Heidi Molstadengen
Alf Gunder Wikkelsmo

Visuelle mediatorer i en brøkdiskurs

En kvalitativ studie av femtetrinnselevers bruk av visuelle mediatorer og hvordan de påvirker elevenes brøkdiskurs

Masteroppgave i lærerspesialist - matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Heidi Dahl
September 2021

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Heidi Molstadengen
Alf Gunder Wikkelsmo

Visuelle mediatorer i en brøkdiskurs

En kvalitativ studie av femtetrinnselevers bruk av visuelle mediatorer og hvordan de påvirker elevenes brøkdiskurs

Masteroppgave i lærerspesialist - matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Heidi Dahl
September 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Studien vår har undersøkt hvordan elever bruker tallinjer og bilder av arealer i en læringssituasjon knyttet til temaet brøk. Hensikten har vært å få innsikt i hvordan disse to visualiseringsformene påvirker læringen hos en gruppe femtetrinns elever og produsere data som kan bidra til å gi et refleksjonsgrunnlag for undervisere og lærere. Studiet har et sosiokulturelt syn på læring og vi har benyttet det kommognitive rammeverket til Sfard (2006, 2007, 2008, 2012, 2020) når datagrunnlaget har blitt analysert. Sfard omtaler matematikk som en egen diskurs som skiller seg fra andre i form av unik ordbruk (nøkkelord), artefaktene som benyttes (visuelle mediatorer), rutiner som utføres og narrativer som beskriver matematiske objekter og sammenhenger mellom disse. Studiets forskningsspørsmål er dermed: *Hvordan blir de visuelle mediatorene en del av læringsdiskursen innen temaet brøk?*

Dette er en kvalitativ studie der observasjon i form av film har blitt benyttet. Tolv elever delt i grupper på tre ble filmet i to økter på 1,5 time der de arbeidet med temaet brøk. Datainnsamlingssituasjonen prøvde å simulere en vanlig undervisningssituasjon der elever med liten erfaring med brøk tok i bruk arealer og tallinje i møte med temaet. Oppgavene elevene arbeidet med omhandlet det å beskrive brøkstørrelser, navngi de, plassere de på tallinje og sammenligne disse. Vi har støttet oss tett til Braun og Clarke (2012) sin beskrivelse av tematisk analyse når vi analysert datamaterialet. Med det valgte rammeverket for studiet var fokuset på kommunikasjonen og samhandlingen til deltagerne. Her ble elevenes handlinger, uttalelser og ordbruk i forbindelse med elevenes bruk av arealer og tallinje studert. For å gi mening til observasjonene har disse blitt sett i lys av brøkteori og brøkdidaktisk teori.

Det fremkommer i dette studiet at de visuelle mediatorene, tallinjen og arealer, har en sentral rolle når elevene lærer brøk. De visuelle mediatorene har en viktig funksjon når elevene skal kommunisere, blant annet i form av å peke til figurene. Terskelen for å bli en deltager i brøkdiskursen blir senket, siden elevene kan kommunisere selv uten å beherske sentrale begreper. Resultatet viser også at de visuelle mediatorene har en viktig rolle når elevene produserer nye narrativer, det vil si beskrivelser av brøkobjekter og sammenhenger mellom objekter. Disse beskrivelsene er viktig siden de kan diktere elevens videre handlinger. Avslutningsvis vil vi si at bruken av nøkkelord i form av tallord påvirket elevenes bruk av de visuelle mediatorene og deres generelle brøkdiskurs. Elever som hadde gitt mening til sentrale brøkord styrket sine forklaringer og argumenter når de knyttet nøkkelord til handlinger på de visuelle mediatorene. Som en motsetning observerte vi at noen deltagere fikk utfordringer med enkelte handlinger på tallinjen når de omtalte brøken som «del av en hel».

Nøkkelord: Diskurs, kommognisjon, visuell mediator, narrativer, rutiner og nøkkelord.

Abstract

Our studies have examined how students applied number lines and area pictures in a learning situation linked to the topic of fraction. The purpose of the study has been to obtain insight as to how these two forms of visualisation affects learning within a group of fifth graders and to produce data that can contribute to a basis for reflection for teachers.The study has a sociocultural view on learning as we have based it on the commognitive framework developed by Sfard (2006, 2007, 2008, 2012, 2020) when the database has been analysed. Sfard describes mathematics as a separate discourse that differs from others in forms of a unique vocabulary (keywords) the artefacts used (visual mediators) routines that are performed and narratives describing mathematical objects and the connection between them. Thus our research question is: *How can visual mediators be implemented as part of the learning discourse within the topic of fraction?*

Our research is a qualitative study where we have made observations by looking at filmed material. We have relied closely on Braun and Clarke's (2012) description of thematic analysis when we analysed the data material. Twelve students were divided in groups of three. Each group were recorded in two sessions for the duration of 1,5 hours where they worked with fractions. For collection of the database we tried to simulate a normal teaching situation. The tasks the students were given was describing fraction sizes, naming them, placing them on a number line and comparing them. Following the chosen framework for the study the focus was on communication and interaction of the participants. In order to make sense of the observations they have been seen in the light of fraction theory and fraction didactic theory. We studied the student’s actions, statements and vocabulary applied in connection with the student’s use of areas and number lines.

Our study shows that the visual mediators, number lines and areas have a central role when students learn fraction. The visual mediators have an important function when the students communicate, among other things by pointing out the figures. The threshold to participate in the fraction discourse is lowered as the students can communicate even without fully mastering the mathematical term. The visual mediators also have an important function related to production of new narratives, meaning the description of fraction objects and their connection. These new descriptions are important since they can dictate the student’s further actions.Finally the use of keywords such as numerals influenced the student’s use of visual mediators and their general fraction discourse. Students that had given meaning to essential fraction terms strengthen their explanations and arguments when connecting keywords to actions on the visual mediators. In contrast we observed that some participants faced challenges with some actions on the number line when describing the fraction as “part of a whole”

Keywords: Discourse, communication, visual mediators, narratives, routines and keywords.

Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på tre år med lærerspesialiststudier i matematikk 1.-7. ved NTNU Trondheim. Vi har opplevd studiet som veldig lærerikt og mener vi går ut som bedre fagpersoner og lærere. Det har vært spennende å kunne gå i dybden på et matematikkdidaktisk tema, men også gjort oss veldig bevisst på at det er utrolig mye mer å lære. Vi kunne valgt mange ulike vinklinger for masteroppgaven innen dette studieløpet, men temaet tall og tallkunnskap er et tema vi begge har interesse for. Selv om vi underviser på ulike alderstrinn ser begge viktigheten av at elever får god undervisning knyttet til tallbegrepet. Som lærere har begge erfart på egenhånd og hørt kolleger uttalt at brøk er et tema elever har utfordringer med og er krevende å undervise i. Dette er muligens den viktigste årsaken til at denne oppgaven har fått dette fokuset. Gjennom de to årene før selve oppgaven stiftet vi bekjentskap med rammeverket til Anna Sfard og dette var en teori vi begge hadde sansen for. Dette ble avgjørende for læringssynet og rammeverket vi valgte.

Først vil vi gi en stor takk til vår veileder Heidi Dahl. Du har gitt grundig, konstruktive og tydelige tilbakemeldinger gjennom hele prosessen. Du har vært en dyktig fagperson og veileder for oss og vi har satt pris på engasjementet ditt og ditt positive vesen. Vi ville aldri kunne klart dette uten deg.

Vi må også takke elevene som stilte opp i studiet og foresatte som støttet dette. Uten dere ville dette ikke vært gjennomførbart. Det er også på plass å takke skolen som ga tillatelse til å gjennomføre datainnsamlingen.

Siden vi har gjennomført dette masterstudiet gjennom den nasjonale videreutdanningssatsingen, ønsker vi også å takke alle parter som legger til rette for en slik mulighet. Dette er et tilbud vi har satt stor pris og vi ser nytten av den kunnskapen vi har fått gjennom studiene våre. Vi er begge ansatt i samme kommune og vi ønsker dermed takke kommunen og våre ledere som har støttet vårt ønske om å ta denne masterutdanningen.

Da vi har gjennomført dette på vikarordning har vi jobbet som lærere samtidig som vi har studert, men ikke i fulltid, og dette har medført at kolleger har fått en mer krevende arbeidshverdag i perioder. Det går en takk til dere for å ha holdt ut med oss.

Til slutt ønsker vi å takke vår nærmeste familie og venner for støtten vi har fått. Vi har sittet mange kvelder og timer med ansiktet vendt mot pc-skjermen, periodevis i frustrasjon, og vi takker for tålmodigheten deres.

Innhold

Figurer

Tabeller

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studiet

Flere forskere peker på brøk som et av de mest utfordrende temaene for elever i barneskolen. Brøk er et tema med stor betydning for elevers videre modning og læring i matematikkfaget (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), da ferdigheter og kunnskaper om rasjonale tall er viktig for å lære algebra (Barbieri et al., 2020; Behr et al., 1983). Siegler et al. (2012) utførte en studie der de så på hvilke områder innen matematikk i ung skolealder som korresponderer med gode matematikkferdigheter senere i livet. Studiet viste at ferdigheter og kunnskap om divisjon og brøk hadde stor betydning, noe som viser viktigheten av god undervisning innen emnet brøk.

Timss-undersøkelsen 2015, viser at norske elever gjør det bedre i matematikk enn mange av landene vi sammenligner oss med (Bergem, 2016). Bergem skriver at hvis vi sammenligner oss med høyt presterende land som Singapore og Japan, er det innen emnet «tall» vi har størst forbedringspotensial. Emnet «tall» tester hvordan elevene behersker de fire regneartene, desimaltall og brøk». Resultatene for Timss i 2019 viser mye av det samme, men resultatene er litt lavere enn 2015. Det er tydelig nedgang innen temaet «tall» der elevene på 9. trinn går ned fra 529 til 502 poeng (Kaarstein et al., 2020). Resultatene for Timss 2015 og 2019 viser at temaet algebra, er den største utfordringen for norske elever. For resultatene i 2015 skriver Bergem (2016) at resultatene kan være en følge av mindre undervisningen i algebra i norsk skole. Når vi vet Behr et al. (1983) og Barbieri et al. (2020) påpeker sammenheng mellom mestring innen rasjonale tall og algebra er dette også en mulig del av forklaringen. Bjerke et al. (2013) har kartlagt norske elevers forståelse av brøk på 6. og 7. trinn og denne kartleggingen viser at brøk er utfordrende.

Årsakene til utfordringene ved brøk kan komme av det konseptuelt kompliserte og krevende tema brøk er. Tidligere erfaringer og tenkning knyttet til heltall er ikke alltid direkte overførbart til rasjonale tall og mange av konseptene knyttet til brøk må bygges fra bunnen. Van Hoof et al. (2015) sier at skillet mellom rasjonale tall og heltall kan føre til systematiske feil hos elever. Videre kan ulike betydninger av brøk i ulike sammenhenger bidra til brøk som tema er vanskelig å arbeide med og beherske (Birkeland & Venheim, 2011). Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) skriver at konseptet brøk består av fem underkonsepter, «del hel», «forholdstall», «operator», «kvotient» og «måling». Vi kommer nærmere inn på disse konseptene i underkapittel 2.2.2, hvor underkonseptene «del hel» og «måling» vil være mest sentralt for dette studiet. Et krevende utviklingssteg for elever er når de begynner å omtale og behandle brøk som et tall, påpeker Charalambous og Pitta-Pantazi, og for å beherske emnet brøk må eleven mestre alle underkonseptene og knytte disse sammen. Dette viser hvor omfattende og komplekst brøk er og kan forklare utfordringene elevene har med temaet.

Når elever skal lære og arbeide med brøk møter de mange ulike visuelle fremstillinger som pizzaer, tallinje, fargede klinkekule og symboler, hvor tallinjen og arealer er to vanlige fremstillinger elevene møter. I læringsarbeid med «del hel» konseptet benyttes ofte arealer i form av pizzaer eller oppdelte kaker. Tallinjen er viktig når elever skal lære å se brøk som et tall eller målingskonsept (Barbieri et al., 2020; Charalambous & Pitta-

Pantazi, 2007). Hvilke visuelle fremstillinger som bør benyttes og til hva er det ulike meninger om i forskning og litteraturen. Strother, Bredefur, Thiede og Appleton (2016) har skrevet en artikkel der de oppsummerer den nyeste forskingen knyttet til undervisning av brøk og kommer med anbefalinger for hvordan brøk best kan undervises. De skriver at visuelle modeller er nyttig og viktig for elevers læring innen brøk, men de mener noen visuelle fremstillinger er mer egnet enn andre. De trekker spesielt frem tallinje- eller barmodellen som egnet for å støtte elevers tenkning og bør være en av de første elevene møter. De argumenterer for at brøk mediert som arealer eller sett med diskret objekter har begrensninger og elever bør møte disse senere i læringsløpet. Liu, Xin & Li (2012) fremmer tallinjemodellen som en egnet visualiseringsform når elever skal lære om brøk som målingskonsept og når brøker skal sammenlignes. Andre forskere påpeker at tallinjen er en kompleks visuell fremstilling som elever har utfordring med å bruke i møte med brøk (Bright et al., 1988; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Bright et al. (1988) fremhever tallinje som en visualiseringsform som utfordrende da den kombinerer to informasjonskilder og disse er avhengige av hverandre.

1.2 Læringssyn i studiet

Fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2020) fremhever i «Fagrelevans og sentrale verdiar» og «Kjerneverdier» at elevene skal samarbeide, diskutere, benytte matematisk språk og argumentere i faget (Utdanningsdirektoratet, 2020). Alle disse punktene innebærer en form for kommunikasjon og samhandling. Med bakgrunn i disse punktene valgte vi et rammeverk med et sosiokulturelt syn på læring hvor deltagerperspektivet er sentralt. Skoler og lærere har et ansvar for å etterleve disse beskrivelsene og vi mener vår studie har større relevans når det sees gjennom et rammeverk med samme «verdier». Sfard (2007) skriver at deltagerperspektiv på læring ikke ser på læring som endring i individet, men fokuserer på hva og hvorfor mennesker handler som de gjør. Vi valgte å støtte oss til teorier av Sfard (2006, 2007, 2008, 2012, 2020) i dette studie. Sfard tilnærmer seg læring med antagelsen om at tenkning kan sees som en form for kommunikasjon med seg selv. Læring handler om å beherske en spesifikk form for kommunikasjon, kalt diskurs. Dette omtaler Sfard som kommognisjon. En matematisk diskurs skiller seg fra andre i form av unik bruk av ord/nøkkelord, rutiner, narrativer og visuelle mediatorer, som blir sentrale begreper videre i vår masteroppgave. Nøkkelord er ord som kommuniserer sentrale ideer for en spesifikk diskurs. Rutiner er mønstre i deltagerens handlinger som er karakteristisk for en gitt diskurs. Narrativer er ytringer som beskriver et objekt eller forhold mellom objekter. Visuelle mediatorer kan kort beskrives som midler deltagerne i en diskurs benytter for å identifisere objektet for kommunikasjonen. Tallinje og arealer kommer under begrepet visuelle mediatorer og er et av fire hovedområdene som skiller en diskurs fra andre. Det at visuelle mediatorer er en av fire områder som skiller en diskurs fra en annen, viser noe av betydningen til blant annet tallinjer og arealer. En styrke ved dette rammeverket er at det er mulig å se etter konkrete handlinger hos individer og gruppen, noe som reduserer behovet for å anta hva deltageren tenker eller mener. Vi går nærmere inn på disse begrepene i kapitel 2.1.

1.3 Formål og forskningsspørsmål

Med bakgrunn i refleksjonene innledningsvis ønsket vi å ha fokus på elevers læringsarbeid innen temaet brøk og se på hvordan de visuelle mediatorene benyttes. Noe av det som gjør dette fokuset spennende kommer av tidligere forsknings ulike «meninger» om blant annet tallinjen.

I de nye læreplanene omtales brøk først i kompetansemålene for femtetrinn (Utdanningsdirektoratet, 2020), og vi valgte å gjennomføre datainnsamlingen vår på et femtetrinn da vi ønsket å studere elever tidlig i læringsprosessen i brøk. I kompetansemålene står det blant annet at de skal kunne «beskrive brøk som del av ein heil, som del av ei mengde og som tal på tallinja og vurdere og namngi storleikane» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Vårt ønske med dette studiet er å få bedre kunnskap om hvordan visuelle mediatorer blir en del av en brøkdiskurs og se nyanser i bruk av rutiner, narrativer og nøkkelord. Vi ønsket å observere elevers bruk av visuelle mediatorer i arbeid der de må beskrive brøkstørrelser, navngi de, plassere de på tallinje og sammenligne. Vi vil avklare med en gang at vårt fokus var arealer og tallinje for å avgrense studien. Vårt forskningsspørsmål blir dermed:

Hvordan blir de visuelle mediatorene en del av læringsdiskursen innen temaet brøk?

Studiet vil prøve å beskrive sentrale elementer i en brøkdiskurs der visuelle mediatorer er en del av diskursen. Dette kan blant annet omhandle a) elevers bruk av nøkkelord når visuelle mediatorer er en del av kommunikasjonen, b) visuelle mediatorenes rolle i konstruksjon av narrativer c) handlinger og rutiner elever utfører i forbindelse med de visuelle mediatorene d) observerbare forskjeller i brøkdiskursen når arealer benyttes kontra tallinje.

Vi gjennomførte en kvalitativ studie der vi observerte 12 elever i grupper på tre løste brøkoppgaver sammen over to økter. Datainnsamlingsøktene på 1,5 time ble filmet slik at vi kunne analysere deltagernes diskurs. Deltagerne ble utfordret på å koordinere ulike fremstillinger av brøk hvor de skulle plassere brøker mediert som arealer og symbolsk på tallinje, gi navn til posisjoner på tallinjen og sammenligne ulike brøkstørrelser. Utforming og hensikt med valgte oppgaver og aktivitet kommer vi nærmere inn på i kapitel 3.3. Vår studie er en småskala studie og forsøker ikke å bestride eller avklare noen tidligere nevnte «uenigheter». Disse ulikhetene antyder at det er et felt som ikke er ferdig utforsket. Dette studiet ønsker først og fremst å presentere noen beskrivelser av hvordan yngre norske elever med liten kjennskap til brøk bruker de visuelle mediatorene i arbeid med brøk. Vi skaper ikke generelle funn, men ønsker å produsere noen beskrivelser som kan belyse temaet. Beskrivelsene kan gi et grunnlag for refleksjon hos lærere og undervisere. Det er gjennomført mange studier tilknytting brøk, men i vår prosess med innhenting av tidligere teori ble det tydelig at langt færre har sett temaet i lys av det kommognitive rammeverket da vi i teorisøk ikke kunne finne noen studier som hadde identisk vinkling. Vi ønsket dermed å se på brøk og visuelle mediatorer gjennom det kommognitive rammeverket, siden dette er en vinkling mindre utforsket.

1.4 Oppgavens oppbygging

Vi har nå presentert forskningsspørsmålet og vil nå beskrive oppbyggingen av masteroppgaven vår. I teorikapittelet presenterer vi teori som kan bidra til å belyse forskningsspørsmålet. Vi redegjør for Sfards teori rundt kommognisjon, som vil være det teoretiske rammeverket vi benytter i vår analyse. Vi viser til teori som belyser spørsmålet om hva begrepet brøk omhandler og utfordringer rundt begrepet. Vi kommer inn på arealmediator og tallinjemediatoren, men legger ekstra vekt på tallinjen. I metodekapittelet redegjør vi for de valgte metoder benyttet for å belyse vårt forskningsspørsmål. Her vil vi redegjøre for valg av utvalg, verktøy benyttet i datainnsamlingen og hvordan vi gjennomførte datainnsamlingen og hvordan analysen av innhentet data ble foretatt. I resultatkapitelet presenteres funnene/temaene våre og vi belyser disse med eksempler fra datamaterialet. Diskusjonskapitelet drøfter og sammenfatter funnene våre og ser disse i lys av relevant teori. Avslutningsvis ser vi på styrker og svakheter ved metode og våre valg, samt spørsmål oppstått underveis i studien og som kan være innspill til videre studier.

2 Teori

I denne studien valgte vi å studere hvordan de visuelle mediatorene blir en del av brøkdiskursen. For å studere dette benyttet vi det teoretiske rammeverket, kommognisjon, utviklet av Anna Sfard, professor ved universitet i Haifa i Israel. Hennes teorier har et deltagerperspektiv som bygger på blant annet Vygotsky sitt arbeid og hun argumenterer for at dette perspektivet kan beskrive læring mer helhetlig. Dette kapitelet innledes med en beskrivelse av hennes rammeverk, der vi ser på nøkkelbegreper som diskurs, narrativer, visuelle mediatorer, nøkkelord, rutiner og hvordan dette rammeverket beskriver læring. Vi går deretter nærmere inn på brøk, innledningsvis beskriver vi brøk generelt og ser på ulike aspekter ved temaet. Videre kommer vi inn på problematisk heltallstenkning i møtet med brøk. Avslutningsvis går vi nærmere inn på sentrale ideer knyttet til læring og undervisning av temaet, hvor vi kommer inn på visuelle mediatorers rolle.

2.1 Kommognisjon og syn på læring

Sfard (2006, 2007, 2008, 2012, 2020) bygger rammeverket sitt på ideen om at kommunikasjon er den viktigste grunnen til at mennesker er så forskjellig fra andre vesener i verden. Språket blir sentralt hos Sfard da det tillater oss å organisere og beskrive omgivelsene og handlingene våre. Spesielt viktig er egenskapen ved språket som gjør det mulig for oss å kommunisere om kommunikasjonen. Denne egenskapen muliggjør akkumulering av kunnskap over tid som mennesker kan bygge videre på. Sfard har et sosiokulturelt perspektiv, der all læring foregår i en sosial kontekst, og læring i matematikk beskrives som å bli en deltager i ett matematikk samfunn. Sfard (2020), ser på kognisjon og kommunikasjon som ulike aspekter av samme fenomen der eleven betraktes som deltakere i en diskurs (Sfard, 2008). Navnet på teorien er bygd opp rundt tanken hvor kommunikasjon og tanker er to sider av samme sak. «Commognition»: en kombinasjon av ordene cognition og communication. Sfard (2007, 2020) argumenterer for at tenkning er så tett knyttet til kommunikasjon at tenkning er en form for indre kommunikasjon med seg selv. Med dette som utgangspunkt bygger hun rammeverket sitt på å definere tenkning som en individualisert form for kommunikasjon. De viktigste begrepene innenfor rammeverket til Anna Sfard blir beskrevet under.

2.1.1 Diskurs

Diskurs er et begrep som er viktig å forstå da diskurs gir oss et verktøy som hjelper oss til å beskrive ulike virkelighetsoppfattelser, hvordan forstå virkeligheten. Språket vårt er ifølge ideen rundt diskurs strukturert i ulike mønstre. Disse mønstrene er noe vi følger når vi befinner oss i ulike sosiale situasjoner. Vi følger diskursen i forhold til hva vi snakker om. Er det innenfor medisin er det en medisinsk diskurs vi følger og i matematikk følger vi en matematisk diskurs (Phillips & Jørgensen, 1999). Et samfunn består av mange delvis overlappende diskurser (Sfard, 2007) der diskursene deler blant annet ord og rutiner. Her kan et eksempel være de to naturfaglige disiplinene fysikk og kjemi, som deler blant annet mange rutiner knyttet til den naturfaglige arbeidsmåten, men også bruk av ord. De vil ha tydelige ulikheter og vil kunne forklare prosesser i omverden ulikt, uten at de nødvendigvis er motstridende. For yngre barn kan blant annet hverdagsdiskurs og matematikkdiskursen være tett sammenvevd.

2.1.2 Matematisk diskurs

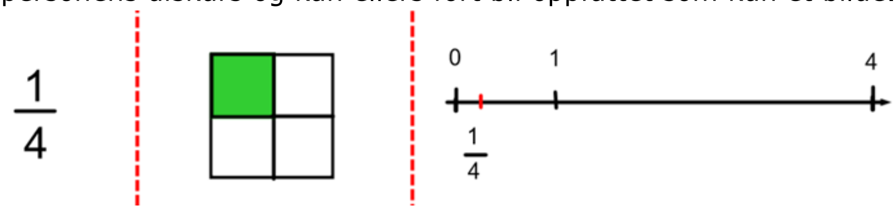
En matematisk diskurs er en spesiell type kommunikasjon som skiller seg fra andre fagdisipliner gjennom bruk av nøkkelord, visuelle mediatorer, rutiner og godkjente narrativer (Sfard, 2008; Tabach & Nachlieli, 2016). Vi går her nærmere inn på og forklarer begrepene nøkkelord, narrativer, visuelle mediatorer og rutiner. Dette er begreper som er sentrale for vår oppgave og brukes for eksempel i forbindelse med å beskrive hvordan tallinjen og arealer blir en del av brøkdiskursen i resultatet vårt. Det kommognitive rammeverket, basert på Sfards arbeid, definerer en diskurs som en spesifikk kommunikasjonsform som gjenkjennes gjennom flere karakteristiske trekk, som vil inkludere de som behersker diskursen og ekskludere de som ikke behersker språket som benyttes (Sfard, 2007, 2008). Matematikk er et stort fagfelt og kan ha «under»-diskurser som skiller seg fra andre områder innen matematikk. Fagområdet brøk kan sees som egen diskurs. Det er elementer ved brøkdiskursen som skiller seg tydelig fra en heltallsdiskurs. Blant annet beskriver Van Hoof et al. (2015) fire hovedaspekter der rasjonale tall skiller seg fra heltallene som kan lede til systematiske feil. Disse aspektene vil vi komme tilbake til senere i kapitel 2.2.

Spesifikk bruk av ord er et karakteristisk trekk. Sfard (2012) og Lavie et al. (2019) omtaler disse som «keywords» (*nøkkelord*). Nøkkelord (Sfard, 2007) kan være fagspesifikke ord eller mer allmenne ord som på tar seg en fagspesifikk mening. Nøkkelordene blir viktige for å kommunisere de sentrale ideene i hver enkelt diskurs. Nøkkelordene blir avgjørende da de bidrar til å avgjøre hva hver enkelt deltaker er i stand til å si og derfor se og lære i en diskurs. Nøkkelord innenfor en matematisk diskurs er ofte tett knyttet til beskrivelser av mengder og figurer og kan være ord som «rettvinklet trekant», «hypotenus», «brøkdel», «halv» og «tre». De to første eksemplene er ord som i mindre grad eksisterer utenfor matematikkdiskursen. De siste ordene benyttes i hverdagsspråk, men brukt i en matematisk diskurs tillegges disse strengere og mer disiplinert bruk av diskursdeltagerne. Det er like viktig hvordan ordene brukes som hvilke ord som blir brukt for å bli en deltager i en bestemt diskurs. I hverdagsspråk brukes «en brøkdel» ofte i betydningen av noe som er smått, men i en matematikkdiskurs vil dette uttrykket brukes strengere og tillegges mer definerte egenskaper. Brøkdel forteller for eksempel at det er et rasjonalt tall som består av en teller og nevner der disse må sees i sammenheng for å uttrykke en størrelse. For at en elev skal bli en deltager i en brøkdiskurs må dermed ord som teller, nevner, likeverdig, to tredeler, to av tre bli en del av deltagerens diskurs. Det er ikke nok at begrepene benyttes, men at begrepene tillegges passende mening og dette kan også være kontekstavhengig. Ordet «halv» kan både sees som halvparten av noe og som tallet $\frac{1}{2}$.

De tydelige og strenge egenskapene som tillegges nøkkelordene i en matematisk diskurs er tett knyttet til *narrativer*. Narrativer er ytringer eller påstander, både muntlige og skriftlige, som beskriver et matematisk objekt, forhold mellom objekter eller prosesser med eller av objekter. Noen av eksemplene Sfard (2007) gir til matematiske narrativer er definisjoner, beviser, teoremer, definisjoner og regneregler, og disse vil skille seg fra andre fagområders narrativer. Narrativene danner «fortellinger» om de matematiske objektene og sammenhenger mellom ulike objekter. Disse «fortellingene» blir gjenstand for vurdering som godkjent eller ikke godkjent. Det er matematikksamfunnet, for eksempel fagfeltet eller elevene i en bestemt klasse, som avgjøre om påstandene anses som godkjent, om de blir akseptert av deltakerne i diskursen (Sfard, 2007). En matematisk diskurs skal ideelt basere seg på deduktive forhold mellom narrativer

(Tabach & Nachlieli, 2016). Det er ikke uvanlig at elever følger narrativer som ikke er godkjente av matematikksamfunnet generelt. Et eksempel på dette kan være at elever følger et narrativet om at produktet av to tall alltid er større enn faktorene, men hvis for eksempel faktorene er to brøker mellom 0 og 1 vet vi at dette ikke stemmer. For å kunne ta del i en brøkdiskurs er det mange sentrale narrativer deltageren må beherske. Hvis eleven handler ut fra et «del hel» syn på brøk må eleven blant annet være bevist på at alle delene må være av lik størrelse og at delene må utgjøre det hele. Andre eksempler kan være at nevneren angir størrelsen på enheten eller at det er uendelig mange brøker mellom to punkter på en tallinje. En elev kan beskrive at «to firedeler er det samme som en todel» er et eksempel på et narrativ som beskriver forhold mellom to matematiske objekter.

Et annet kjennetegn på matematisk diskurs er de unike *visuelle mediatorene* for faget. Sfard (2007) beskriver visuelle mediatorer som midler deltagerne i en diskurs benytter for å identifisere objektet for kommunikasjonen og bidra til å koordinere samhandlingen mellom deltagerne. Visuelle mediatorer er artefakter eller bilder, produkter av menneskers kommunikasjon, spesielt produsert for å kommunisere matematisk innhold, da matematiske objekter er abstrakte. Deltagerne i diskursen kan bruke artefaktene som støtte i kommunikasjonen i form av blant annet peke til eller henvise til. Eksempler på visuelle mediatorer i faget er tallinjer, tallsymboler, formler, grafer, tabeller og tegninger (Sfard, 2007, 2012). Brøkdiskursen skiller seg ikke nødvendigvis fra en mer generell matematisk diskurs i form av egne visuelle mediatorer. Blant annet benyttes tallinjen i møte med heltall og brøk. Brøkdiskursen skiller seg mer i form av hvilke egenskaper den visuelle mediatoren kan mediere. Deltagerens diskurs er avgjørende i form av hva den visuelle mediatoren medierer der blant annet nøkkelord og narrativer spiller en viktig rolle. I vår oppgave var symboler, slik som «$\frac{1}{4}$», arealer i kontekst av kake eller pizza og tallinje de mest aktuelle visuelle mediatorene (figur 1). I figur 1 er tallinjen 0 – 4 avmerket, og hvor $\frac{1}{4}$ skal markeres avhenger på om deltageren ser linjen som det hele eller punktet 1 som den hele. Informasjonen den visuelle mediatoren medierer avhenger av deltagerens diskurs. For at arealet i figur 1 skal mediere $\frac{1}{4}$ må dette være en del av personens diskurs og kan ellers fort bli oppfattet som kun et bilde.



Figur 1: Eksempel på visuelle mediatorer

Visuelle mediatorer har mange fellestrekk til det kognitivismen omtaler som semiotiske representasjoner. Duval (2006) skriver at representasjoner er noe som står for noe annet og i tillegg til at semiotiske representasjoner kommuniserer matematisk innhold er disse representasjonen nødvendige for å kunne utføre handling på matematisk objekter. I begge læringssynene er disse artefaktene sentral i kommunikasjon rundt matematisk innhold, men i det kommognitive rammeverket er disse gjenstandene mer enn hjelpemidler som formidler eller uttrykker allerede eksisterende tanker. Disse gjenstandene er en aktiv del av kommunikasjonshandlingene og er dermed en spesiell tankeprosess (Sfard, 2007).

Det fjerde og siste området hvor matematikk skiller seg fra andre diskurser er *rutiner*. Sfard (2007); (Sfard, 2020) beskriver rutiner som vell definerte mønstre i deltagerens handlinger som er karakteristisk for en gitt diskurs. Lavie et al. (2019, s. 15) beskriver diskursive rutiner som mønstre mennesker følger i kommunikasjon med andre eller seg selv. Rutiner innen matematikk omfatter store deler av en matematisk diskurs og omhandler hvordan ulike matematiske handlinger utføres gjennom bruken av nøkkelord og visuelle mediatorer. I de fleste situasjoner der en deltager bruker nøkkelord, visuelle mediatorer eller produserer nye narrativer vil det oftest kunne observeres former for rutiner da formålet med rutinene ofte er å produsere nye narrativer, skape eller endre et objekt. Rutiner i matematikk er omfattende og komplekst. For å kunne beskrive en rutine hos en deltager vil det kreve detaljerte data som strekker seg ut over tid (Lavie et al., 2019). Tabach og Nachlieli (2016) skriver at rutiner er tett knyttet til det å gjenkjenne situasjoner som like og ulikt fra tidligere erfaringer, for deretter utføre en handling basert på tidligere erfaringer som deltageren tenker passer situasjonen best. I det kommognitive rammeverket skilles det mellom tre former for rutiner (Lavie et al., 2019; Tabach & Nachlieli, 2016). Det er «deeds», «explorations» og «rituals» (Tabach & Nachlieli, 2016, s. 301) og vi oversetter dette til handlingsrutiner, utforskende rutiner og ritualer. Disse rutinene kan skilles fra hverandre ut fra hvilken oppgave de skal løse og målet med aktiviteten. Handlingsrutiner har som formål gjøre endringer på omverden i form av handling på et objekt for å endre dette (Lavie et al., 2019). Dette kan skje i form av et barn reorganiserer konkreter eller halvkonkreter for å finne ut hva $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ blir til sammen. Barnet skaper da et nytt objekt som er $\frac{3}{4}$. En utforskende rutine har også et formål om å skape eller endre noe, men nå er målet å skape eller endre et narrativ (Lavie et al., 2019). Eksemplet ovenfor kunne også vært en utforskende rutine, men da måtte barnet hatt fokus på å skape et nytt narrativ om addisjon og ikke bare utføre en handling for å endre objektet. Ritualer skiller seg fra de to forrige rutinene på et par punkter. Ritualer er sosialt orienterte handlinger (Tabach & Nachlieli, 2016). Deltageren gjør det han/hun tenker er forventet i situasjonen og målet er sosial belønning eller unngå straff eller nederlag (Lavie et al., 2019). Det er også ulike handlingsrutiner innen brøkdiskursen som kan sees som typiske. Når elever handler ut fra «del hel» tenkning vil gjerne eleven telle antall deler med heltallsord for å finne hva det hele består av, for deretter telle antall som er merket. Her er det muligheter for at eleven er ubevist på at han kanskje teller firedeler og i andre tilfeller vet personen dette. For å markere punkter på en åpen tallinje kan en handling være en firedeling av linjen for å kunne markere $\frac{1}{4}$. Noen av rutinene deltagere benytter i en diskurs vil i en del tilfeller bli styrt av egenskapene til det matematiske objektet som blir behandlet. Eksempelvis vil rutiner knyttet til tallbehandling bli påvirket av blant annet den kommutative lov, distributive lov og ti-tallsystemet.

2.1.3 Endring i matematisk diskurs – læring

Det kommognitive rammeverket ser på læring som en modifisering eller endring av deltageren eller kollektivets kommunikasjon og aktivitet, endring i diskurs (Sfard, 2007, 2008, 2012, 2020). Endring i både enkeltpersoners og matematikkhistoriens diskurs kommer til syne ved en økning i kommunikasjonens kompleksitet. Å bli deltaker i en diskurs innebærer å produsere sentrale diskursive objekt i egen diskurs, godkjenne narrativer om objekter samt å bli fortrolig med typiske kommunikasjonsmønstre i den nye diskursen. Følgelig fører denne prosessen til en endring i deltakelse i diskurs. Tenkingen blir definert som en individualisert form for mellommenneskelig kommunikasjon, «prate med seg selv» (Sfard, 2007). Det vil si at en endring i en persons diskurs vil være en endring av individets tenkning. Endringen skjer gjennom at elever som er ukjente med eller lite kjente med en matematisk diskurs, endrer sin egen diskurs gjennom å kommunisere eller bli veiledet av mer erfarne deltakere, blant annet lærere (Sfard, 2008). En endring innen minst en av de fire kategoriene, nøkkelord, narrativer, rutiner og visuelle mediatorer, skriver Tabach og Nachlieli (2016) kan sees som læring innenfor kommognisjonen. For å beskrive læring innen matematikk må vi først komme inn på hva som er drivkraften for å lære matematikk, sett fra et deltagerperspektiv. Mennesker har et grunnleggende behov for å kunne kommunisere, som bygger på mer grunnleggende behov, som å tilhøre og bli akseptert. Om en voksen involverer barn i et matematisk problem der hensikten er å lære, er ikke barnets hensikt nødvendigvis læring, men å bli et godkjent medlem av diskursen, bli akseptert av den voksne. For eldre personer kan læring være det som motiverer handlingen, men dette har også rot i behovet for å bli del av et kollektiv og et samfunn. Læring kan på en måte sees som et spill, der deltagerne prøver å mestre aspektene av diskursen for å komme vinnende ut av situasjonen. Behovet for å bli akseptert er drivkraften som får mennesker til å endre egen diskurs, slik at de passer inn med «diskurssamfunnets» normer, og omtales som læring (Sfard, 2006). Det er relevant å avklare nyanser i bruken av begrepene «læring» og «endring av diskurs» i rammeverket til Sfard (2012). Sfard omtaler utvikling som endring av diskurs eller endring i en persons handlinger. Når begrepet læring benyttes, skal dette tenkes på som en spesifikk utvikling, hvor endringen i diskurs skal bidra til at deltageren nærmer seg en historisk etablerte form for diskurs. Vi vil bruke ordet «læring» slik Sfard omtaler det.

Kommognisjonsrammeverket skiller mellom læring på objektnivå og metanivå (Sfard, 2007, 2008, 2012, 2020; Tabach & Nachlieli, 2016)- Læring på objektnivå utvider deltageren allerede eksisterende diskurs, der deltageren blir bedre kjent med et allerede eksisterende matematisk objekt i deltagerens diskurs. Som påpekt tidligere vil det være en endring i personens bruk av ord, rutiner, visuelle mediatorer eller narrativer knyttet til allerede eksisterende diskurs. Hvis en elev oppdager at $\frac{6}{4}$ kan uttrykkes som $1\,\frac{2}{4}$ er dette en utvidelse av elevens diskurs. En mer generell påstand som sier at «alle brøker med teller som har høyere verdi enn nevner, kan uttrykkes som en uekte brøk» har deltageren formulert et nytt narrativ og endret diskursen. Eleven har lært.

Metanivålæring er et resultat av refleksjoner rundt eksisterende diskurs (Sfard, 2012), og involverer endringer i metareglene for diskursen (Tabach & Nachlieli, 2016). For eksempel forholder yngre barn seg hovedsakelig til de naturlige heltallene, men reglene for den matematiske diskursen endrer seg når rasjonale tall skal inkluderes. En del av denne endringen kommer i form av alle heltallene har grunnenheten 1 og de kan uttrykkes som et multiplum av enheten 1. De rasjonale tallene, brøk, blir også uttrykk som et multiplum, der telleren angir antall enheter, men enheten som skal telles angis av nevneren. Det er ikke en bestemt enhet, det eksisterer uendelig mange enheter. Metanivålæring kan skje horisontalt og vertikalt (Sfard, 2007, 2012). Horisontal utvikling involverer kombinering av separate diskurser til en sammenfallende diskurs (Sfard, 2012; Tabach & Nachlieli, 2016). Horisontal metanivålæring viser til en prosess hvor flere diskurser som ble ansett som helt ulike, plutselig «kapsles inn» og til sammen utgjør en ny overordnet diskurs (Sfard, 2008). Et eksempel kan være en elev som oppdager at deler av diskursen knyttet til desimaltall sammenfaller med diskursen om brøk. Vertikal læring på metanivå beskriver Tabach og Nachlieli (2016) som en kombinering av eksisterende diskurs med diskursens egen metadiskurs. Dette er med på løfte diskursen til et høyere nivå (Sfard, 2012). Et eksempel som trekkes frem av Sfard (2012) er etableringen av den algebraiske diskurs som en sammenslåing av aritmetikken og betraktninger av mønstrene i denne diskursen.

I forbindelse med læring på metanivå er det naturlig å forklare begrepet kommognitiv konflikt som er viktig innenfor kommognisjonsrammeverket (Sfard, 2007, 2008, 2012, 2020). En kommognitiv konflikt oppstår når to eller flere deltagere samhandler, men de handler ut fra ulike metanivå-regler (Sfard, 2007). Introduksjonen av brøk er et stort skifte innen matematikken. Hvis en elev som ikke er erfaren med brøk skal løse $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ har mange lærere erfart at svaret kan bli $\frac{2}{6}$. Hvis denne eleven skulle kommunisert med en elev som har endret metareglene for diskursen, vil det trolig oppstå en konflikt. For eksempel vil betydningen av sifrene «1» og «4» i brøken $\frac{1}{4}$ ha ulik betydning for de to deltagerne. Sifferet «1» kan ha betydningen en hel for den ene eleven, mens den andre ser sifferet «1» i sammenhengen med nevneren 4. Den mer «erfarne» eleven vil ha store utfordringer med å forklare sin løsning på problemet, før den «uerfarne» eleven aksepterer at de grunnleggende reglene (metareglene) for «spillet» har endret seg.

2.2 Brøk

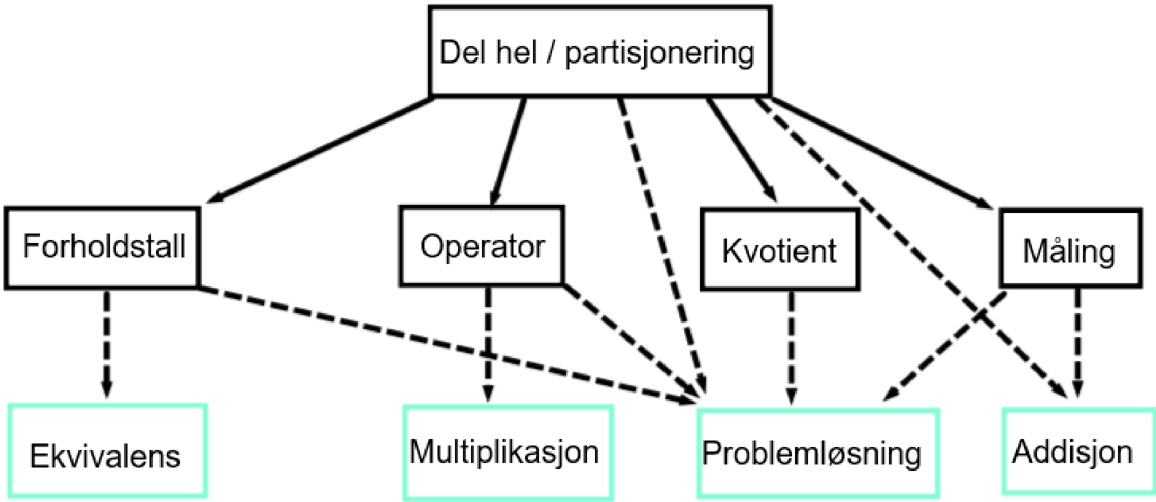
Brøk er utfordrende for elever og det kommer blant annet av at det er et sammensatt konsept. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) skriver at en av de viktigste årsakene til at brøk er utfordrende kommer av at det består av mange underkonsepter. For å kunne analysere hvordan areal- og tallinjemediatoren ble en del av elevenes diskurs ble vi nødt til å se elevenes ytringer og handlinger i lys av brøk som konsept. I underkapittel 2.2 vil vi først beskrive hva brøk er og deretter beskrive de fem underkonseptene av brøk. (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). De fem underkonseptene hadde også betydning for vårt design av oppgaver og læringssituasjon som danner grunnlaget for datainnsamlingen. I kapitel 2.3 vil vi si mer om forskning knyttet til undervisning av brøk.

2.2.1 Definisjon av brøk

I matematisk forstand er brøk alle tall som kan skrives på formen $\frac{a}{b}$ der a og b er hele tall og b ≠ 0 (Solem et al., 2010, s. 85). Selv om brøk kan defineres som et tall innen matematikken, mener Carraher (2013) at konseptet brøk sett fra et undervisningsståsted må sees i en større sammenheng. Å kun se brøk som et tall gir kanskje mening i en diskusjon blant matematikere, men pedagogisk og psykologisk mener Carraher at dette blir mangelfullt. Historisk har tallkonsepter, også brøk, ofte en opprinnelse i handling med fysiske gjenstander og refleksjon rundt dette. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) skriver at Kieren var den første til å stille spørsmål ved å se brøk som ett konsept, men han foreslo at det må sees som en samling konsepter. Fra et pedagogisk og undervisningsståsted er det mer hensiktsmessig å benytte en mer omfattende og sammensatt beskrivelse av brøk, enn definisjonen gitt i innledningen av dette avsnittet.

2.2.2 Brøk – fem underkonsepter

Basert på Kieren sine teorier presenterer Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) brøk som et matematisk konsept bestående av fem underkonstruksjoner de omtaler som «del hel», «forholdstall», «kvotient», «operator» og «måling». Den viktigste konstruksjonen er «del hel» som danner grunnlaget for å gi mening til de andre fire underkonstruksjonene (se modell i figur 2). «Del hel» sees i sammenheng med prosessen deling. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) skriver at dette forklarer årsaken til at mange læreplaner i forskjellige land vektlegger «del hel» i grunnskoleårene. For å få en helhetlig fremstilling velger vi å presentere alle underkonseptene, men underkonseptene «del hel» og «måling» er mest aktuell med tanke på vårt forskningsspørsmål og analyse.



Figur 2 Teoretisk modell som knytter de fem underkonseptene til ulike brøkhandlinger. Oversatt fra (Behr et. al, 1983)

Del hel konseptet av brøk er definert som en situasjon der en mengde eller sett med objekter er delt inn i like størrelser eller grupper. Brøken representerer da en sammenligning mellom antall «telte» deler og det totale antallet deler helheten er inndelt i. Hvis brøk sees på denne måten må telleren være lik eller mindre enn nevneren. Solem et al. (2010) skriver at dette betyr at den mengden eller størrelsen som uttrykkes ved en brøkdel, kun kan forstås når brøkdelen ses i relasjon til den bestemte helheten. Dette underkonseptet er viktig i dette studiet siden vi ser på arealer som visuelle mediatorer og er tett knyttet til dette konseptet. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) skriver at det er noen grunnleggende ideer og handlinger elevene må beherske for å mestre «del hel» konseptet. De må vite at delene som danner den hele må være av lik størrelse, men også kunne vurdere dette i praksis. Blant annet vurdere visuelt inndelingen av et areal eller linjesegment til å være av lik størrelse. Det er flere ideer tilknyttet forholdet mellom delene og helhetene som er viktig å lære. Disse er; 1) delene samlet må utgjøre den hele, 2) flere deler helheten deles inn i, mindre blir hver enkelt del og 3) og at forholdet mellom «del hel» bevares selv om formen (størrelsen må bevares) og orienteringen på delene endres.

Brøk som underkonseptet *operator* opptrer brøken som en funksjon som kan brukes på tall, objekter eller et sett med objekter (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Brøken som operator kan strekke eller forkorte et linjesegment, øke eller redusere antallet deler av diskrete objekter eller endre utstrekningen av en geometrisk figur i et plan til å bli større eller mindre. Mengden brøken opererer på blir byttet ut med en konseptuell ny mengde på en slik måte at forholdet mellom opprinnelig mengde og ny mengde er det samme som forholdet mellom teller og nevner. Muligens en av de første erfaringene elever har med brøk som operator er når de finner «halvparten» av noe.

Brøk som konseptet *forholdstall* handler om at brøk kan formidle en sammenligning mellom to mengder (Breiteig & Venheim, 2005). Da sees ikke brøk på som et tall (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), men som en komparativ indeks. For å mestre brøk som forholdstall sier de at elevene må ha en ide om relative mengder. Det vil si at elevene må kunne se forholdstall som en uavhengig enhet utenom komponentene som danner forholdet (Lamon, 1993). Elevene trenger å erkjenne hva det betyr at det er en relasjon mellom to mengder. Dette innebærer at to mengder som står i forhold til hverandre endres sammen, slik at forholdstallet forblir uforandret.

Brøk som underkonseptet *kvotient* handler om at alle brøker kan sees som et resultat av en divisjonssituasjon. En brøk $\frac{a}{b}$ er resultat av at tallet a divideres med tallet b der a og b er heltall og b er ulik 0 (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). De skriver at vanlig undervisningsaktivitet som benyttes for å implementere brøk som kvotient er «rettferdig deling». Breiteig og Venheim (2005) skriver at brøk som kvotient kan være en fin måte å begynne arbeidet med brøk, da mange elever har erfaring i nettopp det å dele.

Brøk som *målingskonsept* assosieres med to tett beslektede forestillinger, skriver Charalambous og Pitta-Pantazi (2007). Den ene er brøk sett som et tall som formidler de kvantitative egenskapene ved brøk. Den andre forestillingen brukes brøk som en måling. Da undersøkes det hvor stort antall enhetsbrøker som må benyttes for å avgjøre en distanse fra et bestemt startpunkt til et endepunkt. For eksempel korresponderer $\frac{4}{5}$ til distansen av 4 enheter på $\frac{1}{5}$ fra et gitt punkt. Denne karakteren ved brøk blir lett assosiert med bruken av tallinje eller måleredskaper som skal avgjøre en distanse fra et punkt til et annet i form av et antall brøkenheter. Selv om forestillingen av brøk som et tall kan virke enkelt, er dette vanskelig konsept for elevene skriver Charalambous og Pitta-Pantazi. De skriver at det er et stort kvalitativt sprang elevene må gjennomføre når de beveger seg fra heltall til rasjonale tall. Barn avviser ofte brøk som tall siden de ikke er en del av en tellbar sekvens. Dette leder til en konseptualisering av brøk som to heltall. Denne misoppfatningen kan lede til kalkuleringsfeil, slik som $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$. Vi kommer nærmere inn på systematiske feil i underkapittel 2.3. Det å omtale og bruke brøk som et tall er et fundamentalt viktig steg innen tallteori og for å få gode ferdigheter for tallbehandling med brøk. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) nevner flere ferdigheter som er viktig i forbindelse med å se brøk som tall- og målings-konsept. Elever bør kunne utføre partisjon av andre brøker enn halveringer. Elevene må være fortrolig med egenskapen til tettheten til rasjonale tall, som sier at det er et uendelig antall rasjonale tall mellom to brøker. Det er også viktig at elever kan bruke en gitt enhet (grunnbrøk) til å måle hvilken som helst avstand fra start punktet. Dette betyr at elevene er i stand til å finne et tall på en tallinje og motsatt kunne identifisere et tall vist som et punk på tallinjen. Selv om tallinjen er en egnet modell for blant annet mediere addisjon med brøk, er det en utfordrende modell. Elever teller blant annet delingsstrekene fremfor intervallene på nummerert tallinje og de bruker feil enhet når de teller. Det siste eksemplet forekommer oftere når tallinjen strekker seg lengre enn en hel, for eksempel at linjen går fra 0 – 2. Elever har også vansker med å markere brøker på en tallinje når inndelingen er et multiplum av nevneren. For å motvirke disse utfordringene i forbindelse med målingskonseptet er det en fordel at elevene mestrer ekvivalens knyttet til brøker.

2.3 Brøk undervisning og bruk av tallinje

I denne delen vil vi belyse brøk fra et undervisningsperspektiv. Først vil vi komme inn på feil som ofte dukker opp hos elever som kan knytte til heltallsdiskurs. Dette er relevant teori når vi skal analysere bruken av de visuelle mediatorene. Deretter vil vi presentere en oppsummering av Strother et al. (2016) sine anbefalinger for god brøkundervisning og komme litt inn på betydningen av kontekst og hverdagskunnskap. Anbefalingene til Strother et al. hadde betydning når vi designet læringssituasjonen og oppgavene for studiet og er relevant for vår analyse. Avslutningsvis vil vi se på tallinjen som visuell mediator, spesielt utfordringer tilknyttet bruken i møte med brøk.

2.3.1 Systematiske feil – heltallsdiskurs

Van Hoof et al. (2015) skriver at det er fire hovedaspekter der heltall skiller seg fra rasjonale tall og som kan lede til systematiske feil. Disse grunnleggende forskjellene kan sammenlignes med det Sfard (2007) omtaler som en endring i metareglene for spillet. Vi vil her oppsummere de kort, hvor de første er mest relevant for studiet. Det første aspektet relateres til tetthet. Der naturlig tall er diskret og du alltid kan peke til det nummeret som kommer etter, gjelder ikke dette for rasjonale tall. Dette er ikke mulig med rasjonale tall, siden det er uendelig mange tall mellom to brøker av ulik verdi. Dette kan lede til en misoppfatning om at det er ingen tall mellom to «etterfølgende» tall. Hvis vi knytter dette til tallinje og vår studie, kan vi lage et tenkt eksempel. Hvis elevene har plassert $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ og $\frac{3}{3}$ på en tallinje og deretter skal markere $\frac{1}{2}$, kan dette bli problematisk for eleven. $\frac{1}{2}$ skal markeres mellom $\frac{1}{3}$og $\frac{2}{3}$ og $\frac{1}{2}$ vil ikke korrespondere med noen tidligere punkter. Hvis elevene ikke er klar over at det eksisterer tall mellom $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$ kan dette lede til forvirring. Det andre aspektet handler om at heltall har én symbolsk medieringsform, men for rasjonale tall finnes det uendelig mange muligheter for å mediere tallet. Elever har utfordringer med å akseptere muligheten for at en brøk og et desimaltall kan stå for det samme tallet, eller at to brøker kan vise samme punkt på tallinjen. I stedet ser eleven på brøken som to separate heltall fremfor ett tall. Det tredje aspekt handler om hvordan størrelsen på et tall bestemmes. En av feilene elevene gjør i forbindelse med brøk er at de vurderer en brøk større når tallverdien til teller, nevner eller begge blir større. $\frac{7}{8}$ kan oppfattes som større enn $\frac{3}{2}$. Det fjerde aspektet er knyttet til operasjoner med rasjonale tall. Blant annet det feilaktige narrativet om at to tall multiplisert alltid blir større enn de individuelle faktorene.

2.3.2 Fem ideer for brøkundervisning

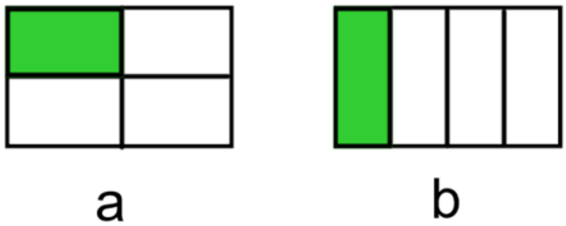
Strother et al. (2016) så på den nyeste forskningen inne undervisning av brøk og til høyt presterende lands undervisning innen emnet og brukte dette til å skrive en artikkel der de presenterer anbefalinger for brøkundervisning. De presenterer fem ideer for god brøk undervisning. Vi vil forteller kort om disse, hvor de tre første er viktigst for studiet.

Idé 1 er å vektlegge konseptet av enheter i møte med brøk. Begrepet enhet blir ofte assosiert med heltallet «en», men i forbindelse med brøk blir enheten definert av nevneren og kan endre seg etter hvilken enhetsbrøk vi måler eller teller med. Strother et al. (2016) mener at det er hensiktsmessig at elever bruker stambrøker i navngivningen av en brøk. Brøken $\frac{3}{10}$ bør dermed omtales som «tre (enheter) en tiendeler» og hvis det skal skriftliggjøres kan det skrives som «3($\frac{1}{10}$)». Denne ideen kan sees i relasjon til målkonseptet i kapitel 2.2. Når vi sier klokkeslettet «tre kvarter» benyttes kvart som en enhetsstørrelse, og tidspunktet blir oppgitt som tre kvartenheter.

Idé 2 er å bruke presise definisjoner av nevner og teller. Strother et al. (2016) skriver at en vanlig definisjon i lærebøker i USA av teller og nevner er at nevneren forteller antall deler den hele er delt inn i og telleren er antall deler som blir telt. De mener denne definisjonen ikke representerer hvordan brøk bør omtales på en adekvat måte. En slik fremstilling av tallområdet vil begrense elevenes mulighet til å lære og bruke brøk utover de enkleste formene for bruk av brøk. De mener at nevneren skal brukes for å identifisere eller navngi enheten som skal telles, og angir størrelsen på enheten. For eksempel når vi undersøker brøken $\frac{3}{4}$, forteller nevneren 4 at det er firedelsenheter som det skal telles med. Sifferet 3 i $\frac{3}{4}$ forteller antallet fjerdedelsenheter vi teller, og vil ha samme funksjon som når vi teller antall heltallsenheter bare at nå er enheten gitt av nevneren. Elever som kun ser brøk som «del hel» kan være opphavet til misoppfatning og forvirring og flere av disse kan sees i sammenheng med heltallproblematikken Van Hoof et al. (2015) beskriver. Strother et al. (2016) skriver at «del hel» definisjon skaper forvirring i møte med uekte brøker som $\frac{6}{4}$. Blant annet kan visuelle modeller (se figur 3) av $\frac{6}{4}$ bli tolket som $\frac{6}{8}$ og «seks av fire» kan lyde ulogisk. Ved å følge narrativ om at nevner angir enheten og telleren er antall enheter som telles, mener de denne feilen kan unngås i mange situasjoner. Hvis eleven ser et felt i figur 2 som en firedelsenhet kan eleven telle «en firedel, to firedel» og komme frem til seks firedeler. God og presis definisjon av teller og nevner mener de også vil gjøre det enklere for elever å korrekt addere brøker. En vanlig feil ved addisjon av brøk er at eleven adderer tellerne og deretter adderer nevnerne. Da kan eleven svare $\frac{6}{8}$ når de skal løse $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. Elever som forholder seg til en mer presis definisjon av teller og nevner, vil ikke bli like fristet til dette siden de vet at nevneren forteller størrelsen på enhetene de teller/adderer. Selv om Strother et al. (2016) fremhever viktigheten av riktig bruk av definisjon i møte med brøk stresser Carraher (2013) viktigheten av å se brøk som mer enn en matematisk definisjon, siden mange sider av brøk har opprinnelse fra praktisk handlinger og refleksjoner knyttet til dette.

Figur 3: Problematikk med arealmediator

Idé 3 er bruken av barmodeller eller tallinje. Strother et al. (2016) skriver at visuelle modeller kan gi god støtte til elevers tenkning brøk, men noen modeller kan skape forvirring. Brøk mediert som arealer (rektangler eller sirkler) eller som et sett med objekter, mener de ikke bør innføres først, men komme senere i læringsprosessen. En av utfordringene med brøk mediert som arealer er at arealet kan inndeles på flere måter og fortsatt mediere samme verdi/størrelse. I figur 3 er det totale arealet det samme og det markerte området like stort, men en direkte sammenligning av markert areal er utfordrende. For at elevene skal kunne behandle og kommunisere rundt arealmediatorer bør begrepet areal og relaterte begreper til areal være en del av elevenes diskurs (Behr et al., 1983). Strother et al. (2016) skriver at bar mediatorer og tallinjemediatorer er godt egnet til å sammenligne brøker og at elever bør få tid til å beherske disse, før fokuset rettes mot andre modeller. Liu et al. (2012) skriver også at tallinje modellen er et egnet instrument for å lære om brøk som målingskonsept og ide 1, 2 og 3 kan alle relateres til målingskonseptet beskrevet i kapittel 2.2.2.



Figur 4: 1/4 mediert på to ulike måter

Idé 4 til Strother et al. (2016) handler om å la elever resonerer over riktigheten av andre elevers svar og her er det ofte fiktive elevers besvarelser. Den fiktive besvarelsen inneholder feil som ofte har rot i konseptuelle misoppfatninger. Ved at elever tidlig arbeider med å avdekke feil i andres arbeid og begrunne hvorfor dette er feil, kan dette forebygge at elever legger til seg misoppfatninger og operasjonsfeil selv.

Idé 5 er å gi elevene strukturert språklig støtte. Strother et al. (2016) skriver at det er kjent at elever som diskuterer ideer og løsninger i par, grupper eller i hel klasse er et viktig bidrag for læring. Dette passer godt sammen med teoriene til Sfard (2007) der hun blant annet omtaler læring som en endring i diskurs hvor bruken av nye ord er et av elementene. Faglig diskusjon kan være utfordrende for elever i møte med brøk på grunn av at mange elever vil ha manglende faglig vokabular (Strother et al., 2016). For å bedre mulighetene for å ha gode matematiske samtaler innen emnet, mener de at elevene kan få støtte iblant annet begrepsplakater. Disse skal inneholde viktige faglige begreper og mulige startsetninger som kan brukes i elevdiskusjoner. Dette understøttes av studie til Ryve et al. (2013) som viser tekniske begreper i kombinasjon med visuelle mediatorer er viktig for en god kommunikasjon. De sier det er viktig at elever har tilgang til sentrale begreper før de kan ha en effektiv kommunikasjon.

For å nyansere viktigheten av sentrale begrep vil vi se til en studie gjennomført av Mack (1990). Studien hennes viser at elevers hverdagsdiskursen kan bidra til læring innen brøk. Uttrykk som halvparten, en tredjedel, en kvart med mer er begreper elevene har kjennskap til gjennom hverdagsspråket og kan brukes i en brøkdiskurs. Elevene er kjent med begrepene, men som vi beskrev i rammeverket har den matematiske diskursen en strengere og mer definert bruk av matematiske ord. Mack (1990) skriver at elever kan bruke sin hverdagskunnskap for å lære brøk, men det er også begrensninger for hva hverdagskunnskapen kan bidra med.

2.3.3 Utfordringer med tallinje

Selv om flere forskere (Liu et al., 2012; Strother et al., 2016) vektlegger viktigheten og nytten av å bruke tallinje i arbeid med brøk er det også knyttet utfordringer til den visuelle mediatoren. Bright et al. (1988) studerte hvordan elever representerer brøk på tallinje og effekten av å instruere i bruken av tallinjemodellen. De innleder og oppsummerer studiet med at tallinjen er en utfordrende visuell mediator for elever å beherske, og krevende for lærere å instruere elever i. Hovedutfordringen med tallinje som visuell mediator er at tallinjen krever integreringen av to former for informasjonskilder. Tallinjen består av billedlig informasjon (linjen) og symboler. For at tallinjen skal mediere informasjon må linjen sees i sammenheng med minst to punkter som har en tallverdi (symbolsk). Denne integreringen av to informasjonskilder er ikke like nødvendig med mange andre mediatorer benyttet innen temaet brøk. Blant annet kan et areal mediere brøken $\frac{1}{4}$ uten bruk av symboler (se figur 4). Bright et al. (1988) skriver at bruken av symboler for å markere punkter på linjen kan lede fokuset til elevene mot disse symbolene i stedet for den billedlige informasjonen tallinjen tilbyr. De kom med en hypotese om at behovet for å koordinere symboler og billedlig informasjon gir utfordringer for elevene når de skal knytte brøknavn til tallinjemodellen. De sier at dette kan være krevende når andre modeller benyttes, men denne utfordringen er ekstra relevant siden tallinjemodellen har en så sterk rolle i skolematematikken. De kommer også med en hypotese til basert i studiet sitt. Elever som finner oppdeling og sammenslåing av blant annet punkter på tallinje som utfordrende vil ha utfordringer med tallinje som visuell mediator for brøk. For eksempel må to og to punkter sammenslåes når 1/3 skal markeres på en linje (0-1) delt i seks. Bright et al. (1988) erfarte at elevene hadde betydelig større utfordringer med å forholde seg til tallinjer som var merket med 0 og 2 enn merking ved 0 og 1. Dette er ikke så overraskende siden 0 – 1 linjen er tettere knyttet til «del hel» konseptet ved brøk som vi gikk inn på i kapittel 2.2.2. Uavhengig om du ser brøk som et antall brøkenheter eller som del av en hel, vil resultatet trolig bli det samme på en tallinje fra 0 – 1.

Bright et al. (1988) gjennomførte flere datainnsamlinger der det var forskjeller i hva som ble vektlagt i instruksjonene. Elevenes progresjon i de ulike gjennomføringene var ulik, og de hadde teorier om årsaken til dette. Elevene presterte bedre når undervisningen vektla «oversettelse» mellom ulike visuelle mediatorer, slik som arealer til tallinjemodellen. Instruksjon som fokuserte på ekvivalens og likeverdige brøker på tallinje var også positivt for elevenes læring. Bright et al. (1988) mener at undervisning av tallinje og brøk bør vektlegge at elevene identifiserer punktet på tallinjen som står for første enhetene (stambrøk) og deretter bruke stambrøken til å merke enhet nummer to og tre og så videre på linjen. Dette samsvar med idé 1 og 2 til Strother et al. (2016) der de vektla viktigheten av konseptet enhet i brøkundervisningen. Bright et al. (1988) skriver at undervisning der flere tallinjer som viser ekvivalente brøker eller punkter brukes samtidig er gunstig. For eksempel kan en tallinjene være delt inn i to, fire og åtte deler og elevene kan arbeide med å gjenkjenne ekvivalente brøker eller arbeide med å forenkle brøken ved å sammenligne de ulike tallinjene.

3 Metode

Vi valgte å benytte kvalitativ forskningsdesign for å finne ut hvordan de visuelle mediatorer ble en del av diskursen til elevene i møte med brøk. Cohen et al. (2018) skriver at noe av hensikten med kvalitative studier er å lage beskrivelser og forklaringer, og dette samsvarer med intensjonene våre. Bruken av kommogninsjon som rammeverk og forskningsspørsmålet vårt la føringer for studien på flere nivåer slik som praktisk gjennomføring, behandling av data og bruk av teori. For å kunne belyse vårt forskningsspørsmål valgte vi observasjon av tolv elever mens de arbeidet med brøkoppgaver der arealer og tallinje ble benyttet. Elevene arbeidet i grupper på tre og ble filmet to økter på ca. 1,5 timer. Vi vil i dette kapittelet forklare og begrunne våre valg gjort gjennom prosjektet. Først vil vi begrunne valg av metode hvor vi argumenterer for bruk av observasjon i form av film som egnet for studiet. Deretter vil kapitelet omhandle datainnsamlingsprosessen der vi kommer inn på utvelgelsen av deltagere, pilotering og hvordan datainnsamlingen ble gjennomført. I punktet «Instrument – oppgaver til deltagere» beskriver vi oppgavene og hvordan læringssituasjonen ble designet for å være et egnet instrument for å innhente data. Vi vil så beskrive hvordan vi behandlet og bearbeidet dataene for å kunne belyse vårt forskningsspørsmål. De to siste temaene i dette kapitelet vil omhandle studiets troverdighet og etiske betraktninger.

3.1 Valg av metode

For å kunne belyse forskningsspørsmålet: «*Hvordan blir de visuelle mediatorene en del av læringsdiskursen innen temaet brøk?*» måtte vi ta noen valg i forhold til metodevalg. Metoden vi valgte skulle ikke kun fungere som noe vi skulle lære oss å bruke, en teknikk, men også fungere som et redskap for å kunne belyse forskningsspørsmålet vårt (Holme & Solvang, 1996). For å belyse forskningsspørsmålet vurderte vi det til at kvalitativ metode var den egnede metoden. Bryman (2016) skriver at kvalitativmetode gir forskeren mulighet for å gå i dybden på problemstillingen og er ofte begrenset av et fåtall forskningsobjekter/deltagere. Bedre kunnskap om hvordan visuelle mediatorer blir en del av en brøkdiskurs og se nyanser i rutiner, narrativer og nøkkelord er detaljer som er vanskelig å avdekke ved bruk av en kvantitativ metode. Målet vårt var ikke å generalisere, men gå mer i dybden på forskningsspørsmålet. Dermed er kvalitativ metode den metoden som er best egnet for vår studie.

3.1.1 Observasjon som metode og bruk av video

Vi valgte å benytte videoobservasjon for å belyse vårt forskningsspørsmål. Cohen et al. (2018) skriver at en av fordelene med observasjon er at dette gir forskeren førstehånds data, fremfor mer medierende metoder. Når fokuset er på de visuelle mediatorene, stiller dette krav til datamaterialet. Datamaterialet må gi informasjon om bruken og siden det er knyttet til visuelle handlinger ville ikke lydopptak dekke behovet. Datamaterialet ga oss muligheten til å gå tilbake ved et senere tidspunkt da hendelser kan avspilles flere ganger. Dette kunne være til hjelp under analysen da vi bedre kunne se den verbale og visuelle kommunikasjonen som oppstod. Videre kunne videoanalyse hjelpe oss ved at vi kunne finlese situasjonene og fange opp detaljer vi kanskje ville oversett ved en observasjon der og da. Alrø og Kristiansen (1997) trekker frem at det er viktig å tenke over at virkeligheten og videoopptak likevel ikke er identiske. Lydkvaliteten kunne bli redusert og opplevelsen går fra å være 3d til 2d. Alrø og Kristiansen (1997) mener at det er aspekter i klasserommet, detaljer og hendelser som ikke kommer tydelig frem på opptaket og ikke lar seg observere. De peker på en enighet mellom medieetnografer om at kamera til stedet vil kunne påvirke situasjonen, men det er vanskelig å si noe om hvilken innflytelse det vil ha.

Ved at forskerne er til stede vil de bli del av et sosialt fellesskap og på den måten påvirke fellesskapet (Holme & Solvang, 1996). Som observatører ville vi være et fremmedelement som kunne ha innflytelse på situasjonen, men det kan være vanskelig å si i hvilken grad og hvordan observatørene påvirker situasjonen (Alrø & Kristiansen, 1997). Vi kunne velge å innta ulike roller som observatører, skjult eller åpen observasjon. Ved skjult er det ikke kjent for personene at de blir observert, ved åpen vet de det. Vi valgte å benytte åpen observasjon da vi ønsket større frihet ved å kunne stille spørsmål og ha mulighet til å komme nært på informantene (Holme & Solvang, 1996). Vi kunne videre velge mellom total eller delvis deltagelse (Kristiansen & Krogstrup, 1999). Ved total deltagelse velger forskeren å oppholde seg lengre og mer sammenhengende i feltet en ønsker å undersøke/studere. Delvis deltagelse vil si at en observerer bare en del av aktiviteten i undersøkelsesenheten. Vi valgte en av oss som skulle ta på seg rollen som lærer under datainnsamlingen, den andre skulle ikke involveres i gjennomføringen, men være observatør. Den som var observatør, fikk en mer nøytral rolle og kunne fokusere på det som skulle observeres. Det at en av oss ikke hadde en aktiv rolle i datainnsamlingen og ikke hadde tilknytting til elevgruppen, bidro til den nødvendige nøytraliteten som kreves i studie. Vi vurderte det som hensiktsmessig at en person med god kjennskap til undervisningsopplegget som var designet for datainnsamlingen ledet undervisningen. Styrken ved dette valget var at gjennomføringen ble mest mulig lik intensjonen og ikke ble fortolket av et mellomledd. Læreren som ledet datainnsamlingen har vært matematikklærer på dette trinnet i drøyt et år, noe som kan være både en styrke og en svakhet. Styrkene kan være at deltagerne er trygge på den voksne som leder datainnsamlingen. Datainnsamlingssituasjonen kunne oppleves mer som en vanlig undervisningsøkt enn hvis en fremmed skulle gjort dette. En av utfordringene med situasjonen var at forskeren «forsker på seg selv», men vi vil påpeke at fokuset for dette studiet ikke er den designede læringssituasjonen eller lærerens rolle. Dermed mener vi at denne doble rollen ikke har stor betydning. I tillegg var den siste forskeren kun observatør og blir en mer nøytral part i observasjonen. Vi vil komme tilbake til dette temaet i metodekapittelet.

3.2 Datainnsamlingsprosess

Som beskrevet tidligere er resultatene i en kvalitativ undersøkelse tett knyttet til deltagerne som deltar. På grunn av denne tette koblingen starter vi dette delkapittelet med å presentere prosessen som resulterte i de aktuelle deltagerne i vårt prosjekt. Deretter vil vi beskrive piloteringen og konsekvensene av dette. Avslutningsvis presenterer vi selve gjennomføringen med begrunnelse av valg som ble tatt.

3.2.1 Utvelgelse av deltagere

Siden vi planla å gjennomføre datainnsamlingen ved en skole der en av oss arbeider som lærer, hadde rektor kjennskap til prosjektet i innledningsfasen. Høsten 2020 gjennomførte vi et møte med rektor der prosjektet ble beskrevet og tillatelse til å gjennomføre datainnsamlingen ved skolen ble gitt. Vi ønsket å gjennomføre observasjonen på elever som var relativt uerfarne med brøk. Dette begrenset klassetrinnene til fjerde og femtetrinn. Tidlig i planleggingsfasen kom vi frem til at ideelt antall deltagere var tolv, noe som medførte at vi valgte femtetrinn på grunn av mulig tilgjengelig antall elever. Avgjørelsen om å ha 12 deltagere var et kompromiss mellom to kriterier vi hadde. Det var et høyt nok antall til at det kunne simulere en «normal» klasseromssituasjon. Med et høyere antall deltagere kunne det bli upraktisk å gjennomføre da mange elever i et rom kan gi mye lyd som kan forstyrre lydopptak og gjøre gjennomføringen mer uoversiktlig. I tillegg ville vi ikke kunne observere eller filme alle elevene og dermed ikke være relevant med tanke på mengde data.

Femtetrinnet på denne skolen bestod av rundt 30 elever. De hadde minimal erfaring med brøk. Trinnet besto av flere elever enn antall deltagere vi trengte, noe vi vurderte som positivt da vi ikke forventet at alle foreldre og elever ville samtykke til deltagelse. Av de som hadde gitt samtykke ble tolv deltagere valgt ut i samarbeid med kontaktlærerne på trinnet. Utvelgelsen ble gjort basert på to kriterier. Det skulle være variasjon i den faglige kompetansen i gruppen, slik at det gjenspeilte en «normal» klasse. Vi ønsket ikke en faglig homogen gruppe. Det andre kriteriet var at elevene var komfortable med å bli filmet da de trolig ville være mer muntlig aktiv. Dette valget gjorde at gruppen kanskje fraviker en gjennomsnittlig klasse, men vi vurderte muntlig aktivitet, handling og kommunikasjon rundt de visuelle mediatorene som så viktig for datainnsamlingen at dette valget ble tatt. Cohen et al. (2018), sier at denne formen for studier ikke nødvendigvis er representativ for hele grupper da det er et for lite utvalg informanter. Ved et annet utvalg elever kunne resultatene blitt noe annerledes.

De tolv deltagerne ble delt inn i fire grupper bestående av tre elever. Vi valgte bevisst grupper på tre fremfor læringspar eller større grupper, da vi antok at større grupper økte risikoen for at elever meldte seg ut fra diskursen. I tillegg tenkte vi det ville være vanskeligere å dokumentere fysiske handlinger i læringsarbeidet hvis antall deltagere var for høyt. Blant annet kunne medelever blokkere kameraet slik at handlinger på plakat ikke ble fanget opp. Årsaken til at vi ikke valgte grupper på to kom av at hvis en av deltagerne var lite aktiv, ville vi få lite samhandling og datagrunnlaget ble dårligere. En av styrkene ved det kommognitive rammeverket er at det ser på kommunikasjon som tenkning og ved å studere elevers handling kan vi få innblikk i deres læring. Men da er vi avhengig av å kunne observere samhandling. Ved å ha elever i grupper på tre antok vi at minst to av elevene burde være relativt aktiv i læringsarbeidet.

3.2.2 Pilotering

I forkant av selve datainnsamlingen ble oppgavesettet som skulle være instrumentet for observasjonen testet ut på tre elever. Vi valgte å gjennomføre en pilotering da det ga den av oss som skulle ha rollen som «lærer» mulighet til å øve på den praktiske gjennomføringen og bedre forutsetninger for å gjennomføre datainnsamlingen slik den var planlagt. Vi fikk også testet om oppgavene og læringssituasjonen var egnet for formålet. Oppgavesituasjonen og oppgavene skulle bidra til å belyse forskningsspørsmålet. Når vårt forskningsspørsmål handlet om hvordan elever tar i bruk visuelle mediatorer som arealmediatorer og tallinjemediatorer, må oppgavene gjenspeile dette.

Etter gjennomført pilotering oppsummerte vi erfaringene og brukte disse til å gjøre justeringer inn mot selve datainnsamlingen. Oppgavene læringssituasjonen vi hadde planlagt vurderte vi som hensiktsmessig. Handlingene og kommunikasjonen til elevene i piloteringsgruppen omhandlet temaet for vår forskning og vi konkluderte med at dette kunne vært data vi kunne ha benyttet. Selv om oppgaveformuleringen ble vurdert som egnet erfarte vi at antall oppgaver og omfanget måtte endres. Tidsbruken til piloteringsgruppen på oppgavene fikk oss til å redusere antall oppgaver. Vi hadde i utgangspunktet planlagt at elevene skulle arbeide med oppgaver som handlet om a) plassere bilder av arealer som viste en brøkstørrelse på tallinje og gi disse tallverdier symbolsk og med muntlig språk b) sammenligne brøkstørrelser mediert symbolsk ved hjelp av tallinje og c) utføre addisjon av brøk med støtte i visuelle mediatorer. Vi valgte punkt c helt bort etter piloteringen. Vi hadde planlagt å bruke to 1,5 timer på gjennomføringen, erfaringen viste at det ikke var nok tid. I tillegg reduserte vi antall oppgaver under punkt a og b, men dette hadde mindre konsekvenser. Oppgavene vi fjernet hadde lik utforming som oppgaver vi valgte å beholde. Det var kun en reduksjon i antall. Hvis vi hadde utvidet datainnsamlingen til å inkludere punkt c vurderte vi omfanget av datamateriell til å bli for omfattende for denne masteroppgaven.

3.2.3 Gjennomføring

Datainnsamlingen ble gjennomført i deltagernes eget klasserom og ble gjennomført i løpet av to økter som hadde varighet på ca. 1,5 time hver. For å gjøre situasjonen tilnærmet så naturlig som mulig ble gjennomføringen lagt til tidspunkter der elevene hadde matematikkundervisning i utgangspunktet. Elevene som ikke deltok i datainnsamlingen, fikk de samme oppgavene og gjennomførte dette parallelt med egen lærer i et annet klasserom. Gruppene ble hold adskilt for å sikre at ikke uvedkommende ble med på film.

Deltagerne ble delt inn i fire grupper bestående av tre elever. Denne grupperingen ble benyttet både i økt en og økt to. I begge øktene arbeidet gruppene på store plakater som hang på veggen da dette gjorde det lettere å observere og filme elevenes handlinger. Oppgavene var formulert slik at det var en forventning om at elevene måtte utføre handlinger på plakatene som å avmerke, henge opp eller peke til. Den første økten var organisert slik at lærer presenterte en oppgave, elevene diskuterte og løste oppgaven og presenterte dette for medelevene. Dette mønstret ble gjentatt for alle deloppgavene. Den andre økten ble innledet med en oppsummering fra forrige økt og deretter ble øktens oppgave presentert. Når oppgaven var presentert jobbet elevene mer uavbrutt frem til de skulle presentere endelig løsning ved endt økt. I den første økten ville det bli mye samhandlingen mellom elever, mellom grupper av elever og mellom lærer og elever/grupper. Den andre økten ville vi gi elevene muligheten til å arbeide mer uavbrutt innad i gruppen og gi rom for mer sammenhengende refleksjon. Vi kommer nærmere inn på innholdet i oppgavene og begrunnelse for disse valgene i kapittel 3.3. «Lærerens» rolle var hovedsakelig å organisere, igangsette, veilede og unngå forklarende og instruerende involveringer. Fokuset for vår forskning var ikke på lærerens rolle, men hvordan elevene brukte de visuelle mediatorene. Vi vet at en mer aktiv lærerrolle kunne fungert som modell for elevene gjennom å tilby nøkkelord og metoder for bruk av de ulike visuelle mediatorene, men i stedet for at lærer skulle tilby disse elementene valgte vi at lærer skulle være bevisst på hvilke elevforklaringer og formuleringer som skulle få mest fokus når elever forklarte for andre. Vi vurderte at en instruerende og forklarende lærer ville påvirke elevenes handlinger og valg i større grad, enn en mer elevsentrert lærerrolle.

Vi valgte å benytte to videokamera for å fange elevenes handlinger og diskusjon. Det ene kameraet ble rettet mot en gruppe og deres plakat og skulle sikre sammenhengende data fra denne gruppen. Videokameraet ble plassert på en tripod og filmet skrått inn mot plakaten slik at både elever og plakat var synlig. Videokameraet var lett synlig for elevene og vi gjorde ingen forsøk på å «kamuflere» det. Det andre kameraet var et håndholdt kamera som ble operert av en av oss. På forhånd hadde vi avtalt at dette kameraet skulle brukes til å filme grupper som presenterte for andre grupper og fellesdiskusjon. Når det ikke var fellesaktivitet ble kameraet rettet mot et par utvalgte grupper når disse diskuterte og løste oppgaver. Det bevegelige kameraet gjorde det mulig å dokumentere fellesdiskusjonen og ga fleksibilitet. Elevene arbeidet i ulikt tempo og det bevegelige kameraet kunne rette fokus mot den gruppen som var mest aktiv. Dette gir ikke en nøytral tilnærming til hva og hvem som ble filmet. Filmerens valg vil påvirke datagrunnlaget, men vi vurderte fordelene til å overvinne de negative konsekvensene. Hvis kameraet filmet kun en gruppe ville det være lengre perioder med ikke relevant opptak og ved å bevege kameraet til aktive grupper fikk vi et større datagrunnlag.

3.3 Instrument – oppgaver til deltagerne

For å studere hvordan elever i en klasseromssituasjon bruker visuelle mediatorer i møte med brøk, måtte elevene arbeide med oppgaver som er egnet for vår studie. Det var elevenes handlinger som ble gjenstand for analyse og vi ville ikke gjøre vurderinger av oppgavene, men oppgavene ga betingelser for hva vi kunne finne i en analyse. Vi vil her beskrive hva som ledet oss frem til oppgavesettet og læringssituasjonen vi valgte. Oppgavene og planleggingsdokumentet er lagt ved som vedlegg 1. Med utgangspunkt i tidligere forskningslitteratur og kjennskap til deltagernes tidligere erfaring med emnet brøk, hadde vi fire kriterier vi mente oppgavene burde oppfylle.

1)Elevene måtte møte oppgaver der tallinjen strekker seg lengre enn 1. Bright et al. (1988) opplevde at elever hadde større utfordringer med tallinjer som strekte seg fra 0 – 2 enn 0 – 1. Noe av dette kan trolig relateres til «del hel konseptet» (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). På en tallinje som strekker seg fra 0 – 1 vil brøken $\frac{1}{2}$ bli plassert på samme plass uavhengig om brøken sees fra «del hel-» eller «måling/tall-konsept». Hvis en elev behandlet brøken $\frac{1}{2}$ fra «del hel-konseptet» på en tallinje som strekker seg fra 0 – 2 kan eleven se på linjen som den hele fremfor posisjonen 1 og punktet $\frac{1}{2}$ blir trolig plassert på punktet 1 på linjen. En tallinje fra 0 – 2 fremfor 0 – 1 kan avdekke flere feiloppfatninger.

2)Noen av oppgavene måtte inneholde uektebrøk. Et av argumentene til Strother et al. (2016) for å bruke tallinje fremfor arealer er at tallinjene medierer mer naturlig uekte brøk. Dette er tett knyttet til «enhetsdefinisjonen» som de argumenterer for er viktig å fokusere på i undervisningen. Ved å gi oppgaver som for eksempel er knyttet til brøken $\frac{5}{4}$ og dette er relatert både til arealmediator og tallinjemediator kan dette gi data som er av interesse ved elevers bruk av visuelle mediatorer.

3) Oppgavene måtte legge opp til at elevene skulle gi navn til tallstørrelsen, både muntlig og skriftlig i tilknytting til tallinje og arealmediator. En av grunnen til at vi vektla dette kommer av at Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) mener det er viktig at elever både kan markere en brøk på en tallinje, identifisere og navngi et tall som er merket som et punkt på tallinjen. Bruk av nøkkelord er et av punktene Sfard (2007) omtaler som avgjørende for om en person kan bli en deltager i en spesifikk diskurs. Det er dermed viktig at læringssituasjonen kan avdekke om elevene kan bruke nøkkelord passende for diskursen.

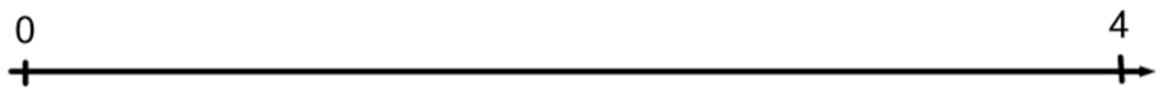
4) Deler av oppgavene burde gi elevene mulighet til å arbeide med brøk der både tallinje og arealer blir brukt i forbindelse med brøk parallelt. Bright et al. (1988) antydet at

undervisning som vektla sammenhengen mellom «del hel»-mediatorer til tallinjemediatoren var fordelaktig for elevene i deres studie.

Datainnsamlingen ble gjennomført i løpet av to undervisningsøkter. Vi vil her presentere oppgavene deltagerne arbeidet med, hvordan det ble orkestrert av «lærer», hensikten med disse og hva vi forutså av handlinger hos deltagerne i tilknytting med noen av oppgavene.

3.3.1 Økt 1: Navngiving og plassering av brøk på tallinja

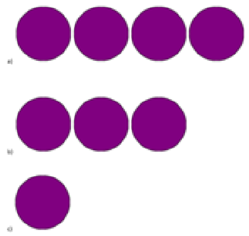
Den første økten varte i 1,5 time og ble innledet med at elevene skulle diskutere i gruppene hva de tenkte brøk var og hva tall er. Vi ønsket med dette å få et lite inntrykk av hva elevene kunne om brøk fra før. Deretter ble de presentert for en tallinje tegnet på en papirplakat som var hengt på veggen. Plakaten var ca. 1,5 meter lang og 0,5 meter høy. Tallinjen på arket var merket med 0 og 4 som vist i figur 5. Tallinjen var laget stor slik at det skulle være lett å filme handlingene til elevene, men også være enkelt for elevene å ta i bruk. Elevarbeidet ble gjennomført som en veksling mellom at lærer ga elevene en oppgave, elevene diskuterte og løste oppgaven og deretter presenterte dette for de andre gruppene.



Figur 5: Illustrasjon av tallinjen brukt i datainnsamling

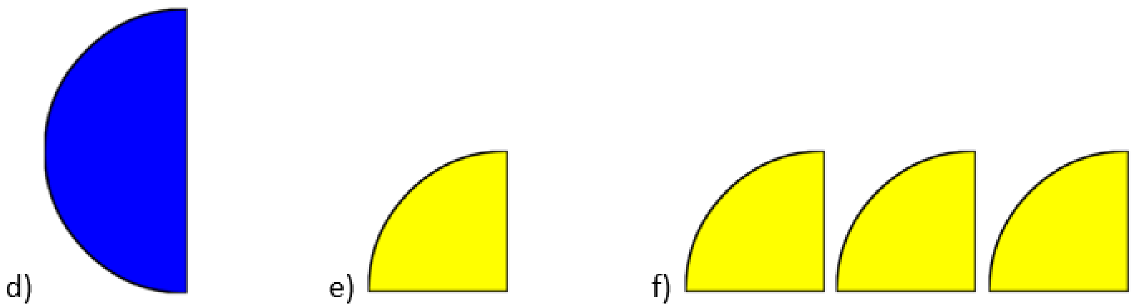
Deltagerne var mindre vant til tallinje som visuell mediator generelt og hadde ingen erfaring med tallinje i forbindelse med brøk. Dette var hovedårsaken til at vi valgte den arbeidsformen til å starte med. Det kommognitive rammeverket til Sfard (2007) sier at læring i stor grad er mennesker som etterligner andre diskursdeltageres kommunikasjon. Den hyppige vekslingen mellom ny oppgave, diskusjon og presentasjon tenkte vi ville gjøre det mulig for elever å hente inspirasjon av medelever og «veilede» usikre elever i bruken av tallinje i møte med brøk. Dette ville igjen sikre mulighet for at mediatoren ble en aktiv del av diskursen til flere elever. Vi ønsket data på blant annet hvordan tallinjen ble en del av diskursen og da måtte elevene bruke tallinjen. Det andre punktet gikk på etisk og moralsk ansvar. Som forskere skulle vi ikke kun fokusere på vår egen nytte av en datainnsamling, men vi pliktet å gi deltagerne en situasjon som har egenverdi for dem. Hvis tallinjen ikke ble introdusert på en slik måte at flertallet av deltagerne opplevde mestring og læring var det et brudd på denne forpliktelsen. Derfor ønsket vi å benytte en mer styrt oppgave til å begynne med, fremfor en mer åpen oppgave der elevene arbeidet mer selvstendig uten involvering fra lærer og medelever.

Det første elevene skulle gjøre var å plassere tre bilder som viste 4 sirkler, 3 sirkler og 1 sirkel der de mente de passe på tallinjen (figur 5).



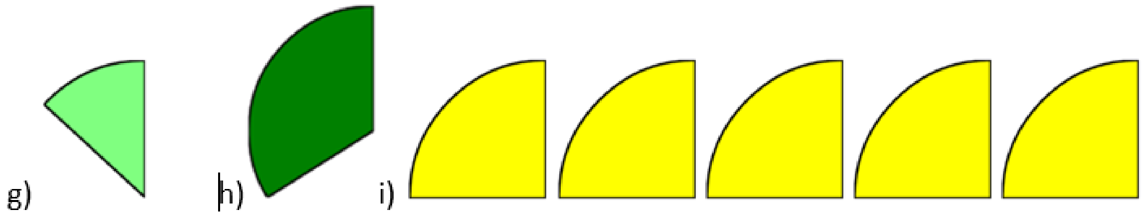
Figur 6: Bilder av verdiene 4, 3 og 1

Disse sirklene ble omtalt som kaker for elevene. Deretter skulle de gi disse bildene og posisjonene på linjen et navn som passet til punktet. Selv om vi antok at elevene var kjent med åpen tallinje og kunne bruke den, ville den innledende oppgaven vise dette. Hvis elevene ikke kunne plassere heltall på en tallinje, ville de ikke kunne bruke den i forbindelse med brøk. Ved at elevene plasserte bildet av en kake på tallinjen og ga den navnet «1» ville dette bli et viktig referansepunkt videre. Deretter skulle elevene plassere bilder som viste $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ av en kake (figur 6). Vi valgte å vise bildet av $\frac{3}{4}$ som tre separate firedelsenheter og ikke en inndelt sirkel der tre er markert. Strother et al. (2016) anbefaler at brøk defineres som et antall enheter definert av nevner, fremfor «del hel» definisjon og dermed valgte vi et bilde som var tettere knyttet til 3 x $\frac{1}{4}$.



Figur 7: Bilde av verdiene 1/2, 1/4 og ¾

Vi valgte å bruke brøker med nevner som var praktisk enkle å lokalisere på tallinjen. $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$ kunne lokaliseres ved halveringsrutiner, men $\frac{1}{3}$ eller $\frac{1}{5}$ ville vært mer krevende. Vi ønsket ikke at selve inndelingen av linjen skulle være hindringen innledningsvis og valgte å bruke brøker som var enklere å markere praktisk. Bilde av $\frac{1}{3}$ ble delt ut til elevene, men da som en ekstra oppgave for de som jobbet effektivt. I prediksjonen i forkant antok vi at flertallet av elevene ville plassere blant annet $\frac{1}{2}$ riktig og ikke finne $\frac{1}{2}$ av hele linjen. Vi tenkte at bildene av arealet av $\frac{1}{2}$ ville hindre elevene fra å tenke $\frac{1}{2}$ av hele linjen, siden de kunne se bildet av $\frac{1}{2}$ i relasjon til bildet av 1. Deretter skulle elevene diskutere og gi navn til de nye punktene på tallinjen både skriftlig og muntlig. Her var hensikten å få informasjon om hvilke nøkkelord elevene var kjent med og om de var kjent med den symbolske skrivemåten. Siden brøkene $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ er blant de vanligste regnet vi med at en del av deltagerne kjente til nøkkelord som halv, kvart og firedel og kunne skrive disse som brøk. Vi tenkte også at noen elever for eksempel ville skrive blant annet 0,5 ved bildet og punktet $\frac{1}{2}$. Når elevene hadde presentert navnene de hadde gitt punktene skulle lærer fremheve forslagene til elever som hadde nøkkelord som var passende for brøkdiskursen. Deretter skulle elevene plassere bildet av $\frac{1}{8}$ vist som et areal og $\frac{5}{4}$ vist som fem firedelsarealer (figur 7).



Figur 8: Bilder av størrelsene 1/8, 1/3 og 5/4

Hvis elevene identifiserte $\frac{1}{4}$ som en gitt lengde enhet på tallinjen antok vi at de ville kunne plassere $\frac{5}{4}$ på riktig sted. De ville enten se fire av bitene på bildet som en hel og en firedel eller telle fem firedelshopp/lengder. Her antok vi at navngivingen av mengden ville by på større utfordring. Elever som omtalte $\frac{3}{4}$ som tre av fire ville kanskje oppleve ordlyden fem av fire som kunstig. I tillegg var dette et mindre kjent nøkkelord. Blant annet $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{2}$ er tett knyttet til tidsbegreper og mer kjent fra hverdagsdiskursen.

Siste aktivitet i første økt skulle elevene finne posisjonen for to brøker som ble gitt symbolsk. De skulle plassere brøkene $\frac{7}{8}$ og $\frac{3}{2}$. Her ville ikke elevene få støtte i bilder av arealer og ville teste om elevene hadde gitt mening til teller og nevner i en brøk. Elevene som nærmet seg et narrativ om betydningen til teller og nevner eller gjenkjente rutiner knyttet til tidligere brøker kunne se $\frac{7}{8}$ som syv åttendelsenheter. De kunne bruke posisjonen til $\frac{1}{8}$ på tallinjen og se avstanden som $0 - \frac{1}{8}$ som en enhet og gjenta dette syv ganger for å finne riktig punkt. Hvis elevene koblet nevneren i $\frac{3}{2}$ til avstanden $0 - \frac{1}{2}$ på tallinjen og telleren som en telle-enhet ville deltageren kunne finne punktet selv om det er en uekte brøk. I de første oppgavene fikk elevene informasjonen gitt som et bilde, nå ble informasjonen gitt symbolsk. Dette ga oss en mulighet til å se om elevene reflekterte ut fra tidligere bilder av brøker eller tidligere merkede punkter på tallinjen. Økten ble avsluttet med at elevene skal fortelle hva de nå tenker hva brøk er.

3.3.2 Økt 2: Sammenlikning av brøk

I andreøkten var oppgavesituasjonen ikke like styrt som innledende. Med dette mener vi at deloppgaver og materiellet ikke la like store føringer for elevenes handlinger. I den første økten var det mange små deloppgaver som å gi navn til punkter, markere brøker, begrunne underveis. I den andre økten gikk oppgaven ut på at de skulle finne ut hvem som hadde løpt lengst og lengdene var oppgitt som brøkdel av en kilometer. Oppgaven ble innledet med at elevene fikk vite at Hans hadde løpt 1km og denne lengden var illustrert på plakaten til elevene som en avstand på en linje som gikk fra 0 – 1 tegnet med sort tusj. Deretter fikk elevene vite lengdene som klassevennene til Hans hadde løpt som var: «Per 2 km, Kari $\frac{1}{2}$ km, Arve $\frac{3}{4}$ km, Nina $\frac{6}{4}$ km, Mona $\frac{7}{8}$ km, Knut $\frac{2}{3}$ km, Anette $\frac{5}{3}$ km, Fredrik $\frac{15}{8}$ km». Elevene ble gjort oppmerksom på at det var tegnet inn flere tynne streker under linjen til Hans, som kunne brukes til å lage flere tallinjer. Elevene ble ikke "tvunget" til å benytte tallinjen i løsningsdiskursen, men det lå til rette for det i læringsmaterialet. Vi valgte å formulere oppgaven slik at det skulle vektlegge tallinje i denne økten. Dette valgte vi for å kunne få data på hvordan elevene benytter tallinjen som mediator uten påvirkning fra arealmediatorene.

De to datainnsamlingsøktene og oppgavesettene som ble benyttet består av flere oppgaver som har fellestrekk. Dette er et bevisst valgt for å heve muligheten for å kunne eventuelt oppdage rutiner. Blant annet går brøkene $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ og $\frac{7}{8}$ igjen i begge oppgavesettene og brøker med tre i nevner er med i begge settene. Elevene ville møte uekte brøk i begge øktene. Lavie et al. (2019) skriver at det er ikke nok å se på en isolert hendelse for å avgjøre om det er en rutine og hva den består av. De anbefaler god tilgang til deltagerens historiske handlinger og dette vil gi solide påstander om en deltagers utvikling av rutiner. Vår studie er for kort til å evaluere utvikling hos elevene, men ved å gjennomføre undersøkelsen over to kortere økter og oppgavene har fellestrekk ville dette bidra til sterkere data for å analysere rutiner og narrativer.

Tallene som dannet grunnlaget for oppgaven elevene arbeidet med, 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{8}$ og $\frac{15}{8}$, var ikke tilfeldig valgt. Heltallene 1 og 2 hadde som funksjon å gi elevene referansepunkter når de skulle sammenligne brøkene. Brøken $\frac{1}{2}$ er trolig det vanligste rasjonale tallet og kjent fra hverdagsdiskursen til elevene og skulle være en myk start for elevene slik at de kom inn i arbeidet. I den andre økten valgte vi å ikke ha med noen stambrøker, men unntak av en todel. For eksempel skulle eleven ikke sammenligne brøken $\frac{1}{4}$ med andre brøker, men $\frac{3}{4}$ og $\frac{6}{4}$ var en del av oppgaven. I den første økten fikk elevene ofte grunnbrøken først og så kunne de bruke den i plasseringen av andre brøker med samme nevner. I den andre økten fikk de ikke denne «hjelpen». Brøkene som har 2, 4 og 8 i nevner kan finnes ved halveringsstrategi på tallinjen og ville ha mange korresponderende punkter. Derfor valgte vi å ha med $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{3}$ for å bryte dette mønstret. Her ville ikke elevene kunne bruke tidligere inndelinger på tallinjen for å finne punktene for $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{3}$. Vi vurderte å ha med brøker med fem som nevner, men det er praktisk krevende å dele en tallinje i fem like lange segmenter for elever. For å kunne observere hvordan elevene forholdt seg til uektebrøk valgte vi å ha med $\frac{6}{4}$, $\frac{5}{3}$ og $\frac{15}{8}$. Dette ga oss en mulighet til å se hvordan elevene bruker tallinjen i møte med uekte brøk, blant annet fordi Strother et al. (2016) skrev at tallinjen er egnet i arbeid med uekte brøk.

3.4 Bearbeiding og analyse av data

Gjennom analysen skulle vi skape et system, finne mønster og meninger ved hjelp av informasjonen datamaterialet gir (Postholm & Jacobsen, 2011). Analysen skal derfor handle om å gi mening til og trekke ut essensen av innsamlet datamateriell. Vi vil videre i dette kapittelet presentere hvordan vi bearbeidet videoopptakene til data som kunne analyseres, analyseverktøyet vi har utarbeidet og valg tatt underveis i prosessen.

3.4.1 Fra video til transkipsjon

Cohen et al. (2018) skriver at forskeren må avgjøre hva som er den mest hensiktsmessige måten å behandle videomateriell. Transkribering kan gi viktige detaljer og presis data fra et opptak, men er også tidkrevende og i noen tilfeller kan oppsummering og kun velge ut viktige sekvenser som transkriberes være like funksjonelt. Vi valgte å transkribere store deler av materiellet, men utelot lengre sekvenser som ble vurdert som irrelevant for studien. Transkriberingen var tidkrevende, men hjalp oss med å bli godt kjent med datagrunnlaget. Vi hadde gjort notater etter hver datainnsamling og vi noterte mens vi transkriberte. I et videoopptak er det mye informasjon og transkribereren tolker og velger ut hva som skal noteres. Cohen et al. (2018) skriver at det er viktig at forskeren tydeliggjør hvilke konvensjoner og valg som er gjort i transkriberingsprosessen. Vi valgte å skrive alle uttalelser til deltagerne på bokmål, ikke dialekt. Dette forsvares da vi mener språkformen ikke påvirker meningsinnholdet som er vårt fokus og reduserer muligheten for å knytte deltagerne i datainnsamlingen til et geografisk område. I transkripsjonen omtales den ene forskeren som «lærer» og de få gangene observatøren snakker blir denne personen omtalt som observatør. Deltagerne fikk tildelt fiktive navn som ble brukt gjennom hele notatet. Korte pauser eller nøling ble markert med … Siden vårt forskningsspørsmål har fokus på visuelle mediatorer måtte vi ha med beskrivelser av elevers handlinger i like stor grad som hva de uttalte. Vi kunne ikke beskrive alle handlingene til elevene, men valgte å beskrive handlinger elever gjorde i forbindelse med de visuelle mediatorene eller som var avgjørende i kommunikasjonen. Disse beskrivelsene ble ofte knyttet til transkribering av hva elevene sa. For å skille tale fra beskrivelse ble alle beskrivelser skrevet i parenteser. Et eksempel: «Ludvik: Det er en (peker til bildet av 1) deler den opp en gang blir det en (peker til $\frac{1}{2}$ figur) og da blir det her (Peker til 0 og 1 med hendene og fører de til midten).» Vi brukte også parentesene til å beskrive tilfeller der elevene tydelig nølte, hadde lengre pauser, stemmebruk som skilte seg ut eller lignende. Før vi transkriberte videomaterialet visste vi allerede at vi kom til å støtte oss til videomaterielt parallelt med transkripsjon. Videomaterialet ville da være mest egnet til å gi mer detaljert informasjon, mens transkripsjon gi oss oversikt.

3.4.2 Analyseprosess og analysemetode

Når vi skulle analysere datamaterialet vårt valgte vi å støtte oss til Braun og Clarke (2012) og deres beskrivelse av hvordan en tematisk analyseprosess gjennomføres. Braun og Clarke beskriver tematisk analyse som en metode for å systematisk identifisere, organisere og gi innsikt i mønstre på tvers av et datasett. De beskriver tematisk analyse som en egnet vei inn i kvalitativ forskning for de som er uerfaren innen feltet. Dette er noe av grunnen til at vi valgte tematisk analyse. Braun og Clarke opererer med seks faser og vi gjennomførte vår analyse sterkt inspirert av disse fasene. De seks fasene blir kalt «Familiarizing yourself with the data» (Braun & Clarke, 2012, s. 60), «Generating Initial Codes» (s. 61), «Searching for Themes» (s. 63), «Reviewing Potential Themes» (s. 65), «Defining and Naming Themes» (s. 66) og «Producing the Report» (s. 69).

Første fase var å bli kjent med datamaterialet / «Familiarizing Yourself With the Data» (Braun & Clarke, 2012, s. 60). Dette gjorde vi ved å se gjennom filmene og transkribere. Når vi transkriberte gjorde vi notater på to måter. Transkripsjonen var gjort i Word og vi brukte kommentarfunksjonen til å notere førsteinntrykket vårt i tilknytting til sekvenser av transkripsjonen. Dette var en del av prosessen vår for å bli kjent med materialet vårt. Her prøvde vi å ha en induktiv tilnærming til datamaterialet, men som Braun og Clarke (2012) påpeker, så er ingen analyse uforbeholdent induktiv eller deduktiv. Vi vil her gi et par eksempler på kommentarer som ble gitt i innledende fase (figur 9). Kommentarene kommer i forbindelse med utdraget nedenfor og i dette utdraget forklarer en elev hvordan de tenkte for å plassere et bilde som viser $\frac{1}{4}$ mediert som et areal.

Emil: Vi tok den der (peker på bildet av ¼ og ¼ på tallinjen). Den der (peker til bildet av ¼) er halvparten så stor som den (peker til bildet av 1/2). Du må ha to sånne for å få den. Da må den i mellom her (peker til 0 og ½ på tallinjen) Og den here (peker til bildet av ¾) er en sånn dere (peker til bildet av ¼) større enn den (peker til bildet av ½) da må den mellom her (peker til punktene ½ og 1 på tallinjen, og peker så til midt i mellom punktene). Den (peker til bildet av ¾) mangler en sånn der (peker til bildet av ¼) for å bli en sånn der (peker til bildet av 1).

Wikkelsmo, Alf Gunder
Kan uttrykke relasjoner mellom arealmediatorene

Wikkelsmo, Alf Gunder
Narrativ? Påstand om hvor bildet skal plassere på tallinjen.

Wikkelsmo, Alf Gunder
Bruker «den der», «to sånne», «en sånn dere» og peker til bildene. Mangler ord for størrelsene?

Wikkelsmo, Alf Gunder
Ser mengdene vist på bildene i sammenheng med tallinjen.

Figur 9: Innledende koder

Kommentarene ble lagt til over en lengre tidsperiode og av begge forskerne, selv om kun en av forfatternes navn fremkommer i eksemplet. Den øverste kommentaren ble lagt til 3. april, mens de tre nederste ble lagt til 11. februar. Den nest nederste kommentaren; *Bruker «den der», «to sånne», «en sånn der» når han peker til bildene. Mangler ord for størrelsene?»,* kunne vært gjort uavhengig av rammeverk eller litteratur. Kommentar nummer to er et eksempel på at vi ikke var kun induktiv og lot datamaterialet «snakke for seg selv». Vår kjennskap til rammeverket til Sfard påvirket hva vi så i datamaterialet. *«Narrativ? Påstand om hvor bildet skal plasseres på tallinjen.».* Her brukte vi begrepet narrativ for å beskrive hva vi leste inn i situasjonen. Vi hadde i tillegg et separat dokument der vi noterte tanker om datamaterialet sett mer helhetlig. En av de første tingene vi noterte oss var blant annet at arealmediatorene ble pekt til ofte i den første delen av datainnsamlingen.

I den neste fasen begynte vi å feste koder til sekvenser i datamaterialet vårt (Braun & Clarke, 2012, s. 61). Disse kodene hadde opprinnelse i notatene vi gjorde innledningsvis. Blant annet hadde vi som nevnt ovenfor, merket oss at elevene pekte ofte til arealmediatorene. Sekvenser der elevene støttet seg til peking og ikke brukte nøkkelord fikk da kode «peker til i stedet for tallord». Denne koden ble nyansert senere til å skille mellom peking til tallinje og peking til arealmediator. Dette var koder som hadde «opprinnelse» i materialet i seg selv, men vi benyttet også koder som var tettere på teorigrunnlaget og rammeverket. Blant annet fikk sekvenser i datagrunnlaget vårt koder som «narrativ om …», «handlingsrutine» og «utforskende rutine». Vi hadde også merket oss i innledende fase at elevene brukte ulike formuleringer om samme brøk, blant annet $\frac{1}{4}$ ble omtalt som «en av fire», «kvart» og «en firedel». I denne fasen ga vi koder som beskrev hvilken formulering elevene benyttet for ulike tallstørrelser. I løpet av kodeprosessen og ved flere gjennomganger av datamaterialet ble kodene endret, fjernet eller nye lagt til. Blant annet «peke til…» fikk nye underkategorier. Vi oppdaget at «peke til» hadde ulike funksjoner. Noen ganger pekte elevene til et areal i mangelen på et begrep. I andre situasjoner hadde elevene benyttet ord for en spesifikk brøk, men gikk over til peking når oppgaven de skulle utføre var krevende. For eksempel når elevene skulle beskrive relasjoner mellom ulike brøker eller argumentere benyttet elevene peking som en erstatning for nøkkelordene. Da ble de nye kodene «peker til i mangel av begrep» og «peker til som avlasting». Det som menes med avlasting her er at eleven pekte til bilde eller tallinjen fremfor å bruke begrep som en besparende handling, når eleven forsøker å argumentere/forklare som er krevende i seg selv. Vi hadde også en kode til som var tett relatert, men ikke like ofte benyttet. Det var «holder/beveger objekt».

I de to neste fasene av analysen prøvde vi å finne temaer basert på kodene våre og deretter se disse i sammenheng med datamaterialet sett under ett. (Braun & Clarke,

2012) påpeker at det spesielt er viktig for uerfarne forskere å kontrollere at temaene fungerer i relasjon til datagrunnlaget. Hvis temaene ikke fungerer opp mot datagrunnlaget må forskeren vurdere om koder enten må forkastes, plasseres inn under annet tema, omformulere tema, slå sammen temaer eller splitte det. I denne delen av arbeidet valgte vi å se tilbake på litteraturen som omhandler brøk og kommognitive rammeverket. Dette hadde et tosidig formål. Det var et behov for å beskrive funnene/temaene med et mer presist faglig språk og relatere de til rammeverket. Det andre formålet ved å se til litteraturen var å få teori som kunne bidra til å bedre beskrive observasjoner. Tidligere i dette kapittelet nevnte vi kodene «peker til i mangel av begrep» og «peker til som avlasting». Dissene kodene fikk plass under temaet vi kalte «visuelle mediatorer som plassholder for nøkkelord i diskurs». Nøkkelord er et av fire sentrale punkter i det kommognitive rammeverket og som avgjør om en person blir en deltager i en spesifikk diskurs. Ved å se tilbake på litteraturen fikk vi forankret temaet i rammeverket vi hadde valgt for dette studiet. De to andre temaene vi kom frem til er sentrert rundt to andre viktige begreper i rammeverket, narrativer og rutiner. Den endelige navngivingen er den femte fasen i metoden til Braun og Clarke (2012). De tre temaene vi endte med står i tabellen under og med koder, men kodene er skrevet i forkortet form. Når vi kodet, ville vi for eksempel skille mellom «peker til areal i mangel av begrep» og «peker til tallinje i mangel av begrep». I tillegg hadde vi koder som var tilknyttet nøkkelord og ord for tallstørrelser. Disse kodene ble ikke et eget tema, men ved å se de i sammenheng med de andre kodene, hadde de relevans. Her var kodene «del hel», «hverdagsbegrep» (kvart), «nevner som enhet» (tre firedeler), «heltall» og «desimaltall». Selv om disse ikke fremkommer i tabellen under var de relevant i analysearbeidet og når vi skal beskrive teamene i resultatkapitelet.

Her er eksempel på hvordan en tabell kan se ut:

Visuelle mediatorer som plassholder for nøkkelord i diskursen	**De visuelle mediatorerens rolle i konstruksjon av narrativer**	**Problematiske rutiner knyttet til bruk av visuelle mediatorer**
-Peker til i mangel av begrep (areal/tallinje) -Peker til som avlasting (areal/tallinje) -Holder/beveger objekt -Peker til og bruker nøkkelord	-Uttalt påstand om objekt (areal/tallinje/generelt) -Narrativ som grunnlag forargument -Beskriver relasjoner(areal/tallinje)	-Visuelle / heltallstenkning villeder handling (areal/tallinje) -«Del hel» formulering påvirker handling

Tabell 3.1: Temaer og tilhørende koder

3.5 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet og validitet er begreper som brukes når kvalitet innenfor både kvalitativ og kvantitativ forskning skal vurderes. Validitet er knyttet opp mot om en undersøker det som er tenkt å undersøke, reliabilitet omhandler påliteligheten av resultatene (Kvale, 1997). Vår studie tar utgangspunkt i observasjon av en læringssituasjon, og Maxwell (1992) skriver at vi som observatører og fortolkere av verden også er en del av denne verden. Observatør og det som observeres er sammenflettet. Vi kan ikke fjerne oss fra den verden vi skal observere og skaffe oss upåvirket meninger om det vi observerer. Det vil dermed eksistere ulike oppfatninger av det som observeres sett fra ulike perspektiver, og de alle kan være valide. Det er dermed ekstra viktig i en kvalitativ studie at den er gjennomført og fremstår som troverdig. Guba (1981) presenterer fire kriterier for troverdighet. Disse er «credebility» (kredibilitet), «transferability» (overførbarhet), «dependability» (pålitelighet) og «confirmability» (bekreftbarhet). Dette er kriterier vi har prøvd å etterkomme i denne studien.

Kredibilitet handler om studien presenterer seg som tillitsvekkende (Guba, 1981). Guba presenterer flere ting forskeren kan gjøre for å heve kredibiliteten, blant annet rettledning/veiledning av likemann. Siden vi var to, valgte vi å studere og kode datamaterialet hver for oss, slik at vi ikke ble påvirket i av hverandres tanker. I stor grad viste det seg at vi hadde tolket og sett de samme tingene i datamaterialet når vi sammenlignet notater. Gjennom analysearbeidet fungerte vi delvis som veiledere for hverandre. Langvarig engasjement og vedvarende observasjon er andre grep beskrevet av Guba (1981) for å sikre kredibilitet. Deler av poenget med langvarig engasjement er at deltagerne blir fortrolig med observatør/forsker. Selv om vår observasjon kun varte i to økter på 1,5 time hadde deltagerne kjennskap til og trygg relasjon til spesielt den ene forskeren. Dette reduserer påvirkningen vi hadde på situasjonen som danner grunnlaget for våre data.

Overførbarhet handler om hvor godt studien kan abstraheres og relateres til lignende situasjoner, studier og teori (Guba, 1981). Overførbarhet handler ikke om å lage «sanne» påstander med generell anvendelsesverdi, men handler om at det skal være mulig å si seg enig i påstander og tolkninger sett i lys av en spesifikk situasjon eller kontekst. Et av grepene Guba gir er bevisst valg av datagrunnlag. Vi gjennomførte datainnsamlingen i en situasjon som skulle være mest mulig lik en vanlig undervisningssituasjon og elevenes eget klasserom. Ved å gjøre dette mener vi at dataene dette produserte gir større overførbarhet til lignende situasjoner. Dette var en kontekst mange var kjent med og funnene kan da tolkes og sees ut fra gjenkjennbar kontekst. Deltagerne ble også bevisst valgt med bakgrunn i forhånds valgte kriterier. Blant annet ville vi sikre oss at gruppen ikke skulle være homogen ut fra faglige ferdigheter. Dette ble ikke gjort i en blind tro om at dette muliggjorde generalisering, men at konteksten for funnene våre kunne sees i en kontekst andre kan relatere seg til. Et annet punkt Guba skriver for å sikre overførbarhet er tykt datagrunnlag og dype beskrivelser. Vi mener at vi har et godt datagrunnlag med tanke på det vi studerer når vi har seks timer med film av to økter på 1,5 time. Kombinasjonen av transkribert materiale og film gjorde det mulig for oss å se på helhet og gå i detalj. I resultatkapittelet har vi prøvd å gi gode og dype beskrivelser koblet tett til datamaterialet. Senere i oppgaven vil vi også se våre funn opp mot mer etablert litteratur og dette styrker overførbarheten i dette studiet.

Pålitelighet handler om riktigheten av slutningene som blir tatt i studien og om andre kunne kommet frem til samme resultat om konteksten var tilnærmet den samme. Guba (1981) skriver at dette kan oppnås ved grundig, ærlig og nøyaktig gjennomføring og beskrivelse av studiet. Tidligere i metodedelen har vi beskrevet våre valg av trinn, utvelgelse av deltagere, gjennomføring, valg av elevoppgaver og analyseprosessen som et ledd i å gi dette studiet pålitelighet. Vi har regelmessig notert og dokumentert for vår egen del valg og tanker gjennom hele prosessen, for å gi et mest mulig riktig bilde av forskningen. Vi har jevnlig fått veiledning av vår veileder gjennom hele prosessen.

Guba (1981) skriver at bekreftbarhet handler om objektivitet og om resultatene er å stole på. Her anbefaler Guba blant annet loggføring av valg og refleksjon. Som nevnt tidligere har dette vært en del av vår praksis. Vi har prøvd å få frem disse valgene og refleksjonene i denne teksten og bidra til at andre kan vurdere objektiviteten i dette studiet. Ideer, valg og refleksjoner har jevnlig blitt drøftet med vår veileder.

Validiteten av en studie vil si hvilken grad konklusjonene kan forankres i selve forskningen (Bryman, 2016). Samsvarer konklusjonen og bygger den på funn gjort gjennom datainnsamlingen, analysen og diskusjonen av funnene? Bryman skiller mellom to hovedformer for validitet. Den indre/interne gyldigheten og den eksterne/ytre gyldigheten. Den indre/interne gyldigheten omhandler studiens konklusjoner og dataene som er samlet inn og om det er samsvar mellom disse. Tidligere i metodekapitlet har vi blant annet beskrevet og argumentert for hvordan vi har valgt ut deltagere, designet instrumentet for datainnsamlingen, gjennomført datainnsamling og presentert hvordan vi har analysert dataene våre. Disse valgene ble gjort for å sikre intern gyldighet. For eksempel ble valget av læringssituasjon og oppgaver for datainnsamling bevisst valgt slik at det skulle generere data som er relevant for studiets formål. Her kan vi legge til at metode for datainnsamling og rammeverk er valgt bevisst for å best kunne belyse forskningsspørsmålet vårt. Den eksterne/ytre validiteten er knyttet opp mot om studiens resultater og studien i seg selv kan generaliseres, det vil si om den vil være valid utenfor vår studie (Bryman, 2016). Fokuset for kvalitative studier vektlegger den interne validiteten og i mange tilfeller er ekstern validitet irrelevant, siden studiet søker ikke generalisering, men fremstille fenomenet som blir undersøkt riktig og fullt ut (Cohen et al., 2018). Denne studien er ikke omfattende nok eller ment for å kunne komme med generelle påstander om hvordan elever bruker arealmediatorer og tallinjemediatorer i møte med brøk. Våre funn er gyldig kun innenfor konteksten av denne datainnsamlingen, men i drøftingskapittelet kommer vi til å se resultatene våre i relasjon til etablert forskning.

3.6 Etiske betrakninger

For å ivareta personvernet og etiske retningslinjer under datainnsamlingen fulgte vi retningslinjene utarbeidet av den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH, 2016). Før forskningen tok til innhentet vi godkjenning fra Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste (NSD). Det å melde inn forsknings og studentprosjekter er i tråd med det som kreves av universiteter, høgskoler og andre forskningsinstitusjoner. NSD godkjente prosjektet vårt sett i forhold til gjeldende forskningsetiske regler og vi fikk startet opp på vårt forskningsprosjekt.

Vi som forskere har et ansvar for at deltagerne ikke skal bli utsatt for urimelige belastninger, bli utsatt for fysisk skade eller annet som følge av forskningen (Thagaard, 2018). Med bakgrunn i dette er det viktig å ta hensyn til fire etiske prinsipper i forskningen. For det første skal ikke informantene bli påført noen form for skade, noe vi mener er ivaretatt godt i denne studien. Datainnsamlingen ble gjennomført i trygge omgivelser og den som ledet datainnsamlingen var kjent og trygg for deltagerne. Oppgavene som elevene møtte var ikke bare designet for å gi egnet data for forskningsspørsmålet, men laget slik at det skulle være overkommelig for elevene og de skulle oppleve mestring. Blant annet skriver Cohen et al. (2018) at deltagerne ikke skal forlate studiet dårligere enn de startet. Videre bryter ikke studien med reglene som til enhver tid gjelder for taushetsplikt og avslører ikke identiteten til informantene (Bryman, 2016). Det andre prinsippet er at informantene må godkjenne at de ønsker å være deltager i studien. Foresatte fikk i forkant av studien tilsendt et samtykkeskjema (vedlegg 2) som inneholdt informasjon om forskningen, hva slags informasjon som ble hentet ut og hvorfor og godkjent av NSD. Det ble opplyst om at dataene ble samlet inn kun med denne studien som formål, og at alt datamateriell ville bli destruert når studien var ferdig. Det gikk frem at foreldre/foresatte måtte godkjenne barnets deltagelse hvis eleven skulle være en deltager. Elever og foreldre ble informert skriftlig og muntlig underveis at de kunne trekke deltagelsen helt frem til prosjektet ble avsluttet. Dette var ekstra viktig å få frem siden studien ble gjennomført i en klasse der den ene forskeren var lærer. Ingen foreldre eller elever skulle føle forpliktelse ovenfor lærer for å delta. Videre ble forskningsprosjektet beskrevet og vektla anonymiseringen av elevene av hensyn til hver enkelt elev og for å kunne ivareta de etiske tilnærmingene (Cohen et al., 2018). Prinsipp tre går ut på å ikke invadere informantenes privatliv (Bryman, 2016). Dette mener vi er ivaretatt da det kun er fokus på fagrelatert observasjon. Det siste prinsippet omhandler at informantene ikke skal bli ført bak lyset eller oppleve at de blir løyet for. Vi mener dette er ivaretatt da informantene hele veien har vært klar over hensikten med forskningen. Elevene vet hva vi skal bruke observasjonen til og at de selv blir anonymisert (Bryman, 2016).

4 Resultat

I dette kapitlet skal vi presentere resultatene fra vår analyse. Vi har organisert funnene i tre temaer. Disse er: "Visuelle mediatorer som plassholder for nøkkelord i diskursen", "De visuelle mediatorenes rolle i konstruksjon av narrativer" og "Problematiske rutiner knyttet til bruk av visuelle mediatorer". Temaene er ment å belyse forskningsspørsmålet: «Hvordan blir de visuelle mediatorene en del av brøkdiskursen». Funnene våre viste at arealmediatorene og tallinjemediatorene er en viktig del av brøkdiskursen for denne gruppen av femtetrinnelever. Dette er et forventet resultatet med tanke på at Sfard (2007) beskriver visuelle mediatorer som et middel diskursdeltagerne bruker for å identifisere objektet for kommunikasjonen og hjelpe med å koordinere samhandlingen mellom deltagerne. Vi vil beskrive funnene våre mer i detalj videre i dette kapitelet og det vil komme frem likheter og ulikheter mellom de to visuelle mediatorene. Rekkefølgen vi presenterer teamene i kommer av at temaene henger noe sammen. Plassholderfunksjonen i det første temaet har en sentral rolle også når elevene bygger nye narrativer og det er derfor dette temaet presenteres først.

4.1 Visuelle mediatorer som plassholder for nøkkelord i diskursen

Det er tre sentrale funn innen temaet som vi vil gå nærmere inn på i dette delkapittelet, og de er:

- Elevene pekte til tallinjen/arealene som plassholder i mangel av nøkkelord for størrelse.
- Elevene pekte til tallinjen/arealene som avlastning, noen ganger helt uten nøkkelord og noen ganger sammen med nøkkelord.
- Peking i kombinasjon med nøkkelord ble sentral i elevenes argumentasjon.

I tillegg så vi at elevene oftere brukte peking som erstatning for nøkkelord når de hadde arealer tilgjengelig, mens de i større grad benyttet nøkkelord når de bare hadde tallinjen. Dette er et funn som er vanskelig å argumentere for gjennom eksempler og vi velger bare å opplyse om dette i begynnelsen uten å gå nærmere inn på det. Elevene pekte også til tallinjen som en erstatning for nøkkelord, men ikke i samme grad. Elevene benyttet nøkkelord oftere i datainnsamlingsøkt to der diskursen var sentrert rundt tallinjen og når oppgaveutformingen ikke ga elevene støtte i bilder av brøker vist som arealer. Det er ulike årsaker til at elevene pekte til de visuelle mediatorene og de to viktigste i vårt datamateriell er de gangene elevene manglet nøkkelord for størrelser eller når det ble enklere og mentalt besparende å peke.

Vi innleder med et eksempel der pekingen til den visuelle mediatoren kan sees som en besparende handling, men også som mangel på nøkkelord. I det kommende eksemplet skulle elevene presentere hvor de plasserte bildet av $\frac{1}{2}$ på tallinjen og forklare hvorfor. Eleven, Emil, har tidligere benyttet begrepet halv, men brukte ingen begreper for rasjonale størrelser i eksemplet under.

Emil: Hmmm, vi tenkte at. Vi måtte ha to sånne der (peker først til avstanden mellom 0 og $\frac{1}{2}$, og så figuren av $\frac{1}{2}$ og holder fingeren over figuren i flere sekunder) fordi en sånn, øhh, for å få en sånn en, da måtte vi dele denne i midten der (peker til figur av 1) da får vi en sånn en (peker til figur av $\frac{1}{2}$) og vi må ha to sånne her for å få en sirkel.

(Eksempel 1. Peking til både tallinje og areal som plassholder og avlasting)

Eleven benyttet ikke et eneste ord eller begrep som beskrev brøkdeler, men erstattet nøkkelordene med å peke og si blant annet; «to sånne der», «dele denne» og «to sånne her». Emil brukte de visuelle mediatorene som kjennetegner en matematisk diskurs som et verktøy i kommunikasjonen. I tillegg til å peke til arealene pekte eleven til linjesegmentet 0 – $\frac{1}{2}$. De gangene elevene pekte til tallinjen for å kommunisere en størrelse i den første datainnsamlingsøkten, var det ofte i begynnelsen av en forklaring. Dette kan trolig forklares med at oppgaven handlet om å plassere bildene på tallinjen, og det er da naturlig å henvise til tallinjen i svaret. Emil pekte til arealmediatorene og sa flere ganger «en sånn» i stedet for å bruke ordet «halv», «en av to» eller «en todel». Det at elevene pekte til arealmediatoren fremfor å bruke ord på størrelsen betyr ikke at elevene ikke kan et ord for brøkdelen. Eleven har tidligere brukt ordet «halv» og «halvpart» til bildet av $\frac{1}{2}$. Pekehandlingen hans kan tolkes som en avlastende handling, der peking ble enklere enn å bruke tallord i tillegg. Hvis vi velger å definere brøknøkkelord til mer formelt matematikkspråk kan halv og halvpart sees som hverdagsord. Med en slik definisjon kan pekingen til arealene og tallinjen tolkes som en handling som gjøres i mangel på de matematiske «riktige» nøkkelorden. Vi valgte å ha med dette eksemplet for å vise at definisjoner er viktig når datamaterialet tolkes. Videre benytter vi hverdagsord som beskriver brøkstørrelser også som nøkkelord. Når elevene kommuniserte rundt mer vanlige størrelser som $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$ benyttet elevene innimellom ord som halv, kvart, firedel og en av fire. Dette er ord de kjenner fra hverdagsdiskurs eller arbeid med desimaltall og klokka. Når det ble mer ukjente størrelser for elevene som $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$ og $\frac{7}{8}$ ble ord for størrelser sjeldnere brukt og pekingen mer sentral.

Et tydeligere eksempel på at elevene pekte til visuelle mediatorer som en plassholder i mangel av nøkkelord for størrelse vises her. Natalie, Marius og Jone fant frem bildet som viste $\frac{1}{8}$ mediert som et areal og skulle plassere dette på tallinjen. De har tidligere brukt nøkkelordene kvart og firedel om bildet av $\frac{1}{4}$. Her ble det tydelig at åttendeler ikke var like kjent som firedeler for disse elevene.

Natalie: Se der, det er en halv bit av den her (Holder bildet ved $\frac{1}{8}$ på tallinjen og ved siden av fjerdedelen). Det vil si at det er en fjerdedel.

Jone: Hvordan da? Er det en bit… (blir avbrutt)

Marius: Dette er en fjerdedel (peker til bildet av $\frac{1}{4}$)

Natalie: Dette er en femmerdel (holder $\frac{1}{8}$ bildet ved siden av $\frac{5}{4}$)

(Eksempel 2. Peker til areal som plass for nøkkelord)

I den øverste replikken sammenlignet Natalie $\frac{1}{8}$ med $\frac{1}{4}$ ved å holde bildene av arealmediatorene ved siden av hverandre og uttrykke at $\frac{1}{8}$ er halvparten av $\frac{1}{4}$. Etterpå påstod hun at $\frac{1}{8}$ er en firedel. Hvilke tanker Natalie hadde bak denne begrunnelsen er uvisst, men hun motsa seg selv siden hun tidligere omtalte $\frac{1}{4}$ for kvart og firedel. Hun ble motsagt av Marius i replikk 3, der han sier «dette er en fjerdedel» om bildet av $\frac{1}{4}$.

Deretter prøvde Natalie seg med ordet «femmerdel» for å beskrive $\frac{1}{4}$. Senere spurte lærer Natalie hvordan de kom frem til navnet «femmerdel» om $\frac{1}{4}$ bildet. Dette forklarte hun med at den er halvparten av $\frac{1}{4}$ uten at hun gikk nærmere inn på dette. Dette eksemplet viser at eleven manglet begrep for $\frac{1}{8}$. men Natalie klarte fortsatt å beskrive at $\frac{1}{8}$ er halvparten av $\frac{1}{4}$ med støtte i arealene.

Emils peking i eksempel 1 til arealmediatorene kan sees som en avlastende handling uten bruk av nøkkelord. Her vil vi gi et eksempel på at elever pekte til de visuelle mediatorene som avlasting der nøkkelord delvis benyttes parallelt. Dette eksemplet viser at elevene hadde nøkkelord for størrelser, men valgte å støtte seg til peking i brøkdiskursen sin. Gruppen i kommende eksempel skulle plassere bildet av $\frac{1}{8}$ på tallinjen og lærer spurte om hva de vil kalle størrelsen. Ludvik klarte å gi navn til størrelsen vist på bildet, men peking til arealmediatorene ble fortsatt viktig videre i løsningsdiskursen.

> Ludvik: Det der vil jeg kalle en, en av åtte (skriver $\frac{1}{8}$ over punktet og figuren). En må ha åtte sånne (peker til bildet av $\frac{1}{8}$) for å få en sånn en (peker til bildet av 1)… Det der (peker til bildet av $\frac{1}{8}$ deretter $\frac{1}{4}$) er halvparten av en kvart. Hvis det er en hel (peker til bildet av $\frac{1}{4}$) da er det en kvart, en halv (retter seg selv). Vi trenger (peker til bildet av $\frac{1}{8}$) to sånne for å få en sånn en (peker til bildet av $\frac{1}{4}$) og det må til fire slike for å få en hel og det blir fire ganger to som blir åtte…

(Eksempel 3. Peking til areal som avlastning – med nøkkelord)

I eksemplet ovenfor spurte lærer spesifikt om hva Ludvik ville kalle størrelsen og han svarte; «det der vil jeg kalle en, en av åtte…». Ludvik tok en liten pause etter «en» før han fortsatte med «en av åtte». Han måtte tenke seg om, men klarte å gi størrelsen et navn. Ordene «en av åtte» fremstod som relativt nytt for Ludvik og i videomaterialet fremstår han noe usikker. Vi oppfattet uttalelsen hans som litt utprøvende. I den videre forklaringen pekte han kun til bildet av åttendelen og sier «det der» og «sånne». Han benyttet kvart om $\frac{1}{4}$ en gang, men ellers sier han «det er» og «sånn en» sammen med peking om firedelen også. Pekingen til den visuelle mediatoren tar plassen for nøkkelordene selv om eleven viser i eksemplet at han har begreper for firedeler og åttendeler. Deltagerne i denne studien har liten erfaring med brøk og dette eksemplet er hentet fra begynnelsen av datainnsamlingen. Nøkkelordene for brøkstørrelser har ikke blitt en naturlig del av deres brøkdiskurs, noe som vises i Ludviks nøling når han skal gi navnet «en av åtte» til $\frac{1}{8}$. Han forvekslet også $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{2}$ i forklaringen før han rettet opp feilen når han sa: «Hvis det er en hel (peker til bildet av $\frac{1}{4}$) da er det en kvart, en halv (retter seg selv).» Alle kan forsnakke seg, men det kan også være et tegn på at begrepene ikke har blitt en fullverdig del av deres diskurs. Når Ludvik pekte til arealmediatoren var det ikke fordi han ikke kunne et ord for størrelsen. Handlingen å peke ble enklere enn å bruke nøkkelordene på dette tidspunktet og var avlastende.

De to neste eksemplene viser hvordan peking som avlasting i kombinasjon med nøkkelord ble sentral i elevenes argumentasjon. Når elevene knyttet korrekt nøkkelord til peking styrket dette elevenes forklaring og resonnering. I forkant av det kommende eksemplet har to av tre elever på gruppen gitt navnet kvart til bildet av $\frac{1}{4}$-sirkel. Den siste eleven spurte medelevene om «hva er en kvart?». De to andre ble overrasket, for dem var dette en selvfølge og de beskriver det som «halvpart av en halv» til den siste på gruppen. Ordet kvart er en del av deres diskurs, siden de virker komfortabel med begrepet. To av tre deltagere på gruppen har gitt nøkkelordet kvart mening og blir et begrep som gjør at ikke alle på gruppa kan delta i diskursen på like premisser. De skal videre plassere bildet av tre firedelssirkler på tallinjen.

> Marius: Sånn, sånn, sånn (peker først til $\frac{1}{4}$, deretter $\frac{2}{4}$ og så til $\frac{3}{4}$ på tallinjen. Teller seg bortover). Tre. (plasserer så bildet på $\frac{3}{4}$ på tallinjen)
>
> …
>
> Natalie: Men nå har vi satt tre der» (henviser til heltallet 3 på tallinjen)
>
> Marius: Jojo, en, en kvart, to kvart på null komma fem og tre kvart (peker til posisjonene for brøkene på tallinjen)
>
> (Eksempel 4. Argumentasjon med peking som avlasting uten nøkkelord vs peking med nøkkelord)

I eksemplet pekte Marius til tallinjen fremfor arealene, og han pekte til fjerdedelssegmentene når han telte. Han pekte til tallinjen som en avlastning, siden han i forkant av den transkriberte sekvensen og senere i utdraget ovenfor benyttet nøkkelord for $\frac{1}{4}$. Innledningsvis sa han «tre» ved $\frac{3}{4}$ punktet på tallinjen. Dette forvirret Natalie og hun påpekte at heltallet tre er på et annet sted på tallinjen. Når Marius i replikk 3 telte «en kvart, to kvart … tre kvart» aksepterte hun svaret og brukte samme forklaring senere til den siste eleven på gruppen. I begynnelsen av eksemplet ovenfor erstattes nøkkelordene for «$\frac{1}{4}$», «$\frac{2}{4}$» og «$\frac{3}{4}$» med peking til punkter og de omtales som heltall. Det er tydelig at heltallsordene forvirret Natalie og det er først når Marius brukte nøkkelordene fra brøkdiskursen at hun aksepterte forklaringen. Marius brukte kvart som en enhet for en størrelse og teller antall enheter. $\frac{3}{4}$ er da tre kvart-enheter i Marius sin forklaring. I dette eksemplet omtales brøken jamfør enhetsdefinisjonen av brøk, men han brukte også «del hel» formulering i andre deler av datainnsamlingen. For eksempel når gruppen skulle plassere bildet av $\frac{7}{8}$ på tallinjen omtales åttendelspunktene på formen «syv av åtte».

Elevene benyttet peking som avlastning i argumentasjoner og kombinerte dette med bruk av nøkkelord i sentrale deler av argumentasjonen. I det kommende eksemplet skal en gruppe plassere $\frac{7}{8}$ km på tallinjen. Denne gruppen har på dette tidspunktet delt tallinjen fra 0 – 1 i åtte deler og er i gang med å forklare for lærer hvorfor $\frac{7}{8}$ blir plassert på punktet for $\frac{7}{8}$. Eleven støttet seg flere ganger til peking til tallinjen. Han brukte også nøkkelord som «syv av åtte» og «åtte av åtte», men ikke gjennom hele forklaringen.

> Emil: mmm. Og så tok vi Mona som løp syv av åtte biter, og da måtte vi, da tok vi, da telte vi antall biter her (peker til åttendeler på tallinjen og deretter på en). Vi fant ut på en kilometer var åtte av åtte biter, og da måtte vi ta bort en bit. Og da måtte vi ta bort en bit (peker til linjestykket mellom 7/8 og1) slik at vi fikk syv av åtte biter.
>
> (Eksempel 5 Argumentasjon med peking som avlasting – nøkkelord i sentral del av forklaring)

Emil sa i eksempel 5 «syv av åtte biter» når han innledet forklaringen sin, deretter gikk han over til peking. Når han forklarte at de telte antall biter, pekte han kun til åttendelslengdene. Pekingen til tallinjen ble her en form for avlastning for Emil og han viste hvilken handling de har gjort. Når han kom til et viktig punkt i forklaringen, benyttet han nøkkelordet «åtte av åtte biter». Det ble viktig for han å få frem at en hel kilometer er åtte av åtte. Deretter forklarte han at de tok bort en bit, som han medierte ved peking til tallinjen, og konkluderte med at da ble det «syv av åtte biter.» Det er litt uklart om Emil er bevisst på at han teller åttendeler eller om han overfører heltallstenkning til situasjonen. Han pekte blant annet til linjesegmentet mellom $\frac{7}{8}$ og 1 og omtalte det som en bit og ikke som en åttendel. Uansett ble tallinjen en sentral del av Emils brøkdiskurs siden han pekte til linjen og knyttet nøkkelord til den. Han brukte nøkkelord når han markerte det han ser som viktige i forklaringen. Det er blant annet viktig at læreren vet at en hel er «åtte av åtte», slik at det skal gi mening å ta bort en åttendel for å få $\frac{7}{8}$.

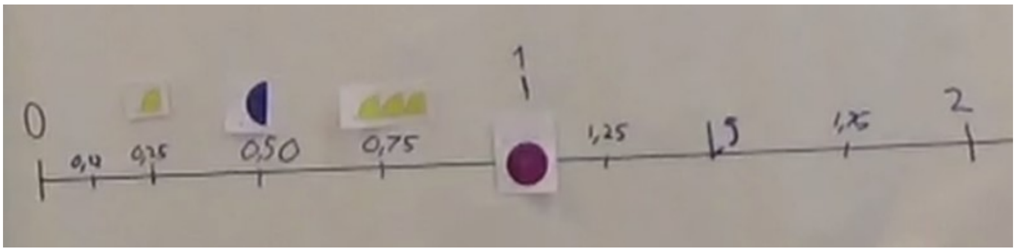
4.2 De visuelle mediatorerens rolle i konstruksjon av narrativer

Dette temaet kan deles inn i fire funn og de står listet opp under.

- Peking til visuelle mediatorer for å ytre en påstand.
- Peking til visuelle mediatorer for å beskrive relasjon som et steg mot å konstruere narrativer.
- Manipulering med visuell mediator for å beskrive relasjoner som et ledd i konstrueringen av narrativer.
- Bruk av visuell mediator for å gi mening til brøksymbolet.

Både arealmediatorene og tallinjemediatorene hadde en viktig rolle når elevene kom med påstander, beskrev relasjoner eller brukte narrativer om brøkobjekter. Oppdage og beskrive sammenhenger er et ledd i prosessen mot å forme nye narrativer. Deltagerne beskrev flere sammenhenger mellom brøkobjekter og kom med flere påstander ved bruk av arealmediatorene enn tallinje i denne datainnsamlingen. Dette kan delvis forklares med utformingen av oppgavene og læringssituasjonen i de to datainnsamlingsøktene og vi velger å ikke ta det med som et funn, men bare nevne dette innledningsvis.

Første eksemplet viser hvordan elevene pekte til visuelle mediatorer for å ytre påstander om brøkobjekter. Vi valgte å bruke begrepet påstand i stedet for narrativ på grunn av at uttalelsene til elevene ble knyttet til en spesifikk kontekst. Konteksten er blant annet oppgaven og artefaktene de hadde tilgjengelig. Begrepet narrativ valgte vi å bruke om uttalelser som vi anser som mer generelle. I eksempel 6 er det Ludvik og Mikkel som diskuterte hvor bildet av $\frac{1}{4}$ størrelsen og $\frac{3}{4}$ størrelsen skulle plasseres og hvorfor. De pekte ofte til bildene og ga størrelsene et tallord, men de brukte desimaltall. De var tidlig ute med å merke tallinjen med desimaltall og mange av diskusjonene de hadde bruker de desimaltall i resonneringen. Tallinjen deres er vist i bilde figur 10 og her er bildene av $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ plassert. Vi antar at de var mer fortrolig med desimaltall enn brøk og det var allerede en del av deres matematiske diskurs. I eksemplet under fant de sammenhenger mellom firedeler og todeler, og knyttet arealene til desimaltall for å plassere de på tallinjen.



Figur 10: Tallinje merket med desimaltall

Mikkel: Den er der. (Henger bildet av et areal som viser $\frac{3}{4}$ på riktig plass på tallinjen som de har alt markert 0,75)

Ludvik: Dette tilsvarer 0,25 (holder bildet av $\frac{1}{4}$)

Mikkel: Mmm

Ludvik: Øhhh, sånn (fester bildet av $\frac{1}{4}$ på riktig plass på tallinjen). Sånn pluss, øhh, to sånne det er like mye. (peker til to av fjerdedelsbitene på $\frac{3}{4}$-bildet og peker deretter til $\frac{1}{2}$-bildet)

Mikkel: Og med en sånn en til (peker til den tredje fjerdedelen på bildet og peker deretter til $\frac{1}{2}$. Peker slik at det ser ut som han viser at $\frac{1}{2}$-bildet + $\frac{1}{4}$ bildet er det samme som bildet med tre firedels sirkler)

Ludvik: Ja, da blir det en sånn en.

Mikkel: Mmmm

Ludvik: En halv og en (tegner med fingeren ved siden av bildet av $\frac{1}{2}$ formen til $\frac{1}{4}$) eller en sånn til (Korrigerer seg fra å bruke «en» og bytter til «en sånn en») Det blir, det blir (nøler litt) mellom 0,5 og 1 så er det 0,75. Det samme her (peker til tallinjen 0 – 0,5 og deretter til figuren av $\frac{1}{4}$.)

(Eksempel 6 Ytrer påstand og ser relasjoner – støtter seg til arealer og desimaltall)

Dette eksemplet innledes med en påstand der Mikkel først sa «Den er der» når han hang bildet av arealet på tallinjen. Påstanden er knyttet til bildet av et areal som passer med $\frac{1}{4}$ og dens plassering på tallinjen. Det Mikkel poengterte ble korrekt, men han brukte for eksempel ikke nøkkelordet en firedel. Påstanden ble avgrenset til situasjonen som innbefatter bildet av $\frac{1}{4}$ og tallinjen. Hadde eleven brukt nøkkelordet for størrelsen og sagt at «en firedel er der» hadde det vært en mer generell påstand. I den andre replikken i eksemplet sa Ludvik «Dette tilsvarer 0,25». Her ga han bildet av $\frac{1}{4}$ en tallverdi i form av desimaltall. I dette tilfellet ble arealmediatoren sentral i påstanden han kommer med. Her brukte han tallord for størrelsen, men ikke brøkbegrep. Her knyttet elevene flere påstander til det samme matematiske objektet, $\frac{1}{4}$, og dette bidro i konstruksjonen av brøknarrativer og utvidet brøkdiskursen deres.

Forrige sitat og eksempel 7 viser at elever pekte til visuelle mediatorer for å beskrive relasjon som et steg mot å konstruere narrativer. Påstandene i forrige avsnittet omhandlet sammenhenger mellom ulike brøkobjekter. Når «Ludvik sier at bildet av $\frac{1}{4}$ tilsvarer 0,25 er dette en relasjon, det er en sammenheng mellom to visuelle mediatorer, der brøken $\frac{1}{4}$ knytter de sammen. Når vi valgte å beskrive en observasjon som relasjoner, fokuserte vi på sammenhenger mellom ulike brøker. Dette demonstreres i eksempel 6, når Ludvik sier; «sånn pluss, øhh, to sånne det er like mye» og i tillegg viser han ved peking at to firedelsarealer er det samme som bildet av en todel. Dette er en prosess mot å konstruere et narrativ om at $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Han påpekte en relasjon mellom firedeler og todeler. Dette gryende narrativet er knyttet til de visuelle størrelsene og ikke nødvendigvis et generalisert narrativ. Han brukte ingen nøkkelord tilknyttet brøkdiskursen og slutningene han trakk ble basert på det visuelle. Arealmediatoren gjorde det mulig for Ludvik å sammenligne brøkobjektene uten bruk av nøkkelord. Mikkel antydet en lignende sammenheng, når han ved hjelp av gestikulering og bruken av noen ord fortalte at bildene av $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ blir $\frac{3}{4}$-bildet. Arealmediatorene gjorde det mulig for elevene å se sammenhengene og det er positivt, men de tok ikke i bruk nøkkelord for størrelsen vist på bildene. Avslutningsvis sa Ludvik «en halv og … en sånn en til» (peker da til bildet av $\frac{1}{4}$) og koblet dette til å være midt imellom 0,5 og 1 på tallinjen og sa det er 0,75. Om han tenkte på brøken $\frac{1}{2}$ eller desimaltallet 0,5 når han sa halv er ikke sikkert, men han knyttet det til desimalene på tallinjen etterpå. Han resonnerte både ut fra arealmediatorene og desimaltallene på tallinjen. Mot slutten brukte han ord for størrelsene (desimaltall) og oppdagelsene hans ble mer generelle. Det vi kan oppsummere eksempel 6 med er at Ludvik og Mikkel kom med påstander relatert brøk og beskriver relasjoner mellom brøker, og dette er viktige steg mot å konstruere narrativer.

I flere tilfeller beskrev elever relasjoner med peking til visuelle mediatorer uten noe støtte i nøkkelord eller tallord. Ludvik og Mikkel støttet seg til desimaltall, men i eksempel 7 brukte ikke Emil ord relatert til desimaltall eller brøk, med unntak av «halvparten». Halvparten i dette tilfellet beskrev forholdet mellom to mengder og brukes ikke som en tallverdi. En av styrkene ved forklaringen til Emil nedenfor er at han peker både til tallinjen og arealene.

Emil: Vi tok den der (peker på bildet av $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{4}$ på tallinjen). Den der (peker til bildet av $\frac{1}{4}$) er halvparten så stor som den (peker til $\frac{1}{2}$ punkt på tallinje). Du må ha to sånne for å få den. Da må den i mellom her (peker til 0 og $\frac{1}{2}$ på tallinjen). Og den her (peker til bilde av $\frac{3}{4}$) er en sånn dere (peker til bilde av $\frac{1}{4}$) større enn den (peker til bildet $\frac{1}{2}$) da må den mellom her (peker til punktene $\frac{1}{2}$ og 1 tallinjen, og peker så til midt i mellom punktene). Den (peker til bildet av $\frac{3}{4}$) mangler en sånn der (peker til bildet av $\frac{1}{4}$) for å bli en sånn der (peker til bildet av 1)

(Eksempel 7 Reflekterer og påpeker relasjoner kun ved peking)

I setning tre snakket han om $\frac{1}{4}$ og han sa «du må ha to sånne for å få den.» og deretter knyttet han det til punktet mellom 0 og $\frac{1}{2}$ på tallinjen. Her beskrev han en relasjon mellom firedeler og todeler, men kom med en påstand om hvor dette ble på tallinjen. Han benyttet seg av tilgjengelige visuelle mediatorer. Han uttrykte gjennom peking og enkelt språk at bildet av $\frac{1}{4}$ er halvparten av bildet av $\frac{1}{2}$ og det trengs to (firedeler) for å få en (todel). Han er i gang med å konstruere narrativet $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Deretter kom han med påstanden; «Da må den imellom her». Det samme gjorde han i forbindelse med bildet av $\frac{3}{4}$. Påstandene, resonnementene og forklaringene Emil uttalte har en start i bildene av brøkene. Hver gang han beskrev eller forklarte noe nytt innledes det med å peke til et areal, før han eventuelt pekte til tallinjen. For eksempel i setning to sa han «Den der…» og pekte deretter til bildet av $\frac{1}{4}$. Videre pekte han til $\frac{1}{2}$ på tallinjen når han beskrev relasjonen mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$. I eksempel 7 ble arealene en viktig del av Emils konstruering av nye narrativer. Han kombinerte pekingen til både tallinjen og arealene der han koblet disse sammen, bidro til at han utvidet diskursen sin knyttet til tallinje. Han relaterte bildene til tallinjen. Emil pekte kun til bildene og tallinjen og det brukes ikke tallord for størrelsene. Trolig ville det vært gunstig hvis han i tillegg kunne uttalt for eksempel «en firedel er halvparten så stor som en todel» fremfor kun peke til bildene. Allikevel gjorde de visuelle mediatorene det mulig for eleven å komme med påstander om objektene, som kunne vært vanskelig eller kanskje umulig, hvis han kun skulle uttrykt seg med ord og symboler. Det at han knyttet påstander og relasjoner til både tallinjen og arealene gjorde disse mer generelle, siden en brøkverdi ikke kun knyttes til en bestemt visuell mediator.

De to neste eksemplene viser hvordan elever manipulerte og utførte handlinger med de visuelle mediatorene for å beskrive relasjoner som et ledd i konstrueringen av narrativer. Peking til de visuelle mediatorene var sentralt i elevenes arbeid mot nye narrativer, men det hendte at elevene rettet fokuset mot mediatorene ved å holde de i hendene, flytte på dem eller tegne på dem. Blant annet tegnet flere av elevene opp inndelinger på bildet av en hel sirkel, slik at den viste todeler og firedeler som vist på bildet i figur 11. Denne inndelingen ble blant annet brukt av en gruppe i løsningsdiskursen i det kommende utdraget.

Mikkel: «Den der (bilde av $\frac{1}{4}$), får til å fargelegger den delen der (peker til firedels inndelingene som er tegnet på den hele) og den der (peker til bildet av $3 \cdot \frac{1}{4}$) får til å fargelegge tre.»

(Eksempel 8 Tegning på arealmediator)

Figur 11: Handling på arealmediator

Eleven rettet fokuset til $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ ved å peke til de og deretter pekte han til sirkelen som er inndelt og påpekte at brøkene ville fargelagt en og tre deler av den inndelte sirkelen. Firedelingen av en hel sirkel gjorde det mulig for eleven å se arealet til $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ i relasjon til den hele og han lagde påstander om disse. Peking til arealmediatorene var sentralt, men manipulering av den visuelle mediatoren i form av tegning ble viktig. Det var også hendelser der elevene direkte sammenlignet størrelsene og brukte dette i argumentasjonen ved å holde bildene ved siden av hverandre. I eksemplet nedenfor har Mikkel og Ludvik blitt spurt om å forklare hvorfor de har gitt bildet av $\frac{1}{2}$ navnet $\frac{1}{2}$.

Ludvik: Vi har skrevet, øhh, null komma femti og en av to som brøk.

Mikkel: Fordi, hvis du legger den oppå den, så dekker den kun halve av den hele (holder bildet av $\frac{1}{2}$. ved siden av 1). Så to sånne (peker til bildet av $\frac{1}{2}$.) blir en hel, men nå så har vi en halv, så det er halve den.

(Eksempel 9 Holder arealmediator – direkte sammenligning av størrelser)

I eksempel 9 holdt Mikkel bildet av $\frac{1}{2}$ sirkel oppå/vedsiden av bildet av en hel sirkel og konkluderte med at det trengs to halve for å få en hel. Her sammenlignet han direkte de fysiske størrelsene og bildene av arealene ble sentral når han fremmet påstanden $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ Denne påstanden ble knyttet til arealmediatoren, og ble en del av konstrueringen av et mer generelt narrativ over tid i elevens brøkdiskurs.

Her gir vi et eksempel der elevene brukte de visuelle mediatorene til å gi mening til brøksymbolene. Delvis konstruerte narrativer bidro i konstrueringen av nye påstander og de symbolske mediatorene fikk en sentral rolle. Eksemplet nedenfor er et av få der peking til symbolmediator ($\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{2}$) erstatter muntlig bruk av nøkkelord.

Emil: Vi sammenlignet den der (peker til $\frac{1}{2}$ bildet og symbolene i brøken) med den der (peker til symbolene $\frac{3}{2}$som de har skrevet på plakaten sin). Fordi vi må ha (peker mot to i tallet $\frac{3}{2}$) halv lengde og det er tre der (peker til tre i $\frac{3}{2}$). Her står det at vi har halvlengden en gang (viser med hendene avstanden mellom 0 og $\frac{1}{2}$) her står det at du skal ta halvlengden tre ganger (peker tilbake til tallet $\frac{3}{2}$og treer sifferet).

(Eksempel 10 Peking til symboler som plassholder)

Innledningsvis i eksempel 10 pekte Emil til bildet av $\frac{1}{2}$ og deretter brøken skrevet med symboler noe som kan tyde på at han gjenkjente objektet $\frac{1}{2}$ vist både som et areal og symbolsk. Han pekte til symbolene, men knyttet ikke nøkkelord til pekingen, kun heltallsord. Peking til symbolene tok plassen for muntlig bruk av nøkkelord. Deretter sa han at de sammenlignet det med brøken $\frac{3}{2}$ og pekte til den symbolske mediatoren. Han brukte ordene «Fordi vi må ha halv lengde» og dette sa han etter å ha pekt til toer-sifferet i brøken $\frac{3}{2}$. Han knyttet betydning til sifferet 2 i brøken $\frac{3}{2}$ til å bety halvlengde. Videre sa han at «her står det at vi skal ta halvlengden tre ganger» i det han pekte til treer-sifferet i $\frac{3}{2}$. Han var i gang med å gi mening til symbolene i brøken. Dette eksemplet er litt ved siden av temaet i dette underkapittelet, men vi ønsket å vise at de visuelle mediatorene påvirkes av narrativene til elevene. Narrativene eleven har om teller og nevner bidro til at han kan plassere og argumentere for plasseringen for $\frac{3}{2}$ på tallinjen. Eleven utvidet diskursen han har om brøk på tallinjen når han plasserte $\frac{3}{2}$ og argumenterte for dette og narrativene han støttet seg til ble sentralt.

4.3 Problematiske rutiner knyttet til bruk av visuelle mediatorer

Vi ønsker å innlede dette temaet med å påpeke at rutiner, slik begrepet beskrives i rammeverket til Sfard, kan være vanskelig å observere med sikkerhet. En rutine er en gjentagende handling enten for å påføre endring på et matematisk objekt, skape nye narrativer eller en etterligning av andres handlinger (ritualer). For å kunne avdekke rutiner kreves det mye data som samles inn over en lengre periode for å kunne påstå med sikkerhet at det en rutine. Vi vil derfor mange ganger bare omtale hendelser som handlinger, fremfor å bruke begrepet rutine.

Mange problematiske rutiner eller handlinger i vårt datamateriale kan knyttes til overgeneralisert heltallstenkning. Dataene viser at elevene ble påvirket av ordbruk og misvisende visuell informasjon. De igangsatte handlinger eller rutiner som ikke alltid var passende til oppgavens intensjon. Mange av de ukorrekte handlingene ble knyttet til tallinjen og mindre til arealene, selv om dette også er representert i datagrunnlaget. I forbindelse med dette temaet ønsker vi å påpeke at vi har fokus på de visuelle mediatorene sin rolle. Dette gjør vi fordi det er eksempler på misoppfatninger og interessante hendelser tett knyttet til brøklitteraturen som kan analyseres mer i detalj sett fra et mer generelt matematikkdidaktisk ståsted, men dette velger vi å ikke gjøre siden fokuset vårt er på de visuelle mediatorene i møtet med brøk.

Vi sorterer utfordringer elevene hadde i to kategorier.

1) *Språklige del-hel-uttrykk for brøk påvirket hva som vurderes som enhet på tallinjen.* Dette handlet om at det er konflikt mellom tallinjen, enheten på tallinjen (0-1) og elevenes språklige utrykk for brøkstørrelser som «del hel».

2) *Tidligere oppdeling og heltallsspråk påvirket hva som er enhet på tallinjen.* Dette omhandler elevenes tidligere oppdeling av tallinjen og heltallstekning er i konflikt med brøkenheten.

4.3.1 Språklige del-hel-uttrykk for brøk påvirker hva som vurderes som enhet på tallinjen

Hvilke nøkkelord og hvilken mening deltagerne tilla ordene fikk betydning for handlingene de utførte og påstandene som ble fremmet. Ved flere anledninger der elevene omtalte brøken på formen «del av» ble disse etterfulgt av ukorrekte handlinger. Blant annet ble den visuelle lengden på tallinjen brukt som den hele, fremfor linjesegmentet 0 til 1. I eksemplet under skulle elevene plassere et bilde av en kake som viste $\frac{1}{2}$ på en tallinje som gikk fra 0 – 4. Elevene hadde allerede plassert bilder av mengdene 1, 3 og 4 på tallinjen. De var i gang med diskusjonen i det kameraet kommer nærmere. Nils har alt pekt til området mellom 0 – 1 og det kan virke som han vurderte å plassere bildet av $\frac{1}{2}$ til punktet $\frac{1}{2}$ på tallinjen.

Nils: Det er halvparten av en (snakker om bildet av $\frac{1}{2}$ og ser mot $\frac{1}{2}$ punktet på tallinjen)

Erlend: Hvor skal den da? (holder handen i nærheten av en på tallinjen)

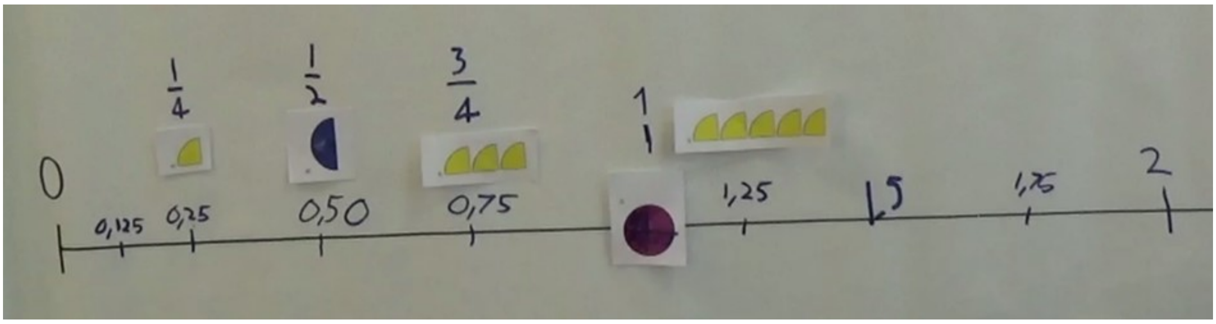
Kåre: Der (peker til punktet $\frac{1}{2}$ på tallinjen)

Nils: Men det er jo halve, fire (peker mot firetallet på tallinjen og har en spørrende/undrende stemme)

Eksempel 11 Tallinjen 0 – 4 blir den hele

I den første replikken i eksempel 11 kan det virke som Nils var på riktig spor når han sa at «det er halvparten av 1». Halvparten av tallet 1 er $\frac{1}{2}$. Kåre har i mellomtiden pekt til punktet $\frac{1}{2}$, og det så ut som Nils ble usikker. Det virker som endringen hos Nils skjedde etter han sa «halvparten av en» og videre sier i den siste replikken «Men det er jo halve». Det kan være tilfeldig at han endret mening like etter han uttalte «halvparten av en», men det er mulig at bruken av ordene påvirket resonnementet hans. Når han kun betraktet den visuelle størrelsen tittet han mot punktet $\frac{1}{2}$ på tallinjen, men når han knyttet «del av» formulering til størrelsen ble han usikker og så mot punktet to. På dette tidspunktet kom lærer bort til gruppen og diskusjonen stoppet opp. Når elevene senere presenterte for medelever plasserte de bildet på punktet $\frac{1}{2}$. Lærer ba de fortelle hva de var usikre på mens de løste oppgaven. Nils fortalte: «Ja, fordi hele tallinjen er fire og så var den en halv, så da begynte vi å tenke to.». Selv om det visuelle arealet av $\frac{1}{2}$ er fire ganger mindre enn 2 hele sirkler, vurderte de en todel av hele linjen. En mulig forklaring kan være at ordet «halvparten av» endret hva eleven så som oppgaven. Rutinen eleven utførte ble avgjort med bakgrunn i hva eleven oppfattet som den egentlige oppgaven og knyttet dette til tidligere erfaringer. En mulig tolkning av situasjonen kan være at når elevene ser på størrelsen av bildet til $\frac{1}{2}$ er oppgaven å plassere den i relasjon til de andre bildene. Når eleven brukte ordene «halvparten av» endres oppgaven for eleven. Nå handlet det om å finne halvparten av noe. Elevenes tidligere erfaring med brøk ble i stor grad knyttet til å finne del av noe. I dette tilfellet ble den hele tolket til å være den totale lengden av linjen.

Det som ble sett på som den hele, kunne endre seg i løpet av løsningsdiskursen i forbindelse med en oppgave. I det forrige avsnittet ble hele linjen vurdert som den hele. Vi observerte at andre punkter enn 1 og 4 på linjen fra 0 – 4 ble vurdert som det hele. Det kunne virke som Nils ble påvirket av ordene «halvparten av…» i det forrige eksemplet og i det neste eksemplet skjedde det også noe i det gruppen til Ludvik og Mikkel omtaler brøken $\frac{5}{4}$ som «fem av fire». Her så ikke gruppen på hele linjen som den hele, men de endret hva de omtalte som den hele til å være to på tallinjen. Mikkel og Ludvik plasserte bildet av fem firedeler avbildet som fem separate firedeler på tallinjen på riktig plass. Figur 12 viser tallinjen deres slik den så ut på dette tidspunktet. De resonnerte mye ut fra desimaltall og plassen bildet henges på er merket med «1,25». Lærer kom bort og ba de forklare hva de hadde tenkt.



Figur 12: Fem av fire forvirrer

> Mikkel: Ja, fordi den har fire sånne (peker til fire firedeler på bildet) og det er en sånn (peker til en hel) og så har vi igjen en sånn (peker til en firedel) en kvart sånn av en hel. Da blir det en hel runding og en kvart.
>
> Ludvik: Men hva skal vi skrive. Fem av fire? Men det går ikke? (blir stille, virker som han tenker). Hvis vi sammenligner den med to da. Da har vi igjen en av fire igjen? En to tre … (lyden blir utydelig, men bevegelsene antyder at han fortsetter å telle). Det her blir en av åtte (peker til en fjerdedel og så til tallet to på tallinjen).
>
> (Eksempel 12 Fem av fire forvirrer)

Gruppen plasserte bildet på rett plass, og Mikkel omtalte det som «en hel runding og en kvart» og virket ganske sikker på at de har tenkt riktig. De brukte blandet tall for å beskrive bildet. Usikkerheten kom når Ludvik lurte på hva de skulle skrive til plassen og bildet. «Fem av fire?» sa han for så å si «men det går ikke?». Etter dette kom han med forslaget om å sammenligne den med to, som er en henvisning til punktet to på tallinjen.

Først omtalte han linjesegmentet 1 – $\frac{5}{4}$ som «en av fire» men like etterpå omtalte han firedelen som «en av åtte». Det var når han ikke fikk formuleringen «fem av fire» til å passe at han vurderte en ny lengde, 0 – 2, som den hele. Litt som forrige eksempel endres hva han ser på som oppgaven i det han omtalte det som «del hel». For denne gruppen ble ikke denne misoppfatningen avgjørende for senere så de selv noen motargumenter for å kalle det en av åtte og lærer kommer inn i diskusjonen. Når elevene sammen med lærer etter hvert konkluderte med at plassen kan få brøken $\frac{5}{4}$ sier Ludvik: «Så, det går an å skrive fem strek fire?». Uttalelsen «Så, det går an…» tyder på at eleven gjorde en oppdagelse som trolig vil ha betydning for elevens diskurs. Selv om det ikke trenger å bety noe, så omtalte Ludvik brøken som «fem strek fire» denne gangen, i stedet for «fem av fire».

I de tilfellene elevene omtalte den totale lengden av linjen som den hele var det i forbindelse med at elever sa brøken på formen «del av hel» eller som i første eksemplet «halvparten av». Hva elevene oppfatter som oppgaven blir påvirket av bruken av nøkkelord og hvilken mening de legger til disse ordene. I det andre eksemplet så ikke elevene på hele linjen som den hele, men det er tydelige tegn på at det er formuleringen «fem av fire» som får elevene til å vurdere en ny lengde som den hele.

4.3.2 Tidligere oppdeling og heltallsspråk påvirker hva som er enhet på tallinjen

Den andre formen av ukorrekte handlinger vi merket oss i denne datainnsamlingen knytter vi til «misledende» informasjon i de visuelle mediatorene. De ukorrekte handlingene som er med i denne underoverskriften og i den forrige dreier seg begge om at elevene endrer hva som er helheten når de skal plassere en brøk på tallinjen. Årsaken til at vi velger å presentere det som to ulike kategorier er at det er ulike kilder til handlingene elevene utfører. I denne kategorien ser ofte elevene til en tallinje de allerede har delt inn og når de da skal plassere en ny brøk, blir resonnementet deres påvirket av disse inndelingene. I prosessen vektlegger de ikke betydningen av at brøken skal stå i relasjon til 1 på tallinjen. De grunnleggende metareglene for spillet har endret seg når de går fra en heltallsdiskurs til brøkdiskurs. Det er aspekter ved heltallstenkning som påvirket handlinger og bruken av tallinjen hos deltagerne i denne studien. Siden vårt forskningsspørsmål er rettet mot hvordan elever bruker de visuelle mediatorene, vil ikke hovedfokuset være på selve misoppfatningen, men rollen til tallinjen og arealene.

En av utfordringene vi observerte var at noen elever ikke koblet nevneren til det som definerer enhetslengden på tallinjen. De forsøkte i stedet å utføre handlinger på tidligere inndelinger på tallinjen som ikke passet til nevneren i brøken. I disse tilfellene ignoreres viktige narrativer som skulle styre handlingene. Blant annet å se nevneren i relasjon til 1 på tallinjen slik at nevneren bestemmer inndelingen av tallinjen mellom 0 – 1. Hvis elevene ser på brøk ut fra «del hel konseptet» må delene til sammen utgjøre den hele. I eksemplet under handlet den ene eleven ut fra overgeneralisert heltallstenkning og lot seg styre av de tidligere inndelingene på tallinjen. De to andre elevene på gruppen viste tegn på at de handlet ut fra riktigere narrativer. Gruppen skulle plassere brøken $\frac{2}{3}$ km på tallinjen. Deltagerne hadde ulik mening om betydningen til nevneren. To av elevenes handlinger antydet at de tenkte at nevneren bestemmer inndelingen av tallinjen mellom 0 - 1. Den siste eleven (Emil) omtalte brøken på formen «del hel» og handlet ikke ut fra at nevneren må sees i relasjon til 1 på tallinjen. Dette er samme elev som dagen før knyttet mening til teller og nevner til brøkene $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$ som vi skrev om i forrige tema. Det virket som ideene han hadde tidligere var avgrenset til et spesifikt tallområde eller situasjon, og ideene har ikke blitt et operative narrativ som han kan støtte seg til. I det elevene skulle til å plassere brøken $\frac{2}{3}$ har de alt delt inn tallinjen i todeler og firedeler i forbindelse med plassering av $\frac{1}{2}$ km og $\frac{3}{4}$km. Figur 13 viser hvordan tallinjen deres så ut i det de startet diskusjonen.

Emil: Knut løpte to av tre <u>biter</u>. En to (teller fjerdedelslengder fra 0 og stopper på $\frac{2}{4}$). Her er tre biter (peker til $\frac{3}{4}$) Tre biter. En to tre (peker til fjerdedelslengder mens han teller på nytt).

Vemund: Ja, da må vi dele den likt.

Emil: Ja, da har Kari og Knut løpt likt.

Maiken: (Peker til et punkt mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{4}$) uten å si noe)

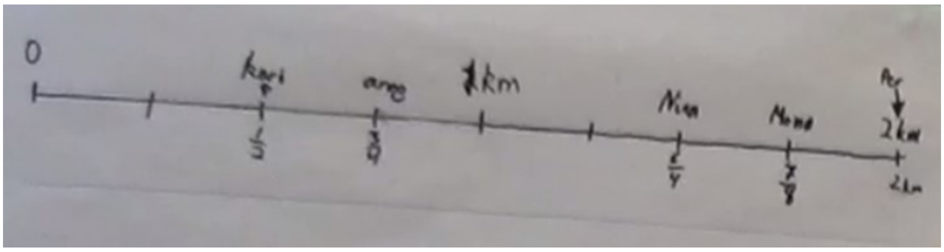
Vemund: Dele det annerledes.

Emil: Dele annerledes? (ser veldig spørrende ut)

Maiken: Ja dele den her… (blir utydelig det hun sier, men peker til linjen mellom 0 og 1 i noe som ser ut som en tredeling)

Emil: Vi vet ikke hvor lang den biten skal være, kan jo hende at det er tre km og så har han løpt to. Tre av to liksom. To av tre deler (peker til 0-1 som en del og deretter 1 – 2 som del nr. to)

(Eksempel 13 – Tidligere inndeling påvirker - to tredeler blir to firedeler)



Figur 13: To tredeler blir to firedeler

Emil omtalte i eksempel 13 nevneren som et antall «biter» og han pekte til firedelspunktene mens han telte «en to». Det at han brukte heltallsord og omtalte det som biter samsvarer med overgeneralisert heltallstenkning. Han behandlet teller og nevner som to separate heltall når han telte firedelsinndelingene. Han var trolig ikke bevisst på at det var firedeler han telte. Han gjorde om tre firedeler til å bli det nye hele og plasserte $\frac{2}{3}$ på $\frac{2}{4}$ punktet. Handlingene og formuleringene han benyttet er tett på en heltallsdiskurs. Denne ordleggingen ligner på formuleringen som benyttes i forbindelse med at elever skal finne en brøk til en arealmediatorer, der elevene teller antall biter som er for eksempel merket. I replikk to sier Vemund: «Ja, da må vi dele den likt» og fra konteksten og det elevene gjør senere mente han at tallinjen fra 0 – 1 skulle deles i tre deler. Dette tolket Emil til at Kari som løp $\frac{1}{2}$ km og Knut ($\frac{2}{3}$km) har løpt likt, siden han har plassert Knut på punktet $\frac{2}{4}$. Denne feiltolkningen av hva Vemund mente er et tegn på at diskursen til disse to elevene er såpass ulik at de handlet ut fra ulike grunnleggende regler. Kommognitiv konflikt er en uenighet som oppstår når diskursdeltagere tenker ut fra ulike metanivåregler og det er tegn på at Maiken og Vemund handler ut fra andre regler enn Emil. Maiken pekte to ganger til tallinjen og handlingen viste en tredeling av linjen 0 – 1 og i replikk 7 sa hun «dele den her». Selv om Vemund og Maiken aldri uttalte noen narrativer stemmer handlingene deres overens med viktige brøknarrativer. Vemund ville dele linjen «likt» og Maiken pekte til de riktige punktene. Det ble tydelig i den siste replikken at gruppen handlet ut fra ulike ideer når Emil sa: «Vi vet ikke hvor lang den biten skal være, kan jo hende det er tre km...». Det at Emil ikke vet hvor lang hver «bit» skal være, er et tydelig tegn på at hans diskurs manglet narrativer som dikterte dette i møte med brøken $\frac{2}{3}$. For Emil fremsto tredeler som en ukjent og kanskje en tilfeldig lengde på tallinjen og ble da mer tilbøyelig til å gjøre om tre firedeler til den hele.

Dette var mer enn en tilfeldig handling siden gruppen gjorde en lignende feil i forbindelse med plasseringen av $\frac{7}{8}$. Kort oppsummert skulle gruppen plassere brøken på en tallinje, 0 – 2, som var allerede delt inn i firedeler. Emil telte inndelingene som heltall og kom frem til at det ble åtte biter og plasserte $\frac{7}{8}$ på det syvende punktet, altså punktet for $\frac{7}{4}$. Hvis elevene skulle plassert $\frac{7}{8}$ på en blank linje, måtte de ha reflektert over hva nevneren 8 og tellere 7 gir av informasjon før de kunne utført noen form for handlingsrutine. Her innbyr inndelingene på tallinjen til en tellerutine og bruk av heltallstenkning.

Rutiner som blir utført bygger på tidligere erfaringer som eleven tenker passer best til den nye situasjonen. Når elevene ble spurt i innledningen av datainnsamlingen om hva de tenkte på i forbindelse med brøk, knyttet elevene det til del av noe. Med en slik oppfatning og en linje fra 0 – 2 delt i åtte kan dette igangsette en handling som i eksemplet. Elevene ser en «hel» (linjen 0 - 2) som er delt i åtte deler som passet til oppgaven med å plassere «syv av åtte». Gruppen til Emil prøvde å plassere alle brøkene i oppgavesettet på samme tallinje, mens to grupper valgte å benytte en ny tallinje når det ble en ny nevner. De gangene en blank tallinje ble benyttet ble den første handlingen for elevene å finne lengden på enheten de skulle telle med. Ved å bruke en allerede inndelt tallinje ble det første elevene måtte gjøre å vurdere om de trengte ny inndeling eller om tidligere inndeling kunne benyttes. Om det er bevisste valg av gruppene som brukte ny tallinje for brøker med ny nevner, eller om det er tilfeldig kan vi ikke si sikkert. Det vi vet er at den ene av disse gruppene valgte å lage en ny tallinje for alle brøkene, selv om det var flere brøker som hadde like nevnere. Den andre gruppen plasserte fjerdedeler og åttendeler på samme linje, men laget egen linje for blant annet tredeler. Her er det mulig at elevene så at linjen som de brukte til firedeler ikke var like egnet for tredeler. Hvis dette stemmer er det mulig at disse elevene hadde narrativer som styrte valgene og handlingene deres. Blant annet at neveren bestemmer lengden på enheten som det skal telles med på tallinjen.

Tidligere avmerkinger på tallinjen forhindret elever i å godta riktig plassering av en brøk fordi punktene ikke var sammenfallende med tidligere avmerkinger. Dette kan knyttes til et av problemaspektene vedrørende heltallstenkning. Der det eksisterer uendelig mange rasjonale tall mellom to punkter på en tallinje, er det alltid mulig å peke til det neste heltallet i rekken. I eksempel tretten prøvde Vemund, Maiken og Emil å plassere $\frac{2}{3}$ på tallinjen. Emil forsøkte å plassere $\frac{2}{3}$ på $\frac{2}{4}$, mens Maiken og Vemund ville markere $\frac{2}{3}$ på det riktige punktet. Gruppen ble ikke enige, og Emil prøvde å dele tallinjen mellom 0 – 1 i åtte deler. Emil gjennomførte en lik handling som i eksempel 13, men han telte «en to» åttendeler og ville plassere $\frac{2}{3}$ på plassen for $\frac{2}{8}$. Dette ble avvist av Vemund og Maiken og de argumenterte videre for en riktig inndeling av tallinjen 0 – 1. Det blir tydelig i eksemplet under at ulikhetene i elevenes diskurs hindret de i å bli enig.

Maiken: Men ville det ikke bare blitt der (peker til $\frac{2}{3}$ punktet)

Emil: Men de alle starter på null. Det er du enig i Vemund. Da blir det litt rart at den først skal komme her (peker til $\frac{1}{3}$ punktet) og hoppe over de here (sikter til $\frac{1}{8}$ og $\frac{2}{8}$). Hoppe over den dere og så er du her (peker til $\frac{1}{3}$ punktet ca)

(Eksempel 15 Punkt for $\frac{1}{3}$ korresponderer ikke med åttendelsinndeling)

Maiken pekte til punktet $\frac{2}{3}$ og ga uttrykk for at dette var punktet til brøken. Vemund hadde i forkant gitt uttrykk for samsvarende mening og vist en tredeling av linjen. Det vi ønsker å rette fokuset mot er argumentasjonen til Emil for hvorfor han ikke får dette til å stemme. Han sier: «Da blir det litt rart at den først skal komme her (peker til $\frac{1}{3}$ punktet) og hoppe over de here (sikter til $\frac{1}{8}$ og $\frac{2}{8}$).». Det blir feil eller «rart» som han sier, at punktet $\frac{1}{3}$ ikke landet på et av de tidligere punktene. Her hindret de tidligere inndelingene på tallinjen i forbindelse med firedeler og åttendeler han fra å godta en tredeling av tallinjen 0 – 1 for å kunne markere $\frac{2}{3}$. Det at punktet for $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$ ikke samsvarer med tidligere punkter ga ikke mening for han. Selv om det visuelle i form av tidligere avmerkede punkter ikke er relevant for å merke av $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$, kom dette i veien for Emil. Emil hadde tidligere blitt «fristet» til å bruke tidligere inndelinger på tallinjen, blant annet da han skulle markere $\frac{7}{8}$. Dette ledet han mot feilaktige konklusjoner. I det siste eksemplet hindret tidligere inndelinger Emil i å akseptere medelevenes forslag og begrunnelser.

Informasjon mediert av arealer kunne også villede elevene til å trekke misvisende konklusjoner. Når to brøker var tilnærmet lik og de ble mediert som arealer hadde eleven problemer å visuelt sammenligne disse. I flere av eksemplene tidligere i dette underkapittelet tilpasset eleven/e betydningene av telleren og nevneren i brøken, slik at det passet til den visuelle informasjonen de så i tallinjen. Noe av det samme skjedde i det neste eksemplet, men nå arbeidet elevene med å plassere bilder som viser brøkstørrelser. Denne gruppen hadde allerede delt inn tallinjen i åttendeler og begynte å se på bildet som viser $\frac{1}{3}$. Ludvik har forklart til lærer ulike sammenhenger mellom todeler, firedeler og åttendeler i relasjon til den hele. Han gikk deretter over til å plassere bildet av $\frac{1}{3}$ på tallinjen og forklarte høyt til lærer og medelever hva han tenkte:

Ludvik: …den her (peker til bildet av $\frac{1}{8}$) tre ganger blir den der (peker til bildet av $\frac{1}{3}$). Halvparten, eller mellom den her (peker til bildet av $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{2}$) så er den der da (peker til $\frac{3}{8}$ punktet). Hvis du tar den der (peker til bildet av $\frac{1}{4}$) og så en sånn (peker til bildet av $\frac{1}{8}$) blir det denne (peker til bildet av $\frac{1}{3}$), og tar du en sånn en til (peker til bildet av $\frac{1}{8}$) får du en halv. (liten pause) Tenker jeg.

(Eksempel 16 Visuelle informasjon i arealet og tallinjen blir villedende)

Ludvik oppfattet bildet av $\frac{1}{3}$ som det samme som $\frac{3}{8}$. Han pekte til bildene $\frac{1}{4}$ og til $\frac{1}{8}$ og konkluderte med at de to til sammen ble det samme som bildet av $\frac{1}{3}$. Det er utfordrende å sammenligne arealer visuelt og det er nettopp det Ludvik gjorde i eksemplet. Tredelsbildet som ble benyttet var ikke tegnet inn i en sirkel og dermed står ikke $\frac{1}{3}$ i tydelig relasjon til den hele sirkelen. Det at Ludvik oppfattet $\frac{1}{3}$ som $\frac{3}{8}$ er dermed ikke overraskende, men dette viste noe av begrensningen med brøk mediert som arealer. På grunn av at han hadde tallinjen med åttendelsinndelinger foran seg ga han mening til bildet av $\frac{1}{3}$ ut fra denne inndelingen. Trolig ville han ikke sett på bildet av $\frac{1}{3}$ som $\frac{3}{8}$ hvis han ikke hadde denne åttendelsinndelingen på tallinjen eller bilder av åttendelsarealer. Han ga mening til bildet ut fra tidligere informasjon. Inndelingen på tallinjen og åttendelsarealene «fristet» eleven til å handle og konkludere uriktig.

5 Drøfting

I forrige kapitel presenterte vi resultatet av vår analyse og vil i dette kapitelet drøfte disse. Det vi ønsket å belyse var:

«Hvordan blir de visuelle mediatorene en del av læringsdiskursen innen temaet brøk».

I denne delen av oppgaven vil vi se resultatene mer i sammenheng med hverandre og opp mot andre studier og litteratur. Vi vil drøfte metodiske valg som kan ha hatt betydning for dette studiet, der vi trekker frem styrker og svakheter ved vår studie. Kapittelet avrundes med en kort oppsummering der vi trekker frem nye spørsmål som dukket opp underveis. Vi kan kort oppsummere med at de visuelle mediatorene har en viktig rolle i elevenes diskurs i denne datainnsamlingen. De visuelle mediatorene blir brukt som plassholder for nøkkelord, elever konstruer narrativer ved hjelp av tallinjer og arealer og de visuelle mediatorene har en rolle når elevene utfører ukorrekte handlinger. Det at de visuelle mediatorene er såpass viktig del av diskursen, kan delvis tilskrives oppgavene elevene arbeidet med. Både i datainnsamlingsøkt 1 og 2 er de visuelle mediatorene i sentrum for oppgaven. Hadde oppgavene vært designet annerledes kunne betydningen av tallinjen og arealene sett annerledes ut, men med vårt forskningsspørsmål var det hensiktsmessig at elevene måtte handle mye ut fra de visuelle mediatorene.

5.1 De visuelle mediatorene senker inngangsterskelen for å delta i diskursen

Denne studien har et sosiokulturelt syn på læring og vi støttet oss til kommognitive rammeverket til Sfard (2006, 2007, 2008, 2012, 2020). Med en slik vinkling er samhandling og kommunikasjon essensiell for å kunne lære. Denne studien viser at de visuelle mediatorene for våre deltagere muliggjorde kommunikasjon selv om elevene manglet viktige nøkkelord. I noen tilfeller kunne elever nøkkelord for viktige størrelser, men begrepene var relativt nye for deltagerne og peking til arealer eller tallinjen forenklet argumentasjonen og kommunikasjonen deres. Inngangsterskelen for å bli med i diskusjonen ble senket og ga elevene videre mulighet for læring.

De visuelle mediatorenes rolle som plassholder for nøkkelord kunne observeres gjennom hele datainnsamlingen og var direkte eller indirekte en del av de to andre temaene. Dette er naturlig siden Sfard (2007) beskriver visuelle mediatorer som midler deltagerne i diskursen anvender for å gjenkjenne objektet for kommunikasjon. I resultatdelen skriver vi at det er to hovedårsaker til at elever pekte til arealene og tallinjen. Den ene årsaken var at elevene noen ganger manglet ord for brøkstørrelser og dermed benyttet peking til visuell mediator for å kunne kommunisere. Den andre grunnen var at det var enklere og mentalt besparende for elevene å peke eller gjøre andre handlinger med de visuelle mediatorene. Siden elevene hadde muligheten til å peke til et objekt kunne de kommunisere ideer og påstander, selv om de manglet nøkkelord for disse brøkstørrelsene. I eksempel 6 klarte Emil å uttrykke sammenhenger mellom $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{2}$ og var i gang med å konstruere narrativet $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ uten å benytte et eneste nøkkelord for brøkstørrelser. Det ville trolig vært vanskelig for eleven å kommunisere denne ideen uten hjelp fra arealmediatorene, spesielt hvis han manglet nøkkelord for disse størrelsene. De visuelle mediatorene gjorde det mulig for elevene å skape nye ideer og kommunisere disse.

Arealene ble oftere benyttet som plassholder for nøkkelord enn tallinjen. Elevene pekte til tallinjen for å kommunisere en størrelse, men ikke i samme grad. Elevene kombinerte oftere peking til tallinje med bruk av nøkkelord. Hvorfor elevene brukte arealene oftere som plassholder for nøkkelord enn tallinjen i studien kan vi ikke svare på med sikkerhet, men noe av resultatet kan ha med designet på læringssituasjonen og oppgaveutvalget. Det er en mulig forklaring at arealene er mer intuitive for elevene å peke til når de skal resonere, argumentere og kommunisere. For å bruke tallinjen er elevene avhengig av å kombinere visuell informasjon og tall (Bright et al., 1988), men arealene avhenger ikke av tallverdier i samme grad. Det er ikke utenkelig at elever som manglet begreper for brøkstørrelser hadde utfordringer med å gi mening til tallinjen når den er avhengig av tallverdier for å mediere matematisk innhold. Selv om oppgavedesignet kan ha påvirket resultatene er forskjellen markant og noe kan trolig forklares med egenskapene til tallinjen. Hvis dette stemmer kan det tenkes at arealmediatoren gir en lavere inngangsterskel for å kunne delta i kommunikasjon rundt brøk enn tallinjen. Ser vi dette i sammenheng med at Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) skriver at «del hel» danner grunnlaget for å ta seg inn i de fire andre underkonseptene av brøk, er ikke dette et utenkelig resultat.

5.2 De visuelle mediatorene støtter elevene til å bli mer sentrale deltakere i diskursen

For å være deltager i en matematisk diskurs må personen beherske bruken av sentrale ord (nøkkelord), handle passende for situasjonen (rutiner), anvende visuelle mediatorer på en hensiktsmessig måte og ha «fortellinger» om sentrale objekter for diskursen (narrativer) (Sfard, 2006, 2007, 2008, 2012, 2020). I det forrige delkapittelet kom vi inn på at elevene pekte til og handlet med de visuelle mediatorene for å kommunisere blant annet tallstørrelser. Handlinger med visuelle mediatorer kan ansees som en spesiell tankeprosess i seg selv (Sfard, 2007) og det at elevene utfører handlinger (rutiner) med arealer og tallinje er et ledd mot at elevene blir sentrale deltagere i brøkdiskursen. I en brøkdiskurs trenger elevene å lære «reglene» som styrer kommunikasjonen, handlinger og bruken av visuelle mediatorer. For at elevene skal bli en sentral deltager i brøkdiskursen må elevene produsere relevante narrativer. I «produksjonen» av påstander og narrativer om ulike brøkobjekter hadde de visuelle mediatorene en viktig rolle i vår studie. Det er mange eksempler hvor elever kom med påstander knyttet til brøker og relasjoner mellom brøker.

Påstandene elevene kom med i datamaterialet vårt var ofte knyttet til situasjoner der de visuelle mediatorene var plassholder for nøkkelord eller ble brukt for å forenkle kommunikasjonen. Det at elevene kunne uttrykke meningsfulle sammenhenger uten å være avhengig av nøkkelord kan sees som noe positivt. Emil beskrev mange sammenhenger mellom $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$ og 1 i eksempel 6, uten å benytte et eneste nøkkelord som beskrev størrelsene til brøkene. Når han blant annet sa: «Og den her (peker til bildet av $\frac{3}{4}$) er en sånn dere (peker til bildet av $\frac{1}{4}$) større enn den (peker til bildet av $\frac{1}{2}$).» beskrev han flere relasjoner, men de var alle knyttet til informasjonen gitt av bildene. Ville han kunne beskrevet disse sammenhengene hvis $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ og 1 ble gitt til han ved muntlig språk eller symboler? Trolig ikke, og det kan ikke forventes for deltagerne i denne studien på dette tidspunktet. Hadde Emil knyttet nøkkelord til forklaringen sin mens han pekte ville oppdagelsene hans blitt et mer generelle funn og ikke vært like tett knyttet til den billedlige informasjonen. Carraher (2013) påpeker at det er viktig å se brøk som noe mer enn matematiske definisjoner på grunn av at mange sider av brøk har opprinnelse i praktiske handlinger og refleksjoner knyttet til dette. Det at elever da kan uttrykke relasjoner og komme med påstander om brøkobjekter basert på billedlig informasjon tenker vi dermed har verdi i seg selv. Eleven er i prosess med å konstruere nye narrativer som vil igjen gjøre det mulig for de å ta seg lengre inn i brøkdiskursen.

I teorikapittelet kom vi inn på hva tallinje- eller arealmediator medierer er avhengig av deltagerens diskurs. Et areal der tre firedeler er markert vil ikke sees som $\frac{3}{4}$ hvis eleven er ukjent med brøkdiskursen. For å bli en sentral aktør i en brøkdiskurs må deltageren ha regler eller fortellinger (narrativer) som styrer bruken av de visuelle mediatorene. Elevene i vår studie produserte påstander om relasjoner mellom arealmediatorene og tallinjemediatorene. I eksempel 6 beskrev Emil sammenhenger mellom ulike brøkobjekter, men kom også med flere påstander om sammenhenger mellom brøker mediert som arealer og brøkens posisjon på tallinjen. Han sa blant annet «Og den her (peker til bildet av $\frac{3}{4}$) er en sånn dere (pekte til bildet av $\frac{1}{4}$) større enn den (pekte til bildet av ½) og da må den mellom her (pekte til punktene $\frac{1}{2}$ og 1 på tallinjen…)». Når han brukte ordene «…da må den mellom her…» er det en påstand og han var på vei mot å konstruere et narrativ om at $\frac{3}{4}$ mediert som et areal er punktet $\frac{3}{4}$ på tallinjen. Eleven ga mening til posisjonen på tallinjen gjennom å se den i sammenheng med arealmeditoren. Bright et al. (1988) gjennomførte to datainnsamlinger i deres studie. Elevene presterte bedre i datainnsamlingen der det ble vektlagt «oversettelse» fra «del hel» modeller, slik som arealer til tallinje. I vår datainnsamling er det flere eksempler på elever som gir mening til tallinjen gjennom å se den i forhold til arealer. Tallinjen har en sentral rolle i skolematematikken (Bright et al., 1988) og Strother et al. (2016) fremhever viktigheten av å bruke tallinjen i brøkundervisning. Det at elevene så relasjoner mellom arealer, tallinje og symboler er et viktig ledd mot at elevene skaper narrativer som er sentrale for brøkdiskursen. Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) skriver at det er et viktig steg innen tallteori at elever begynner å omtale brøk som et tall. I eksempel 6 knytter Emil bildet av $\frac{3}{4}$ til tallinjen, og trolig så han ikke på brøken som et tall på dette tidspunktet, men det er et ledd i prosessen.

5.3 Å beherske nøkkelord står sentralt for å bli fullverdig deltaker i diskursen

I de to forrige underkapitlene argumenterte vi for at de visuelle mediatorene senker inngangsterskelen for å delta i brøkdiskursen og de bidrar til at elevene kan lage påstander om brøkobjekter. Selv om det ikke er direkte overførbart, ligner dette på Mack (1990) sin erfaring med at elevene kunne ta seg inn i brøktemaet gjennom hverdagsdiskursen og hverdagskontekst. Men hun påpekte at det var begrensninger for hva hverdagskunnskapen kunne bidra med. I vår studie kunne elevene reflektere og kommunisere gjennom å forholde seg til billedlig informasjon, og i noen tilfeller klarte de å formulere påstander uten bruk av nøkkelord i det hele tatt. Allikevel så vi at nøkkelordene hadde betydning for brøkdiskursen til elevene. Nøkkelordene ble viktig siden de kommuniserte sentrale ideer, avgjør hva en deltager kan si og se (Sfard, 2007). Selv om nøkkelord ikke ble et eget tema i resultatdelen er nøkkelord indirekte del av de andre temaene våre. Dette alene antyder at bruken av nøkkelord er relevant for å bli en deltager i brøkdiskursen.

De gangene elevene hadde gitt nøkkelord passende mening og kombinerte bruken med peking til de visuelle mediatorene styrket dette elevens forklaring. I eksempel 4 i resultatkapitelet skulle Marius og Natalie plassere $\frac{3}{4}$ vist som et areal på tallinjen. Når Marius sier «sånn, sånn, sånn» mens han pekte til punktene $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ og $\frac{3}{4}$. og sier «tre» til punktet $\frac{3}{4}$ godtok ikke Natalie denne forklaringen fordi tre er en annen plass på tallinjen. Det var først når han telte «…en kvart, to kvart…» at hun godtok forklaringen. Det er flere eksempler på at bruk av nøkkelord gjør elevers forklaringer mer overbevisende for medelever. Som en motsetning hadde Vemund og Maiken utfordringer med å overbevise Emil om plasseringen av $\frac{2}{3}$ i eksempel 13. Vemund og Maiken pekte til tallinjen for å vise en tredeling av linjen 0 – 1, men de knyttet ikke relevante nøkkelord til handlingen. Det er ikke sikkert Emil hadde godkjent forklaringen uansett, siden hans diskurs var såpass ulik Maiken og Vemund sin. Men kanskje ville forklaringen til Vemund og Maiken vært mer overbevisende hvis ord som «en tredel, to tredel…» hadde blitt benyttet. Ryve et al. (2013) fant i sin studie at bruk av tekniske begreper i kombinasjon med visuelle mediatorer er viktig for å få en effektiv kommunikasjon og dataene våre antyder det samme. Det var forskjell mellom gruppene i hvor ofte nøkkelord ble benyttet og om de knyttet brøkstørrelser til peking. De to gruppene som benyttet nøkkelord mest, var de to gruppene som løste oppgavene raskest og riktigst. Vi kan ikke påstå noen sammenheng mellom bruken av nøkkelord og elevenes ferdigheter i emnet brøk, men de to separate observasjonene er nok til å gjøre oss nysgjerrige. Er det bruken av nøkkelord som gjør diskursen deres mer effektiv eller det deres generelle brøkdiskurs som medfører at nøkkelord frekventer oftere?

Bruken av nøkkelord var av betydning i tilfeller der elever hadde utfordringer med oppgaver. I temaet «Problematiske rutiner knyttet til bruk av visuelle mediatorer» gir vi eksempler der det virker som «del hel» formuleringen påvirker elevenes handlinger. En gutt i eksempel 9 ble usikker på hvor bildet av $\frac{1}{2}$ skulle plasseres etter han sier «…halvparten av en» og «halve». Han vurderte da tallinjen fra 0 – 4 som den hele og ville plassere $\frac{1}{2}$ på punktet 2 på tallinjen. Ludvik og Mikkel ble også usikre etter de omtaler brøken $\frac{5}{4}$ som «fem av fire» i eksempel 10. Dette fikk gruppen til å vurdere linjen fra 0 – 2 som den hele. Strother et al. (2016) fremhever viktigheten av å bruke presise definisjoner for teller og nevner. De skriver at «del hel» kan gi forvirring, blant annet i møte med uekte brøk, slik som eksemplet til Ludvik og Mikkel. Mikkel «vekslet» bildet av fem firedeler til en hel og en firedel. Det er en mulighet for at dette ga mer mening for disse to elevene enn «fem av fire» som de ikke fikk til å stemme i begynnelsen. Strother et al. (2016) mener nevner bør sees som en enhet og telleren angir dermed antall enheter. Når Marius sa «…en kvart, to kvart…» brukte han kvart som en enhet som han telte med jamfør beskrivelsen til Strother et al. (2016). Forenklet kan en rutine beskrives som den handlingen fra tidligere erfaringer deltageren tenker passer best til oppgaven slik han/hun oppfatter oppgaven (Lavie et al., 2019). Intensjonen til oppgaven og deltagerens tolkning av oppgaven trenger ikke å samsvare. Elevene i vår datainnsamling hadde begrenset erfaring med brøk og mye av erfaringen var knyttet til heltall. Innledningsvis spurte vi elevene hva de tenker brøk var, og beskrivelsen de ga var knyttet til «del av en kake» og at det er en form for regneoperasjon. Kort oppsummert hadde de en begrenset brøkdiskurs. Det at deltagerne utførte handlinger tett på heltallsdiskursen er dermed ikke unaturlig. Når en elev hører «del hel» blir dette tolket av eleven ut fra tidligere erfaringer og denne tolkningen blir oppgaven slik eleven ser det. Da kan eleven tolke oppgaven til at den hele er selve tallinjen. Mason (1998, s. 252) skriver at hvert tekniske begrep markerer en bestemt måte å se på. Det er da ikke utenkelig at «del hel» får noen elever til å se på oppgaven på en bestemt måte og ikke nødvendigvis likt som de som omtaler brøken som et antall enheter.

Betydningen av nøkkelord for å bli en fullverdig deltager i brøkdiskursen kan også knyttes til påstandene elevene konstruerte. Mange av påstandene og relasjonene elevene kommuniserer i datagrunnlaget er tett knyttet til konteksten de er produsert og mange ganger knyttes ikke tallord til brøkstørrelsene de peker til. Det er positivt at elevene klarer å komme med disse ideene, men hvis eleven/e hadde knyttet nøkkelord til disse størrelsene hadde funnene deres blitt mer generelle. Selv om peking til de visuelle mediatorene gjør det mulig for flere å delta i kommunikasjonen og skapelsen av narrativer, ville en mer aktiv bruk av tallord styrket elevenes brøkdiskurs.

5.4 Areal vs tallinje

Det er viktig å påpeke at vi mener det ikke er noen enten eller i forbindelse med bruk av arealer og tallinje. Både tallinjen og arealene ble brukt aktivt av elevene og var en viktig del av deres diskurs. Det er ikke snakk om at en er bedre enn den andre, men analysen av våre data viser at det er ulikheter som kan være av interesse for blant annet lærere. Vi vil her fremheve noen likheter og ulikheter mellom tallinjen og arealene i møte med brøk.

Deltagerne kom med flere påstander om de matematiske objektene når diskursen sentrerte rundt brøker mediert som arealer. Relasjonene mellom de ulike brøkene mediert som arealer ble kommunisert gjennom å peke til den visuelle mediatoren. Noen ganger knyttet elevene nøkkelord til det de pekte til, men i mange tilfeller var brøkbegreper fraværende. Påstandene som ble produsert og relasjonene som ble beskrevet var tett knyttet til den billedlige informasjonen og ble ikke fullverdige generelle narrativer. De ble ikke løsrevet fra konteksten som var bildene. Deltagerne i vår datainnsamling var tidlige i læringsløpet i forbindelse med brøk. Ikke alle deltagerne hadde gitt mening til teller og nevner, likevel kunne de komme med betydningsfulle observasjoner. Det er mulig at elever med mer erfaring til tallinje og brøk kunne produsert like mange narrativer ved hjelp av tallinje, men dette er uvisst. Elevene kom også med påstander om brøkobjekter når tallinjen var i sentrum av diskursen, men ikke i samme grad. Vi observerte at arealer bidro til at elevene ga mening til tallinjen, men det samme ble ikke observert den andre veien.

Elevene benyttet oftere nøkkelord tilknyttet brøkdiskursen når elevenes kommunikasjon var sentrert rundt tallinjen. Nøkkelord er viktig i en diskurs. Sfard (2007) skriver at hvilke ord og betydning av ord er et av punktene som avgjør om en person kan ta del i en spesifikk diskurs. Når en elev peker til et punkt på tallinjen og omtaler dette med et nøkkelord, slik som $\frac{3}{4}$, blir ikke objektet $\frac{3}{4}$, kun et punkt på tallinjen, men også ordet tre firedeler. Elevene knyttet også tallord til brøker mediert som arealer, men dette skjedde sjeldnere.

Blant annet skriver Strother et al. (2016) at uektebrøk kan være problematisk hvis elevene ser på brøk som «del hel» og arealmediatorer er mindre egnet for å vise og gi mening til uektebrøk. I eksempel 10, gjør Ludvik og Mikkel om bildet av $5 \cdot \frac{1}{4}$ til 1 og $\frac{1}{4}$. De har problemer med ordlyden «fem av fire». Her kan utfordringene elevene hadde til den uekte brøken, $\frac{5}{4}$, knyttes til arealmediatoren og del hel formuleringen. Det var ingen eksempler på elever som hadde problemer med å gi mening til uektebrøk når de kun forholdt seg til tallinjen i datamaterialet. Her skal det påpekes at det er begrensede muligheter for å observere utfordringer med uektebrøk, siden vi benyttet kun noen få uektebrøker i datainnsamlingen. I eksempel 18 argumenterte Emil for plasseringen av $\frac{3}{2}$ på tallinjen. I dette tilfellet pekte han, med unntak av en gang, til tallinjen eller symbolene i brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{2}$. Blant annet sa han: «Fordi vi må ha (pekte mot to i tallet $\frac{3}{2}$) halv lengde og det er tre der (pekte til tre i $\frac{3}{2}$)». Han koblet toeren i nevneren til en lengde på tallinjen og det ble uproblematisk for han å ha tre slike lengder etter hverandre. Strother et al. (2016) skriver at det er viktig å vektlegge enhetsdefinisjon av nevneren og se telleren som antall enheter. I eksemplet til Emil koblet han toeren i nevneren til en lengdeenhet på tallinjen.

Selv om tallinjen fungerte mer hensiktsmessig i møte med uektebrøk, var det flere problematiske handlinger der tallinjen var i fokus. Disse problemene var knyttet til overgeneralisert heltallstenkning (Van Hoof et al., 2015). Et av problemområdene dreide seg om at det alltid er mulig å peke til det neste heltallet i en rekke, men dette er ikke mulig for rasjonale tall. Det er uendelig mange brøker mellom to ulike brøker. Dette så vi i eksempel 14 der Emil hadde problemer med å akseptere at punktet for $\frac{1}{3}$ ikke samsvarte med åttendelsinndelingene som allerede var merket på tallinjen deres. Det andre punktet til Van Hoof et al. (2015) handler om at teller og nevner blir behandlet som to separate heltall. Vi har ikke fokusert på heltallsproblematikken, men aspekter ved tallinjen som leder mot disse misoppfatningene. Vi har tidligere påpekt at den visuelle informasjonen gitt av tidligere inndelinger frister elevene til å handle feil. Dette observerte vi ikke i løsningsdiskursen til elevene der den var sentrert rundt arealer, men dette kan også tilskrives oppgavene elevene arbeidet med. Elevene arbeidet med ferdig oppdelte arealer. De skulle for eksempel ikke skravere områder av et areal i tilknytting med en brøk. Hvis oppgaven hadde vært gitt på den formen, hadde muligens resultatet vært annerledes.

5.5 Styrker og svakheter ved studiet

Studien vi har gjennomført er en kvalitativ studie og det begrenser muligheten for generalisering. Resultatene ble presentert i form av tre hovedtemaer som vi mener er gyldig innenfor konteksten denne studien er gjennomført i. Vi har forsøkt å gi nøyaktige beskrivelser av konteksten, prosessene i forkant, under og etter datainnsamling, samt hvordan analysearbeidet har foregått. Vi har bestrebet oss på å være lojal ovenfor rammeverket vi har benyttet gjennom prosessen og koble empiri og funn til tidligere litteratur og forskning. Dette har blitt gjort for å gjøre studiet mest mulig transparent og som en fortsettelse på dette vil vi presentere våre synspunkter på metodene vi har benyttet. Vi vil først se på styrker og svakheter i forbindelse med vår analyse i møte med det valgte rammeverket. Deretter vil vi se på potensielle utfordringer ved valgte oppgaver og designet læringssituasjon. Videre ser vi på mulig svakheter ved at datainnsamlingen ble gjennomført med elever som hadde den ene forskeren som lærer.

5.5.1 Styrker og svakheter i analyse

Rammeverket vi valgte mener vi var godt egnet for å se nærmere på hvordan elever brukte arealer og tallinje i møte med brøk. Begrepene «visuell mediator», «nøkkelord», «narrativer» og «rutiner» i det kommognitive rammeverket (Sfard, 2006, 2007, 2008, 2012, 2020) er elementer i en diskurs som vi kunne observere og beskrive med disse begrepene. Disse fire elementene i rammeverket til Sfard er godt beskrevet og definert. Dette reduserte behovet for å tolke eller anta hva elevene tenkte eller mente i samme grad som en analyse utført uten rammeverket. De funnene som er tett knyttet til disse begrepene mener vi kan sees som trygge påstander, likevel er ikke vår analyse fri for tolkning og antagelser. For eksempel i temaet «visuelle mediatorer som plassholder for nøkkelord i diskursen» mener vi dette hovedtemaet har god støtte i datagrunnlaget og solid forankret i rammeverket. Det kommer tydelig frem at elever erstattet bruk av nøkkelord med blant annet å peke til tallinje eller arealene, slik som i eksempel 1, 2, 3 og 4 i resultatdelen. For eksempel pekte eleven kun til arealmediatorene i eksempel 1 uten å benytte et eneste ord for brøkstørrelser, men klarte fortsatt å gjøre seg forstått. I tilknytting til dette temaet fremmer vi to hovedårsaker til at elevene blant annet peker til de visuelle mediatorene fremfor å benytte nøkkelord. De to hovedgrunnene er mangel på nøkkelord og at det er enklere eller mentalt besparende. Selv om vi mener vi har et godt grunnlag for å komme med disse påstandene, må vi påpeke at vi ikke hadde tilgang til elevenes tanker og kan dermed ikke si dette med sikkerhet.

De to andre teamene er tett knyttet til enten begrepet narrativ eller rutiner. Det vanskeligste begrepet fra rammeverket å forholde seg til i analysen var rutiner. Dette handlet ikke om definisjonen av begrepet, men utfordringen lå i at det krever mye data for å avdekke rutiner. Dette er grunnen til at vi omtaler det elever gjør ofte som handlinger fremfor rutiner. Rutine krever en form for gjentagelse, noe som kan være vanskelig å dokumentere i en begrenset studie som vår. Vi mener likevel handlingene vi observerte er av interesse og nytte, uavhengig om det blir definert som en rutine eller som enkeltstående handlinger. Temaet «problematiske rutiner knyttet til bruk av visuelle mediatorer» belyser fortsatt utfordringer elever i denne datainnsamlingen hadde med hovedsakelig tallinjen, men også arealene.

De utfordringene vi hadde i forbindelse med begrepet narrativer i vår analyse omhandlet hvordan enkelte hendelser skulle defineres. Vi valgte å tolke narrativ som en ferdig utviklet påstand som eleven benyttet i diskursen. Disse påstandene kan stå alene uten behov for kontekst gitt av oppgave, visuell mediator eller lignende. Mange av påstandene elevene kom med var knyttet til konteksten de arbeidet med og er ikke generell. I disse tilfellene omtaler vi det som påstander, siden disse da blir et ledd for elevene mot å produsere et nytt narrativ, men er ikke et fullverdig narrativ i seg selv. Hvorvidt en elevs uttalelse kun er knyttet til konteksten han/hun arbeider med eller om påstanden også bygger på et ferdig narrativ kunne være vanskelig å avdekke om ikke umulig. Selv om dette kunne være vanskelig kategorisere med sikkerhet i analysen, mener vi at temaet «De visuelle mediatorenes rolle i konstruksjon av narrativer» ikke avhenger av disse nyansene. Vi kunne kodet mange av disse hendelsene med en felles beskrivelse som ville inkluderte flere hendelser. Ved å kode datamaterialet slik vi gjorde fikk vi frem flere nyanser i datamaterialet og selve temaet er fortsatt forankret i datamaterialet. Vi er klar over at det er episoder som vi eller andre kunne plassert inn under andre koder, men disse faller fortsatt under hovedtemaet.

5.5.2 Evaluering av oppgavevalg, læringssituasjon og datagrunnlag

Vi ser i ettertid at vi kunne styrket datagrunnlaget som danner basisen for våre funn ved å gjøre noen endringer på hvilke oppgaver vi benyttet. Vi vil påpeke at vi opplevde oppgavene og læringssituasjonen i seg selv som godt egnet for å se på elevenes bruk av tallinje og arealer i møte med brøk. Vi satt på ca. 6 timer med videomateriell og 140 sider med transkripsjon, der store deler av datagrunnlaget var relevant for vårt forskningsspørsmål. Vi tenker studien ville blitt styrket av en bedre balanse mellom ulike typer oppgaver. I den første datainnsamlingsøkten møtte elevene oppgaver der både arealer og tallinje var i fokus. Tallinjen ble fokuset for den andre økten alene. Dette betyr at vi kunne se arealer brukt i sammenheng med tallinje og tallinje i sammenheng med brøker gitt symbolsk. Tallinjen var dermed representert oftere i oppgavene enn arealene. Ved å ta med oppgaver som hadde satt fokuset på arealer i sammenheng med symbolsk gitte brøker ville datagrunnlaget vært mer balansert. I forkant av datainnsamlingen gjennomførte vi en pilotering og dette resulterte i at vi måtte velge bort et oppgavesett på grunn av tidsbruk. Vi så at tidsbruken og datamengden ville blitt for omfattende for vår studie. Vi kunne ikke prioritert bort flere av oppgavene vi benyttet for å ta inn andre. Den eneste løsningen slik vi ser det hadde vært å inkludere flere. Hvis denne studien skulle blitt gjennomført på nytt ville vi anbefalt å planlegge for et lengre og større studie.

Det var viktig at vi hadde med brøker i oppgavesettet der elevene måtte forholde seg til uekte brøker. Disse var med på å belyse noen utfordringer deltagerne hadde med disse i møte med de visuelle mediatorene. Hvis studien var mer omfattende i tid kunne flere av brøkene vært på formen uekte brøk. Mange av brøkene i oppgavesettet vårt, bygde på en dobling av nevner, slik som todeler, firedeler og åttedeler. Vi hadde dermed bevisst valgt å ha med brøker som ikke fulgte dette mønsteret, slik som tredeler. Dette var et viktig og riktig valg ser vi i ettertid. Spesielt en gruppe hadde utfordringer med plassering av for eksempel $\frac{2}{3}$ på tallinjen. Dette ga viktig informasjon om elevers bruk av spesielt tallinjen. Hvis vi skulle gjennomført en lignende studie på nytt ville vi planlagt mer tid til datainnsamling, slik at vi kunne tatt med flere brøker der nevneren ikke var i to gangen, slik som femdeler.

5.5.3 Forsker vs «lærer»

Vi gjennomførte datainnsamlingen med elever som har den ene forskeren som matematikklærer og det er aspekter ved dette som kan være utfordrende og som en bør være bevisst på. Det er både styrker og svakheter ved at elevene hadde en relasjon til den ene forskeren. Elevene var trygge på personen og elevene virket komfortable med datainnsamlingssituasjonen. Utfordringene med en slik relasjon kunne være at elevene følte forpliktelse til å delta i datainnsamlingen. Vi var bevisst på dette problemet og var veldig tydelig ovenfor foresatte og elever om at dette var frivillig. Uten at vi vil gå ut med antall, så var det en stor andel elever som valgte å ikke delta, og dette tenker vi viser at elevene og foresatte opplevde det som frivillig.

Ved å forske på eget trinn kan forsker komme i interessekonflikt. Konklusjoner som blir gjort reflekterer forskerens/lærerens eget arbeid indirekte og muligheten for at observasjoner ikke blir analysert og rapportert riktig er til stede. Denne studien hadde fokus på elevenes bruk av visuelle mediatorer og hadde ikke fokus på lærerens handlinger eller planlagte læringssituasjon. Dette reduserte utfordringen, selv om elevenes handlinger og tenkning gjenspeiler lærerens undervisning over tid. Den andre forskeren hadde ikke tilknytting til elevgruppen og var en «nøytral» observatør både i datainnhentingsfasen og i analysefasen. I denne studien har begge forskerne studert datamaterialet og blitt enig om funnene som er beskrevet tidligere. Det at en forsker uten tilknytting til elevene var aktiv i arbeidet med analysen sikret større tillit til funnene. Vi har prøvd å være bevisst på denne problemstillingen gjennom hele prosessen, men kan ikke garantere for at ubevisste handlinger eller tolkninger kan ha påvirket studien. Tidligere kjennskap til elevene kan påvirke hvordan forskeren leser og tolker situasjoner i datamaterialet. Ved at to personer ser på samme data, mener vi at dette reduseres denne muligheten. Vi mener at resultatet vi presenterer viser at vi ikke skjønnmaler elevenes prestasjoner. Temaene vi presenterer viser både elever som mestrer deler av brøkdiskursen, men også det er temaer de har utfordringer med.

5.6 Didaktiske implikasjoner

Denne studien ble gjennomført på en liten gruppe og var ikke designet for å produsere generelle funn. Vi kan ikke komme med noen universelle påstander, men vi tenker at resultatene i studien kan danne en basis for refleksjon hos undervisere og lærere. Sfard (2007); (Sfard, 2012) skriver at visuelle mediatorer gir deltagerne i en diskurs mulighet til å identifisere det matematiske objektet og koordinere samhandling rundt dette. Behovet for å identifisere et objekt og koordinere en diskusjon er gjeldene utover klasserommet vi benyttet i vår datainnsamling. Når de visuelle mediatorene var av såpass stor betydning for brøkdiskursen for deltagerne i vår studie, viser dette at lærer må være bevisst på dette i valg av oppgaver, produksjon av oppgaver og design av læringssituasjon. Vår datainnsamling fokuserte på elever som var tidlig i læringsløpet innen brøk. Vil vi ikke påstå noe om betydningen av bevisst bruk av de visuelle mediatorene for mer «rutinerte» elever, men ved elevers tidlige møte med brøk bør lærer være bevisst på de visuelle mediatorenes rolle. Blant annet kunne Emil uttale påstander og relasjoner til ulike brøkstørrelser uten å bruke et eneste tallord og Maiken kunne ikke et ord for $\frac{1}{8}$, men kunne beskrive $\frac{1}{8}$ i relasjon $\frac{1}{4}$. Ved å sikre at elevene har tilgang til egnede visuelle mediatorer kan elever uttrykke og oppdage viktige sammenhenger. Videre bidrar dette til at elevene over tid konstruerer brøknarrativer som blir viktig i deres brøkdiskurs.

Det er tegn på at elevers bruk av nøkkelord tilknyttet brøkdiskursen påvirkes av hvilke visuelle mediatorer eleven forholder seg til. Selv om dette var noe vi observerte i denne datainnsamlingen, vil vi minne om at dette er funn det er noen usikkerhet rundt, siden dette kan ha blitt påvirket av den designede læringssituasjonen brukt i datainnsamlingen. Elevene benyttet færre nøkkelord der kommunikasjonen sentrerte rundt arealmediatorene. Dette er nødvendigvis ikke et problem, men hvis lærer har som mål at elevene skal utvide ordforrådet er dette en faktor som bør tenkes over. Enten bør oppgaven og læringssituasjonen utformes slik at elevene også må bruke ord i møte med arealmediatoren. Eller, vurdere å sentrere oppgaven rundt tallinjen, siden det er tegn på at elever tar i bruk nøkkelord i større grad i de situasjonene.

Overgeneralisert helstallstenkning kan lede til systematiske feil i arbeid med brøk (Van Hoof et al., 2015) og disse feilene kom mest til syne når elevene forholdt seg til tallinjen. Bright et al. (1988) er tydelig på at tallinjen er en kompleks visuell mediator for elever å forholde seg til og kanskje er det denne kompleksiteten som spiller inn i vår studie. Uansett tenker vi at dette studiet viser at undervisere må være bevisst på problematisk heltallstenkning når elever arbeider på tallinje. I dette studiet oppstod problemene når elever prøvde å plassere en brøk på en tallinje som allerede var avmerket med intervaller som ikke samsvarte med nevneren i den nye brøken. Gruppene som valgte å markere, blant annet $\frac{2}{3}$, på en ny tallinje hadde ikke de samme utfordringene. Selv om dette ikke nødvendigvis er overførbart til andre elevgrupper, er det noe å være bevisst på som underviser. Her ser vi for oss at hvis underviser ønsker å redusere muligheten for problematikk knyttet til overgeneralisert heltallstenkning, kan elevene oppfordres til å alltid bruke ny tallinje for hver brøk. Ønsker underviser å avdekke mulig feilaktige narrativer hos elever, kan elevene oppfordres til å markere ulike brøker på samme tallinje.

Deltagerne i vår studie kom med flere påstander og beskrev flere relasjoner mellom ulike brøkstørrelser ved hjelp av arealmediatorene. Det var også flere eksempler hvor elevene støttet seg til arealmediatoren for å gi mening til punkter på tallinjen. Elevene i vår studie var relativt uerfaren med brøk og det kan tenkes at arealmediatoren var enklere for disse å tenke ut fra. Arealmediatoren avhenger ikke av to informasjonskilder slik tallinjen gjør (Bright et al., 1988). Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) skriver at «del hel» konseptet danner grunnlaget for de fire andre konseptene. «Del hel» er tett knyttet til brøker mediert som et areal og det er naturlig at vi observerte mange elever som omtalte brøker på formen som «del hel». I tillegg ga det mening at elevene i vår datainnsamling virket mer fortrolig med å konstruere nye narrativer i møte med arealer, fremfor tallinje. Selv om vi så at tallinjen ga elevene mindre utfordring med uekte brøker slik Strother et al. (2016) skriver om, var arealene viktig når elevene konstruerte nye narrativer. Arealene bidro også til at elevene ga mening til tallinjen. Selv om Barbieri et al. (2020) fremhever viktigheten av at elever lærer å omtale brøk som et tall på en tallinje og Strother et al. (2016) fremhever bruken av tallinjen, hadde elevene i vår studie sterk nytte av arealene. En elev uttalte «uten kakene ville det vært umulig å bruke tallinjen».

5.7 Oppsummering og veien videre

I innledningen skrev vi om ulike faktorer som motiverte for denne studien, slik som at brøk er det temaet som elever på barneskolen har størst utfordring med (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) og har stor betydning for elevenes videre læring innen faget (Behr et al., 1983). Brøk er et omfattende tema som det er gjort mye forskning på, intensjonen med dette studiet var aldri å gjøre banebrytende oppdagelser. Når vi innhentet informasjon om temaet gjennom å se til tidligere litteratur og forskning, kunne vi ikke finne noe studie som så på hvordan elever bruker arealer og tallinje i møte med brøk gjennom rammeverket til Sfard (2006, 2007, 2008, 2012, 2020). Blant annet kom vi aldri over lignende forskningsspørsmål når vi søkte i Google Scholar, men dette betyr ikke at lignende studier eksisterer. Dette kan tilskrives våre ferdigheter med å lokalisere faglitteratur. Vårt forskningsspørsmål ble: «Hvordan blir de visuelle mediatorene en del av læringsdiskursen innen temaet brøk?». Vi tør påstå at vi opplevde det kommognitive rammeverket som egnet for å studere elevenes bruk av arealer og tallinje i møte med brøk. Rammeverket utstyrte oss med begreper som gjorde det mulig for oss å beskrive observasjoner i datamaterialet vårt, slik at vi kunne belyse vårt forskningsspørsmål. Vi kom frem til at elevene i vår studie benyttet handlinger på de visuelle mediatorene som plassholder for nøkkelord og som avlastning. Hovedsakelig i form av peking til arealene og tallinjen. De visuelle mediatorene senket inngangsterskelen for å delta i kommunikasjon. Deltagerne konstruerte narrativer ved hjelp av både tallinje og arealer, men elevene knyttet flere påstander til arealene. Elevene var aktive deltagere i å utvide sin egen diskurs. Det var flere problematiske rutiner tilknyttet bruk av tallinjen, men dette forekom også ved bruk av arealer. Utfordringene elevene hadde kunne stort sett knyttes til overgeneralisert heltallstening.

Denne studien er en mindre kvalitativ studie og resultatene må sees i relasjon til konteksten de er skapt. Funnene vi har presentert kan best sees som et refleksjonsgrunnlag for lærere og undervisere. Selv om både arealene og tallinjen hadde en sentral rolle i elevenes løsningsdiskurs, ble de ikke benyttet likt. Elevene knyttet oftere nøkkelord tilknyttet brøkdiskurs når handlingene sentrerte rundt tallinjen. Vi presenterte to hovedgrunner til at elevene velger å peke til de visuelle mediatorene. Disse var at elevene manglet nøkkelord eller begreper for brøkstørrelse og at det var enklere eller mentalt besparende. Hvorfor velger elever å erstatte nøkkelord med handlinger på de visuelle mediatorene og i hvilke situasjoner? Dette er av interesse siden nøkkelord er en viktig del av den matematiske diskursen. Vi ville foreslått en studie som strekker seg over lengre tidsrom, siden diskurs generelt og spesielt rutiner tar tid å utvikle. I hvilken grad vil elevene støtte seg til visuelle mediatorer i kommunikasjon og utforsking av brøkkonseptet over tid? Hvordan utvikles bruken av nøkkelord i samspill med visuelle mediatorer?

Vi har tidligere henvist til tidligere litteratur der både tallinje har blitt presentert som den foretrukne visuelle mediatoren i møte med brøk og det motsatte. Vi kan ikke basert på vår studie komme med noen avgjørende innspill på dette temaet. Det vi kan påstå er at både tallinje og areal var viktig for våre deltagere og det er nyanser i elevens bruk, som lærer kan ta hensyn til i sin planlegging.

Referanser

Alrø, H. & Kristiansen, M. (1997). Mediet er ikke budskabet: video i observation af interpersonel kommunikation. I *Videoobservation* (s. 73-99). Aalborg Universitetsforlag.

Barbieri, C. A., Rodrigues, J., Dyson, N. & Jordan, N. C. (2020). Improving fraction understanding in sixth graders with mathematics difficulties: Effects of a number line approach combined with cognitive learning strategies. *Journal of Educational Psychology*, *112*(3), 628.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, *91*, 126.

Bergem, O. K. (2016). 2 Hovedresultater i matematikk. I *Vi kan lykkes i realfag* (s. 22-44).

Birkeland, P. A. & Venheim, R. (2011). *Matematikk for lærere*.

Bjerke, A., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke flertall–eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I I. Pareliussen, BB Moen, A. Reinertsen & T. Solhaug (red.). FoU i praksis 2012 conference proceedings,

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis.

Breiteig, T. & Venheim, R. (2005). *Matematikk for lærere*. Universitetsforl.

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R. & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for research in mathematics education*, *19*(3), 215-232.

Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford university press.

Carraher, D. W. (2013). Learning about fractions. I *Theories of mathematical learning* (s. 253-278). Routledge.

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational studies in mathematics*, *64*(3), 293-316.

Cohen, L., Lawrence, M. & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (Bd. 8). Routledge.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1), 103-131.

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Ectj*, *29*(2), 75-91.

Holme, I. M. & Solvang, B. K. (1996). Metodevalg & metodebruk. *Tano Aschehoug*.

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C. W., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). TIMSS 2919-Kortrapport.

Kristiansen, S. & Krogstrup, H. K. (1999). *Deltagende observation: introduktion til en samfundsvidenskabelig metode*. Hans Reitzels Forlag.

Kvale, S. (1997). Det kvalitative forskningsintervju Gyldendahl. *Ad Notam Gyldendal*.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for research in mathematics education*, *24*(1), 41-61.

Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational studies in mathematics*, *101*(2), 153-176.

Liu, C., Xin, Z. & Li, X. (2012). The development of Chinese students' understanding of the concept of fractions from fifth to eighth grade. *Journal of Mathematics Education*, *5*(1), 45-62.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*, *21*(1), 16-32.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(3), 243-267.

Maxwell, J. (1992). Understanding and validity in qualitative research. *Harvard educational review*, *62*(3), 279-301.

NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. I. NESH Oslo.
Phillips, L. J. & Jørgensen, M. W. (1999). Diskursanalyse som teori og metode.
Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk: innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Høyskoleforl.
Ryve, A., Nilsson, P. & Pettersson, K. (2013). Analyzing effective communication in mathematics group work: The role of visual mediators and technical terms. *Educational studies in mathematics*, *82*(3), 497-514.
Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. I *New mathematics education research and practice* (s. 153-170). Brill Sense.
Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The journal of the learning sciences*, *16*(4), 565-613.
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. I. Elsevier.
Sfard, A. (2020). Commognition. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 95-101.
Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I. & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological science*, *23*(7), 691-697.
Solem, I. H., Alseth, B. & Nordberg, G. (2010). *Tall og tanke, Matematikkundervisning 1. til 4. trinn*. Gyldendal.
Strother, S., Brendefur, J. L., Thiede, K. & Appleton, S. (2016). Five key ideas to teach fractions and decimals with understanding. *Advances in Social Sciences Research Journal*.
Tabach, M. & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: prologue. *Educational studies in mathematics*, *91*(3), 299-306.
Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse, en innføring i kvalitative metoder*. Fagbokforlaget.
Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). https://www.udir.no/lk20/mat01-05
Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, *37*, 30-38.

Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgavesett og planleggingsdokument til datainnsamling

Vedlegg 2: Informasjon til foresatte og samtykkeerklæring

NTNU
Kunnskap for en bedre verden