Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Hanne Kristin Berg
Karin Lippestad

# Faktorer som påvirker en gruppe 6. trinns elevers mulighet i å generalisere et figurmønster

## En TDS inspirert studie av en didaktisk situasjon - forankret i didaktisk ingeniørvirksomhet

Masteroppgave i lærerspesialist - matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Yvonne Grimeland
September 2021

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Hanne Kristin Berg
Karin Lippestad

# Faktorer som påvirker en gruppe 6. trinns elevers mulighet i å generalisere et figurmønster

## En TDS inspirert studie av en didaktisk situasjon - forankret i didaktisk ingeniørvirksomhet

Masteroppgave i lærerspesialist - matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Yvonne Grimeland
September 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

# Sammendrag

I denne studien har vi undersøkt hvilke faktorer som hindrer og hvilke som muliggjør tolv 6. trinns elever i å nå målkunnskapen i en designet didaktisk undervisningssituasjon. Den tilsiktede målkunnskapen i denne didaktiske situasjonen, er knyttet til algebra og generalisering av figurmønster. Hensikten har vært å få mer forståelse av og innsikt i hvordan en didaktisk situasjon designes, ved hjelp av didaktisk ingeniørvirksomhet, i tidlig algebra. Studiens formål har vært å se på hvilke faktorer ved den designede undervisningssituasjonen som hindrer, og hvilke faktorer som muliggjør at elever utvikler et generelt uttrykk av et figurmønster.

For utvikling og design av den didaktiske situasjonen, har vi vært inspirert av Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk. Instruksjonsdesignet bygger på teorien for didaktiske situasjoner i matematikk, TDS. TDS er et teoretisk rammeverk for å analysere matematikkundervisning og matematikklæring. Metodologien vi har benyttet, har karakteristiske trekk fra didaktisk ingeniørvirksomhet. Didaktisk ingeniørvirksomhet er en forskningsmetodologi som er utviklet innenfor TDS for å designe og analysere didaktiske situasjoner (Strømskag, 2020a). I tillegg til epistemologisk analyse inkluderer vi observasjon, datainnsamling, a posteriori analyse og validering i vår metodologi.

Studien har benyttet kvalitative metoder med observasjon av tolv elever fordelt på fire grupper. Hovedkildene i datamaterialet er lydopptak og elevarbeid. I tillegg ligger egne observasjonsnotater til grunn for studien. Datamaterialet er videre analysert i hoved- og underkategorier. Disse kategoriene sammenlignes med a priori analyse. Validiteten til den designede situasjonen er testet gjennom en sammenligning av a priori og a posteriori analyser. Valideringen gjelder relasjonen mellom intensjonen og det faktiske resultatet av det didaktiske designet.

Resultatene fra studien viser hvilke hindrende og muliggjørende faktorer som påvirker elevenes kunnskapsutvikling. De viktigste funnene i denne studien er hvordan feedback-potensial i oppgavene, elevenes samarbeidskompetanse og kommunikasjonsferdigheter påvirker deres mulighet i å nå målkunnskapen.

Vår masteroppgave kan bidra til økt forståelse og innsikt i designutvikling og implementering av didaktiske situasjoner hvor målet er at elevene skal lære en spesifikk matematisk kunnskap. I tillegg belyser vi hvordan lærespesialister kan bruke TDS som et didaktisk verktøy for å styrke læreres kompetanse, og til å utvikle profesjonsfellesskap.

# Abstract

In this study we have examined which factors impede and which facilitate twelve 6th grade pupils reaching the learning target in a designed didactic lesson. The intended target knowledge in this didactic situation is linked to algebra and the generalisation of figure patterns. The purpose is an increased understanding of and insight into how a didactic situation may be designed, with the aid of didactic engineering, in early algebra. The purpose of the study has been to see which factors of the designed lesson which impede, and which facilitate the development of a general design of a figure pattern.

The inspiration for the development and design of the didactic situation has been Strømskag's (2017b) model of instructional design in mathematics. The instructional design is based on the theory of didactical situations in mathematics, TDS. TDS is a theoretical framework for the analysis of the teaching and studying of mathematics. The methodology we have utilised has the characteristics from didactic engineering. Didactic engineering is a research methodology developed within TDS to design and analyse didactical situations (Strømskag, 2020a). In addition to epistemological analysis, we include observation, data collection, a post-theory analysis and validation of our methodology.

Our study has employed qualitative methods by observing twelve students in four different groups. The main sources in the data material are sound recordings and the pupils' work. In addition, our own observation notes form the basis of the study. The data is further analysed in main-, and subcategories. These categories are compared to an a priori analysis. The validity of the designed situation is tested through a comparison of a priori and a posteriori analysis. The validation concerns the intention and the actual result of the didactic design.

The results of the study show which impeding and which contributing factors influence the pupils' opportunity for development of knowledge. The most important findings in this study are how feedback potential in the tasks, the pupils' cooperation and communication skills influence their opportunity to reach the learning target.

Our master's thesis may contribute to an increased understanding of and insight into design development and implementation of didactic situations where the target is for pupils' learning of a specific mathematic skill. In addition, we illuminate how teaching specialists may use TDS as a didactic tool to enhance teachers' competence and to develop a professional learning community.

# Forord

Med denne erfaringsbaserte masteroppgaven fullfører vi tre års videreutdanning som lærerspesialist i matematikk for 1. – 7. trinn, ved NTNU i Trondheim. Studiet har gitt oss faglig oppdatering på forskning og fagdidaktikk innenfor matematikk. I tillegg har vi fått kompetanse som er ment til å styrke det kollektive profesjonsfellesskapet og utvikling av skolen som en lærende organisasjon. Utdanningen har vært spennende og lærerik, men også utfordrende. Vi ønsker å takke NTNU for profesjonelle forelesere, som har formidlet faglig innhold på en engasjert og inspirerende måte. Takk for at vi fikk muligheten til å skrive i par. I prosessen har vi utviklet oss, hatt gode diskusjoner og fagsamtaler.

Vi ønsker å takke vår veileder, Yvonne Grimeland, for grundige og konstruktive tilbake-meldinger gjennom arbeidet med denne masteroppgaven.

Vi vil også rette en stor takk til elevene som ville være med i denne studien, og foreldrene som godkjente samtykkeerklæringen. Det hadde ikke blitt noen studie uten elevenes deltagelse og deres elevarbeid.

Vi setter pris på den nasjonale satsingen av videreutdanning for lærere, og at Regjeringen satser på lærerspesialistutdanningen. Videreutdanning vil bidra til god faglig og pedagogisk kvalitet i opplæringen, som igjen vil styrke elevenes læring. Vi vil også rette en takk til våre arbeidsgivere som har lagt til rette for at vi kunne gjennomføre denne videreutdanningen.

Til slutt vil vi takke våre familier for støtte og oppmuntring underveis i arbeidet. Vi hadde ikke klart det uten deres tålmodighet og forståelse.

Hanne Kristin Berg
Karin Lippestad

Indre Østfold, september 2021

# Innhold

# Figurer

# 1 Innledning

## 1.1 Bakgrunn og aktualitet

Et samfunn i endring krever en skole som fornyer seg. I Meld. St. 28 foreslår Regjeringen å fornye fagene i skolen for å gi elevene mer dybdelæring og bedre forståelse (Kunnskapsdepartementet, 2015-2016). Høsten 2020 ble den nye læreplanen, "Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020" (LK20) innført. Læreplanen er strukturert i kompetansemål etter hvert trinn, bortsett fra 1. trinn, for å gi faget en tydelig progresjon og tid til dybdelæring. Kompetansemålene i matematikk er bygget opp rundt fagets kjerneelementer. Kjerneelementer definerer aspekter ved faget som bør gå igjen i arbeid med ulike matematiske temaer, og som elevene må lære for å kunne mestre faget (Utdanningsdirektoratet, 2020b). For å bygge en solid kompetanse hos elevene, trenger de tid til å jobbe med fagets kjerneelementer. Kort gjenfortalt fra beskrivelsen i læreplanen handler generalisering i matematikk om at elevene skal oppdage sammenhenger og strukturer og ikke bli presentert for en ferdig løsning. Elevene kan utforske tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved å bruke algebra og hensiktsmessige representasjoner (Udir). Slik legger den nye læreplanen opp til at arbeidet med generalisering er integrert i all matematikkundervisning.

Algebra er ett av de matematiske kunnskapsområdene som omtales i kjerneelementene. Kunnskapsområdene danner grunnlaget som elevene trenger for å utvikle matematisk forståelse ved å utforske sammenhenger innenfor og mellom kunnskapsområdene. I kjerneelementet dreier algebra seg om å utforske strukturer, mønstre og relasjoner, og er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk (Udir). Tall og algebra prioriteres i fagplanen i matematikk på hvert trinn for å gi en tydelig progresjon.

Det matematikkfaglige temaet i denne masteroppgaven er algebra og generalisering av figurmønster. Algebra er et verktøy for å utforske, analysere og representere matematiske begreper og ideer, samt beskrive og modellere forhold og sammenhenger i hverdagsfenomener (Kieran, 2007). Kieran (2007) mener algebra er viktig i skolen for å lykkes med videre opplæring både i matematikkfaget, og i studier som bygger på algebraisk kunnskap. I skolen har algebra vært synonymt med manipulering av symboler (Kieran, 2004). Algebra har tradisjonelt blitt sett på som læren om ligninger, regning med tall og variabler og bokstavregning, og manipulering av algebraiske symboler uten å vektlegge forståelse. En slik tilnærming til algebra har elever historisk sett blitt introdusert for på ungdomsskolen, etter at de har utviklet et godt aritmetisk grunnlag. Tidligere studier peker på at denne tradisjonelle tilnærmingen kan gjøre senere aktiviteter med algebra utfordrende, da elevene kan bli svarorienterte (Lannin, 2005). Resonneringsprosesser uteblir dermed ofte, og elever får en tilnærming til algebra som innlærte prosedyrer og kan utvikle et negativt forhold til algebra (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008). Kieran (2007) sier at det nå er en større enighet om at elevene kan lære algebra tidligere, og bør derfor bli eksponert for algebraisk tenkning samtidig som de utvikler sine aritmetiske ferdigheter. Cai og Knuth (2011) hevder elevenes utvikling av algebraisk tenkning ikke betyr at pensum fra ungdomsskolen skal forskyves ned til barneskolen. Ifølge dem krever utvikling av algebraisk tenkning en endring i hvordan aritmetikk ses på og undervises.

Tidlig algebra handler om elevenes evne til å se sammenhenger i matematikk, resonnere, argumentere og generalisere, som bør være en del av matematikkundervisningen de første årene på barneskolen. Tidlig algebra er en måte å jobbe på som utfordrer elevene til algebraisk tenkning, og er den delen av matematikken som skal forberede elevene til mer formell algebra. En sentral del består av å jobbe med de fire regneartene, men på måter som gjør elevene i stand til å se det generelle i matematikken. Etter hvert vil arbeidet føre fram til at variabelbegrepet innføres, selv om det ikke jobbes med variabler riktig ennå. For at elevene skal få en god overgang og god forståelse for hva algebra er, er det lurt å innføre algebraisk tenkning som metode i undervisningen helt fra 1. klasse. Forskningslitteraturen viser at elever i seks-sju års alderen mestrer å resonnere algebraisk med støtte fra lærer (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey, 2007; Moss & McNab, 2011). I denne litteraturen omtales algebraisk tenkning som generalisering av strukturer, relasjonell tenkning og funksjonstenkning. Elever bør få erfaring med å analysere forhold mellom størrelser, legge merke til strukturer og sammenligne og utforske endringer, uten behov for symboler. Kieran, Pang, Schifter, og Fong Ng (2016) hevder at dagligspråket er et av de viktigste midlene for elever på barnetrinnet for å kommunisere algebraisk tenkning.

Tidlig algebra skiller seg fra aritmetikken som i stor grad er svarorientert og retter oppmerksomheten mot prosesser, representasjoner og relasjoner. Mye av arbeidet i aritmetikk er rettet mot regning, mens algebra handler om å beskrive først, for så å regne ut (Post, Behr, & Lesh, 1988). For mange elever er overgangen fra aritmetikk til algebra utfordrende (Kaput, 2008). Utfordringen med å integrere algebraisk tenkning i aritmetikk, er å finne balansegangen ved å utnytte elevenes kompetanse i aritmetikk, uten å la de regne. Dette er spesielt krevende i klasser som begynner sent med denne tilnærmingen. Læreren må få elevene med på å ikke regne, og heller få de til å legge merke til og beskrive mønstre, sammenhenger og relasjoner (Solem et al., 2017). Istedenfor å behandle aritmetikk og algebra som to separate områder, mener Kaput (2008) at læreren må introdusere og legge til rette for algebraisk resonnement i aritmetikk. Algebra blir da det vi bruker for å tenke og kommunisere om de strukturer og mønstre vi ser i aritmetikken. Et aspekt for å øke elevenes forståelse for algebra, er å fremme generaliseringsaktiviteter. Flere forskere (Becker & Rivera, 2006; Lannin, 2005; Warren & Cooper, 2008) hevder figurmønster er en slik generaliseringsaktivitet. I Wilkie og Clark (2015) sin forskning kom de frem til at yngre barn kan tilnærme seg algebra gjennom visuelle voksende mønstre, og knytte aritmetiske uttrykk til det visuelle. I denne prosessen gis det mulighet for å utvikle forståelse for algebra, som igjen vil støtte videre opplæring.

Forskning anbefaler bruk av figurmønster som introduksjon til tidlig algebra (Kaput, 2008; Lannin, 2005). I denne studien har en gruppe 6. trinns elever arbeidet med generalisering av et figurmønster. I en slik tilnærming til tidlig algebra skal elevene finne, gjenkjenne og generalisere et voksende mønster. Figurmønster gir en visuell geometrisk kontekst for en figur som utvikler seg på en bestemt måte, og denne konteksten trekkes frem som en styrke ved slike oppgaver. Ved hjelp av den visuelle oppfatningen kan elevene undersøke og beskrive noe generelt for alle figurene som inngår i figurmønsteret. Økende geometriske mønstre har vist seg å være oppgaver som i stor grad bidrar til å utvikle elevers algebraiske tenkning generelt, og funksjonstenkning spesielt (M. L. Blanton & Kaput, 2011; Warren & Cooper, 2008). Elevene i denne studien studerte det økende mønsteret ved først å finne antall steinheller for 1-5 blomsterbed, så 10, 20, og deretter 100. Den spesifikke matematiske kunnskapen er at elevene skal lage et generelt uttrykk for utviklingen av figurmønsteret. For å uttrykke det generelle, kan elevene anvende naturlig språk eller symbolspråk for å representere et hvilket som helst figurnummer i følgen.

## 1.2 Formål og forskningsspørsmål

Lannin (2005) skriver at tidlig algebra gir nye utfordringer for læreren. Læreplanens økte fokus på algebraisk tenkning fra tidlig skolealder vil trolig gi et økt behov for kompetanseheving for matematikklærere i grunnskolen. I en slik prosess kan rollen som lærerspesialist bli sentral. Gjennom lærerspesialistutdanningen oppdateres matematikklærere på forskning og fagdidaktikk. Denne kompetansen er ment brukt som en fag- og analysekompetanse til å styrke det kollektive profesjonsfellesskapet og utviklingen av skolen som en lærende organisasjon (Utdanningsdirektoratet, 2020a). I Meld. St. 21 står det at velfungerende profesjonsfellesskap er avgjørende for at læreren skal kunne utvikle undervisningspraksisen sin gjennom hele yrkeskarrieren (Kunnskapsdepartementet, 2016-2017). Oppgaven som lærerspesialist blir å legge til rette for en kultur hvor det er åpenhet om egen praksis, deling av kunnskap, teori og erfaringer. Lærerfellesskapet blir en viktig arena hvor det utvikles faglig samarbeid, delt undervisningsopplegg som er forankret i teori, og hvor det gis rom for refleksjon. I et langsiktig perspektiv kan dette være med på å øke kompetansen, og å skape varige endringer i undervisningen. Det er først når det profesjonelle samarbeidet er orientert mot å utvikle undervisningen, at det får betydning for elevenes læringsutbytte (Kunnskapsdepartementet, 2016-2017).

Denne masteroppgaven baserer seg på en designet didaktisk situasjon inspirert av Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk. I tillegg til Strømskag sin modell for instruksjonsdesign, er metodologien utvidet til et forskningsdesign. Modellen bygger på en spesifikk matematisk kunnskap som involverer et problem. Elevene som gruppe skal løse problemet på en optimal måte ved å anvende den spesifikke kunnskapen. Det teoretiske rammeverket som ligger til grunn, er teorien for didaktiske situasjoner i matematikk, TDS (Brousseau, 1997). TDS er brukt for å forstå hvilke aspekter ved undervisningssituasjonen som påvirker elevenes muligheter i å oppnå den spesifikke kunnskapen. I tillegg inneholder TDS en metodologi (forskningsdesign) for å designe undervisning. Metodologien har karakteristiske trekk fra didaktisk ingeniørvirksomhet (Artigue, 2015; Strømskag, 2017b). Didaktisk ingeniørvirksomhet er en forskningsmetodologi som er basert på kvalitative analyser. Forskningsmetodologien er strukturert i fire faser (Strømskag, 2020a). I første fase gjennomførte vi en a priori analyse (føranalyse), og den didaktiske situasjonen ble designet. Neste fase var realisering i klasserommet med observasjon og datainnsamling. Deretter ble en a posteriori analyse (etteranalyse) foretatt, der vi så på de faktiske hendelsene i klasserommet. Den didaktiske situasjonen ble validert gjennom en sammenligning av a priori og a posteriori analyser.

TDS som rammeverk kan være en nyttig støtte for lærerspesialister siden det kan benyttes til å analysere matematikkundervisning og læring. Rammeverket er strukturert slik at det støtter planlegging, design, implementering, analyse og evaluering av undervisningen. Selv om metodologien er utviklet for å designe og studere didaktiske situasjoner, er det flere elementer ved de forberedende analysene som er hensiktsmessig å bruke ved planlegging og analyse av ordinære undervisningssituasjoner (Strømskag, 2020b). TDS kan dermed være et nyttig verktøy for lærerspesialister i å ivareta helhetsperspektivet i matematikkundervisningen, fra analyse av den matematiske kunnskapen, til institusjonaliseringen av målkunnskapen. TDS kan dermed være en støtte for lærerspesialister i arbeidet med å utvikle profesjonsfellesskap i matematikk. På bakgrunn av vår lærerspesialistrolle, ønsket vi mer erfaring i å designe en didaktisk situasjon.

TDS kan benyttes på alle klassetrinn. Svinvik (2018) har gjennomført et TDS-eksperiment i algebra på en videregående skole. Strømskag (2017a) har gjennomført en studie om hvordan egenskaper ved en didaktisk situasjon i matematikk påvirker lærer-studenters muligheter til å løse en algebraisk generaliseringsoppgave. Vår studie er inspirert av Svinvik og Strømskag sine studier. Vi vet ikke om lignende studier innenfor TDS, med generalisering av figurmønster som matematisk tema, er utført på barne-trinnet i norsk skole. Vår masteroppgave kan inspirere og bidra til økt kunnskap om designutvikling i tidlig algebra. Den overordnede målsettingen i TDS er å forstå hvordan forutsetninger for og begrensninger ved didaktiske systemer muliggjør eller hindrer læring, og hvordan virkemåten til slike systemer kan forbedres (Strømskag, 2020b). I lys av dette ønsket vi å se på hvilke faktorer som påvirker elevenes mulighet til å nå en spesifikk matematisk kunnskap. For å undersøke dette, stilte vi følgende forsknings-spørsmål:

*Hvilke faktorer ved den designede undervisningssituasjonen hindrer, og hvilke faktorer muliggjør, at en gruppe 6. trinns elever utvikler et generelt uttrykk av et figurmønster?*

Denne studien er inspirert av teorien for didaktiske situasjoner i matematikk, TDS. Styrken i rammeverket ligger i dens nytte til å forutse relasjonen mellom tre aspekter; kunnskapen som skal læres, den designede situasjonen, og interaksjonen mellom lærer, elev og miljøet.

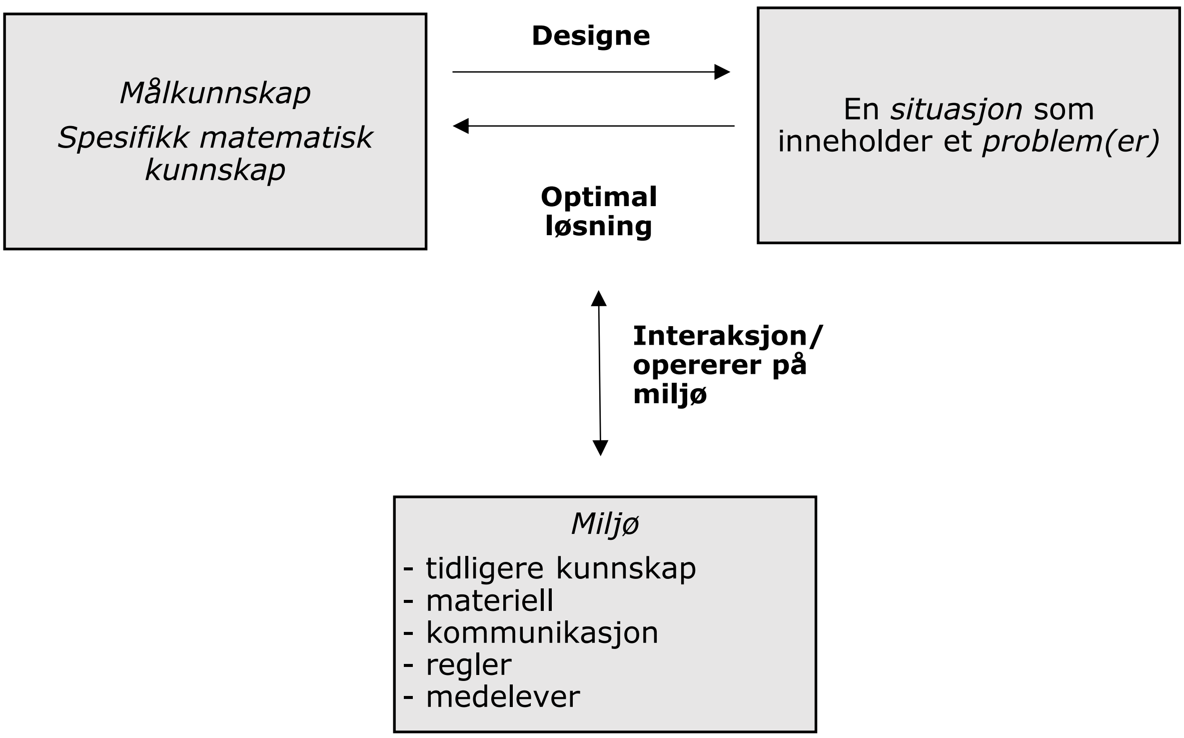
## 1.3 Oppgavens oppbyggning

I det neste kapittelet presenteres studiens teoretiske rammeverk. Videre forklares sentrale begreper ved teorien som er relevant for studien. Teorien inneholder en rekke begreper som kan være utfordrende for leseren å raskt få en oversikt over. Vi har utviklet modeller som kan støtte leseren i forståelsen av rammeverket. I kapittel 3 forklares metodologien som er benyttet i studien. I metodekapittelet beskrives instruksjonsdesign i matematikk. Dernest presenteres kort den designede situasjonen, erfaringene fra pilotprosjektet, utvalget av deltagere, forklaringer og begrunnelser for valg som er gjort i forbindelse med datainnsamlingen, samt en beskrivelse av hvordan datamaterialet har blitt analysert. Avslutningsvis i kapittel 3 drøftes etiske betraktninger, vår rolle i studien, samt studiens troverdighet. De forberedende analysene; epistemologisk-, didaktisk- og en a priori analyse, blir presentert i kapittel 4. Kapittelet avsluttes med en kort oppsummering fra a posteriori analyse, som vi har valgt å ikke analysere i kapittel 5. Der presenteres og drøftes resultatene gjennom en sammenligning av a priori og a posteriori analyser. Hvert funn etterfølges av en drøfting. Kapittelet avsluttes med en oppsummering av både de hindrende og muliggjørende faktorene. I siste kapittel ses det på hvordan lærerspesialistrollen kan bruke TDS til å løfte profesjonsfellesskap i skolen, og utvikle skolen som en lærende organisasjon.

# 2 Teori

## 2.1 TDS - Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk

Det teoretiske rammeverket for denne masteroppgaven er teorien for didaktiske situasjoner i matematikk (TDS). Utviklingen av teorien startet i Frankrike under ledelse av Guy Brousseau på slutten av 1960 tallet. TDS er et teoretisk rammeverk for å analysere matematikkundervisning og matematikklæring, som også inneholder en metodologi for å designe undervisning. I TDS er det matematikken og dens epistemologi som står i sentrum (Artigue, Haspekian, & Corblin-Lenfant, 2014), det vil si dens natur, opprinnelse, funksjon og gyldighet. En forutsetning for å bruke TDS som et analytisk verktøy er at det i undervisningssituasjonen foreligger en intensjon om å undervise noen en bestemt matematisk kunnskap (Strømskag, 2020b). Figur 1 viser prinsippet for TDS. Det vil si at for en *spesifikk matematisk kunnskap*, som Artigue (2015) definerer som *målkunnskapen*, designes en *situasjon* som inneholder et *problem(er).* Problemet designes slik at målkunnskapen er den *optimale eller anbefalte løsningen(er*). Slike situasjoner, som beskrives i figur 1, kalles i TDS for *didaktiske situasjoner* i matematikk (Strømskag, 2020b).




**Figur 1: Prinsippet for TDS**

I Brosseaus modell for didaktiske situasjoner finnes det adidaktiske faser som han kaller adidaktiske situasjoner. Sentralt i adidaktiske situasjoner er at elevene konstruerer kunnskap gjennom å løse problemet, uten at elevene oppdager lærerens intensjon med oppgaven. Læreren bør ikke påvirke elevene med veiledning underveis i arbeidet (Artigue et al., 2014).

Rammeverket egner seg når elevene skal lære noe spesifikt, og avhenger av en epistemologisk antakelse om at denne spesifikke målkunnskapen kan representeres via situasjonen som designes (Strømskag, 2017a). Lærerens oppgave er ideelt sett å designe didaktiske situasjoner der det foreligger en intensjon om å undervise en spesifikk matematisk kunnskap. De faktorene som påvirker elevens læring og målkunnskapen, omtales som *miljøet* (fig. 1). Miljøet kan være konkretiseringsmateriell, tidligere kunnskap, oppgavetekst, regler for å operere i situasjonen og medelever (Artigue et al., 2014). Det er altså et skapt miljø hvor elevene skal tilegne seg kunnskapen ved å operere på miljøet. Et velegnet miljø fungerer som en antagonist, det vil si en motpart eller motstand for elevene i arbeidet med problemet. En sentral egenskap til miljøet er at det opptrer som noe som gir *objektiv feedback* (Strømskag, 2020b). Feedback kan forstås som miljøets mulighet til å gi «motstand». Objektiv betyr i denne sammen-hengen at læreren ikke er delaktig i feedbacken som gis. De elementene i miljøet som fungerer som en motstand, kalles *adidaktisk potensial*. Et adidaktisk potensial innebærer dermed muligheten elevene har for å validere egne resultater i en oppgave. Miljøets adidaktiske potensial er en forutsetning for at læring skal skje. Et adekvat miljø har et adidaktisk potensial, som betyr at elevene får feedback slik at de kan avgjøre om deres strategi som følge av sin interaksjon med miljøet, fungerer eller ikke (Strømskag, 2017a).

De *didaktiske variablene* er de variablene som har innvirkning på dynamikken og læringsutbyttet i en didaktisk situasjon (Strømskag, 2020b). Det er lærer som har kontroll over disse. De er blant annet lærerens mulighet til å endre oppgave gjennom for eksempel å gjøre den lettere eller vanskeligere for å stimulere elevene til å skifte strategi. De didaktiske variablene må være en del av den designede situasjonen slik at endringer kan skje i takt med elevenes utvikling i arbeidet med oppgaven.

En *didaktisk kontrakt* henspiller på interaksjonen mellom læreren og elevene i den didaktiske situasjonen. Gjennom disse reglene, både implisitte og eksplisitte, dannes det gjensidige forventninger og forpliktelser til samspillet i undervisningssituasjonen. De implisitte reglene er av en generell karakter knyttet til undervisning og læring i matema-tikk. De eksplisitte reglene er knyttet til den spesifikke målkunnskapen (Strømskag, 2020b). Brousseau (1997) poengterer at en didaktisk kontrakt kan gjenkjennes gjennom å se på lærer og elev som to forskjellige parter i undervisningen med ulike roller. Disse rollene har forskjellige forventninger til hverandre, men er avhengige av hverandre for at undervisningen skal kunne gjennomføres. Dette er altså ikke en synlig kontrakt, men det er regler, forventninger, holdninger og oppfattelser i interaksjonen mellom læreren og elevene.

Begrepene didaktisk situasjon, adidaktisk situasjon, miljø, adidaktisk potensial og didaktisk kontrakt er grunnleggende elementer i TDS.

En *didaktisk situasjon* i matematikk består av fem ulike faser, to *didaktiske* og tre *adidaktiske*. Brousseau (1997) skriver at læreren har to hovedoppgaver utover det å lede utviklingen av den adidaktiske situasjonen (aksjon-, formulering- og valideringsfasen), nemlig devolusjonen og den avsluttende fasen, institusjonaliseringen.

Figur 2 viser en ønsket modell av en ideell undervisningssituasjon i TDS. I første fase, devolusjonen, overdrar (devoluerer) læreren den adidaktiske situasjonen. Så etterfølges det av tre adidaktiske faser. Elevene tar i disse fasene ideelt sett ansvaret for det matematiske problemet. De tre adidaktiske fasene utgjør en adidaktisk situasjon. Avslutningsvis institusjonaliserer læreren aktiviteten fra de adidaktiske fasene. Hvis nødvendig, vil det bli gjort reguleringer og tilpasninger underveis.

| **Faser i didaktisk situasjon** | | **Lærerens rolle** | **Elevenes rolle** |
|---|---|---|---|
| *Devolusjon* | Didaktisk fase | Lærer overleverer problemet og miljøet til elevene | Elevene skal overta problemet |
| ⇩ | | | |
| *Aksjon* | Adidaktisk fase | Rollen vil være som observatør | Konstruerer kunnskapen<br>Eier prosessen |
| ⇩ | | | |
| *Formulering* | Adidaktisk fase | Læreren gjør de ulike løsningene synlige for klassen | Forklarer sine strategier, hypoteser eller resultater |
| ⇩ | | | |
| *Validering* | Adidaktisk fase | Lede og strukturere en slags vitenskapelig debatt | Hypoteser underbygges, bevises eller motbevises med argumenter |
| ⇩ | | | |
| *Institusjonalisering* | Didaktisk fase | Lærer endrer den oppnådde kunnskapens status til en referansekunnskap for framtidig bruk | Kunnskapen endres til referansekunnskap for elevene |

**Figur 2: Modell av en undervisningssituasjon i TDS**

*Devolusjonen* er fasen der elevene introduseres for problemet og situasjonen, reglene og den didaktiske kontrakten (Strømskag, 2017a). Et viktig mål med devolusjonen er at den didaktiske kontrakten og miljøet forhandles og etableres. Lærerens oppgave er å overdra et miljø og problemet til elevene for den adidaktiske situasjonen. Mellom de to didaktiske fasene vil det ideelt sett være tre adidiaktiske faser; aksjons-, formulerings- og valideringsfasen.

I *aksjonsfasen* trekker læreren seg mer tilbake og observerer elevenes utforskning av miljøet. I aksjonsfasen får elevene ansvar for å konstruere kunnskapen, og det er elevene som eier prosessen i å finne løsning på problemet. Prosessen er basert på eksperimenter ved prøving og feiling på det materielle miljøet, uten noen formell beskrivelse av hva handlingene innebærer (Strømskag, 2020b). Strømskag (2017b) beskriver denne fasen med at elevene engasjerer seg i situasjonen uten innblanding av læreren. Hun fremholder to viktige prinsipper som beskriver elevperspektivet i TDS. Elevene må oppleve at oppgaven har en hensikt hvor de anvender målkunnskapen. Det andre prinsippet baserer seg på at elevenes engasjement påvirkes av miljøet snarere enn lærerens betydning. Elevene skal gis mulighet til selv å kunne handle, formulere og validere sine løsninger på den gitte oppgaven.

På bakgrunn av det elevene har gjort i aksjonsfasen, skal de i *formuleringsfasen* forklare sine strategier, hypoteser eller resultater for medelever, som igjen gjør at andre elever kan operere direkte på det materielle miljøet med samme strategi. De kan potensielt løse problemet ved å følge andres løsningsforslag. Formuleringsfasen kan både være didaktisk og adidaktisk, avhengig av hvordan elevene klarer den matematiske kommunikasjonen på egenhånd. Lærerens rolle i denne fasen er å få oversikt over de ulike strategiene som har oppstått, og å gjøre de ulike formuleringene i klasserommet synlig for alle. Enkelte ganger kan problemstillingen være av en slik karakter at lærerens støtte er nødvendig for å lede samtalen i riktig retning. Spørsmålene som da stilles, bør lede til åpne diskusjoner om elevenes foreløpige hypoteser og løsningsforslag. For å kunne vurdere formuleringenes gyldighet, skal elevene argumentere for gyldigheten av sin løsning, og det gjøres i *valideringsfasen.* Hypotesene til elevene underbygges, bevises eller motbevises med argumenter. Ideelt sett er både formuleringsfasen og valideringsfasen adidaktiske faser. Likevel kan lærerens rolle bli å få frem hypoteser og begrunnelser, og da leder lærer helklassesamtalen. I slike tilfeller skjer valideringen i en didaktisk fase, og ikke i en adidaktisk fase, som modellen i figur 2 viser (Strømskag, 2020b).

*Institusjonaliseringen* er den avsluttende fasen der læreren sørger for at den tilsiktede målkunnskapen generaliseres slik at den også kan brukes utenfor situasjonen den er utviklet (Strømskag Måsøval, 2011). I denne didaktiske fasen vil lærer alene, eller sammen med elevene, oppsummere, presentere og formulere målkunnskapen. Læreren skal gi elevene oversikt over kunnskapens plass, verdi og framtid. Det vil si at forklaringer, matematiske definisjoner, matematiske lover med mer presenteres. Kunnskapen endres til referansekunnskap for elevene.

Den ideelle undervisningssituasjonen er slik den presenteres i figur 2. Det er viktig å understreke at aksjon-, formulering- og valideringsfasen nødvendigvis ikke alltid opptrer i rekkefølge. Hvis det for eksempel viser seg at elevenes løsning i valideringsfasen ikke er tilfredsstillende, kan de bevege seg tilbake for å rydde opp i misforståelser. Læreren har ansvaret for at kunnskapen som elevene skal bruke i samspillet med miljøet i den adidaktiske situasjonen, utvikler seg fra en implisitt løsning til å bli en eksplisitt løsning (Strømskag, 2020b). Det kan bli behov for endringer underveis i den adidaktiske situasjonen. De endringene som gjøres underveis i miljøet, kalles for *reguleringer.* Det kan foregå på to måter. Den ene skjer ved at lærer henviser og refererer til den etablerte didaktiske kontrakten. Reguleringene skjer da ved hjelp av den didaktiske kontrakten. Den andre måten lærer kan endre miljøet på, er gjennom informasjonshopp. Da gir læreren tilleggsinformasjon eller ekstra betingelser underveis i den adidaktiske situasjonen.

*Didaktisk ingeniørvirksomhet* er en forskningsmetodologi som benyttes til didaktisk design i TDS, og er strukturert i fire faser: foreløpige analyser; design og a priori; realisering, observasjon og datainnsamling; a posteriori analyse og validering (Artigue, 2015). Studiens metodologi presenteres videre i kapittel 3.1.

# 3 Metode

Vi har i denne studien undersøkt hvilke faktorer som muliggjør og hindrer elevene i å nå en spesifikk matematisk målkunnskap. For å kunne svare på forskningsspørsmålet, har vi observert elever i arbeid med en egendesignet didaktisk situasjon. I dette kapittelet presenteres først studiens metodologi (forskningsdesign), som består av 4 faser. Didaktisk ingeniørvirksomhet er en forskningsmetodologi som er basert på kvalitative analyser. Metodologien bygger på Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk som beskrives i kapittel 3.2. Deretter omtales a priori (føranalyse) og a posteriori analyse (etteranalyse). Videre gis det en kort presentasjon av den designede situasjonen, og våre refleksjoner og erfaringer fra pilotprosjektet. Forskningsspørsmålet la føringer for en kvalitativ forskningsmetode. Utvalg av deltagere omtales i kapittel 3.6. Metode for innsamling av data og metode for analyse er en del av studiens metodologi og presenteres i henholdsvis kapittel 3.7 og 3.8. Avslutningsvis drøftes etiske betraktninger, vår rolle i studien, samt studiens troverdighet.

## 3.1 Studiens metodologi

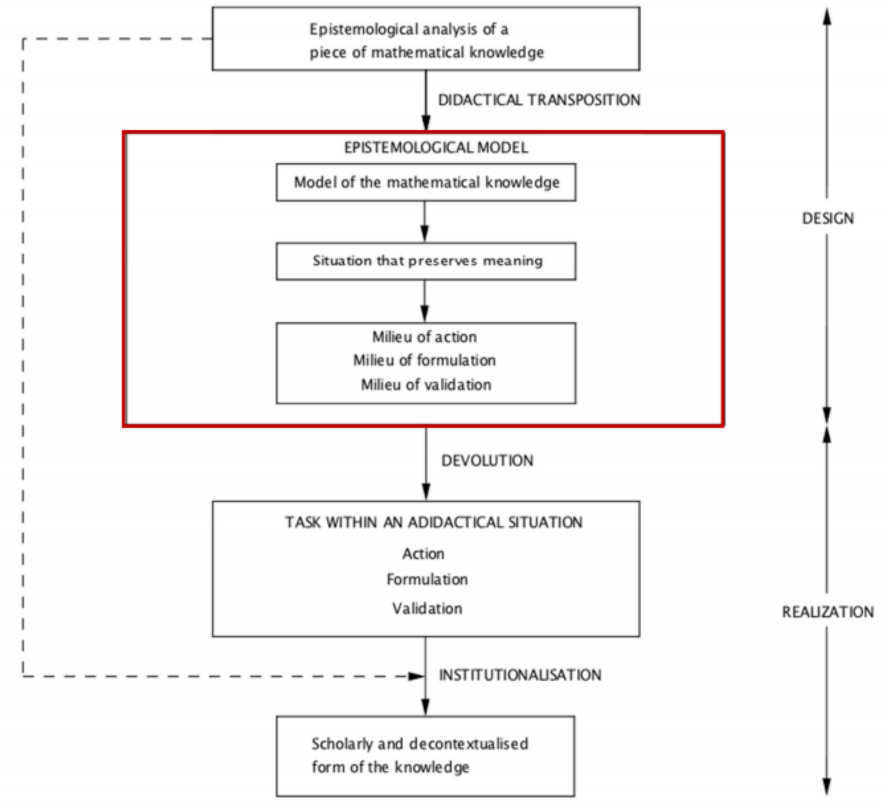
Vi har designet en didaktisk situasjon ved hjelp av didaktisk ingeniørvirksomhet. Didaktisk ingeniørvirksomhet er en forskningsmetodologi som er utviklet innenfor TDS for å designe og analysere didaktiske situasjoner (Strømskag, 2020b). Hensikten og formålet med studien har vært å undersøke hvilke faktorer som hindrer og muliggjør elevene i å nå målkunnskapen gjennom en egendesignet didaktisk situasjon. Metodologien som er benyttet, har karakteristiske trekk fra didaktisk ingeniørvirksomhet som Artigue (2015) presenterer i sin artikkel. Oppgavedesignet er inspirert av Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk, som presenteres i kapittel 3.2. I tillegg til Strømskag (2017b) sin modell utvidet vi metodologien til et forskningsdesign. Figur 3 viser de fire fasene i denne studiens metodologi. I den første fasen foregår den forberedende analysen; epistemologisk-, didaktisk- og a priori analyse. I likhet med Strømskag (2017b) og Artigue (2015) valgte vi å inkludere realisering, observasjon og datainnsamling (fig. 3). Vi observerte elevene i arbeidet med å løse problemet. Hoved-kildene i datamaterialet er lydopptak og elevarbeid. I tillegg ligger egne observasjons-notater og refleksjonsnotatet til grunn for studien. I neste fase gjennomførte vi en a posteriori analyse der datamaterialet ble systematisert i kategorier og sammenlignet med a priori analyse. Validiteten til den designede situasjonen er i fase 4 testet gjennom en sammenligning av a priori og a posteriori analyser.

| **FASE 1** | **FASE 2** | **FASE 3** | **FASE 4** |
|---|---|---|---|
| Forberedende analyse | Realisering<br>Observasjon og annen datainnsamling | A posteriori analyse | Validering<br>Sammenligning av a priori og a posteriori analyser |

**Figur 3: De fire fasene i studiens metodologi**

## 3.2 Instruksjonsdesign i matematikk

Studiens oppgavedesign er inspirert av Strømskag (2017b) sin modell for instruksjons-design i matematikk (figur 4). Modellen baserer seg på design av en didaktisk situasjon hvor utgangspunktet er en spesifikk matematisk kunnskap, samt realisering av situasjonen. TDS er brukt for å forstå hvilke aspekter ved undervisningssituasjonen som påvirker elevenes muligheter til å oppnå målkunnskapen. Videre forklares de ulike fasene i modellen, der steg en og to omhandler designet, og de to siste om realiseringen av situasjonen.




Strømskag, H. (2017). A methodology for instructional design in mathematics—with the generic and epistemic student at the centre. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 909–921.

**Figur 4: Modell for instruksjonsdesign i matematikk**

Første steg i instruksjonsdesign i matematikk (fig. 4) er å gjennomføre en *epistemologisk analyse* av den *matematiske målkunnskapen* (Strømskag, 2017b). Det vil medføre en analyse av selve *målkunnskapen* og en *didaktisk analyse.* I arbeidet med analysen av målkunnskapen er hensikten å finne mulige epistemologiske hindringer. Slike hindringer kan være kunnskap som elevene har som fungerer i enkelte kontekster, men som i andre sammenhenger kan skape hindringer i å nå målkunnskapen. Det kan også være tidligere tilegnet kunnskap som ikke er sann, eller utilstrekkelig.  I tillegg til å se på hindringer, er det viktig med en bevisstgjøring av hvilke vilkår som må oppfylles for at elevene skal nå den tiltenkte målkunnskapen. Noen sentrale spørsmål i et slikt analysearbeid er: Hvor kommer kunnskapen fra? Hva er formålet? Hvilken plass har den i skolematematikken? Hvorfor skal elevene lære den? Hvilke spørsmål ga opphav til kunnskapen? Hvilke vilkår vil føre til at elevene må ta i bruk målkunnskapen vi har satt? I den didaktiske analysen sees det på hva forskning sier om det matematiske emnet målkunnskapen inneholder. Målet er å få innsikt i hva forskningen vektlegger når det gjelder undervisning og læring av den matematikken det skal handle om.

Det neste steget (fig. 4) er å utvikle en *epistemologisk modell* på grunnlag av den epistemologiske analysen. Den deles inn i tre komponenter, der den første er en *modell av målkunnskapen*, potensielt en ikonisk representasjon (billedlig fremstilling). Del to handler om å designe en *situasjon* som er meningsfull, og som gjør bruk av mål-kunnskapen. Den tredje komponenten er *miljø* for aksjon, formulering og validering. Den epistemologiske modellen er basisen for lærerens devolusjon (Strømskag, 2017b). Del to og tre danner en modell av elevenes tilsiktede læring. Den er utviklet på grunnlag av de vilkårene som må være oppfylt for at situasjonen skal implementere den definerte kunnskapen. Videre er den designet slik at responsen elevene produserer, gradvis blir mer eksplisitt og matematisk. Responsen fra elevene institusjonaliseres til å bli referansekunnskap.

Steg tre, i modellen for instruksjonsdesign, omhandler interaksjonen mellom *miljø for aksjon, formulering og validering* i den adidaktiske situasjonen. I miljø for aksjon opererer elevene i et materielt miljø der det konstrueres en implisitt løsning på problemet. Dernest opererer elevene indirekte på miljøet ved å formulere en eksplisitt løsning. Hensikten er å få andre elever til å operere direkte på det materielle miljøet, og potensielt løse problemet ved å bruke den presenterte løsningen. I valideringsfasen begrunner elevene sine strategier. Miljøet utvikles dermed med mål om at elevens kunnskap gradvis utvikles til mer eksplisitte matematiske former (Svinvik, 2018).

*Institusjonaliseringen* er siste steget i modellen. Løsningen på oppgaven skal institusjonaliseres fra en skolekontekst til dekontekstualisert kunnskap. Det vil si at kunnskapen løsrives fra den adidaktiske situasjonen den har oppstått i. Ifølge Strømskag (2017b) er dette en didaktisk fase som er knyttet til den epistemologiske analysen. Læreren vil alene eller sammen med elevene oppsummere, presisere, definere og formulere målkunnskapen.

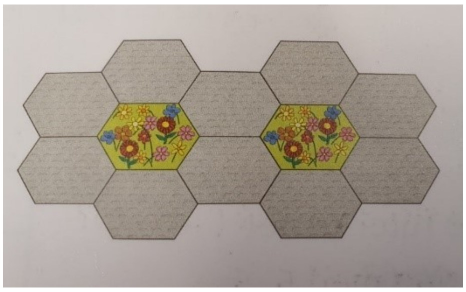
## 3.3 A priori og a posteriori analyse

A priori analyse bygger på den epistemologiske og didaktiske analysen. Den er epistemologisk siden det undersøkes hvilke betingelser som er spesifikke for under-visningen av et bestemt matematisk område. Intensjonen om at elevene skal lære målkunnskapen, hypoteser og antakelser om miljøet, kunnskapen og læringen er grunnlaget for a priori analyse (Svinvik, 2018). Artigue (2015) og Strømskag (2017b) understreker i deres forskning at a priori analyse tar utgangspunkt i en generisk og epistemisk elev. Generisk elev betyr at eleven er en representant for en generell elev, og epistemisk betyr at analysen er sentrert om nødvendige forkunnskaper hos den generiske eleven og dens deltagelse (Strømskag, 2020b). Vi har belyst hva de nødvendige betingelsene er for at en situasjon skal implementere målkunnskapen, og hvordan situasjonen kan designes. Videre har vi sett på hvordan utviklingen av mål-kunnskapen bør håndteres i den designede undervisningssituasjonen. I a priori analyse omtales det hvilke beslutninger som er tatt i arbeidet med å designe situasjonen, og hvilke variabler som kan påvirke elevene i arbeidet mot målkunnskapen. Didaktiske variabler representerer de variabler som potensielt kan påvirke elevenes læringsutbytte og som læreren kan kontrollere (Artigue, 2015).

A posteriori analyse bygger på hva som skjedde under realiseringen i klasserommet. Observasjoner fra de didaktiske og adidaktiske fasene og elevarbeid fra de adidaktiske fasene er grunnlaget for a posteriori analyse. Artigue (2015) hevder målet med a priori analyse ikke er å forutse hvordan hver enkelt elev vil oppføre seg, men hva situasjonen kan tilby når det gjelder læring. Siden a posteriori analyse bygger på hva som skjedde under realiseringen i klasserommet med tolv 6. trinns elever, vil det derfor være naturlig at det oppstår kontraster mellom a priori og a posteriori analyse. Artigue (2015) understreker at hypotesene fra a priori analyse blir satt på prøve. Videre stiller hun spørsmålene: Hvordan samsvarer datamaterialet med a priori analyse? Skjedde det noe uforutsett, og hvordan kan det tolkes? Når a priori og a posteriori analyser sammenlignes, ses det på sammenhengen mellom intensjonen og resultatet av den designede situasjonen. I studien undersøkes validiteten til den designede situasjonen gjennom en sammenligning av a priori og a posteriori analyse, som presenteres i kapittel 5.

## 3.4 Kort presentasjon av den designede situasjonen

Da situasjonen ble designet, valgte vi å ta utgangspunkt i et figurmønster fra Multi 5B s. 105 (Alseth, Nordberg, Røsseland, & Kirkegaard, 2006). Den ordinære oppgaven ligger som vedlegg 1. Vi designet en situasjon hvor elevene skulle pynte skolegården med blomsterbed. Situasjonen anså vi som aktuell og realistisk for elevene siden skolen var ferdigstilt høsten 2020. «Blomsterbed» oppgaven handler om sekskantede blomsterbed som skal settes inntil hverandre, og rundt hvert bed skal det dekoreres med sekskantede steinheller, som figur 5 viser.



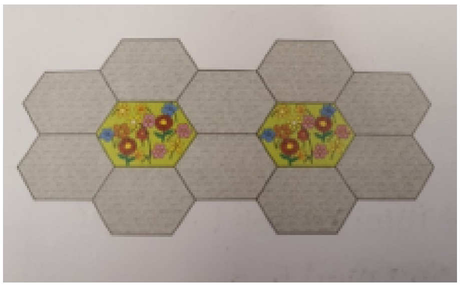
**Figur 5: Figurmønsteret i oppgavedesignet**

Elevene skal finne hvor mange heller det er behov for etter hvert som antall blomsterbed i følgen øker. Målet med oppgaven er at elevene skal kunne lage et generelt uttrykk for utviklingen av figurmønsteret. For å uttrykke det generelle, kan elevene anvende naturlig språk eller symbolspråk for å representere et hvilket som helst figurnummer i følgen. Elevene studerer det økende mønsteret ved først å finne antall steinheller for 1-5 blomsterbed, så 10, 20, og deretter 100, for så til slutt å komme fram til en generell beskrivelse av figurmønsteret. Vi la til rette for at elevene skulle operere på det materielle miljøet gjennom bruk av konkretiseringsmateriell, skriftlige besvarelser og samarbeid. Oppgavearket elevene fikk utdelt, ligger som vedlegg 2. Den designede situasjonen blir videre beskrevet i kapittel 4.3. I pilotprosjektet ble den designede situasjonen utprøvd, og de didaktiske variablene ble nøye diskutert og drøftet før selve gjennomføringen av studien.

## 3.5 Pilotprosjektet

Den første datainnsamlingen var et pilotprosjekt på en skoletime. Tirsdag 13. oktober 2020 gjennomførte vi pilotprosjektet med ni 6. klassinger. Deltakelsen var frivillig, og matematikklæreren informerte oss om at elevene har lite erfaring med figurmønsteroppgaver. Hensikten med pilotprosjektet var å få innblikk i vanskelighetsnivået ved oppgavene, se hvordan den designede situasjonen fungerte, og om tidsrammen var realistisk. Figur 6 viser oppgaven i pilotprosjektet. Vi gjorde oss flere observasjoner og erfaringer som vi tok med i det videre arbeidet. Datamaterialet fra pilotprosjektet er egne observasjonsnotater og elevarbeid.

**PYNTE SKOLEGÅRDEN**



**Oppgave 1a:** Hvor mange steinheller trenger dere til 1, 2, 3, 4 og 5 blomsterbed?
**Oppgave 1b:** Hente heller hos Steinheller AS. Husk: Hente akkurat det dere trenger, ellers bot.
**Oppgave 2:** Hvor mange steinheller trenger dere til 10 blomsterbed?
**Oppgave 3:** Skriv en forklaring til en annen gruppe som forteller hvordan de raskt kan finne antall steinheller til 15 blomsterbed.
**Oppgave 4:** Hvor mange steinheller trenger dere til 100 blomsterbed?
**Oppgave 5:** Skriv et brev til rektor hvor dere forteller hvor mange steinheller han trenger til et hvilket som helst blomsterbed.

**Figur 6: Oppgaven fra pilotprosjektet**

Et viktig funn fra pilotprosjektet er nødvendigheten av en tydelig og strukturert devolusjon. Den didaktiske kontrakten som ble etablert i devolusjonen viste seg å være mangelfull. Et resultat av uklare forventninger førte til flere reguleringer av den didaktiske kontrakten. På bakgrunn av denne erfaringen valgte vi i det videre arbeidet å gi elevene et oppgaveark hvor spørsmålene er nøye beskrevet, istedenfor på Smartboard som ble gjort i pilotprosjektet. Et viktig vilkår i den didaktiske kontrakten ble derfor at lærer eksplisitt forventet at elevene i fellesskap skulle lese oppgavene og bli enige om hvordan de skal løse problemet. Som en del av den didaktiske kontrakten, blant deltagerne i pilotprosjektet, virket det som om det var en forventning at feilsvar skulle viskes bort for å opprettholde god orden i kladdeboka. I analysearbeidet er vi avhengig av å få frem elevenes strategier og resonnement i arbeidet med problemet. Å få innblikk i elevers feilsvar, gir oss større mulighet til å se og forstå sammenhengen mellom deres strategier og resonnement. Vi ønsker derfor at deltagerne i studien ikke skal bruke viskelær. I den didaktiske kontrakten må det dermed ligge en eksplisitt forventing om at viskelær ikke skal benyttes. Dersom elevene ønsker å endre strategi og svar, må de bruke en rød blyant rundt det de ønsker å endre.

I aksjonsfasen undersøkte elevene hvor mange steinheller som trengs til 1, 2, 3, 4 og 5 blomsterbed. Da elevene hadde blitt enige om hvor mange steinheller de trengte for 5 blomsterbed, hentet de antall steinheller hos en tenkt lokal steinforhandler. Da elevene satte sammen blomsterbedene, ga konkretiseringsmateriellet objektiv feedback. Slik kunne elevene vurdere om de var på rett vei, eller om de måtte endre strategi. I arbeidet videre valgte vi å beholde konkretiseringsmateriellet da vi erfarte at miljøet ga elevene objektiv feedback.

Vi hadde en hypotese om at de sekskantede bedene og hellene muligens kunne bli et hinder for elevene fordi det kan være utfordrende å tegne sekskantede figurer. Elevene i pilotprosjektet representerte de sekskantede formene ved å bruke sirkelformede stein-heller og rektangulære blomsterbed. Representasjonen ga elevene mulighet til å tegne og anvende en tellestrategi. På bakgrunn av erfaringene fra pilotprosjektet, valgte vi i det endelige oppgavedesignet å beholde de sekskantede formene.

I oppgave 2 (fig. 6) skulle elevene finne hvor mange steinheller de trenger til 10 blomsterbed. Å gå fra 5 til 10 bed ble valgt for å avdekke om elevene brukte en proporsjonalitetstenkning i en ikke-proporsjonal sammenheng. Vi antok at noen av elevene ville benytte en hel-objekt strategi (Lannin, 2005), uten justering for feiltelling. Gjennom feedback fra miljøet, ved å sette sammen 10 blomsterbed, ønsket vi at elevene skulle erfare at de ikke kan doble antall heller når de går fra 5 til 10 blomsterbed. Vi opplevde at elevene fikk tilstrekkelig feedback fra miljøet slik at de kunne oppdage at en hel- objekt strategi ikke kunne benyttes. På bakgrunn av denne erfaringen valgte vi å beholde oppgavebeskrivelsen og aktiviteten.

Elevene skrev en forklaring på hvordan de kunne finne antall steinheller til 15 blomster-bed, som de ga til en annen gruppe. Siden elevene hadde erfart at de ikke kunne doble antall steinheller i forrige oppgave, var spørsmålet om elevene ville addere det de hadde funnet på 5 og 10 blomsterbed. I pilotprosjektet erfarte vi at elevene trengte mer trening i hva som skjer ved dobling. For å sikre at elevene har forståelse for hva som skjer ved dobling i denne sammenheng, endret vi oppgave 3 (fig. 6). Istedenfor å skrive en forklaring til 15 blomsterbed, endret vi spørsmålsformuleringen i oppgaven til å gjelde 20 bed.

Vi valgte å endre spørsmålsformuleringen i oppgave 5 da vi så i pilotprosjektet at elevene ble opptatt av å formulere et brev til rektor. Fokuset flyttet seg derfor bort fra matematikken. Vi omformulerte oppgaven slik at elevene skulle skrive en regel istedenfor et brev.

Erfaringene fra pilotprosjektet viste at tidsrammen ble en viktig faktor. Elevene må gis tid i de adidaktiske fasene, tid til å gi hverandre feedback og operere på det materielle miljøet. For at elevene skal få feedback fra miljøet, ble det viktig å legge til rette for at de kunne forklare og prøve andres løsningsforslag, noe som er tidkrevende. Derfor ble undervisningssituasjonens tidsramme økt.

## 3.6 Utvalg av deltagere

Forskningsspørsmålet la føringer for en kvalitativ forskningsmetode. I kvalitativ forskning er målet å studere meninger, handlinger, holdninger, intensjoner og oppførsel i detalj (Cohen, Manion, & Morrison, 2017). Kvalitativ forskingsmetode ga oss muligheter til å studere tolv elevers arbeid med den designede situasjonen, fordi som Cohen et al. (2017) skriver, fokuserer en slik metode på å forstå hvordan og hvorfor mennesker gjør slik de gjør. Vi var ute i forskningsfeltet og gjorde undersøkelser av menneskelige prosesser i deres naturlige omgivelser (Postholm, Jacobsen, & Søbstad, 2018). Det ga oss muligheter til å observere hvilke faktorer som påvirket elevene i interaksjon med miljøet både i de didaktiske og adidaktiske fasene. Antallet deltagere kan derfor ikke være for stort da datainnsamling og databearbeiding er en tidkrevende prosess.

Kvalitativ forskning setter få deltagere i fokus, og forskeren får økt kunnskap innenfor et avgrenset fagområde. Hensikten med denne studien er å undersøke hvilke hindrende og muliggjørende faktorer elevene møter i å nå målkunnskapen i den didaktiske situasjonen. Vi beskriver ikke alle hendelser og faktorer som påvirker læringsprosessen, men går i dybden på noen hindrende og muliggjørende faktorer. Vi valgte derfor å gå i dybden på noen få elevers arbeid ved hjelp av en kvalitativ studie, framfor å forsøke å designe en studie som eventuelt kunne si noe om en større populasjon. Ettersom datainnsamlingen skjer i en liten gruppe elever, er en slik studie kun representativ for seg selv og ikke for hele befolkningen (Cohen et al., 2017).

Valget av deltagere var styrt av tilgjengelighet. Prosjektet ble presentert for ledelsen ved skolen, elever og foresatte. Alle elevene på 6. trinn fikk med seg samtykkeskjemaet (vedlegg 3) hjem. Det var mange elever som takket ja til deltagelse. Det ble gjennomført et tilfeldig utvalg på 12 elever gjennom loddtrekning. De 12 elevene som var til stede under realiseringen i klasserommet, ble delt i 4 treer- grupper. Vi så det som fordelaktig at gruppene ble satt sammen av elever som var trygge på hverandre slik at de i størst mulig grad kunne lykkes med samarbeid, og en aktiv deltagelse av den enkelte. Deltagerne er anonymisert med pseudonymer. Gruppe 1 besto av Erik, Maren og Inger, og gruppe 2 besto av Daniel, Roger og Maya. Gruppe 3 besto av Audun, Iselin og Anna. Sara, Mads og Trine var deltagerne i gruppe 4. Elevarbeid fra alle gruppene ble samlet inn. Alle deltok i de didaktiske fasene hvor lydopptak ble benyttet. Fra de adidaktiske fasene har vi egne observasjonsnotater og lydopptak fra to tilfeldige grupper, gruppe 1 og 2. Datamengden i kvalitativ forskning er ofte stor (Cohen et al., 2017), og begrensningen til to av gruppene, var av hensyn til en overkommelig datamengde i analysen.

## 3.7 Metode for innsamling av data

Formålet med datainnsamlingen var å få materiale som kunne brukes for å besvare forskningsspørsmålet. Før vi kunne starte datainnsamlingen, måtte prosjektet godkjennes av Norsk senter for forskningsdata. Prosjektet ble godkjent av NSD 12.10.20 (vedlegg 4). Hovedkilden i datamaterialet er lydopptak av elevene i arbeid med problemet. I tillegg ligger elevarbeid, egne observasjonsnotater og refleksjonsnotat til grunn for studien. Datamaterialet ble viktig da de ulike hindrende og muliggjørende faktorene skulle gjenkjennes og kategoriseres i analysearbeidet.

Ifølge Cohen et al. (2017) er det flere utfordringer knyttet til planlegging av observasjon som metode for datainnsamlingen. En av utfordringene de skisserer, er hvor deltagende observatøren skal være. Gjennom en deltakende observasjon får forskeren tilgang til førstehåndsinformasjon, og slipper dermed å belage seg på sekundære kilder (Cohen et al., 2017) . I denne studien ble det naturlig og hensiktsmessig å være deltagende observatør. Gjennom deltakende observasjon fikk vi tilgang til førstehåndsinformasjon, som kan gi et mer autentisk datamateriale. Som deltagende observatør er forskeren en del av gruppen som studeres, og alle informanter er klar over at de blir observert av forskeren (Postholm et al., 2018), noe elevene ble informert om før undervisningsøkten startet. Vi var til stede i datainnsamlingsprosessen der vi deltok i aktiviteten gjennom undervisning, observasjon, samtale og spørsmål. En annen utfordring som beskrives av Cohen et al. (2017), er miljøet hvor observasjonene foregår i. De hevder at de fleste observasjoner foretatt av utdanningsforskere, gjøres i naturlige omgivelser, for eksempel i elevenes klasserom. Videre sier de det kan være fordeler med et «laboratoriemiljø», fordi det gir forskeren muligheten til å kontrollere miljøet. I planleggingen av den designede situasjonen kontrollerte vi flere faktorer ved miljøet. Vi avgjorde blant annet hvilket materielt miljø elevene skulle få tilgang til, hvordan de skulle sitte, og hvem som skulle samarbeide med hvem. Ønsket var at undervisningsøkta skulle være trygg for elevene, så observasjonene foregikk i elevenes naturlige omgivelse, klasserommet.

Elevarbeidene ble samlet inn etter undervisningsøkta. Ved å ta inn elevarbeid fra alle gruppene, fikk vi innblikk i hvordan gruppe 3 og 4 hadde resonnert og hvilke strategier de hadde brukt. Etter realiseringen i klasserommet, ble det gjennomført en helklasse-samtale hvor elevene fikk mulighet til å reflektere og evaluere undervisningsøkta.

Fordelen med bruk av lydopptaker er å få detaljert og korrekt gjengivelse av det elevene sier, for deretter å kunne transkribere mest mulig korrekt. Lydopptakeren ga oss datamaterialet fra de didaktiske og adidaktiske fasene. I de didaktiske fasene er det lydopptak fra alle gruppene. I de adidaktiske fasene har vi egne observasjonsnotater og lydopptak fra to av gruppene, gruppe 1 og 2. Bruk av lydopptaker gjorde at vi kunne høre opptaket flere ganger, noe som igjen ga oss mulighet til å bruke tid på å tolke materialet, og forsikre oss om at den tolkninga vi la til grunn, hadde støtte i materialet.

## 3.8 Metode for analyse

Analysearbeidet er inndelt i 6 faser. Figur 7 viser en oversikt over fasene i analyse-prosessen.

| | |
|---|---|
| **Fase 1** | Oversikt over målsetninger fra a priori analyse |
| **Fase 2** | Dataanalysen starter under realiseringen i klasserommet |
| **Fase 3** | Bli kjent med datamaterialet |
| **Fase 4** | Bearbeiding og systematisering av datamaterialet |
| **Fase 5** | Tabell med hoved- og underkategorier |
| **Fase 6** | Validering av a priori og a posteriori analyser |

**Figur 7: Oversikt over de 6 fasene i analyseprosessen**

Ved bruk av TDS gjennomføres det en a priori analyse og en didaktisk analyse. I den første fasen (fig. 7) i analyseprosessen utarbeidet vi en oversikt over målsetninger fra a priori analyse. Oversikten hjalp oss videre i analyseprosessen da datamaterialet skulle bearbeides. Eksempler på målsetninger fra a priori analyse: samarbeidsferdigheter, bruk av hel objekt strategi fra $f_5$ til $f_{10}$, og $f_{10}$ til $f_{20}$, tegne og telle strategi for de lave figur-numrene og feedback fra miljøet.

I følge Postholm (2010) starter analysen med en gang datamaterialet samles inn, og pågår kontinuerlig. I fase 2 (fig. 7) startet vår dataanalyse under realiseringen i klasse-rommet med observasjon og datainnsamling. Under observasjonen noterte vi hva som skjedde og hvordan dette umiddelbart ble forstått. Rett etter gjennomføringen av økta skrev vi i fellesskap et refleksjonsnotat, hvor vi utarbeidet en oversikt over de hindrende og muliggjørende faktorene vi foreløpig hadde observert.

Tidlig i analyseprosessen gjorde vi oss bedre kjent med datamaterialet. Først transkriberte vi lydopptaket, det vil si å skrive ordrett det som blir sagt. Under transkriberingen hørte vi igjennom opptaket flere ganger. Postholm (2010) skriver at det foregår kontinuerlige analyser under transkriberingsarbeidet. Med oversikten over målsetningene og forskningsspørsmålet i bakhodet, noterte vi interessante funn underveis i arbeidet.

I fase 4 (fig. 7) startet bearbeidingen og systematisering av datamaterialet. Vi har samlet inn mye datamateriale; transkribering av lydopptak, elevarbeid og egne observasjons-notater. Da datamaterialet skulle analyseres i sin helhet, var det i starten stort og uoversiktlig. Vi gikk igjennom den innsamlede empirien og diskuterte hvilke svar på forskningsspørsmålet datamaterialet kunne gi. Vi forsøkte å forstå hva empirien betydde for vårt forskningsspørsmål. I analysearbeidet tok vi utgangspunkt i oversikten fra a priori analyse, som ble utarbeidet i fase 1 (fig. 7). På den måten ble datamaterialet redusert siden all innsamlet empiri ikke er relevant for studien.

Ved hjelp av oversikten fra a priori analyse, beskrev og kategoriserte vi faktorer som kunne gi svar på forskningsspørsmålet. Disse hovedkategoriene ble utgangspunkt for koding av datamaterialet. Hver kategori fikk egen fargekode. Vi gikk systematisk igjennom datamaterialet og markerte de ulike kategoriene i forskjellige farger. Fordelen med fargekodene var at de ulike datamaterialene ble sammenliknet. Dette styrket muligheten til å finne typiske og generelle mønstre, og vi kunne se sammenhengen mellom de ulike kildene. Å benytte ulike datakilder kaller Postholm et al. (2018) triangulering. Ved triangulering av data fikk vi en utvidet og bedre forståelse av de hindrende og muliggjørende faktorene. Triangulering av data er et viktig bidrag for å styrke studiens troverdighet. Ulike datainnsamlingsmetoder som gir samme resultat, kan styrke forskerens tiltro til funnene (Cohen et al., 2017). Vi utførte kodingsarbeidet hver for oss, for deretter å sammenligne tolkningsarbeidet. Resultatet av vår koding var betydelig mer enn halvparten likt. Det at kodingsarbeidet ble utført hver for oss, førte til at faktorene vi forsket på, ble studert fra ulike synsvinkler, og at forskningsspørsmålet ble belyst på forskjellige måter. Samtidig ga kodingsarbeidet diskusjoner og drøftinger, som resulterte i en systematisering av datamaterialet. Kategoriene ble utformet på bakgrunn av målsetningene fra a priori analyse og datatrianguleringen. Kategoriseringen ble kvalitetssikret gjennom forskertriangulering (Robson, 2002) der vi i fellesskap vurderte og diskuterte kategoriene.

I analysearbeidet observerte vi at utsagn kunne kodes under flere hovedkategorier. Av den grunn har vi ikke laget en frekvenstabell som viser hvor mange sekvenser som inneholder de ulike hindrende og muliggjørende faktorene. I fase 5 ble datamaterialet systematiserte i en tabell med hoved- og underkategorier. Forventede resultater fra den forberedende analysen ble testet mot innsamlet empiri fra realiseringen i klasserommet. Spørsmål vi stilte oss i a posteriori analyse var; Samsvarer forventet resultat med empirien? Hva er likt, og hva er ulikt? Funnene ble systematisert i kategorier ved hjelp av målsetninger i a prori analyse, altså oversikten vi utarbeidet i fase 1. Under hindrende faktorer utviklet vi én underkategori som omhandler vårt oppgavedesign, og tre som omhandler elevenes interaksjon med miljøet. Under muliggjørende faktorer utviklet vi to underkategorier som omhandler vårt oppgavedesign og lærerens devolusjon, og fire som omhandler elevenes interaksjon med miljøet. I kapittel 5 presenteres og drøftes resultatene. Vi har valgt at hvert funn etterfølges av en drøfting for å heve funnenes lesbarhet. Validiteten av vår didaktiske ingeniørvirksomhet er basert på en sammen-ligning av a priori og a posteriori analyser. Valideringen gjelder relasjonen mellom intensjonen og det faktiske resultatet av det didaktiske designet.

### 3.8.1 Et representativt eksempel på koding av datamaterialet

Vi gikk systematisk igjennom datamaterialet og markerte de ulike kategoriene med forskjellige farger. Nedenfor vises et kort utdrag fra transkriberingen. I eksempelet jobber gruppe 2 i den adidaktiske fasen, aksjonsfasen, hvor de er i gang med å løse problemet. Fargekodene viser at utdrag kan plasseres under flere kategorier. I eksempelet var ikke samarbeid og kommunikasjon, eller feedback et spesielt funn. Vi mener elevenes erfaring med dobling, og elevenes numeriske tilnærming til figur-mønsteret, er et spesielt funn i dette utdraget. Av den grunn ble funnet plassert under «Elevenes forkunnskaper». Utdraget viser at ett utsagn kan plasseres under flere kategorier. I disse tilfellene markerte vi de ulike fargekodene etter sitatet.

Rosa er kodet som en hindrende faktor under kategorien «Samarbeid og kommunikasjon»

Blå er kodet som en hindrende faktor under kategorien «Forkunnskaper, numerisk tilnærming, strategivalg»

Gul er kodet som en muliggjørende faktor under kategorien «Samarbeid og kommunikasjon»

Grønn er kodet som en muliggjørende faktor under kategorien «Feedback fra medelev»

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Roger | Jeg tror det er 44 jeg og, fordi det blir bare … (*blir avbrutt*) |
| 2. | Maya | Her er det 5, ikke sant |
| 3. | Roger | Vi har 5 og neste skal være 10, så da ganger vi det svaret vi har allerede |
| 4. | Maya | Ja, det blir 44 |
| 5. | Daniel | Nei |
| 6. | Maya | Jo |
| 7. | Daniel | Nei, det blir feil. Vent, hør. Husker dere, at den første er 6, men bortover så blir det bare pluss 4 () () |
| 8. | Maya | Ja |
| 9. | Daniel | Så det blir kanskje litt feil. Da blir det bare pluss 4. Skjønner og da blir det |
| 10. | Maya | Vi kan jo bare telle dem her og gjøre det 10 ganger |

Linje 1 er kodet som en hindrende faktor under «Samarbeid og kommunikasjon» siden Roger blir avbrutt når han argumenterer for sitt resonnement. Videre er linje 3 markert blå. Vi mener utsagnet til Roger er en hindrende faktor for progresjon i målkunnskapen. Når han sier: «Vi har fem», viser han til gruppas løsningsforslag for $f_5$. Nå skal gruppa finne $f_{10}$, og da sier Roger at de kan gange det svaret de allerede har fra forrige oppgave for å finne løsningen. Vi tolker det slik at Roger har erfaring med dobling og ønsker å bruke denne strategien for å løse oppgaven.

Daniels utsagn i linje 7 er markert både som en muliggjørende faktor under kategorien «Samarbeid og kommunikasjon» og «Feedback fra medelev.» Han gir feedback til medelever om at deres strategi i dette øyeblikket blir feil. Videre forsøker han å hjelpe de andre deltagerne mot en figurativ tilnærming. Dette gjør han ved å vise til hvordan de dekomponerte figuren i forrige oppgave. Han viser til at det første blomsterbedet hadde 6 steinheller, men videre bortover la de til 4 steinheller. Linje 10 er kodet som en hindrende faktor i å nå målkunnskapen. Maya gir uttrykk for at hun vil telle steinhellene.

Hennes strategi fungerer for de lave figurnumrene, men blir utfordrende når hun skal lage et generelt uttrykk for utviklingen av figurmønsteret.

## 3.9 Etiske betraktninger

I dette kapittelet drøftes vår rolle i studien, før håndtering av lydopptak beskrives. Videre er temaet forskningsetikk og behandling av personopplysninger. Kapittelet avsluttes med en redegjørelse for studiens troverdighet.

### 3.9.1 Vår rolle

I dette forskningsprosjektet har vi hatt ulike roller: vi har fungert som forskere som utvikler og designer en undervisningssituasjon, og som evaluerer opplegget. I TDS har den epistemologiske analysen og a priori analyse en sentral rolle. Derfor fant vi det mest hensiktsmessig at en av oss var læreren som realiserte opplegget i klasserommet, mens den andre var deltagende observatør. Slik sikret vi at læreren i forkant var godt forberedt på de didaktiske fasene, og egen rolle i de adidaktiske fasene. I tillegg ble dette en forholdsvis naturlig kontekst for elevene da realiseringen ble gjennomført med en lærer de kjenner, og har en relasjon til. Vi har evaluert pilotprosjektet, gjennomført a posteriori analyse, analysert datamaterialet og gjort en sammenligning av a priori og a posteriori analyser. Ettersom vi er delaktige i alle fasene ved forskningsprosjektet, har vi forsøkt å være bevisst på egen subjektivitet gjennom hele prosessen. Postholm (2010) sier at forskeren må innse at subjektive oppfatninger påvirker forskningen. Valg av teoretisk rammeverk, egne opplevelser og erfaringer er faktorer som påvirker studien. Utvalg fra datamaterialet er våre subjektive valg ut fra våre tolkninger og hva vi opplever som viktig å få fram. Samtidig er det viktig at våre resultater er åpenbare, og studiens bevis skal være overbevisende (Kvale & Brinkmann, 2009). Vi har forsøkt å etterstrebe en realisme under observasjon, transkripsjon og analyse, for at disse skal være gjengitt på og vurdert mest mulig objektivt.

Ved å delta aktivt i både forskerrollen og lærerrollen, ga det oss erfaring i hvordan TDS kan brukes som et didaktisk verktøy for å utvikle undervisningssituasjoner med en tilsiktet målkunnskap. Denne kunnskapen og erfaringen vil styrke oss som lærerspesialister, og som vi kan ta med oss i det videre utviklingsarbeidet ved skolen. Lærerspesialistrollen og hvordan TDS kan brukes til å løfte profesjonsfellesskap i skolen drøftes i kapittel 6.

### 3.9.2 Håndtering av lydopptak

Lydopptaket ble transkribert i sin helhet. Det var nødvendig med flere gjennomganger av hele opptaket for å sikre korrekt transkribering. Tidvis kunne det være utfordrende å høre hva som ble sagt. Det var ikke behov for analyse av elevenes dialekt, og vi har derfor transkribert i bokmål for bedre lesbarhet. Under transkriberingen ble deltagerne anonymisert. Dette er gjort av hensyn til den enkelte elev og for å ivareta en etisk tilnærming (Cohen et al., 2017). I transkriberingen har vi valgt å ikke nummerere utsagnene. Siden vi tolket at utsagn kunne kodes under flere hovedkategorier, trengte vi ikke å lage en frekvenstabell som viste hvor mange sekvenser vi fant i de ulike kategoriene. Derfor fant vi det mest hensiktsmessig å nummerere de utdragene som fortløpende presenteres i analysen. I transkriberingen har vi brukt få transkripsjons-nøkler. Vi markere opphold med nøkkelen «…». Handlinger som skjer, skrives i parentes og markeres i kursiv.

### 3.9.3 Forskningsetikk og behandling av personopplysninger

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, NESH, har som oppgave å sørge for at de forskningsetiske retningslinjene er gode verktøy for å fremme god og ansvarlig forskning (NESH, 2018). Disse retningslinjene er forpliktende for både individer og institusjoner.

Både lydopptak og skjema for samtykke regnes som personopplysninger og prosjektet ble derfor meldt til NSD, Norsk senter for forskningsdata. Meldeskjemaet med referanse-kode 705118 ble godkjent 12.10.20 (vedlegg 4). Utarbeidelsen av samtykkeskjemaet er basert på prinsippet om fritt informert samtykke som inkluderer forskningsdeltagernes frihet og selvbestemmelse, noe som er i tråd med NESH (2018) sine retningslinjer. Vi informerte foresatte og elevene i informasjonsskrivet om studiens formål, hva det innebar å delta i studien, om frivillig deltagelse, hvordan personopplysninger og informasjon skulle bli behandlet, og om deltagernes rettigheter i forskningsprosjektet (vedlegg 3). Elevene er 11 år, så derfor ble det bedt om samtykke fra foresatte og eleven selv, for å etterkomme retningslinjene til NESH (2018).

Tjora (2017) understreker at dersom det er personopplysninger i datamaterialet, har én et ansvar for at andre ikke har mulighet til å få tak i disse opplysningene. Konfidensialitet er et grunnprinsipp for en etisk forsvarlig forskningspraksis (NESH, 2018). For å ivareta dette prinsippet, ble transkripsjoner anonymisert, kryptert og oppbevart etter NSD sitt krav om lagringssikkerhet. Lydopptakene ble i tillegg lagret på en kryptert ekstern lagringsenhet, som ble oppbevart i et låsbart skap. I tillegg til forskningsetiske retnings-linjer og føringer fra NSD, forholdt vi oss til NTNU sine retningslinjer for behandling av personopplysninger i studentprosjekter (NTNU). NTNU tillater ikke lagring av person-opplysninger på private enheter. Vi har derfor benyttet lydopptaker som er eid av NTNU.

### 3.9.4 Studiens troverdighet

Guba (1981) gir fire kriterier for kvaliteten i en kvalitativ studie. De fire kriteriene er *troverdighet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet*. *Troverdighet* handler om hvordan en kan etablere tillit til at funnene er holdbare og sanne (Guba, 1981). Altså i hvilken grad forskerens gjengivelser og fortolkninger samsvarer med informantens virkelighet. Det handler om å presentere et godt bilde av det studien har til hensikt å undersøke. Vi har derfor valgt å bruke ulik data; lydopptak, observasjon og elevarbeid i a posteriori analyse, noe Postholm et al. (2018) kaller triangulering. Triangulering av datamaterialet er et viktig bidrag for å styrke studiens troverdighet. Ulike datainnsamlingsmetoder som gir samme resultat, kan styrke forskerens tiltro til funnene (Cohen et al., 2017).

En faktor som styrker studiens *bekreftbarhet* er bruken av lydopptaker, siden det ga mulighet til å lytte gjennom opptaket flere ganger. Da kunne nye elementer oppdages som vi ikke hadde observert mens oppgaven ble utført, og vi kunne kritisk gjennomgå de muliggjørende og hindrende faktorene vi hadde funnet. En faktor som kan svekke studiens bekreftbarhet, er at den ene av oss har en tilknytning til informantene. Det kan være med på å påvirke objektiviteten i observasjonen. En utenforstående forsker kan i større grad skape en mer objektiv analyse, fordi den vil være upåvirket av holdninger, tidligere erfaringer og fordommer. Samtidig kan kjennskap til elevene ha gitt dem den nødvendige tryggheten i observasjonssituasjonen, slik at deres arbeid ikke ble påvirket av usikkerhet.

*Pålitlighet* innebærer at forskningsmetoden skal rapporteres så detaljert at andre kan gjennomføre en tilsvarende studie (Guba, 1981). Vi har presentert metoder, vår forståelse av TDS som instruksjonsdesign i matematikk, og vi har gjort rede for innsamlingsprosessen av data for å styrke graden av studiens pålitlighet. Dermed vil det være mulig å gjennomføre en liknende undersøkelse i fremtiden, men den a posteriori analysen vil derimot ikke bli nøyaktig lik fordi deltagere og omgivelser vil forandre seg og dermed kunne påvirke de innsamlede data. Forskeren bør, ifølge Guba (1981), sørge for at metodene som benyttes er konsistente, men samtidig kan det oppstå variasjoner i metoden på grunn av ny og bedre innsikt som gir økt kompetanse, og disse variasjonene er sporbare (trackable).

*Overførbarhet* dreier seg om funnene kan overføres til lignende grupper i samfunnet (Guba, 1981). Denne studien gir kun innblikk i hvilke muliggjørende og hindrende faktorer en gruppe på 12 elever møtte i arbeidet med den designede situasjonen. Rammeverket og analysen gir samtidig muligheter for gjenkjennelse av disse faktorene på et mer generelt plan. Det er denne identifiseringen som gir grunnlag for gjenkjennelse og dermed overførbarhet.

# 4 Forberedende analyser

Den forberedende analysen av målkunnskapen inneholder en epistemologisk analyse og en didaktisk analyse, samt en a priori analyse av den designede situasjonen. Vi har fulgt stegene i Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk, som ble presentert i kapittel 3.2.

## 4.1 Epistemologisk analyse

Resultatene i matematikk fra TIMSS 2015 viser at norske elever har svake prestasjoner i emneområdet algebra (Utdanningsdirektoratet, 2016). Kortrapporten av resultatene fra TIMSS 2019 viser samme tendens. Endringene i Norge fra 2015 til 2019 er så små at de ikke er statistisk signifikante. Konklusjonen er derfor at elever i barneskolen presterer på samme nivå i matematikk som i 2015. På ungdomstrinnet derimot viste det seg at Norge har hatt en signifikant tilbakegang i faget den siste fireårsperioden. Norge skårer fremdeles lavere enn de andre nordiske landene i emnet algebra (Kaarstein, Radišić, Lehre, Nilsen, & Bergem, 2020). En årsaksforklaring har vært at skolen og læreplanene har hatt en for ensidig vekt på anvendt matematikk i dagligsituasjoner, og for liten vekt på ren matematikk (Grønmo, 2013). I arbeidet med ny læreplan har en ønsket retning for faget vært at algebra skal få større plass. Algebra, sammen med tall og tallforståelse, skal være med å bygge grunnmuren i faget (Utdanningsdirektoratet, 2018). I utarbeidelsen av lærerplanen har det vært viktig å legge til rette for at elevene skal tilegne seg algebraisk kunnskap. Trolig er årsaken at samfunnet trenger personer med slik basiskunnskap for å kunne rekruttere flere elever til realfaglige utdanninger og profesjoner.

Det kan være utfordrende og omfattende å forklare hva algebra er, spesielt hvis det forventes en enkel, entydig definisjon (Lins & Kaput, 2004). Algebra omtales ofte i dagligtalen for bokstavregning, eller sagt på en annen måte regning med matematiske symboler og regler for hvordan disse behandles. Forskere er samstemte i at algebra tilhører skolematematikken, og det er større enighet om at dette skal komme til uttrykk på barnetrinnet. Carraher, Schliemann, Brizuela, og Earnest (2006) påpeker at algebra ikke er forbeholdt kun eldre elever. I likhet med Kaput (2008) mener også de at generalisering av aritmetikk, aritmetiske operasjoner som funksjoner og algebraisk notasjon er overkommelig, og bør derfor være tilgjengelig for yngre barn. En slik tankegang er synlig i dagens fagplaner for grunnskolen i matematikk. I fagplanen under kjerneelementer for matematikk i grunnskolen omtales algebra slik; «Algebra handlar om å utforske strukturar, mønster og relasjonar og er ein viktig føresetnad for at elevane skal kunne generalisere og modellere i matematikk.» (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Algebra sees her på som en måte å nærme seg matematikkfaget på som er mulig ikke bare på mellomtrinnet, men også i småskolen. Algebra i grunnskolen betyr altså å jobbe med struktur, mønster og relasjoner. Elevene skal arbeide med algebraisk tenkemåter som innebærer å se algebra som generalisering av tallregning, om hvordan det kan brukes til å finne ukjente størrelser og å uttrykke sammenhenger mellom størrelser (Utdanningsdirektoratet, 2018).

Kaput (2008) har i sin forskning på tidlig algebra jobbet med å systematisere algebra og algebraisk tenkning etter generelle tilnærmingsmåter. Til slutt satt han igjen med to overordnede aspekter (A, B) med ytterligere tre grener.
(A) Algebra som systematisk å symbolisere generaliseringer av regelmessighet og betingelser.

(B) Algebra som syntaktisk ledet resonnering og handlinger på generaliseringer uttrykt i konvensjonelle symbolsystemer.

Kjerneaspektene A og B er nedfelt i de tre underliggende grenene.

1. Algebra som studien av strukturer og systemer hentet ut fra beregninger og relasjoner, for eksempel algebra som generalisert aritmetikk og i kvantitativ tenkning.
2. Algebra som studien av funksjoner, relasjoner og samvariasjoner.
3. Algebra som anvendelsen av en samling av modellerende språk, både innenfor og utenfor matematikken. (Kaput, 2008) (vår oversettelse)

De overordnede aspektene omtaler algebra som noe vi stifter bekjentskap med som en del av kulturarven vår i form av å registrere systemer og mønstre på en matematisk måte (A). Denne grenen av matematikken har sitt eget språk, symbolspråket. I det andre aspektet handler algebra om tanker, resonnementer, refleksjoner og arbeidsmåter (B). Kaput (2008) sier at aspekt B typisk er tenkt og utvikles senere enn aspekt A. Det begrunnes med at én er avhengig av å vite hva de lovlige kombinasjonene av symboler er og hvordan de forholder seg til hverandre når regelbaserte handlinger utføres på symboler.

Første grenen til Kaput (2008), *generalisering av strukturer og systemer*, tar utgangs-punkt i aritmetikken. Aritmetikk handler ikke kun om regning med tall. Det er også en inngangsport til algebraisk tenkning gjennom å oppdage strukturer, formulere hypoteser om egenskaper som lar seg generalisere, for så å forsøke og bevise eller motbevise disse hypotesene (Solem et al., 2017). Algebra som *studien av funksjoner, relasjoner og samvariasjon* er Kaputs andre gren i algebraisk tenkning. Lannin (2005) påpeker i sin forskning at elevenes ferdigheter i algebraisk tenkning kan utvikles ved å bruke mønsteraktiviteter, som utforsker funksjonsforhold. Elevene bruker det de vet fra før om aritmetikk til å utvikle algebraiske ideer, begreper, prosesser og matematisk kunnskap. I den tredje grenen innenfor algebra skriver Kaput om en *samling av språk* som kan brukes til å modellere en situasjon. Dette innbefatter aritmetiske problemer som krever bruk av algebra for å kunne løses, som regel i form av en likning. Modellering inkluderer i tillegg det å generalisere og uttrykke mønstre og regulariteter i situasjoner. Disse tre grenene viser at algebra er en integrert del av all matematikk og bør være en sentral del av undervisningen i skolen. Algebra er altså ikke et isolert fagområde, men heller en måte å tenke og løse problemer på som starter på barnetrinnet og varer hele skoleløpet (Kaput, 2008). Det handler derfor ikke om når algebra skal innføres for elevene, men mer om hva, hvordan og hvorfor.

### 4.1.2 Tidlig algebra

I de senere årene har det vært en del forskning på det som omtales som tidlig algebra. Lins og Kaput (2004) beskriver to aktuelle forståelser av hva tidlig algebra er. Den første, er den allmenne forståelsen av tidlig algebra som referer til elevenes første møte med algebra, tidligst i 12 – 13 årsalderen. En annen nyere forståelse av begrepet, er den introduksjonen elever får av algebraisk tenkemåte i et langt tidligere alderstrinn enn hva som har vært tradisjon. Denne siste beskrivelsen har fått anerkjennelse i det matematikkdidaktiske miljøet de siste årene, fordi man etter hvert har begynt å innse at yngre barn er i stand til å få til langt mer enn det man tidligere har antatt (Lins & Kaput, 2004).

Tanken bak tidlig algebra er at elevene skal trenes i å se etter regelmessigheter, relasjoner og egenskaper. Carraher, Schliemann og Schwartz (2008) skriver at tidlig algebra vil kreve en annen tilnærming enn tradisjonell algebra. Blant annet fremholder de at algebraisk notasjon ikke er den eneste måten å uttrykke algebraiske ideer og relasjoner. De hevder at yngre barn kan arbeide med å uttrykke algebraiske ideer og relasjoner gjennom deres eget språk og representasjonssystem. Gjennom dette arbeidet vil elevene få en gradvis innføring i matematisk notasjon. Arbeidet med algebra skjer da tett knyttet til eksisterende emner i matematikk, særlig innenfor aritmetikk.

Romberg og Kaput (1999) utfordrer lærere til å gjøre algebra tilgjengelig for flest mulig elever. Lærere kan lage og designe undervisningssituasjoner som legger til rette for at elevene får innsikt i og utvikler ferdigheter i arbeidet med å generalisere, representere, begrunne og resonnere. Tanken om å inkludere algebraisk tankegang allerede fra elevene starter på skolen, vil måtte endre undervisningen i matematikk.

### 4.1.3 Algebraisk tenkning

Selv om det å lære seg algebraisk tankegang er tenkt fra tidlig skolealder, er ikke målet å skyve pensum fra ungdomsskolen og videregående ned i grunnskolen, ei heller å innføre algebra som et eget emne i undervisningen. Det handler om å gi elever i barneskolen erfaring med algebraisk tenkning. Kieran (2004) sin definisjon av algebraisk tenkning er basert på tankeprosessene heller enn det matematiske objektet.

> Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool, but witch are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting.
> (Kieran, 2004, p. 149)

Definisjonen viser muligheter for å tenke algebraisk før de møter de algebraiske symbolene. Samtidig omfatter definisjonen algebra i sin abstrakte form med sitt symbolspråk (Solem et al., 2017). Algebraisk tenking innebærer dermed å oppdage generelle strukturer, mønstre, samvariasjon og relasjoner, og å gi en beskrivelse av disse ved bruk av ord og symboler, resonnering og argumentasjon. I lærerplanens kjerneelementer i matematikk omtales dette som en forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere (Utdanningsdirektoratet, 2020b).

Kaput (2008) understreker viktigheten av at elever lærer å se på ting med algebraiske øyne og hva som skal til for å trekke mot algebraisk tenkning. Det vil være å utnytte muligheten for algebraisk tenkning som er til stede i den matematikken som allerede undervises, å utvikle «algebraøyne og ører» i arbeid med aritmetikk (M. Blanton, L. & Kaput, 2003). De beskriver essensen i tidlig algebra som å kunne generalisere matematiske ideer, representere og begrunne generaliseringene på flere måter og resonnere rundt generaliseringene. Det handler om å gå fra det spesielle (aritmetikk) til det generelle. Følgende spørsmål kan dermed gi grobunn for algebraisk tenkning: Vil det alltid skje? Vil det gjelde alle tall? I enhver situasjon?

## 4.2 Didaktisk analyse

I den didaktiske analysen gis det innsikt i hva publisert forskning sier når det gjelder undervisning og læring av den matematikken det handler om. Det matematikkfaglige temaet i denne studien er generalisering av figurmønster som introduksjon til algebra.

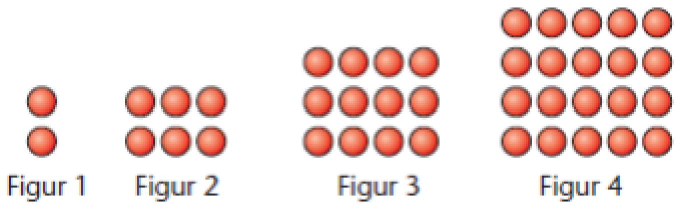
### 4.2.1 Figurmønster

Forskning anbefaler figurmønster som introduksjon til algebra (Kaput, 2008; Lannin, 2005). Figurfølger gir elever mulighet til å se relasjoner og mønstre, og utfordrer dem til å finne en generell regel for å beskrive følgen (English & Warren, 1998). Et figurmønster gir en visuell, geometrisk kontekst for en figur som utvikler seg på en bestemt måte. Hver figur i figurfølgen har et gitt nummer, figurnummeret ($f_n$). Oppgaven er som oftest å finne et generelt uttrykk for å kunne beskrive en hvilken som helst annen figur i figurmønsteret. Ifølge Lannins studier vil elevene få hjelp av den visuelle fremstillingen til å beskrive og forklare en regelmessighet som er lik for alle figurer som inngår i figurmønsteret. Dette vil igjen gjøre det enklere for elever å forstå hvordan ulike elementer i et algebraisk uttrykk representerer de ulike elementene i figurmønsteret (Lannin, 2005). Strømskag Måsøval (2011) understreker også at fra et didaktisk ståsted bidrar figurmønstre med en referansekontekst som legger til rette for algebraisk tenkning, i tillegg til å gi elevene erfaringer om mønstre som matematiske strukturer.

Becker og Rivera (2006) mener elever ofte støtter seg til to ulike måter å generalisere på i arbeidet med figurmønsteroppgaver; *figurativ og numerisk generalisering*. Elever som benytter en *numerisk generalisering*, går bort fra figurene, og bruker tallverdiene som er knyttet til figurfølgen. Elevene bruker allerede kjente verdier for en figurfølge for å si noe generelt, uten å tenke over de figurative relasjonene. Det kan være utfordrende for elevene å komme frem til et korrekt eksplisitt uttrykk når de går bort fra figuren. I hovedsak benytter elever som generaliserer numerisk, en gjett- og sjekk strategi. Elever som benytter en *figurativ generalisering*, fokuserer på figurene og deres egenskaper. Elevene bruker visuelle strategier og setter søkelyset på å finne konstante relasjoner ved hjelp av visuelle og figurative hint som er gitt i figurfølgen. De kan ofte forklare hvordan deres beskrivelse av figurmønsteret står i sammenheng med den geometriske presentasjonen i figurmønsteret, og å vise til hvilke deler av figuren som svarer til hvilke deler av det algebraiske uttrykket.

I studien til Becker og Rivera var det elevene med figurativ tilnærming som lyktes best i å generalisere. Elever med en numerisk tilnærming bruker en gjett- og sjekk strategi, eller de lager formler og regler på bakgrunn av tallene de finner eller får oppgitt i oppgaven. Formlene begrunnes og forsvares ut fra hvordan de passer til en liten mengde informasjon, og de tar ikke hensyn til helheten (Becker & Rivera, 2006). Det kan være utfordrende for elevene å komme frem til korrekt eksplisitt uttrykk når de går bort fra figuren. Dermed fører ikke en numerisk tilnærming like ofte frem til rett svar som en figurativ tilnærming. Figurativ tilnærming kan sammenlignes med Lannin (2005) sin beskrivelse av «geometric sheme.» Han fremhever at det visuelle aspektet er viktig for elevenes forståelse for et algebraisk uttrykk av den generelle utviklingen i et figurmønster. Det handler om hvordan elevene ser figuren og hvordan de dekomponerer den. Han understreker viktigheten av at elevene spørres om hvordan de ser figuren. Da vil ulike formler oppstå gjennom de ulike måtene å se figuren på. Måten vi visualiserer på, gjør at vi først lager bilder av hvordan vi ser figuren, dernest hvordan vi uttrykker det vi ser, og til slutt er uttrykket basert på visualiseringen.

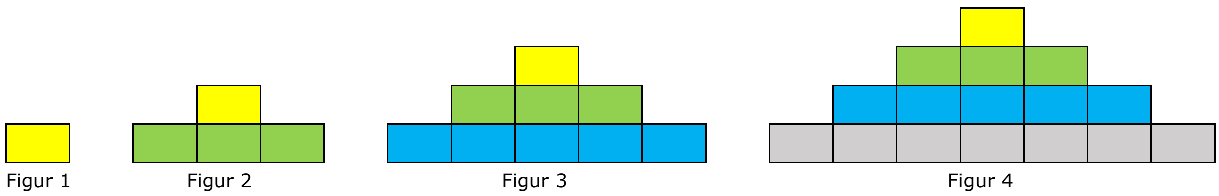
Strømskag Måsøval (2011) deler figurmønstre inn i to kategorier, karakterisert av hvilket matematisk objekt figurmønsteret sikter til. Den første omtales som *ordinære figurmønstre*, der målet er å uttrykke en formel for det *n*-te elementet i tallfølgen. I en eksplisitt formel lages formelen uten å bruke det foregående figurtallet, men figurnummeret. Formelen uttrykker antall komponenter i element nr. *n* som er en funksjon av *n*.




**Figur 8: Eksempel på et ordinært figurmønster**

En eksplisitt formel for figurmønsteret i figur 8 vil være $f_n = n^2 + n$. I en rekursiv formel brukes det foregående figurtallet i tallfølgen for å lage formelen. Formelen uttrykker antall komponenter i det generelle uttrykket som en funksjon av det foregående elementet. Den rekursive formelen til figur 8 vil være $f_n = f_n - 1 + 2n - 1$.

*Ekvivalensmønstre* er den andre typen figurmønstre Strømskag Måsøval (2011) omtaler. Ekvivalensmønstre sikter mot eller har som mål å uttrykke en påstand om ekvivalens mellom to ulike algebraiske uttrykk for det *n*-te elementet i tallfølgen avbildet fra figurmønsteret. Målet med ekvivalensmønstre er å ende opp med et teorem som viser en ekvivalens funnet i figurmønsteret (Svinvik, 2018).




**Figur 9: Eksempel på et ekvivalensmønster**

Figur 9 viser et eksempel på et ekvivalensmønster. Det illustrerer at det *n*-te kvadrattallet er ekvivalent med summen av de *n* første oddetallene. Uttrykt med en algebraisk notasjon: $1 + 3 + 5 \ldots. +2n - 1 = n^2$.

## 4.2.2 Elevers utfordringer

Den største utfordringen med figurmønsteroppgaver er ikke å gjenkjenne mønsteret i figuren, men å klare og formalisere det til et generelt uttrykk (English & Warren, 1998). Elever klarer som oftest å fortsette en figurfølge, men har vanskeligheter med en eksplisitt generalisering, å finne hvilket som helst figurnummer i følgen.

I likhet med English og Warren, sier Lee (1996) i sin forskning at elever møter utfordringer med å se mønsteret i figurfølger for videre å kunne uttrykke dem som et matematisk uttrykk. Lee (1996) identifiserte i sin forskning tre nivåer i generaliseringsprosessen; oppfattelses-, verbaliserings- og symboliseringsnivå. Hvert av nivåene har sine kjennetegn. *Oppfattelsesnivået* handler om hvordan elever ser og tolker mønster. Ifølge Lee (1996) er ikke problemet om de ser et mønster, men om det de har oppdaget er til hjelp når de skal uttrykke et mønster algebraisk. Lee påpeker også at elever som har en bestemt oppfattelse av et mønster, kan ha vansker med å endre denne oppfatningen, og å se mønsteret på nye måter. Warren og Cooper (2008) fant i sin forskning at det var små grep som kunne gjøre en forskjell for elevene i arbeidet med å undersøke korrespondansen, sammenhengen mellom den uavhengige og den avhengige variabelen, for så å formulere eksplisitte generaliseringer av figurmønstre.

Warren og Cooper viser til spesifikke anbefalinger for å hjelpe elevene i arbeidet med figurmønstre. Noen av rådene deres er blant annet bruk av konkretiseringsmateriell. Det kan hjelpe elever i å finne ut av de manglende trinnene i et mønster, og er med på å støtte elevers tenkning. De fremmer også bruk av figurmønstre der forholdet mellom mønster og figurnummer er eksplisitt. Disse mønstrene hjelper elevene verbalt til å beskrive forholdet mellom mønster og posisjon. Å generalisere fra mønsteret i små figurnummer, til større figurnummer hjelper elevene til å beskrive forholdet mellom posisjonsnummeret og det visuelle mønsteret generelt. Klasseromsobservasjonene til Warren og Cooper (2008) indikerte at mange elever trengte fysisk å konstruere mønstrene før de kunne bidra i diskusjonen. For å sikre at de koblet sammen mønsterets posisjon til selve mønsteret, oppstod det flere diskusjoner, for eksempel: Hvordan ville trinn 100 se ut?

Utfordringer knyttet til *verbaliseringsnivået* omhandler i hvilken grad elevene klarer å uttrykke seg presist muntlig om mønsteret. Lee (1996) fant i sin studie at elever har utfordringer med å uttrykke seg presist om figurfølgen. Dette støttes også av studien til Warren og Cooper (2008) som hevder at elevene manglet presisjon i sin beskrivelse av figurfølger. En slik mangelfull, tydelig og presis beskrivelse skyldes at flere elever ikke har utviklet et hensiktsmessig fagspesifikt ordforråd for å kunne beskrive sammenhengen i mønsteret (Warren & Cooper, 2008). Warren (2005) skriver at elever kan ha vanskeligheter med å uttrykke mønsteret i figurene ved bruk av det matematiske symbolspråket. I sine undersøkelser fant de ut at elevenes muntlige beskrivelser av figurfølgene manglet presisjon, og at de brukte gester og konkreter som støtte til sine forklaringer. Warren (2005) foreslår å anvende tre tiltak for å utvikle elevenes språk, slik at de lettere kan uttrykke og beskrive mønsteret muntlig. Hvis forholdet mellom mønsteret og figurnummeret blir eksplisitt vist, vil det kunne hjelpe elevene til å beskrive sammenhengen mellom mønsteret og figurnummeret. Konkretiseringsmateriell kan hjelpe elevene til å snakke om mønsteret og fastslå hvordan mønsteret ser ut for et gitt figurnummer. For det tredje, vil spesifikke spørsmål fra læreren, som er med på å gjøre forholdet mellom mønsteret og figurtallet tydeligere, støtte elevenes tenkning i arbeid med funksjonssammenhenger. Fokuset bør være på hvordan man uttrykker seg muntlig når mønsteret omtales.

*Symboliseringsnivå* omfatter de utfordringene elevene kan oppleve når de skal overføre de matematiske sammenhengene til figuren til abstrakte symboler. Det vil si å bruke *n* for å representere posisjonen i et element i følgen, som en funksjon av *n*. Elevene må ta utgangspunkt i den muntlige beskrivelsen av strukturen i figurmønsteret, for så å transformere innholdet i det muntlige språket over til symbolspråk. Hvis eleven har liten erfaring med symbolbruk, kan det bli utfordrende å beskrive funksjonsrelasjonen i mønsteret med symbolspråk. Det å forstå at et symbol kan representere flere verdier (variabel), kan oppleves som krevende (Kaput, 2008).

## 4.3 A priori analyse av den designede situasjonen

A priori analyse baserer seg på den epistemologiske modellen, og planlegging av implementeringen, devolusjonen og institusjonaliseringen.

Fra den epistemologiske analysen understrekes det at figurmønster kan brukes som introduksjon til algebra. Figurmønsteroppgaver gir en visuell geometrisk kontekst for en figur som utvikler seg på en bestemt måte, og denne konteksten trekkes frem som en styrke ved slike oppgaver. Den visuelle representasjonen hjelper elevene å undersøke og beskrive noe generelt for alle figurene som inngår i figurmønsteret. For å uttrykke det generelle, kan elevene anvende naturlig språk eller symbolspråk for å representere et hvilket som helst figurnummer i følgen.

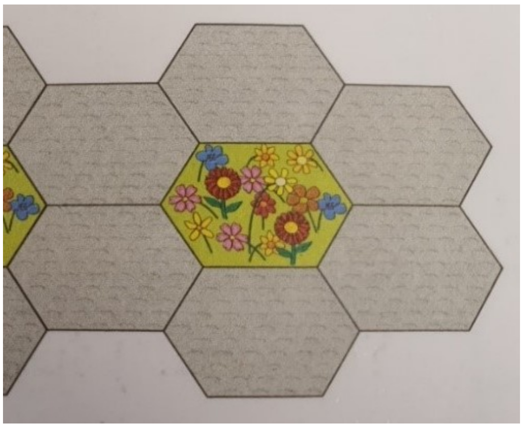
### 4.3.1 Modell av målkunnskapen

Vi har tatt utgangspunkt i et figurmønster fra læreboka Multi 5b s. 105 (2006) (vedlegg 1) da vi designet undervisningssituasjonen. Figurmønsteret i «Blomsterbed oppgaven» omtaler Strømskag Måsøval (2011) som ordinære figurmønstre der målet er å uttrykke det $n$-te elementet i tallfølgen som avbildes fra figurmønsteret som en formel. Det generelle elementet i tallfølgen kan representeres ved en implisitt eller en eksplisitt formel. Ved en implisitt formel må eleven kjenne til det foregående elementet. Ved en eksplisitt formel uttrykker eleven det generelle elementet som en funksjon av figurnummeret.

Den tilsiktede målkunnskapen for undervisningssituasjonen som «Blomsterbed» oppgaven bygger på, er en lineær funksjon der sammenhengen mellom variablene, hvor $n$ står for antall steinheller og $f_n$ for antall blomsterbed, uttrykkes som $f_n = 4n + 2$. Oppgaven har både et multiplikativt element og et konstant element, noe som skiller den fra tallfølger elever ofte blir presentert for i lærebøker, der de skal finne de neste tallene i en tallfølge.

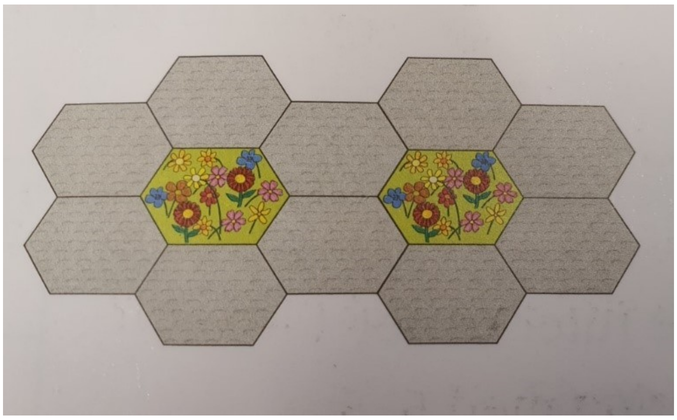
Oppgaven i studien gir ingen instruksjoner på hvordan den skal løses. Den er formulert som et økende geometrisk mønster, fordi det er lettere for elever å oppdage mønster som de deretter kan generalisere gjennom å gå gradvis til verks. Økende geometriske mønstre har vist seg å være oppgaver som i stor grad bidrar til å utvikle elevers algebraiske tenkning generelt og funksjonstenkning spesielt (Warren & Cooper, 2008). Hensikten med et økende geometrisk mønster, er å hjelpe elevene til å se sammenhengen mellom variabelen (antall blomsterbed) og konstantleddet (de to på enden). Elevene vil utfordres til å se sammenhenger mellom tallene, og den gir mulighet for å benytte ulike representasjoner som tegning, tabeller, tallsymboler, muntlig og skriftlig bruk av språket.

I devolusjonen presenteres elevene for hvor mange steinheller det er plass til rundt ett blomsterbed, se figur 10.



**Figur 10: Det er plass til 6 steinheller rundt ett blomsterbed**

Et vilkår for å kunne løse oppgaven, er at alle blomsterbedene må settes inntil hverandre. Figur 11 viser hvordan blomsterbedene settes sammen.



**Figur 11: Blomsterbedene skal plasseres i en rekke inntil hverandre**

### 4.3.2 En situasjon for å nå målkunnskapen

I den didaktiske analysen vises det til tidligere forskning som sier at algebra og generalisering kan være utfordrende for elevene. På bakgrunn av dette valgte vi å designe en konkret situasjon med blomsterbed og steinheller som kunne oppfattes som relevant og engasjerende for elevene. Intensjonen var å bevare det utforskende elementet i de adidakstiske fasene gjennom at deloppgavene gradvis skulle lede elevene mot den spesifikke målkunnskapen.

Med utgangspunkt i den epistemologiske analysen og modellen av målkunnskapen designet vi en situasjon som handler om pynting av skolegården. Rektor ved skolen ønsker blomsterbed i skolegården, siden skolen er nyoppusset. Dette er en reell situasjon for elevene som deltok i prosjektet. I den forbindelse trenger rektor hjelp av elevene til å finne ut hvor mange steinheller som trengs til blomsterbedene. Bedene skal settes inntil hverandre, og rundt hvert av bedene skal det dekoreres med sekskantede steinheller. Elevene skal finne hvor mange heller det er behov for etter hvert som antall blomsterbed i følgen øker. Målet med oppgaven er at elevene skal komme frem til et generelt uttrykk for sammenhengen mellom antall blomsterbed og antall heller. Elevene skal starte med å finne antall steinheller for 1-5 blomsterbed, så 10, 20, og deretter 100. Det er lettere for elever å oppdage mønster, som de deretter kan generalisere, gjennom å gå gradvis til verks. En vil da kunne se om elevene utvikler egne strategier, være låst til en strategi, eller veksle mellom strategiene. Intensjonen er at elevene skal utvikle den spesifikke målkunnskapen ved å jobbe seg gjennom deloppgavene. Oppgavearket til elevene ligger som vedlegg 2.

Hensikten med den første oppgaven, hvor mange steinheller som trengs for $f_1$-$f_5$, var å få elevene til å studere sammenhengen mellom antall steinheller og figurnummeret. Vi antar at alle elevene i studien gjenkjenner mønsteret. Flere av elevene kan ha en numerisk tilnærming, der de oppdager at tallverdien øker med fire for hvert figur-nummer. Andre elever vil trolig dekomponere figuren ved å bruke figuren aktivt og se sammenhengen mellom variabelen og konstantleddet. Elever kan benytte seg av den ikke eksplisitte strategien, *telling* (Lannin, 2005). De vil muligens tegne for deretter å telle seg fram til antall steinheller. Når elever bruker en *rekursiv strategi* (Lannin, 2005), ser de mønsteret og bygger på det forrige leddet for å bestemme verdien av neste ledd. Elevene kan føre tallverdiene inn i en tabell. Når elever bruker de ikke – eksplisitte strategiene, *telling* og *rekursiv*, må de vite det forrige trinnet i mønsteret for å finne neste figur. Disse strategiene er hensiktsmessige for de lave figurnumrene. Strategien kan gi utfordringer når de kommer et stykke ut i figurfølgen, og når de skal lage et generelt uttrykk for figurmønsteret.

I oppgave 2 skal elevene finne hvor mange steinheller de trenger til 10 blomsterbed. Å gå fra 5 til 10 bed er valgt for å avdekke om elevene anvender en proporsjonalitets-tenkning i en ikke-proporsjonal sammenheng. Vi antar at noen av elevene kan benytte seg av en *hel-objekt strategi* (Lannin, 2005), uten justering for feiltelling. Denne strategien kan elevene bruke ved overgang fra $f_5$ til $f_{10}$ ved å multiplisere $f_5$ med 2.

Neste oppgave er å skrive en forklaring til en annen gruppe som forteller hvordan de raskt kan finne antall steinheller til 20 blomsterbed. Som vi leser i den didaktiske analysen, har elever utfordringer med å uttrykke seg presist om figurfølger. Intensjonen med denne oppgaven er derfor å gi elevene erfaring med det matematiske språket. Vår hypotese er at dersom elevene først får muntlig trening i bruk av det matematiske språket, vil det bli enklere å formulere seg skriftlig. Et langsiktig mål er at elevene skal utvikle et hensiktsmessig fagspesifikt ordforråd for å kunne beskrive sammenhengen i mønsteret.

I oppgave 4 skal elevene finne hvor mange steinheller de trenger til 100 blomsterbed. Ved å øke antall bed til 100, er målsettingen at elevene skal se sammenhengen mellom variabelen og konstantleddet. Når elevene skal finne $f_{100}$, er det lite hensiktsmessig å bruke en ikke- eksplisitt strategi, telling eller rekursiv. Intensjonen er å føre elevene til å undersøke sammenhengen mellom variabelen og konstantleddet, for deretter å formulere en eksplisitt generalisering. En slik gradvis utvikling av en figurativ tilnærming, vil føre elevene bort fra de ikke eksplisitte strategiene, som telling og rekursiv (Lannin, 2005).

Elevene blir deretter bedt om å lage en regel til rektor med en forklaring på hvordan han lett kan finne ut hvor mange heller det er behov for til et hvilket som helst antall bed. Vi antar at noen elever vil benytte en *kontekstuell strategi* (Lannin, 2005) hvor de utvikler en eksplisitt forklaring basert på informasjonen som er gitt i situasjonen.

I oppgave 6 skal elevene gå «motsatt vei» for å finne hvor mange blomsterbed de har laget hvis de har brukt 62 heller. Oppgaven er valgt fordi den vil vise hvorvidt elevene bruker figurmønsteret aktivt. Uten å forstå mønsteret, kan det bli utfordrende å løse oppgaven. Vi antar at elevene enten vil bruke en kontekstuell tilnærming, der de resonnerer seg frem til et svar som er nært knyttet til figurmønsteret, eller en prøve- og feile strategi der de prøver seg frem med ulike regneoperasjoner.

Elevene i studien har tidligere jobbet en del med tallfølger hvor de skal finne de tre neste tallene i en rekke. Derimot har elevene liten erfaring med figurmønster slik som «Blomsterbed» oppgaven. Elevene har, i skolesammenheng, liten erfaring med å bruke algebraisk notasjon. Den erfaringen de har med bokstaver i matematikken, er å finne den ukjente i lineære ligninger, ofte uttrykt med $x$. Av den grunn antar vi at ingen av deltagerne i studien vil mestre de algebraiske representasjonene; $4x + 2$ eller $6 + 4(x - 1)$. Som følge av dette antar vi at ingen av deltagerne vil benytte seg av *gjett- og sjekk strategi* (Lannin, 2005) hvor de gjetter på en regel uten å ta hensyn til om den fungerer. Hypotesen vår er at elevene vil kunne mestre en verbal representasjon hvor de forklarer muntlig og/eller skriftlig hvordan figurmønsteret utvikler seg. Elevene kan uttrykke at de trenger 4 heller for hvert bed og legge til 2 heller, eller at det første bedet har 6 heller og de resterende bedene fire heller hver.

### 4.3.3 Miljø for aksjon, formulering og validering – a priori

I TDS er *miljø* et sentralt begrep. Miljø omfatter problemet som skal løses, materielle verktøy, elevenes bakgrunnskunnskap, regler for å operere i situasjonen og medelever (Strømskag, 2017a). Disse faktorene påvirker elevenes læring. Innenfor TDS er det et mål å skape en adidaktisk situasjon der elevene som gruppe skal løse et problem gjennom interaksjon med miljøet. For å etablere en adidaktisk fase, får elevene utdelt hvert sitt oppgaveark hvor situasjonen og problemet er beskrevet. I tillegg til informasjonen gitt på oppgavearket består det materielle miljøet av ark, blyanter, rød blyant, post it lapper og konkretiseringsmateriell av blomsterbed og steinheller. Konkretiseringsmateriellet består av ferdigklippede sekskantede bed og heller.

Interaksjonen i klasserommet er sentral for elevenes læring. I planleggingsfasen reflekterte vi derfor over spørsmål som: Hvor mange grupper skal vi ha? Hvor mange deltagere per gruppe? Hvordan skal gruppene plasseres i klasserommet? Hvem skal samarbeide med hvem? Samarbeidskompetanse fremheves som sentralt i utredningen «Elevenes læring i fremtidens skole» av Ludvigsenutvalget. Samfunnsutfordringene elevene møter fremover, vil kreve kognitiv fleksibilitet og sosiale ferdigheter. Utredningen påpeker at kommunikasjon og samarbeid fremmer elevers læring. Elever lærer gjennom å delta i faglige og sosiale aktiviteter, og refleksjon om egne lærings-prosesser blir formet i et sosialt miljø. Videre sier utvalget at læring gjennom samarbeid kan bidra til å motivere, aktivere og engasjere elevene. Det kan også bidra effektivt til faglig læring og læring av samarbeidsferdigheter (Ludvigsen & Norge, 2014).

Elevene blir i devolusjonen introdusert og får tilgang til det materielle miljøet. Når elevene finner ut hvor mange steinheller de trenger til 5 blomsterbed, får de én mulighet til å hente steinhellene hos en tenkt lokal steinforhandler. Elevene får vite at dersom de henter for få, eller for mange heller, vil de få en bot som de må betale til elevrådet. Hensikten med dette vilkåret er at elevene innad i gruppa må bli enige, for å unngå gjetting på antall steinheller. I den didaktiske kontrakten er det en forventning at elevene skal samarbeide og diskutere seg frem til enighet. Elevene skal pusle sammen de fem første blomsterbedene. Ved å operere på det materielle miljøet, ønsker vi at elevene skal få feedback på om de er på rett vei, eller om de må endre strategi. I den didaktiske analysen viser vi til at bruk av konkretiseringsmateriell kan være til støtte for elevenes tenkning, og et nyttig feedbackpotensial. Som vi skrev i kapittel 2.1, har et adekvat miljø et adidaktisk potensial, som betyr at elevene får feedback slik at de kan avgjøre om det de har produsert, fungerer eller ikke. Slik kan elevene som følge av sin interaksjon med miljøet, og uten innblanding fra lærer, avgjøre om deres strategi holder, eller om de må revidere den.

To og to grupper blir satt sammen for å presentere sine løsningsforslag for figurnummer 10. Etter presentasjonen skal gruppene sette sammen 10 blomsterbed. Det adidaktiske potensiale i aktiviteten er interaksjonen med miljøet når de får feedback på egen strategi. Etter at elevene har puslet sammen 10 blomsterbed, får de utdelt post it lapper hvor de skal skrive «1» og plassere under figurnummer 1, «2» plasseres under figurnummer 2, som vist på figur 12. I den didaktiske analysen viser vi til at slike kort kan hjelpe elevene til å bli mer oppmerksomme på funksjonssammenhengen, korrespondansen mellom plassnummeret og antallet representert i figuren.


**Figur 12: Kort som indikerer plassnummer for figurene**

Fra den didaktiske analysen påpekes det at elever trolig kan ha utfordringer med å forklare egne løsningsstrategier. Undervisningssituasjonen bør inneholde et element der elever forklarer for hverandre hvordan de tenker, fordi dette gir trening i å formulere seg presist. Dette er tenkt som en trening slik at de i *formuleringsfasen* lettere skal mestre å skrive en presis forklaring til en annen gruppe. I formuleringsfasen vil elevene få feedback fra miljøet når de forklarer og tester hverandres løsningsforslag. Lærerens rolle i denne fasen er å få oversikt over de ulike strategiene som er brukt. Vi antar at ikke alle gruppene vil formulere seg presist nok til at den andre gruppen umiddelbart vil kunne løse oppgaven. Fasen avsluttes med en helklassesamtale der formålet er å gi elevene en mulighet til eventuelt å justere egen strategi.

I *valideringsfasen* er målet at elevene skal kunne formulere et generelt uttrykk for figurfølgen. De eksplisitte generaliseringene for dette figurmønsteret har følgende mulige funksjonsuttrykk; $f_n = 4n + 2$ eller $f_n = 6 + 4\,(n - 1)$. Siden elevene i studien har jobbet lite med generalisering av figurmønster, forventet vi ikke at gruppene skulle komme fram til en algebraisk notasjon. Elevene vil sannsynligvis kunne representere figurmønsteret med naturlig språk hvor de uttrykker både muntlig og skriftlig at det er fire steinheller for hvert blomsterbed, pluss de to steinhellene ekstra. Ellers kan de formulere at det første bedet har seks heller, og de andre bedene har fire heller.

### 4.3.4 Implementering

I dette kapittelet gjøres det rede for hvilke forventninger vi hadde a priori for realiseringen i klasserommet, *devolusjon og institusjonalisering*.

*Devolusjonen* er en didaktisk fase hvor elevene blir introdusert for et nytt emne eller en problemstilling. Som vi skrev i kapittel 2.1, er det et viktig mål for devolusjonen å få elevene til å overta ansvaret for å løse problemet. For å oppnå dette, er det viktig at det etableres en didaktisk kontrakt med gjensidige forpliktelser og forventninger. Elevene får utdelt et oppgaveark hvor problemet er beskrevet (vedlegg 2). Oppgavearket skal leses høyt og forstås av alle på gruppen, slik at alle kan bidra. Det forventes at elevene i den adidaktiske situasjonen diskuterer internt i gruppa, og bruker det adidaktiske miljøet de har fått til rådighet. Det innebærer at elevene må samarbeide. Elevene vil bli forklart og informert om hva den didaktiske kontrakten har av forventninger til hver enkelt i de adidaktiske situasjonene. Det er mulighet for å spørre lærer om hjelp hvis de står fast eller noe er uklart. Før oppgaven blir overlatt til elevene, avklares begreper som sekskant, samt at de vil bli vist hvordan bedene skal henge sammen.

*Målet i institusjonaliseringen* er å generalisere kunnskapen slik at de kan bruke den i andre sammenhenger. I tillegg er det en målsetting at elevene skal se nytten av å finne et generalisert uttrykk. Det blir viktig å skape en sammenheng mellom det elevene blir bevisst på i arbeidet med problemet, hva de lærer som de senere kan bruke, og å bygge bro mellom ny og kjent kunnskap. Lærerens oppgave blir å skape mening mellom det elevene har produsert i arbeidet med problemet, og det som er målkunnskapen. I institusjonaliseringen vil kunnskapen endre status fra et problem til en referanse-kunnskap som kan brukes i situasjoner uten en didaktisk intensjon.

Gjennom en gradvis utvikling av figurmønsteret vil det skapes en referansekontekst, som kan vise seg nyttig for å skape mening til den algebraiske notasjonen. Et viktig fokus for oss i institusjonaliseringen er å legge vekt på den matematiske samtalen, nettopp for å bevare meningen til referansekonteksten. I tillegg til en bevisstgjøring for elevene om hva den tilsiktede målkunnskapen er. Fokuset i institusjonaliseringen blir å uttrykke variabelen og konstantleddet i uttrykket $f_n = 4n + 2$. Denne figurative tilnærmingen til figurmønsteret antar vi vil gjøre det enklere for elevene å se referansekonteksten, altså sammenhengen mellom figuren og funksjonsuttrykket. Elevene vil muligens oppdage og gjenkjenne den direkte sammenhengen mellom variabelen $(4n)$ og figurnummeret $(n)$, og konstantleddet som er de to hellene på enden. I funksjonsuttrykket $f_n = 6 + 4\,(n - 1)$ er det ingen direkte relasjon mellom figurnummeret og antallet blomsterbed, og av den grunn vil det trolig bli en større utfordring å forstå denne generaliseringen. I institusjonaliseringen vil det derfor ikke fokuseres på funksjonsuttrykket $f_n = 6 + 4\,(n - 1)$.

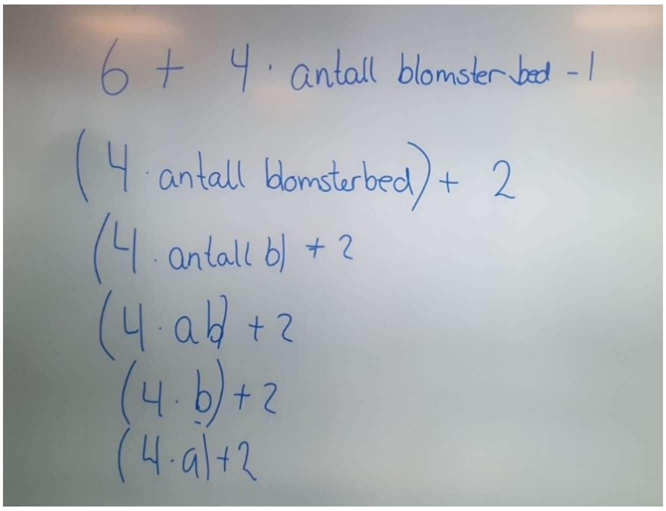
## 4.4 Kort oppsummering av a posteriori analyse

I dette kapitlet gis det en kort oppsummering fra realiseringen i klasserommet, som ikke analyseres i kapittel 5. Realiseringen i klasserommet ble gjennomført 27. oktober 2020. Elevene som deltok i studien, virket motiverte siden de var aktive og engasjerte.

Implementeringen ble gjennomført som planlagt. Vi observerte at det utdelte oppgave-arket (vedlegg 2) ble aktivt brukt i de adidaktiske fasene. Elevene gikk tilbake og leste den ved behov. Gruppene fulgte oppgavens progresjon, og oppgavearket ble brukt for å lese neste oppgave. Oppgavearket hjalp gruppene til å arbeide selvstendig, og å følge eget tempo. De kunne til enhver tid gå tilbake for å lese oppgaven hvis de hadde behov for klargjøringer og informasjon. Etter formuleringsfasene og helklasse-samtalene gikk elevene tilbake til tidligere løste oppgaver, brukte oppgavearket aktivt og endret strategi ved behov.

I den forberedende analysen og i utviklingen av oppgavedesignet studerte vi blant annet Warren (2005) sin studie. I studien foreslås tiltak for å utvikle elevenes språk, slik at de lettere kan uttrykke og beskrive mønsteret muntlig. Konkretiseringsmateriellet som elevene benyttet, var de utklippede blomsterbedene og steinhellene. Det ble satt post it lapper for å vise eksplisitt forholdet mellom figuren og figurnummeret. Kortene kan hjelpe elevene til å beskrive sammenhengen mellom figuren og figurnummeret. Vi observerte at konkretiseringsmateriellet var aktivt i bruk under elevenes resonnement. De viste med gester figurmønsterets utvikling. Vi så ingen tegn til at elevene refererte til post it lappene for å beskrive sammenhengen mellom figuren og figurnummeret.

I a priori analyse antok vi at de fleste elevene ville generalisere figurmønsteret med uttrykket $f_n = 4n + 2$. I institusjonaliseringen skulle dette funksjonsuttrykket løftes til en algebraisk notasjon. Som figur 13 viser, skrev lærer først ned gruppe 2 sitt forslag uten å bearbeide deres løsningsforslag. Sammen med elevene gikk lærer gradvis mot en algebraisk notasjon, der antall blomsterbed forkortes først til antall b, så ab, deretter b, og til slutt a. Slik ble den tiltenkte målkunnskapen dekontekstualisert. En usikker faktor er om alle elevene forsto denne gjennomgangen.




**Figur 13: Utviklingen mot en algebraisk notasjon i institusjonaliseringen**

# 5 Sammenligning av a priori og a posteriori analyser

I dette kapitlet sammenlignes a priori og a posteriori analyser, som er en validering av studien. Valideringen går ut på å diskutere relasjonen mellom intensjonen og det faktiske resultatet av det didaktiske designet. Gjennom hele analyseprosessen har forsknings-spørsmålet vært i fokus; *Hvilke faktorer ved den designede undervisningssituasjonen hindrer, og hvilke faktorer muliggjør, at en gruppe 6. trinns elever utvikler et generelt uttrykk av et figurmønster?* Først presenteres de hindrende faktorene, før de mulig-gjørende faktorene ved studien beskrives.

## 5.1 Hindrende faktorer

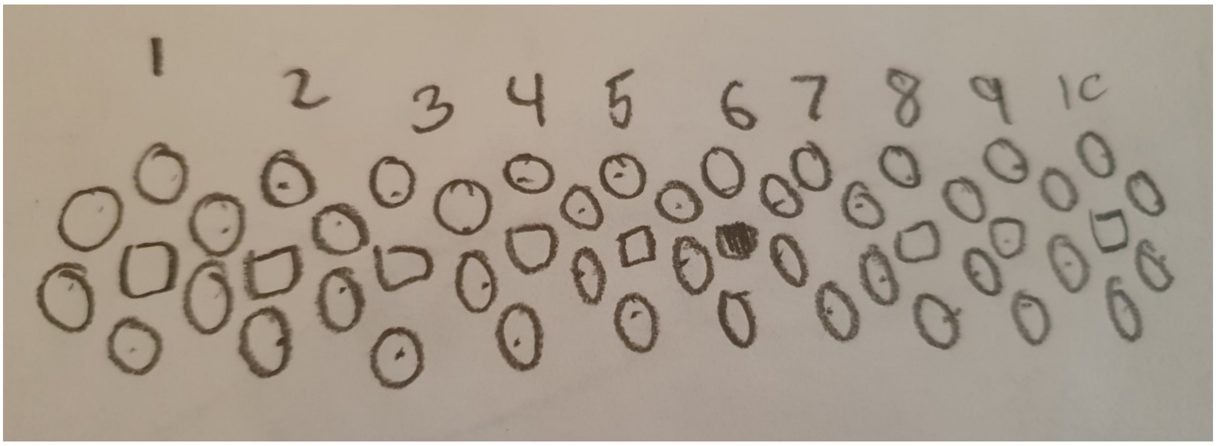
I følgende delkapittel presenteres de fire underkategoriene som vi kategoriserer som hindrende for at elevene oppnådde progresjon av målkunnskapen. Vi utviklet én under-kategori som omhandler vårt oppgavedesign, og tre underkategorier som omhandler elevenes interaksjon med miljøet. Tabellen i figur 14 viser en oversikt over hindrende faktorer ved undervisningssituasjonen.

| **HINDRENDE FAKTORER** | | |
|---|---|---|
| **Oppgavedesign** | *Valg av geometrisk form* | Svakhet i a priori analyse |
| **Interaksjon med miljøet** | *Elevenes samarbeidskompetanse* | Kommunikasjon<br>Ulik deltakelse/ulike roller |
| | *Elevenes forkunnskaper* | Numerisk tilnærming - dobling |
| | *Elevenes matematiske språk og begreper* | Manglende matematisk språk<br>Elevenes overgang fra muntlig til skriftlig språk |

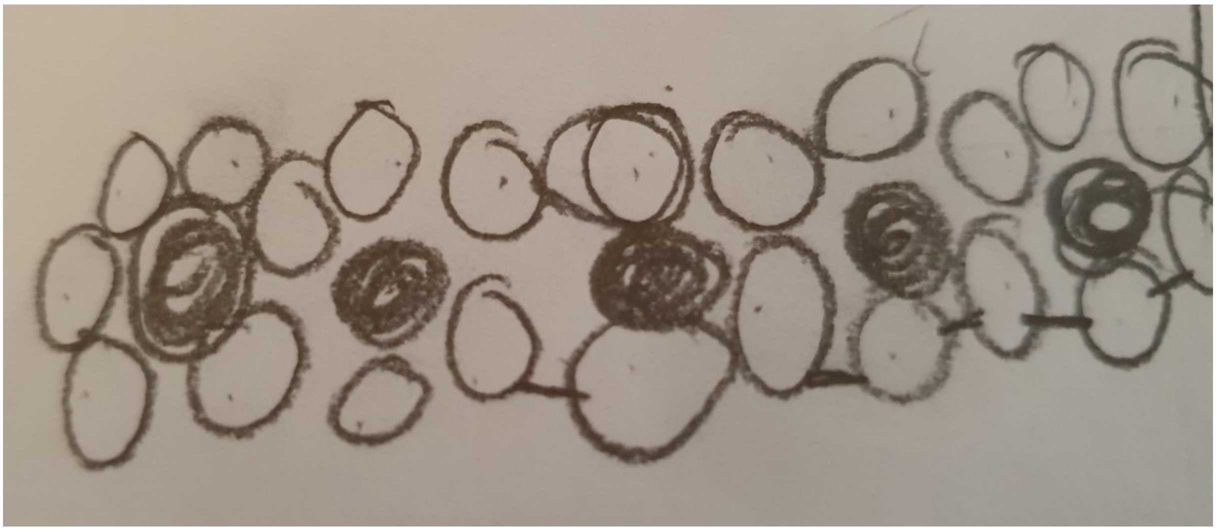
**Figur 14: Oversikt over hindrende faktorer ved undervisningssituasjonen**

### 5.1.1 Oppgavedesign

Valget av geometrisk form på blomsterbedene og steinhellene ble en svakhet ved oppgavedesignet, og dermed en svikt i a priori analyse. Ved prosjektstart diskuterte vi den geometriske formen på bedene og hellene. I Multi 5B s. 105 (Alseth et al., 2006) brukes sekskantede former. Hvilken geometrisk form skulle brukes i oppgavedesignet? Ville det bli utfordrende for elevene å tegne sekskanter, eller ville de representere sekskantene på andre måter? Vi valgte sekskantede former etter erfaringene vi gjorde oss fra pilotprosjektet. Figur 15 og 16 viser hvordan to grupper fra pilotprosjektet representerte blomsterbedene og steinhellene. De representerte de sekskantede formene med andre geometriske former. Slike prosesser innenfor samme representasjonssystem omtaler Duval (2006) som *behandling*. Duval (2006) sier at i enhver form for matematisk aktivitet tas det i bruk minst ett representasjonssystem, og at matematisk bearbeidelse alltid betyr å forflytte seg til et annet system. Den matematiske forståelsen ligger i å gjenkjenne et matematisk objekt i ulike representasjonssystemer. Noen ganger vil ikke forflytninger gi store forskjeller, som da elevene i pilotprosjektet vekslet mellom å bruke ulike geometriske figurer. Duval omtaler behandling som en mindre kognitiv krevende prosess enn omdannelser. Ved omdannelse skifter elevene mellom ulike representasjons-systemer. I pilotprosjektet representerte elevene de sekskantede formene med rektangler og sirkler. Denne behandlingen innenfor samme representasjonssystem ga elevene mulighet for feedback underveis. Ved å tegne og telle hadde elevene mulighet til å kontrollere om de var på rett vei, eller om de måtte endre egen strategi.

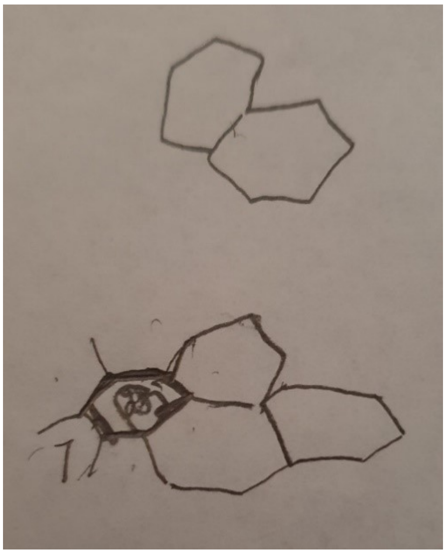



**Figur 15: Elevene representerte de sekskantede formene med sirkler og rektangler**

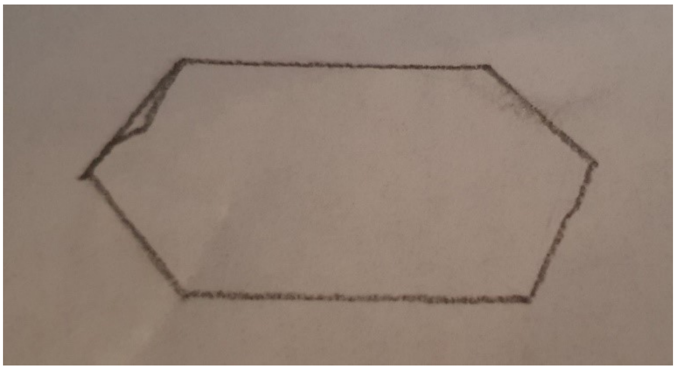


**Figur 16: Elevene representerte de sekskantede formene med sirkler**

Observasjoner fra realiseringen i klasserommet kan tyde på at utformingen av de seks-kantede formene var utfordrende, og at elevene etter hvert ga opp å tegne. 3 av 4 grupper som deltok i selve studien, startet med å tegne sekskantede former. På figur 17 og 18 vises gruppe 2 og gruppe 3 sine forsøk på å illustrere de sekskantede formene.



**Figur 17: Elevene har begynt å tegne sekskantede blomsterbed og steinheller**



**Figur 18: Gruppe 3 tegnet kun en sekskantet figur**

Det kan se ut som det ble utfordrende for elevene å tegne utviklingen av figurmønsteret. Dermed anvendte ikke deltagerne en tegne- og tellestrategi for de lave figurnumrene. Siden denne strategien uteble, antar vi at elevene tidlig ble ført mot en numerisk tilnærming av figurmønsteret. Det ledet elevene trolig mot en rekursiv strategi, noe som kan bli utfordrende i å nå målkunnskapen. Ved en rekursiv strategi, må elevene vite det forrige leddet for å finne neste ledd. Å lage et generelt uttrykk og en eksplisitt generalisering, blir krevende når det forrige leddet må være kjent. Hvis figurmønsteret av ulike årsaker er utfordrede å tegne, kan det muligens føre til en numerisk tilnærming i arbeidet.

I a priori analyse antok vi at elevene ville tegne for de lave figurnumrene. En tegne- og tellestrategi ville trolig kunne hjelpe elevene til å se mønsteret i figurfølgen, og gi elevene objektiv feedback gjennom å telle antall heller. Disse antakelsene bygger på erfaringene fra pilotprosjektet der elevene mestret å representere de sekskantede formene med andre geometriske former. Vi antok at den geometriske formen ikke ville bli en utfordring for deltagerne, men det viste seg å bli en hindrende faktor i den første adidaktiske fasen, aksjonsfasen. Beslutningen etter pilotprosjektet om valg av geometrisk form, førte til en svakhet ved oppgavedesignet, og dermed en svikt i a priori analyse. I etterkant ser vi at elevene burde fått informasjonshopp i den adidaktiske fasen. Ved å endre betingelsene for hvordan blomsterbedene var utformet, kunne det blitt enklere for elevene å tegne. Muligens kunne et slikt informasjonshopp hjulpet elevene tidligere mot en figurativ tilnærming.

### 5.1.2 Elevenes samarbeidskompetanse

I studien avdekket vi forskjeller i elevens samarbeidskompetanse. I gruppe 1 viste samarbeidet seg å bli en hindrende faktor. Samarbeidet skilte seg ut fra de andre gruppene siden deltagerne i liten grad lyttet til hverandre, og de anerkjente sjelden hverandres forslag. I a priori analyse, la vi vekt på at det adidaktiske potensiale skulle komme som følge av samarbeidet. Tanken var at elevene gjennom samarbeid og diskusjoner skulle løse problemet. Elevene har en del erfaring med å jobbe i grupper og med læringspartner, som vi antok ville være en styrke i elevenes samarbeids-kompetanse.

I gruppe 1 bruker Inger tidlig en rekursiv strategi som hun presenterer for de andre. Erik vil imidlertid at de skal bruke hans fremgangsmåte, og er i liten grad samarbeids-orientert. Inger prøver ved flere anledninger å bidra inn i diskusjonen med sin rekursive strategi, men blir delvis både avvist og ignorert av de andre. I linje 3 viser utdraget nedenfor at Inger kommer med en påstand der hun mener hun kan svaret på alle oppgavene. Som linje 7 viser, avbrytes hun, og i linje 9 hvisker hun løsningsforslaget sitt. De andre gruppedeltagerne oppfører seg som om de ikke hører hva hun sier, eller at de muligens ikke tror at det hun sier, har noe verdi. I linjene 4 og 10 fortsetter Erik å argumentere for sin strategi uten å lytte eller anerkjenne Ingers utsagn. Det er dermed i liten grad en likeverdighet mellom deltagerne i gruppa, noe som gjorde at den matematiske samtalen i denne fasen var lite produktiv. Mercer and Sams (2006) forskningsstudier viste, i likhet med denne studien, at gruppesamtaler kan være lite samarbeidsorienterte, lite produktive, ha liten grad av likeverdighet mellom partene og samtalen kan ofte ha et annet fokus enn oppgaven.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Inger | Hvor mange trenger vi da til 3 blomsterbed? |
| 2. | Erik | Da kan vi ta 10 pluss 6 steinheller minus 4s. Nei 2, søren. Minus 2s er lik 14s som er det samme som 3b. |
| 3. | Inger | Jeg kan svaret på alle nå. |
| 4. | Erik | Det er det samme som 3b. |
| 5. | Erik | Enig. Jeg må bare skrive. b er det samme som blomsterbed. |
| 6. | Maren | s er steinheller. |
| 7. | Inger | Akkurat det samme som jeg sa i stad. Man bare legger på 4 steinheller. (*Avbrytes*) |
| 8. | Erik | Hvor mange trenger dere til 4 blomsterbed? |
| 9. | Inger | (hvisker 18) |
| 10. | Erik | 14s, 6s er lik 20s, Er dere enig? Minus 2s er lik 18s, som er det samme som 4b. Så er vi på a, b, c, d, e |
| 11. | Erik | Hvor mange trenger dere til 5 blomsterbed? OK. Da har vi 18s + 6s minus 2s er lik 22s. Da kan vi hente. |
| 12. | Maren | Du må hente 22. |

Utdraget over viser at Maren har en passiv rolle i diskusjonen. Hun stiller ikke spørsmålstegn ved måten Erik ønsker å løse oppgaven på. Ei heller viser hun noen tegn til reaksjon på Ingers løsningsforslag. Det kan derfor synes som om Ingers innspill ikke oppleves som nyttige og viktige for Maren, eller at hun selv ikke har kommet frem til egne ideer og løsningsforslag. Erik er en aktiv elev som nok sees på av de andre som «god i matte». Det kan virke som Maren har tiltro til han siden hun henvender seg og søker bekreftelser. Det viser hun flere ganger ved å spørre han om det hun gjør er riktig. Utsagn som; «Hva skal jeg skrive? Skal jeg skrive det? Skal jeg bare skrive 2 stein-heller?», viser at hun henvender seg til han når hun er usikker. Hun bidrar lite med innspill og refleksjon underveis i arbeidet med å løse problemet. Vi observerte at hun ofte tok seg av de praktiske oppgavene.

I gruppe 1 ble det tydelig at elevene hadde ulike posisjoner eller roller, selv om læreren ikke hadde fordelt ut formelle roller. Årsaken til Marens passive rolle kan være at hun føler seg underlegen de andre gruppedeltagerne. Sfard and Kieran (2001) sier at en slik rollefordeling kan legge føringer på hva slags matematiske bidrag elevene bidrar med i samtalen, og hvor mye både den underlegne og den overlegne vil kunne få ut av den matematiske samtalen. Videre sier de at å skape matematisk mening er utfordrende når én elev står for de fleste ytringer, slik tilfellet ble i denne gruppen. En årsak til at elever ikke deler ideene og tankene sine, kan skyldes at de selv ikke har kommet frem til dem enda. Sfard og Kieran skriver at det å gjøre egne tanker synlige, slik at det fører til læring i matematikk, er vanskelig. Studien deres konkluderer med at utbyttet av den matematiske samtalen har nær sammenheng med hvor effektiv kommunikasjonen mellom elevene er (Sfard & Kieran, 2001).

Inger deler sine løsningsforslag med de andre, men får ingen feedback fra Erik og Maren. Trolig fører hans lederrolle til at hun gir opp, siden hun i linje 15 mener Erik kan skrive for han vet alt. Som vi ser i linje 16 forsetter Erik sitt resonnement og jobber med eget løsningsforslag. Det kan se ut som han verken lytter eller reflekterer over Ingers innspill, siden han ikke kommenterer eller gjør bruk av hennes forslag. Samtalen mellom deltagerne i gruppe 1 bærer i denne sekvensen preg av det Littleton and Mercer (2010) omtaler som disputtpregede samtaler. Slike samtaler karakteriseres gjennom konkurranse, uenighet og individuelle beslutninger med få forsøk på å kombinere ressursene til samtalepartnerne, mangel på konstruktiv kritikk og mangel på forslag til løsninger (Dahl, Klemp, & Nilssen, 2020).

| | | |
|---|---|---|
| 13. | Maren | Skal jeg bare skrive 2 steinheller? |
| 14. | Erik | Skriv som er lik 4 steinheller. Når du dobler så må du huske å ta minus 2 på slutten. |
| 15. | Inger | Kan ikke bare Erik skrive? Han vet absolutt alt (*latter*). |
| 16. | Erik | Når vi dobler, må vi også huske å ta minus 2 på slutten. Og ta minus på slutten, 2s. |

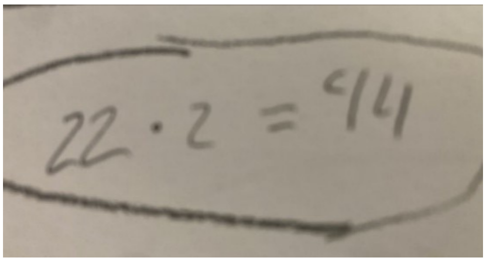
Et viktig mål med devolusjonen var å få elevene til å overta ansvaret for å løse problemet med «blomsterbed» oppgaven. For å oppnå det, ble en didaktisk kontrakt etablert med gjensidige forpliktelser og forventninger. I den didaktiske kontrakten ble det klargjort hvilke regler og kriterier som ligger til grunn for samarbeidet. Det ble forventet at de skulle være gode lyttere, fortelle hva de mener, tilpasse seg, at de må gi og ta og å resonnere og argumentere for og imot andres forslag. Det ble også eksplisitt forklart at vi er avhengige av alle deltagerne i gruppa. Vi forventet i a priori analyse at elevene i den adidaktiske situasjonen skulle diskutere internt i gruppa og bruke det adidaktiske miljøet de hadde fått til rådighet. En svakhet ved a priori analyse var at vi ikke hadde tatt høyde for utfordringer som oppstår når elevene inntar ulike roller. I tillegg burde vi sett hvilke faktorer som hindrer at samarbeid fører til læring av matematikk. Sfard og Kieran (2001) minner om at samarbeid er krevende, og at alle samtaler derfor ikke er like produktive eller utbytterike. Lærer burde vært forberedt på regulering ved å henvise til den didaktiske kontrakten fra devolusjonen, ved å repetere forventingene til samarbeidet. Siden samarbeidet tidvis var utfordrende, ble den didaktiske kontrakten brutt, noe som ga gruppe 1 hindringer i arbeidet mot målkunnskapen. Slike utfordringer mener vi kan forebygges ved å trene elevenes samarbeidskompetanse, fordi læring gjennom samarbeid kan bidra effektivt til faglig læring og læring av samarbeids-ferdigheter (Ludvigsen & Norge, 2014). Samarbeid og diskurs av høy kvalitet har sterk sammenheng mellom positiv faglig læring når samtalen har karakter av å være utforskende (Littleton & Mercer, 2010). I slike samtaler deles kunnskap, ideer utfordres, bevis vurderes og muligheter sammenlignes før felles avgjørelser blir tatt (Dahl et al., 2020).

### 5.1.3 Elevenes forkunnskaper

En forventning i a priori analyse er at elevene muligens ville bruke proporsjonal tenkning både når de går fra $f_5$ til $f_{10}$, og $f_{10}$ til $f_{20}$. Da antallet blomsterbed ble doblet fra $f_5$ til $f_{10}$, brukte flertallet av elevene umiddelbart en hel objekt strategi. De anvendte en proporsjonal tenkning og doblet antall heller. Utdraget nedenfor er hentet fra dialogen mellom to deltagere, og er et representativt eksempel på bruk av hel objekt strategi. Som linje 3 viser, er Roger trolig på leting etter en mer hensiktsmessig måte å løse problemet når antallet blomsterbed øker. Han ønsker å bruke svar de allerede har. Hans strategi tar utgangspunkt i antall heller de har funnet for figurnummer 5 i figurmønsteret. Videre multipliseres dette antallet med proporsjonalitetsfaktoren 2 for å finne antall heller for 10 blomsterbed. I linje 4 gir Maya feedback på at Rogers forslag stemmer.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Roger | Jeg tror det er 44 jeg og, fordi det blir bare … (*blir avbrutt*) |
| 2. | Maya | Her er det 5, ikke sant. |
| 3. | Roger | Vi har 5 og neste skal være 10, så da ganger vi det svaret vi har allerede. |
| 4. | Maya | Ja, det blir 44. |

Dialogen kan tyde på at elevene bruker en numerisk tilnærming. Deres valg av strategi er trolig basert på tidligere erfaringer med dobling. Det er enklere å benytte seg av multiplikasjon enn gjentatt addisjon, som har vært deres strategi til nå. Derfor blir trolig deres strategivalg dobling. Denne metoden ville gitt riktig løsning i de tilfellene der figurnummer og antall komponenter i figuren er direkte proporsjonale størrelser. Dette er ikke tilfelle for blomsterbedoppgaven, fordi det må tas hensyn til konstantleddet som er 2. Det ble dermed en feiltolkning der de anvender proporsjonalitetstenkning i en ikke proporsjonal sammenheng. Valget av strategi indikerer at elevene dermed ikke forholdt seg til strukturen i figurmønsteret, men i stedet til relasjonene mellom tallverdiene som figur 19 viser et eksempel på. Utregningen de gjør, og strategien de bruker antyder en numerisk tilnærming.




**Figur 19: Elevene doblet figurnummer 5 for å finne figurnummer 10**

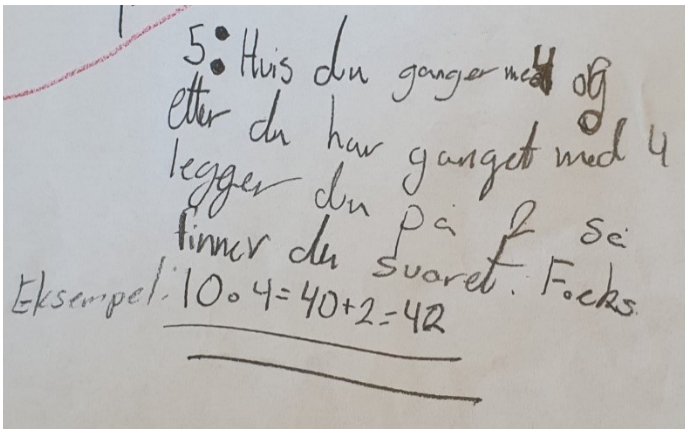
En årsak til valg av strategi kan være elevenes tidligere erfaringer med proporsjonalitet. Det har trolig vært praktiske forhold som inneholder to, eller noen få ekvivalente forhold. De har antakelig jobbet med proporsjonalitet der de har erfart at om en størrelse dobles, dobles også den andre, og om den ene halveres, halveres den andre. Elever møter ofte en overvekt av proporsjonale situasjoner i arbeidet med skolematematikk, og i sin egen hverdag (Solem et al., 2017). Det kan for eksempel være vekt og pris for varer, fart og tilbakelagt strekning. Fenomenet omtales i forskningslitteraturen som «Linear imperative», trangen til å tenke proporsjonalt (Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2008). Dette medførte antagelig at elevens ensidige forkunnskaper om proporsjonalitet ble et hinder i deres vei mot målkunnskapen.

### 5.1.4 Elevenes matematiske språk og begreper

I a priori analyse påpeker vi utfordringer elevene vil møte knyttet til verbaliseringsnivå og symboliseringsnivå (Lee, 1996). Lee fant i sin studie at elevene har utfordringer med å uttrykke seg presist om figurfølgen. Dette støttes av Warren og Cooper (2008) sin studie som hevder at elevene mangler presisjon i deres beskrivelse av figurfølgen. I denne studien viste det seg også utfordrende å få elevene til å bevege seg fra et uformelt muntlig språk til skriftspråk. I a priori analyse vektla vi at elevene måtte forklare sine tanker og metoder for hverandre. Dette skulle hjelpe dem til å reflektere både over hva de skulle si, men også gi dem et grunnlag for å kunne uttrykke seg skriftlig. Å kommunisere i og mellom gruppene kan hjelpe elevene til å reflektere over egne tanker, samtidig som de får innblikk i andres ideer og tanker. Audun uttrykker sin frustrasjon i arbeidet med den skriftlige forklaringen: «Vi jobber med matteoppgaver, men det som er problemet, er å skrive.» Auduns utsagn viser at til tross for tilrettelagte prosesser der en trener på å uttrykke seg, opplevde han det likevel som utfordrende å skrive forklaringen. Han sier at det å formulere seg skriftlig var en større utfordring enn å finne utviklingen av figurmønsteret. Trolig er også Audun sin frustrasjon over å uttrykke seg skriftlig et resultat av upresise matematiske begreper.

Elevenes upresise matematiske språk viste seg å være en hindrende faktor i arbeidet med å generalisere. For å kunne produsere en verbal representasjon av figurmønsteret, må elevene ha forstått den generelle utviklingen av figurfølgen. Hensikten med formuleringsfasene var å skape økt trening, bevissthet og forståelse i det å uttrykke seg presist. Det kan hjelpe dem i neste ledd der figurmønsteret skal generaliseres. Elevenes skriftlige forklaringer og argumenter skulle løftes til et mer presist matematisk språk i institusjonaliseringen.

Figur 20 er et representativt eksempel på et elevarbeid som viser en upresis beskrivelse av hvordan en kan finne antall steinheller for et hvilket som helst antall blomsterbed.




**Figur 20: Den generelle forklaringen til gruppe 4**

For å kunne forstå hva gruppe 4 mener med sin forklaring, må problemstillingen være kjent. Elevene sier ikke noe om hva som skal ganges med 4, sannsynligvis mener de antall blomsterbed. De sier ei heller noe hvorfor 2 skal legges til når de har ganget med 4, trolig er det snakk om konstantleddet som er 2. Som vi ser, mangler forklaringen deres utdypninger, og setningene er derfor preget av forkortelser og fremstår som ufullstendige. De underbygger sin forklaring ved å gi et eksempel. Eksempelet gruppa bruker med $f_{10}$, tolker vi er et empirisk bevis. Lannin (2005) omtaler empirisk bevis med at det vises til ett enkelt tilfelle når valg av strategi begrunnes.

Den skriftlige representasjonen til gruppe 4 er basert på deres muntlige beskrivelse. I hverdagslig språk kan samme ord bety vidt forskjellige ting, og utsagn kan ofte tolkes på ulike måter. Elevarbeidet i figur 20 viser at de starter med å bruke ordet «hvis», noe som gjør at deres forklaring kan misforstås. Ordet «hvis» kan skape en forståelse av at deres forklaring gjelder i det tilfellet tallet 4 velges. Det kan forstås som det gjelder kun for det ene tilfellet, og ikke generelt. Trolig har de ment det som en generell instruks, men leseren er igjen avhengig av konteksten for å forstå hva gruppa mener. Gruppas hverdagslige språk blir upresist. Dette er et eksempel på at å uttrykke seg presist i matematikken er viktig for å unngå misforståelser. Elevenes upresise matematiske språk ble en hindrende faktor i arbeidet med å generalisere. Derfor mener vi det er viktig at elevene fortsetter å øve, både muntlig og skriftlig, på bruk av det matematiske språket.

## 5.2 Muliggjørende faktorer

I følgende delkapittel presenteres seks underkategorier som kategoriseres i muliggjørende faktorer. Videre er det utviklet to underkategorier som omhandler vårt oppgavedesign og lærerens devolusjon. De fire siste underkategorier omhandler elevenes interaksjon med miljøet. Tabellen i figur 21 viser en oversikt over de muliggjørende faktorer ved den designede undervisningssituasjonen.

| **MULIGGJØRENDE FAKTORER** | | |
|---|---|---|
| **Oppgavedesign** | *Tid* | Ingen tidsbegrensning |
| **Devolusjonen** | *Den didaktiske kontrakten* | Vellykket etablering av den didaktiske kontrakten |
| **Interaksjon med miljøet** | *Elevenes samarbeidskompetanse* | Lytte til hverandre, aktive |
| | *Figurativ tilnærming* | |
| | *Elevenes interaksjon med materielt miljø* | Direkte operasjoner på materielt miljø |
| | *Feedback fra medelever* | Kommunikasjon |

**Figur 21: Oversikt over muliggjørende faktorer ved undervisningssituasjonen**

## 5.2.1 Oppgavedesign

Da vi designet den didaktiske situasjonen, vektla vi at elevene skulle få tilstrekkelig med tid for å løse problemet. Tidsbruk viste seg å bli en muliggjørende faktor i å nå mål-kunnskapen. Oppgaveformuleringen ble nøye diskutert og bearbeidet slik at elevene kunne gå gradvis til verks med å oppdage det voksende mønsteret. Erfaringene fra pilotprosjektet viste hvordan den designede situasjonen og den didaktiske tilnærmingen påvirket elevenes arbeid med figurmønsteroppgaven. Vi erfarte at tidsbruk ble en hindrende faktor i pilotprosjektet. Observasjoner viste at elevene i pilotprosjektet ikke lyktes i like stor grad i sin generalisering, som de som deltok i studien. Det var trolig ikke mønstergeneraliseringen i seg selv som var utfordringen, men oppgavedesignet. Derfor ble oppgavedesignet endret slik at elevene i større grad fikk tid til å utforske hverandres løsningsforslag, gi feedback og operere direkte på det materielle miljøet. På den måten ble tidsbruk en sentral faktor for alle fasene i den didaktiske situasjonen. I opp-summeringen av arbeidsøkta understreket tre elever at de likte å jobbe grundig og over tid med oppgaven. På spørsmål om hvordan de syntes det var å jobbe med oppgaven, svarte de:

| | |
|---|---|
| Maya | Det jeg lærte av oppgaven, var at det er gøy å regne på samme ting uten å begynne på en ny oppgave! |
| Sara | Jeg likte at det var forskjellige spørsmål om en ting. |
| Audun | Det var liksom litt gøy å ha en oppgave hele tiden. Det var ikke noen ting vi måtte bli ferdig med, hvis du skjønner. Det var gøy. |

Som vi ser av elevenes uttalelser, gir de uttrykk for at de synes det er gøy å regne på samme problem hele tiden uten å begynne på noe nytt. Elevene opplevde at de hadde god tid, og det var ikke noen ting de måtte bli ferdig med. Ved å gi elevene tilstrekkelig med tid, er vår erfaring og observasjon at elevene i større grad lyktes i å nå mål-kunnskapen.

### 5.2.2 Devolusjonen

Devolusjonen, der elevene skulle overta ansvaret for å løse problemet uten lærers hjelp, viste seg å ha faktorer som muliggjorde arbeidet i den adidaktiske fasen, aksjonsfasen. Avklaringer og klargjøring av den didaktiske kontrakten er sentral i devolusjonen. Målet med den er at elevene skal overta ansvaret i den adidaktiske situasjonen. For å klargjøre den didaktiske kontrakten for elevene, informerte læreren om problemet. Det ble forventet at elevene skulle samarbeide og diskutere internt i gruppa, men at de kunne spørre læreren hvis noe var uklart eller de sto fast. De ble forklart hvilke forventninger de kunne ha til lærerens rolle i de adidaktiske fasene. Før oppgaven ble overlatt til elevene, ble den forklart, begreper avklart samt at de ble vist hvordan blomsterbedene skulle plasseres inntil hverandre. Oppgaven ble lest høyt i fellesskap, og spørsmål ble avklart, slik at alle hadde mulighet til å bidra.

Alle gruppene overtok ansvaret for å løse problemet etter devolusjonen. Utdraget fra gruppe 2 er et representativt eksempel på hvordan deltagerne kom i gang. Som vi ser av første linje i transkriberingen, tar Maya ansvar ved å spørre Daniel om han vil lese høyt, som var en del av den didaktiske kontrakten. Etter at den er lest, spør Daniel de andre om de har skjønt oppgaven. I den didaktiske kontrakten var det forventet at gruppa skulle sørge for at alle forstår oppgaven, noe Daniel følger opp. I linje 4 forklarer Daniel hvordan han tenker til gruppa. Han foreslår bruk av tegning som representasjon. Roger starter sin strategi (5) med å telle antall heller rundt ett bed. Dialogen viser at alle tre gruppemedlemmene er aktive, og devolusjonen har gjort at elevene kom i gang i aksjonsfasen.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Maya | Vil du lese? |
| 2. | Daniel | Ja, jeg kan lese jeg. *(Eleven leser fra oppgavearket.)* Sånn, skjønte dere alt? |
| 3. | Maya | hmm *(Vanskelig å høre om begge elevene bekrefter)* |
| 4. | Daniel | Ok, skal vi begynne, da? Sånn som jeg tenker, oppgave a da skal vi finne svaret på steinheller til ett blomsterbed. Hvis dere vil, så kan vi tegne det. |
| 5. | Roger | Det virker som 1,2,3,4,5,6 ikke sant *(Daniel avbryter mens eleven teller)* |

Devolusjonen består dermed ikke bare av at læreren presenterer oppgaven som elevene skal engasjere seg i. Den handler også om å få elevene til å bli ansvarlig for å søke etter en løsning (Brousseau, 1997).

### 5.2.3 Elevenes samarbeidskompetanse

Vi vektla i a priori analyse at elevene måtte forklare egne tanker og metoder for hverandre. Å kommunisere egne tanker bidrar til refleksjon samtidig gir det mulighet for innblikk i andres ideer og tanker. Datamaterialet viser flere situasjoner som indikerer at elevene gjennom samarbeid var aktive og deltagende for å lære. Miljøet stimulerte elevene til refleksjon over egen læring og utvikling av gode løsningsstrategier. Feedback fra miljøet ga elevene mulighet til å følge med på egen utvikling i løsningen av problemet. Utdraget nedenfor er et representativt eksempel på god kommunikasjon og samarbeid i gruppe 2. Alle deltagerne er aktive, lytter til hverandre, og elevene kommuniserer hva de tenker. Esmonde (2009) understreker viktigheten av å samtale med andre om egne meninger i matematikk, og å delta i matematiske diskusjoner for å konstruere egen kunnskap og oppnå læring. Vi tolker det slik at elevene er trygge på hverandre, og at det er dynamikk i gruppa selv om elevene har ulike generaliserings-strategier. Elevene blir møtt med argumenter, og vi anser at det er fleksibilitet i gruppa. Kommunikasjonen og samarbeidet i gruppa er viktige faktorer i å nå målkunnskapen.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Roger | Vi har 5 og neste skal være 10, så da ganger vi det svaret allerede |
| 2. | Maya | Ja, det blir 44 |
| 3. | Daniel | Nei, det blir feil. Vent, hør. Husker dere? At den første er 6, men bortover så blir det bare pluss 4. |
| 4. | Roger | Ja |
| 5. | Daniel | Ja, men jeg tror det blir det. Siden den første var vi jo enig om var 6 ikke sant? Men blir bare pluss 4 på 2,3 og så videre. Det var vel det vi fant ut av i stad, ikke sant? |
| 6. | Maya | Ja, vi kan jo bare telle dem her og gjøre det 10 ganger |

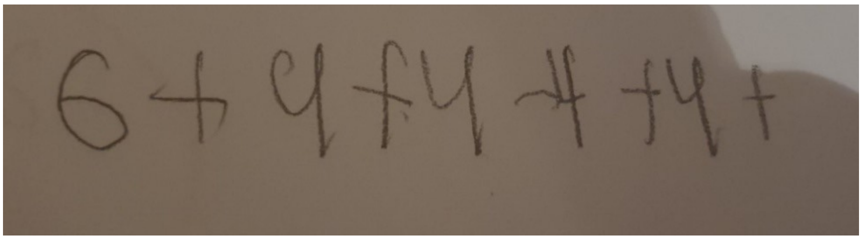
Selv om elevene har ulike tilnærminger for å løse problemet, bidrar alle aktivt og forklarer egne strategier. De gjør seg opp tanker, diskuterer og produserer løsningsforslag. I linje 1 bruker Roger en hel-objekt strategi der han dobler uten justering for feiltelling. Han får støtte av Maya, som i linje 2 gir svaret på hans strategi. Daniel er uenig, og i linje 3 minner han de andre på tidligere løsningsstrategi. Vi antar at Daniel her forsøker å få Roger og Maya til å se den figurative sammenhengen mellom $f_5$ og $f_{10}$. Han viser til at de er enige om at det var 6 heller rundt første bed, og at de kan legge til 4 heller for de neste bedene. I linje 6 foreslår Maya at de kan telle steinhellene. Dette kan tyde på at hun ikke mestrer å identifisere mønsteret ennå. Vi tolker det slik at det er god kommunikasjon og samarbeid i gruppa, fordi de er aktive, presentere egne strategier, utfordrer hverandres ideer og lytter til hverandre. Samtaler der språket brukes på en måte som er effektivt for eksplisitt resonnering omtales av Littleton og Mercer (2010) som utforskende samtaler. Gruppe 2ˈs samarbeid og form for kommunikasjon var trolig en muliggjørende faktor for gruppa. Flere forskere er enige om at engasjerte og aktive elever bidrar til økt utvikling av elevenes matematiske ferdigheter og forståelse (Webb et al., 2014; Whicker, Bol, & Nunnery, 1997). I oppsummeringen av arbeidet ga gruppa tilbakemelding på hvilke faktorer de syntes hadde bidratt til godt samarbeid. De kom med utsagn som; «Alle var med», «Alle sa sin mening» og «Vi lyttet til hverandre». Disse uttalelsene underbygger at de selv opplevde samarbeidet som vel-fungerende. Våre observasjoner og elevenes egne opplevelser, viser at samarbeid periodevis var en muliggjørende faktor.

### 5.2.4 Figurativ tilnærming

I a priori analyse vises det til Becker og Rivera (2006) sin studie der det var elever som hadde en figurativ tilnærming, som lyktes best i å generalisere. Lannin (2005) fremhever det visuelle aspektet i sin forskning. Måten elevene visualiserer, gjør at de først lager bilder av hvordan de ser figuren, dernest uttrykker hvordan de ser figuren, for til slutt å lage et uttrykk basert på visualiseringen.

Et fåtall av elevene brukte figurativ tilnærming. Sitatet nedenfor er derfor et spesielt eksempel på en figurativ tilnærming fra datamaterialet. Tidlig i aksjonsfasen kommer det fram hvordan Daniel dekomponerer figuren: «For å slippe å tegne alt rundt, så blir det på en måte 6 rundt. Men på neste blomsterbed, så blir det bare pluss 4. Det blir ikke pluss

6, fordi det blir minus disse 2. Da blir det bare pluss 4 for hver.» Sitatet viser oss hvordan Daniel dekomponerer og ser figuren. Han ser at det første blomsterbedet har seks steinheller, deretter legger han til fire steinheller for hvert bed. Ved Daniels dekomponering, vil den numeriske representasjonen være $6 + 4 + 4 + 4 + \cdots$, og den algebraiske $6 + ((x - 1)x4)$. På figur 22 ser vi den numeriske representasjonen til gruppe 2.




**Figur 22: Den numeriske representasjonen for figurnummer 5**

Våre observasjoner tyder på at Daniel har en figurativ tilnærming, hvor han fokuserer på figurene og deres egenskaper. Han forklarer hvordan figurmønsteret står i sammenheng med den geometriske representasjonen i figurmønsteret. Da gruppe 2 skal finne $f_{100}$, sier Daniel: «Men vi kan tenke litt annerledes. Den første er alltid 6, ikke sant. Og de 99 som er igjen – det må ganges med 4, og da får vi 396». Daniel har en figurativ tilnærming, og mestret å lage et generelt uttrykk for figurmønsteret. Denne observasjonen støtter Becker og Rivera (2006) sin forskning om at elever som har en figurativ tilnærming, har større sjanse for å lykkes i å generalisere.

Når Daniel sier at de kan tenke litt annerledes, tolker vi det slik at han ønsker at gruppa skal gå bort fra en hel objekt strategi, som er gruppas opprinnelige strategi på dette tidspunktet. Forslaget deres nå er å multiplisere $f_{10}$ med 10. Som vi ser av sitatet over, viser Daniels resonnering en kontekstuell strategi, fordi han sier at den første alltid er 6, og de 99 andre må ganges med 4. Han presenterer for de andre en eksplisitt regel basert på informasjonen som er gitt i situasjonen. Han ser veksten i figurmønsteret, og trenger ikke å bygge neste figurnummer på det forrige. Han viser god resonneringskompetanse der han begrunner det han gjør med tegningen, og han viser en anvendelseskompetanse gjennom å formulere et matematisk problem, representere det, for så å løse det. Slik vi ser det, viser Daniel en helhetlig matematisk kompetanse. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som fem sammenvevde komponenter: forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement. De fem komponentene er tett sammenflettet og avhengig av hverandre, og bør utvikles samtidig, for å utvikle en helhetlig matematisk kompetanse.

### 5.2.5 Elevenes interaksjon med materielt miljø

Elevene opererte direkte på det materielle miljøet. Konkretiseringsmateriellet, ferdig utklippede blomsterbed og heller, hadde til hensikt å gi elevene objektiv feedback slik at de kunne se og forstå om deres løsningsforslag var hensiktsmessig eller ikke. Etter arbeidet med oppgave 2 skulle gruppene presentere løsningsforslagene for hverandre. Fasen ble avsluttet med at elevene skulle pusle sammen 10 blomsterbed. Tanken var at de skulle få feedback på egen strategi gjennom å operere direkte på det materielle miljøet. Vi så for oss at å sette sammen figurnummer 10 ville åpne opp for matematiske samtaler i gruppene, og legge til rette for at elevene skulle sette ord på tanker og ideer, samtidig som konkretiseringsmateriellet ville gi objektiv feedback.

Utdraget fra gruppe 2 belyser hvordan miljøet har et adidaktisk potensial som gir progresjon mot målkunnskapen. 2 av 3 deltagere i gruppa anvender en hel objekt strategi. De bruker figurnummer 5 som en enhet for å finne figurnummer 10, ved å multiplisere med 2. Roger og Maya tror derfor de trenger 44 steinheller, mens Daniel mener de trenger 42 heller. Da gruppa skal sette sammen 10 blomsterbed, får elevene feedback ved å operere direkte på det materielle miljøet.

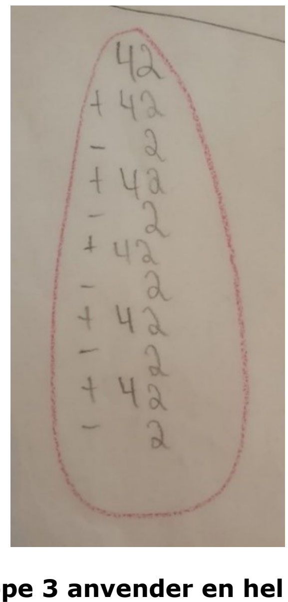
1. Roger	Her var det 2 ekstra
2. Maya	Da ble det 42 da
3. Daniel	Fordi det ikke ble 6 på slutten

Etter at de har satt sammen 10 blomsterbed, står de igjen med to ekstra steinheller, som Roger kommenterer i linje 1. Det materielle miljøet ga dermed elevene objektiv feedback på at deres strategi ikke er riktig, siden de står igjen med to ekstra heller. Daniel underbygger, med sin forklaring i linje 3, at det siste blomsterbedet ikke har 6 steinheller. I dette eksempelet ga det materielle miljøet nødvendig feedback på at gruppas hel objekt strategi var feil i denne sammenheng. Feedbacken ga elevene mulighet til først å validere egen strategi, for deretter å endre.

### 5.2.6 Feedback fra medelever

Som en del av a priori analyse, ønsket vi å utvikle et miljø hvor elevene får objektiv feedback til å løse problemet i de adidaktiske fasene. Vi har valgt et representativt eksempel som vi mener viser hvordan objektiv feedback fra miljøet fører til endring av strategi.

På figur 23 ser vi at gruppe 3 har startet med et løsningsforslag for $f_{100}$. Figuren viser at gruppa anvender en hel objekt strategi med justering for feiltelling. En slik strategi lar seg ikke eksplisitt generalisere.




**Figur 23: Gruppe 3 anvender en hel objekt strategi**

I formuleringsfasen hvor to og to grupper forklarer sine strategier, uttrykker Inger (gr. 1) hvordan hun har dekomponert figuren. Hun opererer på det materielle miljøet ved å vise at de trenger 4 heller for hvert bed, og at det legges til 2 heller til slutt. Samtidig som hun viser på figuren, sier hun: «Man tar 4 + 4 + 4… så legge til 2.» Etter denne objektive feedbacken, endrer gruppe 3 sin strategi.

I devolusjonen var ett av vilkårene i den didaktiske kontrakten at elevene ikke skulle bruke viskelær, eller klusse over løsningsforslag de ønsket å forkaste. På figur 23 ser vi at gruppe 3 har brukt rød blyant, som antyder at de har forkastet hel objekt strategien. Ved hjelp av Ingers feedback endret gruppe 3 sin strategi slik at de ble ledet mot mål-kunnskapen. Elevarbeidet fra gruppe 3, som er sitert, viser at de utviklet en eksplisitt forklaring til rektor: «Han kan ta 4 ganger antall blomsterbed, så kan han plusse på 2.»

Våre observasjoner viser at miljøet ga elevene objektiv feedback i arbeidet med å løse problemet, som i dette eksempelet førte til endring av strategi. Feedback fra miljøet bidro til fremgang mot målkunnskapen.

## 5.3 Oppsummering av funn

Et viktig resultat fra a posteriori analyse viser at det matematiske språket ble en hindring for elevenes kunnskapsutvikling. I studien observerte vi flere elever som ga uttrykk for at det var utfordrende å forklare og begrunne egne løsningsforslag, og hvordan de hadde resonnert. Dette samsvarer med studier som ble presentert i den didaktiske analysen. I utsagnet til Audun, «Vi jobber med matteoppgaver, men det som er problemet, er å skrive.», uttrykker han at det å formulere seg skriftlig var en større utfordring enn å løse selve problemet. Trolig er en årsak at han har upresise matematiske begreper som kunne ha hjulpet han i å formulere seg. Vi mener det er viktig å gi elevene målrettet trening i bruk av matematiske begreper. Diskusjon av ulike matematiske problemer med andre elever og lærere, kan være med på å avklare og styrke elevenes begreper. Utviklingen av elevenes matematiske språk må gå fra at de bruker et enkelt matematisk språk til å bruke presis fagterminologi, uttrykksmåte og presise begreper.

Arbeid med å styrke det matematiske språket underbygges både i Udirs omtale av de muntlige ferdighetene i matematikk og fagets kjerneelementer. Lærere kan ta i bruk den matematiske samtalen i klasserommet for å fremme elevers tenking og læring. Wæge (2015) har utviklet syv samtaletrekk som har et mønster som kan brukes for å drive den matematiske samtalen fremover. Samtaletrekkene legger til rette for diskusjoner og resonnement fra elevene, og får dermed elevene mer deltagende. Det er gjennom medvirkning i undervisningen at elever kan få utviklet sine matematiske ferdigheter og det matematiske språket (Wæge, 2015).

Et sentralt funn fra denne studien er elevenes samarbeidskompetanse. Elevenes samarbeidskompetanse viste seg å være både en hindrende og en muliggjørende faktor. Resultatene fra a posteriori analyse viser at samarbeidet i enkelte grupper oppsto som en hindring. I gruppe 1 har vi sett at elevenes samtaletype var disputtpreget i perioder. De viste få forsøk på å innlemme hverandres forslag, og en av gruppedeltagerne tok avgjørelser for hvordan oppgaven skulle løses. Atmosfæren i gruppa var preget av lite samarbeidsvilje, og det ble gitt lite konstruktiv kritikk på løsningsforslag. Det ble på den måten i liten grad gitt feedback på hverandres resonnement. Elevenes samarbeids-kompetanse hadde derfor svekket feedbackpotensial i de adidaktiske fasene. Vi mener elevenes samarbeidskompetanse var en hindrende faktor, som kun kan forebygges ved å trene på å samarbeide, i likhet med funn fra studien til Svinvik (2018). Mercer og Sams (2006) forskning viste positive resultater i det faglige samarbeidet hos elevene der det hadde vært opplæring i grunnregler for utforskende samtaler, og gitt eksplisitt undervisning i disse. Eksplisitt undervisning i språkbruk i utforskende samtaler vil hjelpe elevene til å utvikle individuelle ferdigheter i å resonnere (Dahl et al., 2020). Kommunikasjon og samarbeid fremholdes som sentrale faktorer for elevers læring, som også understrekes i utredningen «Elevenes læring i fremtidens skole» av Ludvigsenutvalget. I gruppe 2 observerte vi tidvis godt samarbeid og kommunikasjon gjennom utforskende samtaler i de adidaktiske situasjonene. Kjennetegn ved godt samarbeid og utforskende samtaler, som vi observerte, var at alle deltagerne var aktive, de lyttet til hverandre og elevene argumenterte for sine resonnement. Atmosfæren i denne gruppa var preget av tillit gjennom at de stilte spørsmål og bidragene som kom bygget på det som var sagt tidligere og førte til kunnskapsutvikling. På den måten fikk elevene feedback fra medelever, noe som ble en muliggjørende faktor i å nå mål-kunnskapen.

Et annet funn i studien er hvordan oppgavedesignet påvirker elevenes kunnskaps-utvikling. Vi erfarte at valget av sekskantet form ble en svakhet ved oppgavedesignet, og dermed en svikt i a priori analyse. Vi antok i a priori analyse at elevene ville tegne utviklingen av figurmønsteret for de lave figurnumrene. Vår hypotese var at en tegne – og tellestrategi ville hjelpe elevene til å se mønsteret i figurfølgen, og gi dem objektiv feedback gjennom å telle antall heller. Siden elevene gikk bort fra å tegne og telle, førte det trolig mot en numerisk tilnærming. De gikk vekk fra figuren og så istedenfor på tallverdiene tilknyttet figurfølgen. Manglende feedback ble en begrensende faktor. Dette er funn som samsvarer med tidligere forskning. Strømskag Måsøval (2011) og Svinvik (2018) skriver at det ikke nødvendigvis er generalisering av figurmønster som er problemet, men snarere oppgaveformuleringene og måten temaet undervises på. I etterkant har vi drøftet om mulige informasjonshopp kunne hjulpet elevene tidligere mot en figurativ tilnærming. Hvis betingelsene for utformingen av blomsterbedene og stein-hellene hadde blitt endret, kunne det muligens blitt enklere for elevene å tegne. De ville da kunne få objektiv feedback gjennom å telle antall heller på tegningen, og trolig bli ført mot en mer figurativ tilnærming.

Oppgavedesignet inneholder flere didaktiske variabler. Artigue (2015) beskriver didaktiske variabler som de faktorer som kan påvirke elevenes læringsutbytte som læreren har kontroll på. Vi valgte innholdet og rekkefølgen i den didaktiske situasjonen. En viktig muliggjørende faktor i oppgavedesignet var tidsbruken i de ulike fasene. Vi ga elevene tid til å utforske hverandres løsningsforslag, gi feedback og operere direkte på det materielle miljøet. Resultatene av analysen viser at ved å operere på miljøet, både det materielle og medelever, fikk de nødvendig objektiv feedback. En devolusjon med en tydelig didaktisk kontrakt viste seg avgjørende for å skape en god overgang til de adidaktiske fasene.

Teorien hjalp oss i å ivareta helhetsperspektivet i undervisningen. Vi erfarte at den epistemologiske analysen ga oss viktig kunnskap som vi tok med oss da vi designet den didaktiske situasjonen. Instruksjonsdesignet førte til at lærer opplevde å være godt forberedt, som førte elevene mot en institusjonalisering av målkunnskapen. Vi mener at kunnskap og erfaring om TDS kan bidra til å støtte lærerspesialister i å styrke fagkunnskapen og profesjonsfelleskapet i skolen.

# 6 Lærerspesialistrollen

I dette kapittelet ses det på formålet med lærerspesialistrollen. Videre belyses det hvordan lærerspesialister kan benytte TDS som et nyttig rammeverk for tenkning rundt matematikkundervisning inn mot profesjonsfellskap av matematikklærere. Vi beskriver elementer, spesielt føranalysen, som er hensiktsmessig ved planlegging og analyse av ordinære undervisningssituasjoner. Deretter oppsummeres det ved å vise til hvordan TDS ivaretar helhetsperspektivet i matematikkundervisningen. Avslutningsvis trekker vi frem problemstillinger som kan være relevante for lærerspesialister og ny forskning.

## 6.1 TDS og profesjonsfellesskap

Formålet med funksjonen som lærerspesialist er todelt. En målsetting er at lærere skal oppleve faglige utviklingsmuligheter, og et ønske om å fortsette og undervise. Den andre funksjonen beskrives med at lærerspesialisten skal bidra til å styrke det kollektive profesjonsfellesskapet og utviklingen av skolen som lærende organisasjon (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Viktigheten av profesjonsfellesskap understrekes i læreplanens overordnende del der det poengteres at skolene skal være et profesjons-faglig fellesskap der lærere, ledere og andre ansatte skal reflektere over felles verdier, og vurdere og videreutvikle praksis (Utdanningsdirektoratet, 2020c). Kravet i LK20 gir anledning til å forsterke skolens kollektive praksis, og å etablere rammer der skolens formål kan ivaretas og videreutvikles. Det trekkes frem to forhold, i St. meld. 21, «Lærelyst – tidlig innsats og kvalitet i skolen», ved læreprofesjonen som må styrkes for å legge til rette for bedre profesjonelle beslutninger som er grunnlaget for gode lærings-prosesser. For det første må læreres kunnskapsgrunnlag styrkes, og for det andre må det legges større vekt på de profesjonelle fellesskapene. Selve kjernen med arbeidet i profesjonelle læringsfellesskap er økt elevlæring gjennom fokus og bevissthet om læreres egen praksis (Vescio, Ross, & Adams, 2008). Så hvordan kan lærerspesialister støtte kollegaer i å være faglig oppdatert, sette seg inn i faglitteratur, forske på egen praksis og samle dokumentasjon på elevers læring?

TDS, med sin vitenskapelige tilnærming til utfordringer knyttet til undervisning og læring i matematikk, kan vise seg å være et godt hjelpemiddel i å utvikle profesjonsfellesskap i skolen. Ved bruk av rammeverket kan kollegier utforske og utvikle undervisning i og læring i matematikk. Det er lite trolig at et flertall av kollegier kjenner til TDS, så hvordan kan lærerspesialister bruke TDS i samarbeid med kollegaer som ikke er kjent med teorien? Vil kollegaer trenge å lære begrepene fra TDS for å ha nytte av ramme-verket? Begreper og modeller i TDS er krevende å forstå sier Strømskag, hovedsakelig fordi de er elementer i systemer og følgelig defineres og rangeres i forhold til hverandre (Strømskag, 2020b). Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian og Strømskag (2018) refererer i sin studie til en norsk og en fransk case der TDS benyttes. I den norske casen var lærerne aktivt med i utviklingen av den designede situasjonen, mens i den franske fikk lærerne gjennomføre og teste ut et opplegg som var planlagt av forskerne. Erfaringene fra studiene viste at de grunnleggende begrepene fra TDS var viktig for lærerens rolle i den didaktiske situasjonen, men at det ikke var nødvendig å kunne de teoretiske begrepene. Så uansett om teorien brukes eksplisitt i designet av matematikk-undervisningen, eller som en implisitt teori der designet som brukes er inspirert av teorien, vil den være et nyttig verktøy for lærere og lærerspesialister. De vil ha utbytte av å knytte begrepene opp imot praksis, og det som vanligvis blir gjort av forberedelser og analyse av undervisning. Rammeverket vil kunne hjelpe dem til å forutse relasjonen mellom kunnskapen som skal læres, den designede situasjonen og interaksjonen mellom lærer, elever og miljøet.

Mangiante-Orsola et al. (2018) hevder videre i sin studie at skriftlige elevbesvarelser eller observasjoner kan fungere som utgangspunkt for å diskutere betingelser og begrensinger ved å bruke begreper fra TDS. Med et slikt utgangspunkt kan et profesjons-fellesskap av matematikklærere se på og analysere hvilke faktorer som muliggjør og hindrer elevenes mulighet i å tilegne seg målkunnskapen. Diskusjoner der sammen-hengen mellom målkunnskap og miljø belyses, kan gi refleksjoner og ny kunnskap for lærere. I analysearbeidet kan profesjonsfellesskapet se på hva den didaktiske intensjonen til læreren var, og hvilken bruk av kunnskap og interaksjon med miljøet som var nødvendig for å løse problemet. Var oppgaven av en slik art at den sikret om mål-kunnskapen trengtes for å utvikle en optimal løsning på problemet? Videre kan lærerne analysere og diskutere hvorvidt elevene sine løsninger er formulert slik at andre kan løse problemet med samme strategi, og om løsningen deres kan rettferdiggjøres. En viktig faktor som må kartlegges, er hvorvidt miljøet ga elevene feedback i alle de adidaktiske fasene. De vil gjennom dette arbeidet kunne avdekke om det er noe ved miljøet som er problematisk for elevene, og se på hvilke endringer som bør gjøres på miljøet for å fjerne slike hindringer. Med TDS som rammeverk vil lærere dermed få innsikt og forstå ulike didaktiske fenomen som kan oppstå i en læringssituasjon hvor målet er en spesifikk matematisk kunnskap.

## 6.2 Føranalyse av matematisk innhold

En innføring av føranalyse i lærerkollegiet kan bidra til å skape nyttige faglige diskusjoner. Selv om metodologien i didaktisk ingeniørvirksomhet er utviklet for å designe og studere didaktiske situasjoner, er det flere elementer som er hensiktsmessig ved planlegging og analyse av ordinære undervisningssituasjoner. Spesielt nyttig kan de forbedrende fasene av målkunnskapen og a priori analyse være når det gjelder vurdering av de adidaktiske elementene i miljøet (Strømskag, 2020b). Føranalysen i didaktisk ingeniørvirksomhet inneholder analyser av målkunnskapen. Den epistemologiske- og didaktiske analysen har som mål å avdekke hvilke forhold og begrensinger som vil påvirke det didaktiske systemet, som angår målkunnskapen (Strømskag, 2020b). Det kan gi rom for å løfte frem spørsmål rundt begreper og teori, som kan bli grunnlaget for å designe en optimal undervisningssituasjon. Gode forberedelser gjennom den epistemologiske analysen av en matematisk kunnskap kan fungere som et didaktisk verktøy for å utnytte og utvikle egen faglig kompetanse.

TDS kan bidra til å bevisstgjøre og løfte frem ulik type kunnskap som kollegaer har. Dette kan være et utgangspunkt for å vurdere egen kunnskap, samtidig som én får tilegnet seg kollegaers kunnskap, noe som er sentralt i et profesjonsfellesskap. TDS vil dermed gi lærere mulighet til å styrke sitt kunnskapsgrunnlag gjennom faglige diskusjoner og teori, samtidig kan det profesjonelle fellesskapet styrkes.

Føranalysen åpner for refleksjoner og diskusjoner rundt lærers rolle i de didaktiske fasene, devolusjonen og institusjonaliseringen. Nyttige spørsmål og problemstillinger i arbeidet med devolusjonen er hva læreren gjør for at elevene skal ta over ansvaret for problemet? En viktig forutsetning for devolusjonen er elevenes opplevelse av at oppgaven har en hensikt og en anvendelse, og at elevenes engasjement påvirkes av miljøet og ikke læreren. I føranalysen bør det tas stilling til hvilke endringer i miljøet læreren må gjøre for å styrke det adidaktiske potensialet, og hva læreren kan gjøre for å sikre at elevene tilegner seg målkunnskapen. Det må forberedes hvilke reguleringer som kan bli nødvendige, og hvordan de bør håndteres slik at det sørges for kunnskapsutvikling uten å ødelegge og/eller endre målkunnskapen. I institusjonaliseringen skal det i føranalysen planlegges for hva læreren skal gjøre for å endre den oppnådde kunnskapens status til en referansekunnskap for framtidig bruk. Det må også forberedes hvordan lærer kan skape en sammenheng mellom elevenes løsninger og tilsiktet målkunnskap. Det er mange av de nevnte momentene som vil være hensiktsmessige ved planlegging og analyse av ordinær undervisning. De kan gi positive følger både for undervisningspraksisen og lærers faglige kompetanse, fordi den vil støtte planlegging, implementering, analyse og evaluering av undervisning.

## 6.3 Helhetsperspektiv

Innledningsvis stilte vi spørsmålet om hvordan lærerspesialister kan støtte kollegaer i å være faglig oppdatert, sette seg inn i faglitteratur, forske på egen praksis og samle dokumentasjon på elevers læring? TDS kan hjelpe lærerspesialister i å ivareta helhetsperspektivet i undervisningen, fra analysen av den matematiske kunnskapen, til institusjonaliseringen av målkunnskapen. Rammeverket kan støtte planlegging, design, implementering, analyse og evaluering av undervisning, og gir muligheter for faglige diskusjoner der fokuset er matematikk. TDS utfordrer lærere til å begrunne didaktiske valg med utgangspunkt i både teoribasert og erfaringsbasert kunnskap. Ved å ha kunnskap om denne teorien, kan det brukes som et redskap til å gi fagkunnskapen i matematikkundervisningen en sentral plass i utviklingen av matematikkfaget. TDS-basert undervisning kan gi et positivt utbytte for elevenes kunnskapsutvikling. Instruksjonsdesignet til Strømskag (2017b) legger til rette for at elevene selv skal oppdage matematiske relasjoner. Dette kan øke elevenes forståelse av den matematiske kunnskapen og bidra til økt mestringsfølelse i faget.

## 6.4 Algebra

Tidlig algebra fører til at det må undervises i aritmetikk på en slik måte at elevene utvikler algebraisk tenkning. Lærerens oppgave blir å bringe frem det algebraiske ved den eksisterende matematikken som blir gjennomført på barneskolen. Det vil for enkelte lærere kreve endring av valg av oppgaver, undervisningsform og klasseromssamtaler. Når det gjelder å lære barn algebraisk tankegang, sier Blanton og Kaput (2005) at de fleste grunnskolelærere har liten erfaring med den type algebraisk tenkning som burde bli en del av normen i skolen. De er selv produkter av den type matematikkundervisning som er forsøkt erstattet. Cai og Knuth (2011) mener at det over tid har utviklet seg en enighet blant forskere om at elever kan og bør bli eksponert for algebraiske ideer samtidig som de utvikler ferdigheter i aritmetikk. Det vil medføre en endring i hvordan aritmetikken sees på og undervises i (Cai & Knuth, 2011). Boaler og Humphreys (2005) skriver at for mange lærere vil det innebære et skifte i normen for klasserommet. Den såkalte tradisjonelle matematikkundervisningen har ofte handlet om at læreren har planlagt for suksess, slik at elevene skulle møte minst mulig motstand. I det legger de at læreren skal forklare og vise en metode som elevene deretter skal kopiere for så å jobbe med likelydende oppgaver. Målsettingen er at flest mulig skal få rett svar. En slik praksis vil ikke utfordre elevene tilstrekkelig. Elevene gis da ikke full mulighet til å utnytte sine muligheter til å lære (Boaler & Humphreys, 2005). Et hinder som lærerspesialister sannsynligvis vil møte, er «motstand» i kollegiet. Trolig vil det være behov for støtte og veiledning for å skape engasjement og ønske om å prøve ut ny kunnskap så grundig at den vil være med å endre praksis. Lærerspesialistens rolle vil bli å sette søkelyset på hvordan algebraisk tankegang blir ivaretatt på egen skole. Rivera (2006) anbefaler noen punkter det kan være nyttig å se på når en skal drøfte skolens praksis:

1) Undervis aritmetikken på en slik måte at elevene gjøres oppmerksomme på at det finnes relasjoner og sammenhenger som må kommuniseres matematisk.
2) Lær elevene å sette pris på uformelle og formelle representasjoner. Et mål for undervisningen er å føre sammen elevenes egne symboler med det formelle matematiske systemet.
3) Lær elevene funksjoner så de kan begynne å utvikle et anlegg for algebraisk modellering.
4) Gi dem problemer der de må tenke gjennom de matematiske relasjonene først før de kan regne noe.
5) Gi dem problemer som har mange ulike løsninger.

(Rivera, 2006, pp. 306-309)

## 6.5 Veien videre

Denne studien bygger på hva forskning sier om tidlig algebra, og hvordan det kan ivaretas i barneskolen. Elevenes målkunnskap, generalisering av et figurmønster, var forutsetningen for den designede undervisningssituasjonen. Den didaktiske tilnærmingen er inspirert av Brousseaus teori for didaktiske situasjoner. Metodologien var inspirert av didaktisk ingeniørvirksomhet der det ble gjennomført forberedende analyser av målkunnskapen. Med målkunnskapen som forutsetning ble undervisningssituasjonen designet og realiseringen i klasserommet forberedt.

Den vitenskapelige tilnærmingen TDS har til undervisning og læring i matematikk, mener vi kan være en styrke inn i profesjonsfellesskap, og til å utvikle skoler som lærende organisasjoner. Lærerspesialistrollen er ny i Norge. Det er derfor gjort lite forskning på hvordan lærerspesialister kan ivareta de intensjonene som ligger bak. Ei heller har det vært forsket i noen særlig grad på hvilke erfaringer lærerspesialister har som faglige ledere av et kollegium. Vi mener derfor det vil være interessant å se videre på hvordan lærerspesialister kan implementere TDS i et kollegium. En mulig studie vi mener er aktuell, er hvordan lærerspesialister kan bruke den forberedende analysen til å styrke fagkunnskapen til matematikklærere. Teorien har en modell for læringsarbeidet som er inndelt i både didaktiske og adidaktiske faser. En interessant studie vil derfor være å se på hvordan en lærerspesialist kan lede et kollegium, ved å bruke de ulike fasene, til å analysere samspill i klasserommet. TDS kan vise seg nyttig både som støtte for lærerspesialister i sitt arbeid, og som et rammeverk til felles tenkning og utvikling av matematikkundervisning.

# Referanser


Alseth, B., Nordberg, G., Røsseland, M., & Kirkegaard, H. (2006). *Multi : matematikk for barnetrinnet : Grunnbok 5b* (Bokmål[utg.]. ed.). Oslo: Gyldendal undervisning.

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: the case of didactical engineering. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 467-496): Springer.

Artigue, M., Haspekian, M., & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the theory of didactical situations (TDS). In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 47-65): Springer.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). *Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra.* Paper presented at the Proceeding of The 28th annual meeting of The North American Chapter of the international group for the psychology of mathematics education.

Blanton, M., L., & Kaput, J., J. (2003). Developing Elementary Teachers': "Algebra Eyes and Ears". *Teaching children mathematics, 10*(2), 70-77.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 412-446.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In *Early algebraization* (pp. 5-23): Springer.

Boaler, J., & Humphreys, C. (2005). *Connecting mathematical ideas: Middle school video cases to support teaching and learning* (Vol. 1): Heinemann Educational Books.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield: Eds. and Trans.). In: Dordrecht: Kluwer.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*: Springer Science & Business Media.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*(1), 3-22.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for research in mathematics education, 37*(2), 87-115.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. *Algebra in the early grades, 235*, 272.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2017). *Research methods in education*: routledge.

Council, N. R., Education, D. o. B., Social Sciences, a., Education, C. f., Committee, M. L. S., Findell, B., . . . Kilpatrick, J. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, D.C: Washington, D.C: National Academies Press.

Dahl, H., Klemp, T., & Nilssen, V. (2020). Språklige ressurser, en forutsetning for produktivt elevsamarbeid. In V. Nilssen & S.-M. Høynes (Eds.), *Samtaleorientert matematikk-et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (pp. 161-188). Bergen: Fagbokforlaget.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1), 103-131.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher, 91*(2), 166-170.

Esmonde, I. (2009). Ideas and identities: Supporting equity in cooperative mathematics learning. *Review of Educational Research, 79*(2), 1008-1043.

Grønmo, L. (2013). Algebra og tall er motoren i matematikken-derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart. *Bedre skole, 1*, 17-22.

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Ectj, 29*(2), 75.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for research in mathematics education, 38*(3), 258-288.
Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C. W., Nilsen, T., & Bergem, O. K. (2020). TIMSS 2919-Kortrapport.
Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. *Algebra in the early grades*, 5-17.
Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.
Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, 707-762.
Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Fong Ng, S. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*: Springer Nature.
Kunnskapsdepartementet. (2015-2016). Meld. St. 28 Retrieved from https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/
Kunnskapsdepartementet. (2016-2017). Meld. St. 21. Retrieved from https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-21-20162017/id2544344/
Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintrvju*. Oslo: Gyldendal Akademisk.
Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning, 7*(3), 231-258.
Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In *Approaches to algebra* (pp. 87-106): Springer.
Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study* (pp. 45-70): Springer.
Littleton, K., & Mercer, N. (2010). The significance of educational dialogues between primary school children. In K. Littleton & C. Howe (Eds.), *Educational Dialogues*

*Understanding and Promoting Productive interaction* (pp. 271-288). London: Routledge.
Ludvigsen, S., & Norge, K. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole : et kunnskapsgrunnlag : utredning fra et utvalg oppnevnt ved kongelig resolusjon 21. juni 2013 : avgitt til Kunnskapsdepartementet 3. september 2014*(Vol. NOU 2014:7).
Mangiante-Orsola, C., Perrin-Glorian, M.-J., & Strømskag, H. (2018). Theory of didactical situations as a tool to understand and develop mathematics teaching practices.
Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching Children How to Use Language to Solve Maths Problems. *Language and education, 20*(6), 507-528. doi:10.2167/le678.0
Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In *Early algebraization* (pp. 277-301): Springer.
NESH. (2018). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Retrieved from https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi/. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi/
NTNU. Behandle personopplysninger i student- og forskningsprosjekt Retrieved from https://innsida.ntnu.no/wiki/-/wiki/Norsk/Behandle+personopplysninger+i+forskningsprosjekt
Post, T. R., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. In *The algebra curriculum K-12* (pp. 78-90): Yearbook National Council of Teachers of Mathematics.
Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*: Universitetsforl.

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I., & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.
Rivera, F. (2006). Changing the face of arithmetic: Teaching children algebra. *Teaching children mathematics, 12*(6), 306-311.
Robson, C. (2002). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner-researchers*: Wiley-Blackwell.
Romberg, T. A., & Kaput, J. J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. *Mathematics classrooms that promote understanding*, 3-17.
Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. *Mind, culture and activity, 8*(1), 42-76. doi:10.1207/S15327884MCA0801_04
Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., Smestad, B., Ødegaard, E., Vetlesen, E., & Paiam, V. (2017). *Tall og tanke : matematikkundervisning på 5. til 7. trinn : 2* (Vol. 2 :). Oslo: Gyldendal akademisk.
Strømskag, H. (2017a). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet.
Strømskag, H. (2017b). A methodology for instructional design in mathematics—with the generic and epistemic student at the centre. *ZDM, 49*(6), 909-921.
Strømskag, H. (2020a). Didaktisk ingeniørvirksomhet i matematikk. In V. Nilssen & S.-M. Høynes (Eds.), *Samtaleorientert matematikk- et samspill mellom didakatiske og adidaktiske situasjoner* (pp. 81-118). Bergen: Fagbokforlaget.
Strømskag, H. (2020b). Teorien for didaktiske situasjoner. In V. Nilssen & S.-M. Høynes (Eds.), *Samtaleorientert matematikk - et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (pp. 25-76). Bergen: Fagbokforlaget.
Strømskag Måsøval, H. (2011). *Factors constraining students' establishment of algebraic generality in shape patterns: A case study of didactical situations in mathematics at a university college.* Doctoral dissertation. University of Agder, Kristiansand. Accessed May 18 …,
Svinvik, S. V. (2018). *Et TDS-basert eksperiment med fokus på instruksjonsdesign i matematikk-En didaktisk situasjon med intensjon om R2-elevers utvikling av en formel for summen av de n første kvadrattallene.* NTNU,
Tjora, A. H. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3. utg. ed.). Oslo: Gyldendal akademisk.
Utdanningsdirektoratet. (2016). Hovedresultater fra TIMSS 2015. Retrieved from https://www.udir.no/contentassets/7b41d7e958ad41cc8596f58dfd4838d1/timss_2015_hovedresultater.pdf. from Udir https://www.udir.no/contentassets/7b41d7e958ad41cc8596f58dfd4838d1/timss_2015_hovedresultater.pdf
Utdanningsdirektoratet. (2018). Matematikk-oppsummering av innspill (Artikkel). Retrieved from https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/matematikk--oppsummering-av-innspill/. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/matematikk--oppsummering-av-innspill/
Utdanningsdirektoratet. (2020a). Funksjon som lærerspesialist. Retrieved from https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/etter-og-videreutdanning/larerspesialister/funksjon-som-larerspesialist/. from Udir https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/etter-og-videreutdanning/larerspesialister/funksjon-som-larerspesialist/
Utdanningsdirektoratet. (2020b). Kjerneelementer. Retrieved from https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob. from Udir https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob
Utdanningsdirektoratet. (2020c). Profesjonsfellessakp og skoleutvikling. Retrieved from https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/3.-prinsipper-for-skolens-praksis/3.5-profesjonsfellesskap-og-skoleutvikling/

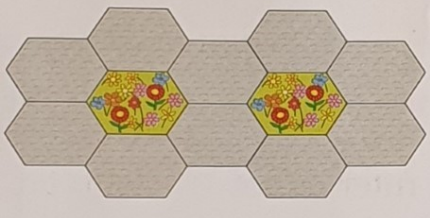
Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for research in mathematics education, 39*(3), 311-342.
Vescio, V., Ross, D., & Adams, A. (2008). A review of research on the impact of professional learning communities on teaching practice and student learning. *Teaching and teacher education, 24*(1), 80-91.
Warren, E. (2005). Young Children's Ability to Generalise the Pattern Rule for Growing Patterns. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 305-312.
Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational studies in mathematics, 67*(2), 171-185.
Webb, N. M., Franke, M. L., Ing, M., Wong, J., Fernandez, C. H., Shin, N., & Turrou, A. C. (2014). Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning. *International Journal of Educational Research, 63*, 79-93.
Whicker, K. M., Bol, L., & Nunnery, J. A. (1997). Cooperative learning in the secondary mathematics classroom. *The Journal of Educational Research, 91*(1), 42-48.
Wilkie, K. J., & Clarke, D. (2015). Pathways to Professional Growth: Investigating Upper Primary School Teachers' Perspectives on Learning to Teach Algebra. *Australian Journal of Teacher Education, 40*(4), n4.
Wæge, K. (2015). Samtaletrekk–redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten, 2*, 2015.

# Vedlegg

**Vedlegg 1:** Den ordinære oppgaven i Multi 5B s. 105
**Vedlegg 2:** Oppgaveark
**Vedlegg 3:** Samtykkeskjema
**Vedlegg 4:** Godkjenning/Meldeskjema fra NSD

**Vedlegg 1:** Den ordinære oppgaven i Multi 5B s. 105

**8.15** Det skal legges heller rundt en rad med blomsterbed på denne måten:



Rundt 2 blomsterbed er det altså 10 heller.

**a** Tegn 3 blomsterbed med heller rundt.
Hvor mange heller trengs?

**b** Lag en tabell som denne, og fyll ut:

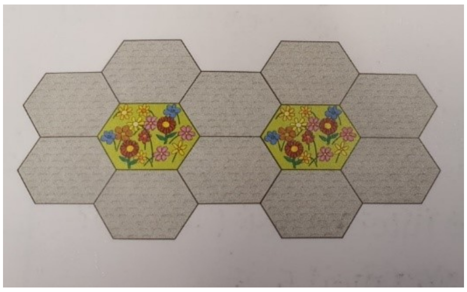
| Blomsterbed | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Heller | | 10 | | | |

**c** Hvor mange heller trengs til 10 blomsterbed?

**d** Hvor mange heller trengs til 20 blomsterbed?

**Vedlegg 2:** Oppgaveark

## PYNTE SKOLEGÅRDEN



På vår nye skole ønsker [redacted] å pynte skolegården med blomsterbed. Blomsterbedene skal settes inntil hverandre, og rundt hvert bed skal det dekoreres med sekskantede steinheller.

**Oppgave 1:**

a) Hvor mange steinheller trenger dere til 1 blomsterbed?

b) Hvor mange steinheller trenger dere til 2 blomsterbed?

c) Hvor mange steinheller trenger dere til 3 blomsterbed?

d) Hvor mange steinheller trenger dere til 4 blomsterbed?

e) Hvor mange steinheller trenger dere til 5 blomsterbed?

Når dere har funnet ut hvor mange steinheller dere trenger til 5 blomsterbed, skal dere hente steinhellene hos [redacted] steinindustri.

Husk: Hvis dere henter for få, eller for mange, vil dere få bot som dere må betale til elevrådet. (Boten blir gitt i slutten av økta)

**Oppgave 2:** Hvor mange steinheller trenger dere til 10 blomsterbed?

**Oppgave 3:** Skriv en forklaring til en annen gruppe som forteller hvordan de raskt kan finne antall steinheller til 20 blomsterbed.

**Oppgave 4:** Hvor mange steinheller trenger dere til 100 blomsterbed?

**Oppgave 5:** Lag en regel til [redacted] hvor dere forklarer han hvordan han lett kan finne ut hvor mange steinheller han trenger til et hvilket som helst antall blomsterbed.

**Oppgave 6:** Hvor mange blomsterbed har dere laget hvis dere har brukt 62 heller?

**Vedlegg 3:** Samtykkeskjema

## Vil du delta i forskningsprosjektet

## «Hindrende og muliggjørende faktorer i en didaktisk situasjon»

**Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på hvilke hindrende og muliggjørende faktorer elever møter i arbeidet med å generalisere et figurmønster i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.**

### Formål

I forbindelse våre studier ved NTNU, Fakultet for lærerutdanning, skal vi skrive en masteroppgave i matematikkdidaktikk. Undersøkelsen går ut på å se hvilke hindrende og muliggjørende faktorer elever møter i arbeidet med å generalisere et figurmønster.

### Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU ved Fakultet for lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet. Veileder for prosjektet er Førsteamanuensis i matematikkdidaktikk, Yvonne Grimeland (yvonne.grimeland@ntnu.no)

Grunnen til at ditt barn er valgt ut, er helt tilfeldig, siden det har vært tilfeldig uttrekning blant elevene som har samtykket til deltagelse. Det er totalt 12 -16 elever fra 6. trinn som skal delta.

### Hva innebærer det for deg å delta?

Deltakelsen innebærer at eleven arbeider med en matematikkoppgave i en gruppe hvor de skal undersøke utviklingen av et figurmønster. Hensikten er å finne ut hvilke faktorer som påvirker elevene når de jobber med visuelt voksende mønster, og hvordan disse faktorene kan hindre og hjelpe dem med å komme frem til en generalisering av mønsteret. Vi vil ta lydopptak og samle inn notatene de gjør seg underveis. Vi vil sitte sammen med elevene når de jobber og gjerne spørre de hvordan de tenker. Arbeidet vil ta en time og foregå i skoletiden. Dersom du ønsker å se hvilken oppgave elevene skal jobbe med, er det bare å ta kontakt med Karin (karinlip@stud.ntnu.no) eller Hanne (hanber@stud.ntnu.no).

### Hva skjer med informasjonen om ditt barn?

Alle personopplysninger blir behandlet konfidensielt og opplysninger kan ikke tilbakeføres til enkeltpersoner i masteroppgaven. Deltakelse i studiet krever samtykke fra elevenes foresatte.

Kontaktlærer i gruppen får en orientering om resultatet i prosjektet ved prosjektslutt. Det er kun student og veileder som har tilgang til personopplysninger. Konfidensialiteten ivaretas ved at alle elever blir anonymisert via pseudonym. Deltakelse vil ikke kunne gjenkjennes i masteroppgaven.

**Det er frivillig å delta**

Det frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Foresatte kan få se oppgaven som skal løses når de måtte ønske det. De har også muligheten til når som helst å trekke barnet fra prosjektet uten å oppgi noe grunn. Dette kan dere gjøre enten ved mail eller telefon. Karin.brathen.lippestad@io.kommune.no eller hanne.berg@io.kommune.no, eller på telefon: Karin Lippestad 452 309 43, Hanne Berg 918 350 53. Dere kan også kontakte NTNU, og da veileder for prosjektet, Yvonne Grimeland yvonne.grimeland@ntnu.no.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning NSD–Norsk senter for forskningsdata AS.

**Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Navnet ditt vil bli erstattet med et pseudonym som lagres på en navneliste adskilt fra øvrige data. Data vil krypters og lagres innelåst. Prosjektet skal avsluttes høsten 2021.

Alt av materiale, som for eksempel elevarbeid og eventuelle opptak under prosjektet, som gjelder ditt barn, vil bli slettet.

**Dine rettigheter**

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

**Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

**Hvor kan jeg finne ut mer?**

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

NTNU ved veileder for prosjektet Førsteamanuensis i matematikkdidaktikk, Yvonne Grimeland (yvonne.grimeland@ntnu.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Hanne Berg og Karin Lippestad

---

**Samtykke til deltakelse i studien**.

Jeg har mottatt informasjon om prosjektet, «Hindrende og muliggjørende faktorer i en didaktisk situasjon», og fått mulighet til å stille spørsmål

Jeg samtykker til at ………………………………………………………… kan delta/ikke delta i forskningsprosjektet (stryk det som ikke passer).

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet avsluttes, høsten 2021.

Elevens navn: ………………………………………………………………………………

Dato: ………………. Underskrift av foresatte ……………………………………………

**Vedlegg 4:** Godkjenning/Meldeskjema fra NSD

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

## NSD sin vurdering

**Prosjekttittel**

Hindrende og muliggjørende faktorer i designet en undervisningssituasjon

**Referansenummer**

705118

**Registrert**

16.09.2020 av Karin Lippestad - karinlip@stud.ntnu.no

**Behandlingsansvarlig institusjon**

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

**Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)**

Yvonne Grimeland, yvonne.grimeland@ntnu.no, tlf: 73412856

**Type prosjekt**

Studentprosjekt, masterstudium

**Kontaktinformasjon, student**

Karin Lippestad, karin.brathen.lippestad@io.kommune.no, tlf: 45230943

**Prosjektperiode**

07.09.2020 - 07.09.2021

**Status**

12.10.2020 - Vurdert

**Vurdering (2)**

---

**12.10.2020 - Vurdert**

Vi viser til endring registrert 28.9.2020, der informasjonsskrivet er lastet opp på nytt. Vi kan ikke se at det er gjort noen oppdateringer i meldeskjema eller vedlegg som har innvirkning på NSDs vurdering av behandlingen av personopplysninger i prosjektet.

Les mer om hvilke endringer som skal registreres hos NSD før endringer meldes inn i fremtiden: nsd.uib.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er

avsluttet.

Lykke til videre med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Lasse Raa
Tlf. personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

**28.09.2020 - Vurdert**

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen, så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjema med vedlegg 28.9.2020. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 7.9.2021.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Utvalget er under 15 år, og det innhentes derfor også samtykke fra foreldre.

Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres og som den registrerte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Lasse Raa
Tlf. personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

NTNU

Kunnskap for en bedre verden