevenes modelleringsruter med piler frem og tilbake i modelleringssyklusen. Det finnes en rekke forskjellige modelleringssykluser som fremhever ulike prosesser i en modelleringsprosess, fordi de er tilpasset ulike perspektiv på modellering (Ferri, 2006). Disse perspektivene er nærmere forklart i kapittel 2.3.

I det følgende vil jeg presentere to ulike modelleringssykluser, syklusen til Kaiser (1995) og Blum (1996), og syklusen til Blum & Leiβ (2007). Begge modelleringssyklusene tar opp validering som en viktig del av modelleringsprosessen, men de er tilpasset ulike perspektiver på modellering.

2.4.1 Modelleringssyklusen til Kaiser (1995) og Blum (1996)

Syklusen til Kaiser og Blum, Figur 1, har et tydelig skille mellom virkeligheten og matematikken. Ferri (2018) gir følgende redegjørelse for modellen: I den virkelige verden begynner det med en reell situasjon gitt som et problem, problemet idealiseres til en modell av virkeligheten. Ved hjelp av matematisering skjer det en overgang fra virkeligheten til matematikken i form av en matematisk modell. Det gjøres undersøkelser av modellens holdbarhet, som resulterer i et matematisk resultat. Det matematiske resultatet tolkes tilbake til det virkelige problemet. Resultatet blir validert for å sjekke om det er forenelig med den virkelige situasjonen, eller om den må videreutvikles eller endres. Modelleringssyklusen til Kaiser (1995) og Blum (1996) har et didaktisk perspektiv, som på grunn av de fire trinnene fungerer godt som verktøy lærerne kan benytte for å utvikle og evaluere modelleringsaktivteter. Modelleringssyklusen kan også være et godt verktøy for elevene i arbeidet med å utvikle modelleringskompetanse.

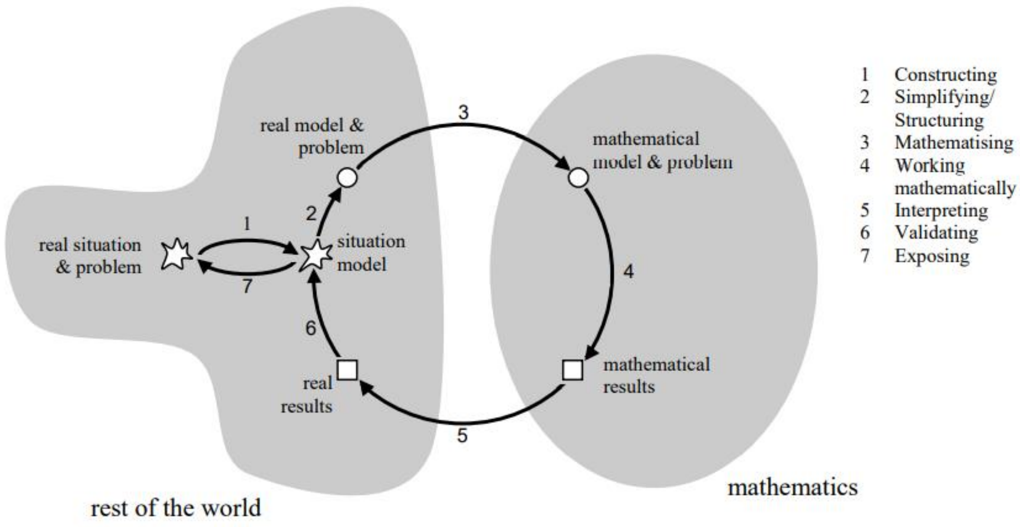


Figur 1: Modelleringssyklusen til Kaiser (1995) og Blum (1996). Egen oversettelse.

Denne syklusen har vært utgangspunktet for en rekke andre sykluser, blant annet syklusen til Blum & Leiβ (2007).

2.4.2 Modelleringssyklusen til Blum & Leiβ (2007)

I min forskning har jeg valgt å bruke modelleringssyklusen til Blum & Leiβ (2007), Figur 2, for å analysere elevenes modelleringsprosess. Syklusen er en blanding av sykluser fra anvendt matematikk, lingvistikk og kognitiv psykologi som viser seg å virke spesielt nyttig for å gjøre kognitive analyser (Blum, 2015). I tillegg bekrefter Blum & Ferri (2009) syklusens tyngde i forskningsfeltet, og da spesielt i empiriske undersøkelser.



Figur 2: Modelleringssyklusen til Blum & Leiβ (2007, s. 255).

Syklusen viser et skille mellom virkeligheten og matematikken. Den består av syv steg som jeg har oversatt til *1) konstruere, 2) forenkle og strukturere, 3) matematisere, 4) arbeide matematisk, 5) tolke, 6) validere og 7) presentere.* Disse stegene utgjør overganger eller prosesser mellom de seks ulike delmålene i modelleringssyklusen. Disse seks delmålene er illustrert i Figur 2, og jeg har valgt å oversette dem til: *reell situasjon med problem, situasjonsmodell, reell modell, matematisk modell, matematisk resultat og reelt resultat.*

Prosessen starter med en *reell situasjon,* gitt som et problem. Presentasjonen kan bestå av en tekst, et bilde eller begge deler.

Steg 1: Konstruksjon: Innebærer å lese og forstå problemet gitt i den virkelige situasjonen for å konstruere en *situasjonsmodell* (Blum & Leiβ, 2007). Ferri (2018) mener elevenes tidligere opplevelser og erfaringer vil fremme en mental representasjon av problemet. Om eleven ikke forstår problemet er det fortsatt mulig å jobbe videre, men med begrensinger som vil føre til hindringer senere i prosessen (Ferri, 2006). En *situasjonsmodell* er en representasjon av hvordan problemet er forstått. Situasjonsmodellen kan være veldig individuell og er knyttet til hvordan eleven tenker for å løse matematiske problemer. Den kan baseres på fantasi, erfaringer og opplevelser, eller tall og fakta oppgitt i problemet (Ferri, 2006).

Steg 2: Forenkling og strukturering: Elevene spesifiserer den reelle situasjonen ved å forenkle og strukturere situasjonsmodellen, noe som ofte innebærer å gjøre antagelser (Blum & Leiβ, 2007). Ferri (2006) mener elevene er mer bevisste idealiseringer og forenklinger av problemet. Overgangen ender i en *reell modell* som eksempelvis kan være en skisse, strukturert tallinformasjon eller en formel.

Steg 3: Matematisering: Prosessen innebærer å bestemme hvilke matematiske verktøy som kan brukes for å løse problemet, noe som resulterer i en matematisk modell. En *matematisk modell* er en matematisk representasjon av problemet. Det verbale språket mellom elevene er i større grad matematisk og refererer i mindre grad til virkeligheten, det har skjedd en overgang fra virkeligheten til det matematiske (Blum & Leiβ, 2007).

Steg 4: Jobbe matematisk: Det jobbes matematisk for å komme fram til et matematisk resultat. I denne overgangen er elevenes matematiske kompetanser viktige. Et *matematisk resultat* er elevenes matematiske løsning på problemet (Blum & Leiβ, 2007).

Steg 5: Tolkning: Elevene tolker det matematiske resultatet opp mot den virkelige verden for å se om de har et reelt resultat (Blum & Ferri, 2009). Ifølge Ferri (2006) er dette et viktig steg, men ofte en handling elevene selv ikke er bevisste. De *reelle resultatene* blir diskutert for å avgjøre om den samsvarer med det reelle problemet.

Steg 6: Validering: En sammenligning av det reelle resultatet opp mot den reelle modellen og de antagelsene som ble gjort innledningsvis i prosessen. En vurdering om resultatet er godt nok, eller om det bør forbedres. Mangler resultatet validitet må det gjøres en ny runde i syklusen (Blum & Leiβ, 2007).

Steg 7: Presentasjon: Det matematiske resultatet blir presentert. I en slik presentasjon kan elevene kritisk validere egne og hverandres modeller.

I modellen til Blum & Leiβ (2007) er syklusens første steg skilt fra resten av modellen fordi det antas at alle er innom dette steget i løpet av prosessen (Blum, 2015). Blum & Leiβ (2007) mener dette er det viktigste steget i prosessen fordi det handler om å forstå problemet.

Som tidligere nevnt er modelleringsprosessen sammensatt og kompleks nettopp fordi den inneholder mange prosesser. Dette gjør modellering utfordrende både for elever og lærere, noe jeg vil utdype i påfølgende kapittelet, og i kapittel 2.7.

2.5 Elevenes utfordringer

I arbeidet med modelleringsaktiviteter innebærer hver overgang i modelleringsprosessen en potensiell barriere for elevene, en mulig hindring for framgang mot en vellykket løsning (Galbraith & Stillman, 2006). De ulike prosessene er utfordrende på hver sin måte, og noen av dem mer krevende enn andre (Stillman, Brown & Galbraith, 2010). Empiriske resultater viser at elevenes største og vanskeligste hindringer i modelleringsprosessen er identifisert i arbeidet med steg 1: konstruksjon, steg 2: forenkling og strukturering, og steg 6: validering (Blum & Ferri, 2009; Blum, 2015; Galbraith & Stillman, 2006; Stillman, Brown & Galbraith, 2010).

I prosessen med å konstruere en situasjonsmodell er tendensen at elevene ignorerer konteksten. De henter ut tall og fakta fra oppgaveteksten og utfører kjente algoritmer og framgangsmåter uten å validere resultatet (Blum, 2015). Når elevene skal forenkle og strukturere problemet, oppstår det ofte en hindring fordi elevene ikke utretter nødvendige antagelser, det antas at elevene vegrer seg for å gjøre egne antagelser (Blum, 2015). Eksempel på dette finnes i studiene til Frejd & Ärlebäck (2011) og Jankvist & Niss (2020), der elevenes største utfordring er å forenkle og gjøre antagelser i prosessen med å lage en reell modell. Jankvist & Niss (2020) viser hvordan feilaktig eller mangelfullt arbeid i de to første stegene gir nye hindringer i matematiseringen. Når elevene ikke forstår problemet benytter de deg ofte av matematiske verktøy som gir inkorrekte resultater. Jankvist & Niss mener hovedgrunnen til dette er at oppgaven ikke blir tatt seriøst, eller at mangler refleksjoner over konteksten, noe som kan resultere i inkorrekte eller manglende forventninger slik at resultatet blir utilstrekkelig.

Valideringen av et resultat ser ut til å være spesielt vanskelig (Blum & Ferri, 2009). De mener mange elever ikke reflekterer over resultatene sine, fordi erfaringen deres tilsier at det er læreren sitt ansvar å validere. Blum & Leiβ (2007) mener problemet er at mange elever mangler evnen til å se tilbake på egen løsning for å vurdere dens rimelighet opp mot det virkelige problemet. Det virker som elevene er fornøyde med å ha oppnådd et resultat, og at de derfor ikke ser behovet for å sjekke validiteten. Dette samsvarer med studien til Ferri (2018) som også viser at elevene ikke validerer resultatene sine, men i tillegg viser den at elevene kan utføre valideringer når læreren gjør dem oppmerksomme på det. Blum (2015) hevder en veldokumentert observasjon er elevenes manglende strategier for å løse problemer i den virkelige verden. Elevene reflekterer ikke over hva de gjør, og de sliter med å overføre kunnskaper og ferdigheter fra en kontekst til en annen kontekst med strukturelle likheter.

Elevenes utfordringer ligger altså i prosessene som innebærer overgangene mellom de ulike stegene. Hver overgang innebærer en potensiell barriere som kan hindre elevene i et tilstrekkelig resultat. Videre vil jeg se nærmere på hva forskningsfeltet sier om valideringsprosessen innenfor matematisk modellering.

2.6 Validering

Sett i sammenheng med matematisk modellering handler validering om å sammenligne de reelle resultatene med situasjonsmodellen, det reelle problemet og antagelsene som ligger til grunn for det matematiske resultatet (Ferri, 2018).

Ferri (2006) deler validering inn i *intuitiv validering* og *kunnskapsbasert validering:* En *intuitiv validering* er en beslutning der eleven selv finner ut at resultatet er galt uten å kunne forklare hvorfor. Det kan også være en følelse av at noe ikke stemmer overens med egne opplevelser og assosiasjoner. I *kunnskapsbasert validering* gjør elevene en mer bevisst validering av resultatene opp mot situasjonsmodellen og egne erfaringer og opplevelser om virkeligheten, enten er de enige eller uenige i det matematiske resultatet. Den bevisste valideringen deler Ferri (2006) inn i *bevisst men ikke kunnskapsbasert,* og *bevisst og kunnskapsbasert*.

Både intuitiv og kunnskapsbasert validering gjøres på grunnlag av refleksjoner elevene har gjort tidligere i modelleringsprosessen. Det viser seg at elevene ofte validerer de matematiske beregningene, men ikke selve resultatet. Elevene tror validering handler om å sjekke matematiske beregninger, ikke hvordan resultatene stemmer med virkeligheten (Ferri, 2006).

Blum & Leiβ (2007) skriver at tidligere forskning på undervisning og læring viser hvor viktig det er å se tilbake og reflektere rundt egen løsningsprosess. Deres studie viser elevers manglende refleksjon og validering, men den viser også at elevene mangler strategier for å løse problemet. Ingen av elevene i studien til Blum & Leiβ prøvde å forbedre eget resultat, de var alle fornøyde med å ha oppnådd et resultat. Dette stemmer med resultatene til Ferri (2018) som hevder valideringen er en ekstremt viktig prosess. Hun mener elevenes modelleringsprosess ofte stopper med de matematiske resultatene fordi det er det de er vant til fra tradisjonell undervisning. I matematisk modellering må det stilles spørsmål om det matematiske resultatet er forenelig med det reelle problemet, hvis ikke mister modelleringen sin mening (Ferri, 2018).

Jeg vil nå se grundigere på Czocher (2018) sine resultater om hvordan en gruppe ingeniørstudenter validerer underveis i modelleringsprosessen.

2.6.1 Sammenligninger som valideringsform Czocher (2018)

Å validere en matematisk modell handler om å undersøke om modellen er tilstrekkelig, og i hvilken grad den er tilstrekkelig. Dette er en viktig prosess fordi en utilstrekkelig modell vil ha begrenset bruk. Valideringen fører til at et resultat aksepteres, revideres eller avvises (Czocher, 2018).

Czocher (2018) savnet en felles enighet om begrepet validering sett i lys av en matematisk modelleringsaktivitet. Hun studerte derfor hvordan en gruppe ingeniørstudenter validerer underveis i en modelleringsaktivitet. Resultatene viser at studentene bruker sammenligninger i sitt valideringsarbeid. Czocher identifiserte fem ulike typer valideringer:

1) *Sammenligner matematisk resultat med matematisk modell:* Det matematiske resultatet valideres ved å sammenligne resultatet opp mot den matematiske modellen. Denne valideringen fungerer for å sjekke om beregninger og det deduktive resonnementet er korrekt, hvilke resultater de gir og om det samsvarer med den matematiske modellen.

2) *Sammenligner matematisk modell med situasjonsmodell:* Den matematiske modellen valideres ved å sjekke om den samsvarer med den oppfatningen og de antagelsene som er gjort av den virkelige situasjonen. En slik validering kan resultere i å justere variabler i den matematiske modellen, eller endre oppfatningen av den virkelige verden slik at forholdene blir som ønsket. Utvikler grafen seg slik elevene har tenkt? Elevene jobber med matematikken og virkeligheten, slik de selv har forstått den.

3) *Sammenligner matematisk modell med den virkelige modellen:* En validering for å sikre at matematiseringen er korrekt utført. Dette kan innebære å sjekke om det er valgt riktig matematisk verktøy, og om matematikken er behandlet på en måte som blir riktig slik at den stemmer med antagelsene og forholdene som ligger til grunn for den reelle modellen av problemet. Elevene sjekker om matematiseringen stemmer overens deres forventninger. Stemmer for eksempel bakterieutviklingen representert i tabell og/eller graf med forholdene som ligger til grunn i den virkelige modellen?

4) *Sammenligner det virkelige resultatet med situasjonsmodellen*: Det endelige resultatet valideres ved å sammenligne det mot elevenes forventede resultat, situasjonsmodellen. Elevene validerer om det matematiske resultatet deres er rimelig, gjerne basert på egne erfaringer eller empiriske resultater. Denne type validering skiller seg fra neste punkt ved at den er basert på forholdene i den virkelige verden, eller empiriske resultater gjort tidligere i modelleringsprosessen.

5) *Sammenligner det virkelige resultatet med den virkelige modellen*: En validering av de virkelige resultatene ved å sammenligne med ulike deler i den virkelige modellen. Det kan være manipulasjoner av verdier som ikke referer til forholdene i den virkelige verden, eller empiriske målinger. Elevene kan undersøke hvordan ulike endringer påvirker resultatet.

Valideringstype 1 handler om å undersøke en matematisk analyse, som å justere analyse av matematisk problem, korrigere feilberegninger eller endre andre analytiske strategier. Valideringstype 2, 3, 4 og 5 handler om å tilpasse den matematiske representasjonen til den virkelige verden. Dette kan være å justere variabler, parametere eller betingelser som skal innlemmes i det matematiske resultatet. Type 2, 3 og 5 sjekker om løsningen tilfredsstiller problemet på ulike områder, mens type 4 sjekker om resultatet er fornuftig. Sammen fungerer de fem typene av validering for å sikre at selve løsningsprosessen blir godt utført.

2.7 Lærerens rolle i modelleringsaktiviteter

Ett av de viktigste funnene i studien til Blum & Ferri (2009) er hvor viktig lærerens rolle er i klasserommet. Læreren er uvurderlig i elevenes modelleringsarbeid, der det er et skille mellom elevenes uavhengige arbeid med lærerstøtte, og elevenes individuelle arbeid (Blum & Ferri 2009). Men det viser seg at lærere opplever modellering som utfordrende, der hovedgrunnen er lærernes manglende kunnskaper om hvordan undervise i modellering (Doerr, 2007).

For en kvalitetsundervisning mener Blum & Ferri (2009) det er avgjørende med en permanent balanse mellom maksimal uavhengighet og minimale veiledning fra læreren. En måte å skape denne balansen på er å bruke adaptive og strategiske lærerinngrep. Med adaptiv menes inngrep tilpasset situasjonen, og med strategisk mener de inngrep i form av små hint på elevens meta-nivå. Eksempler på slike inngrep kan være: «se for deg situasjonen», «hva er målet?», «hvor langt har du kommet?», «hva mangler fortsatt?» «passer dette resultatet til den virkelige situasjonen?». Med bakgrunn i flere studier mener Blum & Ferri (2009) lærerinngrep ofte er innholdsrelaterte eller organisatoriske, nesten aldri strategiske, noe som ikke bevarer balansen mellom veiledning og uavhengighet. En annen kjent observasjon de trekker frem er hvordan læreren hinter mot sin egen favorittløsning, noe de mener skyldes lærerens manglende kunnskap om oppgavens mangfold av løsningsstrategier.

Blum & Ferri (2009) har på bakgrunn av sine empiriske funn utviklet fire forutsetninger for å lede en modelleringsaktivitet på en effektiv måte:

1) Passende modelleringsaktivitet for å opprettholde en balanse mellom maksimal uavhengighet og minimal veiledning fra læreren
2) Støtte elevenes individuelle modelleringsruter og oppmuntre til flere løsninger, læreren må kjenne oppgavens potensialer
3) Læreren må kjenne et bredt spekter av ulike inngrep, spesielt strategiske
4) Lærer må kjenne måter å støtte elevens adekvate løsningsstrategier i modelleringsaktivteter

Doerr (2007) viser i sin studie til hvilke pedagogiske krav hun mener stilles til læreren i modelleringsaktiviteter. Hun deler de opp i de to implikasjoner. Den første implikasjonen innebærer at læreren trenger kunnskaper om *ulike tilnærminger* eleven kan ha. Det kan være krevende å forstå elevenes matematiske tilnærming samtidig som det skal formuleres et passende inngrep. Doerr mener nøkkelen er å lytte til elevenes forklaringer og tolkninger av arbeidet sitt. Hun har utviklet fire kjennetegn på pedagogiske kunnskaper som kan være til hjelp for læreren i disse situasjonene. De bør kunne:

- Lytte etter forventede uklarheter

- Gi nyttige fremstillinger av elevenes ideer for å tydeliggjøre den underliggende matematikken
- Lytte til uventede tilnærminger for å forstå hva eleven har tenkt
- Støtte utviklingen av elevenes ideer og finne forbindelser til andre representasjoner de kjenner til

Den andre implikasjonen er at læreren bør ha pedagogisk kunnskap om hvordan *forskyve forklaringer og begrunnelser* fra læreren og over til elevene. Det handler om å skape en læringskontekst der elevene selv forklarer og begrunner for hverandre og til læreren. Lærerens rolle er å sette elevene i situasjoner til å tolke, forklare, rettferdiggjøre og evaluere validiteten til modellen. Dette kan gjerne være klassediskusjoner der elevene kritisk kan vurdere hverandres modeller. I etterkant av diskusjonen er det hensiktsmessig å gi elevene tid til å gjøre eventuelle endringer på modellen sin. I stedet for den tradisjonelle praksisen der lærer validerer elevarbeid, skal elevene validere eget og andres arbeid.

Det viser seg at lærerne synes det er utfordrende å lede modelleringsaktiviteter (Blum & Ferri, 2009; Doerr,2007).

I dette kapittelet har jeg presentert rammeverket som ligger til grunn for min studie. Neste kapittel vil jeg presentere og begrunne valgene som er tatt for min forskning.

3 Metode

I dette kapittelet vil jeg presentere og begrunne valgene jeg har tatt for planleggingen, gjennomføringen og analysen av min studie. Forskningsspørsmålene jeg har forsøkt å besvare er *(1) Hvilke valideringer gjør elevene i en modelleringsaktivitet, og (2) hvilke grep gjør læreren for å sette elevene i posisjon for å validere?*

Grunnet Covid-19 og et uforutsett smitteutbrudd ble deler av gjennomføringen endret. De opprinnelige planene og endringene blir lagt frem i kapittel 3.3.3, mens konsekvensene av endringene legges frem i kapittel 3.5.5.

3.1.1 Forskningsdesign

Et forskningsdesign handler om hvordan man som forsker organiserer og undersøker en undersøkelse (Robson & McCartan, 2016). I empirisk forskning velger forsker det forskningsdesignet som er best egnet til å belyse problemstillingen eller for å besvare forskningsspørsmålet (Postholm & Jacobsen, 2018). Jeg har valgt å gjøre en kvalitativ casestudie for å belyse mine forskningsspørsmål.

3.1.2 Kvalitativ forskning

Kvalitativ forskning handler om å gjøre undersøkelser av menneskelige prosesser i deres naturlige setting (Postholm, 2020), der det er de spesielle kvalitetene og egenskapene som blir studert (Rienecker & Jørgensen, 2013). Mine forskningsspørsmål ble rettet mot valideringsprosessen i en modelleringsaktivitet. For å kunne besvare forskningsspørsmålene undersøkte jeg hvordan en gruppe elever og deres lærere jobbet med valideringsprosessen. Jeg forsøkte å forstå hvilke valideringer elevene gjorde, og hvilken betydning valideringene hadde for elevenes videre arbeid i modelleringsprosessen. Samtidig undersøkte jeg hvilke grep læreren gjorde for å sette elevene i posisjon til å gjøre valideringer. For å forstå dette så jeg etter hvordan læreren satte seg inn i elevens modelleringsprosess, og hva læreren sa for å få elevene til å gjøre valideringer for ønsket fremgang. Denne studien ble med andre ord en undersøkelse av menneskelige prosesser i en naturlig setting for å bedre forstå det spesielle ved fenomenet jeg undersøker.

3.1.3 Casestudie

Jeg har valgt å benytte en casestudie for å undersøke hvordan elevene og deres lærer jobbet med valideringsprosessen. En casestudie handler ifølge Postholm & Jacobsen (2018) om å studere en case innenfor en klart definert kontekst. I denne studien ble utvalget definert til en gruppe 10.trinnselever og deres to lærere. Innsamlingen av datamaterialet ble begrenset til én undervisningsøkt med påfølgende gruppeintervjuer av elevene og intervju av lærere. Det er ikke casen i seg selv som blir studert, men casen ble et instrument for å skaffe innsikt og forståelse av et fenomen som i mitt tilfelle er hvilke valideringer elevene gjorde og hvordan læreren satte elevene i posisjon for å validere. Studien betegnes derfor som en instrumentell casestudie (Stake, 1995). Jeg valgte å bruke case fra egen skole for å få innsikt i, og kunnskaper om hvor skolen befinner seg innenfor matematisk modellering og valideringsfasen. Intensjonen er å bruke resultatene i utviklingsarbeidet på skolen og på kommunalt plan.

3.2 Deltagere og metode for datainnsamling

3.2.1 Deltagere

Jeg spurte to kollegaer som underviser i matematikk på 10.trinn om de kunne tenke seg å delta i studien. Mine kolleger var positive til deltagelse, og det ble derfor naturlig å bruke elever fra deres klasse i utvalget. Hele klassen ble informert om studien, hva en deltagelse ville innebære, at det var frivillig og at de til enhver tid kunne trekke seg fra studien. Basert på informert samtykke ble utvalget bestående av to lærere og seksten elever.

Lærerne satte sammen fem grupper bestående av tre og fire elever (gruppe 1, gruppe 2, gruppe 3, gruppe 4 og gruppe 5). Kriteriene for gruppesammensetningen var å tilrettelegge for godt samarbeid, der to fokusgrupper skulle bestå av elever som hadde samtykket til video-/lydobservasjon og intervju. Et slikt utvalg, basert på bestemte kriterier kalles for et formålstjenlig utvalg (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Gruppe 1 med videoobservasjon besto av Vilde, Viktor og Vetle. Gruppe 2 med lydobservasjon besto av Lotte, Lise og Lena. Elevenes fiktive navn fikk bevisst forbokstavene V for videoobservasjon og L for lydobservasjon.

Elevene hadde jobbet med matematiske funksjoner innenfor ulike representasjoner med hjelp av digitale verktøy et halvt år tidligere, våren 2020. De hadde så vidt vært innom eksponentiell vekst i forbindelse med Covid-19-utbruddet, men ikke jobbet grundig med det. Metodisk hadde utvalget jobbet noe med utforskende aktiviteter, men lite med matematisk modellering. Utvalget av elever ble et variert utvalg der det ikke ble tatt hensyn til elevens faglige eller sosiale ståsted. Dette utvalget er allikevel for lite til at mine resultater kan generaliseres til en større befolkning.

3.2.2 Datainnsamling

Kvalitativ datainnsamling handler om å samle inn data først og fremst i form av ord som er rettet mot å beskrive og forstå menneskers handlinger og meningsskaping i deres naturlige kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018). Videre vil jeg presentere metodene jeg har brukt i datainnsamlingen, en beskrivelse av piloteringen og av gjennomføringen.

3.2.3 Metode for datainnsamling

Som metode for datainnsamling har jeg brukt observasjon, elevbesvarelser og intervju. En kombinasjon av flere ulike datainnsamlingsmetoder bidrar med på å styrke både påliteligheten og gyldigheten og kalles for en triangulering (Postholm & Jacobsen, 2018). Instrumentene for innsamlingen ble casen, oppgaveteksten, lydopptaker, videokamera, og intervjuguide av både elever og lærer (Vedlegg C og D) og meg som forsker.

Jeg valgte å bruke videoopptaker som instrument fordi det ga meg muligheten til å koble den matematiske samtalen til elevenes skriftlige arbeid. I tillegg bemerker Postholm (2020) at et videoopptak kan hjelpe meg som forsker å gjenskape atmosfæren fra klasserommet til kontoret. Videokameraet ble hold av en person og sikret dermed at det ikke ble filmet ansikter, samtidig som alt skriftlig og digitalt arbeid ble med i opptaket. Lydopptakeren var egentlig tiltenkt intervjuene, men siden den var tilgjengelig valgte jeg å legge den på en av gruppene for å samle samtalen til enda en gruppe, samtidig som den frigjorde meg til å bruke sansene for å fange opp situasjoner og ikke-verbale handlinger (Postholm, 2020).

Ved å samle feltnotater ble jeg som forsker instrument for observasjonen. Feltnotatene ble et resultat av de utvelgelsene jeg gjorde i løpet av observasjonen og kan derfor ikke oppfattes som en objektiv beskrivelse av handlingene (Postholm, 2020). Alle elevbesvarelsene ble samlet inn og jeg fikk dermed innsikt i flere gruppers arbeid.

Ifølge Postholm & Jacobsen (2018) vil forskerens subjektivitet og antagelser farge den kvalitative observasjonen. En kombinasjon av observasjon og intervju vil utfylle hverandre, slik at det kan etableres en intersubjektiv kunnskap og forståelse mellom forsker og deltaker. Jeg valgte derfor å bruke intervju som et instrument. Det ble gjennomført intervju av gruppe 1, gruppe 2, gruppe 7, lærer 1 og lærer 3. For å forstå deltagerens perspektiv valgte jeg et semistrukturert intervju (Kvale & Brinkmann, 2015). Jeg benyttet intervjuguidene (Vedlegg C og D) som utgangspunkt for intervjuene, samtidig som jeg brukte oppfølgingsspørsmål og inngående spørsmål for sikre riktig forståelse av deltageren.

Min egen rolle i innsamlingen var forsker med en «observatør som deltager rolle» (Gold, 1958). Det betyr at jeg ikke var deltagende i aktiviteten, men at jeg svarte på spørsmål som ikke hadde med undervisningen å gjøre. I denne studien referer jeg til meg selv som forsker.

3.3 Realisering i klasserommet

3.3.1 Forberedelser til gjennomføring

Det ble satt av god tid til planlegging i forkant av gjennomføringen, først med lærer 3 i piloten, så med lærer 1 og lærer 2 i utvalget. For å skape en felles forståelse for modellering og for hva som skulle undersøkes, brukte jeg Blum & Leiβ (2007) sin modelleringssyklus for å forklare de ulike prosessene. Som en del av forberedelsene leste utvalgets lærere artikkelen *What Knowledge Do Teachers Need for Teaching Mathematics Through Applications and Modelling?* (Doerr, 2007). Artikkelen viser elevers ulike løsningsstrategier og misoppfatninger i arbeid med samme aktivitet som ble brukt som inspirasjon i denne studien. Doerr legger i tillegg vekt på lærerens essensielle rolle i en modelleringsaktivitet; hvilke pedagogiske krav som stilles til læreren, og forslag til hvordan læreren kan sette elevene i posisjon til å ta steget videre.

Videre analyserte vi modelleringsoppgaven for å avdekke oppgavens potensiale. Vi prøvde å se for oss hvilke valg elevene ville ta og hvordan lærerne skulle håndtere dem for å opprettholde balansen mellom maksimal uavhengighet og minimale veiledning ved hjelp strategiske og adaptive inngrep. Det ble planlagt inngrep som kunne passe de ulike senarioene vi så for oss.

3.3.2 Pilot

Piloten ble gjennomført med en gruppe elever tilhørende 9. trinn, en uke før realiseringen i klasserommet. I matematikkundervisningen er vi alltid to lærere i klasserommet, et to-lærer-system. To-læreren hadde i denne piloten lærerrollen, mens jeg som forsker hadde en «observatør som deltager rollen». Valget av deltagerne i piloten begrunnes med lett tilgjengelighet, og at det ble vurdert til å kunne gi meg den informasjonen jeg trengte. I forkant ble det samlet inn skriftlig samtykke på lik linje med utvalget, dette for å kunne benytte interessante situasjoner som en del av datamaterialet mitt. Atten elever samtykket og ble satt sammen i fem grupper på tre og fire elever (gruppe 6, gruppe 7, gruppe 8, gruppe 9 og gruppe 10). Fokusgruppene ble utstyrt med opptaksutstyr, gruppe 6 (Pia V, Pat V og Pelle V) med videoopptaker, og gruppe 7 (Pål L, Petter L og Per L) med lydopptaker. Navnene er fiktive og har forbokstav på P for pilot og av sluttes med V for videoopptak og L for lydopptak. Elevene som ikke ønsket å delta jobbet med modelleringsaktiviteten i et annet rom. Hensikten med piloten var å se om den designede modelleringsaktiviteten fungerte som forventet, og om det var avsatt tilstrekkelig med tid. Erfaringene jeg fikk fra piloteringen bidro til noen endringer i oppgavetekstens formulering for å gjøre den mer presis. I tillegg ble det benyttet færre lærerinngrep enn hva jeg hadde forventet, så jeg valgte å bruke videoopptaket fra piloten i forberedelsen med lærerne i hovedutvalget. Bakgrunnsstøy på opptakene gjorde at jeg plasserte fokusgruppene i gjennomføringen lengre unna de andre gruppene.

3.3.3 Gjennomføring

Datainnsamlingen ble gjennomført innenfor en tidsramme på 90 minutter. Utvalget ble basert på frivillighet og består av de sytten elevene som sammen med foresatte samtykket til å delta i studien. I tillegg ble klassens to matematikklærere, lærer 1 og lærer 2 en del av utvalget. Elevene som ikke ønsket å delta fikk undervisning i et annet rom. Fokusgruppene ble plassert ved bord i hvert sitt hjørne, et stykke unna de andre gruppene for å redusere bakgrunnsstøy. Lydopptakeren ble plassert midt på bordet til gruppe 2, en god posisjon for å kunne fange opp elevenes samtale. Videokameraet ble betjent av en kollega som hadde rollen som «fullstendig observatør» (Gold, 1958), og som sørget for å få med alle handlinger både på papir og digitalt uten å filme elevenes ansikter. For å ufarliggjøre den unaturlige situasjonen med opptaksutstyr, snakket jeg om hvorfor det ble gjort opptak, hva jeg så etter, og svarte på elevenes spørsmål om situasjonen. Begge gruppene så ut til å være komfortable med situasjonen.

Lærer 1 startet opp timen og introduserte modelleringsaktiviteten ved å vise oppgaveteksten via projektoren. Oppgaveteksten ble lest høyt, og det ble presisert at alle notater og beregninger (også inkorrekte) skulle bli stående på notatarket, da det kunne være nyttig informasjon for meg som forsker. Lærer 2 ble dessverre opptatt med en elevsak i store deler av timen, og ble derfor i liten grad delaktig i gjennomføringen. Lærer 1 gikk rundt i klasserommet og observerte og veiledet elevene etter metodene vi hadde planlagt. Jeg som forsker observerte både elever og lærer. Lærer 1 og lærer 2 avsluttet timen sammen med å la gruppene kort presentere sine mulige løsninger. Elevene fikk i oppgave å tenke på de ulike løsningene frem til neste time, med en intensjon om å la løsningene modnes.

Neste time skulle ha vært tre dager senere, men den utgikk på grunn av Covid-19 og endring til rødt nivå samme ettermiddag som gjennomføringen fant sted. Rødt nivå innebar restriksjoner som gjorde det umulig å gjennomføre resten av opplegget før i slutten av januar. Intervjuene av gruppe 1, 2 og 7 lot seg likevel gjennomføre og fant sted tre dager etter gjennomføringen. Intervjuene av lærerne ble ikke gjennomført før etter jul. Lærer 3 fra piloten og lærer 1 ble intervjuet hver for seg. Lærer 2 hadde liten innsikt i gjennomføringen og ble av den grunn ikke intervjuet.

Datamaterialet jeg satt igjen med etter gjennomføringen besto dermed av videoobservasjon av gruppe 1 og gruppe 6, lydobservasjon av gruppe 2 og gruppe 7, intervju av gruppe 1, gruppe 2, gruppe 7, lærer 1 og lærer 3, elevbesvarelser fra alle grupper samt lærernes og egne feltnotater.

3.4 Modelleringsaktiviteten

For å belyse mine forskningsspørsmål: (1) *Hvilke valideringer gjør elevene i en modelleringsaktivitet,* og (2) *hvilke grep gjør læreren for å sette elevene i posisjon for å* *validere?* benyttet jeg en modelleringsaktivitet inspirert av Doerr (2007) sammen med modelleringssyklusen til Blum & Leiβ (2007). Modelleringsaktiviteten la til rette for arbeid i modelleringssyklusens ulike prosesser, mens modelleringssyklusen ble et verktøy for mine tolkninger av hvor i syklusen elevene befant seg, og hvilken del av syklusen de sammenlignet med.

3.4.1 Valg av aktivitet

Å lage gode modelleringsaktiviteter kan være utfordrende. Jeg har derfor hentet inspirasjon fra en aktivitet designet av Doerr (2007). Doerr brukte resultater fra samme aktivitet til å avdekke elevers ulike tilnærminger og de pedagogiske kravene som stilles til lærere. Aktiviteten legger opp til et behov om å skape en modell, og for å komme innom de ulike prosessene i modelleringssyklusen, inkludert behovet for å validere. Disse argumentene ligger til grunn for hvorfor mitt valg av modelleringsaktivitet, Figur 3 (Vedlegg A), er egnet for å belyse mine forskningsspørsmål.

Bakterier er små encellede organismer som finnes overalt. Bakterien E. coli er en bakterie som trives i tarmsystemet vårt. De fleste E. coli bakteriene har gode hensikter, men noen kan gjøre oss syke.

Det er funnet en bestand av en ukjent E. coli bakterie i det kommunale vannet. Bestanden formerer seg raskt, den dobles hvert 15. minutt. Etter 1 time og 15 minutter inneholdt bestanden 80 000 bakterier.

Dere får i oppdrag å lage en modell som viser hvordan bakteriebestanden vil utvikle seg. Det skal legges ved en skriftlig begrunnelse for valgene som er tatt underveis i arbeidet, og en begrunnelse på hvorfor dere mener modellen viser et godt bilde av utviklingen.

Figur 3: Modelleringsaktiviteten som ble brukt for å belyse forskningsspørsmålene.

Modelleringsaktiviteten legger til rette for at elevene kan komme innom de ulike prosessene i modelleringssyklusen til Blum & Leiβ (2009), nærmere forklart i kapittel 2.4.2. En analyse av modelleringsruten til elevene avdekket i hvilken prosess av syklusen de befant seg. Dette gjorde det enklere å identifisere hvilke valideringer elevene gjorde, og i hvilke deler av modelleringsprosessen valideringene ble gjort.

Det reelle problemet i denne aktiviteten er et utbrudd av en ukjent E. coli-bakterie. Elevene skulle bistå kommunen med å lage en modell som representerer bakterievekstens utvikling, slik at de bedre kunne forutse og forstå situasjonen. Aktiviteten ga elevene mulighet til å gjøre antagelser som for eksempel en bakteries levetid, eller om bestanden kan nå et maksantall med tanke på næring. Oppgaveteksten inneholder også data i form av tall og fakta, som er et eksempel på dette spesielle tilfellet, der intensjonen var å hjelpe elevene i gang:

- Bestanden dobler seg hvert femtende minutt
- Etter 1 time og 15 minutter inneholder bestanden 80 000 bakterier

Denne informasjonen var tenkt som et eksempel, men også som en starthjelp slik at alle fikk muligheten til å komme i gang med arbeidet. Deretter var tanken at elevene skulle se behovet for å videreutvikle modellen til en generell modell som er overførbar til andre lignende situasjoner (Lesh & Caylor, 2007).

3.4.2 Aktivitetens matematiske potensiale

Det matematiske temaet i denne aktiviteten er funksjoner og eksponentiell vekst. Aktiviteten legger til rette for et resultat som kan representeres på ulike måter, som tabell, grafisk fremstilling, som verbalt språk eller som et funksjonsuttrykk (Janvier, 1987). I det følgende vil jeg legge frem et mulig resultat for hver av representasjonene.

Det er rimelig å anta at elevene vil begynne med det spesielle eksempelet og tallinformasjonen oppgitt i oppgaveteksten. For å finne bakteriebestandens størrelse ved start, kan det tenkes at elevene benytter en strategi der de dividerer bakteriebestanden på åtti tusen bakterier på to fem ganger. Denne strategien kan føre til følgende formel: $80000 \div 2^5 = 2500$.

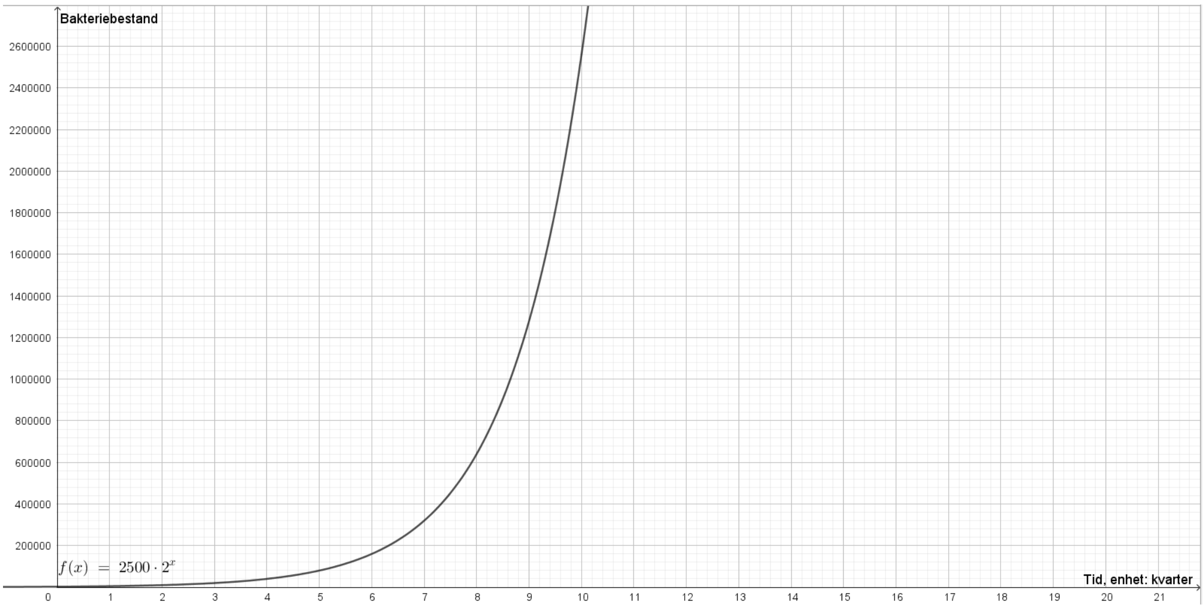
En tabell kan være et godt verktøy i arbeidet med å systematisere tallinformasjonen. En mulig representasjon er illustrert under i Tabell 1.

Tid i minutter	**Antall kvarter**	**Antall bakerier**	**Sammenheng**
0	0	2500	2500
15	1	5000	$2500 \cdot 2$
30	2	10 000	$2500 \cdot 2 \cdot 2$
45	3	20 000	$2500 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
60	4	40 000	$2500 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
75	5	80 000	$2500 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
	x	$f(x)$	$2500 \cdot 2^x$

Tabell 1: En tabell som representasjon av bakterieveksten

En systematisering kan hjelpe elevene med å oppdage mønster og sammenhenger. Tabellen over systematiserer sammenhengen mellom tid og antall bakterier. Sammenhengen mellom antall kvarter og eksponenten vil være avgjørende for å utvikle et matematisk uttrykk, $2500 \cdot 2^x$, der x representerer antall tidsenheter (kvarter).

En annen mulig representasjon er en grafisk fremstilling. Den kan løses både analogt og digitalt. En mulig digital fremstilling er illustrert under, Figur 4 .



Figur 4: En grafisk representasjon av bakterieveksten

Denne grafiske fremstillingen bygger på funksjonsutrykket $f(x) = 2500 \cdot 2^x$. Uttrykket er en generalisering av situasjonen og en mulig løsning elevene kan komme frem til.

En verbal beskrivelse av situasjonen som representasjon kan formuleres på mange nivåer. En enkel beskrivelse kan være «bakterieveksten dobler seg hvert femtende minutt», mens en mer presis beskrivelse kan være: $Vekst = bakterier\ ved\ oppstart\ \cdot vekstrate^{antall\ tidsenheter}$. Denne kan videreutvikles til et generelt funksjonsuttrykk ved å sette vekst til V, bakterier ved oppstart til b, veksten til r, og antall gjentagelser til x. Det generelle uttrykket $V = b \cdot r^x$ er nå representativ for andre eksponentielle vekster. I denne situasjonen vil det spesielle funksjonsutrykket være $f(x) = 2500 \cdot 2^x$.

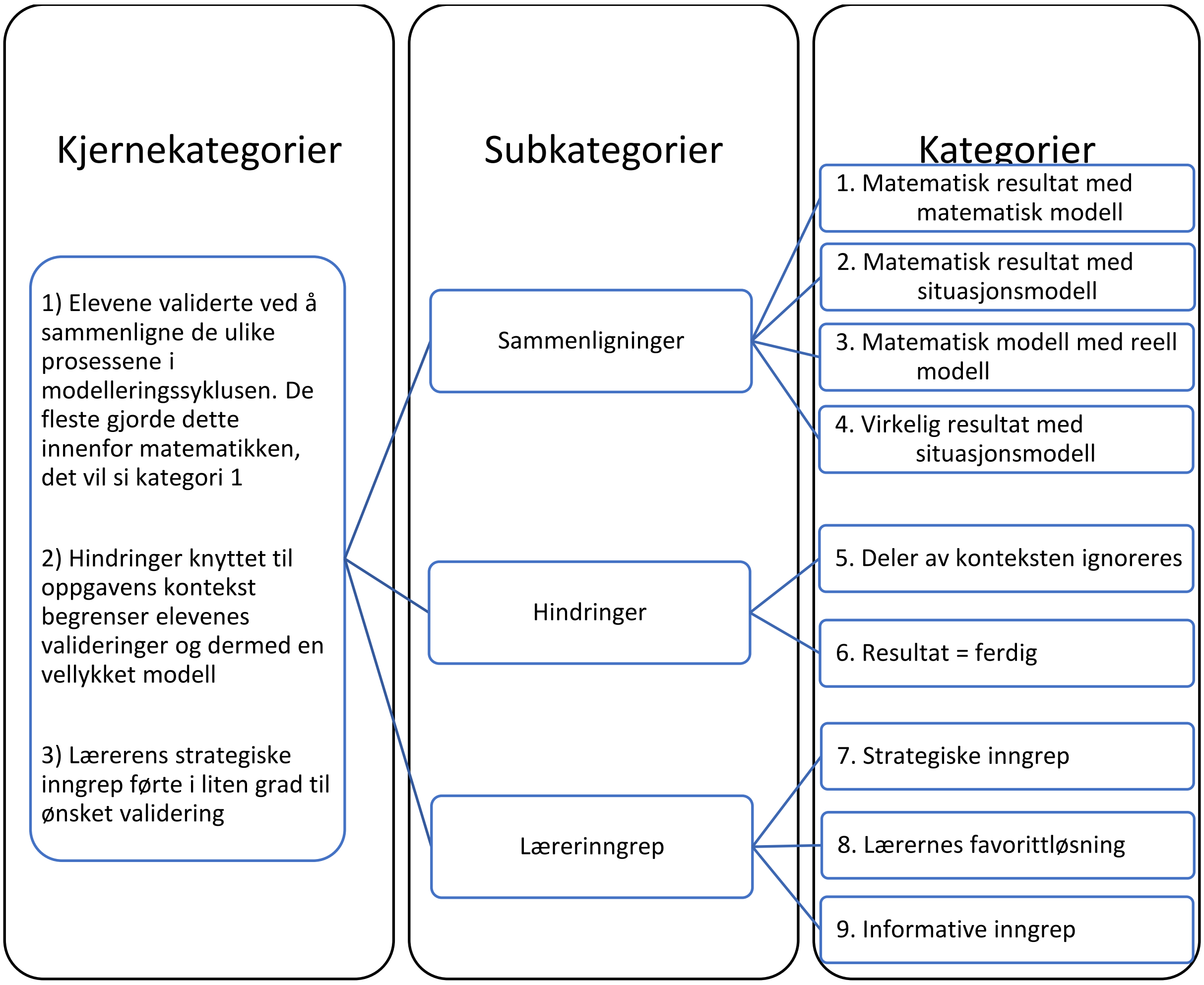
3.5 Analyse av datamaterialet

3.5.1 Datamaterialet

I en casestudie er det empirien som er materialet som blir undersøkt, og dermed studiens analyseobjekt (Rienecker & Jørgensen, 2013). Datamaterialet som ble analysert i denne studien er videoobservasjon av gruppe 1 (utvalg) og gruppe 6 (pilot), lydobservasjon av gruppe 2 (utvalg) og gruppe 7 (pilot), intervjuer av lærer 1 og lærer 3, gruppe 1, 2 og 7. I tillegg ble elevbesvarelser fra både pilot og utvalg, samt egne feltnotater fra observasjoner analysert.

3.5.2 Den konstant komparative analysemetoden

Den konstant komparative analysemetoden egner seg godt for studier hvor koding og kategorisering av datamaterialet er vesentlig (Postholm, 2020), og ble derfor et naturlig valg for min studie. Jeg har valgt en tilnærming som innebærer en interaksjon mellom induksjon (empirien) og deduksjon (teori), via meg som forsker (Nilssen, 2012). Analysemetoden ble delt inn i de tre faser: *åpen koding* som ga meg *kategoriene*, *aksial koding* ga meg s*ubkategoriene* og *selektiv koding* som ga meg *kjernekategoriene* (Postholm, 2020). Figur 5 viser en hierarkisk illustrasjon av analysens oppbygging av kategorier, subkategorier og kjernekategorier.



Figur 5: En oversikt over kjernekategorier, subkategorier og kategorier

Følgende vil jeg bruke teorien til Postholm (2020) for å beskrive de ulike fasene av analysearbeidet mitt.

Etter datainnsamlingen fikk jeg oversikt over datamaterialet ved å se gjennom opptak og besvarelser. Deretter transkriberte jeg videoopptakene, lydopptakene og intervjuene. Transkripsjonene ble skrevet ut på papir slik at jeg kunne markere med fargekoder og gjøre notater rett på arket. Transkripsjonen ble lest flere ganger der jeg forsøkte å forstå hva de ulike situasjonene fortalte meg, hvordan elevene hadde tenkt og hvordan jeg skulle forstå det. I dette arbeidet ble jeg godt kjent med datamaterialet samtidig som jeg noterte alle umiddelbare tanker, tolkninger og refleksjoner. Situasjoner som utmerket seg eller gjentok seg fikk midlertidige koder. Fokuset ble rettet mot utvalgets fokusgrupper, men også mot interessante situasjoner i piloten.

Analysearbeidet gikk over i fasen *åpen koding,* som er den delen av analysen hvor fenomener får navn og blir kategorisert gjennom en intens og nøye gjennomgang (Postholm, 2020). I en grundig og systematisk analyse av transkripsjonene ble alle situasjoner nøye studert, mens jeg forsøkte å forstå hva de representerte og hva de kunne ses i sammenheng med. Noen av situasjonene fikk ny kode, og nye fenomener ble identifiserte og kodet.

For å gjøre datamaterialet mer oversiktlig forsøkte jeg å finne mønstre som kunne hjelpe meg å samle kodene i *kategorier*. I denne prosessen prøvde jeg meg frem med ulike kategorier for å finne de som best beskrev fenomenene og samtidig belyste forskningsspørsmålene. Til tross for et åpent sinn, ble jeg påvirket av teorien jeg hadde lest på forhånd, jeg identifiserte derfor raskt koder som beskrev hindringer for valideringer, og koder for ulike lærerinngrep. Jeg hadde derimot funnet lite teori om hvordan elever validerer, og hadde derfor få forventninger om hva datamaterialet ville fortelle meg om fenomenet. Da jeg identifiserte at elevene sammenlignet arbeid fra ulike deler av modelleringssyklusen, gjorde jeg nye søk i faglitteraturen og fant artikkelen til Czocher (2018). Jeg valgte derfor å kode etter Czocher sine fem kategorier. I datamaterialet identifiserte jeg fire av disse kategoriene, i tillegg til fem andre. Til sammen utviklet jeg ni følgende kategorier:

1) *Sammenligner matematisk resultat med matematisk modell*
2) *Sammenligner matematisk modell med situasjonsmodell*
3) *Sammenligner matematisk modell med den reel modellen*
4) *Sammenligner det reelle resultatet med situasjonsmodellen*
5) *Deler av kontekst ignoreres*
6) *Resultat = løsning*
7) *Strategiske inngrep*
8) *Lærerens favorittløsning*
9) *Informative inngrep*

I den *aksiale kodingsprosessen* (Postholm, 2020) var målet å gjøre fenomenet enda mer presist og fullstendig. Prosessen for å finne subkategorier startet allerede i arbeidet med å kode datamaterialet der jeg hele tiden analyserte hvordan kodene, og etter hvert kategoriene, forholdt seg til hverandre. For å finne relasjonene mellom kategoriene og subkategoriene forsøkte jeg å forstå *når, hvorfor og under hvilke forhold* de ulike kategoriene dukket opp (Strauss & Corbin, 1998). På denne måten utviklet jeg subkategoriene:

- *Sammenligninger*
- *Hindringer*
- *Lærerinngrep*

Analysens siste fase, *selektive kodingen,* handler om å finne kjernekategorien som kan relateres til de andre kategoriene, og representere forskningens hovedtema (Postholm, 2020). I forkant av denne prosessen hadde jeg analysen klar foran meg. For å få en så presis kjernekategori som mulig valgte jeg å ha tre kjernekategorier, en for hvert funn:

- Elevene validerte ved å sammenligne arbeid fra ulike prosesser i modelleringssyklusen. De fleste gjorde dette innenfor matematikken, det vil si kategori 1
- Hindringer knyttet til oppgavens kontekst begrenset elevenes valideringer, og dermed et vellykket resultat
- Lærerens planlagte og strategiske inngrep førte i liten grad til ønsket validering

Datamaterialet var nå kodet og delt inn i kategorier, subkategorier og kjernekategorier som representerer studiens fenomen. Jeg valgte ut de situasjonene jeg mener best belyser de ulike kategoriene. Disse situasjonene representerer forskningsfeltet og blir beskrevet i kapittel 4. Resultatkapittelet er bygd opp etter kjernekategorier, subkategorier og kategorier og har til hensikt å binde de ulike delene sammen.

3.5.3 Forskningsetiske retningslinjer

Forskningsetiske retningslinjer er konkretiseringer av forskersamfunnets grunnleggende normer og verdier (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2016) (NESH). Følgende vil jeg legge frem de retningslinjene jeg forholdte meg til i min studie.

3.5.4 Håndtering av personvernopplysninger

I datainnsamlingen ønsket jeg å benytte videoopptak på en fokusgruppe og lydopptak i intervjuene med elever og lærere. Bruk av elektroniske hjelpemidler til å samle inn personopplysninger gjorde studien meldepliktig (NESH, 2016). Studien ble meldt, og godkjent av Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD), Vedlegg G.

Når forskning behandler personopplysninger, må forskeren både informere og innhente samtykke fra dem som deltar i forskningen (NESH, 2016). For å informere deltagerne utviklet jeg et informasjonsskriv som beskrev formålet med studien, og hva det ville innebære å delta i studien (Vedlegg E). Skrivet ble lest høyt for klassen, og jeg besvarte spørsmål elevene hadde rundt studien.

Elevene som deltok i studien var under 15 år, derfor ble jeg pliktig til å innhente samtykke fra både deltagere og deres foresatte (NESH, 2016). Infoskriv og samtykkeskjema ble sendt til foresatte for at deltagerne og foresatte sammen kunne velge hvilke deltagelser de ønsket (Vedlegg E). Lærerne som deltok i studien samtykket i eget skjema (Vedlegg F). Det ble presisert at deltagerne til enhver tid hadde mulighet til å trekke seg fra studien uten at det ville få noen form for konsekvenser.

Digitalt opptaksutstyr og lagringsenheten tilhører NTNU. Videoopptakene og lydopptakene ble lagret på en kryptert minnepenn. I transkriberingen av opptakene ble det opprettet fiktive navn på deltagerne for å anonymisere datamaterialet. Video- og lydopptakene ble slettet etter transkripsjonene.

3.5.5 Metodekritikk

Som en konsekvens av Covid-19, gikk skolen fra gult til rødt nivå samme ettermiddag som datainnsamlingen ble gjennomført. Økten der elevene skulle presentere og argumentere for modellene sine lot seg derfor ikke gjennomføre. Rødt nivå førte også til at lærerintervjuene ble utsatt til januar. Lærerne ble oppfordret til å notere ned umiddelbare tanker og tolkninger av elevenes valideringsarbeid, men det er forståelig at de i intervjuet opplevde det utfordrende å huske tilbake til gjennomføringen. Jeg ser på endringene som måtte gjøres som en svakhet, men ikke avgjørende for min forskning.

Målet var å observere elevene i en så kjent og naturlig situasjon som mulig. Jeg var i forkant av gjennomføringen innom klassen flere ganger for å snakke med dem og svare på spørsmål om studien. Det var klassens matematikklærere som ledet gjennomføringen og elevene ble satt sammen i grupper med fokus på godt samarbeid. Det ble allikevel ikke en naturlig setting med videoopptaker, lydopptaker og meg som observatør i klasserommet, noe som kan ha påvirket resultatene i min studie.

Selv om jeg hadde rollen «observatør som deltager», vil resultatene være farget av meg. Jeg fikk derfor læreren som deltok i utvalget til å kritisk lese gjennom resultatene for å sikre at jeg har forstått deres uttalelser og observasjon av situasjonene riktig.

I dette kapittelet har jeg presentert og forsøkt å begrunne de ulike valgene som ligger til grunn for min casestudie. I neste kapittel vil jeg legge frem resultatene fra min gjennomføring.

4 Resultater

I dette kapittelet vil jeg presentere og analysere sentrale situasjoner fra datamaterialet for å belyse mine forskningsspørsmål: 1) *hvilke valideringer gjør elevene i en modelleringsaktivitet* og 2) *hvilke grep læreren gjør for å sette elevene i posisjon for å gjøre valideringer.*

Kapittelet er delt inn i *sammenligninger som valideringsform, hindringer for valideringer* og *lærerinngrep*.

I mitt analysearbeid identifiserte jeg tre funn:

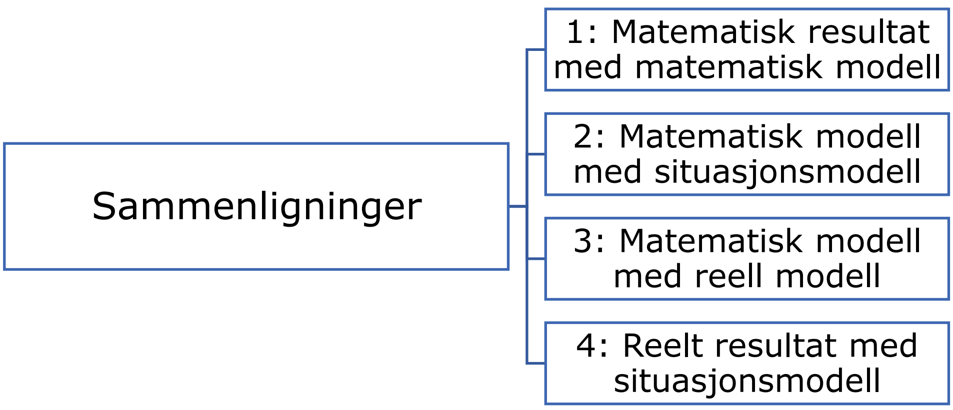
- Elevene validerte ved å sammenligne arbeid fra ulike prosesser i modelleringssyklusen. De fleste gjorde dette innenfor matematikken, det vil si kategori 1
- Hindringer knyttet til oppgavens kontekst begrenset elevenes valideringer, og dermed et vellykket resultat
- Lærerens planlagte og strategiske inngrep førte i liten grad til ønsket validering

Funnene er basert på datamaterialet fra observasjoner, intervjuer og elevbesvarelser. I dette kapittelet vil jeg legge frem situasjoner som blir analysert og brukt som belegg for påstandene min.

Funn fra observasjoner og intervjuer er i hovedsak lagt fram som ytringer, med unntak av noen situasjoner der jeg har sett det hensiktsmessig å gjengi innholdet med korte beskrivelser. Intervjuene er merket Int.Gx (intervju av gruppe x) eller Int.Lx (intervju av lærer x) for å knytte situasjonen til riktige grupper eller lærer. Funnene fra besvarelser er lagt fram som bilder. For forklaring på transkripsjonskoder se Vedlegg B.

4.1 Sammenligninger som valideringsform

Ett av funnene i denne studien er hvordan elevene validerte ved å sammenligne ulike deler i modelleringsprosessen. For å strukturere elevenes sammenligninger har jeg brukt fire av Czocher (2018) sine kategorier, Figur 6.



Figur 6: Kategoriene for elvenes ulike sammenligninger

I det følgende vil jeg presentere de ulike kategoriene i hvert sitt kapittel.

4.1.1 Matematisk resultat med matematisk modell

Denne kategorien innebærer å validere et matematisk resultat ved å sammenligne resultatet med en matematisk modell (Czocher, 2018). En matematisk modell kan være en matematisk representasjon av problemet representert verbalt, i tabell, en graf eller til funksjonsuttrykk (Janvier, 1987). Jeg valgte å tolke et matematiske resultat til å inkludere situasjonen der elevene var i prosess med å utarbeide et matematisk resultat.

Gruppe 1 hadde bestemt seg for å lage en grafisk fremstilling på papir, og hadde satt opp en tabell som viste bakteriebestandens størrelse fra femten til syttifem minutter. I situasjonen under arbeidet de med den grafiske fremstillingen.

70:	Vilde:	Sånn. Også oppover her skal vi starte med fem tusen da? (peker på y aksen)
71:	Viktor:	Ja, vi kan ta hver tredje der også
72:	Vetle:	Vi starter på fem tusen da, så vi får det samme som her (peker på tabellen med antall bakterier for hvert kvarter)

Som situasjonen viser, sammenlignet elevene den påbegynte grafen med en tabell (som viste bakterieutviklingen for hvert kvarter de de første syttifem minuttene). I ytring 72 begrunnet Viktor grafens startpunkt med at den blir likt som i tabellen. Denne sammenligningen resulterte i et samsvar mellom koordinatene i tabellen og i grafen. Slik jeg ser det anså elevene tabellen som en riktig representasjon og derfor et sikkert sammenligningsgrunnlag.

Den neste situasjonen er hentet fra samme gruppe, men på et senere stadium i modelleringsprosessen. Et lærerinngrep hadde gitt elevene behovet for en generalisering, de jobbet derfor med å finne et uttrykk som kunne sette inn i GeoGebra. I samtalen under sammenligner det matematiske resultatet, $y(x) = (x \cdot 2) + 15,$ med grafen de laget på papir.

243:	Vilde:	Jo men, da starter, nei, for når det er pluss femten der da starter den på femten her… (peker på uttrykkets konstantledd, og så på nedre del av y-aksen på grafen de har på papir)
244:	Vilde:	Det er feil. Men… kanskje ikke femten trenger å være med

Vilde sammenlignet konstantleddet i uttrykket med startpunktet på den grafiske fremstillingen. Hun oppdaget at konstantleddet ikke samsvarte med skjæringspunktet til grafen og y-aksen, og konkluderte med at resultatet var feil. Min tolkning av situasjonen tilsier at Vilde validerte resultatet sitt til å være ugyldig samtidig, noe som resulterte i videre arbeid med blikket rettet mot konstantleddet.

I intervjuet med gruppe 1 snakket vi om hvordan de oppdaget at et av de matematiske resultatene var inkorrekt. Vilde svarer følgende:

Int.G1:	Vilde:	Det var det vi gjorde på starten der (peker på tabell). Når det hadde gått femten minutter til så visste vi det at det ikke var 25 000 bakterier eller virus (peker på grafen)
Int.G1:	Forsker:	Betyr dette at dere sammenlignet diagrammet med tabellen?
Int.G1:	Alle:	Ja

Fra Vilde sin ytring er min tolkning at de sammenlignet resultatet med tabellen som representerte den matematiske modellen de utarbeidet innledningsvis i prosessen. Når jeg spurte direkte om dette, ble det bekreftet med et enstemmig ja. Denne situasjonen forsterker min antagelse om at elevene brukte de matematiske modellene som ble laget innledningsvis i prosessen som sikre og riktige opplysninger, og dermed et godt sammenligningsgrunnlag.

I intervjuet med lærer 1 spurte jeg om hun hadde observert hvordan elevene forholdt seg til modellene, som ble laget innledningsvis, videre i modelleringsarbeidet. På det svarte hun følgende:

Int. L1:	Lærer 1:	Ja, for når de etter hvert gikk videre til å bruke digitale verktøy, så brukte de jo, de prøvde seg frem med ulike funksjonsuttrykk. Også så de at de uttrykkene de tok inn i GeoGebra ikke stemte med det de hadde tegnet på papiret. Og at papirmodellen deres var en riktigere representasjon. Så det er jo en måte de validerte eget arbeid på.

Min tolkning tilsier at læreren observerte at elevene brukte de matematiske modellene på papir som sammenligningsgrunnlag, spesielt i situasjoner hvor elevene testet ut uttrykk i GeoGebra og sammenlignet de med grafen på papir. Dette samsvarer med mine egne observasjoner.

Med belegg i datatrianguleringen anser jeg situasjonene som er analysert over, faller inn under kategori 1. Dette fordi elevene var i prosess med å utarbeide, eller hadde utarbeidet, et mulig matematisk resultat som de sammenlignet med en matematisk modell. Som Czocher, (2018) identifiserte er dette den eneste kategorien der sammenligningene skjer innenfor den matematiske verden, i de andre kategoriene innebærer sammenligningene en overgang mellom matematikken og virkeligheten.

4.1.2 Matematisk modell med situasjonsmodell

I kategori 2 sjekket elevene om den matematiske modellen samsvarte med situasjonsmodellen (den mentale representasjon av det reelle problemet) de hadde dannet seg av det reelle problemet (oppgaveteksten).

I det følgende vil jeg legge frem to situasjoner hentet fra gruppe 6 og gruppe 2. I situasjonen under har gruppe 6 lest oppgaveteksten og begynt rett på matematiseringen, der de diskuterte hvordan utvikle en grafisk fremstilling i regneark.

13:	Pål L:	Vi starter på 0 også_
14:	Petter L:	Nei vi må ha, liksom begynne med et visst antall_
15:	Per L:	Vi starter på 1_
16:	Pål L:	Jammen_
17:	Per L:	Ja, hvis vi starter på 1 så får vi jo vite hva det skal være for å gå opp til 80 000 da
18:	Petter L:	*Hæ?*
19:	Per L:	Vi kan ikke bare ta et antall for da må vi starte med en bakterie
20:	Pål L:	Men 80 000 det er bare et eksempel

Fra Pål sin ytring 13 tolker jeg at hans forståelse tilsa at bakterieveksten kunnen utvikle seg fra null bakterier, mens Petter i sin ytring 14 viser en mental forståelse om at en bakterievekst må ha et visst antall bakterier for å kunne utvikle seg. Fra samtalen antar jeg at resten av gruppa aksepterte Petter sin påstand, som kan ha skapt en felles situasjonsmodell i gruppa. Videre hevdet Pål i sin ytring 20 at bakteriebestanden på åtti tusen etter en time og femten minutter bare var et eksempel. Av dette tolker jeg at han hadde forstått det reelle problemet til å være et generelt problem, mens resten av gruppa hadde tolket det til å være et spesielt tilfelle basert på tall og fakta i oppgaveteksten. Gruppa aksepterte delvis Pål sin tanke, men de valgte allikevel å gå tilbake til det spesielle tilfellet. I denne prosessen jobbet elevene med overgangen mellom virkeligheten og matematikken. Det kan se ut til at valideringen oppsto fordi elevene hadde dannet seg ulike situasjonsmodeller av problemet. Elevene sammenlignet dermed den matematiske modellen med hvordan de hadde forstått problemet.

I gruppe 2 hadde elevene laget en tabell og et stolpediagram som viste bakterieveksten de første syttifem minuttene. Lise studerte diagrammet og utbrøt:

139:	Lise:	Det er liksom, det hjelper lite å vite hvordan det kommer til å se ut etter tre timer og et kvarter. Det er mer interessant å se hvordan det ser ut om_

Fra Lises sitat, samt påfølgende samtale, er det tydelige tegn på at hun ikke lenger var fornøyd med modellen. Min tolkning er at Lise innså grafens begrensninger, at den ikke ga noe godt bilde av bakterieutbruddet. Lise så behovet for en modell som estimerer bakterieveksten fremover i tid. Situasjonsmodell ser ut til å endre seg fra å være basert på tall og fakta i oppgaveteksten til i større grad å inkludere oppgavens kontekst. Den matematiske modellen samsvarte ikke lenger med Lise sin situasjonsmodell. Denne valideringen resulterte i videre arbeid mot en mer langsiktig og etter hvert generell modell.

Begge situasjonene over faller inn under kategori 2 fordi elevene jobbet med å utvikle matematiske modeller når de oppdaget manglende samsvar mellom modellen og egen situasjonsmodell. Situasjonene som er lagt frem i dette kapittelet var de eneste der elevene uten lærerinngrep så behovet for en generalisering. I de andre situasjonene som ble kategorisert innenfor kategori 2 sammenlignet elevene modellen med oppgavetekstens tall og fakta, der fokuset var å rettferdiggjøre det matematiske resultatet de har kommet frem til.

4.1.3 Matematisk modell med reell modell

Denne tredje kategorien innebærer å sammenligne den matematiske modellen med den reelle modellen (Czocher, 2018). En reell modell er en forenklet og strukturert modell av det virkelighetsnære problemet, gjerne basert på en rekke antagelser (Blum & Leiβ, 2006). Datamaterialet mitt viser hvordan de fleste elevene strukturerte og forenklet ved å hente ut tall og fakta fra oppgaveteksten. Jeg har derfor tolket elevenes reelle modell til å være basert på: «åtti tusen bakterier etter en time og femten minutter. Bakteriebestanden dobler seg for hvert femtende minutt». Med enkle struktureringer og minimale antagelser, anser jeg de fleste elevers reelle modeller til å være svært enkle.

Situasjonen under er hentet fra gruppe 6. De hadde hittil jobbet individuelt med å overføre den reelle modell til en matematisk modell. Elevene noterte følgende: $80\,000\ på\ 1\ t\ og\ 15\ min.\quad 15min \cdot 5 = 1t\ og\ 15\mathrm{min}.$ Videre forsøkte de å finne bakteriebestandens størrelse ved start: $80000 \div 5 = 16000$. For å sjekke modellens validitet begynte Pat å doble:

10:	Pat V:	Når du blir, når det er 16 totalt, så dobler det seg til 32, også dobler 32 seg til 64.. Nei det går ikke, da blir det jo alt for mange

Fra Pat sin ytring er min tolkning at han sammenlignet antall bakterier med den reelle modellen de hadde laget tidligere, og fra det konkludert med at bakterieveksten ble for stor. Han fant ut at bestanden ble på sekstifire tusen bakterier etter to doblinger/kvarter, mens den reelle modellen tilsa at den skulle være på åtti tusen bakterier etter fem kvarter. Valideringen resulterte i at de forkastet modellen og forsøkte på nytt i situasjonen under.

11:	Pia V:	Blir det ikke bare 16 + 16 + 16_
12:	Pat V:	Jo det blir vel det
13:	Pelle V:	Så får vi 48, så_
14:	Pat V:	Men det står jo at den dobler seg, da, ikke at den legger på 16 000 … den dobler seg ikke da

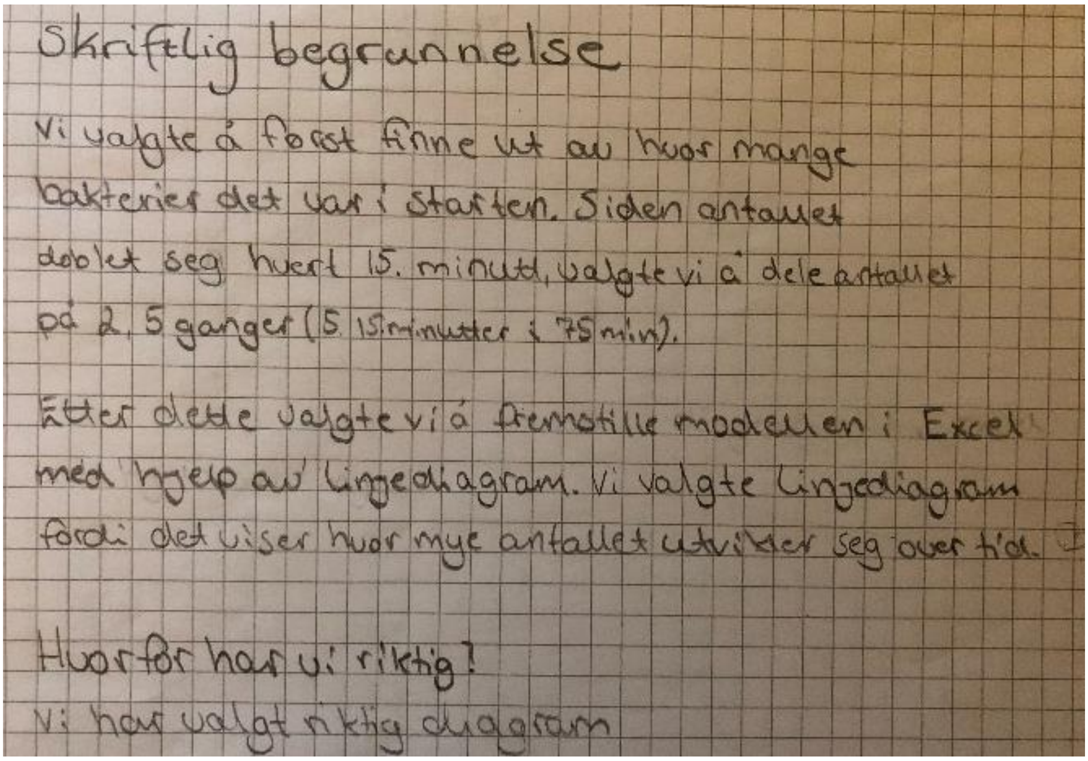
Her prøvde Pia å øke med ett tusen seks hundre i stedet for å doble. Fra Pat sin ytring 14 ser jeg at han sammenlignet tallene i modellen med forutsetningene de har satt i den reelle modellen. Pat bemerket at deres reelle modell tilsa en dobling, mens den matematiske modellen de forsøkte å lage la til ettusen sekshundre for hvert kvarter. Elevene var enige om at modellen ikke samsvart med forutsetningene de satt, så de forkastet forsøket.

Begge situasjonene tilhører kategori 3 fordi elevene jobbet med å overføre det strukturert problemet til matematikken. Elevene forsøkte å finne riktig matematikk samtidig som de sammenlignet med hvordan de hadde strukturert problemet. Denne sammenligningen skiller seg fra forrige kategori fordi den matematiske modellen ble sammenlignet med hvordan de hadde strukturert problemet, mens i kategori 2 sammenlignet de med hvordan de hadde forstått det reelle problemet (hva oppdraget var).

4.1.4 Reelt resultat med situasjonsmodellen

Et reelt resultat er et endelig resultat, der elevene har jobbet matematisk, tolket resultatet opp mot virkeligheten og ansett det som en endelig løsning som samsvarer med det reelle problemet (Blum & Leiβ, 2006). Det reelle resultatet sammenlignes med situasjonsmodellen (Czocher, 2018). I situasjonene som blir lagt frem i denne kategorien sammenlignet elevene resultatene med hvordan de hadde forstått det reelle problemet, noe som ikke nødvendigvis var et riktig bilde av problemet. Situasjonen er hentet fra elevenes skriftlige begrunnelser for resultatet.

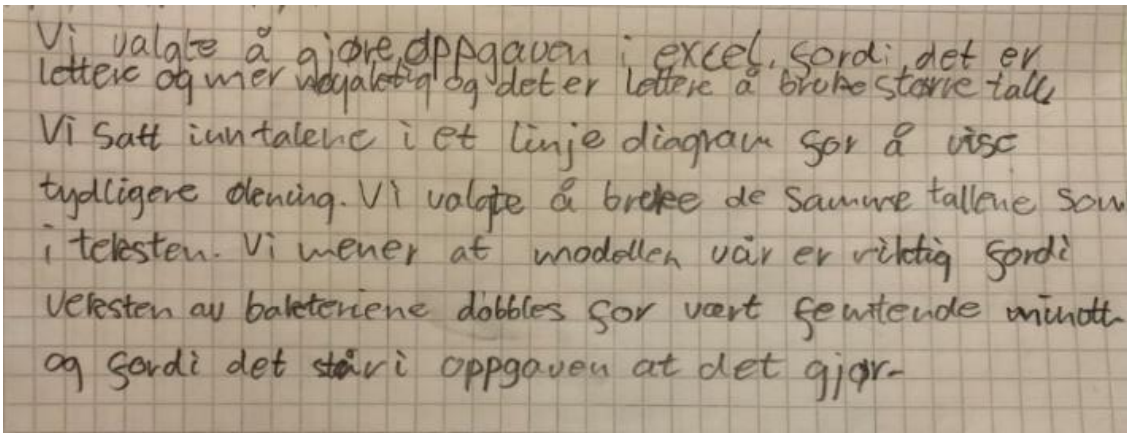
Bilde under (Figur 7) viser gruppe 3 sine begrunnelser for valgene de tok underveis i prosessen og for det endelige resultatet.


Skriftlig begrunnelse
Vi valgte å først finne ut av hvor mange bakterier det var i starten. Siden antallet doblet seg hvert 15. minutt, valgte vi å dele antallet på 2, 5 ganger (5 15 minutter i 75 min).
Etter dette valgte vi å fremstille modellen i Excel med hjelp av linjediagram. Vi valgte linjediagram fordi det viser hvor mye antallet utvikler seg over tid.
Hvorfor har vi riktig?
Vi har valgt riktig diagram

Figur 7: Gruppe 3 sin skriftlige begrunnelse for modellen

Elevene begrunnet valget av linjediagram med at det viser vekst over tid. Resultatet begrunner de med at de hadde valgt rett diagram. Fra denne skriftlige begrunnelsen, og fra modellen (presenter i Figur 11 under kapittel 4.2.1) er min tolkning at elevenes forståelse av det reelle problemet innebar å lage en riktig matematisk representasjon basert på tall og fakta oppgitt i oppgaveteksten. Slik jeg ser det forsøkte elevene å rettferdiggjøre valg av representasjon og matematikk, mens resten av konteksten ble ignorert.

Gruppe 7 sin skriftlige begrunnelse for valgene de tok underveis i prosessen, og for det endelige resultatet presenteres i Figur 8.


Vi valgte å gjøre oppgaven i excel, fordi det er lettere og mer nøyaktig og det er lettere å bruke større tall. Vi satt inntalene i et linje diagram for å vise tydligere økning. Vi valgte å bruke de samme tallene som i teksten. Vi mener at modellen vår er riktig fordi veksten av bakteriene dobbles for hvert femtende minutt og fordi det står i oppgaven at det gjør.

Figur 8: Gruppe 7 sin skriftlige begrunnelse for modellen

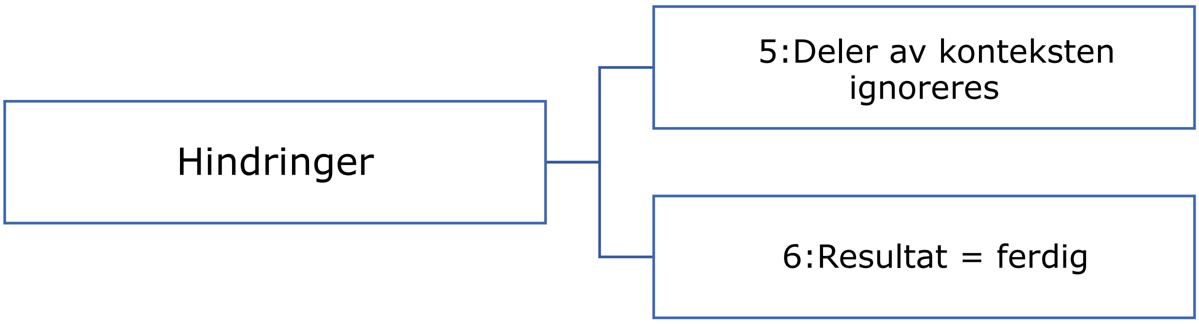
Denne begrunnelsen er basert på hensiktsmessig valg av representasjon, som de mener er linjediagram i ExCel. Videre kan begrunnelsen sammenlignes med gruppe 3 sin begrunnelse, begge ble basert på oppgavetekstens tall og data, der gruppe 7 presiserer følgende: *«modellen er riktig fordi veksten av bakteriene dobles for hvert femtende minutt og fordi det står i oppgaven at det gjør det».* Her presiserer elevene at modellen stemmer fordi den samsvarer med det spesifikke eksempelet med tall og fakta i oppgaveteksten.

Fra situasjonene som er analysert i denne kategorien tolker jeg elevenes situasjonsmodell til å være meget begrenset. Sammenlignet de mot oppgaveteksten eller mot situasjonsmodellen? Det kan også diskuteres om elevene hadde et matematisk eller reelt resultat. Jeg har uansett valgt å presentere situasjonen i denne kategorien, men vil diskutere usikkerhetene nærmere i kapittel 5.1.

I dette kapittelet har jeg presentert og analysert situasjoner jeg mener beskriver de fire første kategoriene. I tillegg viser datamaterialet mitt en rekke utfordringer som så ut til å hindre elevene i å oppnå ønsket validering for en tilstrekkelig modell. I neste kapittel vil jeg legge frem situasjoner som belegg for denne påstanden.

4.2 Hindringer for valideringer

I elevenes modelleringsprosess er hver overgang en potensiell barriere som kan hindre elevenes fremgang mot en vellykket løsning (Galbraith & Stillman, 2006). I min studie identifiserte jeg to ulike hindringer: *deler av konteksten ignoreres* og *resultat = ferdig* (elevene så seg ferdige så fort de hadde et matematisk resultat). I begge kategoriene ble dette hindringer for nødvendige valideringer og en tilstrekkelig løsning. Følgende vil jeg legge frem situasjoner som kjennetegner de to kategoriene, Figur 9.

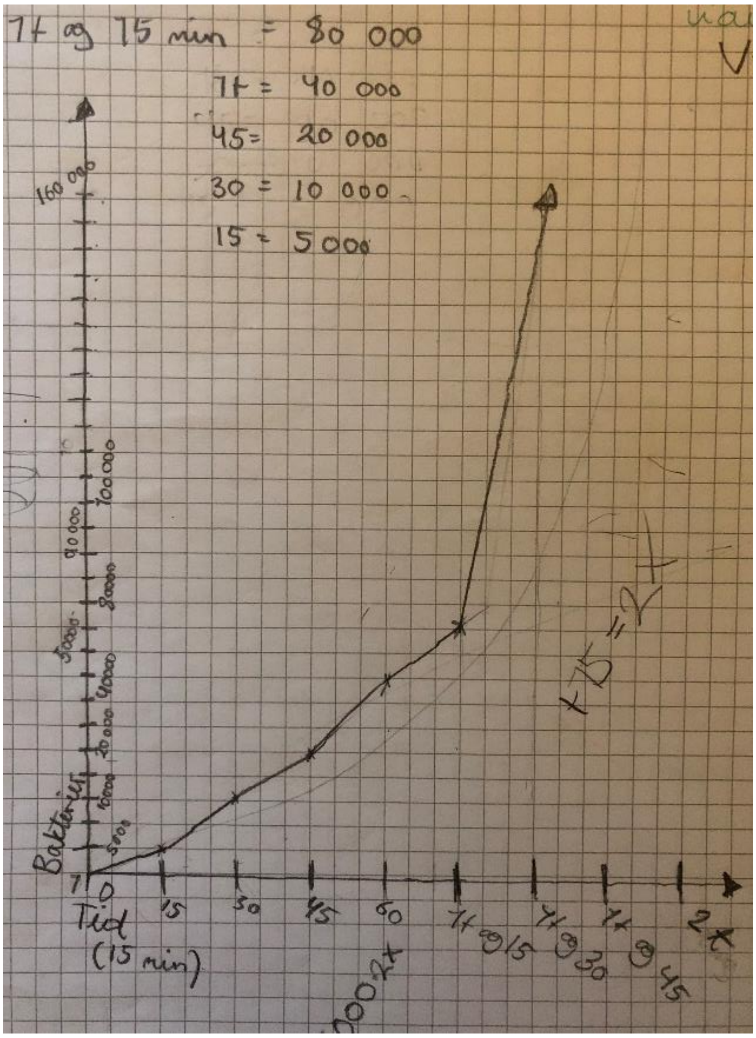


Figur 9: Kategoriene for hindringer

4.2.1 Deler av konteksten ignoreres

Studien til Jankvist & Niss (2020) viser en tendens der elevene ignorerer deler av konteksten når de danner seg en situasjonsmodell av det reelle problemet. Denne tendensen ble også identifisert i min studie der de fleste elevene tilsynelatende hentet ut tall og fakta fra oppgaveteksten og ignorerte resten av konteksten. Konsekvensen av dette ble tidsbegrensede modeller basert på tall og fakta fra oppgaveteksten. Problemets kontekst om E.coli-utbruddet og behovet for å forutsi bakterieutviklingen ble ignorert.

Gruppe 1 utarbeidet tidlig i prosessen en grafisk framstilling på papir som de i en periode anså som sin reelle modell, Figur 10.

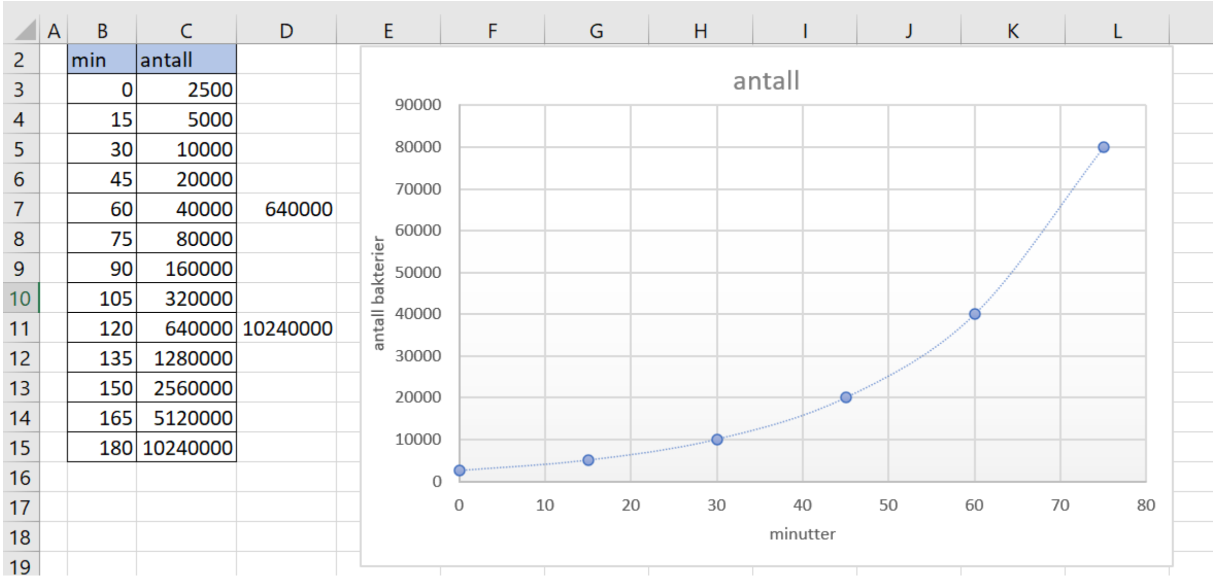


Figur 10: Gruppe 1 sitt reelle resultat

Modellen viser bakterievekstens dobling frem til en time og tretti minutter, ett kvarter mer enn hva som er oppgitt i oppgaveteksten. Elevene anså tilsynelatende løsningen som reell da følgende samtale oppsto:

188:	Vilde:	<u>Hvorfor dere mener modellen deres viser riktig vekst til bestanden.</u>
189:	Viktor:	Det dobler seg hver gang. Det er derfor den er så bratt her, for det går fra førti rett opp til åtti_ nei. Det var fra åtti til seksti, eller hundre og seksti tusen (peker på grafen mellom de to siste punktene)

Fra besvarelsen og samtalen over er det tegn på at elevene validerte resultatet sitt opp mot tall og fakta oppgitt i den reelle situasjonen. Besvarelsen viser at veksten ble begrenset til en time og tretti minutter, samtidig som elevene begrunnet gyldigheten til modellen med at veksten doblet seg hver gang. Altså er resultatet en riktig representasjon av problemets spesielle eksempel med tall og fakta, men siden elevene ikke reflekterte over og tok konteksten med i betraktningene, samsvarer ikke resultatene med det reelle problemet.
Bildet under viser besvarelsen til gruppe 3 som lagde en tidsbegrenset graf i ExCel, Figur 11.Figur 11



min	antall	
0	2500	
15	5000	
30	10000	
45	20000	
60	40000	640000
75	80000	
90	160000	
105	320000	
120	640000	10240000
135	1280000	
150	2560000	
165	5120000	
180	10240000	

Figur 11: Gruppe 3 sitt reelle resultat

Tabellen viser bakterieutviklingen fra null til ett hundre og åtti minutter, mens den grafiske fremstillingen går fra null til syttifem minutter. Jeg ser det interessant at elevene først lagde en tabell som viser bakterieveksten i en lengre tidsperiode, men allikevel valgte å avgrense grafen til de syttifem minuttene som er oppgitt i oppgaveteksten. Fra modellen og elevenes skriftlige begrunnelse (analysert i kapittel 4.1.4) er min tolkning at elevene bevisst har valgt å tilpasse grafen til oppgavetekstens spesifikke tall og faktaopplysninger.

I intervjuet med lærer 1 spurte jeg avslutningsvis om hun hadde noen mer å tilføye om elevenes modelleringsarbeid. Hun svarte følgende:

Int.L1: Lærer1: Jeg var kanskje overrasket over to av de gruppene som på en måte kom til syttifem minutter, eller hva som hadde skjedd bakover i tid for å si det slik, at de ikke klarte å tenke at de skulle generalisere, at de ikke tenkte at det er ut ifra gitt oppgave, at de ikke tenkte at det her er et reelt problem som må løses utover disse syttifem minuttene. De var så fornøyde når de hadde en løsning.

Læreren refererte her til fokusgruppene, gruppe 1 og gruppe 2. Fra ytringen antar jeg at hun hadde en forventing om at elevene i større grad skulle reflektert over konteksten, og dermed fått et riktigere bilde av det reelle problemet. Hun uttrykte en tydelig overraskelse over elevenes manglende blikk for en generalisering. Dette bidrar med å underbygge mine observasjoner og tolkninger om at de fleste elevene valgte å forholde seg til oppgavetekstens tall og fakta mens konteksten ble ignorerte.

Lærer 1 fortsatte med en mulig forklaring på utfordringen:

Int.L1: Lærer1: (…) Men hvis det er lov å si at jeg kjenner gjengen da, så er de jo ikke så gode på å få med seg hele bestillingen. Så når de leser at det er 80000 bakterier etter 75 minutter og skjønner at de må finne startpunkt, så går resten av bestillingen, er glemt, eller at det rett og slett at de ikke får det til.

Fra denne ytringen kan det tyde på at læreren er kjent med utfordringen der elevene ikke får med seg hele oppgavebestillingen, nettopp fordi de finner noe håndfast å starte med (tall- og faktaopplysninger). Hun påpekte også muligheten om at elevene rett og slett ikke fikk det til.

I denne kategorien har jeg analysert situasjonen hvor Viktor begrunnet validiteten til den grafiske fremstillingen (Figur 10) som riktig fordi den doblet seg hver gang, og utdragene fra intervjuet med lærer 1 som viser at hun var overrasket over at spesielt to av gruppene ikke forsto det reelle problemet ut fra oppgaveteksten, der hun antok at grunnen var at de ble «fanget» av tall og fakta i oppgaveteksten. I datamaterialet var det flere eksempler på situasjoner der elevene tilsynelatende ignorerte deler av aktivitetens kontekst. Fra dette er min tolkning at de fleste elevene ble hindret i å gjøre valideringer for en vellykket modell på grunn av manglende refleksjoner over problemets kontekst. De manglende refleksjonene ga elevene en begrenset situasjonsmodell og reell modell av det reelle problemet. Denne utfordringen er tett knyttet til neste kategori.

4.2.2 Resultat = ferdig

En av prosessene i modelleringssyklusen handler om å overføre det matematiske resultatet tilbake til virkeligheten for å teste resultatets gyldighet opp mot det reelle problemet. Ett av mine funn er hvordan flere grupper var fornøyde med det matematiske resultatet. Det ser tilsynelatende ikke ut til at elevene så behovet for å videreutvikle modellen sin, og det ble derfor ikke gjort flere valideringer.

I intervjuet med lærer 3 spurte jeg hva hun savnet i elevenes modelleringsprosess, hun svarte følgende:

Int.L3:	Lærer 3:	Når de var ferdig, så var jeg jo innom, eller når de selv mente de var ferdig, så var jeg innom og stilte noen spørsmål for å få dem til å tenke litt videre og om de kunne løst oppgaven på andre måter. Og jeg spurte direkte om de kunne lage et funksjonsuttrykk, men de kom aldri noe videre med det, fordi de var ferdige.

Min tolkning av lærerens observasjon er at elevene hverken responderte på inngrep eller jobbet med videreutvikling fordi de ikke ønsket eller så behovet for det, de så seg derfor ferdige med modelleringsprosessen.

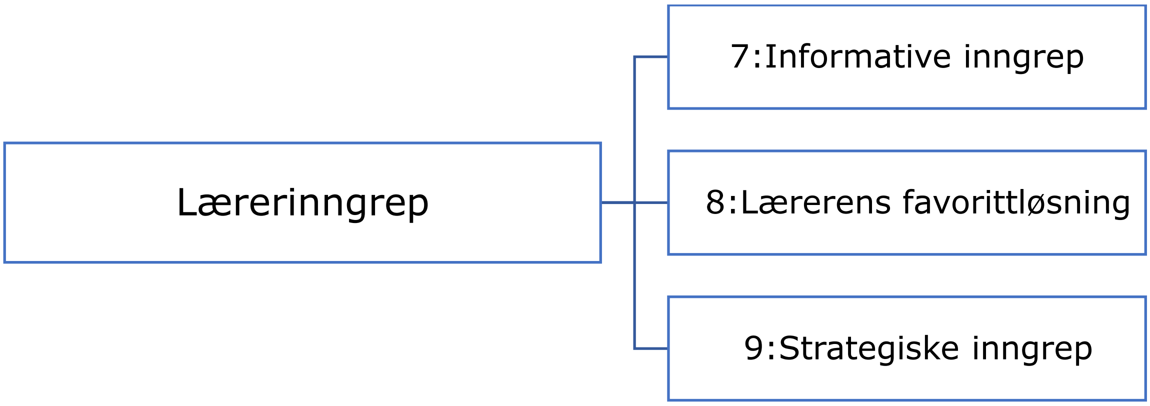
Ytringen til lærer 3 samsvarer med en ytring fra intervjuet med lærer 1:

Int.L1:	Lærer 1:	(…) de var så fornøyde når de hadde en løsning

Med belegg i lærernes og egne observasjoner responderte elevene på inngrep innledningsvis i prosessen, når de var i prosess med å utarbeide et matematisk resultat. Videre er mine tolkninger av denne kategorien at i det elevene hadde utarbeidet et matematisk resultat, var de ferdige med oppgaven og responderte ikke på inngrep for å gjøre ytterligere valideringer. Det ble gjort både strategiske og mer ledende inngrep som; «Hvordan vil bakteriebestanden være etter tre timer? Har du mer hensiktsmessige verktøy? Kan dere uttrykke dette med en generalisering?», men ingen av inngrepene resulterte i valideringer for fremgang mot en tilstrekkelig modell. Slik jeg ser det hadde ikke elevene noe behov for å videreutvikle modellen, de var ferdige. Elevene ble dermed hindret i å gjøre nødvendige valideringer for å videreutvikle modellen. Hindringen ble identifisert i seks av gruppene.

4.3 Lærerinngrep

Et lærerinngrep et er grep læreren gjør for å lede elevene videre i arbeidet sitt. Inngrepene kan ha ulike formål og responderes ulikt. I en modelleringsaktivitet har læreren en viktig rolle for å beholde balansen mellom maksimal uavhengighet og minimal veiledning (Blum & Ferri, 2009). For å opprettholde denne balansen er det viktig å være bevisst hvilke inngrep som gjøres. I forberedelsene snakket vi om hvordan lærerne kunne opprettholde denne balansen ved å lytte, forsøke å forstå eleven og å gjøre strategiske og adaptive inngrep. I mitt datamateriale identifiserte jeg tre ulike inngrep som representerer kategoriene *strategiske inngrep, lærerens favorittløsning og informative inngrep*, Figur 12.



Figur 12: Kategoriene for lærerinngrep

4.3.1 Strategiske inngrep

Et strategisk inngrep har til hensikt å få elevene til å reflektere over, og å validere eget arbeid underveis i en modelleringsprosess (Doerr, 2007). I planleggingen ble det utarbeidet forslag til strategiske inngrep som kunne brukes for å få elevene til å reflektere og validere samtidig som balansen mellom maksimal uavhengighet og minimal veiledning fra læreren ble opprettholdt. Datamaterialet viser at det ble brukt en rekke strategiske inngrep, der bare et fåtall av dem førte til ønsket validering.

I forkant av situasjonen under hadde lærer 1 lyttet og stilt spørsmål til elevene for å bedre forstå hvordan hun kunne veilede dem videre. Elevene hadde satt bakteriebestanden til null bakterier ved start, og grafen startet derfor i origo. Læreren gjorde et inngrep der jeg antar hensikten var å få elevene til å reflektere over og validere grafens startpunkt.

164:	Lærer 1:	Eh, ett spørsmål. Altså dere er, ett spørsmål er. Hvis vi ved femten minutter har fem tusen bakterier, ser dere at, jeg ser at dere har kjørt grafen rett i origo. Kan dere tenke litt på den?

Læreren forsøkte å gjøre elevene oppmerksomme på at grafen startet i origo og ba elevene tenke over dette. Inngrepet er strategisk fordi det hverken ga informasjon eller var organisatorisk, det rettet elevenes blikk mot en del av matematikken som det var nødvendig å validere for en tilstrekkelig modell. Fra den påfølgende samtalen kunne det se ut til at elevene ikke forsto hva læreren siktet til med inngrepet og arbeidet stoppet opp. Læreren fulgte derfor opp med et nytt inngrep:

173:	Lærer 1:	Kan det vokse åtti tusen bakterier hvis du starter med null?

Lærerens ytring 173 er mer direkte enn hennes ytring 164. Spørsmål satte i gang refleksjoner der elevene konkluderte med at en bakterievekst må begynne med noe. Elevene innså derfor at grafen ikke kunne starte i origo, men de valgte allikevel å ikke gjøre noe mer med det. Fra mine observasjoner kunne det se ut som at de ikke visse hvordan de skulle håndtere utfordringen, og at derfor raskt ga opp.

Det ble observert flere strategiske inngrep knyttet til enheten på x-aksen. Flere grupper valgte å bruke minutter i stedet for kvarter som tidsenhet på x-aksen, et valg som gjorde det vanskelig å finne en generell løsning.

Situasjonen under er hentet fra gruppe 1. De responderte på lærerens inngrep (lærerens favorittløsning) om å lage et generelt uttrykket, men strever med å se alle sammenhengene. De har brukt minutter som enhet for x-aksen.

306:	Lærer:	Hva er premisset dere har satt for x-aksen deres her? Hva slags enhet har dere valgt å bruke?

Læreren brukte et strategisk inngrep der intensjonen ser ut til å være å sette elevene i posisjon til å validere enheten på x-aksen. Elevene jobbet videre med fokus enhetene, men de så ikke sammenhengen og beholdt minutter som enhet.

Læreren gjorde enda et strategisk inngrep for å få elevene til å reflektere over x-aksens enhet.

328:	Lærer:	Hva skjer med antall bakterier når dere hopper en tidsenhet bort
329:	Viktor:	Det dobler seg. Det er det vi ikke klarer få inn i en formel.
330:	Vetle:	Skjønner ikke hvordan få det inn i formelen. At for hver gang du hopper bortover der så dobler det seg her (peker først på x akse, så på y akse)

Fra Viktor og Vetle sine forklaringer tolker jeg at de hadde forstått sammenhengen mellom aksene, men de fant ingen løsning på hvordan de skulle løse enheten på x-aksen. Om det var fordi elevene ikke forsto matematikken, eller om de ventet på et mer håndfast og ledende svar fra læreren, er uvisst.

Situasjonen som er presentert i dette kapittelet belyser kategori 7, strategiske inngrep. Inngrepene var formulert som spørsmålene eller utsagn der hensikten var å sette elevene i posisjon til å reflektere over og å gjøre valideringer for ønsket fremgang, uten å si for mye. Inngrepene var med andre ord adaptive og strategiske for å opprettholde balansen mellom maksimal uavhengighet og minimal veiledning. Det ble gjort en rekke strategiske inngrep, men kun et fåtall resulterte i ønsket respons og validering. I kapittel 5.2. vil jeg diskutere hva årsaken til den manglende responsen på inngrepene kan være.

4.3.2 Lærerens favorittløsning

Lærerens favorittløsning innebærer inngrep der lærer hinter, eller prøver å lede elevene mot en bestemt løsning (Blum & Ferri, 2009). I denne studien ble det identifisert flere situasjoner der læreren ledet elevene mot en bestemt løsning, og spesielt mot et generelt uttrykk. Jeg vil nå legge frem to situasjoner fra gjennomføringen samt utdrag fra intervju av elever og av lærer.

Situasjonen under er hentet fra gruppe 2 som har laget en grafisk fremstilling på papir. Grafen er begrenset til ett hundre og åtti minutter, og elevene har begynt å se behovet for å lage en modell som strekker seg over en lengre tidsperiode.

193:	Lærer1:	Kan dere finne, kan dere generalisere det på en måte? Sånn at du veit hvordan denne bakteriebestanden her vil utvikle seg uansett hvis du starter med to tusen femhundre eller om du starter med femtusen?
194:	Lise:	Den vil alltid doble seg, uansett, per femtende minutt
195:	Lærer 1:	Kan dere lage en modell for det? Et uttrykk. Og har dere andre verktøy dere kan bruke. Jeg ser dere har tenkt å begynne å tegne

I ytring 193 spurte lærer 1 helt spesifikt etter en generalisering samtidig som hun eksemplifiserte hvorfor det var ønskelig. Lærer 1 fortsatte i ytring 195 med å spørre etter en modell og et utrykk. Fra denne situasjonen tolker jeg at lærer 1 ønsket at elevene skulle utvikle modellen fra å være en tidsbegrenset grafisk fremstilling på papir til et å bli et generelt utrykk som for eksempel kunne settes inn i GeoGebra for en digital fremstilling.

Det oppsto en lignende situasjon i gruppe 1. Også her hadde elevene laget en tidsbegrenset grafisk fremstilling på papir som de anså som en endelig løsning på problemet. Følgende situasjon oppsto:

203:	Lærer1:	Men har dere et annet verktøy som dere kunne brukt for å, for å framstille den her? Fordi nå har dere jo på en måte laget et bilde av det som dere har opplysninger om her. Men hva, hva *skjer* med den bestanden her om tre timer. Hva skjer med den om et døgn?
204:	Viktor:	Den vil jo bare vokse mye høyere_
205:	Lærer1:	Ja den vokser, og kommunen vil vite hvordan den vokser. Dere må generalisere og lage en matematisk framstilling av virkeligheten. Hva er det som skjer her. Kan dere bruke tallene dere har på å prøve å skrive, skrive et matematisk uttrykk for det som skjer
206:	Vetle:	En formel liksom?
207:	Lærer1:	Ja, kan ikke en formel være en modell
208:	Vetle:	Jo det kan jo det, for hvis du setter det inn så vil det jo.. Hvis du setter inn den der i .. hvis du lager en sånn formel da og etter i GeoGebra så får du jo liksom hele svaret

I lærerens ytring 203 gjorde hun et strategisk inngrep antagelig for å få elevene til å se behovet for en generell modell. I stedet for å gi elevene tid til å reflektere over inngrepet, ba hun i ytring 205 elevene om å skrive et matematisk uttrykk for det som skjedde. Inngrepet resulterte i en validering der elevene ikke lenger så løsning tilstrekkelig, og de begynte derfor å lete etter et matematisk uttrykk for veksten. Elevene kom aldri frem til et uttrykk som samsvarte med representasjonene som de fortsatt anså som riktige og sikre (tabellen og grafen på papir).

I begge situasjonene over valgte læreren å etterspørre en bestemt løsning i stedet for å sette elevene i posisjon til å selv se behovet for en generell modell. Elevene responderte med å avslutte arbeidet de var i gang med, og begynte en prosess med å finne et generelt uttrykk for situasjonen. Denne prosessen ble preget av prøve- og feilemetoden der ingen av gruppene kom frem til en tilstrekkelig løsning.

I intervjuet med lærer 1 spurte jeg hvordan hun syntes det gikk å veilede elevene i den løsningsstrategien de hadde valgt for å løse problemet. Lærer svarte følgende:

Int.L1:	Lærer 1:	Ja, jeg kjente jo på det ja. Når de driver med linjediagram i ExCel, og lineærfunksjoner og stolpediagram. Og at de utelukker den delen av oppgaven, hva er det som skjer med den bakterieveksten her over tid. Ja, så noen grep endret nok retningen for noen ja.

Fra lærerens ytring tolker jeg at hun syntes det var vanskelig å veilede når elevene benyttet mindre hensiktsmessige løsningsstrategier. Læreren sa også at hun brukte noen grep som endret retning for noen av gruppene, noe jeg tolker til å være grepene som ble kategorisert til lærerens favorittløsning. Fra situasjonene i denne kategorien er min oppfatning at flere elever responderte på lærerens favorittløsning, de ønsket å etterkomme lærerens forslag. Dette gjaldt ikke alle gruppene, men spesielt i to av dem.

4.3.3 Informative inngrep

Informative inngrep er innholdsrelaterte eller organisatorisk og blir derfor ofte for ledende for elevenes løsningsprosess. Når inngrepene blir for ledende vil ikke læreren klare å bevare den viktige balansen mellom veiledning og uavhengighet (Blum & Ferri, 2006). Datamaterialet i denne studien viser at læreren valgte å bruke informative inngrep når elevene ikke respondere på de strategiske inngrepene, oftest i sammenheng med å lede elevenes oppmerksomhet mot problemets kontekst.

I forkant av situasjonen under hadde gruppe 1 hentet ut tall og data fra oppgaveteksten og deretter ignorert oppgavens kontekst om bakterievekst.

209:	Lærer 1:	Ja, jeg som er biolog tenker jo at det her handler om noe som kalles vekstraten til en bakterie, hvor fort blir det fryktelig mange bakterier eller fryktelig mange virus hvis du starter med bare ett lite håndavtrykk da, som setter av bakterier på et, på et dørhåndtak, hvordan vil det utvikle seg? Eller dørhåndtak vokser ikke så mye, men hvis du har tatt i en petriskål da med hånda di, hvor fort vil den bestanden bakterier vokse? Ikke sant, og da finne som, et utrykk eller en modell som stemmer med virkeligheten. Det er det vi trenger for å kunne forutsi utvikling av sykdom og så videre
210:	Viktor:	Ja. Så hvor fort det sprer seg og sånn da?
211:	Lærer 1:	Ja, men her snakker vi da om hvor fort noen få bakterier blir fryktelig mange
212:	Vetle:	Ja
213:	Lærer 1:	Det er kanskje ikke så farlig på et restaurantkjøkken hvis det er to tusen fem hunder e-coli bakterier til sammen, men når det begynner bli åtti tusen og det dobler seg hvert kvarter da kan folk begynne bli sjuke… Da er det viktig å vite hvordan det utvikler seg.

Inngrepene læreren gjorde i denne situasjonen var informative inngrep fordi hun delte innholdsrelaterte informasjon om hva problemet innebar for elevene. Inngrepet ledet elevenes oppmerksomhet mot konteksten, og elevene fikk en riktigere forståelse av det reelle problemet. Kanskje hadde elevene kommet frem til samme forståelse via strategisk inngrep rettet mot oppgaveteksten. Jeg antar inngrepet ble gjort i forsøk på å få elevene til å se konteksten og det reelle problemet.

Neste situasjon er også hentet fra gruppe 1 der læreren har gjort flere strategiske inngrep og jeg antar hensikten var å gjøre elevene oppmerksomme på eksponenten. Inngrepene førte ikke til ønsket validering og lærer ga følgende informativt inngrep:

387:	Lærer 1:	Men det er ikke bestemt et matematisk uttrykk for det. Det heter eksponentiell vekst
388:	Vetle:	Å ja, det husker jeg du sa
389:	Lærer 1:	Ja. Og hvis dere tar det uttrykket eksponentiell og overfører det til noe innen algebra, hva kan det relatere seg til? Eksponent..
390:	Vetle:	Eksponent, er det det i andre?
391:	Vilde:	Ja
392:	Vetle:	Da tror jeg, da må vi ta noe i andre da? I det tykket…sikkert (peker på uttrykket på notatarket)

I denne dialogen gjorde læreren et informativt inngrep som ga elevene begrepet eksponentiell vekst, hvor eksponent ble vektlagt. Fra samtalen tolker jeg at elevene forbandt eksponent med «opphøyd i andre». Selv om informative inngrep ikke er ønsket, førte situasjonen til en validering der elevene jobbet videre med å finne et uttrykk med eksponent. Ideelt sett er dette en oppdagelse elevene skulle gjort selv, for eksempel ved hjelp av strategiske inngrep rettet mot å finne sammenhenger i tabellen de hadde utviklet.

Situasjonene i denne kategorien viser hvordan læreren tok i bruk informative inngrep fordi elevene ikke responderte på de strategiske. De informative inngrepene ga elevene informasjon som de bearbeidet og brukte videre. Datamaterialet viser at flere informative inngrep førte til validering og videre arbeid i ønsket retning innenfor kategori 9.

4.4 Oppsummering av resultatene

I dette kapittelet har jeg lagt frem situasjoner for å beskrive mine kategorier. Analysen av datamaterialet ga meg tre funn:

- Elevene validerte ved å sammenligne arbeid fra ulike prosesser i modelleringssyklusen. De fleste gjorde dette innenfor matematikken, det vil si kategori 1
- Hindringer knyttet til oppgavens kontekst begrenset elevenes valideringer, og dermed et vellykket resultat
- Lærerens planlagte og strategiske inngrep førte i liten grad til ønsket validering

I neste kapittel vil jeg diskutere funnene mine i lys av det teoretiske rammeverket.

5 Diskusjon

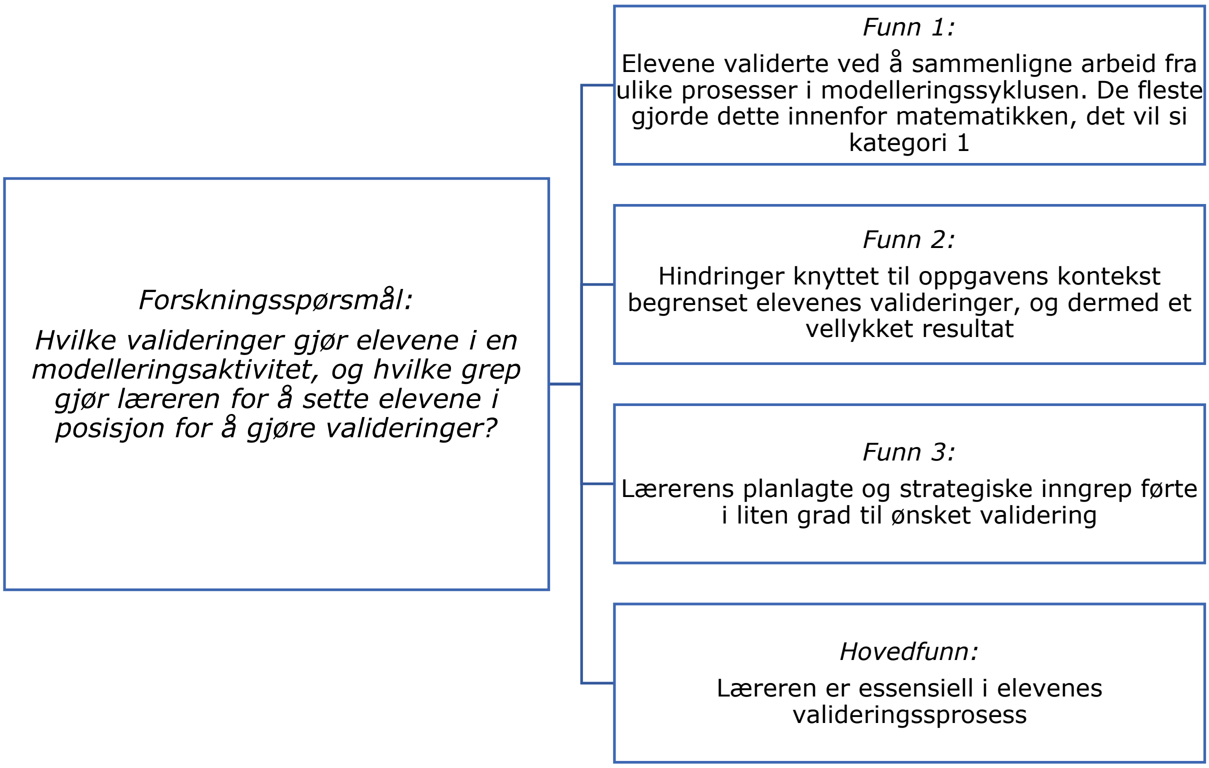
I dette kapittelet vil jeg diskutere resultatene fra min analyse, sammenligne de med lignede studier og knytte det opp mot teorier som er presentert i kapittel 2.

Forskningsspørsmålene jeg ønsker å besvare er: 1) *Hvilke valideringer gjør elevene i en modelleringsaktivitet, og* 2) *hvilke grep gjør læreren for å sette elevene i posisjon for å gjøre valideringer?*

Analysen av datamaterialet ga meg tre funn som jeg nå vil diskutere nærmere.

- Elevene validerte ved å sammenligne arbeid fra ulike prosesser i modelleringssyklusen. De fleste gjorde dette innenfor matematikken, det vil si kategori 1
- Hindringer knyttet til oppgavens kontekst begrenset elevenes valideringer, og dermed et vellykket resultat
- Lærerens planlagte og strategiske inngrep førte i liten grad til ønsket validering

Kapittelet er strukturert etter de tre funnene, illustrert i Figur 13. I min diskusjon kommer jeg til å referer til både resultatene mine og til datamaterialet mitt. Når jeg refererer til mine resultater mener jeg situasjoner som ble presentert og analysert i kapittel 4. Når jeg referer til datamaterialet inkluderer jeg situasjoner som ikke ble presentert og analysert under mine resultater, altså alt jeg samlet inn av datamateriale.



Figur 13: En oversikt over studiens funn

5.1 Funn 1 - Sammenligninger

Datamaterialet mitt viser hvordan elevene sammenlignet ulike deler av modelleringsprosessen for å validere. Det viser også at elevenes forståelse av det reelle problemet, hvordan de strukturerte det, og hvilke forutsetninger de la til grunn for sin modell, hadde store betydninger for elevenes valideringer og for om resultatet ble tilstrekkelig. Som tidligere nevnt har jeg brukt fire av Czocher (2018) sine kategorier som rammeverk for sammenligninger. I tillegg har jeg brukt modelleringssyklusen til Blum & Leiβ (2007) som verktøy for å forstå hvor i modelleringssyklusen elevene befant seg.

I analysearbeidet så jeg det utfordrende å skille de ulike prosessene i modelleringssyklusen fra hverandre fordi de hadde flere like trekk og gikk inn i hverandre. Jeg presiserer derfor at mine tolkninger ikke nødvendigvis vil sammenfalle med andre sine tolkninger.

Det viste seg å være uproblematisk for elevene å validere innenfor matematikken, det vil si kategori 1. De fleste valideringssituasjonene skjedde altså når elevene sammenlignet et matematisk resultat med matematiske modeller utarbeidet tidligere i prosessen. Slik jeg ser det anså elevene de matematiske modellene som korrekte og sikre representasjoner. Sammenligningene skjedde ikke bare når elevene hadde et resultat, men også underveis i prosessen. Mine resultater kan sammenlignes med studien til Ferri (2006) som fant at elevenes valideringer ofte var begrenset til å sjekke matematiske beregninger innenfor den matematiske verden. Likheten er tydelig, både Ferri (2006) og jeg fant at elevene sjekket matematiske beregninger og dermed validerte innenfor matematikken.

I denne studien ble det gjort langt færre valideringer innenfor kategori 2, 3 og 4. Disse kategoriene skiller seg fra kategori 1 ved at sammenligningene innebærer overganger fra matematikken og tilbake til den virkelige verden. Grunnen til at elevene ikke validerte tilbake til virkeligheten kan være som Ferri (2009) hevder, at elevene oppfatter validering som å sjekke matematiske beregninger, og ikke hvordan resultatet samsvarer med det egentlige problemet. I denne studien kan utfordringen knyttes til elevenes manglende erfaring med oppgaver som krever overganger frem og tilbake mellom virkeligheten og matematikken. Elevene var ikke vant til å sammenligne et resultat med en kontekst. Dette argumentet har støtte i Ferri (2018) som mener arbeid med tradisjonell oppgaveløsning (oppgaver som ikke krever overganger mellom virkeligheten og matematikken) kan være en årsak til at elevene avsluttet modelleringsporsessen når de hadde et matematisk resultat, uten å validere det tilbake til virkeligheten. Mitt datamateriale inneholder med andre ord ikke mange situasjoner som belyser kategori 2 og 3.

I kategori 2 viser resultatene to situasjoner, en i gruppe 2 og en i gruppe 6, der elevene sammenlignet den matematiske modellen med egne situasjonsmodeller, uten støtte fra læreren. Situasjonen fra gruppe 2 viser hvordan Lise ikke lenger så stolpediagrammet tilstrekkelig. For at modellen skulle være nyttig mente Lise at den måtte vise bakteriebestandens utvikling utover de syttifem minuttene som var gitt i oppgaveteksten. Lise sin validering var ønsket og ikke minst viktig fordi hun ikke lenger så stolpediagrammet tilstrekkelig, det samsvarte ikke med hennes situasjonsmodell. Valideringen faller innenfor det Ferri (2006) anser som en bevisst og kunnskapsbasert validering. Den andre situasjonen viser en dialog i gruppe 6, der elevene diskuterte hvor mange bakterier bestanden skulle begynne med. Etter at elevene hadde lest oppgaveteksten hadde de tilsynelatende dannet seg ulike antagelser om hvordan de skulle bruke informasjonen i oppgaveteksten, og om hvilke tall modellen skulle baseres på. En interessant observasjon var hvordan Pål L mente konteksten og utbruddet var et spesielt eksempel som skulle generaliseres. Dette var en tanke resten av gruppemedlemmene var kritiske til. Etter en kort diskusjon, bestemte de seg for å lage en modell begrenset til tall og fakta fra oppgaveteksten. Situasjonen oppsto fordi elevene hadde dannet seg ulike situasjonsmodeller av problemet. Min tolkning fra datamaterialet til denne gruppa, er at elevene var lojale for valgene som ble tatt, men de fikk aldri en felles situasjonsmodell. Det hadde vært interessant å sett hvordan situasjonen hadde utviklet seg, dersom elevene hadde blitt satt i posisjon til å reflektere over egen og andres situasjonsmodeller. Kanskje ville de oppdaget viktigheten av problemets kontekst, en validering som kunne hjulpet dem til en tilstrekkelig modell.

Når det gjelder valideringer i kategori 3 viser mine resultater situasjoner der elevene sammenlignet sine beregninger med sine forventninger, i tråd med Czocher (2018). I gruppe 6 prøvde elevene seg frem for å finne bakteriebestandens størrelse for hvert femtende minutt fra null til syttifem minutter. For å validere modellen sjekket de om beregningene gikk opp med åtti tusen bakterier etter syttifem minutter. Elevene så at resultatet ble feil, men de forsto ikke alltid hvorfor. En slik validering definerer Ferri (2006) som bevisst, men ikke kunnskapsbasert. Ved å prøve seg frem kom elevene etter hvert frem til antall bakterier ved start og dermed en korrekt matematisk modell for de syttifem første minuttene av utbruddet.

Kategori 4 innebærer å sammenligne et reelt resultat, altså et matematisk resultat som er tolket tilbake til virkeligheten, med situasjonsmodellen som begge befinner seg i den virkelige verden. Datamaterialet mitt viser at elevene sjelden eller aldri tolket sine matematiske resultater tilbake til virkeligheten, noe Blum & Leiβ (2007) påpeker er nødvendig for å oppnå et reelt resultat. Uten et reelt resultat er det umulig å validere innenfor Czocher sin kategori 4.

Min tolkning av datamaterialet tilsier at ingen elever oppnådde et reelt resultat som samsvarte med det reelle problemet. Jeg valgte allikevel å legge frem og analysere to situasjoner under Czocher (2018) sin kategori 4. Valget begrunnes med at det er tydelige tegn på at elevene selv oppfattet sine matematiske resultater som tilstrekkelige resultater på problemet, slik de hadde forstått det. Gruppe 4 begrunnet gyldigheten til sin modell med at de hadde valgt riktig diagram som representasjon. Det er rimelig å anta at elevene hadde en begrenset forståelse av det reelle problemet (situasjonsmodell) da de tilsynelatende forsto begrepet *modell* som å velge riktig type diagram, i stedet for *modell* som en god beskrivelse av situasjonen. I den andre situasjonen, den skriftlige begrunnelsen til gruppe 7, begrunnet gyldigheten til modellen med at den samsvarte med tall og data som var oppgitt i oppgaveteksten. Slik jeg ser det har elevene ukritisk tolket det matematiske resultatet opp mot oppgavetekstens data av tall og fakta, uten å ta hensyn til problemets egentlige kontekst. Elevenes situasjonsmodell var derfor begrenset og ble en hindring i valideringsprosessen og for en tilstrekkelig modell. Datamaterialet inneholder flere skriftlige begrunnelser hvor elevene forsøker å rettferdiggjøre matematikken eller valg av representasjon, i stedet for å begrunne hvordan resultatet samsvarer med virkeligheten. Denne påstanden kan også ses i sammenheng med Ferri (2018) som hevder elevene vanligvis avslutter modelleringsprosessen med et matematiske resultat, da det er det de er vant til fra tradisjonell oppgaveløsning. Spørsmålet er om elevene sammenlignet mot sin situasjonsmodell, eller mot tall og fakta i oppgaveteksten. Fra mine observasjoner, det fullstendige datamateriale og fra intervjuer er min tolkning at de fleste elever hadde en situasjonsmodell som tilsa at de skulle lage en grafisk fremstilling basert på tall og fakta i oppgaveteksten. Mine umiddelbare tanker er derfor at elevene trenger trening i å reflektere over virkelighetsproblemer, slik at de evner å forstå problemets kontekst. Modellering handler om å løse problemer, ikke om å få et svar.

Som et svar på det første forskningsspørsmålet mitt er min tolkning at elevene brukte sammenligninger som valideringsform. Elevene validerte uproblematisk innenfor den matematiske verden der de kontinuerlig sammenlignet mulige resultater opp mot de matematiske modellene de hadde utviklet tidligere i prosessen. Det ble gjort færre valideringer som krevde overganger fra matematikken og tilbake til den virkelige verden. Problemet så ut til å være manglende evner til å forstå det reelle problemet, strukturere det og å gjøre nødvendige antagelser. Som en følge av dette ble elevenes situasjonsmodeller og reelle modeller begrenset, noe som resulterte i utilstrekkelige modeller. De aller fleste elevene var fornøyde når de hadde oppnådd et matematisk resultat, de så ingen behov for å endre eller videreutvikle modellene sine.

Elevenes utfordringer med å forstå det reelle problemet ble en hindring for å videreutvikle modellen til å bli en tilstrekkelig representasjon av det reelle problemet. Disse hindringene er studiens andre funn og blir diskutert i neste kapittel.

5.2 Funn 2 - Hindringer

Mine resultater viser to ulike hindringer som resulterte i begrensede valideringer og utilstrekkelige modeller. Hindringen «ignorerer deler av konteksten» oppstår tilsynelatende fordi elevene hentet ut tallinformasjonen fra oppgaveteksten og ignorerte resten av konteksten, altså det reelle problemet. Mens hindringen «resultat = ferdig» så ut til å oppstå fordi elevene ikke hadde behov for å videreutvikle resultatet sitt, de så seg ferdige med arbeidet når de hadde oppnådd et matematisk resultat. De to hindringene henger tett sammen, men jeg vil forsøke å diskutere dem hver for seg.

Steg 1 i modelleringssyklusen til Blum & Leiβ (2007) innebærer å lese og forstå problemet som er gitt i det reelle problemet. Problemet jeg ga til elevene inneholdt en kontekst beskrevet med ord i tillegg til data i form av tall og fakta, nærmere beskrevet i kapittel 3.4. Datamaterialet mitt viser hvordan elevene leste hele oppgaveteksten, men tilsynelatende ignorerte konteksten og valgte i stedet å forholde seg til dataene av tall og fakta. Som et resultat av dette leverte åtte av ti grupper grafiske representasjoner som var tidsbegrenset, med begrunnelser som tilsa at modellen samsvarte med oppgavetekstens tall og fakta. Begrensede situasjonsmodeller hindret elevene i å validere modellen sin opp mot det reelle problemet. Dette samsvarer med teorien til Blum (2015) som mener elevene henter ut tall og data og utfører kjente beregninger uten å ta hensyn til konteksten, elevene validerer derfor ikke resultatet tilbake det reelle problemet.

En årsak til hvorfor elevene ignorerte konteksten kan knyttes til Jankvist & Niss (2020) sine resultater der de mener at elevene ikke tok problemet seriøst, i den forstand at de ikke anså det som et reelt problem. Derimot er det ikke noe i mitt datamateriale som tilsier at elevene ignorerte konteksten bevisst, min oppfattelse er at de ikke så den relevant, eller ikke visste hvordan de kunne nytte seg den. Dette sammenfaller med teorien til Blum (2015) som hevder elevene mangler strategier for å løse problemer fra virkeligheten, og av den grunn ikke reflekterer over hva de gjør. Manglende strategier kan knyttes til elevenes begrensede erfaringer med matematisk modellering. Elevene i min studie var ikke kjent med problemer fra virkeligheten der det kreves overganger mellom den virkelige verden og den matematiske verden.

Utfordringen med at konteksten ble ignorert kan være en årsak til den andre hindringen som tilsier at elevene stoppet valideringsprosessen ved det matematiske resultatet. I flere grupper oppsto denne hindringen når elevene hadde utarbeidet en tidsbegrenset grafisk fremstilling av bakterieveksten, et matematisk resultat. Til tross for gjentatte lærerinngrep av ulike kategorier, førte kun et fåtall av dem til valideringer og ønsket utvikling. Fra mine resultater er min tolkning at elevene anså resultatene som tilfredsstillende, og hadde derfor ingen behov for å forbedre det. Signalene elevene ga ved å ikke respondere på lærerinngrepene, men i stedet samtale om ikke-matematiske temaer når læreren snudde ryggen til dem, kan tolkes til at de ikke var motiverte til å jobbe videre, de var ferdige. Dette hindret tilsynelatende elevene i å gjøre valideringene som kunne bidratt til å videreutvikle modellen fra å være tidsbegrenset, til å bli en tilstrekkelig modell for det reelle problemet. Studien til Blum & Leiβ (2007) viser også at elevene var fornøyde med å ha oppnådd et resultat og at de derfor ikke så noe behov for å sjekke resultatets validitet. Blum & Leiβ mener årsaken til hindringen er elevenes manglende evne til å validere resultatet tilbake til virkeligheten, noe som henger sammen med hindringen *ignorerer deler av konteksten* som er diskutert over. Fra dette mener jeg derfor årsaken til hindringen «*Resultat = ferdig*» altså kategori 6 (kapittel 4.2.2), kan være todelt. For det første kan det se ut som elevene manglet motivasjon til å videreutvikle modellen sin. Manglende motivasjon kan være utløst av ulike årsaker, som for eksempel mangel på mestring, ukjent situasjon, ukjent veiledningsform, eller at de ikke rett og slett ikke opplevde problemet som reelt nok. For det andre kan manglende strategier eller evner for å forstå konteksten, og for å validere resultatet tilbake til virkeligheten se ut til å hindre elevene i å videreutvikle eller forbedre resultatet sitt.

En utfordring jeg var forberedt på var manglende valideringer grunnet elevers oppfatning om at læreren står ansvarlig for valideringene, slik Blum & Ferri (2009) påpeker i sin studie. Denne påstanden avviker fra mine resultater, da min oppfatning er at elevene viste hvordan de tok ansvar for egne beregninger og gjorde flere valideringer innenfor matematikken for å sjekke om beregningen var gyldig. I min studie tyder det på at utfordringen var å validere resultatet tilbake til virkeligheten, fordi elevene ikke forsto det reelle problemet.

Sett i lys av resultatene og det teoretiske rammeverket, så mener jeg grunnen til at elevene ignorerte konteksten er knyttet til manglende erfaringer med modelleringsoppgaver. De fleste elevene forsto ikke hva det reelle problemet innebar, og gjorde derfor det de var kjent med, hentet ut tall og fakta og gjorde beregningene de trodde læreren forventet av dem. Videre mener jeg elevenes manglende ønske eller motivasjon for å videreutvikle modellen kan ses i sammenheng med elevens begrensede evner og strategier for å gjøre de nødvendige valideringene. Dette resulterte i hindringer for ønsket validering, og for en tilstrekkelig modell.

5.3 Funn 3 - Lærerinngrep

Som tidligere nevnt har læreren en viktig rolle for å opprettholde en balanse mellom elevens maksimale uavhengighet og en minimal veiledning fra læreren (Blum & Ferri, 2009).

Mine resultater viser hvordan lærerne benyttet tre ulike typer inngrep (strategiske, lærerens favorittløsning og informative) for å veilede elevene til nødvendige valideringer mot en tilstrekkelig modell. Resultatene samsvarer derimot ikke med mine forventinger fordi de strategiske inngrepene ikke ble respondert som planlagt. Dette resulterte i at læreren tok i bruk informative og organisatoriske inngrep i håp om å få elevene i å gjøre nødvendige valideringer.

Det ble gjort en rekke strategiske inngrep som hadde til hensikt å få elevene til å reflektere over og validere eget arbeid underveis i en modelleringsprosess, i tråd med Blum & Ferri (2009). Det var allikevel kun et fåtall av inngrepene som førte til respons og validering. Dette kan ha flere årsaker; usikkerhet om hva læreren siktet til, manglende strategier for å videreutvikle et arbeid, eller at elevene ikke så behovet for å fortsette arbeidet med modellen. Datamaterialet viser hvordan elevene kommenterte inngrep med et par ytringer, før de la det vekk, gikk videre eller avsluttet modelleringsprosessen. Det er tydelige tegn på at elevene så det utfordrende å håndtere inngrepet, kanskje fordi elevene var vant til innholdsrelaterte eller organisatoriske inngrep som er mer ledende enn de strategiske. Denne påstanden samsvarer med teorien til Blum & Ferri (2009) som mener elevene ofte venter på lærerens vurdering og tilbakemelding om hva som mangler, er misvisende eller hvordan de kan gjøre endringer.

Den manglede responsen på de strategiske inngrepene så ut til å stresse lærerne da de ikke lyktes med å få elevene til å gjøre valideringene som var ønsket. Som et resultat av det ble lærernes inngrep mer innholdsrelaterte og organisatoriske, til tross for et mål om å unngå det. Datamaterialene viser at elevene i større grad responderte med valideringer på inngrepene av kategoriene *lærerens favorittløsning* og *informative inngrep,* enn på de *strategiske inngrepene*. Lærerens favorittløsning innebar slik Blum & Ferri (2009) beskriver hint eller en bestilling av en bestemt løsning. De fleste hint og bestillinger ble rettet mot generalisering i form av matematisk uttrykk. Resultatene i kapitel 4.3.2 viser hvordan elevene i gruppe 1 og 2 umiddelbart responderte på lærerens favorittløsning og begynte å lete etter et generelle uttrykk. Dette kan grunnes at elevene tidligere har erfart at det kunne være hensiktsmessig å gjøre som læreren ønsket. Men det kan også grunnes at elevene faktisk forsto hvorfor modellen burde generaliseres, noe de selv trykte i intervjuet.

Sett i lys av resultatene og det teoretiske rammeverket kan jeg nå besvare mitt andre forskningsspørsmål. For å sette elevene i posisjon til å gjøre nødvendige valideringer benytter lærer 1 en rekke planlagte og ønskede strategiske inngrep, i tråd med Bum & Ferri (2009) og Doerr (2007). Når responsen og valideringene uteble, ble det utfordrende for læreren å finne de riktige inngrepene. Som et resultat av dette ble det benyttet informative og organisatoriske inngrep der eleven fikk den informasjonen de egentlig skulle reflektert over selv. Elevene responderte i større grad på de mer ledende inngrepene, noe som resulterte flere valideringer.

Det var utfordrende for læreren å beholde balansen mellom maksimal uavhengighet og minimal veiledning, og det var utfordrende for elevene å håndtere de strategiske inngrepene. Med andre ord bør både lærere og elever trenes i å gi, og ta imot, strategiske inngrep for å beholde en balanse mellom maksimal uavhengighet og minimal veiledning.

5.4 Hovedfunn - Lærerens er esessiell i elevenes valideringsprosess

Så langt har jeg kommet fram til at det var utfordrende for elevene å gjøre nødvendige valideringer for en tilstrekkelig modell, og at det var krevende for lærerne å finne de riktige inngrepene for å rette elevenes blikk mot nødvendige valideringer, uten å si for mye. Funnene henger tett sammen og kan med fordel ses i lys av hverandre. Elevene trenger veiledning for å gjøre nødvendige valideringer slik at modellene samsvarer med de reelle problemene. Denne veiledningen er det læreren som står ansvarlig for. Lærerens rolle i modelleringsarbeidet er essensiell, slik både Blum & Ferri (2009) og Doerr (2007) påpeker. Så, hvordan kan dette løses?

Selv om lærerne i denne studien var godt forberedt og brukte adaptive og strategiske inngrep for å sette elevene i posisjon til å gjøre nødvendige valideringer, ble de utfordret da elevene ikke responderte som ønsket. Lærerne sto i en meget krevende og uforutsett situasjon. I forsøk på å få elevene til å se hva som burde valideres tok de dermed i bruk mer ledende og mindre ønskede informative og organisatoriske inngrep. Dette kan knyttes til at det var første gangen lærerne ledet en modelleringsaktivitet. Lærerne hadde naturlig nok ikke utviklet de pedagogiske kravene Blum & Ferri og Doerr mener kreves for å effektivt lede en modelleringsaktivitet, samtidig sier funnet noe om hvor viktig forberedelsene er.

I ettertid ser jeg at forberedelsene sammen med læreren burde hatt mer fokus på hvordan hjelpe elevene å forstå oppgavetekstens kontekst, det reelle problemet. Dette er nok et eksempel på hvor essensielt viktig det er med grundige forberedelser for å håndtere de ulike retningene, tilnærmingene og utfordringene elevene ha i en modelleringsaktivitet (Doerr, 2007), og å kjenne til et bredt spekter av spesielt strategiske inngrep for veiledning som balanserer maksimal uavhengighet og minimal veiledning (Blum & Ferri, 2009). Samtidig så kan det kanskje være rom for å tillate en ubalanse med vektig på mer veiledning fra læreren de første gangene elevene jobber med modelleringsaktiviteter. I denne studien kunne for eksempel læreren tatt en «time-out» for å lede en helklassesamtale med intensjon at elevene skal forstå oppgavetekstens kontekst. I en slik samtale er det ifølge Doerr (2007) viktig å *forskyve forklaringer og begrunnelser* fra læreren og over til elevene, nærmere beskrevet i kapittel 2.7.

Blum & Ferri (2009) sitt første punkt for effektiv ledelse av modelleringsaktiviteter er å velge en passende modelleringsaktivitet for å opprettholde balansen mellom maksimal uavhengighet og minimal veiledning fra læreren. Modelleringsaktiviteten i denne studien ble valgt av meg som forsker, og omhandlet et E-coli-utbrudd i et drikkevann. Selv om elevene hadde jobbet med bakterier og bakterievekst i naturfag, og at de sto midt en pandemi, kan det se ut som at elevene ikke opplevde denne konteksten som virkelig nok. Fra min observasjon kunne jeg ikke se at det reelle problemet motiverte og engasjerte elevene mer enn hva tradisjonelle oppgaver ville gjort. Kanskje ville resultatene sett annerledes ut om elevene hadde fått et problem som de opplevde mer virkelighetsnært. Kanskje ville flere elever i større grad ha engasjert og motivert seg for å gjøre de valideringene som skal til for en tilstrekkelig modell, i tråd med Blum (2011) sitt *psykologiske argument* for matematisk modellering. Blum & Ferri (2009) påpeker at det er lærerens ansvar å velge de gode modelleringsaktivitetene slik at elevene naturlig kan sette seg inn i det reelle problemet, og dermed skape et behov for å sammenligne modellen med problemet.

Med belegg i mine analyser og diskusjoner er det ingen tvil om at lærerens rolle er uvurderlig. Det er derfor en nødvendighet at lærerne utvikler de pedagogiske kravende som kreves for å lede effektive modelleringsaktiviteter. Læreren er selve nøkkelen for å utdanne elever som kritisk kan validere modeller og resultater for å utvikle vellykkede modeller sett i lys av det reelle problemet.

I neste kapittel vil jeg kort oppsummere min studie, presentere mine konklusjoner og foreslå videre forskning innenfor elevers valideringsarbeid.

6 Avslutning

Temaet i denne studien er matematisk modellering, med blikket rettet mot modelleringssyklusens valideringsprosess. Hensikten med denne forskningen var å få innsikt i og kunnskaper om hvilke valideringer elevene benyttet seg av i en modelleringsaktivitet, og hvordan læreren støttet elevene i valideringsprosessen. For å søke svar på dette observerte jeg en gruppe 10.trinnselever og deres lærere i arbeidet med en modelleringsaktivitet. I tillegg har jeg sett på interessante observasjoner fra piloten min. Datamaterialet ble analysert (kapittel 4) og diskutert (kapittel 5) opp mot studiens teoretiske rammeverk (kapittel 2). I dette kapittelet vil jeg legge frem mine konklusjoner (kapittel 6.1), vise til studiens plass i forskningsfeltet og foreslå videre forskning (kapittel 6.2), før jeg vil avslutte med noen tanker helt til slutt (kapittel 6.3).

6.1 Konklusjoner

Forskningsspørsmålene jeg har forsøkt å besvare i denne studien er: (1) *Hvilke valideringer gjør elevene i en modelleringsaktivitet,* og (2) *hvilke grep gjør læreren for å sette elevene i posisjon for å gjøre valideringer?*

Fra mine analyser og diskusjoner har jeg kommet frem til at elevene brukte sammenligninger for å validere arbeidet sitt. Nærmere bestemt sammenlignet de arbeid fra ulike deler i modelleringssyklusen for å se hvordan de samsvarte. Elevene validerte uproblematisk innenfor modelleringssyklusens matematiske verden (kategori 1). Problemene oppsto når de matematiske modellene eller de matematiske resultatene skulle valideres opp mot den virkelige konteksten, altså valideringer som innebar en overgang fra syklusens matematiske verden til den virkelige verden.

Utfordringene med å validere tilbake til modelleringssyklusens virkelighet ble knyttet til elevenes begrensede forståelse av det reelle problemet, de forsto ikke problemet de skulle løse. Mange elever brukte oppgaveteksten (det reelle problemet) ukritisk til å hente ut tall og fakta, mens resten av konteksten tilsynelatende ble ignorert. Til tross for at læreren gjorde en rekke grep for å rette elevenes blikk mot problemets kontekst, var det få elever som så behovet for å videreutvikle modellen sin. Elevene var tilsynelatende fornøyde med å ha oppnådd et resultat, det kan virke som de opplevde resultatet som tilstrekkelig, eller at de manglet motivasjon til videre arbeid. Dette ble derfor identifisert til å hindre elevene i å utvikle tilstrekkelige modeller.

I tillegg har jeg kommet frem til at det var krevende for lærerne å finne de riktige grepene i de aktuelle situasjonene for å støtte og veilede elevene, og samtidig opprettholde en balanse mellom maksimal uavhengighet og minimal veiledning. Læreren gjorde en rekke adaptive og strategiske inngrep der intensjonen var å sette elevene i posisjon til å reflektere over eget arbeid og å gjøre nødvendige valideringer for å endre, videreutvikle eller godta modellen sin. Resultatene viser at elevene i liten grad nyttet seg disse inngrepene, antagelig fordi formen for tilbakemelding var uvant, eller fordi de ikke så behovet for å videreutvikle resultatet sitt. Som et resultat av dette tok lærerne i bruk mer informative og organisatoriske inngrep i et siste forsøk på å hjelpe elevene til å gjøre nødvendige valideringer for å endre eller videreutvikle modellene sine.

Hovedfunnet i denne studien kommer til syne ved å se forskningsspørsmålene i lys av hverandre. Valideringsprosessen er utfordrende for elevene, og det er lærerens ansvar å støtte elevene i prosessen. Lærerens rolle blir derfor essensiell for et gunstig samspill mellom lærer og elev med intensjon om å veilede elevene i valideringsarbeidet.

6.2 Studiens plass i forskningsfeltet og videre forskning

Matematisk modellering har vært en del av matematikkens forskningsfelt i mange år. Allikevel anses modellering som et relativt nytt tema i undervisningssituasjon. Jeg har lest mange rapporter og studier om modellering knyttet til matematikkundervisningen, de aller fleste internasjonale. Det jeg imidlertid fant lite om var elevenes valideringsprosess. Jeg ønsket derfor å undersøke elevenes valideringsprosess, og hvordan lærerne støttet elevene i denne prosessen. Mine resultater viser hvilke valideringer elevene gjorde og hva som hindret dem. De viser også hva lærerne gjorde for å støtte elevene i valideringsprosessen. Funnene kan med fordel benyttes som utgangspunkt for videre forskning.

Deltagerne i denne studien hadde liten eller ingen erfaringer med matematisk modellering. Det er derfor naturlig å tenke at noe av utfordringen kan knyttes til en ukjent undervisningsmetode både for elever og lærere. Det kunne derfor vært interessant å gjennomføre en tilsvarende studie med deltagere som har utviklet modelleringskompetanse.

Et annet forslag er å se nærmere på hvordan læreren kan hjelpe elevene med å rette blikket mot det reelle problemets kontekst, og om det vil påvirke valideringsprosessen med overgang fra matematikken til virkeligheten. En slik studie kan med fordel gjennomføres med som en *Lesson study* (Yang & Ricks, 2013) der en gruppe lærere sammen planlegger, gjennomfører og evaluerer en eller flere undervisningsøkter. En slik studie vil ha et didaktisk perspektiv (Kaiser & Sriraman, 2006)

Et siste forslag er å forske på hvordan en modell for modelleringssyklus tilpasset elever kan påvirke elevenes valideringsarbeid. Ifølge Ferri (2018) er dette lite utprøvd, men hun refererer til en studie innenfor DISUM-prosjektet som rapporterer om økt modelleringskompetanse ved bruke av modelleringssyklusen i innlæringsfasen. Kan en modelleringssyklus hjelpe elevene med å forstå problemets kontekst? Og kan den hjelpe elevene med valideringsprosessene som krever overgangen fra matematikken til virkeligheten?

6.3 Noen tanker helt til slutt

Fra arbeidet med denne masteroppgaven har jeg fått et bredere og dypere syn på matematisk modellering, og ikke minst for hvilke muligheter det åpner for. Jeg har også oppdaget at det er et enormt sprik mellom hva som blir forespeilet av matematisk modellering i undervisning, og hva som faktisk blir gjennomført i internasjonale, norske og lokale klasserom. I kapittel 2.2 argumenterte jeg for modelleringen sin plass i skolen, og jeg ønsker nå å minne om første setning i læreplanen for matematikk (MAT01-05). «Matematikk er et sentralt fag for å kunne forstå mønster og sammenhenger i samfunnet og i naturen gjennom modellering og anvendelser» (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Matematikklærerne står altså foran en utfordrende, men viktig oppgave med å legge til rette for å utdanne mennesker som skal kunne forstå verden vi lever igjennom modellering og anvendelse.

Referanser

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education 38*(3), 293-301.

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I O. Skovmose & M. Blomhøj (Red.), *Kunne det tænkes? - om matematiklæring* (s. 80–109). Malling Beck.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phase in the modelling process. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 38*(2)*,* 86-95.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education* (s. 13–39). Springer.

Blum, W. (1996). Andwendungsbezüge im Mathematikunterricht-Trends und perspektiven. *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, 23*, 15-38.

Blum, W. (2011). Can modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. Kaiser, G. et al. (Red.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA14* (15-30). Springer.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? I Cho S. (Red.) *The Proceedings of the ICME12* (73-96). Springer.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58.

Blum, W., & Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical Modelling ICTMA12: education, engineering and economics* (222-231). Horwood publishing.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6.utg.). Routledge.

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modelling process? *Educational Studies in Mathematics, 99* (137-159).

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A Modeling Perspective on Students' Mathematical Reasoning about Data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), (110-136).

Doerr, H. M. (2007). What Knowledge Do Teachers Need for Teaching Mathematics Through Applications and Modelling? I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Bd. 10, s. 69–78). Springer. Hentet fra: http://link.springer.com/10.1007/978-0-387-29822-1_5

English, L. (2006). Mathematical Modeling in the Primary School. Children`s Construction of a Consumer Guide. *Educational Studies in mathematics, 63*(3)*,* 303-323. Hentet fra: https://doi.org/10.1007/s10649-005-9013-1

Frejd, P., & Ärlebäck, J. B. (2011). First Results from a Study Investigating Swedish Upper Secondary Students' Mathematical Modelling Competencies. I G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (407-416). Springer.

Galbraith, P., & Stillman, G (2006). A Framework for Identifying Students Blockages During Transitions in the Modelling Process. *Zentralblatt fur Didaktik der Matematik, 28*(2)*,* 143-162.

Gold, R. L. (1958). Roles in sociological field observation, *Social Forces, 36,* 217-223.

Jankvist, U. T., & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(4), 467–496.

Janvier, C. E. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. *This book stems from a symposium organized by CIRADE (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l" Apprentissage et le Développement en Education) of Université du Quebec à Montréal.*: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezügen im Mathematikunterricht: Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. *Materialen für einen realitatsbezogenen mathematikunterricht*, 66-84.

Kaiser, G. & Srirman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 38*(3)*,* 302-310.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal Akademisk.

Lesh, R., & Caylor, B. (2007). Introduction to the Special Issue: Modeling as Application versus Modeling as a Way to Create Mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 12(3), 173–194. Hentet fra: https://doi.org/10.1007/s10758-007-9121-3

NESH (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Hentet fra: https://www.etikkom.no/forskningsetiskeretningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier. Den skrivende forskeren.* Universitetsforlaget.

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I. (2018) *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning.* Cappelen Damm Akademisk.

Postholm, M. B. (2020). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2.utg.). Universitetsforlaget.

Rienecker, L., & Jørgensen, P. S. (2013). *Den gode oppgaven* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Robson, C., McCartan, K. (2016). *Real world research: A resource for users of social research methods in applied settings* (4. utg.). Wiley.

Stake, R.E. (1995). *The Art of Case Studies*. Sage Publications, Inc.

Stillman., Brown J., Galbraith P. (2010). Identifying Challenges within Transition Phases of Mathematical Modeling Activities at Year 9. I Lesh R., Galbraith P., Haines C., Hurford A. (Red.). *Modeling Students´ Mathematical Modeling Competencies, 33,* 385-398. Springer.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory.* Sage Publications, Inc.

Utdanningsdirektoratet (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn* (MAT01-05). Hentet fra: https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Yang, Y., & Ricks, T. E. (2013). Chinese lesson study: Developing classroom instruction through collaboration in school-based Teaching Research Group activities. I Y. Li & R. Huang (Red.), *How Chinese teach mathematics and improve teaching* (s. 51-65). Routledge.

Vedlegg

Vedlegg A: Modelleringsaktiviteten

Vedlegg B: Transkripsjonskoder

Vedlegg C: Intervjuguide elever

Vedlegg D: Intervjuguide lærere

Vedlegg E: Infoskriv elever

Vedlegg F: Infoskriv lærere

Vedlegg G: Godkjenning fra NSD

Vedlegg A

Bakterier er små encellede organismer som finnes overalt. Bakterien E. coli er en bakterie som trives i tarmsystemet vårt. De fleste E. coli bakteriene har gode hensikter, men noen kan gjøre oss syke.

Det er funnet en bestand av en ukjent E. coli bakterie i det kommunale vannet. Bestanden formerer seg raskt, den dobles hvert 15. minutt. Etter 1 time og 15 minutter inneholdt bestanden 80 000 bakterier.

Dere får i oppdrag å lage en modell som viser hvordan bakteriebestanden vil utvikle seg. Det skal legges ved en skriftlig begrunnelse for valgene som er tatt underveis i arbeidet, og en begrunnelse på hvorfor dere mener modellen viser et godt bilde av utviklingen.

Vedlegg B

<u>Understreket tekst</u>	Leser oppgaveteksten høyt
[]	Ikke hørbar ytring
…	Pause på mer enn tre sekunder
..	Nøling
_ (understrek)	Avbrytelse fra medelev/lærer
Kursiv	Trykk på ytringen
(Tekst i parentes)	Redegjørelse for ikke-verbal handling, eller kommentar
(…)	Har hoppet over deler av ytringen

Vedlegg C

Ved behov for intervju av elever vil det legges opp til et ustrukturert intervju der eleven får snakke mest mulig fritt. Denne intervjuguiden inneholder noen grunnleggende spørsmål som kan fungere som en inngangsport for intervjuet. Intervjuet vil styres av hva som er blitt samlet inn av datamateriale i undervisningsøkten.

Følgende spørsmål kan være utgangspunkt for intervjuet:

- Kan du forklare hvordan du har tenkt her?
- Hvordan begrunner du valgene du har tatt?
  - For hvilke antagelser som har blitt gjort
  - For hvilke matematiske beregninger som er blitt gjort
  - For valg av matematiske modell
  - For endringene som er blitt gjort underveis i arbeidet
  - For å presentere modellen
- Hva tenker du er modellens styrker?
- Hva tenker du er modellens svakheter?
- Hvordan tenker du den matematiske modellen representerer den virkelige situasjonen?
- Hvordan tenker modellen kan videreutvikles?
- Kunne du ha løst det på en annen måte?
- Hva var den enkleste delen i arbeidet?
- Hva var den største utfordringen i arbeidet?
- Hvordan vurderer du eget arbeid fra å forstå oppgaven til ferdig produkt?

Vedlegg D

Intervju av lærer vil være et ustrukturert intervju som knyttes til elevens arbeid i modelleringsaktiviteten og vil finne sted i etterkant av aktiviteten. Det legges opp til en samtale der lærer skal snakke mest mulig fritt om hvordan vurdere elevenes arbeid i en modelleringsprosess.

Følgende spørsmål kan være grunnlaget for intervjuet, for å kunne forstå hvordan læreren ser muligheten til å vurdere elevene i modelleringsprosessens ulike stadier:

- Hvordan kan du vurdere elevenes arbeid med å:
    - Forstå oppgaven med virkelighetsproblemet
    - Strukturere og forenkle problemet
    - Bevege seg fra den virkelige verden til den matematiske verden
    - Matematisere problemet for et matematisk resultat
    - Tolke den matematiske modellen opp mot det virkelige problemet
    - Validere modellen
    - Presentere endelig resultat
- Hvilken del av prosessen var enklest å vurdere?
- Hvilken del av prosessen var vanskeligst å vurdere?
- Samlet sett, hvordan tenker du modelleringsaktiviteter egner seg for vurdering av elevenes arbeid?
- Hvordan tenker du modelleringsaktiviteter egner seg for hvordan eleven kan vurdere eget arbeid?

Vedlegg E

Vil du delta i forskningsprosjektet *Matematisk modellering*?

Modellering og *anvendelser* er et nytt kjerneelement i matematikkfaget. En deltagelse i prosjektet vil gi både lærere og elever muligheten til å være med på en godt planlagt modelleringsaktivitet.

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan matematisk modellering kan bidra til å kritisk evaluere eget arbeid. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med prosjektet er å undersøke hvordan arbeid med modellering kan bidra til å fremme kritisk tenkning og evnen til å evaluere eget arbeid. I tillegg vil det undersøkes hvordan læreren kan vurdere elevene i modelleringsprosessen. Prosjektet er en del av en masteroppgave.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Institutt for matematiske fag er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta fordi du er elev ved 9. eller 10.trinn på den aktuelle skolen. Det er gjort en avtale med klassens matematikklærere om å få gjennomføre undervisningsopplegget.

Hva innebærer det for deg å delta?

- Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du er delaktig i et undervisningsopplegg som gjennomføres på 1-2 undervisningsøkter. Forsker vil observere og samle inn skriftlig data
- Hvis du godkjenner å delta i filmopptak *kan* du bli en del av en fokusgruppe der det skriftlige arbeidet analyseres sammen med den matematiske samtalen. Det vil ikke bli gjort opptak av ansikter
- Hvis du godkjenner eventuelt intervju, vil det bli gjort lydopptak av samtalen. Samtalen vil dreie seg om og hva du har tenkt for å løse problemet, hvorfor du eventuelt har gjort endringer underveis. Foresatte kan se spørsmål på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. De som ikke ønsker å delta vil få ordinært undervisningsopplegg i et annet klasserom.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Skriftlig arbeid skal ikke inneholde sporbare navn. Film- og lydfilene vil kun oppbevares på NTNUs opptakerne og slettes når informasjonen er transkribert. Transkripsjonen vil ikke inneholde sporbare navn til noen av deltakerne. Det er kun forsker/student Ingrid Trøstheim og hennes veileder/prosjektansvarlig Hermund André Torkildsen som vil ha tilgang til, og bearbeide dataene som samles inn.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 1.oktober 2021. Datamaterialet vil da bli slettet.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.
På oppdrag fra Institutt for matematiske fag, NTNU, har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Institutt for matematiske fag, NTNU ved prosjektansvarlig Hermund André Torkildsen (hermund.a.torkildsen@ntnu.no) eller student Ingrid Trøstheim (ingrid.trostheim@skole.ringsaker.kommune.no).
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen:

Ingrid Trøstheim Student	Hermund André Torkildsen Veileder

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Matematisk modellering*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til *(flere alternativer kan kombineres):*

☐ å delta i undervisningsopplegget med observasjon
☐ at mine skriftlige besvarelser samles inn
☐ å delta i fokusgruppe med videoopptak
☐ å delta i fokusgruppe med lydopptak

☐ å delta i intervju, hvis aktuelt

Jeg/vi samtykker til at mitt/vårt barn sine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet:

__________________________________ ____________________________________

(Signert av barnet, dato) (Signert av barnets foresatte, dato)

Vedlegg F

Vil du delta i forskningsprosjektet *Matematisk modellering*?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan matematisk modellering bidrar til å kritisk vurdere eget arbeid. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med prosjektet er å undersøke hvordan arbeid med modellering kan være med på å fremme kritisk tenkning og evnen til å vurdere eget arbeid. I tillegg vil det undersøkes hvordan læreren kan vurdere elevene i modelleringsprosessen. Prosjektet er en del av en masteroppgave.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Institutt for matematiske fag er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta fordi du er matematikklærer på 10. trinn på den aktuelle skolen.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det:

- En innføring i prinsippene for matematisk modellering og at du setter deg inn i teorien
- Et ferdig utviklet undervisningsopplegg som du sammen med forsker setter deg inn i, og sammen med to-lærer gjennomfører i klassen din
- At du stiller til intervju i etterkant av gjennomføring av undervisningsaktiviteten. Intervjuet vil bli tatt opp med lydopptaker. Ved intervju kan du få se spørsmålene på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Skriftlig arbeid skal ikke inneholde sporbare navn. Lydfilene vil kun oppbevares på opptakerne og slettes når informasjonen er transkribert. Transkripsjonen vil ikke inneholde sporbare navn til noen av deltakerne.

Opplysninger som kan bli brukt i masteroppgaven er opplysninger gjennom sitater og/eller deler av dialoger som er interessante data for å besvare forskningen på hvordan matematisk modellering kan bidra til kritisk tenkning hos elevene.

Det er kun forsker/student Ingrid Trøstheim og hennes veileder/prosjektansvarlig Hermund André Torkildsen som vil ha tilgang til, og bearbeide dataene som samles inn.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 1. oktober 2021. Datamaterialet vil da bli slettet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.
På oppdrag fra Institutt for matematiske fag, NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Institutt for matematiske fag, NTNU ved prosjektansvarlig Hermund André Torkildsen (hermund.a.torkildsen@ntnu.no) eller student Ingrid Trøstheim (ingrid.trostheim@skole.ringsaker.kommune.no).
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen:

Ingrid Trøstheim	Hermund A. Torkildsen
Student	Veileder

Samtykkeerklæring
Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Matematisk modellering*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:
- ☐ å delta i forskningsprosjektet
- ☐ å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet
(Dato, Navn):____

Vedlegg G

09.11.2020 - Vurdert
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 09.11.2020, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

DEL PROSJEKTET MED PROSJEKTANSVARLIG
Det er obligatorisk for studenter å dele meldeskjemaet med prosjektansvarlig (veileder). Det gjøres ved å trykke på "Del prosjekt" i meldeskjemaet.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilken type endringer det er nødvendig å melde: https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.
TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.10.2021.

LOVLIG GRUNNLAG ELEVER
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna/elevene. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som foresatte kan trekke tilbake. Barna/elevene vil også samtykke til deltakelse.

LOVLIG GRUNNLAG LÆRERE
Prosjektet vil innhente samtykke fra lærerne til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: - lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet
DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art.

17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Gry Henriksen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology