Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Sindre Magnus Jacobsen
Lars Gunnar Romseland Olsen

Elevers første møte med matematisk modellering

En kvalitativ studie av hindringer i modelleringssyklusen, sett fra et kommognitivt perspektiv

Masteroppgave i lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 1-7. trinn
Veileder: Anita Valenta
September 2021

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sindre Magnus Jacobsen
Lars Gunnar Romseland Olsen

Elevers første møte med matematisk modellering

En kvalitativ studie av hindringer i modelleringssyklusen, sett fra et kommognitivt perspektiv

Masteroppgave i lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 1-7. trinn
Veileder: Anita Valenta
September 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne studien er det gjort en undersøkelse av elevers arbeid med en modelleringsoppgave. Målet har vært å få innsikt i hvilke hindringer som oppstår når noen 6.trinns elever møter modellering i en undervisningssituasjon for første gang. Studiens forskningsspørsmål er: Hvilke hindringer møter en gruppe 6.trinns elever i sitt første møte med en modelleringsdiskurs?

Det er blitt brukt kvalitativ metode i undersøkelsen hvor seks elever fordelt på to grupper har blitt observert. Elevene har ikke jobbet med modellering tidligere, og har heller ikke fått noen instruksjoner i hva en modelleringsoppgave går ut på. Datamaterialet ble analysert ved bruk av induktiv metode med åpen koding. Den åpne kodingen resulterte i 9 ulike hindringer som elevene møtte på i arbeidet. Hindringene er videre plassert etter hvor de har utspilt seg i modelleringssyklusen til Blomhøj og Jensen (2003) og Galbraith og Stillman (2006). Studien har et sosiokulturelt syn på læring. For å foreslå noen årsaker til at hindringene kan ha oppstått er det brukt Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk, utdypet med noen begreper hentet fra Lavie et al. (2018).

Ved å identifisere hindringer i modelleringsprosessen kan studien være en støtte til å forutse *hvor* elever kan møte på utfordringer i arbeidet. Videre kan den være en kilde til refleksjon rundt planlegging av undervisning, som for eksempel hvilken kompetanse og ferdigheter elevene trenger i arbeidet og hvordan det er mulig å tilrettelegge undervisningen. Resultatene viser at flere av hindringene kan spores til *systemavgrensing* og *tolking og vurdering* i modelleringssyklusen. Hindringene kan forklares med utgangspunkt i elevenes rutiner og kommognitiv konflikt. Modellering er en ny diskurs for elevene som krever noen andre metaregler enn det elevene er vant til fra tidligere matematiske diskurser. Rutinene elevene tar med seg inn i arbeidet skaper dermed noen hindringer for elevene. Det er også tilfeller hvor det ser ut til at hindringene kommer av uoppklarte kommognitive konflikter som oppstår i arbeidet. Resultatene peker mot at innlæring av modellering er en ny diskurs for elevene som det trengs tid for å innarbeide dersom elever og lærere skal oppleve undervisningen som meningsfull.

Nøkkelord: Matematisk modellering, modelleringssyklus, hindringer, kommognisjon, diskurs, rutiner, kommognitiv konflikt

Abstract

In this study we investigate students' work with a modelling task. The goal has been to gain insight in the blockages that occur when some 6^{th} grade students are working with a modelling task in a classroom situation for the first time. The research question is: What blockages does a group of 6^{th} grade students meet in their first encounter with a modelling discourse?

Qualitative methods have been used in the study, where six students divided in two groups have been observed. The students have not been working with modelling in the past, and have not been given any instructions regarding how a modelling task is solved. The research data was analysed by using inductive method and open coding. The open coding resulted in 9 different blockages that emerged during the lesson. The blockages were then identified according to where in the modelling process they appeared, based on Blomhøj and Jensen (2003) and Galbraith and Stillman (2006). The study is placed within a socio-cultural view of learning. Sfard's (2008) commognitive framework, supplemented with concepts from Lavie et al. (2018), has been used to propose some possible explanations for the blockages.

By identifying blockages in the modelling process, this study can contribute to predicting *where* students may meet challenges in their work. Further, it can be a source for reflection concerning planning of lessons. For instance what competences and skills the students need in the work, and how it is possible to facilitate the situation for learning. The results show that several of the blockages can be traced to *systematization* and *interpretation and evaluation of results* in the modelling cycle. The blockages can be explained in context of the students' routines and regarding commognitive conflict. Modelling is a new discourse for the students, that demands some other metarules than what the students are familiar with from other mathematical discourses. The routines the students bring into the task then creates some blockages. There are also occurences of blockages seemingly based on unresolved commognitive conflicts that occur. The results indicate that modelling is a new discourse for the students that will take time to learn in order for the students and teacher to find meaningful.

Keywords: Mathematical modelling, modelling cycle, blockages, commognition, discourse, routines, commognitive conflict

Forord

Denne studien er gjennomført i studieåret 2020-2021 og markerer slutten på tre år som lærerspesialiststudent i matematikk 1-7 på NTNU i Trondheim. Årene i Trondheim har gitt oss verdifull kunnskap og fått oss til å se flere muligheter i matematikkundervisning. Vi har møtt mange utrolig dyktige fagpersoner som har gjort sitt ytterste for å sikre god kvalitet på studiet. Det siste året har gitt oss muligheten til å fordype oss i et selvvalgt emne som vi brenner for, og som er aktuelt i skolen i årene fremover.

Vi ønsker spesielt å takke vår veileder Anita Valenta som har bidratt med sin faglige kompetanse og gitt oss verdifulle perspektiver og råd underveis. Anita har kommet med tydelige tilbakemeldinger og gitt oss motivasjon og optimisme når skrivingen har gått litt i stå.

Takk også til elevene i klassen som deltok i undersøkelsen vår. Deres sporty innstilling til å delta på noe nytt og ukjent har gjort at vi har kunnet få god innsikt i et nyttig matematisk fagfelt.

En stor takk også til våre respektive skoler for god tilrettelegging gjennom hele prosessen. Vi håper og tror at vår studie kan være til nytte for skolene i årene som kommer.

Avslutningsvis ønsker vi å takke våre familier for god støtte og hjelp. Oppgaven har tatt mye av vår tid gjennom det siste året, og vi hadde ikke klart å gjennomføre den uten deres forståelse.

Stavanger, september 2021

Sindre Magnus Jacobsen

Risør, september 2021

Lars Gunnar Romseland Olsen

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser/symboler

NOU	Norges offentlige utredninger
FSO	Fortilfelle søkeområde
RME	Realistic Mathematics Education
NSD	Norsk senter for forskningsdata

1 Innledning

Tema for denne studien er elevers arbeid med modellering. Modellering handler om å bruke matematikk til å beskrive og forutse virkeligheten på en matematisk måte (Blomhøj og Jensen, 2003). I dagens samfunn møter vi stadig på matematiske modeller. Under koronasituasjonen gjøres det for eksempel hyppig beregninger av hvordan smitten sprer seg og når landet kan åpne igjen. I andre sammenhenger gjøres det beregninger for hvor mye penger man skal få igjen i en forsikringssak eller hvordan forventet befolkningsvekst i et område vil være. Alle disse eksemplene baserer seg på matematiske modeller som grunnlag for beregningene. I det hele tatt er matematisk modellering sentralt innenfor flere felt. De fleste som i dag er utdannet innen matematikk jobber med modellering innenfor flere ulike yrkesgrupper (Stillman et al., 2020).

Samfunnet trenger folk som klarer å håndtere og gi mening til sammensatte problemer (Lesh, 2003). I en slik prosess, som matematisk modellering er, kreves det ferdigheter som blant annet tolking og systematisering av data, matematisering og kritisk tenkning. Dette er ferdigheter Ludvigsenutvalget (NOU 2015:8, s.21) trekker frem som sentrale kompetanser for elever i sin utredning om fremtidens skole. Der står det at vi trenger å lære kreativitet, innovasjon, kritisk tenkning og problemløsning for å møte behovene i dagens samfunn, og presiserer at ferdighetene er viktige i alle yrker, ikke bare akademiske.

Ut fra behovet i samfunnet er det altså tydelig at matematisk modellering krever en sentral plass i skolen. Modellering i skolen er viktig da det kan utvikle elevenes ferdigheter i å løse sammensatte problemer innenfor mange sentrale ideer i matematikken (Stillman et al., 2020; Lesh, 2003). De siste årene har modellering blitt et veletablert forskningsfelt innen matematikkdidaktikk (Ferri, 2018), og vi ser også at matematisk modellering har fått en sentral plass i ny læreplan i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette kan sees som et tegn på at læreplanen har tatt innover seg de nye kompetansene som trengs i fremtidens samfunn. Modellering som begrep kommer tydelig frem i ny læreplan for matematikk, allerede under *fagets relevans og sentrale verdier*. Der står det som første setning at «matematikk er et sentralt fag for å kunne forstå mønstre og sammenhenger i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvendelser» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Modellering kommer også frem i ett av seks kjerneelement i matematikk som skal prege elevenes undervisning gjennom hele skoleløpet. Med andre ord er det tydelige retningslinjer som poengterer viktigheten av modellering i skolen.

Til tross for modelleringens potensiale i læring av matematikk viser forskning fra andre land at den har hatt en langt mindre fremtredende rolle enn ønskelig i undervisningssammenheng (Blum & Ferri, 2009). Historisk sett har matematikkundervisningen i grunnskolen vært preget av en mer tradisjonell undervisning hvor en oppstart med teori og definisjoner etterfølges av arbeid med oppgaver (Alrø & Skovsmose, 2002). I mange tilfeller har undervisningen også omfattet bruk av problemløsningsoppgaver. Fokuset i disse oppgavene har ofte ikke vært på problemet i seg selv, men har stort sett blitt brukt til å konkretisere én spesifikk matematisk ferdighet som elevene jobber med, knyttet opp til en bestemt måte å gjøre det på og hvor all nødvendig informasjon er gitt (Schoenfeld, 2016). Med dette har læreren ofte prøvd å relatere matematikken til en hverdagslig kontekst, men problemløsningsoppgavene har allikevel egentlig ikke vært noe annet enn utregninger kamuflert i språkdrakt. Dette står i kontrast til matematisk modellering som er mer kompleks og som i stor grad krever andre ferdigheter enn tradisjonell undervisning og problemløsning (Blum & Ferri, 2009).

Modellering blir ofte sett på som en sirkulær prosess som i hovedtrekk starter med et reelt problem og slutter med en rapport som viser en vellykket løsning, eventuelt en beslutning om å gå tilbake til modellen for å oppnå et bedre utfall (Galbraith & Stillman, 2006). Prosessen er sammensatt og krever at elevene tar i bruk både matematiske og ikke-matematisk ferdigheter på en gang (Blum, 2015). Greer et al. (2007) argumenterer for at modellering bør inn i skolen allerede fra tidlig alder. De hevder at modellering i skolen nesten utelukkende har vært tatt i bruk på videregående skole og i høyere utdanning, men at det kan være store fordeler ved å ta i bruk modellering også i barneskolen. Ved å arbeide med modellering vil elevene kunne se på matematikk som et verktøy for å forstå og håndtere viktige deler av sin egen hverdag. Elevene vil også få et redskap for å trekke inn erfaringer fra eget liv i matematikken fra tidlig alder, og på den måten gjøre matematikk til noe som har relevans for dem i hverdagen.

Når elever møter en modelleringsoppgave for første gang er det stor sannsynlighet for at de vil støte på flere utfordringer og hindringer på veien (Galbraith & Stillman, 2006). Matematisk modellering er en ny måte å jobbe på for mange elever og lærere. Forskjellene fra tradisjonell undervisning kan være en av grunnene til at modellering ofte oppleves vanskelig både for elever og lærere (Blum & Ferri, 2009). Blum og Ferri (2009) understreker at matematisk modellering er så markant annerledes fra annen læring i matematikk at elevene spesifikt må trenes i dette for å ha forutsetninger for å mestre arbeidsmåten. Elevene trenger en del nye strategier og erfaringer for å kunne jobbe med matematisk modellering som det kanskje ikke har vært behov for i annen matematikkundervisning. For eksempel er elevene ofte vant med å få all informasjon de trenger for å løse en tradisjonell matematikkoppgave, men i modellering er ikke all informasjon gitt. Dette betyr at elevene selv må gjøre antakelser rundt hva som kan være relevant informasjon i en kontekst. Modellering blir dermed en ny oppgavesituasjon for elevene som de kanskje ikke er vant til.

De første gangene elevene møter en modelleringsoppgave kan mange av utfordringene oppstå ved at elevene tar med seg tidligere erfaringer inn i arbeidet. Forskning viser at det i slike tilfeller er vanlig å prøve å knytte disse nye situasjonene opp mot tidligere situasjoner som oppleves noenlunde like (Lavie et al., 2018). Sfard (2008) og Lavie et al. (2018) beskriver disse tidligere erfaringene, eller «reglene», man tar meg seg inn i situasjonen som rutiner. Elevenes tidligere erfaringer i matematikk kan i så måte komme i konflikt med nye og sentrale elementer fordi det ikke passer sammen (Sfard, 2008). En slik konflikt kan oppstå i første møte med modellering. Ferdigheter elevene har i matematikk fra tidligere kan oppleves som at de ikke lenger kan brukes i modellering, da situasjonen oppleves som vesentlig endret. Det kan sammenliknes med at en ofte ikke kjenner igjen en person som en har truffet tidligere når man møter dem i en ny kontekst. Den nye konteksten matematikken skal brukes i kan føre til hindringer i arbeidet, ved at man ikke opplever overførbarhet til den nye situasjonen. Det kan derfor oppleves som problematisk og lite nyttig å jobbe med modellering i starten når verken lærer eller elever er vant til arbeidsformen. Mangel på nødvendig kompetanse om modelleringsprosessen og regler for å delta i den kan være med på å hindre elevenes deltakelse. For at elevene skal kunne delta er det viktig at de nettopp kjenner til hva modellering handler om og hvilke rammer som gjelder for deltakelse (Sfard, 2008).

Formålet med vår studie er å bidra til mer kunnskap om hvordan elever som ikke er vant til å arbeide med modellering møter slike oppgaver. I forbindelse med innføring av ny læreplan kan kunnskap om fagområdet være nyttig for lærere i norsk skole som skal ta i bruk modellering i sin matematikkundervisning. Ved å øke kunnskapen om modellering vil lærere i større grad kunne planlegge og gjennomføre gode læringssituasjoner for elevene. Inn under dette kommer blant annet kunnskap om modellering som arbeidsmåte, hvilke hindringer som kan oppstå når elever jobber sammen for å løse kognitivt krevende oppgaver som modellering ofte er, og innsikt i hvordan rutiner og tidligere læringssituasjoner påvirker hvordan elevene velger å jobbe med en oppgave. Gjennom å analysere hindringer som oppstår i arbeid med en modelleringsoppgave vil vi drøfte vanskeligheter som kan oppstå innenfor modellering. For å kunne beskrive hovedtrekkene i modelleringsprosessen har vi benyttet Blomhøj og Jensen (2003) som har analysert modelleringsprosessen og kommet frem til seks delprosesser som er helt nødvendige for å kunne utvikle kompetanse i matematisk modellering. Videre har vi brukt deler av rammeverket til Galbraith og Stillman (2006) for å kunne beskrive elevenes utfordringer mer i detalj.

For å kunne beskrive og sette ord på hindringene som oppstår i modelleringsprosessen tar vi i bruk Anna Sfard (2008) sitt rammeverk om kommognisjon. Kommognisjon er et rammeverk som kan skape mening til klasseromsprosesser (Sfard, 2007). Sfard (2008) hevder at matematikk er en diskurs, og at læring skjer gjennom en gradvis endring av diskursen. Endringen kan eksempelvis skje gjennom at elevene introduseres for nye typer oppgaver hvor det vil være nødvendig å finne andre måter å løse disse på. Slik vil det være i elevers første møte med matematisk modellering. Med utgangspunkt i det kommognitive rammeverket vil vi dermed bidra til mer kunnskap om elevers arbeid med modellering med vårt forskningsspørsmål:

Hvilke hindringer møter en gruppe 6. trinnselever i sitt første møte med en modelleringsdiskurs?

For å svare på forskningsspørsmålet i vår studie har vi valgt følgende oppbygning av oppgaven: i kapittel 2, teori, presenteres først det kommognitive rammeverket til Sfard (2008). I tillegg til Sfard (2008) sine kommognitive begreper tar vi i bruk noen av Lavie et al. (2018) sine begreper om rutiner for å kunne gi grundigere beskrivelser. Videre presenteres modelleringsprosessen ut fra Blomhøj og Jensen (2003) og Galbraith og Stillman (2006). Kapittel 3 omhandler datainnsamling og analysemetode. For å svare på forskningsspørsmålet har vi observert seks elever fra 6.trinn som var fordelt på to grupper. Det ble gjort lydopptak av gruppene mens de arbeidet med en modelleringsoppgave. For å analysere elevenes arbeid har vi transkribert og kodet lydopptakene. Videre har vi gjennomført en induktiv analyse av elevenes deltakelse i diskursen. For å beskrive mønster og kategorier av hindringer som elevene møter på i arbeidet med modelleringsoppgaven benyttet vi åpen koding. I kapittel 4 vil vi presentere resultatet av analysen vi har gjort. Resultatet viser at det oppstår flere hindringer på ulike steder i modelleringssyklusen. Hindringene blir videre beskrevet ved hjelp av begreper fra Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk, med utdypelser hentet fra

Lavie et al. (2018) der det er relevant. Kapittel 5 er viet diskusjon av funnene. Her knytter vi funnene våre opp mot relevant litteratur og diskuterer hvordan våre funn kan hjelpe andre lærere i arbeidet med matematisk modellering i skolen. I tillegg diskuterer vi undersøkelsens kvalitet. I kapittel 6 oppsummerer vi funnene våre og kommer med noen tanker for hva resultatene kan ha å si for videre forskning.

2 Teori

Denne studien har fokus på hvilke hindringer elever møter i sitt første møte med en modelleringsdiskurs. For å danne et grunnlag for analyse av data og drøfting av våre funn vil vi i dette kapitlet forklare hva matematisk modellering er, gi en oversikt over sentrale faser i arbeid med modellering, samt se nærmere på hvordan elevers tidligere erfaringer påvirker dem i møte med en ny oppgavetype. Vi vil også se på hvordan modellering kan brukes i skolen, samt omtale vesentlige faktorer i planleggingen av undervisning basert på matematisk modellering. I vår studie har vi valgt å ta i bruk Sfard (2008) rammeverk om kommognisjon som bygger på sosiokulturell teori hvor deltakelse og samspill i et kulturelt fellesskap er utgangspunktet for læring (Vygotsky, 1987).

2.1 Kommognisjon

Kommognisjon er et sosiokulturelt læringssyn. Et sosiokulturelt læringssyn bygger på premissene om at læring skjer gjennom språk og samhandling med andre. Læring kan sees på som en sosial prosess hvor språk og kommunikasjon er sentralt, og skaper en sammenheng mellom det sosiale og det individuelle (Sfard, 2007). En sosial situasjon kan for eksempel skapes i et klasserom hvor samhandling mellom elever og lærere legger grunnlaget for læring. Et viktig premiss innenfor sosiokulturell læringsteori er at læring ikke kun går ut på å tilegne seg ny kunnskap, men også å kunne ta i bruk kunnskapen i nye situasjoner for på den måten å utvikle kunnskapen videre (Säljö, 2001). Med andre ord kan en si at innenfor sosiokulturell læringsteori er språk og kommunikasjon ikke bare redskaper som tas i bruk innenfor læring, men selve fundamentet for læring.

Vårt teoretiske rammeverk tar utgangspunkt i det *kommognitive* perspektivet utviklet av Anna Sfard. Sfard er professor ved Universitetet i Haifa, og har i en årrekke arbeidet med å definere sitt syn på hvordan hun tenker om læring. Hennes teori presenteres i boka «Thinking as communicating» fra 2008. Sfard er inspirert av blant annet Lev Vygotskys sosiokulturelle teori, og hennes tanker baserer seg i stor grad på at læring skjer gjennom kommunikasjon med andre. Sfard (2008) sitt rammeverk tar utgangspunkt i begrepet *kommognisjon*. Kommognisjon er slått sammen av ordene *kommunikasjon* og *kognisjon.* Ordets betydning er at kognitive prosesser, samt kommunikasjon mellom mennesker, er to sider av samme sak (Sfard, 2008). Det betyr at kognisjon, altså å tenke, er en form for kommunikasjon med seg selv.

Det analytiske fokuset i kommognisjon inkluderer både hva elevene gjør og hvordan de gjør det (Sfard, 2007). I vårt forskningsspørsmål ønsker vi å se på hvilke hindringer som faktisk skjer i modelleringssituasjonen, og hvordan de utspiller seg. Kommognisjons fokus på *hva* og *hvordan* ved læring gjør at det passer godt i vår studie. Vi ønsker allikevel å påpeke at det kommognitive rammeverket i utgangspunktet ikke beskriver hindringer for læring, men at vi i vår undersøkelse benyttet begrepene fra rammeverket til å forklare hindringene som oppstod.

Som beskrevet i innledningen kan kommognisjon gi mening til klasseromsprosesser. For å kunne sette ord på hindringer i modelleringsprosessen vil vi i dette kapitlet først gi en helhetlig oversikt over de viktigste begrepene innenfor kommognisjon, slik at leseren kan få et innblikk i teorien vi baserer vårt arbeid på. Deretter vil utdype begrepene vi i størst grad kommer til å benytte i vår analyse.

2.1.1 Sentrale begreper i kommognisjon

I en matematisk *diskurs* blir det brukt en bestemt type kommunikasjon. Ordbruk er en sentral faktor i diskursen fordi ordene forteller noe om hvordan deltakeren ser omverdenen (Sfard, 2008). I skolematematiske diskurser kan dette bety at elevene lærer nye måter å anvende *ord* de allerede har kjennskap til. For eksempel kan dette være ord som «firkant» og «volum». Diskursen kan også inneholde ord som er unike for matematikk, som de aldri har brukt tidligere, men som må læres her. Slike ord kan være «faktorisering», «kvadratrot» eller «pi». Målet i den matematiske diskursen er å utvikle muntlige eller skriftlige fortellinger som beskriver objekter. Disse fortellingene kalles *narrativer* (Sfard, 2008). Narrativene kan bli ansett som sanne eller usanne av deltakerne i diskursen. Et sant narrativ kan for eksempel være at 3+2 gir det samme svaret som 2+3.

I matematiske diskurser er det ofte en del gjentagende trekk slik som bruken av matematiske ord og representasjoner av matematiske objekter. Det kan også være faste mønster i prosessen med å lage og underbygge matematiske påstander. De gjentagende trekkene kan betegnes som *rutiner*. Rutiner er altså definerte, tilbakevendende mønster som er karakteristiske i en gitt diskurs (Sfard, 2008). Et eksempel på en rutine kan være at man ved sammenlikning av to flersifrede tall først sammenlikner sifferet lengst til venstre, for så å sammenlikne neste siffer hvis sifrene er like. Rutiner kan også være mønster for handlinger eller regler som gjelder i et fellesskap, som eksempelvis «i vår klasse skal vi begrunne våre meninger». I de neste underkapitlene vil vi gå dypere inn i enkeltbegreper innenfor kommognisjon for å gi grunnlag for å analysere prosessene som foregår i elevers første møte med modellering.

2.1.2 Matematisk diskurs

En diskurs er en bestemt type kommunikasjon, som skiller seg fra andre diskurser gjennom hvilke ord som brukes og hvordan ordene blir brukt. En diskurs kjennetegnes også av hvilke rutiner som tas i bruk. Målet med matematikk i skolen er ifølge Sfard (2008) at elevene skal kunne delta med flyt i en matematisk diskurs gjennom å benytte blant annet ord og rutiner på en riktig måte. En diskurs blir ofte identifisert ut fra hvilke objekter den omhandler. Eksempelvis vil en botanisk diskurs omhandle objektene planter. Til forskjell fra i en botanisk diskurs vil oppfattelsen av objektene i en matematisk diskurs i mye større grad være abstrakte og avhengig av deltakerens oppfattelse av objektet (Sfard, 2008). Et eksempel på et matematisk objekt kan være multiplikasjon av to tall, hvor multiplikasjonens betydning ofte ikke gir mening utenfor en kontekst. Objektene kan også videreutvikles. For eksempel vil man innen multiplikasjon måtte endre sin sannhet om at to tall multiplisert med hverandre alltid gir et større eller likt tall som svar når diskursen utvides til å også gjelde tall mindre enn 1. De matematiske objektene oppstår og videreutvikles således gjennom deltakelse i diskursen ved at den stadig utvides med nye sannheter om matematiske objekter. Dette medfører et paradoks. For å kunne delta i en diskurs krever det at man kjenner til hva diskursen handler om, men samtidig kommer denne kjennskapen nettopp fra deltakelse i diskursen (Sfard, 2008). I vår studie vil elevene møte en ny diskurs med en del nye matematiske sannheter og objekter. Det vil bety at elevene ikke nødvendigvis vil ha forutsetninger for å delta med flyt, og at det kan forventes noen hindringer.

I en diskurs finner man *diskursive mønster*. Et slikt mønster er handlinger som gjentas når en kommuniserer i en diskurs (Sfard, 2008). Eksempelvis vil vi som oftest hilse tilbake når vi møter en person som hilser på oss. Hvis man vet hvordan en skal reagere i en situasjon er det fordi man tidligere har vært i en liknende situasjon og er i stand til å gjøre liknende handlinger som respons på situasjonen (Sfard, 2008). En deltaker i en matematisk diskurs må med andre ord kunne gjenkjenne og respondere til situasjoner ved å koble matematiske objekter og handlinger til hverandre. Dette er kompliserte mønster for kommunikasjon som må øves inn for å bli bevisste handlinger. Modelleringsoppgaven i vår studie vil inneholde noen nye diskursive mønstre som elevene ikke har erfaringer med fra tidligere.

Kommunikasjon som diskursivt mønster baserer seg på regler. I en matematisk diskurs skiller man mellom *objektnivå-regler* og *metadiskursive-regler* (Sfard, 2008). Objektnivå-regler er regler som forteller noe om objekters egenskaper og uttrykkes ofte i form av narrativer om disse. Et eksempel på en objektnivå-regel kan være at summen av vinklene i en mangekant med n sider har vinkelsummen $(n-2)x180^{\circ}$. Metadiskursive regler, ofte bare kalt metaregler, sier noe om hvilke handlinger som er tillatt innenfor diskursen de befinner seg i (Sfard, 2008). For eksempel kan en metadiskursiv regel være hva som kreves for at en matematisk argumentasjon regnes som et bevis. Når elever møter en modelleringsdiskurs for første gang slik de gjør i vår undersøkelse vil det bety at elevene møter på noen andre metaregler enn det de har erfaring med. For eksempel kan det i modellering være tillatt å gjøre antakelser om faktorer som ikke er eksplisitt definert i oppgaven, men som er nødvendig for å komme videre. Metareglene kan dermed bli en hindring i vår undersøkelse ved at elevene ikke har erfaring med reglene som gjelder innenfor modellering.

2.1.3 Rutiner

I følge Sfard (2008) er rutiner et sett metaregler som beskriver *hvordan* og *når* en handling gjentas. *Hvordan* i en rutine er metareglene som begrenser eller forteller oss på hvilken måte noe skal gjøres. Metareglene som bestemmer *hvordan* i en rutine kan ofte bestå av flere handlinger som gjennomføres etter hverandre som reaksjon på et spørsmål eller en oppgave (Sfard, 2008). *Når* i en rutine definerer eller begrenser i hvilke situasjoner som rutinen kan anses som passende (Sfard, 2008). Vi ser på et eksempel med addisjon av to tresifrede tall. I mattetimen ville en elev kunne valgt å stille tallene opp under hverandre og regne ut, mens samme eleven i en tilsvarende situasjon på butikken ville brukt kalkulatoren på telefonen for å utføre det samme. Med andre ord kan *når* være styrende for *hvordan*. Det vil være vanskelig å lage utfyllende lister over *når* en rutine tas i bruk da spennet kan være stort. I kommognitive studier ser en derfor som oftest på situasjoner der *når* i en rutine avviker fra dens normale bruk (Sfard, 2008). Å undersøke hvilke metaregler som kan ha vært styrende for valg av rutiner er derfor et av de sentrale målene innenfor forskning basert på kommognisjon.

Lavie et al. (2018) har videreutviklet rutinebegrepet til Sfard etter å ha observert at *når* og *hvordan* ikke var tydelige nok begreper til å kunne forklare alle funnene i sin forskning. De hevder at repetisjon er essensen i læring, og at alt vi gjør involverer rutiner. Oppgaver løses ved å repetere noe som vi har gjort eller sett tidligere. Kilden til en persons rutiner er det man har sett eller opplevd at andre har gjort før (Lavie et al., 2018), og rutinene må individualiseres gjennom å danne seg et bilde over når og hvordan rutinene tas i bruk. For å beskrive rutiner har Lavie et al. (2018) innført en rekke nye begreper som forklarer bruken på en mer konsistent måte. Begrepene kan sees på som en utdyping av *hvordan* og *når* fra Sfards forskning. I vår tekst har vi valgt å oversette begrepene til norsk, men vi vil skrive det opprinnelige begrepet i parentes når det presenteres for første gang. Lavie et al. (2018) definerer i sitt rammeverk enhver situasjon hvor en person vurderer at det kreves at han må handle som en *oppgavesituasjon (task situation).* En oppgavesituasjon kan for eksempel være en modelleringsoppgave, og er i undervisningssammenheng ofte en invitasjon til en bestemt handling initiert av læreren. Når en person befinner seg i en oppgavesituasjon kan personen handle ut fra tidligere erfaringer som personen tolker er likt nok til at handlingene brukt i den situasjonen også kan benyttes i nåværende situasjon. Disse tidligere erfaringene kalles *fortilfeller (precedents).* Tolkingen kan være en bevisst handling, men valget vil ofte gjøres i underbevisstheten (Lavie et al. 2018).

Prosessen med å velge fra tidligere opplevelser ville vært umulig uten å ha et visst utvalg av opplevelser å velge fra. Dette utvalget av opplevelser kaller Lavie et al. (2018) for et *fortilfelle søkeområde (precedent search space,* heretter kalt FSO). FSO er ofte knyttet opp mot miljøet og situasjonen en befinner seg i. For eksempel vil erfaringer fra tidligere matematikkundervisning synes relevante for elevene i arbeid med matematikk på skolen. Erfaringer fra andre situasjoner, som eksempelvis handling på butikken, knyttes sjelden opp mot elevens FSO i klasserommet. I dagliglivet kan man observere den samme effekten ved at man ikke gjenkjenner en person man har snakket med tidligere hvis man møter dem i en kontekst hvor man ikke forventer å treffe personen (Lavie et al., 2018). På samme måte kan det for elevene i vår undersøkelse være vanskelig å ta i bruk kjente regnemetoder og fremgangsmåter i den nye situasjonen de er i når FSO for situasjonen ikke inneholder noen kobling til det de kjenner fra før. Denne koblingen gjøres ved hjelp av *identifiserbare fortilfeller (precedent identifiers)* som er faktorer i en situasjon som gjør at en eller flere tidligere opplevelser vurderes som relevante i den nåværende situasjonen. I situasjoner hvor elever mangler eller identifiserer feil faktorer i en situasjon kan det føre til at elevene velger fortilfeller som ikke er hensiktsmessige, og dermed støter på utfordringer i arbeidet. Et eksempel på dette kan være når man skal rygge med tilhenger. Når man rygger med bil vrir man rattet i samme retning som man vil at bilen skal gå, mens man med tilhenger må vri rattet motsatt retning. Uten erfaring fra rygging med tilhenger vil det være mulig at man identifiserer situasjonen som tilstrekkelig lik, og tar i bruk teknikker fra ordinær bilkjøring. Elevenes første møte med modellering kan være en slik situasjon hvor de velger fortilfeller som ikke er hensiktsmessige, og som da kan skape hindringer for dem i arbeidet. Prosessen beskrevet i avsnittet over er således styrende for elevens vurderinger i å velge metaregler for når og hvordan en rutine tas i bruk.

Rutiner deles inn i to ulike kategorier avhengig av hvilket mål rutinen har. Kategoriene er *ritualer* og *utforsking.* Ritualer er rutiner som gjøres for å tilfredsstille andre, for eksempel læreren. I ritualer ser eleven på målet med oppgaven som å utføre en bestemt handling, og handlingen blir dermed *prosessorientert*. Dette kan være når elever adderer to tall ved å sette dem under hverandre. I denne situasjonen vil det være utførelsen av å stille tallene under hverandre og regne ut som ses på som målet, ikke hva svaret forteller oss. Når elevene møter en ny diskurs kan elevene bli med i diskursen ved bruk av ritualer. Etter hvert vil imidlertid rutinene gjennomgå en de-ritualisering og kan bli til utforskinger. Utforskinger betyr at man ikke lenger har fokus på hvordan oppgaven løses, men på produktet som arbeidet med oppgaven resulterer i (Lavie et al., 2018). Denne typen rutiner kalles også *produktorienterte*. Å addere to tall kan eksempelvis være en utforsking hvis målet er å konstruere et nytt narrativ om tallene. For eksempel vil 151+52=203 gi oss en matematisk sannhet i at objektene 151 og 52 til sammen blir 203.

Ut fra Sfard (2008) og Lavie et al. (2018) vil det ikke være uventet hvis elever i vår studie tar i bruk ritualiserte rutiner i sin deltakelse. Diskursen er ny for dem, og begge påpeker at første skritt i å delta i en ny diskurs ofte gjøres gjennom å utføre handlinger gjennom ritualisert deltakelse. Elevenes rutiner kan i så måte bli en hindring for elevene i akkurat denne situasjonen.

2.1.4 Kommognitiv konflikt

Som tidligere forklart regnes læring i matematikk som en endring i diskursen (Sfard 2008). Sfard (2008) skiller da mellom to nivåer av læring. Læring kan skje ved å utvide diskursen elevene er i ved å legge til ord og begreper, konstruere nye rutiner og produsere nye, godkjente narrativer. Dette kalles læring på objektnivå. Den andre måten er læring på metanivå hvor man tar utgangspunkt i noe kjent for elevene og gjøre det på en annen, ukjent måte. Et eksempel på dette kan være arbeid med addisjon og negative tall. Ved addisjon av to positive tall kan elevene tenke at summen alltid blir større. En elev som møter addisjon med negative tall, vil måtte endre denne tanken til at summen også kan bli mindre. Addisjon blir dermed utvidet med noen flere regler når negative tall inkluderes. Dette er eksempler på nye metaregler, og forteller elevene noe om hva som er mulig innenfor en diskurs. I vår studie skal elevene løse en tilsynelatende gjenkjennbar tekstoppgave, men som inneholder andre metaregler på hvordan den kan løses enn hva elevene er vant til fra tidligere. Siden den nye diskursen er styrt av andre metaregler enn det elevene har opplevd tidligere, vil det kunne medføre hindringer nettopp fordi modellering har noen andre metaregler. I en situasjon hvor det blir en konflikt mellom ulike metaregler kan det oppstå det Sfard (2008) kaller en *kommognitiv konflikt*. Konflikten oppstår vanligvis ved at det handles ut fra motstridende narrativer, slik som eksempelet hvor det blir en konflikt rundt narrativet «addisjon blir alltid større» når negative tall introduseres.

Den største muligheten for læring på metanivå er når eleven møter en kommognitiv konflikt (Sfard, 2008). Det er imidlertid lite sannsynlig at elever på egen hånd setter i gang en endring i egne metadiskursive regler (Sfard, 2008). Elevene handler ofte etter metaregler som de kjenner til og som virker passende i situasjonen. Det er ikke før elevene oppdager at det vil være nødvendig med en endring i reglene for å kunne løse et problem at behovet for nye metaregler oppstår. Samtidig kan en kommognitiv konflikt også være en hindring med tanke på læring. For det første er det en fare for at en kommognitiv konflikt oppfattes som en ulik oppfattelse av fakta og til slutt hindrer videre kommunikasjon (Sfard, 2007). I arbeid i et fellesskap kan dette føre til at en mister motivasjonen til å jobbe sammen mot samme mål. For det andre, for at barn skal gjennomføre komplekse endringer i metaregler må de ha en god grunn til å gjøre dette. Den beste motivatoren for endring er en bevissthet om at endringen er en nødvendighet, eller i det minste medfører en gevinst (Sfard, 2007). Men samtidig er det vanskelig å oppleve verdien i en diskursiv endring uten å ha fått en viss erfaring innenfor den nye diskursen. Siden elevene i vår studie møter en modelleringsoppgave for første gang har de ikke denne erfaringen. Det kan bety at de møter på nye metaregler som kan være utfordrende å ta i bruk.

2.1.5 Ord

Som omtalt i underkapitlet om diskurs kjennetegnes diskurser blant annet av hvordan *ord* blir brukt. Et ord som i en hverdagslig diskurs har én betydning kan i en matematisk diskurs ha en mer definert betydning. Et eksempel på dette kan være ordet faktor som i en matematisk diskurs kan bety tallene som multipliseres i multiplikasjon, mens det i andre diskurser kan bety en bestanddel eller noe som er betydningsfullt i en sammenheng. Der ord i andre diskurser beskriver fysiske gjenstander som kan sees vil ord i matematiske diskurser som oftest kun beskrive representasjoner av ordene (Sfard, 2008). En av vanskelighetene i matematiske diskurser er når deltakerne bruker samme ordet på ulike måter (Sfard, 2008). Et slikt avvik kan føre til en kommognitiv konflikt, hvor det blir vanskelig å kommunisere om matematikken.

Bruken av ord er personlig. Det medfører at elever kan gi ulikt innhold til det samme ordet. Det kan være vanskelig å vite i detalj hvilket innhold en elev gir til et bestemt ord, men man kan observere hvordan ordene brukes (Sfard, 2008). Ved å studere hvordan samtalepartnerne bruker ord kan man gjøre seg opp en mening om hvorfor hindringer oppstår. I en modelleringsoppgave blir elevene ofte satt inn i en virkelig kontekst ved å lese en informativ tekst. Teksten kan inneholde flere ord som elevene kan oppfatte ulikt. Det er derfor viktig at elevene er bevisste på at ord kan ha ulike betydninger og at det har en påvirkning på resultatet. For eksempel kan et hverdagslig ord som «mesteparten» bety så og si alt, eller at det er rett over halvparten. Mangel på slike presiseringer kan føre til at oppgaven blir vanskelig å løse, eller at elevene ikke klarer å jobbe mot samme mål.

I vår studie gir bruken av kommognisjon oss muligheten til å analysere og drøfte hva som skjedde ut fra et deltakerperspektiv. Det vil si at vi, ut ifra begreper hentet fra kommognisjon, beskriver hvorfor hindringen elevene møter på kan ha oppstått. Det kommognitive rammeverket blir dermed et analytisk rammeverk med begreper som kan gi oss detaljerte beskrivelser av hindringene i arbeid med modellering. Det analytiske fokuset i kommognisjon er på *hva* elevene gjør og *hvordan* de gjør det. Fokuset på hva og hvordan er relevant i vår studie fordi det gir en beskrivelse på hva som var ønskelig at elevene hadde gjort i situasjonene, sett opp mot hvordan de faktisk arbeidet. Som et resultat av at vi ser på hindringer vil det være en differanse mellom hva og hvordan i våre funn. Elevene vil ikke ha gjort slik det var tiltenkt i modelleringsdiskursen. Denne differansen vil illustrere hindringer i modelleringsdiskursen som vi forklarer med bruk av begreper fra kommognisjon. Hindringene vil beskrives ut fra kommognitive begreper som omhandler diskurs, narrativer, kommognitiv konflikt, ord og rutiner. Under rutiner tar vi også i bruk rammeverket til Lavie et al. (2018) for å gi en grundigere beskrivelse med bruk av begrepene oppgavesituasjon, fortilfeller, FSO og identifiserbare fortilfeller. I det neste kapitlet gir vi en forklaring på sentrale aspekter ved matematisk modellering som sammen med kommognisjon danner grunnlag for å besvare vårt forskningsspørsmål.

2.2 Modellering

Begrepet *matematisk modellering* betyr enkelt forklart å ta et virkelighetsnært problem og løse dette ved hjelp av å lage en matematisk modell av situasjonen. Innenfor matematisk modellering er det sentrale å lage en matematisk fremstilling av virkeligheten, dette kalles modellen. I skolesammenheng gjennomføres som oftest modellering som gruppearbeid ved at elevene jobber sammen og drar nytte av felles arbeid og tankegang (Stillman et al., 2015). Modellering innebærer ikke å lage en fysisk modell av noe matematisk, selv om ofte ordet modell knyttes til en fysisk fremstilling av noe. Vi kommer gjennom teksten til å bruke begrepene matematisk modellering og modellering om hverandre, men det vil i samtlige tilfeller være matematisk modellering vi omtaler.

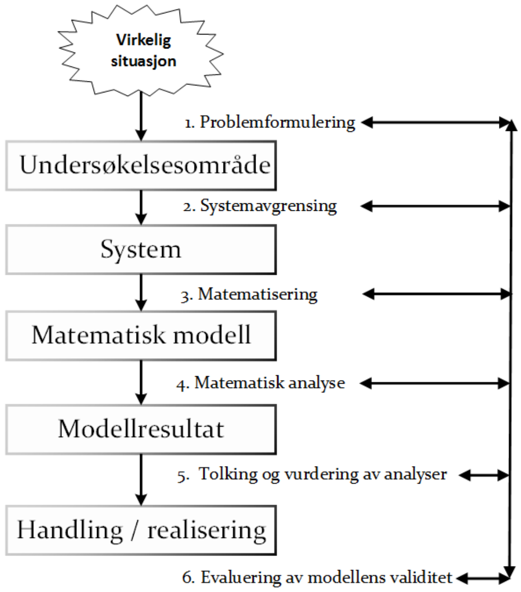
2.2.1 Modellering som gren innen matematikk

Det finnes flere definisjoner og tilnærminger til matematisk modellering. Blomhøj og Jensen (2003) definerer matematisk modellering som en prosess der virkeligheten blir beskrevet gjennom et matematisk språk. Blum og Ferri (2009) forklarer at matematisk modellering er prosessen med å oversette mellom den matematiske verden og den virkelige verden i begge retninger. Begge disse definisjonene beskriver en prosess hvor matematikken er knyttet sterkt sammen med virkeligheten. Prosessen med å løse virkelige problemer ved hjelp av matematikk kan beskrives gjennom en modelleringssyklus (e.g. Blomhøj & Jensen, 2003; Blum, 2015). Niss et al. (2007) forklarer at syklusen består av flere prosesser som foregår innenfor den virkelige verden og den matematiske verden. Den virkelige verden er ofte brukt til å beskrive verden utenfor matematikken. Modelleringssyklusen starter som oftest i den virkelige verden hvor man identifiserer relevante objekter, relasjoner og fenomener som videre skal analyseres. Disse objektene, relasjonene og fenomenene oversettes til den matematiske verden. I den matematiske verden bearbeides disse, før resultatene oversettes til den virkelige verden igjen, og vurderer om resultatene løser problemet.

Ferdigheter innenfor ovennevnte områder er svært sentrale i arbeidslivet. Stillman et al. (2020) presenterer i sin artikkel en oversikt over arbeidslivets behov for personer med matematisk bakgrunn. Av det totale behovet er det kun ca. 4% som utfører rent matematisk arbeid. De resterende, som består av for eksempel biologer, kjemikere og ingeniører, utgjør 96 prosent av denne gruppen. Dette er yrker som i all hovedsak vil arbeide med anvendt matematikk og utarbeidelse av modeller. Modellering kan i så måte sees på som et av de viktigste aspektene innen matematikken sett i et samfunnsperspektiv.

2.2.2 Modelleringssyklus

Blomhøj og Jensen (2003) beskriver matematisk modellering som seks prosesser man må gjennom for å presentere en fullverdig matematisk modell. De seks prosessene beskriver overgangen mellom seks steg i modelleringssyklusen. I figur 2.1 er prosessene nummerert med 1-6, mens stegene er satt inn i bokser. Etter å ha fullført en prosess kommer en til neste steg. Det er viktig å presisere at det er en modell av en ideell matematisk modelleringsprosess, som først og fremst fokuserer på strukturen i prosessen. Blomhøj og Jensen (2003) poengterer at modelleringsprosessen er en sirkulær prosess, hvor det er mulig å hoppe frem og tilbake mellom stegene. Ofte vil det være nødvendig å repetere enkelte deler av modelleringsprosessen flere ganger før man kommer i mål. Det er ønskelig at elevene skal være i stand til å fullføre modelleringssyklusen selvstendig i en gitt kontekst (Blomhøj & Jensen, 2003). Modellen til Blomhøj og Jensen (2003) kan bli brukt som et verktøy for å analysere matematisk modellering.



Figur 2.1: Modelleringssyklusen

For å utdype modelleringssyklusen har vi flettet inn deler av rammeverket til Galbraith og Stillman (2006). Galbraith og Stillman (2006) gjennomførte en studie med elever i alderen 14-15 år hvor de så på overgangen mellom de ulike stegene i en modelleringssyklus, og definert underprosesser som kan skape hindringer hvis de ikke gjennomføres. Vi valgte å utvide Blomhøj og Jensen (2003) med Galbraith og Stillman (2006) fordi prosessene er brutt ned til delprosesser i sistnevnte. Samtidig gir Blomhøj og Jensens (2003) modell etter vår mening en tydeligere beskrivelse av modelleringsprosessen som helhet. Vi har valgt bort noen av underprosessene fra Galbraith og Stillman (2006) da deres studie ble gjennomført med eldre elever, og disse underprosessene etter vår vurdering ikke er relevante i vår studie. Punktene fra rammeverket som er utelatt omhandler i hovedsak bruk av dynamisk graftegner. Vi har også endret overskriftene på modelleringsprosessene som Galbraith og Stillman (2006) bruker slik at de korresponderer med overskriftene brukt i Blomhøj og Jensen (2003). Dette for å gjøre det enklere for leseren.

Vi vil under forklare hva Blomhøj og Jensen (2003) og Galbraith og Stillman (2006) legger i de ulike prosessene. Prosessene illustreres i tabell 2.1-2.6. Til slutt eksemplifiserer vi prosessen ved å se på hvordan en syklus kunne blitt gjennomført med å lage en matematisk modell av hvordan man kan beregne pris på bilforsikring. Vårt kombinerte rammeverk er nummerert med to siffer adskilt av punktum, for eksempel 2.3. Det første sifferet er en beskrivelse av hovedprosessen fra Blomhøj og Jenssen (2003), mens det andre sifferet forteller om den aktuelle delprosessen hentet fra Galbraith og Stillman (2006).

2.2.2.1 Problemformulering

Første steg i modelleringsarbeidet er en virkelig situasjon som presenteres. Man setter seg inn i en meningsfull kontekst hvor det er en oppgave eller problem som skal løses. Ut fra den virkelige situasjonen må man formulere et problem basert på den virkelige situasjonen som skal modelleres (1). Det å definere et problem ut fra den virkelige situasjonen kan være utfordrende, men bidrar til å smale inn undersøkelsesområdet man skal jobbe videre med (Blomhøj & Jensen, 2003). I enkelte oppgaver, slik som den vi har brukt i vår undersøkelse, er problemformuleringen gitt i oppgaven, noe som gir et fokusområde med en gang.

1. Problemformulering		
Nr	**Delprosess**	**Handling**
1.1	Avklare problemstillingen	Diskutere problemsituasjonen og konteksten. Formulere et problem

Tabell 2.1: Problemformulering

I vårt eksempel skal vi se på hvordan man kunne utarbeidet en modell av bilforsikring. På punkt 1.1 skal man avklare problemstillingen. I dette tilfellet kunne det vært å komme frem til at man skal finne ut av pris på forsikring av biler.

2.2.2.2 Systemavgrensing

Når man har et undersøkelsesområde må man gjennom en prosess hvor systemet avgrenses (2). Det vil si at man velger ut objekter som påvirker undersøkelsesområdet, også kalt strategiske objekter. Objektene må systematiseres slik at man får en oversikt over dem og for å se hvordan objektene påvirker hverandre. Man må også se på hvordan de strategiske objektene kan brukes for å komme frem til en løsning. I denne fasen blir problemet forenklet, strukturert og gjort mer presist.

2. Systemavgrensing		
Nr.	**Delprosess**	**Handling**
2.1	Gjøre forenklende antakelser	Bestemme noen forutsetninger som gjør oppgaven mulig å løse
2.2	Identifisere strategiske objekter	Definere hvilke objekter som er avgjørende for å kunne løse oppgaven
2.3	Spesifisere de riktige elementene i strategiske objekter	Hvordan kan de strategiske objektene brukes for å komme frem til løsningen

Tabell 2.2: Systemavgrensing

Forenklende antakelser i situasjonen med bilforsikring kunne vært at vi forholder oss til årspris på bilen, at vi kun tilbyr kaskoforsikring, og at det ikke gis noen bonus for skadefri kjøring (2.1). De strategiske objektene (2.2) innenfor bilforsikring kan være for eksempel bilens verdi på forsikringstidspunktet, antall år bilen har vært forsikret i selskapet, sjåførens alder og årlig kjørelengde. Avslutningsvis i denne prosessen skal man vurdere hvordan de strategiske objektene henger sammen og kan brukes til å finne en løsning (2.3). I eksemplet vil det være å bestemme at prisen på forsikringen henger sammen med bilens verdi, at prisen på forsikringen går ned etter hvert som bilen blir eldre, at unge sjåfører må betale mer enn eldre sjåfører og at bilens årlige kjørelengde vil være med på å bestemme hva forsikringstakeren må betale.

2.2.2.3 Matematisering

Med en gang man har fått et system er det mulig å matematisere systemet (3). Matematiseringen omformer systemet til en matematisk modell som inneholder visse utregninger. En oversetter objektene og relasjonene man tidligere har funnet til et matematisk språk og får en matematisk modell av systemet (Blomhøj & Jensen, 2003). Man har da dannet seg et matematisk system.

3.	**Matematisering**	
Nr	**Delprosess**	**Handling**
3.1	Identifisere hvilke faktorer som skal være med i den matematiske modellen	Definere hvilke faktorer som er statiske og hvilke som er variable
3.2	Representere objektene matematisk slik at en formel kan brukes	Finne ut av hvordan man matematisk kan representere objektene
3.3	Gjøre relevante matematiske antakelser og velge strategi	Bestemme hva slags matematikk som kan brukes for å løse problemet Velge metode for utregning

Tabell 2.3: Matematisering

I en matematisk modell av en bilforsikring vil bilens pris på forsikringstidspunktet være en variabel faktor i modellen. Antall år siden bilen ble taksert av selskapet vil forandre seg fra år til år. Sjåførens alder og bilens årlige kjørelengde vil også være variable faktorer i modellen. Bilens årlige verdireduksjon og hvor stor andel av bilens verdi som må betales i forsikringssum før justeringer vil være statiske faktorer i modellen (3.1). På punkt 3.2 må man definere hvordan faktorene fra 3.1 kan representeres matematisk. Bilens verdi oppgis i kroner. Grunnprisen på forsikringen kan være for eksempel 4% av bilens verdi. Antall år bilen har vært forsikret i selskapet oppgis i hele år og starter på null, og bilens verdireduksjon oppgis til 10 % pr. år. Sjåførens alder kan defineres ut fra om sjåføren er over eller under 25 år, hvor forsikringstakere som har en alder under 25 år må betale for eksempel 20% ekstra. Kjørelengden oppgis i kjørte km og kan eksempelvis ta utgangspunkt i over eller under 10000 km, hvor prisen for hver 1000 km. over 10000 koster 1% ekstra. Avslutningsvis i matematiseringen må man gjøre vurderinger på hvordan faktorene kan brukes for å komme frem til et resultat (3.3). I eksemplet vårt kan man finne ut av at forsikringsprisen er avhengig av hva bilen kostet, multiplisert med justerende faktorer for førers alder, kjørelengde, verdireduksjon og grunnprisen.

2.2.2.4 Matematisk analyse

Videre må man bruke det matematiske systemet til å gjøre matematiske analyser (4). Det vil si at en gjør matematiske utregninger i modellen som kan føre til justeringer av parameterne i modellen, og videre produsere resultater ut fra den matematiske modellen (Blomhøj & Jensen, 2003).

4. Matematisk analyse		
Nr	**Delprosess**	**Handling**
4.1	Anvende passende matematiske strategi	Ta i bruk matematikken i tråd med valgene gjort i punkt 2
4.2	Skriftliggjøring av den matematiske modellen	Fremstille modellen eller resultatene skriftlig eller ved hjelp av teknologi
4.3	Søker flere resultater som løsningene kan tolkes ut fra	Forstår oppgavens kompleksitet og bruker valgt fremgangsmåte til å undersøke flere utfall for å få oversikt over situasjonen Vurderer oppgavens avgrensninger for å se om den kan løses på andre måter

Tabell 2.4: Matematisk analyse

Som en passende matematisk strategi (4.1) for å løse problemet kan man for eksempel anvende en funksjon eller utregninger i Excel. Som funksjon kan fremstilles på følgende måte (4.2):

$f(\text{årspris}) = \text{pris}_{\text{takst}} \cdot \text{forsikret}_{\text{år}} \cdot \text{alder}_{\text{under25}} \cdot \text{kjørelengde}_{\text{over10000}} \cdot 0{,}04$

Eksempel på hvordan funksjonen hadde sett ut med bilpris på 500000 som hadde vært forsikret i selskapet i 3 år, med sjåfør under 25 år og kjørelengde 12000.

$\text{Årspris} = 500000 \cdot 0{,}90^3 \cdot 1{,}2 \cdot (1{,}02) \cdot 0{,}04 = 17845{,}92$ kr.

Figur 2.2 viser hvordan forsikringen kunne vært fremstilt i Excel:

	A	B
1		
2	Pris bil	500000
3	Kjørelengde	12000
4	Forsikret år	3
5	Alder u 25	Ja
6	**Årspris**	**=(B2*((0,9)^B4))*((1+((B3-10000)/1000)*0,01))*(HVIS(B5="Ja";1,2;1))*0,04**

Figur 2.2: Eksempel på utregning

Etter å ha fremstilt modellen skriftlig kan man oppdage at mange faktorer i modellen kan endres for å få annerledes resultater (4.3). Eksempelvis kunne man gjort seg vurderingen at 1% økning i forsikringens pris pr. kjørte 1000 km var for lite, og en kunne så gått inn og justert modellen med en annen prosentsats.

2.2.2.5 Tolking og vurdering av analyser

For å kunne svare på problemstillingen må resultatene hentet fra den matematiske modellen bli tolket og validert opp mot den virkelige situasjonen (5) (Blomhøj & Jensen, 2003).

5. Tolking og vurdering av analyser		
Nr	**Delprosess**	**Handling**
5.1	Identifisere matematiske resultater ut fra virkelige motstykker	Knytte svarene sine mot den virkelige situasjonen
5.2	Kontekstualisere foreløpige og endelige matematiske resultater ut fra situasjonen i den virkelige verden	Sjekke resultater opp mot kontekst og kontrollere at resultatene gir mening
5.3	Komme med argumenter for å begrunne tolkninger	Begrunne hvorfor resultatet de har funnet er troverdig ut fra konteksten, eller om det trengs videre arbeid
5.4	Gjøre endringer i tidligere begrensninger for å gi rom for nye resultater som støtter en ny tolkning	Vurdere om tidligere avgrensninger kan endres for å oppnå andre resultater
5.5	Se behovet for å involvere matematikk før man trekker en konklusjon	Konkluderer ut fra matematiske beregninger, ikke ut fra hverdagslige betraktninger

Tabell 2.5: Tolking og vurdering av analyser

På punkt 5.1 skal man vurdere om svaret gir en løsning på den virkelige situasjonen. Deretter skal en sjekke om svaret gir mening i konteksten (5.2). I eksemplet med bilforsikring kunne det vært å vurdere om prisen en får ut kan være en realistisk sum å betale for en bilforsikring. På 5.3 skal man begrunne om resultatene er dekkende for situasjonen eller om de må jobbes mer med. Punkt 5.4 kan man for eksempel vurdere om det er rettferdig at det er dyrere med forsikring for personer under 25 år, eller om dette er en faktor man vil ta bort. Avslutningsvis innenfor tolking og vurdering av analyser må man lage en konklusjon basert på matematiske funn (5.5).

2.2.2.6 Evaluering av modellens validitet

Til slutt må validiteten til hele modelleringsprosessen bli evaluert (6). Det inkluderer å stille spørsmålstegn rundt omfanget og gyldigheten av å bruke den matematiske modellen i andre sammenhenger (Blomhøj & Jensen, 2003).

6. Evaluering av modellens validitet		
Nr	**Delprosess**	**Handling**
6.1	Forene uventede midlertidige løsninger med den virkelige situasjonen	Revurdere midlertidige resultater som åpenbart ikke stemmer
6.2	Vurdere virkelige/reelle konsekvenser av det matematiske resultatet	Vurdere om det matematiske resultatet gir mening i den virkelige verden
6.3	Innse at det er en grense for justering av begrensinger som kan gjøres for å få en gyldig løsning	Vurdere det mulige utfallsrommet som er gyldig innenfor oppgavens begrensninger
6.4	Vurdere tilstrekkeligheten/omfanget av den matematiske modellen	Vurdere om modellen gir alle svar på det virkelige problemet

Tabell 2.6: Evaluering av modellens validitet

Prosess 6.1 er en evaluering som ofte gjøres underveis, hvis en i den matematiske analysen får svar som åpenbart ikke gir mening. For eksempel hvis forsikringsprisen hadde blitt høyere enn bilens verdi vil løsningen utvilsomt være feil. Når man har en modell som en føler fungerer skal en se det matematiske resultatet opp mot den virkelige verden. I vurderingen av de reelle konsekvensene av resultatet (6.2) kan man for eksempel se at resultatene gir forholdsvis lite utslag på antall kjørte kilometer, og vurdere om denne faktoren burde vært endret for å differensiere prisen i større grad. Man kunne også vurdert å legge til en bonus for skadefri kjøring. På punkt 6.3 skal man se på hvilket utfallsrom som vil være gyldig for modellen. For eksempel ville en forsikring som har løpt i 100 år gi en forsikringspris på 0 kr. Avslutningsvis skal man vurdere om modellen gir alle svar på det virkelige problemet. I problemet med bilforsikring kunne dette vært om modellen er bærekraftig for et forsikringsselskap ut fra forventede utbetalinger sett i sammenheng med ulykkesstatistikk.

For å svare på forskningsspørsmålet vårt vil modelleringssyklusen kunne hjelpe oss med å beskrive data med større nøyaktighet. Modelleringssyklusen til Blomhøj og Jensen (2003) blir brukt for å gi en helhetlig oversikt over hvor elevene er i syklusen. Syklusen gir også tydelige beskrivelser av målet med hver prosess. Ut fra figur 2.1 kan vi da beskrive hvilken av de seks prosessene elevene er i når hindringen oppstår. Syklusen gir oss også grunnlag for å forklare målet med prosessen, altså hva elevene skulle gjort. Ved hjelp av rammeverket til Galbraith og Stillman (2006) kan vi beskrive hva elevene faktisk gjør i den aktuelle situasjonen de befinner seg i, brutt ned til delprosessene fra tabell 2.1-2.6. Det gjør vi for å få frem mer nøyaktig hvor og hvordan hindringene oppstår hos elevene. Alle prosessene er også samlet i tabell 3.7 for lettere å kunne sees i sammenheng.

Videre i dette kapitlet ser vi nærmere på hvilken plass modellering har i skolen og hva modellering kan tilføre matematikkfaget.

2.2.3 Modellering i skolen

Matematikk i skolen har utviklet seg mye siden første læreplan i 1939 (NOU, 2014:7). Der man tidligere hadde behov for å kunne løse komplekse utregninger for hånd, har vi i dag andre redskaper for å hjelpe oss med dette. I dagens teknologiske samfunn er det kanskje ikke like viktig å kunne utføre komplekse utregninger som det var tidligere, men heller skape mening til komplekse systemer (English, 2006). Som omtalt tidligere i avsnittet om modellering som gren innen matematikk er det en liten andel av personer med behov for matematikk i sitt arbeid som jobber med ren matematikk. Allikevel har læreplanene i stor grad basert seg på tanken at elever skal jobbe med matematikk på et akademisk nivå (Stillman et al., 2020). Når man da ser at en så liten del av de som anvender matematikk i sitt yrke har behov for ferdigheter i akademisk matematikk virker det lite nyttig at samtlige elever i et skoleløp skal følge denne praksisen.

I læreplanen har modellering blitt mye mer sentralt enn det har vært i tidligere læreplaner. Det kan synes som at samfunnets behov i større grad har påvirket læreplanen og dens innhold. Eksempelvis står det under «fagrelevans og sentrale verdier i matematikk» at «Matematikk er et sentralt fag for å kunne forstå mønstre og sammenhenger i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvendelser.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). I læreplan for matematikk er det også utviklet seks kjerneelement som beskriver hvilken matematisk kompetanse elevene skal arbeide med i grunnskoleutdanningen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Et av kjerneelementene heter «modellering og anvendelser» hvor det står at «elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk blir brukt for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2).

Stillman et al. (2020) mener at matematisk modellering er en viktig brikke for å oppnå flere av målene i matematikkopplæringen. Gjennom modelleringsoppgaver kan elevene oppleve at matematikken ikke er så endelig som den kan oppfattes å være, men at det er flere vilkår som må tas hensyn til og som spiller inn på resultatet (Stillman et al., 2020). Stillman et al. (2020) legger vekt på to felles mål for utdanning generelt, og som kan brukes spesifikt i matematikkopplæringen. Det første målet er at matematikk må utdanne elevene til å bli kompetente beslutningstakere. Det vil si at elever lærer matematikk for å hjelpe dem med å resonnere slik at de kan ta gode beslutninger og være kritiske medlemmer av samfunnet. Det andre målet baserer seg på ideen om at utdannelsen skal møte behovene som finnes i samfunnet. For å oppnå disse målene trekker de frem modellering som en sentral faktor (Stillman et al., 2020). Lesh (2003) hevder at det viktigste målet i matematikk bør inneholde en utvikling av fleksible modeller som beskriver og forklarer viktige matematiske systemer. Det vil si at elevene kan beskrive ulike situasjoner matematisk gjennom en modell de selv har utviklet. Lesh (2003) argumenterer med det for matematisk modellering hvor man ser mønster og sammenhenger, i stedet for å kun fokusere på matematikk som å gjøre konstruksjoner og utregninger.

Det finnes to hovedretninger innenfor modellering i skolen. I vår studie har vi tatt i bruk retningen som kalles *Model eliciting activities* (Lesh et al., 2000), eller modellfremkallende aktiviteter på norsk. Modellfremkallende aktiviteter er oppgaver hvor elevene jobber med et virkelighetsnært problem og tolker den matematiske situasjonen gjennom å lage en matematisk modell (Lesh et al., 2000). Oppgavene er ofte åpne og har flere ulike innfallsvinkler og løsningsmetoder. Modellfremkallende aktiviteter kan brukes med mål om å lære en bestemt matematisk kunnskap, men kan også brukes som et redskap for å trene ferdigheter i matematisk modellering i seg selv. Modellfremkallende aktiviteter kan ha ulik varighet, og noen oppgaver kan gjennomføres på under en time. Men aktivitetene kan også strekke seg over flere dager i mer komplekse problemer. Felles for aktivitetene er at de kan ses på som enkeltstående oppgaver.

Den andre retningen innenfor modellering er fremvoksende modeller. Fremvoksende modeller har mye av det samme innholdet som modellfremkallende aktiviteter, men fokuserer på en langsiktig læringsprosess (Gravemeijer, 2007). Et tydelig eksempel på bruk av fremvoksende modeller finnes i den nederlandske skolen under navnet *Realistic Mathematic Education*, ofte bare kalt RME. RME er en didaktisk retning med fokus på å løse åpne problemer gjennom kreativitet, modellering, samarbeid og samtale (Van den Heuvel-Panhuizen, 2020). Det som i hovedsak skiller RME fra modellfremkallende aktiviteter er at RME er en teori om hvordan man legger opp all matematikkundervisning, ikke bare et av mange ulike redskaper for å lære matematikk. Modellering innenfor RME kan derfor ses på som en egen didaktisk retning.

Bakgrunnen for at vi har valgt å fokusere på modellfremkallende aktiviteter i vår studie er at denne formen for modellering vil være et naturlig startsted for norske lærere som skal ta i bruk modellering i sine klasserom. RME er en didaktisk retning som vil kreve store endringer i hvordan vi tenker om læring og undervisning matematikk i skolen, og er en tradisjon som vil være meget tidkrevende å implementere i egen undervisning. Modellfremkallende aktiviteter synes å være nært knyttet til modellering slik det beskrives i kjerneelementene i gjeldende læreplan, og vil derfor være relevant for mange norske lærere å få utvidet sin kunnskap om. I neste delkapittel ser vi nærmere på noen prinsipper som kan legges til grunn ved utforming av modelleringsoppgaver.

2.2.4 Utforming av modelleringsoppgaver

For at modelleringsoppgaver skal inneha egenskapene som trengs for å utvikle elevenes modelleringsferdigheter er det viktig at oppgavene er godt utformet. Lesh et al. (2000) har utviklet seks prinsipper for å lage produktive modelleringsoppgaver som legger til rette for en effektiv undervisning, muliggjør utviklingen av matematiske begreper og som oppmuntrer til bruk av et vidt spekter matematiske ferdigheter.

Prinsipp én er *modellkonstruksjonsprinsippet*. Det betyr at det skal være et tydelig behov for å skape en modell gjennom grundig beskrivelse, forklaring, manipulasjon av situasjonen eller å finne tilnærminger til å forutse utfall. Der tradisjonelle tekstproblemer i mattebøker ofte handler om å skape en kontekst til matematiske utregninger er modellering omtrent det eksakt motsatte (Lesh et al., 2000). Fokuset må være på å gi mening til underliggende mønster i stedet for å benytte seg av overflateinformasjon.

Prinsipp to er *prinsippet om meningsfullhet.* I modelleringsoppgaver er det viktig at situasjonen oppleves som reell, og at den faktisk kunne ha funnet sted. Tanken er at elevene skal oppmuntres til å gi mening til situasjonen ved å utvide sine egne, personlige erfaringer og kunnskap. Situasjonen trenger ikke å være reell i ordets rette betydning, men være realistisk nok til at eleven oppfatter den som at den kunne ha funnet sted.

Prinsipp tre er *selvevalueringsprinsippet.* For at en oppgave skal være selvevaluerende må det være tydelig for elevene at det er nyttig å undersøke alternative svar. Det bør også være mulig å vurdere på hvilket tidspunkt en har kommet frem til svar som er gode nok til å ha besvart oppgaven. For å følge dette prinsippet kan det være nyttig å eksplisitt forklare hvilken hensikt deres svar har.

Prinsipp fire er *prinsippet om modelldokumentasjon.* Svaret elevene gir skal kunne belyse hvordan de har tenkt om situasjonen. Områder som berøres her er hvilke rammer som er definert, hva som er målet, hvilke mulige veier som finnes mot løsningen. Hvilke typer systemer har de tatt i bruk? Besvarelsen bør gi oss indikasjoner på hvilken sti som har blitt fulgt for å komme frem til løsningen.

Prinsipp fem er *generaliseringsprinsippet.* Med generalisering menes at modellen som lages skal kunne deles og brukes i andre situasjoner som ikke er like med den opprinnelige situasjonen. Med andre ord er det ønskelig at modellen som tas i bruk i den spesifikke oppgaven også skal ha en overføringsverdi til lignende situasjoner ved hjelp av enkle tilpasninger.

Prinsipp seks er *prinsippet om en effektiv prototype.* Løsningen skal kunne brukes som en prototype, eller en metafor, for å tolke liknende situasjoner i ettertid. For at en skal lykkes med dette bør løsningen være så enkel og oversiktlig som mulig. Enkle, effektive modeller har vist seg å være viktig for at elevene skal klare å bruke oppgaven som kontekst i andre matematiske situasjoner og i samtale om viktige matematiske ideer.

2.3 Tidligere forskning på elevers arbeid med modellering

I dette delkapitlet vil vi presentere tidligere forskning på elevers arbeid med modellering. Vi vil oppsummere hovedfunnene i andre studier som har relevans for vårt forskningsspørsmål, for på den måten å sette vår studie i kontekst. Flere av disse studiene vil vi også referere til i detalj på et senere tidspunkt der det synes relevant å knytte deres funn opp mot våre resultater. Forskning på modellering i skolen har stort sett vært gjort på eldre elever på ungdomsskole og videregående (Maaß, 2006). Det er også kommet studier, blant annet English (2006), som kom frem til at elever på barnetrinn har gode muligheter til å utvikle kompetanse innen modellering. Det er allikevel gjort vesentlig mindre forskning i denne aldersgruppen, og det var noe av grunnen til at vi ønsket å fokusere på elever på barnetrinnet i vår undersøkelse.

Stillman et al. (2015) har gjort en studie av hvordan man kan legge til rette for matematisering i modelleringssyklusen for elever på ungdomstrinnet. De har som sitt bidrag valgt å se på hvordan man kan hjelpe elevene til å lykkes med de kritiske fasene problemformulering og matematisering. Studien viser at elevene i liten grad vurderer progresjonen underveis i modelleringssyklusen, men at de trenger hjelp til dette. Stillman et al. (2015) foreslår et rammeverk basert på spørsmål som kan stilles elevene underveis for å legge til rette for en effektiv progresjon. Galbraith og Stillman (2006) kommer i sin studie frem til at hvert steg i modelleringsprosessen er en potensiell kognitiv barriere for elevene som de kaller for blokader. Blum og Ferri (2009) trekker spesielt frem utfordringer i modellering som det å konstruere et problem, å gjøre forenklinger med bruk av antakelser, og å kontrollere om deres løsning er fornuftig og passer til konteksten. Men det trenger ikke alltid være kognitive barrierer i modelleringsoppgaven som er utfordringen. Av og til kan det skyldes erfaringer de har med seg fra tidligere. Blum (2015) henviser til flere studier hvor det kommer frem at elevene møter på utfordringer og setter seg fast allerede i prosessene problemformulering og systemavgrensing. Mye av grunnen til utfordringen er at elever har tidligere erfaringer med at de kan mestre oppgaven uten å lese oppgaven nøye og forstå konteksten. I stedet tolker de modelleringsoppgaven som en annen tekstoppgave hvor de kan ta bort konteksten og plukke ut tallene fra teksten som de gjør utregninger med (Blum, 2015).

Maaß (2006) fant i sin studie at elevenes modell kunne være utilstrekkelig fordi antakelsene elevene gjorde i systemavgrensingen var forenklet for mye. Det kunne også være at antakelsene ikke passet sammen med konteksten. Resultatet fra studien viser også at noen elever ikke argumenterer ut fra modelleringsprosessen, men ut fra deres private erfaringer. Dette samsvarer med Ärlebäck og Frejd (2013) som har kombinert kommognisjon og modellering i sin studie. De fant også at elevene tok i bruk erfaringer fra egen hverdag når de måtte tolke og ta i bruk ord, spesielt i første møte med modellering. Ärlebäck og Frejd peker også på at liten erfaring med modellering gjør det vanskelig for elever å delta på en mer kyndig måte, og trenger hjelp fra andre med mer erfaring. Når elevene har liten erfaring med modellering vet de heller ikke hva som er forventet og kreves av dem (Ärlebäck & Frejd, 2013). De trekker også frem mangler i elevenes refleksjoner rundt om arbeidet de gjør er realistisk eller ikke.

Viirman og Nardi (2019) har i sin studie undersøkt matematisk modellering innenfor biologi. De analyserer ved hjelp av kommognisjon for å se om elevenes arbeid er ritualisert eller utforskende, spesielt innenfor antakelser. De kommer frem til at i elevene i sitt første møte med modelleringsoppgaven gjorde antakelser fordi de hadde blitt fortalt at de skulle gjøre antakelser, men at antakelsene fremsto som tilfeldig gjetning. Konklusjonen var at det å gjøre antakelser i starten bar preg av å være ritualiserte handlinger som ikke baserte seg på matematikk. Et annet funn hos Viirman og Nardi (2019) var at de så tendenser til kommognitive konflikter hvor modelleringsoppgaven ikke ble ansett som en ordentlig matteoppgave da tall og forutsetninger ikke var strengt definert, og elevene ble usikre på om oppgaven faktisk skulle løses matematisk. De så også kommognitive konflikter om hva som er en tilstrekkelig løsning på en modelleringsoppgave.

3 Metode

I denne studien har vi undersøkt hindringer i noen elevers arbeid med en modelleringsoppgave. Vi har brukt kvalitativ metode i vår studie fordi kvalitativ forskning er kjent for å gå mer i dybden og gir mer detaljer rundt elevenes handlinger (Cohen et al., 2018). Kvalitativ metode er relevant i vår studie fordi vi skal undersøke fenomener som vi ønsker å forstå mer fyldig (Johannesen et al., 2019), og vil gi oss mulighet til å analysere elevenes deltakelse i diskursen i dybden. Gjennom å bruke kvalitativ metode i vårt arbeid vil vi kunne komme frem til spesielle kjennetegn ved det fenomenet som studeres (Johannesen et al., 2019), og det er derfor godt egnet for å besvare vårt forskningsspørsmål. Da vi er interesserte i elevenes samhandling i gruppa har vi valgt å fokusere på det som skjer underveis i økta, og ikke fokusert på elevenes tanker etter gjennomført økt.

For å kunne besvare forskningsspørsmålet har vi observert to grupper elever på 6. trinn som jobber sammen for å løse en modelleringsoppgave. Vi har gjort opptak av elevenes arbeidsøkter og kodet datamaterialet åpent. Den åpne kodingen resulterte i 9 ulike koder som beskrev hindringer. For å kunne påpeke hvor i modelleringsprosessen hindringene oppstår brukte vi Blomhøj og Jensen (2003) sin modelleringssyklus, utvidet med elementer hentet fra Galbraith og Stillman (2006). Årsaken til hindringen ble så analysert med utgangspunkt i Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk, utvidet med Lavie et al. (2018) om rutiner.

Innledningsvis i metodekapitlet presenterer vi vår metode for datainnsamling, før vi presenterer vårt utvalg, oppgaven elevene jobbet med, samt metode for analyse. Avslutningsvis gjør vi rede for våre vurderinger rundt studiens etikk og troverdighet.

3.1 Metode for datainnsamling - observasjon

Det vil være sentralt for oss å studere elevenes deltakelse i diskursen i arbeid med modelleringsoppgaver, da deltakelsen vil kunne få fram noen av hindringene som oppstår. Sfard (2008) påpeker at elevenes kommunikasjon med seg selv ikke er tilgjengelig for observasjon som et eget objekt. Samtidig vil en analyse av elevenes uttalelser og handlinger i samhandling med andre gi oss en mulighet til å tolke deltakelsen i diskursen, både elevenes interne kommunikasjon med seg selv og kommunikasjon med hverandre. For oss gir dette utslag i at datamaterialet først må analyseres som en helhet for å få et best mulig overblikk over elevenes deltakelse, for så å gå nærmere inn på enkelthendelser og uttalelser og gi mening til dem.

For å kunne tolke elevenes deltakelse i diskursen ble observasjon vurdert som en hensiktsmessig metode for datainnsamling. Observasjon som metode egner seg godt når forskeren ønsker seg direkte innsyn i de handlingene som studeres (Johannesen et al., 2019). Objekt for analyse i denne studien er elevenes uttalelser og handlinger i gruppearbeid rundt en modelleringsoppgave. Vi vurderte at det ville være hensiktsmessig å observere elevene samtidig som de jobbet med en modelleringsoppgave for å undersøke hva elevene faktisk gjorde og sa i praksis. Data fra observasjoner gir detaljerte beskrivelser av elevenes aktiviteter, men kan også gi detaljerte beskrivelser av mellommenneskelig samhandling (Johannesen et al.,2019). Derfor anså vi det som en god metode for å få frem sentrale aspekter ved hele modelleringsprosessen. Intervju med elevene kunne gitt oss innsikt i elevenes egne oppfattelser av modellering, men fordi vi ønsket å se på hva elevene gjorde og sa i arbeidet med en modelleringsoppgave vurderte vi det til at vi ikke trengte intervju med elevene i etterkant.

For å sikre korrekte og detaljerte beskrivelser av datamaterialet brukte vi lydopptak. I vår undersøkelse ønsket vi egentlig å benytte videoopptak, men grunnet utfordringer med å skaffe godkjent videoopptaksutstyr endte vi opp med å benytte lydopptak i undersøkelsen. Det å bruke lydopptak har også noen fordeler. Lydopptak gir oss mulighet til å få nøyaktige og detaljerte beskrivelser av undersøkelsen, samtidig som det kan virke mindre truende for elevene enn filmopptak (Johannesen et al., 2019). På den måten håpet vi å få en mest mulig normal klasseromssituasjon for elevene. Ulempen med å ikke ha videoopptak er at vi ikke kan analysere elevenes kroppsspråk og gester. Vi har derfor valgt å se vekk fra dette i analysen, og heller fokusert på elevenes muntlige utrykk i gruppa. I tillegg til lydopptak av gruppearbeidet ble alt skriftlig materiale samlet inn i etterkant av økten. Det skriftlige materialet ble brukt som en støtte til å få en bedre innsikt i elevenes uttalelser. Vi var også begge tilstede under hele datainnsamlingen og tok feltnotater om interessante observasjoner underveis.

Før undersøkelsen så vi for oss ulike aspekter ved temaet modellering som kunne være interessant. Samtidig var det viktig å være mest mulig åpen for det som lå i dataene slik at vi fikk god innsikt og ikke overså noen temaer som vi ikke hadde tenkt på før innsamlingen av data (Johannesen et al., 2019). Siden vi ikke hadde gjort oss opp en mening på forhånd rundt hvilke detaljer som skulle observeres var det hensiktsmessig å bruke en ustrukturert observasjon (Johannesen et al., 2019). En mindre strukturert observasjon er raskere å planlegge, men krever desto mer tid å analysere (Cohen et al., 2018). Metoden for analyse kommer vi tilbake til senere i metodekapitlet.

Vi valgte å observere elevene som en gruppe. Modelleringsaktiviteter er spesielt utformet for arbeid i mindre grupper hvor elevene må samarbeide og utvikle et matematisk produkt sammen (English, 2003). Derfor var det vesentlig med gruppearbeid for å oppfylle kriteriene til modellering slik vi definerer det i vår studie. I tillegg ga gruppeobservasjon oss en mulighet til å se på samhandlingen i gruppa i arbeid med en modelleringsoppgave. Når elevene arbeider i grupper blir de tvunget til å kommunisere hva de tenker, og gir oss en større innsikt i elevenes tanker og løsningsforslag i en modelleringsoppgave. Det skaper en mulighet til å se hvordan elevene argumenterer overfor hverandre og bygger videre på hverandres argumenter. Samtidig kan gruppearbeid resultere i at noen elever overtar styringen i gruppa mens andre kanskje ikke kommer til ordet. Dersom det skulle oppstå en ubalanse i gruppen anså vi likevel det som et interessant funn.

En observatør kan ha ulike roller i undersøkelsen, fra å være en aktiv deltaker til å være en ren observatør (Cohen et al., 2018, Johannesen et al., 2019). Det finnes også kombinasjoner av ytterpunktene som i større grad balanserer observatørens rolle i klasserommet (Cohen et al., 2018). For oss var det viktig å ikke påvirke elevene i en spesiell retning. Samtidig var det viktig å kunne snakke med elevene dersom det oppstod uklarheter i arbeidet da det var første gang elevene jobbet med modellering. På forhånd hadde vi blitt enige om spørsmål som vi kunne stille uten å påvirke for mye. Eksempler på spørsmål vi stilte er *Hvordan kan det være mulig? Hva kan være problemet? Hvordan kan vi finne ut av det? Høres dette rimelig ut?* Det kunne også være enkelte sekvenser hvor vi ønsket at elevene skulle utdype eller forklare hva de hadde gjort, slik at vi kunne få bedre innsikt i utfordringer og hendelser underveis. Vi var derfor deltakende observatører, hvor vi ikke var medlem av en spesiell gruppe, men som tidvis deltok i samtaler med elevene fra ulike grupper.

I observasjon er valget av setting viktig, det vil si den konkrete situasjonen vi ønsker å observere (Johannesen et al., 2019). De fleste observasjoner gjort av utdanningsforskere blir gjennomført i naturlige settinger, som for eksempel klasserom (Cohen et al., 2018). På grunn av klassens størrelse i forhold til klasserommet ble klassen delt i to for å få større avstand mellom gruppene. Avstanden var for å sikre at det ikke ble for mange forstyrrelser på lydopptakene. Den ene halvparten gjennomførte oppgaven første del av en skoledag, og den andre halvparten gjennomførte samme oppgave siste del av skoledagen. På grunn av begrenset utstyr ble det tatt lydopptak av én av gruppene i hver gjennomføring, totalt to lydopptak. Vi plasserte gruppene rundt hver sine bord, og la lydopptaker midt på bordet til fokusgruppen. Før oppstart av oppgaven ble elevene påminnet om deres rettigheter og poengterte at de ville bli anonymisert. Selv om vi ikke ønsket å påvirke data, anbefalte vi elevene å forklare og begrunne det de gjorde underveis for å sikre oss rikere data. Oppgaven ble gjennomgått i plenum for å forsikre oss om at eventuelle spørsmål rundt oppgaven ble oppklart. Gruppene fikk også utlevert oppgaven skriftlig, samt blyant og papir for å skrive på. I modelleringsoppgaven var alle hjelpemidler tillatt, men vi ønsket ikke å legge føringer for hva de skulle bruke. Dette fordi det innenfor modellering er lagt opp til at elevene selv skal komme frem til hva de har behov for underveis i oppgaven. Elevene må dermed etterspør hjelpemidler når de finner behov for det, noe som vi anså som aktuelt å observere hvordan elevene håndterte.

3.2 Utvalg

Vi ønsket å undersøke modellering i en klasse på mellomtrinnet da modellering historisk sett er lite anvendt i denne aldersgruppen (English, 2006). Siden kvalitativ metode er særlig hensiktsmessig når vi skal undersøke fenomener vi ikke kjenner særlig godt fra tidligere (Johannesen et al., 2019) anså vi det som en relevant metode i vår studie. I mye kvalitativ forskning blir det lagt vekt på unike særpreg rundt det aktuelle fenomenet, gruppen eller individene (Cohen et al., 2018). Det vil si at utvalget i utgangspunktet bare representerer seg selv og resultatene ikke nødvendigvis kan generaliseres. I vår undersøkelse er ikke målet å beskrive hva alle elever gjør, men ha detaljerte beskrivelser av et lite utvalg elever i en spesifikk situasjon. De detaljerte beskrivelsene kan videre danne grunnlag for refleksjon og diskusjon hos leseren for videre arbeid med modellering i egen praksis. En slik form for kasusstudie gir unike eksempler på virkelige personer i virkelige hendelser, og gir leseren mulighet til å forstå ideer klarere i forhold til å bli presentert for abstrakte teorier eller prinsipper (Cohen et al., 2018, s.376). Ved å gå i dybden på et lite utvalg av elevers arbeid gjennom en kvalitativ studie kunne vi utdype og konkretisere hindringer i modelleringsprosessen.

Utvalget i studien er avhengig av dens formål (Cohen et al., 2018). Valg av barneskole ble valgt ut fra tilgjengelighet i Stavanger-regionen. Det var derimot viktig at klassen ikke hadde jobbet med modellering før da vi ønsket å undersøke elevenes første møte med modellering. Valget falt på en 6. klasse. Vi snakket med tidligere lærere av klassen for å sikre at modellering var en ny arbeidsform for elevene. Prosjektet ble presentert for hele den aktuelle klassen for å sikre flest mulig samtykker. 27 av 28 elever samtykket til å være med på undersøkelsen. Vi ønsket å gjennomføre undersøkelsen i en normal klassesituasjon for å sikre at elevene opplevde situasjonen så naturlig som mulig.

Grupper ble tilfeldig satt sammen ved hjelp av en digital gruppegenerator. Videre ble det tilfeldig valgt ut to fokusgrupper som skulle observeres. Tilfeldige utvalgte fokuselever gir oss representanter fra en bredere del av elevmassen. For å sikre trygghet og god dialog blant elevene, og at ingen skulle oppleve situasjonen som skremmende, ble de tilfeldig utvalgte gruppene godkjent av kontaktlærer i klassen. Begge gruppene ble transkribert og analysert i etterkant av timen. Årsaken til at det ble to grupper var for å sikre tilstrekkelig med data, men samtidig ikke gape over for mye da kvalitative studier ofte generer mye data (Cohen et al., 2018). Vi mener vårt utvalg stiller oss i en god posisjon for å besvare forskningsspørsmålet i denne studien.

3.3 Valg av oppgave

For å studere elevers første arbeid med modellering ville vi finne en modelleringsoppgave som vi kunne anta at er innenfor elevenes mestringsnivå rent matematisk. Når elever jobber med oppgaver hvor de i mindre grad vil trenge lærers veiledning, vil lærer ha bedre anledning til å observere viktige hendelser som oppstår underveis. Slike hendelser kan være med på å påvirke elevenes resonnement, men ikke nødvendigvis komme frem i resultatet (Lesh et al., 2000). I vårt tilfelle ville dette være gunstig, da vi ønsket å gå i dybden på elevenes deltakelse. For å oppnå dette satte vi opp noen kriterier for utarbeidelse av oppgaven.

Det første kriteriet var at oppgaven skal gi mening for elevene. Det betyr at konteksten oppgaven er satt til må være noe elevene har forutsetninger for å forstå, og er innenfor deres kunnskaps- og erfaringsområde. Som kriterium to har vi sett etter en oppgave hvor elevene i størst mulig grad kan arbeide aktivt på egen hånd, uten inngripen fra lærer. Det betyr at oppgaven må ha mulighet for å tilpasse seg elevenes valg, være selvdokumenterende og at den kan justeres i tråd med elevenes valg. Ved å holde lærers inngripen til et minimum vil elevene i mindre grad bli påvirket i sitt valg av metoder som tas i bruk når de løser oppgaven.

Ut fra definisjonen på matematisk modellering som vi har tatt utgangspunkt i er det viktig at oppgaven inneholder mulighet til, og behov for, å bevege seg mellom de seks prosessene i modelleringssyklusen. En oppgave som inneholder alle prosessene vil også kunne gi oss indikasjoner på om det er enkelte steg i syklusen som gir elevene større utfordringer enn andre. Vi har også påsett at oppgaven tilfredsstiller Lesh et al. (2000) sine seks prinsipper for utvikling av modelleringsoppgaver som presentert i teorikapitlet.

Oppgaven vi bestemte oss for er inspirert av en oppgave fra Lesh et al. (2000), og er gjengitt i figur 3.1. Oppgaven omhandler en bank som har blitt ranet, og spørsmålet er om det er mulig for en raner å bære med seg ransutbyttet. For å argumentere for eller imot kan elevene ta i bruk enten volum eller vekt av pengene. Konteksten med et bankran mener vi vil være noe elevene kan forstå og se for seg. De vil også ha gode forutsetninger for å se hvilke begrensninger som gjelder når en bankraner skal bære med seg et ransutbytte. For å løse oppgaven vil elevene eksempelvis kunne benytte ferdigheter innen addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon, måleenheter og avrunding. Basert på vår kjennskap til klassen mener vi at elevene besitter kunnskapen som trengs for å kunne løse oppgaven på minst én måte.

Da det ikke er definert hvor stor andel av ransutbyttet som er av de forskjellige sedlene, annet enn at mesteparten av utbyttet har gitte valører, vil oppgaven kunne tilpasse seg elevenes valg.

3.3.1 Oppgaven

Bankranet

Rogaland bank ble ranet i dag tidlig. Vitner sier de så en enslig raner bære vekk ransutbyttet i en stor bag. Banksjefen sa at mesteparten av pengene var sedler med verdi 50 kr, 100 kr. og 200 kr. Ifølge banksjefen ser det ut til at ca. 20.000.000 kr. har blitt stjålet.

En reporter fra TV Rogaland synes dette høres ut som mer penger enn en person kan klare å bære med seg. Hva tror du? TV Rogaland trenger hjelp til å finne ut av hvor vanskelig det ville vært for en person å bære 20.000.000 kr. i sedler, slik banksjefen har forklart.

Undersøk spørsmålet for å se om det er mulig.

Etterpå skal dere lage en rapport til TV Rogaland hvor dere forklarer hvorfor dere mener at det er mulig eller ikke mulig. Dere må begrunne deres mening. Rapporten skal hjelpe reporteren å forstå situasjonen, slik at han kan lage en bedre reportasje i kveldens nyhetssending.

Figur 3.1: Elevoppgaven

Slik vi ser det er det nærliggende å tenke at elevene kan løse oppgaven på to forskjellige måter. Enten ved å se på vekten eller på volumet av pengene, alternativt en kombinasjon av disse. Vi tilpasset tallene i oppgaven slik at det innenfor de gitte forutsetningene både kan konkluderes med at det er mulig og ikke er mulig. For å gjøre dette laget vi et regneark hvor vi kunne endre antall av hver seddeltype, størrelsen på bagen raneren brukte, samt vekt, areal og tykkelse på sedlene. Ut fra regnearket kunne vi så lese av totalvekt og totalvolum av pengene for forskjellige kombinasjoner av pengesedler. Vi tok utgangspunkt i best tenkelig og verst tenkelig scenarioer, og kom frem til at et beløp på rundt 20 millioner kroner vil gi oppgaven det utfallsrommet vi var på jakt etter. I eksemplene under har vi vist forslag til hvordan oppgaven kan løses, men det er ikke forventet at elevene løser oppgaven på samme måten. Det vil likevel være sannsynlig at elevene tar i bruk enkelte elementer fra løsningsmetodene vi har skissert her, enten med tanke på vekt eller volum.

3.3.2 Mulige løsningsmetoder - vekt

For å løse oppgaven ved hjelp av vekt må en finne ut av hvor mye en seddel veier. Vi har i våre utregninger tatt utgangspunkt i at alle sedler veier 1 gram, selv om det i virkeligheten er enkelte variasjoner i vekt. Hvis man antar at pengene var jevnt fordelt mellom 50, 100 og 200-lapper vil man få en totalvekt på 233 kg. (se tabell 3.1).

Seddel	Antall	Verdi	Vekt i kg
50	133334	6666700	133,3
100	66667	6666700	66,7
200	33333	6666600	33,3
500	0,0	0	0,0
1000	0,0	0	0,0
		20000000	**233,3**

Tabell 3.1: Løsning, vekt, ikke mulig

Løsningen er egnet til å hjelpe elevene til å se at sedler med lav verdi vil veie mer enn sedler med høyere verdi når beløpet er likt.

Ved å justere antallet sedler slik at det blir færre av de små sedlene og ved å ta i bruk 500-lapper og 1000-lapper vil elevene kunne få ned vekten på ransutbyttet betraktelig, og samtidig holde seg innenfor oppgavens rammer. Som tabell 3.2 viser kan man ved å definere ransutbyttet til 10 millioner i store sedler og 10 millioner pluss 50 kroner i småsedler vil vekten bli innenfor det området en kan anta at en raner vil ha kunne fått med seg, og samtidig tilfredsstille betingelsene som er gitt i oppgaven.

Seddel	**Antall**	**Verdi**	**Vekt i kg**
50	10001	500050	10
100	5000	500000	5
200	45000	9000000	45
500	10000	5000000	10
1000	5000	5000000	5
		20000050	**75**

Tabell 3.2: Løsning vekt, mulig

3.3.3 Mulige løsningsmetoder - volum

En annen måte å finne ut av om vitnets forklaring kan stemme er ved å finne ut av hvor stort volum 20 millioner kroner har. I våre utregninger har vi tatt utgangspunkt i en 200-lapps størrelse, og beregnet volumet ut fra en forutsetning om at alle sedler har samme fysiske utforming. Sedlene har en tykkelse på 0,2 mm og et areal på 101 cm^2. Videre har vi brukt en gjennomsnittlig hockeybag med grunnflate 4800 cm^2 som ramme for volumet, som da vil få plass til ca. 48 stabler i bunnen. Ved å regne ut av hvor høy en stabel med samtlige sedler ville blitt, for så å fordele denne høyden på antall stabler det er plass til i bagen, vil man finne ut av hvor høyt opp pengene vil måtte stables.

Hvis man antar at sedlene er likt fordelt i verdi vil man når sedlene fordeles ut på arealet i bagen måtte stable pengene ca. 1 meter høyt (se tabell 3.3). Da pengestablene vil stikke ut over toppen av bagen vil elevene kunne argumentere for at det ikke er mulig for raneren å bære med seg pengene hvis de er fordelt på kun 50, 100 og 200-lapper.

Seddel	**Antall**	**Verdi**	**Høyde i m., 1 stabel (h)**
50	133334	6666700	26,66
100	66667	6666700	13,33
200	33333	6666600	6,66
500	0	0	0
1000	0	0	0
		20000000	46,66

Tabell 3.3: Delløsning volum, ikke mulig

Høyden på pengene stablet i bag kan da uttrykkes på følgende måte:

$h = høyde\ på\ pengene\ stablet\ i\ 1\ stabel$

$a = antall\ stabler\ i\ baggen$

$f = høyde\ på\ pengene, fordelt$

$\frac{h}{a} = f$

$\frac{47}{48} \approx$ **1m.**

Ved å se på problematikken med volum vil elevene kunne oppdage at volumet av sedlene blir mindre for samme totalsum når en tar i bruk større sedler. På samme måte som ved regning med vekt kan man definere ransutbyttet til for eksempel 10 millioner i store sedler og 10 millioner pluss 50 kroner i småsedler (se tabell 3.4). Ved å bruke utregningen over vil man komme frem til at sedlene vil måtte stables ca. 0,3 m. høyt. Sedlenes volum vil da bli innenfor det området en kan anta at en raner vil ha kunne fått plassert i baggen, samtidig som betingelsene gitt i oppgaven er oppfylt.

Seddel	Antall	Verdi	Høyde i m., 1 stabel (h)
50	10001	500050	2
100	5000	500000	1
200	45000	9000000	9
500	10000	5000000	2
1000	5000	5000000	1
		20000050	15

Tabell 3.4: Delløsning volum, mulig

$$\frac{h}{a} = f$$

$$\frac{15}{48} \approx \mathbf{0,3m.}$$

3.4 Analysemetode

For å analysere data har vi brukt en induktiv metode. Ved å gjennomføre en åpen koding har vi funnet kategorier i materialet som vi finner interessante. Kodingen danner selve grunnlaget for analysen av datamaterialet, og er en kjerneaktivitet innen analyse (Nilssen, 2012). Innledningsvis vil vi gjøre rede for hva som kjennetegner induktiv analyse, før vi beskriver hvordan vi har gjennomført vårt analysearbeid.

3.4.1 Analysemetode i induktiv analyse

Kvalitativ forskning tar utgangspunkt i at det finnes mange virkeligheter som skapes av deltakerne i en forskningssituasjon (Nilssen, 2012). Forskningen handler om å starte med noen overordnede spørsmål, og gjennom studiens gang spisse disse etter hvert som prosessen går fremover (Nilssen, 2012). Forskningssituasjonen er i kvalitativ forskning dermed et utgangspunkt for å finne noen mulige forklaringer på fenomener som opptrer i den gitte situasjonen. Forklaringen må støttes av data, og er et uttrykk for forskerens tolkning av virkeligheten. I vårt forskningsprosjekt har vi tatt utgangspunkt i en induktiv analyse. Det er en prosess hvor man samler inn data for finne generelle mønstre som kan gjøres til teorier eller generelle begreper (Johannesen et al., 2019). Deretter bruker man analyseredskaper som for eksempel koding og konstant komparativ metode for å beskrive fenomenet en studerer (Cohen et al., 2018). Konstant komparativ metode legger til rette for å identifisere mønstre ved å sammenlikne ulike hendelser i datamaterialet (Nilssen, 2012). I konstant komparativ metode sammenlikner man hendelser med hendelser, kategorier med kategorier og kategorier opp mot konsepter. På den måten kvalitetssikrer man sammenhengen i kodingen og har mulighet til å avdekke steder der kodingen og kategoriseringen ikke er konsekvent.

For å besvare vårt forskningsspørsmål om å finne hindringer i elevers arbeid i første møte med modellering var det sentralt å bruke induktiv analyse. I vår studie er målet med forskningen å gi en grundig beskrivelse av et fenomen. Resultatet blir derfor ikke en teori, men en detaljert beskrivelse av hindringer som kan oppstå i modelleringsprosessen. Som beskrevet tidligere var det viktig for oss å være mest mulig åpne i møte med datamaterialet for å kunne undersøke forskningsspørsmålet. Av den grunn hadde vi ikke spesifisert hva vi så etter, men prøve å kategorisere elevenes uttalelser med koder for å lage en oversikt over elevenes uttalelser. Målet vårt var i hovedsak å legge et godt grunnlag for forskningsspørsmålet, og ikke nødvendigvis lage en ny teori. Vi var derfor åpne for å trekke inn teori vi anså som relevant på et senere tidspunkt i analyseprosessen.

Vi har valgt induktiv analyse som metode fordi vi ønsket å være åpne for ulike innfallsvinkler til vår studie av elevers første møte med modellering. Vi hadde ingen klare formeninger om hva som kom til å skje, men ønsket å la datamaterialet styre vårt valg av tema. Overordnet hadde vi en tanke om at analysen skulle hjelpe oss til å bedre forstå hvilke områder av modellering som kan være en utfordring for elever som aldri har jobbet på denne måten tidligere. Dette var til en viss grad styrende i arbeidet med å finne datamaterialets kjernekategorier. Analysen var i så måte sentral for å komme frem til vårt forskningsspørsmål.

3.4.2 Analyse av datamateriale

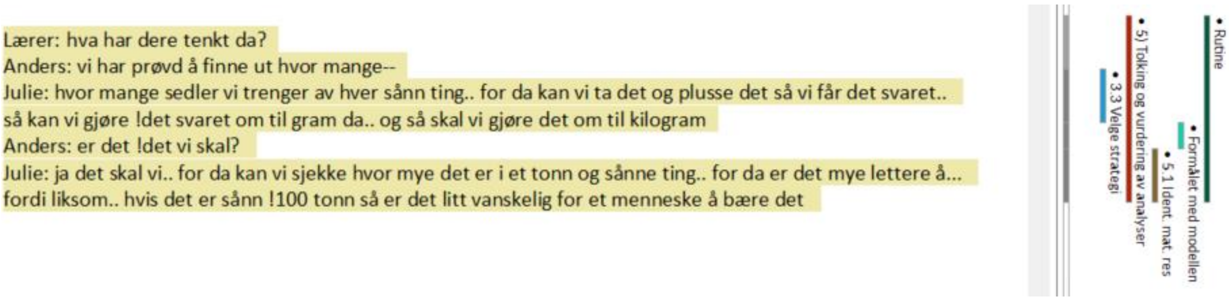
I kvalitative studier vil nødvendigvis analyseprosessen pågå gjennom hele forskningsprosessen, men i ulike former (Nilssen, 2012). Rett etter gjennomføringen av undersøkelsen startet vi med å høre gjennom datamaterialet i sin helhet for å danne oss en oversikt over gruppenes arbeid. Deretter diskuterte vi sammen hvilke umiddelbare tanker vi hadde rundt datamaterialet og tok notater. Notatene gikk på hovedtrekk i lydopptakene som vi fant interessante. Eksempler på notater vi tok var at elevene trakk hurtige konklusjoner, lette etter et fasitsvar og trodde oppgaven kunne være et lurespørsmål.

Vi transkriberte så begge undervisningsøktene i sin helhet ved hjelp av Nvivo 20. Nvivo er et digitalt analyseverktøy for kvalitativ forskning som kan brukes blant annet til å strukturere og systematisere data. Lydopptakene ble spilt av flere ganger for å være sikre på at sitatene var korrekt gjengitt. Der det har vært nødvendig for å sikre god lesbarhet har dialektuttrykk blitt skrevet om til bokmål. For å få frem flest mulige detaljer til bruk i den induktive analysen transkriberte vi så detaljert som mulig med tanke på pauser, intonasjon og andre verbale detaljer som kommer frem i datamaterialet. For å sikre en helhetlig transkripsjon benyttet vi transkripsjonsnøkkelen i tabell 3.5. Nøkkelen er basert på en bok om kommunikasjonsteori, skrevet av Svennevig (2001). Vi har i selve oppgaven valgt de elementene som er relevante for å få en tilstrekkelig innsikt i elevenes uttalelser.

..	Kort pause (mindre enn ett sekund)
…	Lengre pause (mer enn ett sekund)
--	Avbrutt setning eller resonnement
Ord?	Spørrende
((peker))	Ikke-språklig handling eller annen kommentar til transkripsjonen

Tabell 3.5: Transkripsjonsnøkkel

Den ferdige transkripsjonen ble så kodet ved hjelp av i Nvivo. Koding i Nvivo har noen fordeler ved at man enkelt kan endre navnet på koder, slå sammen koder og endre til annen kode hvis man endrer oppfatning. Programmet gir også en oversikt over antallet ganger hver enkelt kode opptrer, og en kan få en visuell oversikt over hvor kodene har blitt brukt. Man kan også åpne alle utdragene som er kodet med samme koden og se disse i sammenheng. Dette legger til rette for å kunne bruke konstant komparativ metode gjennom hele kodingsprosessen for å se mønster i datamaterialet. I tillegg kan man legge til kodenotater knyttet til enkelte ord eller utdrag underveis, slik at man kan holde oversikt over tanker en gjør seg. Man kan også hoppe rett inn i lydinnspillingen og høre på nytt i tilfeller der en er usikker på intensjonen til deltakerne. Et eksempel på koding i Nvivo vises i figur 3.2. Illustrasjonen viser hvordan kodingen fremstilles visuelt ved at linjer som har blitt kodet er uthevet med gult, og at en oversikt til høyre i bildet viser hvilke koder linjene er tilordnet. Her har de ulike prosessene innenfor modelleringssyklusen fått sin egen farge. I tillegg er alle hindringer markert med turkis, og tilknytning til kommognisjon markert grønt.



Figur 3.2: Eksempel på koding i Nvivo

Kodingen av datamaterialet i vår induktive analyse bestod av fem forskjellige deler. Innledningsvis gjennomførte vi en *åpen* koding*.* Åpen koding betyr å møte datamaterialet med et åpent sinn, upåvirket av egen teoretisk kunnskap. Ved å ha en teori i bakhodet kan det styre hva forskeren ser etter i datamaterialet, i stedet for at datamaterialet styrer hva forskeren ser etter (Johannesen et al., 2019). Teori kan derimot trekkes inn senere i prosessen, som i analyse- eller fortolkningsprosessen. I kodingen satt vi navn på fenomener, hendelser og ytringer etter en nøye gjennomgang av datamaterialet, også kalt koder. Etter den åpne kodingen satt vi igjen med 66 ulike koder. Kodene ble sortert i grupper av koder for å få en tematisk oversikt (Nilssen, 2012). En gruppe vil si koder som har felles trekk. En gruppe koder som vi hadde mange av var koder som omhandlet *hindringer.* Vi tok for oss de ulike kodene innenfor hindringer og spurte oss selv spørsmålene *hva består hindringen av? Hvorfor kan hindringen ha oppstått?* Ved å sammenlikne svarene på disse spørsmålene var det noen hindringer som kunne slås sammen. Et eksempel på dette er kodene *tolking av oppgaven* og *ikke avklart avgrensinger.* De ble slått sammen til en felles kode *oppfattelse av begreper.* Vi fant også hindringer som ikke ble vurdert som relevante i forbindelse med vårt forskningsspørsmål. Eksempler på koder vi valgte å se bort fra er *manglende fokus* og *problemer med utstyr*, da de ikke gikk direkte på modelleringsprosessen. Til slutt satt vi igjen med ni koder innenfor hindringer: *oppfattelse av oppgave, formål med modellen, manglende sammenheng mellom utregning og kontekst, definere ukjente faktorer, ritualisert handling, uegnet strategi, finne svaret, oppfattelse av begreper* og *akseptert begrunnelse.* Vi sammenliknet kodene opp mot hverandre for å sjekke at de faktisk hadde et ulikt innhold. For eksempel sammenliknet vi kodene som gikk på oppfattelse opp mot hverandre og fikk bekreftet at i den ene er det hvordan elevene oppfatter oppgaven som skaper hindringen, mens det i den andre er hvordan elevene definerer ord som er utfordringen.

Deretter plasserte vi de ulike hindringene inn i når i modelleringsprosessen de oppstår. Vi tok utgangspunkt i vår kombinasjon av Blomhøj og Jensen (2003) og Galbraith og Stillmans (2006) rammeverk i tabell 3.7 på neste side. Tabellen er en sammenstilling av tabellene 2.2-2.7 i teorikapitlet. Tabellen ga oss mulighet til å identifisere både hvilke hindringer som oppstod, men også når hindringene skjedde. Denne presiseringen bidro til å sette hindringene inn i en kontekst, og på den måten gjøre det lettere å analysere hvorfor hindringen oppstår akkurat da.

På det neste stadiet i analyseprosessen trakk vi inn rammeverkene til Sfard (2008) og Lavie et al. (2018) for å beskrive de ulike hindringene. Vi tok utgangspunkt i hver enkelt kode og observasjonene knyttet til denne. Deretter stilte vi oss noen overordnede spørsmål som *hva* gjør elevene og *hvordan* gjør de det. Vi sammenliknet dette med hva de egentlig skulle ha gjort i modelleringssituasjonen, og beskrev avviket i hver enkelt hendelse ut fra Sfard (2008) og Lavie et al. (2018). Avslutningsvis så vi på hva hovedessensen i hver enkelt kode var ut fra det kommognitive rammeverket, og fant at sju av kodene i hovedsak var rettet mot rutiner og to mot kommognitiv konflikt. Vi ønsker å poengtere at rutiner og kommognitiv konflikt ikke er noen hindring i seg selv, men at vi i vår undersøkelse har funnet hindringer som kan knyttes til disse begrepene. Noen av funnene kunne vært kategorisert både som kommognitiv konflikt og rutine, men vi har valgt å plassere disse ut fra hovedfokuset i funnet. Kodehierarkiet vårt er eksemplifisert i tabell 3.6.

Elevers hindringer i en modelleringsdiskurs	
Rutiner	Kommognitiv konflikt
Oppfattelse av oppgave	Oppfattelse av begreper
Formål med modellen	Akseptert begrunnelse
Manglende sammenheng mellom utregning og kontekst	
Definere ukjente faktorer	
Ritualisert handling	
Uegnet strategi	
Finne svaret	

Tabell 3.6: Kodehierarki

	Nr	Delprosess	Handling
1. Problem-formulering	1.1	Avklare problemstillingen	Diskutere problemsituasjonen og konteksten. Formulere et problem
2. Systemavgrensing	2.1	Gjøre forenklende antakelser	Bestemme noen forutsetninger som gjør oppgaven mulig å løse
	2.2	Identifisere strategiske objekter	Definere hvilke objekter som er avgjørende for å kunne løse oppgaven
	2.3	Spesifisere de riktige elementene i strategiske objekter	Hvordan kan de strategiske objektene brukes for å komme frem til løsningen
3. Matematisering	3.1	Identifisere hvilke faktorer som skal være med i den matematiske modellen	Definere hvilke faktorer som er statiske og hvilke som er variable
	3.2	Representere objektene matematisk slik at en formel kan brukes	Finne ut av hvordan man matematisk kan representere objektene
	3.3	Gjøre relevante matematiske antakelser og velge strategi	Bestemme hva slags matematikk som kan brukes for å løse problemet Velge metode for utregning
4. Matematisk analyse	4.1	Anvende passende matematiske strategi	Ta i bruk matematikken i tråd med valgene gjort i punkt 2
	4.2	Skriftliggjøring av den matematiske modellen	Fremstille modellen eller resultatene skriftlig eller ved hjelp av teknologi
	4.3	Søker flere resultater som løsningene kan tolkes ut fra	Forstår oppgavens kompleksitet og bruker valgt fremgangsmåte til å undersøke flere utfall for å få oversikt over situasjonen Vurderer oppgavens avgrensninger for å se om den kan løses på andre måter

5. Tolking og vurdering av analyser	5.1	Identifisere matematiske resultater ut fra virkelige motstykker	Knytte svarene sine mot den virkelige situasjonen
	5.2	Kontekstualisere foreløpige og endelige matematiske resultater ut fra situasjonen i den virkelige verden	Sjekke resultater opp mot kontekst og kontrollere at resultatene gir mening
	5.3	Komme med argumenter for å begrunne tolkninger	Begrunne hvorfor resultatet de har funnet er troverdig ut fra konteksten, eller om det trengs videre arbeid
	5.4	Gjøre endringer i tidligere begrensninger for å gi rom for nye resultater som støtter en ny tolkning	Vurdere om tidligere avgrensninger kan endres for å oppnå andre resultater
	5.5	Se behovet for å involvere matematikk før man trekker en konklusjon	Konkluderer ut fra matematiske beregninger, ikke ut fra hverdagslige betraktninger
6. Evaluering av modellens validitet	6.1	Forene uventede midlertidige løsninger med den virkelige situasjonen	Revurdere midlertidige resultater som åpenbart ikke stemmer
	6.2	Vurdere virkelige/reelle konsekvenser av det matematiske resultatet	Vurdere om det matematiske resultatet gir mening i den virkelige verden
	6.3	Innse at det er en grense for justering av begrensinger som kan gjøres for å få en gyldig løsning	Vurdere det mulige utfallsrommet som er gyldig innenfor oppgavens begrensninger
	6.4	Vurdere tilstrekkeligheten/omfanget av den matematiske modellen	Vurdere om modellen gir alle svar på det virkelige problemet

Tabell 3.7: Rammer for analyse av modelleringsprosessen

3.5 Etiske problemstillinger

I denne studien har vi tatt flere forhåndsregler for å sikre elevenes personvern og rettigheter. Vi har tatt hensyn til forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humanoria, juss og teologi (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2016). Siden data vi har samlet inn går under personopplysninger er prosjektet innmeldt til NSD. Prosjektet ble godkjent av NSD 6.10.2020 med referansenummer 778088. Se vedlegg 2. Blant annet var det viktig at lydopptakene ble lagt på en ekstern kryptert harddisk og videre transkribert med pseudonymer på elevene. Som en følge av NTNU sine retningslinjer har vi brukt lydopptaker som er eid av NTNU i undersøkelsen, men fikk lov til å lagre lydopptaket på egen kryptert harddisk. Ved studiens slutt vil lydopptak på de krypterte harddiskene bli slettet.

Etter at prosjektet ble godkjent informerte vi den aktuelle klassen om undersøkelsen. Det var også viktig å informere elever og foresatte om personopplysninger og rettigheter. Videre ble det sendt hjem samtykkeskjema til samtlige foresatte. Grunnet elevenes unge alder måtte det gis godkjenning av foresatte for å delta i undervisning med lydopptak. For å sikre at elevene selv fikk en valgmulighet om å være med ble elevene informert om at de når som helst kunne trekke seg fra prosjektet. Det var også elevene som fikk utdelt samtykkeskjemaet og skulle levere det tilbake slik at de selv kunne bestemme hva de ville gjøre med arket de fikk. Informasjonsskrivet og samtykkeskjema ligger som Vedlegg 1.

For å sikre at undersøkelsen ikke skulle gå ut over elevenes læring i andre fag ble timeplanen justert slik at elevene fikk en dobbel matematikktime på det aktuelle tidspunktet. På den måten sikret vi oss nok tid til å gjennomføre undersøkelsen i klassens matematikktimer. I tillegg til å samle data til undersøkelsen var det også viktig at elevene opplevde å få noe igjen for undersøkelsen. Det ble derfor satt av noe tid i etterkant av undersøkelsen til å svare på faglige spørsmål som de hadde rundt oppgaven de utførte.

3.6 Troverdighet

I kvalitativ forskning er det sentralt at forskningen som gjennomføres blir oppfattet som troverdig (Guba, 1981). Vi har i vår studie lagt prinsipper fra Gubas rammeverk til grunn for å kvalitetssikre forskningen med tanke på troverdighet, og vil i dette avsnittet forklare hvordan vi har hensyntatt disse faktorene. Rammeverket omhandler fire aspekter ved forskning som kjennetegner forskningens troverdighet. Aspektene er *kredibilitet*, *overførbarhet*, *avhengighet* og *bekreftbarhet*.

Med kredibilitet mener Guba (1981) at forskningen skal strebe etter å legge frem funnene på en slik måte at de virker sannsynlige, meningsfulle og sanne. For å sikre kredibilitet jobbet elevene med oppgaven i grupper uten forskernes innblanding. Lærers rolle underveis var å hjelpe med å oppklare misforståelser, men uten å styre deltakernes argumentasjon og tankerekker. Med det bidro situasjonen til en mer naturlig samtale mellom elevene uten at argumentene deres ble påvirket av andre. I tillegg har vi gjennom hele prosessen sjekket tolkningene våre av ulike situasjoner opp mot hverandre for å være sikre på at det ikke var noen motsetninger. Eksempelvis måtte vi vurdere ulike utsagn kodet som det samme opp mot hverandre for å sikre en helhetlig koding. Vi har også drøftet våre funn med fagfeller som et ledd i å kvalitetssikre egne tolkninger. En viktig faktor i å sikre kredibilitet er at data samles inn i en situasjon som oppleves som normal for elevene. I vår studie er data samlet inn i en tilnærmet normal undervisningssituasjon med klassens lærer. Med bakgrunn i dette vurderer vi det til at deltakerne i liten grad har blitt påvirket av forskernes deltakelse, da situasjonen for dem kan ses på som tilnærmet normal.

Gubas andre aspekt er overførbarhet, som omhandler at studien skal gi leseren tilstrekkelig informasjon om konteksten undersøkelsen er foretatt i, slik at leseren kan vurdere om eventuelle hypoteser kan overføres til andre sammenliknbare kontekster (Guba, 1981). Vi beskriver konteksten studien er gjennomført i grundig i metodekapitlet, slik at leseren kan danne seg et bilde av situasjonen hvor data er samlet inn. Vi har også sett elevenes uttalelser i studiet underveis opp mot relevant teori, slik det er naturlig å gjøre i analyse av klasseromsprosesser. Uttalelsene som er valgt belyser en bredde av materialet og er hentet fra to forskjellige grupper. Det at funnene favner bredt og er hentet fra to grupper kan også bidra til en overførbarhet til andre situasjoner. Vi har også gitt detaljerte beskrivelser av hvordan undersøkelsen ble gjennomført og grunngitt vårt valg av oppgave, samt forklart i detalj hvordan undersøkelsen ble analysert. Dette styrker lesers mulighet til å vurdere overførbarheten ytterligere.

Det tredje aspektet hos Guba (1981) er avhengighet. Avhengighet omhandler hvordan man kan vite at resultatet fra denne undersøkelsen ville gitt det samme hvis studien hadde blitt foretatt på nytt i en liknende kontekst (Guba, 1981). I vår beskrivelse av studien har vi også tilstrebet å beskrive våre valg og handlinger detaljert nok til at andre ville hatt mulighet til å gjennomføre en studie tilnærmet likt det vi har gjort. Avhengighet adresserer også stabilitet i data, samtidig som at man tar høyde for at data kan oppfattes på ulike måter etter hvert som forskeren gradvis får et dypere innblikk i materialet. I vår studie har bruken av åpen koding gjort at vi gradvis har fått et dypere innblikk i datamaterialet. Denne prosessen er nærmere beskrevet i analysemetode. Analyseprosessen har gjort til at vi flere ganger har måttet revurdere våre tolkninger underveis, sett i lys av nye funn. Funnene som presenteres i studien er våre endelige tolkninger av datamaterialet. Et annet grep vi har gjort med tanke på avhengighet er å bruke overlappende metoder (Guba, 1981). Et eksempel på dette er at vi har samlet inn skriftlig arbeid som elevene har gjort og sammenliknet arbeidet med transkripsjonen. Det faktum at vi har vært to forskere som har jobbet sammen betyr at vi gjennom hele forskningsprosessen har foretatt vurderinger av hverandres tolkninger og kommet fram til en felles enighet om hva de enkelte funnene betyr.

Det fjerde aspektet som beskrives i Guba (1981) er bekreftbarhet. Bekreftbarhet handler om studiens evne til å gi pålitelige resultater, minst mulig påvirket av forskeren. Punktet omhandler også et mål om at andre forskere med sannsynlighet hadde fått det samme resultatet med det samme datamaterialet og rammeverket (Guba 1981). Vi har i vår studie tydelig spesifisert rammeverket som benyttes, og hvordan rammeverket brukes i analysen. Ut fra våre beskrivelser av rammeverket og analyseprosessen mener vi at leseren vil ha mulighet til å vurdere om våre analyser er troverdige.

4 Resultat

I dette kapitlet vil vi presentere resultatet av analysen. Forskningsspørsmålet i denne studien er: *Hvilke hindringer møter en gruppe 6. trinnselever i sitt første møte med en modelleringsdiskurs?* For å svare på forskningsspørsmålet har vi analysert to grupper sin deltakelse i arbeid med en modelleringsoppgave. Elevene har ikke jobbet med modellering tidligere, og har heller ikke fått noen instruksjoner i hva en modelleringsoppgave går ut på.

Resultatkapitlet er strukturert etter kategoriene rutiner og kommognitiv konflikt, med tilhørende koder. Vi har valgt å strukturere resultatkapitlet på denne måten slik at liknende funn kan sees i sammenheng. I hvert funn gir vi innledningsvis en beskrivelse av hvor elevene er i modelleringssyklusen, altså hvilken modelleringsprosess de er i. Prosessene er hentet fra tabell 3.7, og er skrevet i kursiv. Deretter vil vi forklare hva målet med den aktuelle prosessen er, slik at elevene kunne kommet videre med oppgaven. I våre funn klarer ikke elevene å oppnå målet for prosessen fordi det oppstår en hindring i situasjonen. Det vil vi eksemplifisere med å vise et utdrag hentet fra transkripsjonen. Funnene er hentet fra to ulike grupper. Ytringene fra gruppe A er nummerert med A.xx, og gruppe B er nummerert med B.xx. Utdragene som er valgt mener vi belyser de ulike hindringene elevene har møtt på i arbeidet med modelleringsoppgaven. Noen av hindringene oppstod flere ganger i datamaterialet. Vi har da valgt utdragene som vi mener illustrerer hindringen best. Med utgangspunkt i utdraget beskriver vi delprosessen gruppa jobber med, og i hvilke delprosesser hindringen kan ha oppstått. Hvilken delprosess de er i og hvilke delprosesser som skaper hindringer for dem merkes med prosessnummer i parentes, hentet fra tabell 3.7. Avslutningsvis vil vi innenfor hver hindring gi en forklaring på årsaken til at hindringen kan ha oppstått ut fra kommognisjon. I teksten er de kommognitive begrepene markert med kursiv for å tydeliggjøre på hvilken måte de kommer frem i analysen.

Vi starter med å presentere hovedkategorien *rutiner* med sju underkategorier. Deretter presenterer vi hovedkategorien *kommognitiv konflikt* delt opp i to underkategorier.

4.1 Rutiner

Hovedkategorien rutiner handler om elevenes hindringer i modelleringsdiskursen knyttet til rutiner. For å beskrive disse hindringene har vi tatt i bruk kodene *oppfattelse av oppgave, formål med modellen, manglende sammenheng mellom utregning og kontekst, definere ukjente faktorer, ritualisert handling, uegnet strategi* og *finne svaret.* I de følgende avsnittene vil vi eksemplifisere de ulike kodene innenfor rutiner.

4.1.1 Oppfattelse av oppgave

I gruppe A kommer det frem ganske tidlig i undersøkelsen at arbeid med modellering er en ny diskurs for dem. Elevene har gått i gang med å diskutere oppgaven, og arbeider med å gjøre antakelser i *systemavgrensingen*. I denne prosessen skal elevene bestemme seg for noen objekter som påvirker undersøkelsesområdet, og som dermed kan gjøre det mulig å løse oppgaven. Målet med *systemavgrensingen* i modellering er å forenkle og strukturere problemet, og gjøre det mer presist. Anders og Julie er i utdraget under i gang med systemavgrensinger, men Mia er mer opptatt av om oppgaven kan være et lurespørsmål.

A.1	Julie:	Det er 20 millioner... Nøyaktig. Det er veldig viktig at vi vet at det er nøyaktig 20 millioner
A.2	Mia:	For at det skal telle som millioner må du ha en prikk der ((ler))
A.3	Julie:	Ok, 20 millioner.. vi vet at det er nøyaktig 20 millioner
A.4	Mia:	Vet vi det? ((ler))
A.5	Begge:	Ja, det vet vi
A.5	Julie:	Vi har fått erklæring av banken, ok?
A.6	Mia:	Han sa det var cirka... kanskje banksjefen er tyven?
A.7	Anders:	Mia, det er ikke et lurespørsmål
A.8	Mia:	Men alle grubliser er lurespørsmål
A.9	Anders:	Men dette er ikke en grublis
A.10	Mia:	Det er en grublis.. vi må hjelpe den stakkars reporteren
A.11	Anders:	En grublis er så liten

I ytring A.1 ønsker Julie å sette ransutbyttet til nøyaktig 20 millioner. Arbeidet med å definere ransutbyttet tolker vi til at gruppen er i gang med å gjøre forenklede antakelser for å gjøre oppgaven lettere å løse (3.1). I stedet for å jobbe videre med *systemavgrensingen* kommer det frem at Mia har et annet fokus på oppgaven. I ytring A.4 virker Mia å være usikker på om de kan stole på informasjonen i oppgaven. Videre hevder hun i A.8 at oppgaven er en grublis, og dermed et lurespørsmål. Det kan tyde på at Mia ikke arbeider ut fra problemstillingen i oppgaven om det er mulig å bære 20 millioner, men heller om det kan være noe lureri. Det kan derfor tyde på at Mia ikke har avklart problemstillingen (1.1) på samme måte som Anders og Julie. Siden gruppen som helhet ikke har avklart problemstillingen skaper det en hindring da de har ulike tanker om hvordan de skal jobbe videre med oppgaven.

Selv om problemformuleringen er definert i oppgaveteksten ser det ut til at Mia mener oppgaven ikke trenger å løses ved hjelp av matematikk, men at oppgaven kan være et lurespørsmål som de kan gruble seg frem til. Elevene befinner seg i en *oppgavesituasjon* hvor de har forstått at de skal handle, men *oppgavesituasjonen* blir oppfattet ulikt. I situasjonen har Julie og Anders tenkt at det vil være forenklende hvis de bestemmer seg for å forholde seg nøyaktig 20 millioner. Mia kobler situasjonen til tidligere erfaringer med lurespørsmål og ser på det som relevant i den nåværende situasjonen. Det kan tyde på at Mia definerer situasjonen ut fra andre *identifiserbare fortilfeller* enn de to andre på gruppa, og mener derfor at oppgaven kan være et lurespørsmål. Hennes *fortilfeller* fremkaller da en rutine som gjør at hun vurderer at oppgaven kan være et lurespørsmål som inneholder et enkelt svar. Anders argumenterer ut fra sine *identifiserbare fortilfeller* at oppgaven er for lang til å være en grublis. Deres ulike assosiasjoner fører til at de befinner seg i ulike, matematiske *diskurser*. Anders og Julie jobber i større grad i henhold til en modelleringsdiskurs, mens Mia ser ut til å ha vanskeligheter med å identifisere den nye *diskursen* og trekker frem lurespørsmål. I situasjonen blir kommunikasjonen mellom elevene hindret fordi de handler ut fra ut fra ulike *metaregler*. Måten elevene tar i bruk ulike *rutiner* kan også tolkes som at det oppstår en *kommognitiv konflikt* mellom elevene. I den samme gruppa så vi også at de på et senere tidspunkt hadde ulike meninger om målet med arbeidet de var i gang med.

4.1.2 Formål med modellen

I arbeidet med modellen ser det ut til at elevene har ulike formål med den matematiske modellen. I *matematiseringsprosessen* har gruppe A laget en modell for inndeling av sedlene ved å identifisere faktorene de vil ha med, definere variablene og representere objektene matematisk. I *matematisk analyse* har de kommet frem til et mulig antall sedler raneren kan ha stjålet. På dette stadiet i modelleringsprosessen er det ønskelig at elevene *tolker og vurderer resultatene* opp mot den virkelige situasjonen. Det ser imidlertid ut til at elevene på gruppa ikke har en felles oppfattelse om hva som var målet med å lage en matematisk modell. I utdraget under har Julie et tydelig formål med resultatet hentet fra modellen, i motsetning til Anders.

A.12	Lærer:	Hva har dere tenkt da?
A.13	Anders:	Vi har prøvd å finne ut hvor mange--
A.14	Julie:	Hvor mange sedler vi trenger av hver sånn ting.. for da kan vi ta det og plusse det så vi får det svaret.. så kan vi gjøre det svaret om til gram da.. og så skal vi gjøre det om til kilogram
A.15	Anders:	Er det det vi skal?
A.16	Julie:	Ja det skal vi.. for da kan vi sjekke hvor mye det er i et tonn og sånne ting.. for da er det mye lettere å… fordi liksom.. hvis det er sånn 100 tonn så er det litt vanskelig for et menneske å bære det

Anders besvarer i ytring A.13 lærerens spørsmål med å prøve å gjenta hvordan de har regnet ut antall sedler. Han blir avbrutt av Julie, som tydelig har noe hun ønsker å få frem. I ytring A.14 svarer Julie at antall sedler er det samme som antall gram de har, for så å gjøre det om til kilogram. Anders utbryter overrasket i ytring A.15 at han ikke hadde oppfattet at det var det de skulle. Julie utdyper i ytring A.16 hvordan de kan knytte det matematiske resultatet til virkeligheten. Selv om ikke Anders sier det eksplisitt kan hans overaskende fremtoning tyde på at han ikke har fått med seg modellens formål i *matematiseringsprosessen*. Det blir da en hindring i prosess 5.1 når de skal knytte resultatene sine opp mot den virkelige situasjonen. Julie har laget seg en matematisk strategi (3.3) for hvordan modellen deres kan hjelpe dem med å besvare det virkelige problemet (5.1), men hun har ikke gjort dette eksplisitt overfor de andre i gruppa.

I utdraget over kommer det frem at Anders ville gi en forklaring på hvordan de har kommet frem til resultatet, men muligens ikke hadde et konkret formål med resultatet fra modellen. Det kan være en indikasjon på at Anders hadde en mer *rituell tilnærming* til oppgaven. Julie på sin side hadde et tydeligere fokus på hva resultatet skulle brukes til. Hennes mer produktorienterte tilnærming kan hinte om at hun heller mer mot *utforsking* enn Anders i denne situasjonen. Ritualer blir utført når vi føler at andre forventer at vi gjør det, og spesielt når forventningen kommer fra noen som blir ansett som flinkere. I vårt tilfelle er Julie ansett som god i matematikk av de resterende elevene, som kan ha bidratt til at de følger strategien hennes for å tilfredsstille henne. Utfordringer med å knytte problemet til konteksten så vi også i flere andre situasjoner.

4.1.3 Manglende sammenheng mellom utregning og kontekst

I gruppe B har elevene kommet frem til at sedlenes vekt vil være faktoren som avgjør om raneren kan bære ransutbyttet eller ikke, og fått et matematisk resultat. I utdraget under kommer læreren inn i samtalen på et tidspunkt hvor elevene diskuterer om raneren kan ha klart å bære to tonn. Det at gruppen knytter svaret sitt opp mot den virkelige situasjonen kan tyde på at de *tolker og vurderer analyser*. I denne prosessen er målet at gruppa skal tolke og validere resultatene fra den matematiske modellen opp mot den virkelige situasjonen. På dette tidspunktet blir læreren med i diskusjonen for å høre hva de har lagt til grunn for sitt resultat, da resultatet to tonn kan tyde på noen hindringer knyttet til elevenes arbeid med modellen.

B.1	Lærer:	Okei.. kan jeg bare spørre hvordan kom dere frem til to tonn?
B.2	Johanna:	Ehm, først så fant… så regnet vi liksom hva--
B.3	Filip:	Ja, et gram per lapp
B.4	Johanna:	Og så ganget vi det med--
B.5	Filip:	Så ganget vi det med tusen.. det blir…
B.6	Johanna:	Nei, vi ganget det ikke med tusen.. vi ganget det med
B.7	Ida:	Vi ganget to tusen
B.8	Johanna:	Vi ganget det med 20 millioner... jeg hadde bare regnet

I ytring B.3 forteller Filip at det er ett gram per lapp, og fortsetter med å fortelle at de multipliserte det med tusen. Ytringene B.4-B.8 viser at gruppen er usikre på hva de faktisk har multiplisert med hva. Johanna avslutter med å si at hun bare har regnet. Gruppens usikkerhet rundt hva de egentlig har gjort kan tyde på at tallene de har hentet ikke stammer fra en modell av situasjonen, men er tall som elevene opplever er relevante for å komme frem til et svar. Tallet tjue millioner er hentet fra oppgaveteksten, og tallet tusen er valgt på grunnlag av at det er tusen gram i ett kilo. Det ser ut til at elevene ikke har vurdert hvilke faktorer som skal være med i den matematiske modellen, annet enn at de har blitt enige om at de må vite vekten av en seddel (3.1). I prosess 3.1 burde elevene ha identifisert sedlenes fordeling mellom de ulike valørene som en avgjørende faktor og laget seg en matematisk modell basert på de ulike variablene (3.2 og 3.3). Gruppen utfører ikke disse prosessene, men går rett på å jobbe med *matematisk* *analyse*. Det betyr at de ikke har gjort de nødvendige prosessene i *systemavgrensingen* og *matematiseringen*, noe også Johanna uttrykker i ytring B.8 ved å si at hun bare hadde regnet. Gruppens manglende arbeid med *systemavgrensing* og *matematisering* blir en hindring da deres matematisk resultat ikke baserer seg på en modell, noe som er vesentlig i matematisk modellering. Funnet kan tyde på at elevene mangler en strategi for å knytte sammen utregningene sine med konteksten.

Gruppe B har vurdert modelleringssituasjonen til at de må gjøre en handling, de er i en *oppgavesituasjon*. Men gruppa handler på en annen måte enn det som er ønskelig innen modelleringsdiskursen. Gruppas vurdering av *oppgavesituasjonen* er at de må begynne å gjøre utregninger. Det resulterer i at de gjør utregninger uten å ha noen klar tanke om de passer til oppgavens kontekst. En mulig årsak til det kan være tidligere erfaringer med tekstoppgaver i matematikk hvor tallene som skal brukes ofte står konkret i oppgaven. Dermed kan tidligere arbeid med tekstoppgaver være *identifiserbare fortilfeller* som elevene tolker som en sammenlignbar situasjon. Det kan også tyde på at de har *rutiner* på å regne matematikk. I en modelleringsdiskurs kreves det derimot at elevene gjør en del diskusjoner og arbeid i *systemavgrensing* og *matematisering*, noe elevene virker å ha lite erfaring med. Det kan derfor se ut til at elevene mangler flere *rutiner* innenfor prosessene som kommer før det å arbeide matematisk, og som dermed skaper en hindring innenfor det videre modelleringsarbeidet. Vi så også eksempler på hindringer som skyldes at elevene selv må tallfeste størrelser som ikke er oppgitt i oppgaven.

4.1.4 Definere ukjente faktorer

For elevene virket det utfordrende å gjøre bestemmelser rundt udefinerte objekter i oppgaven. Et eksempel kommer frem i arbeid med størrelse på bagen til raneren. Gruppe A har regnet ut at raneren kan ha hatt med seg 225 tusen sedler. Det vil si at de er ferdig med *matematisk analyse*, og skal nå i gang med *tolking og vurdering av analysen*. Målet med denne prosessen er å tolke og validere den matematiske modellen opp mot den virkelige situasjonen. Prosessen byr imidlertid på en hindring da de ikke vet hvor stor ranerens bag er.

A.17	Mia:	Hvordan vet vi at det er plass i baggen?
A.18	Julie:	I don't know
A.19	Anders:	Da hvis det blir for mye.. hvis det blir for mye...
A.20	Mia:	Hva er grensen for for mye og for lite?
A.21	Anders:	Grensen er at vi skal--
A.22	Julie:	Hvordan finner vi egentlig ut det her?
A.23	Anders:	For at vi skal finne ut av hvor mange lapper.. hvis du har for eksempel 100 millioner lapper--
A.24	Julie:	Ja
A.25	Anders:	Så får du ikke plass til det i en helt vanlig bag.. selv om du presser de sammen

I ytring A.17 lurer Mia på hvordan de vet at det er plass i bagen. Julie og Anders uttrykker i ytring A.18-A.22 at de er usikre på det samme. Gruppens diskusjon rundt baggen kan tyde på at de anser baggens størrelse til å være et strategisk objekt som er avgjørende for å få pengene med seg (2.2). De er derimot usikre på om sedlene får plass i bagen. Gruppa er undrende på hvordan de kan finne ut om det er plass i bagen, og har ikke noen tydelig formening om hvordan de kan gå frem. Det kan tyde på at de har hindringer med hvordan det strategiske objektet «bag» kan brukes for å komme frem til en løsning (2.3). Resultatet blir at Anders i ytring A.25 konkluderer med at det ikke er plass i bagen. Anders konkluderer ikke ut fra matematiske beregninger, men fra egne hverdagslige erfaringer rundt hvor stor en bag er. Det blir en hindring å definere bagens størrelse, som ikke er definert i oppgaven, men som gruppen selv må anslå.

Elevene virker å være i en *oppgavesituasjon* hvor de ikke vet helt hvordan de skal handle. Det ser ut til at det ikke dukker opp noen *fortilfeller* hos gruppa som bidrar til å gjøre noen form for utregninger rundt volum av sedlene og bagen. I oppgaven elevene har fått utdelt står det kun at ransutbyttet blir fraktet vekk i en bag, det står ikke noe om bagens størrelse. Det kan tyde på at elevene mener at de da ikke kan vite om de får plass eller ikke i bagen. I en modelleringsdiskurs er det å gjøre antakelser en nødvendig kompetanse (2.1). Det er en sjanse for at elevene i tidligere matematiske *diskurser* har fått definert ukjente faktorer i oppgaveteksten. Siden dette er elevenes første møte med modellering kan det være en indikasjon på at gruppen mangler *rutiner* på å gjøre slike antakelser som kreves i en modelleringsdiskurs. Deltakerne i modelleringsdiskursen klarer ikke ut fra sine *fortilfeller* å gjenkjenne og respondere til situasjonen med å definere ukjente faktorer. Siden den nye *diskursen* er styrt av andre *metaregler* enn det elevene har opplevd tidligere kan dette ha ført til en hindring ved at elevene ikke gjør nødvendige antakelser for å løse problemet. Resultatet blir da at elevene konkluderer ut fra hverdagslige antakelser i stedet for å begrunne med matematikk. Vi så også eksempler på at elevene valgte arbeidsmåter de var godt kjent med fra tidligere, men på feil grunnlag.

4.1.5 Ritualisert handling

I modelleringsoppgaven til elevene stod det at løsningen skulle presenteres i form av en rapport. Bakgrunnen for rapportskrivingen var for at elevene da måtte komme frem til et resultat som skulle presenteres. Hindringen ble at selve skrivingen av rapporten var viktigere enn innholdet i rapporten. I de to utdragene presenterer vi en situasjon fra hver gruppe hvor fokus på rapporten kommer frem.

I gruppe A er de i situasjonen under i gang med å arbeide med *matematisk analyse*. I denne prosessen er målet at elevene skal komme frem til ett eller flere matematiske resultat som videre kan tolkes opp mot den virkelige situasjonen. Elevene har bestemt seg for å klippe ut sedler for å finne sedlenes vekt og bruke vekta til å finne ut av hva ransutbyttet kan veie, men de er fortsatt et godt stykke unna et matematisk resultat. Til tross for et manglende matematisk resultat etterspør Mia hva gruppen tror konklusjonen er slik at hun kan skrive rapporten.

A.26	Mia:	Tror vi eller tror vi ikke at det ikke det er plass?
A.27	Anders:	Vi tror ikke...

A.28	Mia:	Ok, da skriver jeg en rapport hvor vi ikke tror, og så skriver jeg en rapport hvor vi tror..

I ytring A.27 ser vi at Anders svarer på Mias spørsmål at de ikke tror det er plass til sedlene i en bag. I ytring A.28 kommer det frem at Mia bestemmer seg for å skrive én rapport hvor konklusjonen er at de ikke tror raneren kan ha gjort det, og én rapport hvor de konkluderer med at raneren har gjort det. Siden gruppa ikke har kommet frem til et matematisk resultat på dette tidspunktet kan ikke rapporten skrives ut fra det som var intensjonen til rapporten. Det kan tyde på at Mia ikke har sett behovet for å involvere matematikk før de trekker en konklusjon (5.5).

På en liknende måte ser vi i gruppe B at de ønsker å komme i gang med skrivingen av rapporten som etterspørres i oppgaven. I situasjonen under jobber de i *matematisk analyse* med å finne hva vekten av 20 millioner blir hvis sedlene kun er i én valør. I prosessen videre burde elevene ha brukt vekten av de ulike valørene i en matematisk modell som viste hvor mye av hver valør som var gunstig for at raneren skulle få det med seg. Elevene har funnet ut at 20 millioner vil veie 40 kg i 500-lapper, og ser dette opp mot hvor mye en voksen mann kan klare å bære.

B.9	Filip:	Ja, men en voksen mann, en voksen mann klarer å løfte 40 kilo
B.10	Johanna:	((Søker på nett)) Hvor mange kilo kan en voksen mann løfte?
B.11	Filip:	Cirka 80 kilo
B.12	Johanna:	Ja, da greier han easy peasy
B.13	Filip:	Da kan vi… da er det mulig.. vi må skrive rapporten

Filip og Johanna kommer i ytring B.9-B.13 frem til at en raner ville kunne bære med seg inntil 80 kg, og mener derfor at de har en konklusjon. Prosessen med å knytte svaret sitt opp mot den virkelige situasjonen kan tyde på at de er i prosess 5.1. Elevene har riktignok funnet en løsning for om raneren kunne ha båret 20 millioner i 500-lapper, men de har enda ikke tatt høyde for at mesteparten av ransutbyttet skulle inneholde 50, 100 og 200-lapper. Til tross for det ytrer Filip i B.13 at de må skrive rapporten. I stedet for å bruke delresultatene videre i *matematisk analyse* for å få et endelig resultat som er i tråd med oppgaven, rettes fokuset mot rapporten som skal skrives.

Fokuset i begge gruppene ligger her på å lage en rapport, til tross for at de ikke er i mål med oppgaven. Gruppe 1 har knapt startet med å arbeide matematisk, og er langt fra å finne en mulig løsning. Gruppe 2 har funnet en løsning, men den er ikke i tråd med oppgavens rammer.

Iveren etter å skrive en rapport uten å ha kommet frem til en matematisk modell kan indikere at handlingen er *rituell*, i den forstand at de opplever at de må skrive en rapport fordi oppgaven sier det. Rapportens innhold og grunnlag synes underordnet. Denne rutinen blir da en *prosessorientert rutine* i form av et *ritual*, da det å lage rapporten i seg selv synes å være målet. Fra lærerens side ville ønsket vært at de hadde tatt i bruk en *produktorientert rutine*, hvor rapportens innhold var det sentrale. Rapporten burde i så måte vært skrevet på et senere tidspunkt, etter å være i besittelse av mer informasjon. En mulig forklaring på hvorfor elevene tar i bruk en *prosessorientert rutine* kan være fordi rapportskriving i matematikk ikke ligger innenfor elevenes *fortilfeller*, men er noe nytt i denne diskursen. Rapportskriving kan derfor ha blitt sett på som et *rituale* for å tilfredsstille oppgaven eller læreren. Vi så også eksempler på hvordan rutiner som elevene har med seg fra tidligere fører til at de velger strategier som ikke nødvendigvis er hensiktsmessig å bruke i en modelleringssammenheng.

4.1.6 Uegnet strategi

I gruppe A dukket det opp en hindring knyttet til fordeling mellom sedlene i modellen. Gruppen er i *matematiseringsprosessen* hvor målet er å lage en matematisk modell av systemet. I arbeidet med å bestemme fordelingen av sedlene i ulike valører regner Julie på hvor mange det kan være av hver seddeltype. For Julie synes det naturlig å ta i bruk en kjent fremgangsmåte for deling.

A.29	Julie:	Men samma det, men hva var det vi skulle ta? 30000 og så skal vi ta, oi sann, 20.. 1-2-3-4-5-6.. delt på 3 = 6,66666666.. kan vi runde det av til 6,6, nei, 6666666,6?
A.30	Lærer:	Ja, du trenger sikkert ikke å ha med komma 6 en gang.. bare bruk hele tall dere
A.31	Julie:	Ok.. jeg bare.. 1-2-3-4-5-6-7.. ok.
A.32	Lærer:	Hva er det tallet da?
A.33	Julie:	Det er 20 millioner delt på 3.. for det er 3 typer sedler.. og så skal hver seddel ha verdi på det.. 20 millioner delt på 3 er 6666666 et eller annet.. og da kan man ta.. hver sånn seddel skal ha den der verdien da..

I ytring A.33 påpeker Julie at hun dividerer 20 millioner på 3 fordi det er 3 typer sedler. Hun får da at det skal være cirka 6666666 kroner av 50-, 100-, og 200-sedlene. Utregningene Julie gjør er basert på hennes matematiske modell, og tyder på at hun er i prosess 4.1. Gruppa hadde ikke eksplisitt blitt enige om hvordan pengene skulle fordeles mellom de ulike valørene, og heller ikke adressert hvilken påvirkning det vil ha på vekta om en øker den ene eller den andre seddeltypen. Det resulterte i at Julie tok utgangspunkt i en strategi med lik deling. Lik deling er ikke egnet for å løse akkurat denne oppgaven da resultatet gir en tyngde som er vanskelig å bære (4.1). Å knytte tidligere erfaringer med deling til akkurat denne oppgaven skapte en hindring da Julie ikke så hensikten med å diskutere ulike inndelinger av sedlene.

Som omtalt tidligere i oppgaven er en rutines «hvordan» ofte rimelig lett å lære seg, mens en rutines «når» en mer krevende prosess å mestre. I Julies tilfelle ser vi at hun får til å ta i bruk *delingsrutinen*. Det kan indikere at hun har *metaregler* for hvordan og når deling utføres. Det at Julie velger å dele pengenes verdi på tre kan tyde på at hennes *fortilfeller* fremkaller bruken av rutinen lik deling i divisjon. I en *modelleringsdiskurs* er det derimot ikke gitt at tidligere *fortilfeller* kan brukes om igjen på nøyaktig samme måte, slik Julie gjorde i denne situasjonen. Hennes *metaregler* for deling kan ha begrenset andre potensielle tilnærminger til oppgaven, og som derfor skapte en hindring for gruppa med å finne en egnet løsning på oppgaven. I våre analyser så vi også eksempler på at elevene valgte rutiner som ikke kommer fra den matematiske diskursen i det hele tatt.

4.1.7 Finne svaret

Fokuset blant elevene på å finne et svar gikk i igjen blant flere av gruppene. Elevene i gruppe B har jobbet med *systemavgrensing* og kommet frem til at de skal finne vekten til 20 millioner for å se om ranerne kan bære det. I et modelleringsperspektiv er det ønskelig at elevene videre skal matematisere, i dette tilfellet ved å identifisere hvilke faktorer som skal være med i den matematiske modellen og velge en matematisk strategi som kan brukes for å lage en modell. I stedet for å utvikle en modell velger Filip og Johanna i situasjonen under å søke etter et ferdig svar på nett.

B.14	Filip:	Har du funnet ut noe?
B.15	Johanna:	Nei, men jeg søkte på det der
B.16	Lærer:	Hva skal dere søke på?
B.17	Johanna:	Vekten på 20 millioner
B.18	Mons:	Vi har allerede prøvd det.. det kommer ikke opp noe
B.19	Johanna:	Vekten på en million

Johanna forteller Filip i ytring B.15 at hun har søkt på nett etter vekten av 20 millioner. Mons, som er fra en annen gruppe, overhører dette og forteller i ytring B.18 at de har gjort det samme men uten å finne noe svar. I ytring B.19 foreslår Johanna å heller søke på vekten av én million. Fremgangsmåten innebærer ingen matematiseringsprosess (3.1-3.3), slik intensjonen i matematisk modellering er. I arbeid med modellering er det sentralt at elevene lager en matematisk modell av situasjonen for å avgjøre om raneren kan bære utbyttet. Gruppa valgte i stedet å prøve og finne et ferdig svar. Det kan tyde på at elevene ikke ser på det de skal frem til som en matematisk modell med flere variabler, men at det finnes endelig fasitsvar på oppgaven, som skaper en hindring i arbeidet med modellering.

En mulig forklaring på hindringen kan være at oppgaven ikke inneholder noen *identifiserbare fortilfeller* som gjør at elevene finner det nærliggende å prøve og matematisere situasjonen slik det er ønskelig i en modelleringsdiskurs. Det kan tyde på at elevene identifiserer oppgaven som å være nærmere oppgaver innenfor andre *diskurser* hvor et nettsøk kan være hensiktsmessig. Siden elevene hadde tilgang til internett ble det naturlig for dem å finne ut hvor mye 20 millioner kroner veier. For elevene var løsningen på problemet å finne et fasitsvar på oppgaven, mens i en modelleringsdiskurs vil det å løse oppgaven bety å ta i bruk forholdet mellom matematiske variabler for å lage en modell. Elevenes hindring blir i dette tilfellet at de tar i bruk en rutine fra en hverdagsdiskurs som ikke samsvarer med modelleringsdiskursen.

4.2 Kommognitiv konflikt

Hovedkategorien kommognitiv konflikt handler om elevenes hindringer i modelleringsdiskursen hvor det ser ut til å oppstå en *kommognitiv konflikt*. For å beskrive disse hindringene har vi tatt i bruk kodene *oppfattelse av begreper* og *akseptert begrunnelse for resultat*.

4.2.1 Oppfattelse av begreper

I Gruppe A dukker det opp to begreper som elevene tolker forskjellig. I den første situasjonen er gruppa i *systemavgrensing* hvor de bestemmer hvilke faktorer som skal være med i den matematiske modellen. Målet i denne prosessen er å systematisere objektene slik at de får en oversikt over dem og se hvordan objektene påvirker hverandre. Basert på hva som står i oppgaven er elevene uenige i hvilke sedler som skal være med i den matematiske modellen. Det kommer frem at de har ulik oppfattelse av begrepet «mesteparten».

A.34	Mia:	Han sa mesteparten.. kanskje du kan legge til noen tusener ved siden av?
A.35	Anders:	Nei, men mesteparten.. i så fall har han bare 1 eller 2 tusener.. tusenlapper.. og det vil ikke gjøre opp all plassen

Mia presiserer i ytring A.34 at oppgaven sier at mesteparten av pengene var 50, 100 og 200-lapper, men at de også kan bruke tusenlapper. Anders sier i ytring A.35 at mesteparten bare vil utgjøre noen få tusenlapper, og at det derfor kan ses bort fra. Senere har Julie og Mia en liknende diskusjon hvor betydningen av begrepet «mesteparten» diskuteres på nytt.

A.36	Mia:	Ok, Julie, forklar for meg hvordan du regner at det er så mye i vekt.
A.37	Julie:	Ok.. jeg prøvde å finne ut av hvor mye en seddel kosta da.. så jeg søkte på--
A.38	Mia:	Kostet?
A.39	Julie:	Veier.. hvor mye veier en seddel søkte jeg på... tusenlapp.. det er alt for mye synes jeg.. det er ikke tusenlapper
A.40	Mia:	Jo det er tusenlapper.. det er bare at der er mest 50, 100 og 200
A.41	Julie:	Ok.. de har bare stjålet 50, 100 og 200-lapper.. vi sier ingenting annet, de har bare stjålet de
A.42	Mia:	Jeg klarer ikke tenke.. jeg er for dum for dette her

I ytring A.39 mener Julie at det ikke kan være tusenlapper. Mia sier i ytring A.40 at det kan være tusenlapper, men at det er mest av 50, 100 og 200-sedler. Til slutt tar Julie i ytring A.41 en avgjørelse om at raneren kun har stjålet disse tre sedlene. Mia godtar Julie sin beslutning i ytring A.42 og sier at hun er for dum for dette her. Diskusjonen rundt hvilke sedler raneren kan ha tatt med seg tyder på at gruppa er i *systemavgrensing* og bestemmer hvilke objekter som er avgjørende for å kunne løse oppgaven (2.2). Gruppas ulike oppfattelser av begrepet «mesteparten» har betydning for hvordan den matematiske modellen kan se ut for situasjonen.

Senere i prosessen skjer en lignende hendelse i *matematisk analyse* hvor målet er å produsere et matematisk resultat. Gruppa jobber med å finne ut av antall sedler slik at de kan vurdere om raneren klarer å bære med seg ransutbyttet. Julie gjør utregningene for å finne pengenes vekt. Underveis i utregningen kommer det frem at Mia ikke har samme oppfattelse som de to andre av hvordan problemet kan løses.

A.43	Mia:	Jeg liker at vi prøver å finne ut hvor mye penger det er i stedet for å finne ut av om det går an å putte det i baggen
A.44	Anders:	Vi skal jo finne ut av hvor mye det veier.. men liksom--
A.45	Mia:	Vi kan jo bare si at det ikke er plass i baggen
A.46	Anders:	Baggen må jo være omtrent på størrelse med den her.. bordet

I ytring A.43 uttrykker Mia at hun ikke ser sammenhengen mellom vekten på pengene og om pengene får plass i bagen. Med dette adresserer Mia en mangel i gruppas *systemavgrensing*. Det tyder på at elevene ikke eksplisitt har avklart hvilke faktorer som er avgjørende for å kunne løse oppgaven (2.2). I utdraget over er det ikke avklart om det er vekten eller volumet av pengene som er deres avgjørende faktor.

Gruppen tar ikke opp problemstillingen, men jobber videre med utregninger. Etter en liten stund kommer Julie frem til et resultat i *matematisk analyse*. Mia stiller på ny spørsmål til gruppen for å vise at de andre elevenes bilde av situasjonen ikke stemmer overens med hennes egen.

A.47	Julie:	0,11 tonn.. det veier--
A.48	Mia:	Hva har vekten med hvor mye penger det er plass til i en bag?
A.49	Julie:	Det er det som er oppgaven.. ok.. eller, jeg vet ikke... det betyr at det der veier en hundrelapp.. hvis det er sånn at man deler det.. jeg har ikke peiling

I ytring A.48 stiller Mia spørsmålet tydeligere enn forrige gang. Det er tydelig at hun ser på problemet som at de skal finne ut av om pengene fysisk får plass i en bag eller ikke, og at hun ikke har tenkt på at vekten vil være den mest sentrale faktoren. Julies svar i ytring A.49 kan tyde på at hun ikke har sett pengenes volum som en utfordring, og kun tenker at vekten er det som betyr noe. Oppgaven gir ingen bestemt føring på hvilken definisjon elevene skal bruke for å svare på spørsmålet, men dette er en avklaring som elevene burde gjort i systemavgrensingen (2.2). Uten denne avklaringen skapes det en hindring i å enes om en matematisk modell.

De fire foregående utdragene har vist hindringer knyttet til begrepet «mesteparten» og «bære med seg» som står i oppgaveteksten. Utdragene over kan tyde på at gruppa har ulik forståelse av ordene «mesteparten» og «bære med seg».

I diskusjonen rundt «mesteparten» har Mia og Julie ulik oppfattelse av *ordet*. Mias *narrativ* om at mesteparten kan bety at det også kan være tusenlapper går ikke overens med Anders og Julie sitt *narrativ* om at det i praksis ikke kan være tusenlapper for det vil bli så få av dem. Det samme skjer rundt «bære med seg» hvor Mia tenker volum og Julie tenker vekt, og som kan tyde på at de bruker ordene på forskjellige måter. Elevene handler etter ulike *narrativer* om hva som skal til for at ransutbyttet kan være mulig å bære. De ulike *narrativene* kan alle være gyldige i oppgaven, men elevene oppfatter sitt *narrativ* som det riktige. Når elevene i en *diskurs* bruker et *ord* på ulike måter kan dette føre til en *kommognitiv konflikt* ved at kommunikasjonen hindres. Antydning til *kommognitiv konflikt* så vi også da elevene diskuterte hvordan de skulle begrunne resultater.

4.2.2 Akseptert begrunnelse for resultat

Elevene i gruppe A har kommet frem til en matematisk modell som ga et resultat om hvor mange sedler i de ulike valørene raneren kan ha tatt med seg. I utdraget under er elevene i prosessen i *tolking og vurdering av analyser.* Prosessen har som mål å tolke og vurdere resultatene fra den matematiske modellen opp mot den virkelige situasjonen. Elevene holder på med å knytte sine resultater opp mot den reelle situasjonen og bli enige om hvordan de skal legge frem resultatene for resten av klassen. Julie og Mia er uenige i hvordan de kan argumentere for at det ikke er plass i baggen.

A.50	Julie:	Det jeg prøver å si er at vi ikke kan gå ut i fra at han ikke får plass i baggen
A.51	Mia:	Vi kan ikke gå ut ifra at han får plass i baggen heller
A.52	Julie:	Nei nettopp.. dere kan ikke si et argument.. det går ikke fordi han ikke får plass i baggen
A.53	Mia:	Han får jo ikke det.. baggen er ikke stor nok
A.54	Julie:	Se nå.. ok--
A.55	Mia:	Hvor er beviset for at det er feil?
A.56	Julie:	Hvis dere går frem der på tavlen og presenterer, så blir det sånn.. det går ikke fordi det er for masse penger.. han får ikke plass i baggen
A.57	Mia:	Ja det går det

A.58 Julie: Så kommer det en sånn mann som er flink med bagger, vet masse som får plass i en bag. og så sier han.. ja men hvor stor er baggen da? og da har ikke dere noe svar på det

Dialogen tyder på at Mia og Julie har et ulikt syn på hva som er en tilstrekkelig argumentasjon for en løsning i en modelleringsoppgave. Julie mener i setning A.51 at de ikke kan påstå at det ikke er plass i bagen når de ikke vet hvor stor baggen er. Mia mener i ytring A.51-A.55 at man heller ikke kan gå ut fra det motsatte, og ønsker et bevis for Julies påstand. Julie fortsetter i setning A.56 å stå på sitt, og antyder at man ikke kan påstå at baggen er for liten uten begrunnelse. I situasjonen er gruppa enige om at volumet på sedlene og på baggen har noe å si, og dermed identifisert dem som strategiske objekter (2.2). Men gruppen har ikke gjort beregninger av volumet til pengene og baggen for å kunne vurdere om pengene får plass i *matematisk analyse*. Hindringen blir da hvordan de skal begrunne hvorfor resultatet de har funnet er troverdig ut fra konteksten (5.3). Julie mener at løsningen må begrunnes ut fra matematiske beregninger, mens Mia mener det holder å si at baggen ikke er stor nok. Siden gruppa som helhet ikke har avklart hvordan arbeidet skal tolkes og vurderes skaper det en hindring for gruppa.

Utdraget over kan tyde på at Julie og Mia handler ut fra ulike *metadiskursive regler*. Julies uttalelse i setning A.58 kan tolkes som at hun mener gruppa må legge frem et matematisk argument for synspunktet sitt, og hennes *narrativ* er vesentlig i en modelleringsdiskurs. Mia på sin side mener at det holder med å konstatere at det ikke er plass i baggen uten å argumentere matematisk, noe som ikke er i tråd med en modelleringsdiskurs. Elevene agerer ulikt når de prøver å underbygge sine *narrativer*, som kan bety at de har ulike *metadiskursive regler* for hva som kreves for at en matematisk argumentasjon regnes som gyldig i en modelleringsdiskurs. Det kan tyde på at det oppstår en *kommognitiv konflikt* mellom Julie og Mia da de tilsynelatende har motstridende *narrativ* i form av regler for bevis. Siden modelleringsdiskursen er styrt av noen andre metaregler enn det elevene har opplevd tidligere, kan det også indikere at det oppstår en *kommognitiv konflikt* for Mia i møtet med den nye diskursen.

5 Diskusjon

I denne studien har vi analysert to grupper elever på 6.trinn sine hindringer i sitt første møte med en modelleringsdiskurs. Vi kom frem til 9 kategorier av hindringer i modelleringsprosessen. Kategoriene er *oppfattelse av oppgave, formål med modellen, manglende sammenheng mellom utregning og kontekst, definere ukjente faktorer, ritualisert handling, uegnet strategi, finne svaret, oppfattelse av begreper og akseptert begrunnelse for resultat*. I resultatkapitlet presenterte vi kategoriene ut fra om hindringen baserer seg på rutiner eller på at det oppstår en kommognitiv konflikt. Underveis er det beskrevet hvor i modelleringssyklusen elevene befinner seg når hindringen oppstår.

Hindringer som oppstår på grunn av rutiner kan ofte forklares ut fra elevenes manglende erfaring med modelleringsdiskursen. Vi har sett tegn til at elevene blir usikre på hvilke metaregler som gjelder i den nye diskursen. Usikkerheten medfører eksempelvis hindringer med å avgrense oppgavens rammer slik at tallmaterialet kan brukes til å lage en modell. I flere tilfeller så vi også at elever tenker at oppgaven kan være et lurespørsmål som ikke krever matematikk for å besvare. Vi så også eksempler på at elevene vurderte oppgaven som at den ikke krevde et matematisk grunnlag for å besvares, men at gruppas løsning kunne basere seg på argumentasjon tatt fra hverdagslige diskurser hvor samme krav til underbygging ikke er til stede.

Innenfor rutinekategorien så vi også flere indikasjoner på at elever hadde en rituell tilnærming til sin deltakelse. Den rituelle deltakelsen førte til at elevene arbeidet matematisk uten å relatere utregningene sine til modellen det var ønskelig at de skulle lage. Elevenes ritualiserte deltakelse kan tyde på at elevene ser på selve utregningen som målet med oppgaven, og ikke det å produsere en modell som gir et resultat som kan tolkes opp mot den virkelige situasjonen.

Innenfor kommognitiv konflikt observerte vi at elevenes ulike oppfattelser av det samme ordet ledet til hindringer i modelleringsprosessen. I de tilfellene hvor elevene ikke gjorde avklaringer om sentrale ord og begreper i matematiseringen førte det til at elevenes arbeid ble hindret eller at viktige elementer i den matematiske modellen ble utelatt. Vi så også tegn på at det kunne oppstå en kommognitiv konflikt mellom diskursen elevene befant seg i og modelleringsdiskursen, og kommognitiv konflikt mellom elever. Konfliktene så ut til å oppstå ved at de jobbet ut fra ulike metaregler.

I flere grupper ble det også observert at en av elevenes første tilnærminger til oppgaven var å søke etter et svar på internett. På samme måte så vi at mange elever var ute etter å finne *svaret*, og var av den oppfattelse at det fantes ett riktig svar på oppgaven. Observasjonen kan tyde på at elevene ikke har fått et godt nok innblikk i modelleringsoppgavens kompleksitet ved at det er mange ulike faktorer som påvirker hva som kan være et gyldig svar. De synes heller ikke å ha oppdaget at svaret på oppgaven i bunn og grunn er modellen elevene lager av situasjonen, samt hvordan de argumenterer for valgene de har gjort underveis.

Videre i dette kapitlet vil vi diskutere funnene opp mot relevant litteratur. Vi har valgt å strukturere diskusjonen etter hvor i modelleringssyklusen hindringene har oppstått. Grunnen til strukturen er at våre funn viser at hindringene i mange tilfeller kan spores tilbake til enkelte prosesser. I avsnitt 5.1 ser vi på hindringer innenfor problemformulering og systemavgrensing. Deretter fortsetter vi i avsnitt 5.2 med å drøfte utfordringer som oppstod i forbindelse med tolking og vurdering. Videre vil vi i avsnitt 5.3 oppsummere hvilke implikasjoner våre funn kan få for arbeid med modellering i skolesammenheng. Avslutningsvis drøfter vi studiens kvalitet i avsnitt 5.4.

5.1 Hindringer i arbeid med problemformulering og systemavgrensing

Våre funn viser at det oppstår noen hindringer i problemavklaring og systemavgrensing som påvirker elevenes arbeid gjennom hele modelleringssyklusen. For eksempel da elevene måtte finne ut av hva som påvirker om raneren kan ha båret med seg tjue millioner i sedler. Elevene opplevde starten på oppgaven som frustrerende da det var mange elementer å holde styr på samtidig. Matematisk modellering er en kompleks og krevende aktivitet fordi den krever flere kompetanser, både matematiske og ikke-matematiske (Blum, 2015). I modelleringsoppgaver er det ikke er meningen at man kan finne løsningen direkte basert på rutinepregede aktiviteter, men må løses gjennom å følge stegene i modelleringssyklusen (Blum & Ferri, 2009). Modelleringsdiskursen ble en ny og uvant oppgavesituasjon for dem. De rutinene elevene har med seg inn i modelleringsdiskursen kan komme i konflikt med en del av metareglene som er gjeldene i den nye modelleringsdiskursen. I følge Lavie et al. (2018) prøver man i slike situasjoner å passe inn tidligere erfaringer fra andre diskurser. I vårt tilfelle ble dette ganske tydelig allerede i systemavgrensingen. Til tross for at vi gjorde det klart for elevene på forhånd at de skulle finne en løsning på problemet var det flere som mistenkte oppgaven som et lurespørsmål. De prøvde å sette oppgaven inn i noe de hadde erfart tidligere, en slags mattenøtt. For oss var det noe overraskende at flere mistenkte lurespørsmål. Samtidig var vår modelleringsoppgave oppgitt på en annen form enn det elevene kanskje er vant til fra før med matematikkoppgaver, og liknet muligens i større grad på en oppgave som de kan forbinde med en gåte. Det kan være en mulig forklaring til at elevene tolker oppgaven til å kunne være et lurespørsmål.

I det videre arbeidet med oppgaven viser undersøkelsen at flere av elevenes hindringer kan knyttes til systemavgrensing, spesielt hindringene *oppfattelse av begreper* og *definere ukjente faktorer.* I begge gruppene observerte vi utfordringer med å forenkle problemet og gjøre forenklede antakelser, for eksempel hva som er avgjørende for om raneren kunne bære med seg ransutbyttet. Tradisjonelt sett gir matematikkundervisningen elevene ferdigstrukturerte problemer hvor det ikke er rom for egne vurderinger og antakelser (Blum, 2015). I modelleringsoppgaver må elevene ta noen egne avgjørelser for å gjøre oppgaven mulig å løse. Systemavgrensing baserer seg i stor grad på at det gjøres noen antakelser (Blomhøj & Jensen, 2003; Blum & Ferri, 2009; Galbraith & Stillman, 2006). Uten å gjøre antakelser blir det vanskelig å komme frem til matematikken som kan brukes for å løse problemet (Blum & Ferri, 2009). Det var flere elever som ved første øyekast mente at det ikke gikk an å løse problemet på grunn av for lite informasjon i oppgaveteksten. Edwards og Hamson (2016) hevder at forskjellen på om modellen blir riktig eller gal avhenger om det blir gjort passende valg i antakelser, og trekker frem at erfaring med akkurat denne prosessen teller mer enn i noen annen prosess i modellering. Elevene kan også være usikre på hvilken informasjon de trenger for å løse oppgaven (Schaap & Goedhart, 2011). For mange elever vil det å gjøre antakelser bety en endring i den matematiske diskursens metaregler. Det vil si at det er nye metaregler i modelleringsdiskursen som elevene enda ikke har lært seg, og dermed kan skape hindringer i arbeidet.

Å gjøre antakelser i systemavgrensingen krever altså erfaring. Som lærer er det viktig å være bevisst på at det å gjøre antakelser ikke nødvendigvis er en del av elevenes metaregler i en matematisk diskurs om modellering. Det krever arbeid over tid for å få erfaringer og kompetanse på å gjøre relevante antakelser. Viirman og Nardi (2019) fokuserte i sin studie på elevenes utvikling av antakelser. I starten av arbeidet var antakelsene basert på gjetning, men gikk gradvis over til mer relevante antakelser. I vår undersøkelse hadde ikke elevene fått noen indikasjon på forhånd at de måtte gjøre antakelser. Dersom det hadde vært nevnt eksplisitt på forhånd er det en mulighet for at elevene hadde hatt mer fokus på det også i vår undersøkelse, men sannsynligvis i form av ritualiserte handlinger.

Våre funn viste tendenser til at elevene møtte på noen kommognitive konflikter i arbeidet med modelleringsoppgaven. Det oppsto konflikter mellom elevenes diskurs og det som kreves i en modelleringsdiskurs, og mellom elever på de ulike gruppene. Kommognitive konflikter kan by på utfordringer i arbeidet for elevene, men kan også oppleves som problematisk for læreren hvis man ikke er bevisst på det. Kommognitive konflikter er noen ganger uunnværlig for at læring skal skje (Sfard, 2008). Det er derfor viktig at konfliktene blir brukt som et springbrett på veien videre i stedet for et hinder til læring. Det er nettopp elevenes direkte møte med konflikten som kan bidra til en endring i diskursen (Sfard, 2008). Slik vi ser det kan hindringene elevene i vår undersøkelse møtte på være et godt utgangspunkt for å lære seg prosessene i modelleringsdiskursen. Hindringene kom for eksempel til syne i forbindelse med tolking av oppgaveteksten. Der var det tydelig at elevene hadde ulike oppfattelser av begreper. Et ord som for eksempel «mesteparten» kan tolkes veldig forskjellig av elevene. Elevenes ulike tolkninger av begrep skapte en hindring i elevenes arbeid. I likhet med funnene til Ärlebäck og Frejd (2013) brukte elevene personlige erfaringer for å støtte egne tolkninger i en modelleringsdiskurs. I situasjonene hvor elevene hadde ulik oppfattelse av ord ser vi tegn på at det kan ha oppstått en kommognitiv konflikt om hva som var rett og galt. I stedet for å diskutere og komme frem til en definisjon som kunne hjelpe gruppa til å komme frem til en modell, endte det med at en på gruppa «tvang» gjennom sin tolkning av begrepet. Hos begge gruppene resulterte det i en uhensiktsmessig tolkning som skapte noen hindringer for dem i det videre arbeidet. I likhet med Sfard (2007) opplevde vi at det var eleven som oppfattes som «best» på gruppa som endte med det siste ordet. På den ene gruppa uttalte Mia i en slik situasjon at hun følte seg for dum for dette her, til tross for at hennes tolkning hadde vært mer hensiktsmessig i akkurat denne oppgaven. Vi så indikasjoner på at Mia i senere arbeid havnet litt på utsiden av gruppa, noe som kan ses på som at den kommognitive konflikten ble et hinder for videre kommunikasjon.

5.2 Hindringer i arbeid med tolking og vurdering

I analysen har vi sett at flere hindringer oppstår i elevenes arbeid med tolkning og vurdering av matematiske resultater. Prosessen med å gå fra den matematiske verdenen og over til den virkelige situasjonen synes vanskelig for elevene, da spesielt det å begrunne sine resultater ut fra mer enn bare påstander. Et av de mer krevende elementene innenfor tolking og vurdering er argumentasjon for sitt standpunkt med basis i matematikk (Galbraith & Stillman, 2006). I følgende avsnitt vil vi diskutere hva som kan være forklaringen på hindringene vi observerte innenfor tolking og vurdering.

Et av funnene våre viser at behovet for å involvere matematikk i tolking og vurdering av resultatene ikke alltid er like åpenbart for elevene. Allerede tidlig i arbeidet hadde enkelte av elevene i gruppe A et fokus på å utforme en rapport som beskriver gruppas mening. Dette var på et tidspunkt hvor elevene ikke hadde funnet et matematisk resultat enda. Elevene baserte seg da på hva de umiddelbart trodde, før de i det hele tatt hadde satt seg inn i de matematiske aspektene ved oppgaven. Hverdagslige betraktninger ble tatt i bruk slik som at «det umulig kan gå», «det må jo bli alt for mye», eller «baggen er jo altfor liten». Dette harmonerer med funnene til Galbraith og Stillman (2006), som også observerte ubegrunnede gjettinger blottet for matematisk støtte. Ärlebäck og Frejd (2013) gjorde liknende observasjoner i sin studie. De påpeker at modelleringsoppgavers sterke tilknytning til virkelige situasjoner gjør at de nærmest inviterer til bruk av hverdagslige betraktninger (Ärlebäck & Frejd, 2013).

Dokumentasjonsaspektet ses på som en viktig del av modelleringsprosessen (Lesh et al., 2000). Ved å ha med et dokumentasjonsaspekt i modelleringsoppgaver legger man til rette for at elevene utvikler ferdigheter innenfor matematisk argumentasjon (Lesh et al., 2000). Nettopp det med å skrive rapporten så ut til å være et fokus for elevene i begge gruppene. Som nevnt i forrige avsnitt ønsket den ene gruppa å skrive rapport før de i det hele tatt hadde funnet noen resultater. I gruppe B observerte vi at i det øyeblikket de mente at de hadde kommet frem til et svar som de knyttet til den reelle situasjonen startet de med rapportskriving i stedet for å argumentere for sin løsning og begrunne sine tolkninger. Hadde de forsøkt å bygge en argumentasjon for sitt standpunkt kunne de oppdaget at løsningen de var kommet frem til ikke var dekkende for situasjonen. Det kunne videre ført til at de hadde gått tilbake i modelleringssyklusen for å gjennomføre nye utregninger og eventuelt gjort justeringer på modellen sin. Oppgaveteкstens fokus på rapporten som et sluttsvar kan muligens ha ført til at elevene har sett på selve rapporten som målet med oppgaven. Dette kan i så måte ha blitt en hindring for at elevene jobber som tiltenkt med modelleringssyklusen. En mulig forklaring på at vi ser et tidlig fokus hos elevene på det å skrive en rapport kan være basert på deres FSO. Elevene har ingen tidligere erfaringer som gjør at de kan knytte rapportskriving til matematikk, men eleven kan ha oppfattet situasjonen som å være tilstrekkelig lik til at de kan ha benyttet seg av fortilfeller fra andre skolediskurser. Det kan ha ført til at de tar i bruk rutiner for rapportskriving fra andre fag hvor rapporten i seg selv er målet. Handlingen blir i så måte en ritualisert deltakelse i diskursen, hvor utførelsen gjøres med fokus på handlingen (Lavie et al., 2018). En ritualisert deltakelse trenger ikke å være noen ulempe så tidlig i en læringsprosess, men det blir en utfordring når elevene ikke vet hva slags innhold og argumentasjon som er forventet av dem i den nye diskursen.

Vi observerte også at mangler fra elevenes arbeid med systemavgrensing førte til hindringer med å tolke og vurdere resultatene. To av elevene på gruppa hadde i lengre tid arbeidet med å regne ut pengenes vekt, mens den siste eleven var opptatt av baggens fysiske utforming. Det at elevene ikke har blitt enige om hva som er avgjørende for om raneren kan bære med seg ransutbyttet eller ikke gjør at det blir vanskelig for dem å tolke resultatene de har fått. Elevene ender opp i en diskusjon om hva som må til for å argumentere for en løsning på problemet. Blum og Ferri (2009) påpeker at det er viktig å oppmuntre til ulike individuelle løsninger. Samtidig kan elevers individuelle tilnærming til en oppgave medføre at gruppens arbeid stopper opp. Det kan fort oppstå utfordringer hvis ikke elevene er bevisste på at de jobber med ulike tilnærminger til oppgaven. Vi så eksempler på hvordan ulike syn på hvilke rammer som gjelder medførte at elevene argumenterte for sitt syn og impliserte at den andre personen tok feil, selv om begges løsninger isolert sett inneholdt riktige påstander. Elevene ytret ulike narrativer, og det oppstod en kommognitiv konflikt. Ved flere anledninger så vi at det førte til at elevene mistet troen på egen løsning, og at det ikke ble gjort noe forsøk på å oppklare konflikten. Sfard (2007) påpeker at hvis kommognitive konflikter forblir uoppklarte for elevene kan dette føre til at de forkaster egne ideer og blindt lar seg lede av andre som synes å opptre selvsikkert. For elever som er i startfasen innenfor modellering ser vi viktigheten av at kommognitive konflikter underveis blir løst. Det kan være en fordel å jobbe innenfor felles avklarte rammer, slik at alle involverte trekker i samme retning. Etter hvert som elevene blir mer fortrolige med modelleringsprosessen kan en søke flere resultater parallelt for så å tolke disse opp mot hverandre og den reelle situasjonen.

Modellering skiller seg fra en del andre matematiske diskurser ved at man i tillegg til å finne et svar må argumentere for hvorfor svaret gir en rimelig løsning. Galbraith og Holton (2018) mener at nettopp argumentasjon for svar er vanskelig for mange, da svaret i seg selv synes å ha mer betydning for elevene enn de matematiske argumentene som leder til svaret. I vårt datamateriale så vi at elevene i liten grad argumenterte for hvorfor de mente at deres matematiske resultater stemte. I andre matematiske diskurser som elevene har erfaring med er som oftest svaret i seg selv målet med oppgaven, og elevene er vant til at læreren evaluerer svaret på slutten av arbeidet (Alrø & Skovsmose, 2002). Dette kan være en medvirkende faktor til at elevene synes å ha vanskeligheter med å ta egne valg og argumentere for disse i en modelleringsprosess. Stylianides og Ball (2008) påpeker i sin studie at arbeid med argumentasjon er en viktig bidragsyter til at elever får en konseptuell forståelse av matematikken. I arbeid med modellering vil argumentasjon være et vesentlig punkt, da en viktig del av modelleringsprosessen er å evaluere resultatene modellen har gitt, samt vurdere modellens gyldighet (Blomhøj & Jensen, 2008). En slik måte å tenke på fører til at elevene gjentatte ganger må ta stilling til egen og andres argumentasjon for å gjøre seg opp en mening om modellen vil være gyldig innenfor oppgavens forutsetninger. Siden modelleringsoppgaver ofte inneholder faktorer av både matematisk og ikke-matematisk art vil argumentasjonen også kunne inneholde vurderinger hvor det matematiske knyttes opp mot andre relevante faktorer fra omverdensproblemet (Stillman et al., 2020). Stillman et al. (2020) påpeker også at ferdighetene elever lærer i modelleringsoppgaver vi være til større hjelp senere i arbeidslivet enn ren matematikk.

5.3 Implikasjoner

Så hvordan kan vår studie bidra til å gjøre det lettere for lærere å ta i bruk modellering i undervisningen? I de neste avsnittene vil vi se på hvilke konsekvenser våre funn kan få for hvordan man tar i bruk modellering i klasserommet, og komme med noen betraktninger på hvilke faktorer en bør være bevisst på i planlegging og gjennomføring modelleringsoppgaver.

Først og fremst er det viktig å være bevisst på at modellering vil være en ny diskurs for elevene, med andre metaregler enn det de er vant til fra tidligere læringssituasjoner i matematikk. Som vi har omtalt tidligere i teksten medfører det at vi ikke kan forvente at de oppdager de nye metareglene av seg selv. Som lærere kan vi legge til rette for at elevene møter de nye metareglene gjennom *kommognitiv konflikt.* Gjennom å oppleve en nødvendighet for nye metaregler vil elevene gradvis tilegne seg de nye reglene (Sfard, 2007). I vår studie med elever som aldri har jobbet med modellering tidligere så vi at de møtte mange nye metaregler, og at situasjonen fort ble uoversiktlig for elevene. Elevene var i mange tilfeller usikre på hva det egentlig var de skulle finne ut av. For å gjøre situasjonen mer håndgripelig foreslår vi å ikke introdusere en fullskala modelleringssyklus første gang elevene skal jobbe med modellering, men å velge ut noen prosesser som jobbes med på en gang. I vår studie valgte vi å gi elevene en oppgave hvor problemstillingen var gitt, og håpet med det å gi elevene en kurs de kunne følge for å tydeliggjøre målet. Analysen av datamaterialet tyder på at vi som første introduksjon til modellering med fordel også kunne ha hjulpet elevene med systemavgrensingen, da mange av hindringene vi oppdaget baserte seg på vansker i systemavgrensing. Blomhøj og Jensen (2003) påpeker at ved å jobbe med prosessene *matematisering* og *matematisk analyse* legger man et godt grunnlag for å forstå hvordan en omverdenssituasjon oversettes til matematikk og hvordan en modell kan utarbeides og anvendes til å undersøke muligheter modellen gir. For å oppnå dette kan en for eksempel oppgi både problemformuleringen og forenklende antakelser, samt identifisere de strategiske objektene i oppgaveteksten slik at fokuset i større grad blir flyttet over til selve matematiseringen og anvendelsen av modellen.

Samtidig er det viktig å huske på at alle prosessene i en modelleringssyklus inneholder viktige ferdigheter som må læres. Blomhøj og Jensen (2003) understreker at for å opparbeide en modelleringskompetanse må man jobbe med alle prosessene i en modelleringssyklus, og at elevene trenger å føle på det å være overveldet av antallet mulige veier en løsning kan ta, uten noen veiviser for hvordan man skal komme seg dit. Vi støtter Blomhøj og Jensens standpunkt, men foreslår altså å tilnærme seg en full modelleringssyklus gradvis for å la elevene få tid til å tilpasse seg de nye metareglene. Som Sfard (2007) slår fast er en endring i metaregler en prosess som kan ta lang tid, og som krever at elevene gjennom deltakelse får oppleve nødvendigheten av. Ved en gradvis tilnærming oppnår vi at ikke antallet metaregler som endres på en gang blir overveldende.

I og med at elevene opererer i en ny diskurs kan man forvente at det vil være en del rutiner som enten ikke lenger er tilstrekkelige eller som mangler for deltakelse i diskursen. Som Sfard (2008) omtaler vil deltakelse i en ny diskurs i begynnelsen basere seg på ritualiserte rutiner. Det vil si at man gjør rutinene for rutinens skyld. Et eksempel på en rutine som elevene i de aller fleste tilfeller vil mangle er nettopp hvilken strategi de skal bruke i arbeidet med en modelleringsoppgave (Blum, 2015). For å hjelpe elevene med å gjøre gode strategiske valg foreslår Blum og Ferri (2009) at lærer bruker modelleringssyklusen som et læringsverktøy ved å gjøre syklusen eksplisitt for elevene. De foreslår å bruke en firestegs syklisk plan med punktene *oppfattelse av oppgaven - etablere en modell - bruke matematikk - forklare resultat* (Blum og Ferri, 2009 s. 54). Et slikt grep vil kunne være med på å gi elevene strategisk støtte for å løse modelleringsoppgaver, og vil kunne danne et grunnlag for utvikling av rutiner innenfor modelleringsprosessen.

Vi så i vår studie at oppgavens krav om å skrive en rapport som underbygger gruppens funn skapte flere hindringer underveis. Det kan tenkes at elevene raskt går i gang med å skrive rapporten fordi å skrive rapport oppfattes som mer kjent for elevene enn å arbeide i modelleringsdiskursen. Galbraith og Holton (2018) foreslår å gi elevene en gradvis tilnærming til rapportskriving, ved at en til å begynne med i stedet skriver et sammendrag av hva man har gjort. Man kan så gradvis utvide omfanget av rapporten når elevene har tilstrekkelig kompetanse innenfor modellering. Arbeidet med å skrive en rapport skal bidra til å trene elevene i å argumentere for sine funn. I undersøkelsen så vi at elevene i stor grad konkluderte ut fra hverdagslige betraktninger i stedet for å bruke matematikk til å støtte argumentasjonen. Våre funn tyder på at rapporten ble en hindrende faktor, som fint kunne vært erstattet av et sammendrag eller en muntlig presentasjon av gruppas resultater siden elevene ikke har arbeidet med modellering tidligere.

I tillegg til implikasjonene vi har skissert for elevenes deltakelse ønsker vi å presentere noen punkter som vil være viktig for lærere å være bevisste på rundt sin egen rolle i planleggingen og gjennomføringen av en modelleringsoppgave. Innledningsvis vil kunnskap om modelleringssyklusen kunne være til god hjelp i utarbeidelse av oppgaver som elevene skal jobbe med. Som omtalt i forrige avsnitt vil man eksempelvis kunne utarbeide oppgaver som spesifikt trener elevene i matematisering og matematisk analyse. I oppgaver som er tenkt å dekke en full modelleringssyklus vil kunnskapen kunne bidra til å lage oppgaver som gir tilstrekkelig innhold i alle delprosessene. Lesh et als. (2000) seks prinsipper for utarbeidelse av modelleringsoppgaver, som er beskrevet i teoridelen, vil også være et godt supplement for å lage egne oppgaver. For det andre er det viktig at lærer vurderer om elevene har den nødvendige matematiske kunnskapen til å løse oppgaven. I vår studie observerte vi at elevene i noen tilfeller prøvde å bruke matematiske kunnskapsområder hvor de ikke hadde tilstrekkelige ferdigheter. Modellering kan godt brukes for å skape en kommognitiv konflikt om et matematisk objekt, men det er da viktig at elevene har tilstrekkelige ferdigheter til å forstå at det er en konflikt mellom de ulike diskursene. I tillegg bør lærer også vurdere om elevene innehar nok kunnskap om hverdagssituasjonen til at den gir mening, både kontekstmessig og matematisk.

Lærers kunnskap om modelleringssyklusen og de ulike prosessene innenfor hver overgang vil også være sentralt for å ta i bruk modellering på best mulig måte. Ved å vite om hvilke faktorer som kjennetegner en vellykket prosess har læreren et godt grunnlag for å kunne forutse hvilke hindringer som kan oppstå (Galbraith & Stillman, 2006). Man vil også kunne vurdere hvor i prosessen det vil være sannsynlig at hindringene kan oppstå, og kan på den måten forberede seg på hvordan man kan veilede elevene forbi utfordringene. Kunnskapen vil og kunne bidra til å vurdere i hvilken grad elevenes modell er vellykket og funksjonell.

For å bidra til en vellykket modelleringsprosess er det viktig at læreren planlegger hvordan veiledning underveis kan gis til elevene uten å legge for store føringer (Galbraith & Stillman, 2006; Blum & Ferri, 2009). Målet er at elevene på sikt skal opparbeide seg ferdigheter slik at de vil være i stand til å hjelpe seg selv i matematiske situasjoner eller i hverdagskontekster (Blum, 2015). Som nevnt tidligere er det viktig å være på vakt for situasjoner hvor det har oppstått kommognitiv konflikt, slik at ikke arbeidet stopper opp og elevene resignerer. Stillman et al. (2015) fant i sin studie at elever med liten erfaring innen modellering ofte bruker mye tid på å prate om problemet i stedet for å rette fokuset sitt mot å lage en modell av det. I mange tilfeller vil elevene trenge støtte fra lærer for å komme seg videre fra en slik situasjon. En god tilnærming for å hjelpe dem videre er å gi innspill til elevene på metanivå, eller sagt med andre ord, innspill som berører elevenes strategi. Eksempler på spørsmål som kan stilles er «Hva er det dere mangler?», «Hva er målet med det dere jobber med?», «Stemmer resultatene dere har kommet frem til med den virkelige situasjonen?» og liknende. Stillman et al. (2015, s. 98) foreslår i sin studie et rammeverk som består av 16 spørsmål som elevene kan ha til rådighet mens de jobber med modelleringsoppgaver. Spørsmålene er gruppert etter de forskjellige fasene i modelleringssyklusen og kan fungere som en hjelp for elevene underveis. For elever uten erfaring med modellering vil dette rammeverket være i overkant ambisiøst, og muligens også forvirrende. Samtidig vil en tilpasset utgave av en slik liste kunne fungere som strategisk støtte for elever som er nye i modelleringsdiskursen, og bidra til en felles retning for gruppas arbeid.

En liste med spørsmål vil være en hjelp til å oppnå at elevene i størst mulig grad arbeider selvstendig, noe Blum og Ferri (2009) påpeker viktigheten av. Blum og Ferri (2009) så i sine studier at lærerens syn på hva som er den ideelle løsningen i mange tilfeller gjenspeilet seg i innspill læreren gav til elevene. En forklaring på dette kan ifølge Blum og Ferri (2009) være at læreren ikke har satt seg godt nok inn i oppgavens utfallsrom, og dermed vurderer elevenes løsninger som ugunstige eller feil. Dette kan være med på å styre elevene vekk fra gode, relevante løsninger. I vårt tilfelle ser vi i ettertid at vi i enkelte situasjoner kan ha favorisert tilbakemeldinger som gikk på pengenes vekt, noe som kan ha vært en medvirkende faktor til at gruppe A ikke kom frem til en felles enighet om vekt eller volum som strategisk objekt.

I avsnittene over har vi skissert noen punkter som kan bidra til at elevenes introduksjon til modellering blir så lærerik og forutsigbar som mulig. Når vi gjennomførte vår datainnsamling observerte vi mange hindringer og en prosess som virket både kaotisk og tidkrevende. Vi antar derfor at mange andre som tar i bruk modellering for første gang kommer til å oppleve liknende situasjoner. Vi ønsker å understreke at modellering til tider *kan* fortone seg slik. Men gjennom forberedelse og kunnskap vil man kunne øke sjansen for et godt læringsutbytte allerede fra første økt. Samtidig vet vi at ferdigheter innenfor modellering tar tid å opparbeide seg (Blum, 2015). Alrø og Skovsmose (2002) påpeker at mange lærere ikke tar seg tid til å jobbe utforskende da prosessen ofte ses på som tidkrevende, og i frykt for å ikke rekke gjennom pensum. I gjeldende læreplan i matematikk er modellering et av kjerneelementene, og det er fra sentralt hold bestemt at modellering skal være en viktig del av matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2020). Ferdigheter innenfor modellering og anvendelser vil også være en del av skriftlig eksamen i matematikk for tiende trinn fra våren 2022, noe som er med på å stadfeste modelleringens viktighet i faget. Dette understrekes, som omtalt tidligere, også av Stillman et al. (2020) som sier at modellering og anvendelse av matematikk er en av de viktigste matematiske ferdighetene i et samfunnsperspektiv. Vi mener derfor det er viktig at modellering sees på som en mulighet for å utvikle viktige matematiske ferdigheter, både med tanke på pensum og skolematematikk, men også for å trene elevene i bruk av matematikk i andre sammenhenger enn i en skolediskurs.

5.4 Vurdering av undersøkelsens kvalitet

I undersøkelsen har vi analysert hvilke hindringer elevene møter på i sitt første møte med en modelleringsdiskurs. Det betyr likevel ikke at alle hindringene nødvendigvis oppstår kun fordi det er en ny situasjon. Det er også mulig at flere av hindringene kunne oppstått i andre mer kjente situasjoner for elvene. Det vi har gjort i vår undersøkelse er å trekke frem hindringer hvor den nye situasjonen kan ha hatt en innvirkning på elevene. Vi har også gjort noen metodiske valg underveis som har hjulpet oss i å beskrive hindringer i elevers første møte med en modelleringsdiskurs. Totalt var klassen som deltok i studien delt inn i ti grupper fordelt på to gjennomføringer, men det ble kun tatt lydopptak av to av gruppene. I tillegg samlet vi inn gruppenes skriftlige arbeid. Som nevnt i metodekapitlet planla vi å ta videoopptak av gruppene, men grunnet logistiske utfordringer fikk vi ikke tilsendt videoopptaksutstyret i tide. Det at vi var begrenset til én lydopptaker gjorde at vi ikke fikk like rike data som vi kunne hatt. Vi ble også begrenset til én gruppe per gjennomføring, noe som gjorde at vi har lite data på de resterende gruppene. Opptak av flere grupper kunne gitt oss et bredere datagrunnlag for undersøkelsen. Videoopptak ville også gjort det lettere å tolke elevenes utsagn ved å ha tilgang til fysiske handlinger og kroppsspråk. Dette kunne gitt oss et mer nyansert bilde av modelleringsprosessen. På den andre siden var begge forskere til stede under gjennomføringen, noe som har gitt begge en førstehåndskunnskap om data. Vi har med de tilgjengelige data gått grundig til verks og gjennomført flere runder med koding og analyse av datamaterialet. Den åpne kodingen ble gjennomført med fokus på å ikke tenke på teori vi allerede kjenner til, slik åpen koding er tiltenkt å være. Allikevel er det vanskelig å gjøre vurderinger helt uten innflytelse av egen teoretisk kunnskap, så denne faktoren kan ha vært med på å påvirke vår innledende koding. Med bakgrunn i ovennevnte vurderinger mener vi fortsatt at vårt datamateriale og påfølgende koding av dette gir oss en troverdig fremstilling av undersøkelsen.

Undersøkelsen er gjennomført i en tilnærmet ordinær klasseromssituasjon. Det vil si at gruppene har hatt mulighet til å se på hverandre og observere hva de andre gruppene gjør. Dette kan for eksempel ha virket styrende på at flere grupper har brukt pengenes vekt som et strategisk element siden de så at andre grupper fant fram en vekt og veide sedler. Ved å gjennomføre med én og én gruppe i et avskjermet rom ville vi i større grad kunne få fram hvordan elevene på gruppa handler, uten å være påvirket av andre. Samtidig ville dette vært en unormal situasjon i skolen, da en sjeldent har anledningen til å gjennomføre gruppearbeider med enkeltgrupper. En annen viktig faktor i studien er at undersøkelsen kun er gjennomført med seks elever. Dette gjør at resultatene ikke lar seg generalisere til å gjelde et stort utvalg elever. Det undersøkelsen gir oss svar på er hvilke tendenser en kan se i vårt datamateriale, og gir et innblikk i hvilke hindringer som kan oppstå i elevers første møte med modellering. Vår studie har gått i dybden på enkeltgruppers arbeid med en modelleringsoppgave i en normal undervisningskontekst på en måte som en sjelden har tid til i en ordinær klasseromssituasjon. Funnene våre kan i så måte ses på som et bidrag til kunne forutse mulige hindringer som kan oppstå i andre sammenliknbare klasserom, men er på ingen måte noen utfyllende liste over alle hindringer som kan oppstå i elevers første møte med en modelleringsdiskurs.

I vår studie har vi beskrevet hindringer i elevenes modelleringsdiskurs ved hjelp av Sfards (2008) rammeverk om kommognisjon. Vi har utvidet begrepsapparatet til Sfard med Lavie et al. (2018) som er en utdypelse av rutinebegrepet innenfor kommognisjon. Lavie et al. (2018) bemerker at for å identifisere rutiner må utvikling i rutiner studeres over tid. Vi mener allikevel at våre funn gir nyttige beskrivelser av hvordan elevers rutiner påvirker deres deltakelse i en modelleringsdiskurs. Selv om vi ikke ser på utviklingen av rutiner er det likevel relevant å se på hvilke rutiner som tas i bruk i en denne diskursen.

For å kunne gå i dybden på de ulike overgangene i modelleringsprosessen supplerte vi modelleringssyklusen til Blomhøj og Jensen (2008) med begreper fra Galbraith og Stillman (2006). Dette valget ble tatt fordi Galbraith og Stillman (2006) sitt rammeverk eksemplifiserer sentrale handlinger i hver overgang, noe som ikke gjøres like tydelig i Blomhøj og Jensen (2008). Samtidig beskriver Blomhøj og Jensen (2008) etter vår mening hovedmålet med hver enkelt prosess på en grundigere måte. Vi har valgt ut handlingene i hver overgang hos Galbraith og Stillman (2006) som er relevante for elever i grunnskolen, og sett bort fra punkter som er rettet mot elever på et høyere alderstrinn. Selve modelleringsprosessen i de to rammeverkene er like, bortsett fra at Blomhøj og Jensen (2008) også omtaler de ulike overgangene i prosessen med egne navn. Vi valgte Blomhøj og Jensen (2008) som modell av syklusen da vi synes alle steg og overganger kommer tydeligst frem i denne modellen, samtidig som vi mener at handlingene i Galbraith og Stillman (2006) er direkte overførbare til Blomhøj og Jensens (2008) modell uten at innholdet i rammeverkene endrer karakter. Tilpasningene vi har gjort gjør at rammeverket passer til vår undersøkelse, men vil også ha en viss overføringsverdi til lignende situasjoner. Vårt tilpassede rammeverk vil allikevel ikke kunne sees på som et etablert rammeverk, da det ikke har vært utprøvd flere ganger.

6 Avslutning

Denne studien viser eksempler på hindringer som kan oppstå i elevers deltakelse i en modelleringsdiskurs. Studien viser at elever som møter modellering for første gang vil møte en del ukjente diskursive mønstre som kan føre til utfordringer. Samtidig ser vi at elevene gjennom deltakelse i diskursen gjør flere oppdagelser som danner grunnlag for videre arbeid med modellering. Modelleringsoppgaver kan løses på ulike måter med tanke på dybde og nivå, og vi ser at elevene i sitt første møte med modellering til en viss grad greide å lage en modell av situasjonen. Som lærer vil man kunne tolke arbeidet med første modelleringsoppgave som at elevene har hatt et lite læringsutbytte, da elevene ikke kommer frem til et svar som tar høyde for alle eventualiteter og er velbegrunnet. Vi mener at vår studie antyder at det skjer mange viktige prosesser på metanivå når elever møter modellering for første gang, og at den kanskje viktigste læringen for å mestre matematisk modellering allerede er i gang.

Våre funn tyder på at tidligere erfaringer elevene har med seg fra andre matematiske diskurser påvirker dem i valg som blir tatt underveis. Når elevene ikke har erfaring med den nye diskursen så vi flere eksempler på at de benytter rutiner som fører til hindringer i den nye situasjonen. Dette er rutiner som de har tatt med seg fra andre diskurser, men som ikke passer innenfor modellering. Elevenes arbeid med oppgaven var i mange tilfeller ritualisert, med selve utførelsen av handlingen som det sentrale. Vi så få tegn på produktorientert deltakelse hvor målet med arbeid i diskursen stod sentralt. I arbeid med modelleringsoppgaver vil man i de aller fleste tilfeller måtte jobbe produktorientert, da det er selve modellen som er målet. En vellykket modell kjennetegnes av at den ivaretar sentrale aspekter fra situasjonen, og at den kan endres for å undersøke flere alternative tolkninger. Med fokus på prosessen risikerer man at når elevene har kommet frem til ett svar opplever de oppgaven som løst og har ikke noe motiv for å undersøke flere muligheter. Elevene trenger derfor å opparbeide seg nok erfaring og kompetanse innenfor modellering til at deres deltakelse i modelleringsdiskursen går over til å bli produktorientert.

Elevenes manglende erfaring med modellering førte også i flere tilfeller til situasjoner som vi har tolket som kommognitive konflikter. For det første observerte vi et avvik mellom elevenes syn på hva som må til for å løse oppgaven og hvordan lærer har tenkt at modelleringsoppgaven skal løses. Elevenes manglende erfaring med denne typen oppgaver gjorde at de ble usikre på hva slags løsning som var forventet. For det andre vil det kunne oppstå kommognitive konflikter relatert til at elevene har ulike oppfattelser av aspekter i den virkelige verden. I begge tilfeller er det viktig at lærer veileder elevene til å få løst opp i konflikten, slik at situasjonen blir en mulighet for å lære og ikke et uoverkommelig hinder.

Gjennom analyse ved hjelp av vårt rammeverk om modelleringssyklusen ser vi tendenser til at elevene møter hindringer innenfor samtlige prosesser, men at enkelte av prosessene medfører større problemer sett i et helhetsperspektiv. Vi observerte spesielt at manglende erfaring innen systemavgrensing hindrer elevenes arbeid med oppgaven. Nettopp det å ha mulighet til å definere viktige faktorer i oppgaven selv synes utfordrende for elevene, noe som medførte hindringer gjennom hele modelleringsprosessen. Systemavgrensing baserer seg på metaregler som elever tidligere ikke har erfart eller blitt fortalt, noe som kan være en forklaring på hvorfor akkurat dette ble en hindring i gruppene. Elevene møter også hindringer innenfor tolking og vurdering, da overgangen mellom den matematiske verden og den virkelige verden synes vanskelig. Nettopp denne ferdigheten er sentral for elevene å opparbeide seg erfaring med, da bruk av matematikk i samfunnet i all hovedsak baserer seg på å tolke matematiske resultater opp mot en virkelig kontekst.

Studien har gitt oss noen verdifulle perspektiver på hvilke utfordringer som kan oppstå i elevers første møte med modellering. Ved å bruke Sfard (2008) og Lavie et al. (2018) har vi satt ord på hindringer som kan oppstå i sammenliknbare kontekster, slik at lærere kan ha mulighet til å forutse og planlegge egen introduksjon til modellering på en god måte. Våre funn kan tyde på at det er viktig å være eksplisitt overfor elevene om modelleringsdiskursens nye metaregler. Fra Sfard (2008) vet vi at elevene som oftest ikke finner ut av metaregler på egenhånd, men at reglene læres ved direkte kontakt med den nye diskursen. Man kan således si at en helt sentral faktor i elevers første møte med modellering er å oppleve de endrede metareglene gjennom kommognitiv konflikt. Når modellering tas i bruk i en klasse uten erfaring fra diskursen er det viktigste med økta, slik vi ser det, nettopp at de endrede metareglene blir gjort tydelige for elevene. Tradisjonelt sett vil kanskje lærere si at arbeid med en oppgave har vært vellykket hvis elevene kommer frem til rett svar, mens i første møte med modellering er økta vellykket hvis elevene har oppdaget at reglene for handling i diskursen er annerledes enn det de er vant til. Mye viktig læring kan altså allikevel ha foregått, selv om det ikke nødvendigvis kommer frem i elevenes sluttresultat. Som lærer må en altså ikke gi opp modellering etter én økt basert på at elevene ikke «fikk det til».

Når ny læreplan i matematikk ble innført høsten 2020 ble samtidig modellering beskrevet som et av kjerneelementene i faget. Elevene skal bruke matematikk til å beskrive virkeligheten, få innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes, samt lage, utvikle og vurdere modellene (Utdanningsdirektoratet, 2020). Som vi har drøftet i vår studie vil dette kreve store metadiskursive endringer for elevene, noe som igjen stiller krav til matematikklærere. Kunnskap om modellering og modelleringssyklusen vil være viktig, slik at en er forberedt på hindringene som kan oppstå når elevene møter den nye diskursen. Det er liten tvil om at Utdanningsdirektoratet ved å definere modellering som et av kjerneelementene ønsker å dreie faget mot et mer virkelighetsnært fokus, i tråd med samfunnets behov. Samtidig vet vi ut fra Sfard (2008) og Lavie et al. (2018) at virkeligheten er et område hvor elevene har et vesentlig større utvalg av tidligere erfaringer å basere sine avgjørelser på. En mulig utfordring for elevene i den forbindelse kan bli å balansere erfaringer fra hverdagsdiskurser med erfaringer fra matematiske diskurser, slik at samspillet blir best mulig.

Vår studie åpner med det også for noen nye spørsmål. Når hverdagsdiskurser i større grad trekkes inn i matematikken kan det være en fare for at den matematiske diskursen blir vurdert som underordnet. Vi så i vår studie flere eksempler på at elevene valgte ikke-matematiske tolkninger av oppgaven. Det hadde derfor vært interessant forske videre på i hvilken grad elever mister fokus på det matematiske når oppgavene er tettere knyttet til situasjoner som elevene allerede har et velutviklet forhold til. Det kan tenkes at spesielt yngre elever som er i oppstartsfasen innenfor matematisk utvikling, men besitter en vesentlig del av egenopplevde erfaringer, i stor grad vil basere sine avgjørelser på hverdagslige betraktninger i stedet for matematikk. Som en forlengelse av vår studie hadde det også vært interessant å gjennomføre en tilsvarende oppgave med flere sammenliknbare grupper for å se om de samme funnene opptrer også i deres første møte med en modelleringsdiskurs. En annen interessant vinkling for videre forskning hadde vært å gjennomføre flere modelleringsøkter med den samme gruppa for å se om elevenes metaregler har blitt endret.

Vi har gjennom vår studie gått i detalj på hvordan virkelighetsnære situasjoner kan brukes inn i matematikkundervisningen for å skape mulighet for læring. For å runde av vår studie ønsker vi å sitere Vygotsky som understreker viktigheten av å inkludere den virkelige verden i skolen:

> Ultimately, only life educates, and the deeper that life, the real world, burrows into the school, the more dynamic and the more robust will be the educational process. That the school has been locked away and walled in as if by a tall fence from life itself has been its greatest failing. Education is just as meaningless outside the real world as is a fire without oxygen, or as is breathing in a vacuum. (Vygotsky, 1997, s. 343)

Referanser

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique* (Vol. 29). Springer Science & Business Media.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*, *22*(3), 123-139.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73-96). Springer, Cham.

Blum, W., Ferri, R.b. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8). Routledge.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.* Hentet fra https://www.etikkom.no

Edwards, D., & Hamson, M. (2016). *Guide to mathematical modelling*. Macmillan International Higher Education.

English, L. D. (2003). Mathematical modelling with young learners. *Mathematical modelling* (pp. 3-17). Woodhead Publishing.

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational studies in mathematics*, *63*(3), 303-323.

Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer International Publishing.

Galbraith, P. & Holton, D. (2018). *Mathematical Modelling: Guidebook for teachers and teams.* Australian Council for Educational Research.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 143-162.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 137-144). Springer, Boston, MA.

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children’s experience. *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 89-98). Springer, Boston, MA.

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Ectj*, *29*(2), 75.

Johannesen, A., Tufte P.A., & Christoffersen, L. (2019). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5). Abstrakt forlag.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2018). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153-176.

Lesh, R. (2003). How mathematizing reality is different from realizing mathematics. *Mathematical Modelling* (pp. 37-52). Woodhead Publishing.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. R. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. *Research design in mathematics and science education* (pp. 591-646). Lawrence Erlbaum Associates, Inc..

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, *38*(2), 113-142.

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Universitetsforlaget.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. (1. utg., ss. 3-32). New York: Springer.

NOU. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole — Et kunnskapsgrunnlag*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/

NOU. (2015). *Fremtidens skole — Fornyelse av fag og kompetanser*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/sec3

Schaap, S., Vos, P. & Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (s. 137-146). Springer.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1-38.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The journal of the learning sciences*, *16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Stillman, G., Brown, J. P., & Czocher, J. (2020). Yes, mathematicians do X so students should do X, but it's not the X you think!. *ZDM*, *52*(6), 1211-1222.

Stillman, G. A., Brown, J. P., & Geiger, V. (2015). Facilitating mathematisation in modelling by beginning modellers in secondary school. *Mathematical modelling in education research and practice* (pp. 93-104). Springer, Cham.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of mathematics teacher education*, *11*(4), 307-332.

Svennevig, J. (2001). *Språklig samhandling: innføring i kommunikasjonsteori og diskursanalyse*. Landslaget for norskundervisning.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: et sosiokulturelt perspektiv*. Cappelen akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05).* Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (p. 348). Springer Nature.

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 9-29.

Viirman, O., & Nardi, E. (2019). Negotiating different disciplinary discourses: biology students' ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 233-252.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. R. W. Rieber, & A. S. Carton (Red.), *The collected works of L.S. Vygotsky* (1, 1, 39-243). New York: Plenum Press.

Vygotsky, L. S. (1997). *Educational Psychology*. CRC Press LLC.

Ärlebäck, J. B., & Frejd, P. (2013). Modelling from the perspective of commognition–an emerging framework. *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 47-56). Springer, Dordrecht.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD.

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vil du delta i forskningsprosjektet *Elevers arbeid med matematisk modellering?*

Til foresatte for elever i XX ved XX skole

Vi er to studenter på Lærerspesialistutdanningen i matematikk 1 – 7 på NTNU og har planlagt å gjennomføre en undersøkelse i forbindelse med vår masteroppgave. Formålet med undersøkelsen er å se på hvilke muligheter og hindringer som ligger i arbeid med matematiske modelleringsoppgaver. Kort fortalt er modelleringsoppgaver matematiske oppgaver som knyttes til en virkelighetsnær kontekst. Eventuelle funn vil være nyttige for læreres planlegging av undervisning og til utvikling av kunnskap om emnet. Resultatene vil videre bli brukt i en masteroppgave ved NTNU med mulighet for publisering gjennom NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU er ansvarlig for prosjektet.

Hva innebærer deltagelse?

Dersom du velger å la ditt barn delta i undersøkelsen, vil barnet arbeide med en til to matematikkoppgaver i samarbeid med medelever. Timen vil bli ledet av klassens matematikklærer (xx). En medstudent vil også være med som observatør. Det vil også kunne bli tatt videoopptak av samtalene mellom elevene i gruppa. I etterkant av undervisningsøkten vil videoopptakene bli transkribert, anonymisert og slettet. I tillegg vil vi kunne bruke elevenes skriftlige arbeid. Arbeid med oppgavene vil ta omtrent to undervisningstimer á 60 minutter og gjennomføres i klassens matematikktimer i uke 44.

Det er frivillig å delta i prosjektet

Dersom ditt barn velger å delta, er det likevel mulig å trekke samtykket når som helst uten å oppgi noen grunn. Elevens bidrag vil da bli slettet. Det vil ikke medføre negative konsekvenser for ditt barn hvis dere velger å ikke delta, eller dersom samtykket trekkes tilbake. Elever som ikke ønsker å delta i prosjektet kan allikevel følge undervisningen uten at det registreres data, ved at arbeidet gjennomføres i grupper. I situasjoner hvor det gjøres opptak vil elevene da jobbe i tilstøtende grupperom med de samme oppgavene som resterende elever.

Bruk og oppbevaring av personlige opplysninger

Vi vil kun bruke opplysningene om ditt barn til formålet omtalt i dette skrivet. Opplysningene vil bli behandlet konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Alle navn vil anonymiseres. I tillegg vil alle utsagn som kan identifisere enkeltelever i transkripsjonen utelates.

Undertegnede og vår veileder ved NTNU vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil *i anonymisert form* kunne diskuteres med medstudenter ved NTNU.

Datamaterialet vil låses inn, og videoopptak blir oppbevart på en kryptert harddisk. Etter prosjektslutt, september 2021, vil videoopptak slettes og skriftlige data makuleres.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke. På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket. Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, ta kontakt med oss eller:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved anita.valenta@ntnu.no
- Thomas Helgesen, personvernombud NTNU, på epost thomas.helgesen@ntnu.no

Mvh.
Sindre Magnus Jacobsen – masterstudent ved lærerspesialistutdanningen i matematikk 1 – 7, NTNU. E-post: sindre.magnus.jacobsen@stavangerskolen.no
Lars Gunnar Olsen – masterstudent ved lærerspesialistutdanningen i matematikk 1 – 7, NTNU. E-post: lgo@gjerstad.kommune.no

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn kan:

- delta i samtale med elever og lærer hvor det blir tatt videoopptak - Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. september 2021

Det understrekes at barnet kan motsette seg deltagelse, selv om foresatte har gitt samtykke.

Barnets navn:

Foresatt(e) til prosjektdeltaker:

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD

Norsk senter for forskningsdata, 06.10.2020 12:05

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 778088 er nå vurdert av NSD.

Følgende vurdering er gitt:

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen. Vi forutsetter da at den gjennomføres i tråd med meldeskjemaet med vedlegg den 06.10.2020, meldingsdialogen, og vurderingen her. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 07.09.2021. Opptak, navn, koblingsnøkkel og andre personidentifiserende opplysninger skal da slettes.

Vi legger til grunn at dere er nøye med anonymiseringen av elevene i publikasjoner, ettersom mange vil vite hvor datainnsamlingen er gjennomført. Ingen enkeltpersoner skal kunne gjenkjennes, verken direkte eller indirekte.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om elevene.

Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

Vi viser for øvrig til vår kommentar over om frivillighet ved rekruttering/deltagelse over.

Datainnsamlingen skal gjennomføres slik at det ikke samles inn identifiserende opplysninger (herunder opptak) av elever som ikke deltar i forskningsprosjektet.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen

- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål

- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet

- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte (v/foresatte) vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har NTNU som behandlingsansvarlig plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger videre til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med veileder/NTNU.

Det gjelder også eventuell behandling av personopplysninger/opptak på private enheter.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke typer endringer det er nødvendig å melde: nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

NTNU

Kunnskap for en bedre verden