Gunn Berit Nyhus Vik
Kristin Gudem

"To handlevogner og en bag"

Lærernes antagelser om elevens utfordringer i matematisk modellering

Masteroppgave i Lærerspesialist - matematikkdidaktikk
Veileder: Eivind Kaspersen
September 2021

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Gunn Berit Nyhus Vik
Kristin Gudem

"To handlevogner og en bag"

Lærernes antagelser om elevens utfordringer i matematisk modellering

Masteroppgave i Lærerspesialist - matematikkdidaktikk
Veileder: Eivind Kaspersen
September 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Med de nye læreplanene fra høsten 2020 ble matematisk modellering, prosessen med å oversette mellom matematikken og den virkelige verden, en integrert del av matematikkopplæringen gjennom hele grunnskoleløpet.

Det finnes flere kvalitative studier som omhandler modelleringsprosessen, og de fleste har konkludert med at matematisk modellering er utfordrende både for lærere og elever. Vi ønsker å belyse deler av matematisk modellering fra empirisk forskning for å bidra til mer kunnskap om lærernes utfordringer med matematisk modellering i grunnskolen. Studiens forskningsspørsmål er: (1) Hvilke utfordringer antar lærerne elevene har i arbeid med en modelleringsoppgave? (2) Hvordan sammenfaller disse antakelsene med elevenes arbeid og opplevelse?

Studien vår kan være til nytte for de som arbeider med matematisk modellering i skolen; lærerutdannere og lærere utarbeider undervisningsopplegg og modelleringsoppgaver eller drøfter modellering i lærkollegiet.

I vår studie har vi brukt et kombinert design, såkalt mixed methods; en kvantitativ del hvor lærerne med en tallbasert vurdering (comparative judgement) har målt modelleringsprosessens antatte vanskegrad for elevene, og en kvalitativ del der elever har arbeidet med en modelleringsoppgave som ble filmet. I etterkant av modelleringarbeidet ble elevene intervjuet. Resultatene fra den kvantitative og den kvalitative delen ble til slutt sammenlignet.

Comparative judgement bygger på et psykologisk prinsipp om at mennesker er flinkere til å sammenligne to ulike objekter og vurdere objektene i forhold til hverandre, enn å vurdere objektet uten å ha noe å sammenligne det med (Thurstone, 1927). Ni lærere sammenlignet parvise utsagn knyttet til modelleringsprosessen, der de for hver sammenligning skulle velge det utsagnet de mente ville være mest utfordrende for elevene. Totalt har 25 utsagn blitt vurdert 450 ganger.

For å analysere det kvalitative datamaterialet har vi benyttet en deduktiv tilnærming med utgangspunkt i de syv trinnene i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Analysen av den kvantitative delen ble sammenlignet med det kvalitative datamaterialet, og den kvalitative analysen ble brukt til å belyse og vurdere de kvantitative funnene våre.

Resultatene av vår studie viser at matematikklærerne antok at å «matematisere» var det mest utfordrende for elevene, men at også «validere», «forenkle» og «tolke» ville være krevende. Elevens arbeid viste at å «matematisere» og «forenkle» var utfordrende, mens det å «validere» og «tolke» var mindre utfordrende enn det lærerne antok.

Abstract

New curricula as of 2020 gave mathematical modeling an integral part of mathematics education throughout the entire educational process. Several studies have examined the modeling process, and most have concluded that mathematical modeling is challenging for both teachers and students. We want to illuminate parts of mathematical modeling in the empirical data to contribute to more knowledge about teachers' challenges with mathematical modeling in the classroom. The study's research questions are: (1) Which challenges do the teachers assume the students have when working on a modeling task? (2) To what extent do these assumptions coincide with the students' work and experience?

Our study can be useful for anyone working with mathematical modeling in school; when teaching is to be planned or discussed in the teachers' college, teacher educators in teaching mathematical modeling and in the preparation of teaching plans and modeling assignments.

In our study, we have used a mixed method design: a quantitative part where the teachers have measured the assumed degree of difficulty of the modeling process for the students with a comparative judgment, and a qualitative part where the students have worked on a modeling task. Finally, the results from both the quantitative and the qualitative parts were compared.

Comparative judgement is based on a psychological principle that people are better at comparing two different objects and assessing the objects in relation to each other, than assessing the object without having anything to compare it with (Thurstone, 1927). Nine teachers compared pairwise statements related to the modeling process, where for each comparison they had to choose the statement, they thought would be most challenging for the students. 25 statements have been evaluated 450 times in total.

To analyze the data, we have used a deductive approach to the qualitative data based on the modeling cycle of Blum and Leiß (2007). In the qualitative part of the study, we looked at the reliability, validity, and infit values to interpret and analyze the data.

The results of our study show that the mathematics teachers assumed that "mathematizing" was the most challenging for the students, but that also "validating", "simplifying" and "interpreting" would be demanding. The student's work showed that "mathematizing" and "simplifying" were challenging, but that "validating" and "interpreting" were less challenging than the teachers assumed.

Forord

Å skrive masteroppgave var en naturlig avslutning på vår lærerspesialiststudie. Masterarbeidet har vært en berg- og dalbane med opp- og nedturer. Trøsten i motbakkene har vært at det alltid har gått fremover. Når en av oss har mistet motet og drivkraften har den andre dyttet og dratt arbeidet fremover. Når begge har vært i flowen har det var riktig morsomt og enormt lærerikt!

Det beste med å være to om studien, er nettopp å være to. Det har alltid vært noen som har vært interessert i oppgaven og som har vært klar for å diskutere den når du selv har treng det. Å ha en sparringspartner har også gjort oss mer bevisst i våre valg og gjort så læringsutbyttet vårt har blitt større.

Sluttresultatet skyldes flere faktorer – først og fremst vår eminente veileder, Eivind Kaspersen, som har støttet oss, hatt trua og som alltid, under mild tvang, har avsluttet alle veiledninger med: «Dette går bra! Dere er godt i gang!» Etter veiledning har vi alltid fått nytt pågangsmot, givende fagdiskusjoner og gode refleksjoner for videre arbeid.

Takk til Gunn Berit sin familie for tålmodigheten og for at hun har vært mindre til stede de siste årene. Det er godt å føle støtte hjemmefra når arbeidet har vært mer utfordrende. Kristin takker for lånet av studiepartneren! Hundene til Kristin har, om ikke så tålmodig, godtatt kortere turer og mindre trening. De setter pris på at studietiden nå er over, selv om Gunn Berit har insistert på turer som avbrekk på studiedager.

Takk til lærere og elever som bidro til vår studie – uten dere, ingen master! Vi vil også gi en takk til Guro Hanevold Bjørkløf for korrekturlesning og betraktninger i forhold til studien vår. Og takk til venner som har heiet og motivert gjennom hele prosessen.

Gunn Berit Nyhus Vik og Kristin Gudem

August 2021

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser/symboler

CJ	Comparative judgement
Udir	Utdanningsdirektoratet
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
NESH	De nasjonale forskningsetiske komiteene
LK20	Læreplanverket for Kompetanseløftet 2020

1 Innledning

Begrepet *matematisk modellering* er tungt representert i ny læreplan, som trådte i kraft høsten 2020. «Matematikk er eit sentralt fag for å kunne forstå mønster og samanhengar i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvendingar» (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Videre refereres begrepet modellering som viktig for å kunne beskrive og forstå den virkelige verden:

> Ein modell i matematikk er ei beskriving av verkelegheita i matematisk språk. Elevane skal ha innsikt i korleis modellar i matematikk blir brukte for å beskrive dagleglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk handlar om å lage slike modellar. Det handlar òg om å kritisk vurdere om modellane er gyldige, og kva avgrensingar dei har, vurdere modellane i lys av dei opphavlege situasjonane og vurdere om dei kan brukast i andre situasjonar. (Udir, 2020b)

I denne studien skal vi undersøke elevenes utfordringer knyttet opp mot matematisk modellering. Vi legger til grunn at modellering er en prosess med å oversette mellom den virkelige verden og matematikken (Blum og Ferri, 2009). Elevene må kunne bruke matematikken for å løse reelle problemer og deretter tolke de matematiske problemene tilbake til den virkelige verden. En matematisk modell er et forhold mellom «noe matematikk», for eksempel ideer eller objekter på den ene siden, og ikke-matematiske fenomener på den andre (Blomhøj, 2003, s.52).

I overordnet del av gjeldende læreplan står begrepet dybdelæring sentralt (Kunnskapsdepartementet, 2017). Utdanningsdirektoratet (Udir) definerer dybdelæring som at elevene «gradvis skal utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder» (Udir, 2019a). Når det arbeides med dybdelæring i matematikk, er det derfor viktig at det legges opp til undervisning som muliggjør og fremmer dialog mellom elevene og mellom lærer og elev (Udir, 2019a). Elevene må med andre ord være delaktige i sin egen læringsprosess (Sfard, 2007). Matematisk modellering er en hensiktsmessig metode med tanke på dybdelæring i matematikk siden modelleringsarbeid favner flere av kjerneelementene i matematikk (Udir, 2020b). Elever som mestrer modellering, må kunne reflektere, systematisere, tenke kritisk og jobbe i dybden på oppgaver som er satt i en kontekst de kan relatere seg til. Likevel synes det vanskelig å implementere metodiske tilnærminger i skolen og den daglige undervisningen med dette for øyet. Grunnen kan være at det er krevende for lærere å bryte med tradisjonell og lærebokstyrt undervisning (Blomhøj, 2003).

1.1 Matematisk modellering

For at elevene skal lykkes med oppgaver som krever modelleringskunnskap, er det nødvendig at lærerne har god kjennskap til modellering og ikke minst vet hvilke faktorer som gjør modelleringsaktiviteter utfordrende for elevene. Verden vi lever i er svært kompleks. For å lettere vurdere og begrunne valg vi tar i dagliglivet, forskning og i næringslivet, benyttes matematisk modellering. Lesh (2003) beskriver en situasjon der ledere i arbeidslivet fikk i oppgave å uttrykke hvilke matematiske vurderinger de ønsker sine kommende arbeidstakere kan løse på sine arbeidsplasser. Lederne uttrykte at de trenger ledere som kan løse komplekse oppgaver på liten tid og med få ressurser. Dette er med på å underbygge hvor viktig det er at skolen utdanner elever og studenter som kan matematisere virkeligheten og forenkle den, og som kan tolke matematikk i lyset av den virkelige verden (Lesh, 2003).

Duval (2006) mener at elevene tydeligere vil se den praktiske nytten av matematikken dersom man arbeider med modellering i matematikkfaget, det vil si å koble matematikkfaget til ikke-matematiske situasjoner. Dette støttes av Blum (2015) som mener kognitivt krevende aktiviteter som modellering og modelleringsaktiviteter er viktig for å gi elevene grunnlag til å delta i samfunnet på en uavhengig og ansvarlig måte.

Blum har fire begrunnelser for å inkludere modellering i matematikkundervisningen:

1. Den pragmatiske begrunnelsen handler om evne til å forstå og mestre situasjoner i den ekte verden. Passende modelleringsoppgaver må derfor arbeides med eksplisitt, da slik kompetanse ikke kan forventes å utvikles fra rene matematiske aktiviteter.
2. Den formative begrunnelsen er at modelleringsaktiviteter kan fremmer ulike matematiske kompetanser. Blum påpeker at modelleringskompetanse bare kan utvikles på denne måten, men han eksemplifiserer argumentasjon som en kompetanse som kan fremmes gjennom "virkelighetsnære bevis".
3. Den kulturelle begrunnelsen grunngir at relasjoner til den ekstra-matematiske verden, eller den ekte verden, er uvurderlig for at det dannes et omfattende bilde av matematikk som vitenskap.
4. Den psykologiske begrunnelsen går ut på at eksempler fra den ekte verden kan være med på å vekke elevers interesse for matematikk. Videre kan dette bedre struktur av og motivasjon for matematisk innhold, samt økt forståelse og sørge at denne forståelsen "sitter lengre" (Blum, 2015, s.81).

Gjennom ny læreplan får vi en retning på hvordan det legges opp til å jobbe med modellering i skolen. Elevene skal få en innsikt i hvordan modeller blir brukt til å forklare, forenkle og forstå virkeligheten, de skal kunne lage egne modeller og vurdere modellenes gyldighet opp mot den opprinnelige situasjonen, og de skal kunne reflektere over avgrensninger modellene har (Udir, 2020b).

I arbeidet med modellering utvikler elevene kompetanser de kan benytte i andre situasjoner og på andre områder. Elevene trenes i å identifisere matematikken i praktiske situasjoner og oversette dette til matematisk språk. De vil lære å vurdere om løsningen kan være realistisk og vil være i stand til å kunne anvende modellkunnskapen sin når de møter lignende oppgaver senere. De vil få trening i å sette seg inn i andre elever sine løsningsforslag og vurdere egne løsninger opp mot andres. Når elevene jobber med modellering bygger de på erfaring og dybden i kompetanse de allerede har, og vurderer løsning av oppgaven opp mot dette (Udir, 2020b; Kunnskapsdepartementet, 2017). Elevene får øve opp evnen til å være kritiske til egne og andres løsningsforslag, og de får trening i å kommunisere i og med matematikk (Blomhøj og Højgaard Jensen, 2003).

På tross av at forskere har viet matematisk modellering stor oppmerksomhet i flere år, har modelleringsaktiviteter langt mindre fremtredende rolle i klasseromspraksisen verden over enn det som er ønskelig (Blomhøj, 2003, side 52, Våge, 2000). Både Våge og Blomhøj påpeker at det er vanskelig å sikre modellering en fremtredende plass i prøve og eksamenssystemet. Av den grunn kan det virke fremmed for lærere å arbeide med modellering i den daglige undervisningen, og at dette kan være en grunn til at matematiske modeller og modellering ikke har fått den tilsiktede oppmerksomheten (2003, side 52). I tillegg peker han på at å jobbe med modellering i skolen kan virke utfordrende for lærere. Denne type undervisning krever et brudd med den lærebokstyrte undervisning som teorigjennomgang og tilhørende oppgaveregning.

Hvilken innvirkning modelleringsarbeid i skolen kan ha på elevenes læring, har forskere tidligere jobbet med (Blomhøj, 2003, side 51). For at elevene skal kunne jobbe med modelleringsaktiviteter på en hensiktsmessig måte, er det nærliggende å anta at lærerne må ha inngående kjennskap til hva modellering er og hvordan de kan hjelpe og veilede elevene i arbeidet med matematisk modellering. Hvordan lærere opplever å jobbe med modelleringsaktiviteter ble belyst av Strand, der hun tok for seg hva matematikklærerne opplevde som mest utfordrende når de arbeidet med matematisk modellering (Strand, 2019). Tidligere forskning har inspirerte oss, og vi undret oss over hva som er utfordrende i arbeidet med modelleringsoppgaver.

Med de de nye føringene om å implementere matematisk modellering i undervisningen, er det viktig å få mer kjennskap til lærerne og elevenes tanker rundt modellering. På den måten kan vi få kunnskap om hva som skal til for at lærere arbeider aktivt med modellering i skolen. For at lærerne skal jobbe med modelleringsaktiviteter på en hensiktsmessig måte, må de kjenne til hva modellering er og hvordan de kan arbeide med modellering i skolen. Dette kommer ikke eksplisitt frem i den nye læreplanen, noe som kan gjøre det utfordrende for lærerne å arbeide med kjerneelementet og undervise i tråd med læreplanen.

1.2 Hvorfor integrere matematisk modellering i undervisningen

Det er tradisjon i skolen å bruke tekstoppgaver og problemer fra hverdagssituasjoner i matematikkundervisningen. Imidlertid blir problemløsningsoppgaver ofte oppfattet som noe som kommer etter at elevene har tilegnet seg matematiske ferdighetene, og ikke som en integrert del av læringsprosessen (Blomhøj 2003, side 52). Ofte begrenser modelleringsaktiviteten seg til å benytte en modell, ofte som en formel, for deretter å tolke resultatene i forhold til den (Blomhøj, 2003, side 52). Argumentene for å integrere matematisk modellering i undervisningen er sterke. Innledningsvis refererte vi til Blum (2015) sine fire argumenter for å inkludere modellering i matematikkundervisningen: den pragmatiske, den formative, den kulturelle og den psykologiske. Disse argumentene sammenfaller i stor grad med Blomhøj (2003, side 69-70) sine argumenter om at modellering skal være en integrert del av matematikkundervisningen:

- Modellering gir mulighet for at elevene skal oppleve matematikk som redskap som kan brukes til å beskrive og forstå fenomener i den virkelige verden.
- Modellering er godt egnet til tverrfaglig samarbeid og kan på den måten bryte matematikkfagets isolasjon i skolen.
- Matematiske modeller er en integrert del av vår kultur og hverdagsliv. Derfor er det viktig å forstå matematiske modeller, slik at man kritisk kan ta stilling til modellenes anvendelse.

Også Barbosa (2006) og Blum og Ferri (2009) argumenterer for den samfunnsnyttige delen av å kunne modellering og dermed også å kunne stille seg kritisk til ulike matematiske modeller:

"Since arguments and decisions in society are based on mathematical models, it is important that the students have the opportunity to discuss the nature and role of mathematical models" (Barbosa, 2006, side 294). "Mathematical models and modelling are everywhere around us, often in connection with powerful technological tools.

Preparing students' for responsible citizenship and for participation in societal developments requires them to build up modelling competency" (Blum og Ferri, 2009, side 47).

Studier viser at små barn kan få matematiske og sosiale gevinster ved å jobbe med modellering (English, 2003). Grunnen til dette er at modelleringsaktiviteter er det ideelle verktøyet til å utvikle matematiske ideer og prosesser som for eksempel konstruere, forklare, forutsi, begrunne, kvantifisere, koordinere og organisere. For å lykkes med modellering kreves det at elevene samarbeider om planlegging, vurdering og formidling av resultatene (English, 2003). Samarbeidet gjør at elevene opplever forskjellige synspunkter og tenkemåter, noe som fremmer fleksibilitet i egne tankemønstre (Maaß, 2006).

For at lærerne skal lykkes med modelleringsaktiviteter på en hensiktsmessig måte, er det viktig å kartlegge både hva lærerne mener er utfordrende for elevene, og hva elevene selv uttrykker er utfordrende. Hvis vi vet at lærernes antakelser sammenfaller med elevenes arbeid og opplevelser, vil det være enklere for lærerne å vite hvordan de kan rettlede og veilede elevene underveis. Hvis derimot lærernes antakelser ikke sammenfaller med elevenes arbeid og opplevelser, vil ikke lærerne være forberedt på de utfordringene elevene møter, og elevene vil ikke få den veiledningen og tilpasningen som er nødvendig for å få tiltenkt modelleringskunnskap.

1.3 Problemstilling

For at lærere kan legge til rette for at elever kan jobbe med modelleringsaktiviteter på en god og hensiktsmessig måte, og med det bidra til at gapet mellom utdanningsforskning og praksis minker, har vi i denne studien valgt å se på hva lærere og elever oppfatter som utfordrende. Vi har stilt følgende spørsmål:

1. Hvilke utfordringer antar lærerne elevene har i arbeid med en modelleringsoppgave?
2. Hvordan sammenfaller disse antakelsene med elevenes arbeid og opplevelse?

For å få svar på disse spørsmålene har vi valgt å innhente opplysninger både fra lærere og elever med utgangspunkt i en modelleringsoppgave hentet fra Udir sin kompetansepakke *Læring og undervisning i matematikk* (Udir, 2019c). Vi valgte en blanding av kvalitativ og kvantitativ tilnærming. Den kvalitative delen består av intervju med lærere og elever samt videoopptak av elevenes arbeid med oppgaven. I den kvantitative delen benyttet vi comparative judgement (CJ) der lærerne har rangert utsagn knyttet til matematiske utfordringer ved hjelp av sammenligning. CJ bygger på et psykologisk prinsipp om at mennesker er flinkere til å sammenligne to ulike objekter og vurdere objektene i forhold til hverandre, enn å vurdere objektet uten å ha noe å sammenligne det med.

1.4 Studiens oppbygging

For å svare på forskningsspørsmålene, har vi valgt å bygge opp studien i fem hovedkapitler. I kapittel 1 presenterer vi hva matematisk modellering er og hvorfor det er viktig å integrere i matematikkundervisningen. Videre har vi presentert problemstillingen og studiens oppbygging.

I kapittel to, teoretiske perspektiver og rammeverk, vil vi presentere ulike teoretiske perspektiver og vårt valgte rammeverk. Vi vil forklare hva vi legger i modelleringskompetanse og modellfremkallende aktivitet, før ulike modelleringssykluser presenteres. Kapittel to vil bli avsluttet med hva tidligere forskning sier er utfordrende for elever og lærere i modelleringsarbeid.

I kapittel tre, metode, vil vi beskrive studiens design og gjennomføring av studien. Vi har valgt et kombinert design (mixed methods) hvor den kvalitative forskningen består av feltarbeid og intervju med elever og epostintervju med lærere, mens i den kvantitative studien har ni lærere statistisk målt modelleringsprosessens antatte vanskegrad for elevene. Videre beskriver vi våre analysetilnærminger; deduktiv tilnærming til det kvalitative datamaterialet samt sammenligning av funn fra kvalitativ og kvantitative forskningen. I dette kapittelet vil også studiens troverdighet, validitet og reliabilitet bli presentert, før vi til slutt sier noen om de etiske valgene som er tatt underveis.

I kapittel fire, resultater, vil vi presentere funn fra den kvalitative og den kvantitative analysen, samt resultatet av sammenligningen av de ulike datasettene. Sammenligningen av datasettene vil vise at det ikke alltid er samsvar mellom lærernes antagelser og elevenes arbeid og opplevelser.

I kapittel fem, drøfting, vil vi svare på forskningsspørsmålene våre og se på mulige implikasjoner av funnene gjort i studien. Vi vil diskutere styrker og svakheter ved studien og peke på behov for videre forskning, før vi avslutter med våre refleksjoner.

2 Teoretiske perspektiver og rammeverk

I denne masterstudien undersøker vi hva lærere antar elever opplever utfordrende, og hva elevene selv uttrykker er utfordrende, i møte med modellfremkallende aktivitet. Av den grunn er det naturlig at ulike aspekter ved modelleringssykluser og elevers utfordringer i arbeidet med modellering er vektet størst i dette kapittelet.

For å se nærmere på vårt valg av teoretisk rammeverk, modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007), er det imidlertid nødvendig å avklare begreper som matematisk modell og matematisk modellering, før vi går nærmere inn på hva som kjennetegner modelleringskompetanse og modellfremkallende aktivitet. Deretter ser vi på ulike perspektiver på modellering og de ulike modelleringssyklusene og hvilke utfordringer elever og lærere kan møte i arbeidet med matematisk modellering.

2.1 Begrepsavklaring

Begrepene innen modellering er ikke entydige i litteraturen. Av den grunn ønsker vi her å avklare hva vi legger til grunn for begrepene i denne studien.

2.1.1 Matematisk modell

En matematisk modell er et forhold mellom matematiske og ikke-matematiske fenomener (Blomhøj, 2003, s. 52). Dette forholdet kan beskrives som en oversettelse mellom den «virkelige verden» og matematikken, hvor virkeligheten blir definert som «resten av verden», for eksempel natur og samfunn (Blum og Ferri, 2009 s. 45). En alternativ definisjon er at matematiske modeller er forenklede representasjoner av virkeligheten (Greefrath og Vorhölter, 2016 s. 9). Læreplanverket for Kompetanseløftet 2020 (LK20) sier at en modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten med matematisk språk (Utdanningsdirektoratet, 2020). Uansett hvilken forklaring eller definisjon av matematisk modellering man ser på, har de til felles at de mener en matematisk modell beskriver eller løser problemer fra den virkelige verden ved hjelp av matematikk.

I sin enkleste forstand er matematiske modeller tall knyttet opp mot et antall (Blomhøj, 2003). Det kan for eksempel dreie seg om antall gjester, husnummer, hastighet eller målenhet. Modellen vil her være relasjonen mellom tallet og henholdsvis gjestene med påfølgende oppdekking av bord, husets fysiske plassering, hastighet pr. time, minutt eller sekund eller liter, meter med mer. En mer avansert matematisk modell kan beskrive hvor fort en sykdom sprer seg i befolkningen.

2.1.2 Matematisk modellering

Prosessen med å oversette mellom den virkelige verden og matematikken kalles matematisk modellering (Blum og Ferri, 2009, Greefrath og Vorhölter, 2016 s. 5). Man kan også si at matematisk modellering er en prosess som leder til en modell (Våge 2000, s. 163/164). I vår studie vil vi bruke både begrepene matematisk modellering og modellering. I begge tilfeller henviser vi til prosessen med å oversette mellom de to verdenene – matematikken og den virkelige verden.

For å beskrive prosessen med å oversette mellom den virkelige verden og matematikken brukes begrepene "modelleringsprosess" og "modelleringssyklus" (Blum og Leiß, 2007). Begge begrepene vil bli benyttet i denne studien om hverandre. Modelleringssyklusen blir ofte fremstilt som en stegvis syklisk prosess som illustrerer hvilke "steg" man må igjennom i arbeidet med modellering. En rekke modelleringssykluser er utarbeidet og illustrert, noe vi vil komme inn på i avsnitt 2.5, ulike modelleringssykluser.

2.2 Modelleringskompetanse

I innledningskapittelet presenterte vi argumenter for å implementere matematisk modellering i undervisningen og at modelleringskompetanse er viktig i vårt komplekse samfunn. Men hva kjennetegner modelleringskompetanse?

Blum og Ferri (2009, s. 47) definerer modelleringskompetanse som evnen til å konstruere modeller ved å utføre de forskjellige trinnene i en modelleringssyklus på riktig måte, samt å analysere eller sammenligne gitte modeller. Også Blomhøj (2006) knytter den matematiske modelleringskompetansen opp mot modelleringssyklusen. Det gjør han ved å si at modelleringskompetansen besittes av en person som i en gitt sammenheng er i stand til selvstendig og innsiktsfullt gjennomføre en matematisk modelleringsprosess omfattende alle delprosesser. Videre kommer Blomhøj (2006, s. 92) med punkter som beskriver modelleringskompetansen:

- formulere spørsmål som belyses gjennom matematisk modellering
- benytte faglig viten og erfaringer til en strukturert og forenklet system
- benytte matematikk til å stille opp og analysere et matematisk system
- fortolke og vurdere resultatene av en matematisk analyse
- vurdere og kritisere egen og andres bruk av modellen
- reflektere over og kritisere den samlede modelleringsprosessen
- kommunisere om oppstilling, analyse, anvendelse og kritikk av modellen

Blum og Kaiser (i Maaß, 2006, s. 116) spesifiserer begrepet modelleringskompetanse ved en detaljert liste over det de kaller underkompetanser som er relatert til deres forståelse av en modelleringsprosess. I vår studie har vi utarbeidet en rekke utsagn til hvert trinn i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Disse utsagnene kan sees på som underkompetanser (se avsnitt 3.5.2, utarbeidelse av utsagn).

2.3 Modellfremkallende aktiviteter

Matematisk modellering som kjerneelement i fagplanen er relativt nytt, og man kan undre seg over hva som skiller problemløsningsoppgaver og modelleringsoppgaver. Tradisjonelle problemløsningsoppgaver har som mål at elevene skal behandle de opplysningene de får i oppgaven for deretter å formulere et kort svar på et spørsmål gitt i teksten. Alle opplysningene som behøves for å løse oppgaven finnes i oppgaven (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, Post, 2000; Lesh og Doerr, 2003). Modelleringsoppgaver derimot fremkaller aktivitet og det essensielle er at eleven selv utvikler en eksplisitt matematisk tolkning av situasjonen. Med andre ord er det elevene som må matematisere situasjonen.

Lesh og Doerr (2003, s. 4) understreker at modellfremkallende aktivitet nesten er det stikk motsatte av tradisjonelle problemløsningsoppgaver. Modellfremkallende aktiviteter tar utgangspunkt i virkelige situasjoner der matematikken er nyttig og der elevene selv må beskrive situasjonen med matematisk språk.

Gjennom et prosjekt der lærere, foreldre og samfunnsledere jobbet med forskere, ønsket Lesh med flere (Lesh et al., 2000, s. 16) å finne ut hvilke elementer som er viktige for at en oppgave skal virke modellfremkallende. Hensikten med å finne slike elementer var blant annet for å hjelpe lærere til å planlegge effektiv undervisning. De seks prinsippene som ble utarbeidet er at oppgaven må:

1. være virkelighetsnær (virkelighetsprinsippet)
2. skape behov for modellkonstruksjon (prinsippet om modellkonstruktsjon)
3. legge til rette for egenvurdering (prinsippet om selvevaluering)
4. etterspørre dokumentasjon som avslører oppgaveløsers tanker under arbeidsprosessen (prinsippet om modelldokumentasjon)
5. gi mulighet for å konstruere modeller som kan deles og gjenbrukes (prinsippet om konstruksjonsdelbarhet og gjenbrukbarhet)
6. legge til rette for en effektiv prototype av en modell kan utvikles (den effektive prototypen prinsippet)

Virkelighetsprinsippet kan relateres til om problemet gir mening for elevene. Man kan spørre: Kan dette skje i virkeligheten? Imidlertid er det viktig å være klar over at problemet ikke må være ekte i en absolutt forstand, men elevene må erkjenne og kunne sette seg inn i problemet.

Prinsippet om modellkonstruksjon. I arbeid med modellfremkallende aktiviteter er det essensielt at målet med oppgaven er å inkludere utvikling av en eksplisitt konstruksjon, beskrivelse, forklaring eller berettiget beregning. Ser elevene et behov for å utvikle en modell?

Prinsippet om selvevaluering. Dette prinsippet går ut på at eleven selv skal kunne vurdere om løsningene er anvendbare eller ikke, uavhengig av en vurdering fra læreren. Er elevene i stand til å bedømme selv om løsningen må forbedres? Med andre ord må elevene, ut fra dette prinsippet, ta egne valg i løpet av modelleringsprosessen for å komme til et endelig resultat.

Prinsippet om modelldokumentasjon. Dette prinsippet krever at elevene dokumenterer tankeprosessene sine i oppgaveløsningen, noe som er viktig ikke bare for læreren, men også for å legge til rette for egenvurdering og tenking. Vil svaret på spørsmålet kreve at elevene eksplisitt avslører hvordan de tenker om situasjonen og den matematikken de velger å benytte?

Prinsippet om konstruksjonsdelbarhet og gjenbrukbarhet. Er modellen som er utviklet kun nyttig for personen som har utviklet den og gjelder den bare for den spesielle situasjonen som presenteres i problemet, eller gir den tanker som kan deles med andre og kan brukes i andre sammenhenger? Problemer som tilfredsstiller dette prinsippet, konfronterer elevene med behovet for å utvikle personlig verktøy til å utvikle generelle tenkemåter.

Den effektive prototypen prinsippet. Dette prinsippet går ut på om løsningen gir en nyttig prototype eller metafor som kan være nyttig for å tolke andre og lignende situasjoner senere. Lenge etter at problemet er løst, vil elevene kunne tenke tilbake på det når de møter andre strukturelt like situasjoner?

2.4 Ulike perspektiver på modellering

Forskningsfeltet har ulike tilnærminger til matematisk modellering (Kaiser og Sriraman, 2006). Kaiser og Sriraman klassifiserer flere ulike perspektiver med utgangspunkt i de seneste årenes debatt om matematisk modellering. Klassifiseringen tar for seg bakgrunnen og formålet med perspektivene. Hensikten med klassifiseringen er å skille, men også å se sammenhenger, mellom de ulike perspektivene.

Realistisk eller anvendt modellering: I realistisk og anvendt modellering er man opptatt av å løse problemer i den virkelige verden, og forstå den virkelige verden og fremme modelleringskompetanse ved hjelp av autentiske eksempler (Haines og Crouch, 2010). I dette perspektivet er problemene komplekse (Kaiser og Srirman, 2016). Bakgrunnen for dette perspektivet er anvendt matematikk.

Kontekstuell modellering: Målene for kontekstuell modellering å fremme motivasjon hos elevene og kommunikasjon (Haines og Crouch, 2010). Bakgrunnen til dette perspektivet er problemløsning og psykologiske forsøk (Kaiser og Sriraman, 2006).

Pedagogisk modellering: I dette perspektivet er målene pedagogiske og fagrelaterte; strukturering av læringsprosessen samt begrepslæring og utvikling (Kaiser og Sriraman, 2006). Ofte har studier med dette perspektivet handlet om å utvikle og evaluere undervisningssekvenser om matematisk modellering (Ferri, 2018). Pedagogisk modellering har sin bakgrunn fra didaktisk teori og læringsteorier. Representanter for denne kategorien er blant andre Blomhøj, Galbraith og Stillman, Maaß (Kaiser og Sriraman, 2006).

Sosialkritisk modellering: Målene med dette perspektivet er å fremme kritisk forståelse av omverdenen og matematikkens rolle i samfunnet (Ferri 2018; Kaiser og Sriraman, 2006). Som representant for dette perspektivet blir Barbosa trukket frem (Kaiser og Srirman, 2006).

Epistemologisk eller teoretisk modellering: I dette perspektivet finner vi teorisentrerte mål med den hensikt å fremme teoriutvikling (Haines og Crouch, 2010; Kaiser og Sriraman, 2006). Hensikten med dette perspektivet er å bruke matematisk modellering som et verktøy for å jobbe matematisk, ikke nødvendigvis å lære modelleringsprosessen (Ferri, 2018).

Kognitiv modellering: Dette perspektivet har vitenskapelige og psykologiske mål. De psykologiske målene dreier seg om å fremme matematiske tankeprosesser ved bruk av modeller som mentale eller fysiske bilder, eller ved å legge vekt på modellering som mentale prosesser som abstraksjon eller generalisering (Kaiser og Sririman, 2006; Ferri, 2018). De vitenskapelige målene er å analysere og forstå de kognitive prosessene i modelleringssyklusen (Kaiser og Sriraman, 2006). Under dette perspektivet er forskere som Blum, Leiß og Ferri klassifisert. Vi har hentet vårt rammeverk fra dette perspektivet (se avsnitt 2.6, modelleringssyklusen til Blum og Leiß).

2.5 Ulike modelleringssykluser

Det er utarbeidet flere modelleringssykluser som fokuserer på forskjellige aspekter og har ulike formål (Greefrath og Vorhölter 2016, Ferri 2018). Felles for de fleste syklusene er at det er et klart skille mellom to verdener, matematikken og virkeligheten, samt overgangsprosessen mellom disse. Å skille disse to verdenene er viktig for å forstå hva matematisk modellering betyr (Ferri, 2018, s. 22).

En modelleringssyklus er ikke bare en teoretisk modell som kjennetegner modelleringsprosessene (Ferri, 2018, s. 21), det er også et læringsinstrument for elever og et diagnostisk instrument for lærere. Derfor er det viktig å skille mellom modelleringssykluser som brukes til forskning og de som er ment som støtte for elever når de arbeider med matematisk modellering (Greefrath og Vorhölter 2016; Ferri 2018; Ferri 2006). Ferri (2018, s. 21) har klassifisert de ulike modelleringssyklusene etter de ulike målene og formålene med syklusene:

- Modelleringssyklus fra anvendt matematikk
- Didaktisk eller pedagogisk modelleringssyklus
- Psykologisk modelleringssyklus
- Diagnostisk modelleringssyklus, også kalt modelleringssyklus fra et kognitivt perspektiv

Vi har valgt modelleringssyklusen til Blum og Ließ (2007) som rammeverk i vår studie. Før vi presenterer vårt rammeverk i avsnitt 2.6, vil vi likevel kort beskrive andre modelleringssykluser som er omtalt i faglitteraturen.

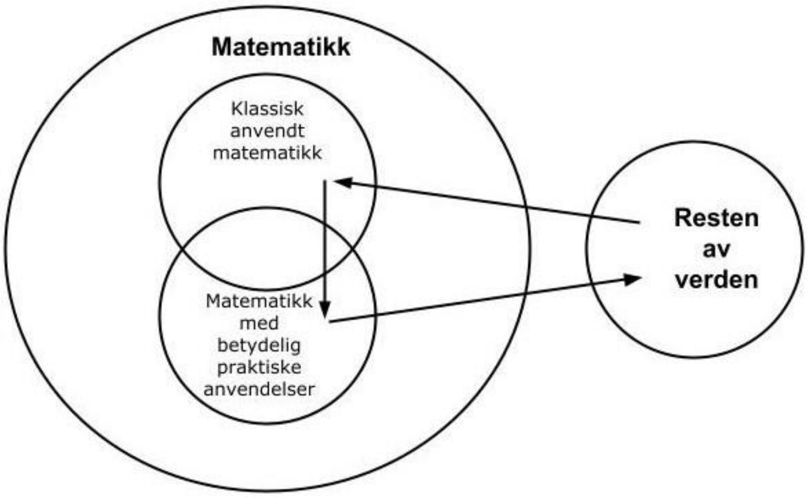
2.5.1 Modelleringssyklus fra anvendt matematikk

I denne kategorien finner vi ofte komplekse modelleringsproblemer (for eksempel fra industri og økonomi) som beskrevet under "realistisk eller anvendt modellering" i avsnitt 2.4, ulike perspektiver på modellering. Antall faser i modelleringssyklusen påvirkes til en viss grad av kompleksiteten til de virkelige problemene (Ferri, 2018, s. 21).

Pollak bidro til å definere begrepet modellering (Greefrath og Vorhölter, 2016). Dette gjorde han ved å skille ut fire definisjoner av anvendt matematikk (Figur 1) (Greefrath og Vorhölter, 2016, s. 5, vår oversettelse):

- Klassisk anvendt matematikk (klassiske grener av analyse, deler av analyse som gjelder fysikk)
- Matematikk med betydelig praktiske anvendelser (statistikk, lineær algebra, informatikk og analyse)
- Engangsmodellering (modelleringssyklusen går bare gjennom en gang)
- Modellering (modelleringssyklusen gjentas flere ganger)

De to første definisjonene refererer til innholdet, mens de to siste er relatert til prosesseringsprosedyren. Begrepet modellering blir satt i direkte sammenheng med prosesseringsprosedyren – en syklus mellom matematikken og den virkelige verden (Greefrath og Vorhölter, 2016, s. 5). Pollak sin modelleringssyklus har i stor grad påvirket utviklingen av modelleringssykluser i forskning på modellering i matematikkopplæringen.

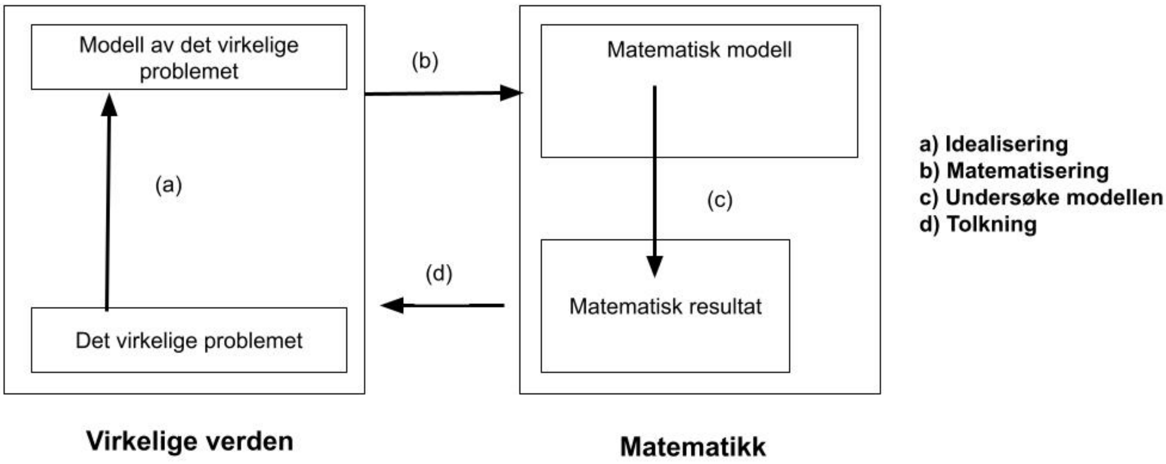


Figur 2.1: Vår oversettelse av modelleringssyklus av Pollak

2.5.2 Didaktisk eller pedagogisk modelleringssyklus

Denne kategorien omfatter modelleringssykluser som kan være et hjelpemiddel for elever og studenter når de arbeider med matematisk modellering. Ferri (2018, s. 23, 28) viser til en studie der elevene og studentene la mening til begrepene «reell modell» og «matematisk modell» når syklusen ble implementert i undervisningen. I tillegg ga dette elevene og studentene mulighet til refleksjon over prosessen. Dette viser at en hensiktsmessig modelleringssyklus kan være et meningsfullt verktøy i undervisningen. Ferri understreker imidlertid at syklusen må ha klare trinn og ikke være for omfattende slik at elevene og studentene har mulighet til å forstå syklusen. For at elevene skal se på syklusen som et godt hjelpemiddel, er det nødvendig at det er en nøye og trinnvis innføring av syklusen, samt gjentatte øvelser på hvordan den brukes (Blum og Ferri, 2009, s. 55).

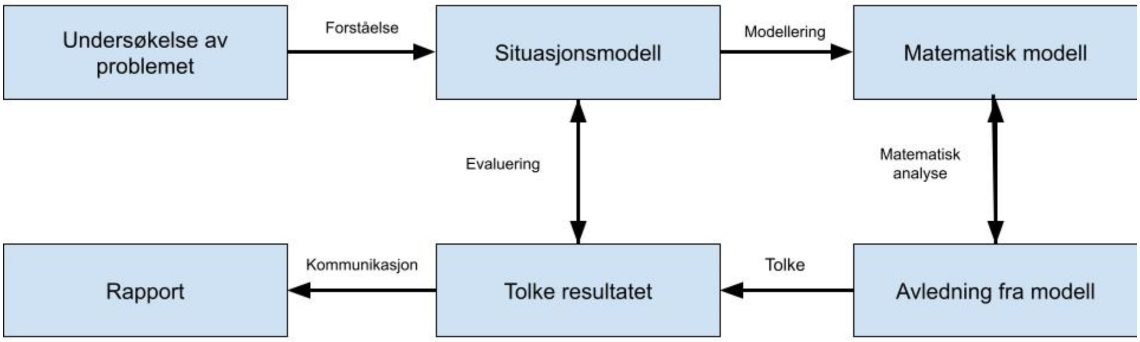
Figur 2.3 viser Blum (1996) og Kaiser (1995) sin modell som, i likhet med Pollak sin modell, har et tydelig skille mellom verdenene: virkelighet og matematikk. Imidlertid har Blum (1996) og Kaiser (1995) i sin modell, i motsetning til Pollak, en overgang i den virkelige verden; fra virkelig problem til en modell av den virkelige verden. Denne overgangen kalles idealisering eller forenkling av den virkelige situasjonen. Deretter går man over til den matematiske verdenen, matematisere, og bygger en matematisk modell. Det viktigste trinnet, sier Ferri (2018, s. 22), er å tolke det matematiske resultatet som eksplisitt må styres av lærer.



Figur 2.2: Vår oversettelse av modelleringssyklus av Blum (1996) og Kaiser (1995)

2.5.3 Psykologisk modelleringssyklus

Ferri (2018) hevder at psykologiske sykluser har sin opprinnelse i psykologi snarere enn i anvendt matematikk eller i matematikkopplæring (s. 23). Figur 2.4 illustrerer en typisk modelleringssyklus i denne kategorien. Det kommer tydelig frem i denne illustrasjonen at det ikke skilles mellom den virkelige verden og matematikkverdenen. Syklusen benyttes ikke i grunnskolen, noe som heller ikke var intensjonen til utviklerne (Ferri, 2018, s. 23). Syklusen er derimot et god redskap for forskning og spesielt for utdanning innen modellering.



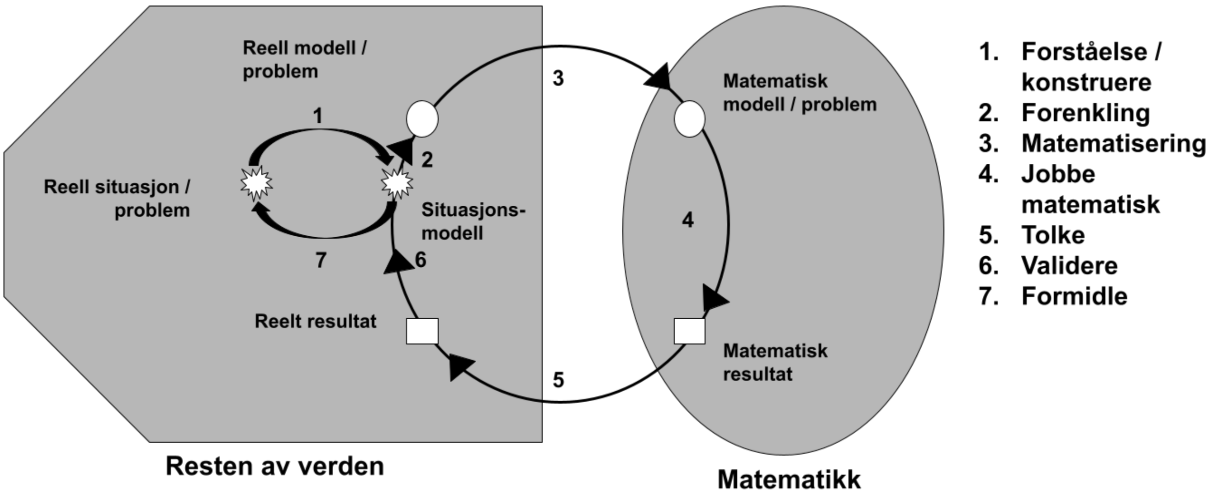
Figur 2.3: Vår oversettelse av modelleringssyklus fra Verschaffel et al. (2000)

2.6 Modelleringssyklusen til Blum og Leiß

Modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007), illustrert i figur 2.5 (vår oversettelse), er tilhørende i den kognitive og den kontekstuelle tilnærmingen etter klassifiseringen til Kaiser og Sriraman (2006) og det Ferri (2018) kaller diagnostisk modelleringssyklus eller modelleringssyklus fra et kognitivt perspektiv. Syklusen innehar syv trinn eller overganger, og den har en egen overgang som Blum og Leiß (2007) kalles situasjonsmodell. Denne overgangen blir sett på som den viktigste fasen i prosessen, siden det er i denne overgangen, fra reell situasjon til situasjonsmodell, at oppgaven blir forstått (Blum og Leiß 2007, Ferri 2018). Ferri kaller denne fasen "mental representasjon av situasjonen" (2018, s. 24), og hun mener det beskriver hvilke interne prosesser individet gjennomgår for å oppnå et mentalt bilde etter å ha lest modelleringsoppgaven.

Den faktiske modelleringsprosessen er ikke lineær, som illustrert i modellen. Ofte går prosessen flere ganger frem og tilbake mellom den virkelig verden og matematikken. Syklusen er et godt verktøy for kognitive analyser av modelleringsoppgaver (Blum og Ferri, 2009, s. 46).

Å lese en tekst og forstå både situasjon og problem, er en betydelig kognitiv barriere for elever (Blum og Leiß, 2007, s. 228). Dette kommer tydelig frem i modelleringsprosessen til Blum og Leiß ved at prosessen er definert i trinn 1. At dette trinnet blir pekt på som kognitivt krevende for elever, betyr ikke at de andre trinnene ikke er det – alle trinnene i modellen er potensielt kognitive barrierer for elevene (Blum og Ferri, 2009, s. 47).



Figur 2.4: Vår oversettelse av modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007)

De syv trinnene/overgangene i Blum og Leiß sin syklus har vi benyttet som hovedkategorier i vår analyse av innhentet datamateriale og innbefatter følgende punkter:

1. **Forståelse / konstruere**
   Dette trinnet innebærer at oppgaven må leses og problemstillingen må forstås av problemløseren. Det vil si at en såkalt situasjonsmodell må konstrueres (Blum og Leiß, 2007, s. 225). Denne prosessen vil være individavhengig ut fra hvilke forutsetninger og erfaringer problemløseren har (Ferri, 2018, s. 30).

2. **Forenkling**
   Her skal problemløseren forenkle, strukturere og gjøre situasjonen mer presis, noe som fører til en reell modell av situasjonen (Blum og Leiß, 2007, s. 226). Dersom man ikke tar de nødvendige forutsetningene på dette trinnet, kan det være vanskelig å komme frem til matematikken som skal anvendes for å løse problemet (Ferri, 2018, s. 15).

3. **Matematisering**
   Matematiseringen forvandler den virkelige modellen til en matematisk modell (Blum og Leiß, 2007, s. 226). Dette gjøres ved å knytte virkeligheten sammen med matematikken; en tar utgangspunkt i antakelsene man har gjort eller egne erfaringer og kunnskap om den generelle verden (Ferri 2018, s. 16).

4. **Jobbe matematisk**
   På dette trinnet aktiviseres de matematiske verktøyene (Blum og Leiß, 2007, s. 226). Å jobbe matematisk (f.eks. beregne, finne formler, løse ligningene) gir matematiske resultater. Ferri (2018, s. 16) mener det er nødvendig å ha mer enn en matematisk modell for å kunne komme frem til en løsning på det reelle problemet. Dette på grunn av kompleksiteten til modellering.

5. **Tolkning**
   Det matematiske resultatet må tolkes i den virkelige verden som et virkelige resultat og løsning på problemet (Blum og Leiß, 2007, s. 226). Er det matematiske resultatet rimelig? Her må konteksten til det virkelige problemet være i fokus, påpeker Ferri (2018), for med de virkelige resultatene går du over fra matematikk til virkelighet.

6. **Validering**
   Her skal problemløseren sammenligne det matematiske resultatet med det opprinnelige problemet, og stille spørsmål som: Er det matematiske resultatet rimelig? Er det nøyaktig nok? (Ferri, 2018). En validering av resultatene kan vise at det kan være nødvendig å gå rundt syklusen en gang til, for å ta hensyn til flere faktorer (Blum og Leiß, 2007, s. 226)

7. **Formidle**
   Prosessen ender med en redegjørelse som et endelig svar på det opprinnelige problemet (Blum og Leiß, 2007, s. 226)

2.7 Utfordringer med matematisk modellering

Om vi skal legge den pedagogiske debatten til grunn, har matematisk modellering en langt mindre fremtredende rolle i undervisningspraksis enn det som er ønskelig. Hovedårsaken til gapet mellom forskningsfeltet og praksis er fordi modellering er vanskelig både for elever og lærere (Blum og Ferri, 2009, s. 45). For elevene er modelleringsoppgaver kognitivt krevende, og er knyttet til andre matematiske kompetanser som å lese, kommunisere, designe og bruke problemløsningsstrategier eller jobbe matematisk (Blum og Ferri, 2009, s. 46, Blum 2015, s. 78). For lærerne er modellering vanskelig fordi det er nødvendig med kunnskap i den virkelige verden og med modelleringsaktiviteter blir undervisningen mer åpen og mindre forutsigbar (Blum og Ferri, 2009, s. 47).

2.7.1 Utfordringer for elevene

Det finnes mange studier som avdekker hvilke utfordringer elevene har under arbeid med modelleringsoppgaver. Imidlertid finner vi lite direkte forskning på hvilke utfordringer lærerne mener elevene har med modellfremkallende aktivitet og hvordan disse antakelsene sammenfaller med elevenes arbeid og opplevelser.

Flere studier har vist at hvert trinn i modelleringsprosessen er en mulig kognitiv barriere for elever. Dette kan føre til en potensiell «blokkering» eller «rødt-flagg-situasjon», som Blum (2015) kaller det, og elevene kommer ikke videre i modelleringsprosessen: «The weakest link in their modelling chain will set the limits on what they can do» (Treilibs et al. 1980 i Blum, 2015, s. 79).

Blum og Ferri (2009, s. 48) peker på noen punkter som virker spesielt utfordrende for elevene, alle fra deres egne empiriske undersøkelser:

- **Konstruere**
  Strategien som var vanlig for elevene var å ignorere sammenhengen og trekke ut tallene fra teksten og deretter behandle tallene etter et kjent mønster. En velkjent, men overfladisk løsningsstrategi som ofte er vellykket i ordinære klasseromskontekster.
- **Forenkling**
  Elevene konkluderer med at det ikke er mulig å løse oppgaven siden ikke alle data er gitt. Elevene er med andre ord ikke i stand til å gjøre antakelser.
- **Validering**
  Dette synes spesielt problematisk. Det er sjelden elevene sjekker om løsningen er rimelig og passende, og læreren oppfattes som eneansvarlig for korrekt løsning.

Punktene som Blum og Ferri (2009) fremhever sammenfaller med annen forskning på området. Nye modellerere kan ha vanskeligheter med å forstå problemet og konteksten, men også å innse når de ikke har gjort det, sier Haines og Crouch (2010). Med andre ord er det å forenkle og strukturere virkeligheten, samt skape sammenheng mellom virkeligheten og matematikken spesielt vanskelig (Maaß, 2006; Blum, 2015; Jankvist og Niss, 2019; Galbraiht og Stillmann, 2006). Blum (2015) drar frem at elevene sjelden er i stand til å overføre kunnskap og ferdigheter fra en kontekst til en annen, selv om det er strukturelle likheter mellom kontekstene. I tillegg nevner han at det er sjelden elevene reflekterer over aktivitetene sine.

2.7.2 Utfordringer for lærerne

Modellering kan kun undervises gjennom en undervisningsmetode som er undersøkende og elevsentrert, der læreren i stor grad spiller rådgivende og ikke direktive roller (Antonius, Haines, Jensen og Niss, 2007, s. 298). Blum og Ferri (2009, s. 51) understreker at lærerne er uunnværlige i arbeid med matematisk modellering, til tross for at det i modelleringaktiviteter er elevene selv som skal oppdage matematikken. Dette krever at lærerne balanserer mellom maksimal elevuavhengighet og minimal veiledning. Denne balansen oppnås ved å gi elevene gode tips på et metanivå ved å for eksempel stille adekvate spørsmål til modelleringsprosessen; «Passer dette resultatet til den virkelige situasjonen? Hva satser du på? Hva mangler?» (Blum og Ferri, 2009; Antonius et al., 2017).

For å kunne stille gode spørsmål og beherske balansen mellom maksimal elevuavhengighet og minimal veiledning er det nødvendig at lærerne har god kunnskap om og kompetanse i matematisk modellering:

> Also the teachers have to have various competencies available, mathematical and extra mathematical knowledge, ideas for tasks and for teaching as well as appropriate beliefs. Instruction becomes more open and assessment becomes more complex. This is the main barrier for applications and modelling. (Blum, 2015, s. 83)

Doerr (2007) på sin side hevder at en tilnærming til matematisk modellering i undervisningen krever en stor omvendelse i de vanlige rollene som lærer og elev:

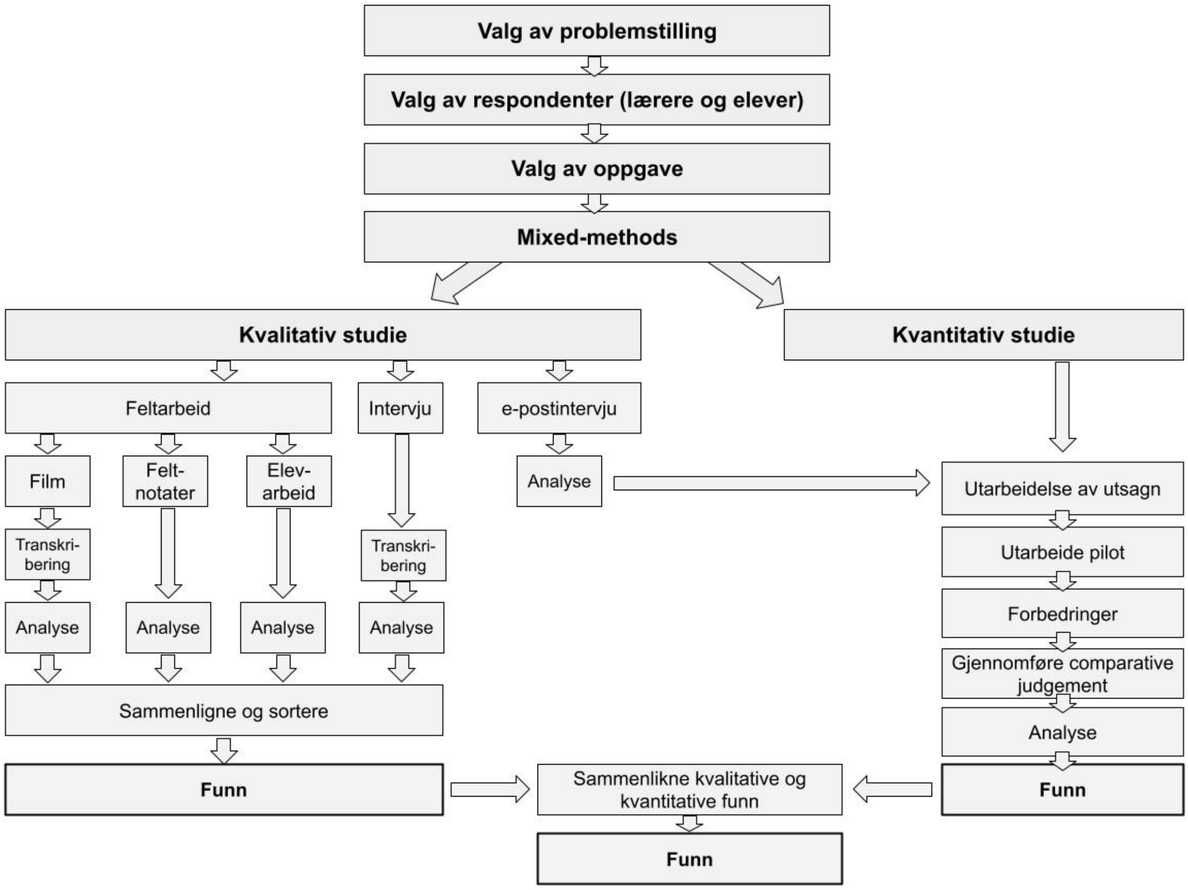
> Teaching mathematics through modelling provides substantial challenges to our current ideas about pedagogy. When engaged in such teaching, teachers are likely to encounter substantial diversity in student thinking. This places new demands on teachers for listening to students, responding with useful representations, hearing unexpected approaches, and making connections to other mathematical ideas. A modelling approach to teaching mathematics calls for a major reversal in the usual roles of teachers and students. (Doerr, 2007, s. 78)

Det har også vist seg at det kan være utfordrende for lærerne å oppmuntre elevene til ulike individuelle løsninger på modelleringsoppgaver. Ofte blir lærerens favorittløsning i en gitt oppgave «pålagt» elevene, uten at læreren selv er klar over det (Blum og Ferri, 2009, s. 53). Grunnen til dette er gjerne at læreren har utilstrekkelig kunnskap om rikdommen i «oppgaverommet». Blum og Ferri (2009) understreker nødvendigheten i at lærerne har inngående kunnskap om de kognitive kravene til gitte oppgaver, og viser til funn der lærerens kunnskap om oppgaveområder er en viktig faktor for elevenes prestasjonsgevinst.

Alle de påpekte utfordringene gir oss et dilemma, siden litteraturen viser at flere lærere har utfordringer med den matematiske modelleringsprosessen og få, eller ingen, erfaringer med modelleringsaktiviteter (Blomhøj og Kjeldsen, 2006; Bal og Doğanay, 2014; Doerr, 2007).

3 Metode

For å svare på problemstillingene i denne studien, valgte vi en tilnærming med mixed methods. Figur 3.1 viser studiens design og er en illustrasjon av studien vår.



Figur 3.1: Studiens design

Vår studie er en komparativ case-studie (Ringdal, 2013) der vi har, ved kvalitativ tilnærming, studert elevens arbeid og opplevelser på den ene siden og, ved kvantitativ tilnærming, lærernes oppfattelse på den andre siden. Til slutt har vi sammenlignet resultatene fra de kvalitative og kvantitative analysene.

I den kvalitative delen av studien samlet vi inn datamateriale fra feltarbeid, elevintervjuer og e-postintervju med lærerrespondenter. Alle innsamlede data fra feltarbeid og elevintervju ble analysert, før de ble sammenlignet og sortert. Den kvalitative analysen av e-postintervjuet med lærerrespondenter ble, sammen med rammeverk og teori, et grunnlag for den kvantitative studien.

I den kvantitative delen av studien samlet vi inn datamateriale fra CJ som deretter ble analysert. Resultatet fra CJ gav oss svar på vårt første forskningsspørsmål: *Hvilke utfordringer antar lærerne elevene har i arbeid med en modelleringsoppgave*? CJ blir forklart nærmere i avsnitt 3.5.1, kvantitativ datainnsamling.

Funn fra den kvalitative og kvantitative studien ble til slutt sammenlignet. Sammenligningen gav oss svar på vårt andre forskningsspørsmål: *Hvordan sammenfaller disse antakelsene med elevenes arbeid og opplevelse?*

Undersøkelsene i vår studie er tverrsnittsundersøkelser der vi undersøker hva en gruppe lærere antar er utfordrende for elever på et gitt tidspunkt, og hva elevene selv uttrykker er utfordrende. Datamaterialet ble samlet inn over en periode på fire uker, og de ulike dataene ble samlet inn en gang. Med det fikk vi data som viste hva elever og lærere svarte på et gitt tidspunkt og ikke en endring over tid (Ringdal, 2013).

Studien vår søker å avdekke hva lærerrespondentene antar er utfordrende for elevene samt elevenes opplevelser i modelleringsaktivitet. Siden vi undersøker hvordan modelleringssyklusen *oppfattes* og ikke hvordan den *er*, vil våre metodiske grep falle inn under sosial konstruktivisme (Ringdal, 2013). I dette kunnskapssynet er sannheter relative og kulturavhengige og det viktigste er å avdekke hvordan vi oppfatter verden, ikke nødvendigvis hvordan den er (Ringdal, 2013, s. 43-44).

I dette kapittelet redegjør vi for våre valg av respondenter og elevoppgaven som ble brukt i feltarbeidet. Den kvalitative delen av undersøkelsen blir omtalt i avsnitt 3.4 mens den kvantitative delen finnes i avsnitt 3.5. Vi avslutter kapittelet med å komme med redegjørelse for metodiske konsekvenser ved valg av rammeverk og etiske betraktninger i tillegg til å komme med noen kritiske betraktninger rundt studien.

3.1 Valg av deltagere

Tillit og relasjon til respondenter kan være en fordel i kvalitativ forskning (Christoffersen og Johannessen, 2012). Derfor ble respondenter rekruttert fra egen praksis: ni lærere vi kjenner fra før og åtte elever én av oss underviser til daglig.

Lærerrespondentene ble rekruttert fra to barneskoler. Samtlige underviser i matematikk, men det er varierende hvor mye utdannelse de har innen faget, hvor lenge siden de har studert og hvor lenge de har praktisert som matematikklærere. Siden vi undersøker modelleringsprosessen og ikke lærerne, er det utfyllende for studien at lærerne har ulik kompetanse og bakgrunn for å få et bredt spekter av respondenter. Samtlige lærerrespondenter skrev under på samtykkeskjema før start av studien (vedlegg 2).

For å gjennomføre en modelleringsoppgave med elever, valgte vi elever én av oss underviser til daglig – 50 elever fordelt på klasse 5a og 5b. Samtlige foresatte til alle elevene på trinnet fikk informasjon om studien via epost, før elevene fikk informasjon om studien muntlig. Dernest fikk alle elevene med seg et informasjonsskriv sammen med et samtykkeskjema (vedlegg 1) med hjem. De elevene som var villige til å være med på studien leverte tilbake samtykkeskjemaet underskrevet av foresatte. Vi fikk positivt svar fra 26 elever. Videre utvelgelse skjedde ved at:

- klasse ble trukket tilfeldig
- åtte elever fra trukket klasse ble trukket tilfeldig ut
- elevene ble vilkårlig delt inn i to grupper (4 elever pr. gruppe)
- etter gjennomført undervisning ble en gruppe trukket ut til etter-intervju

3.2 Valg av oppgave

Vi benyttet en modellfremkallende aktivitet hentet fra kompetansepakken «Læring og undervisning i matematikk» utarbeidet av Udir (2019c). Ordlyden er noe endret av oss, men konteksten er den samme:

> Hurra! Tone har vunnet 10 million i lotto! Hun går i banken og vil ta ut pengene i 50-lapper. Får hun med seg pengene hjem?

For å oppfylle alle de seks prinsippene om modellfremkallende aktivitet (se avsnitt 2.3, modellfremkallende aktivitet) vil elevene få i oppdrag å skrive en rapport til Tone som beskriver løsningen de kommer frem til. Oppgaven vurderte vi til å passe for elever på 5. trinn samtidig som den var gjennomførbar innenfor de to timene som var avsatt til praktisk gjennomføring. I tillegg oppfyller oppgaven de seks prinsippene som må oppfylles for å kalles modellfremkallende aktivitet (Lesh et al., 2000):

Virkelighetsnærprinsippet: Elevene kan relatere seg til problemet.

Prinsippet om modellkonstruksjon: Oppgaven inkluderer utviklingen av en eksplisitt konstruksjon, beskrivelse, forklaring og berettiget beregning.

Prinsippet om selvevaluering: Oppgaven gir elevene rom til å bedømme om løsningene er anvendbar og elevene må ta selvstendige valg i løpet av modelleringsprosessen for å komme til et endelig svar.

Prinsippet om modelldokumentasjon: Med å legge til punktet om en rapport oppfylles dette prinsippet. Rapporten må inneholde en beskrivelse av hvordan det er mulig, eller ikke mulig, for Tone å få med seg pengene hjem.

Prinsippet om konstruksjonsdelbarhet og gjenbrukbarhet: Oppgaven gir eleven behov for å utvikle et personlig verktøy til å utvikle generelle tenkemåter.

Den effektive prototypen prinsippet: Løsningen av dette problemet vil kunne hjelpe eleven i andre strukturelt like situasjoner.

3.3 Mixed methods

Et mixed methods design innebærer at forskningsprosjektet baserer seg på flere forskningsmetoder og inneholder elementer fra ulike vitenskapelige paradigmer (Cresswell og Plano Clark, 2011; Buchholtz, 2019). Antall studier med både kvalitative og kvantitative metoder har økt innenfor matematikkundervisningsforskning de siste årene (Buchholtz, 2019). Mixed methods gir forskerne stor metodisk fleksibilitet og kvalitative data kan utfylle de kvantitative og visa versa. Ulempen med mixed methods er at de er komplekse å planlegge og gjennomføre og krever dermed mer arbeid, tid og større ressurser enn enkeltmetodestudier (Buchholtz, 2019).

I denne studien (se figur 3.1) har vi forsøkt å utnytte fleksibiliteten mixed methods gir oss ved å la kvalitativ metode berike den kvantitative undersøkelsen ved å la e-postintervjuet med lærerrespondentene legge grunnlag for CJ. Til slutt har vi sammenlignet resultatene fra den kvalitative studien med resultatene av den kvantitative studien.

Ved å kombinere kvalitative og kvantitative tilnærminger mener vi å ha fått at belyst våre forskningsspørsmål på en god måte og at resultatene kan presenteres på en bredere, og et dypere nivå enn hva et design kun basert på kvalitativ eller kvantitativ forskning ville gjort (Cresswell og Plano Clark, 2011).

3.4 Den kvalitative delen av studien

Den kvalitative delen av vår studie består av de elementene som er til venstre i figur 3.1: feltarbeid, intervju med elever og e-postintervju med lærere.

3.4.1 Kvalitativ datainnsamling

I kvalitativ forskning undersøkes ofte et fenomen og unike erfaringer deltagere har. Datamateriale innhentes gjerne gjennom intervjuer eller feltobservasjoner. I analysen blir intervjuene eller observasjonene transkribert og nedtegnet, og deretter analysert. Da ser en etter ulike meningsenheter, kategorier, mønster og sammenhenger (Postholm og Jacobsen, 2018).

Vårt kvalitative datamateriale er samlet inn gjennom feltarbeid, intervju med elever og epostintervju med lærere.

3.4.1.1 Feltarbeidet

Studien ble gjennomført som undervisning med åtte elever fordelt på to fokusgrupper. Undervisningen varte i to timer. I løpet av feltarbeidet ble det tatt film med to kameraer, ett kamera på hver gruppe. Vi tok feltnotater og samlet inn elevarbeider. Videokameraene som ble benyttet i feltarbeidet var begge lånt fra Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU) i Trondheim.

Vår rolle underveis var som deltagende observatører. Vi fungerte som veiledere for elevene underveis i arbeidet, men også som observatører ved at vi tok feltnotater av det vi observerte.

Forberedelser før undervisningen

Før undervisningen hadde vi forberedt oss ved gå nøye igjennom oppgaven elevene skulle arbeide med, funnet ulike løsninger vi antok elevene ville ta, antatt hvor i modelleringsprosessen elevene ville oppleve en «rødt-flagg-situasjon» (Blum, 2015) og hvordan vi skulle veilede de igjennom disse «blokkeringene», tenkt igjennom hvilke matematiske utfordringer oppgaven ville gi og når i oppgaveforløpet vi skulle gi nye opplysninger dersom elevene selv ikke klarte å innhente tilstrekkelig informasjon. I tillegg hadde vi funnet frem konkreter og utstyr elevene kunne benytte: klosser som illustrerer høyden på 200 femtilapper, kalkulator, femtilapp, ark og blyanter på gruppebordene, whiteboard-ark på veggen, samt en trillekoffert som kunne egne seg å ha pengene i.

Selve gjennomføringen av undervisningen

- Elevene ble opplyst om at de når som helst kunne velge å avbryte oppgaven og gå tilbake til ordinær undervisning (frivillig deltakelse).
- Elevene fikk beskjed om å ikke skrive navet sitt på noen av arkene som skulle samles inn (anonymitet), men at de kunne bruke gruppe 1 og gruppe 2
- Utstyret i klasserommet ble presentert for elevene, og det ble opplyst om at det var helt frivillig å bruke.
- Elevene ble introdusert for oppgaven muntlig og skriftlig. Oppgaven ble skrevet på tavla foran i klasserommet.

- Elevene fikk muntlig oppdrag om å utarbeide en skriftlig rapport om det de kom frem til.

Etter endt undervisning ble elevarbeider samlet inn, film av undervisningen ble transkribert og slettet fra kameraene. Under transkriberingen ble elevene anonymisert ved at de fikk et pseudonym. Pseudonymene sammen med elevenes virkelige navn ble lagret på minnepenn lånt av NTNU.

3.4.1.2 Intervju med elever

Rett etter undervisningen foretok vi individuelle intervjuer med fire elever tilhørende fokusgruppe 2. I disse intervjuene var hensikten å få frem hva de selv følte utfordrende i arbeidet med modelleringsoppgaven. For å hjelpe elevene til å kommunisere dette gikk vi igjennom filmen ved å hurtigspole og be elevene stoppe filmen når de så sekvenser de følte hadde vært utfordrende. Elevene fikk også uttrykt hva de mente de hadde mestret, hva de syntes om å arbeide på denne måten og de fikk gi forbedringspunkter til lærerne.

Våre roller under intervjuet var at den faste læreren til elevene var den aktive, mens den andre tok notater.

3.4.1.3 E-postntervju av lærerrespondenter

I forkant av intervjuet med lærerne sendte vi ut en e-post (vedlegg 3) der vi takket for deltakelsen og ga de et innblikk i hva vi mener med modelleringsaktivitet ved å gi de eksempel på en oppgave:

> Hurra! Tone har vunnet 10 millioner i lotto! Hun går i banken og vil ta ut pengene i 50-lapper. Får hun med seg pengene hjem?

Deretter sendte vi ut en ny epost, selve epostintervjuet, med en svarfrist på to uker. Lærerrespondentene fikk presentert den samme oppgaven som i første epost og fikk følgende spørsmål:

> Hva mener du vil være elevenes største utfordring i arbeid med denne modelleringsaktiviteten? Svarene dine skal relateres til elever på 5. trinn og nevnte oppgave. Du må gjerne nevne flere punkter.

Svarene lærerrespondentene ga ble arkivert for analyse.

3.4.2 Analyse av kvalitative data

Vår kvalitative analyse har en deduktiv tilnærming (Nilssen, 2014) med forhåndsbestemte koder knyttet opp mot rammeverket vårt. Kodene er de syv trinnene i modelleringssyklusen til Blum og Ließ (2007):

1. Forståelse / konstruere
2. Forenkle
3. Matematisering
4. Jobbe matematisk
5. Tolkning
6. Validering
7. Formidle

For å lette analysearbeidet ga vi trinnene i modelleringssyklusen ulike farger. Denne tilnærmingen gjorde det enklere når vi skulle sammenligne og samle dataene fra de forskjellige arenaene: transkripsjon, intervju, feltnotater og teori.

All innsamlet data analyserte vi hver for oss før vi sammenlignet funnene. Ofte var vi samstemte i analysen. De gangene vi ikke var samstemte, gikk vi tilbake til teorien og diskuterte innholdet og meningen med hver av overgangene på nytt, før vi foretok en ny analyse hver for oss. De gangene det var behov for en reanalysering var usikkerheten om dataene skulle kodes som «forståelse/konstruere» eller «forenkle» samt «matematisering» eller «jobbe matematisk». Etter reanalyse var vi alltid samstemte i kodingen av datamaterialet.

Vi valgte å analysere arbeidet til fokusgruppe 2, men sammenlignet også funn opp mot fokusgruppe 1, særlig om det var noe som var uklart under analysen. Ofte var det liknende funn i begge fokusgrupper. Fokusgruppe 1 ble ikke ferdig med å jobbe matematisk med den tiden vi hadde til rådighet, og derfor fikk vi ikke sjekket funn fra overgangen «validere» i fokusgruppe 2 opp mot fokusgruppe 1.

Analysen av responsen på e-postintervjuet med lærerne er beskrevet i avsnitt 3.5.2, utarbeidelse av utsagn, siden denne analysen danner grunnlag for vår kvantitative del av studien. Datamaterialet er allikevel analysert deduktivt som beskrevet over.

3.4.3 Undersøkelsens troverdighet

For å sikre troverdigheten i vår kvalitative analyse, har vi støttet oss på Guba (1981) sine fire kriterier for troverdighet: kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet.

Kredibilitet: Kredibilitet handler om i hvilken grad våre konstruksjoner og fortolkninger samsvarer med respondentenes virkelighet (Guba, 1981). En studie er troverdig dersom beskrivelser og tolkninger av respondentenes erfaringer presenteres på en slik måte at andre som er i samme situasjon som respondentene, vil kunne gjenkjenne beskrivelsene som sine egne erfaringer. For å undersøke studiens kredibilitet kan vi foreta en «member check», det vil si å teste dataene på en gruppe som kan tilsvare gruppen dataene er samlet inn på (Cohen, Manion og Morrison, 2018). Andre måter å sikre kredibiliteten på, kan være å forlenge arbeidet på et forskningssted slik at forskere har tid til å sjekke eget arbeid. Det kan også være nyttig å diskutere studien med en fagfelle for å få tilbakemeldinger på arbeidet. Forskere må også for å kunne verifisere data, kunne vise til minst to ulike kilder. Data som er samlet inn må kunne spores tilbake ved hjelp av referanser. Triangulering med ulike data, ulike rammeverk eller flere uavhengige forskere styrker kredibiliteten i en studie. Det kan være hensiktsmessig å samle inn mer data enn du har tenkt til å bruke.

For å styrke kredibiliteten analysert vi datamaterialet hver for oss og sammenlignet funnene i etterkant (nærmere beskrevet i avsnitt 3.4.2, analyse av kvalitative data). I tillegg vurderte vi funnene opp mot tidligere forskning fortløpende, noe vi redegjør for i kapittel 5 under drøfting av hovedfunnene. Vi hadde to fokusgrupper i feltarbeidet. Vi valgte å analysere arbeidet til fokusgruppe 2, men vurderte ofte funn opp mot fokusgruppe 1 for å se om det var liknende funn der (nærmere beskrevet i avsnitt 3.4.2, analyse av kvalitative data). E-postintervjuene ble analysert opp mot vårt teoretiske rammeverk som beskrevet i avsnitt 3.5.2, utarbeidelse av utsagn.

Overførbarhet: Om funnene i forskningen kan overføres til andre situasjoner og generaliseres, kalles av Guba (1981) for overførbarhet. Empirien vi legger til grunn i denne studien gjelder for denne gruppen, og vil ikke dermed være representativ for alle elever på 5. trinn og alle matematikklærere (Cohen, Manion og Morrison, 2018). Kvalitative studier påvirkes av konteksten (Nilssen, 2014) og gjennomføres undersøkelsen med andre elever og andre lærere, vil man kunne komme frem til andre funn. Imidlertid har vi beskrevet studien så nøyaktig som mulig, slik at andre kan gjennomføre den samme studien i en annen kontekst. I tillegg har vi støttet oss på et teoretisk rammeverk, og på den måten forsøkt å generalisere resultatene ved hjelp av teori.

Pålitelighet: Pålitelighet handler om hvorvidt andre forskere hadde kommet frem til de samme funnene som oss dersom studien hadde blitt gjort på ny med de samme, eller liknende, deltakere i den samme, eller lignende, kontekst (Guba, 1981, side 80).

For å sikre påliteligheten i denne forskningen har vi beskrevet hvordan vi har gjennomført studien, og hvordan vi med deduktiv tilnærming har analysert datamaterialet i lys av modelleringssyklusen til Blum og Ließ (2007). På den måten er det mulig å etterprøve om forskningen er i henhold til såkalt "generally accepted practice" (Guba, 1981, side 87). Vi gjennomførte undervisningen og har hevet påliteligheten i studien ved å analysere datamaterialet i flere omganger. Vi kan allikevel ikke utelukke at andre kan få andre funn med det samme datamaterialet.

Bekreftbarhet: Objektiviteten til forskeren i kvalitative studier beskrives av Guba (1981) som bekreftbarhet. Bekreftbarhet vurderes når man analyserer om funnene kommer fra deltakerne, og at de ikke er påvirket av forskerens motivasjon, interesse og oppfatninger. Som forskere går vi inn i en studie med en viss forforståelse. «Både erfaringer, bakgrunn, kunnskaper og det teoretiske rammeverket ledsager prosessen med å forstå og skape mening i datamaterialet» (Nilssen, 2014, side 26). At vi har en god relasjon til respondentene som deltok i studien er både en styrke og en svakhet. Styrken er at respondentene føler seg trygge, har tillit og at de vil oppleve forskningssituasjonen som "hverdagslig", noe som har stor betydning i kvalitativ forskning (Guba, 1981; Nilssen, 2014). Imidlertid kan respondentene ha noen forestillinger om hva vi forventer, og agere ut fra dette ved for eksempel å svare slik de tror vi ønsker. I en kvalitativ studie vil med andre ord relasjonen mellom oss som forskere og respondentene påvirke de resultatene som kommer frem i studien. Bekreftbarheten styrkes gjennom at respondentene kun har en relasjon til en av oss, den andre har de ikke forhåndskunnskaper om. Alt datamateriale ble også analysert av oss begge – den ene med relasjon til respondenten, den andre uten. Et annet moment er at lærerne som deltok i studien skulle uttale seg om hva som er utfordrende for elevene, og ikke om oss eller lærerne selv, antar vi det mindre sannsynlig at de «pynter» på svarene.

3.5 Den kvantitative delen av studien

Den kvantitative delen av vår studie består av de elementene som er til høyre i figur 3.1: gjennomføring av CJ med lærerrespondentene.

3.5.1 Kvantitativ datainnsamling

Kvantitative studier kjennetegnes ved at de gjerne er teoribaserte og går i bredden ved å registrere sammenlignbar og strukturert informasjon i et stort utvalg (Ringdal, 2013). Målet med en kvantitativ undersøkelse er gjerne å få et representativt bilde på hvordan en større gruppe ser på ting og datamaterialet som samles inn er gjerne tall som analyseres statistisk (Postholm og Jacobsen, 2018; Ringdal, 2013).

Vårt kvantitative datamateriell er samlet inn ved hjelp av CJ som gjør det mulig å måle hvor antatt utfordrende de ulike overgangene i modelleringssyklusen til Blum og Ließ (2007) er for elevene i modellering.

Rasch-analyse

En rasch-analyse er en «Item Respons Theory-analyse» med to parameter: hvordan respondenten svarer i forhold til andre respondenter, og hvordan oppgavene rangeres. En rasch-analyse gir et riktigere bilde enn klassisk testteori (Bond og Fox, 2003). For eksempel vil det å inkludere et sett med vanskelige spørsmål til en test sannsynligvis øke forskjellene mellom personer i klassisk testing i forhold til rasch. På en lignende måte vil inkludering av et sett med personer med høye tiltak mest sannsynlig øke forskjellen mellom artikler. Tiltak oppnådd ved Raschanalyse er derimot ikke avhengig av hvem som tar testen, og hva som skal vurderes (Bond og Fox 2003).

NoMoreMarking bruker en Rasch-analyse som i vårt tilfelle vurderer hva lærerrespondentene tror er utfordrende for elevene. Når man konstruerer og validerer en test er det viktig å vite hva man ser etter og vil ha svar på i testen. Rasch-analysen gir oss den relative verdien av hvor utfordrende noe er for elevene. Vi får ut fra denne testtypen ingen beskrivelse av hvor utfordrende noe er absolutt, men en beskrivelse av hvor utfordrende det er i forhold til andre ting.

Rasch-modellen går ut fra at det er to parameterer som bestemmer hvor godt du klarer å svare på en oppgave. De parameterne er; hvilken kompetanse den personen som svarer har, og hvilken vanskelighetsgrad det er på oppgavene. Både spørsmålene og deltakerne vil blir rangert fra 0 til 100 i analysen. I vår studie vil resultat ned mot 0 vise at det utsagnet vil respondentene tro ikke er vanskelig for elevene. Og resultat opp mot 100 vil være utsagn respondentene mener er svært vanskelig for elevene. Når vi har med lærerrespondenter med varierende matematisk bakgrunn, gir Rasch-modellen oss et riktig bilde av de ulike utsagnene sin vanskelighetsgrad.

I vår studie vurderer vi en påstand om hva som kan være vanskelig opp mot en annen og det vil i hvert tilfelle teoretisk være 50 % mulig å svare det ene framfor det andre i alle vurderingene. Etter hvert som lærerrespondentene svarer på undersøkelsen vil utsagnene bli vektet ulikt som igjen påvirker hvor utfordrende det antas at utsagnet er for elevene. I vår studie er det utsagnene vi har fokus på og ikke respondentene. Av den grunn er det viktig å ha et variert utvalg av respondenter slik at utsagnene blir vurdert av lærere med ulik kompetanse i matematikk. Vi kan ikke si hva som er riktig og hva som er galt i respondentenes svar, kun hva som er vanligst å svare for de respondentene som var med i undersøkelsen.

CJ bygger på et psykologisk prinsipp om at mennesker er flinkere til å sammenligne to ulike objekter og vurdere objektene i forhold til hverandre, enn å vurdere objektet uten å ha noe å sammenligne det med (Thurstone, 1927).

En tradisjonell vurdering bygger på at du allerede har en absolutt vurdering av hvor noe ligger på en skala. Et eksempel på dette kan være at lærere skal vurdere hvor vanskelig de fire regneartene er for elever, og at den som skal vurdere får beskjed om å vurdere dette på en gitt skala. For eksempel: Hvor vanskelig du tror elevene synes de ulike regnearter er (tabell 3.1).

Hvor vanskelig synes elevene...	På en skala fra 1 - 10 der 10 er vanskeligst
multiplikasjon er	
divisjon er	
addisjon er	
subtraksjon er	

Tabell 3.1: Eksempel på vurderingsskjema

I vurderingen som vist i tabell 3.1 skal læreren sette et tall fra 1 til 10 i sine vurderinger på de ulike regneartene, hvor 10 er vanskeligst og 1 er lettest. Slike vurderinger kan være vanskelige å foreta og ikke minst vurdere i etterkant, og vi kan anta at det vil være mer utfordrende dess flere ting som skal vurderes. Det kan være utfordrende for lærerne å finne ut hva som er utfordrende for elevene, så de kan ta hensyn til det i egen undervisning. Lærere kan nok ha en formening om hva de tror elevene vil synes er mest og minst utfordrende, men om dette stemmer med virkeligheten er ikke sikkert. Verre vil det for eksempel være å vurdere å plassere multiplikasjon på en vanskelighetsskala som om det skal vurderes til vanskelighetsgrad 4, 5, 6 eller 7.

CJ har ingen absolutt vurdering der du skal sette et tall på hvor vanskelig noe er (Thurstone, 1927). I eksempelet over kunne vurderingen i CJ være at du fikk opp to regnearter og måtte ta et valg på hvilken av de to regneartene du mente var vanskeligst for elevene. Denne vurderingen kan gjøres flere ganger inntil alle regneartene er vurdert opp mot hverandre.

I vår studie brukte vi CJ for å innhente et mål på hvor utfordrende lærerrespondentene antok de ulike trinnene i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) ville være for elevene, basert på utsagnene i tabell 3.2.

I undersøkelsen fikk lærerrespondentene opp to utsagn av gangen. Disse utsagnene skulle respondentene vurdere opp mot hverandre for deretter å ta en avgjørelse på hvilket av de to utsagnene de antok ville være mest utfordrende for elevene i modelleringsaktivitet. Deretter fikk respondentene opp to nye utsagn som skulle vurderes opp mot hverandre. Hvert enkelt utsagn dukket opp flere ganger for å bli vurdert opp mot andre utsagn. Totalt foretok hver respondent 50 sammenligninger i undersøkelsen.

Etter at lærerrespondentene hadde gjennomført undersøkelsen med CJ fikk hvert utsagn et mål som forteller noe om hvor utfordrende respondentene mener utsagnet er for elevene i modelleringsprosessen. For å gjennomføre CJ med lærerrespondentene ble nettstedet NoMoreMarking brukt. NoMoreMarking er utviklet for å blant annet sammenligne skolearbeid og benytter en Rasch-modell for å estimere målene på det som skal sammenlignes, i vårt tilfelle hvert utsagn. I grove trekk brukes «maximum likelihood Estimate» til å finne de mest sannsynlige målene gitt den observerte data. Nærmere deltajert om CJ er beskrevet i Thurstone, 1927.

3.5.2 Utarbeidelse av utsagn

For at lærerrespondentene skal kunne vurdere de syv ulike overgangene i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007), har vi utarbeidet 25 utsagn som beskriver overgangene (tabell 3.2). Vi har hatt to tilnærminger for å utarbeide utsagnene; teori og respons på e-postintervjuet fra lærerrespondentene.

I den teoretiske tilnærmingen har vi søkt etter beskrivelse av de ulike overgangene i modelleringsteori (Blum og Ferri, 2019; Blum og Leiß, 2007; Haines og Crouch, 2010; Maaß, 2006) og tidligere forskning som har benyttet NoMoreMarking for å vurdere de ulike overgangene i modelleringssyklusen (Strand, 2019; Schjølberg og Solli, 2020).

Før vi fikk respons på e-postintervjuet fra lærerrespondentene hadde vi utarbeidet utsagn med utgangspunkt i vårt rammeverk med tilhørende teori. En analyse av svarene fra respondentene viste at mange av deres uttalelser passet godt inn i de utsagnene vi allerede hadde utarbeidet. Analysen resulterte også i to utsagn som faller utenfor selve modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007): «å få motivasjon for å løse oppgaven» og «å samarbeide om hvordan oppgaven kan løses». Flere av respondentene pekte på motivasjon og samarbeid som utfordrende momenter for elevene; av den grunn valgte vi å lage et punkt 8 som vi har kalt «Lærerutsagn utenfor modelleringssyklusen». Motivasjon og samarbeid er viktige faktorer i modelleringsarbeid, men beskriver ikke noen av overgangene i modelleringssyklusen.

Erfaringene Strand (2019) gjorde i sin studie med tanke på antall sammenligninger og tiden dette tok, gjorde at vi ønsket å ha maksimalt 25 utsagn slik at hver respondent i vår undersøkelse skal gjennomføre 50 sammenligninger. De 25 utsagnene har blitt benyttet både i den kvantitative undersøkelsen med lærerrespondentene samt i analyse av den kvalitative studien med elevene.

3.5.3 Pilotering

I utviklingen av undersøkelsen i NoMoreMarking lagde vi to piloter for å teste sammenligningen av uttrykkene med CJ. Den første piloten ble gjennomført kun av oss, og erfaringene vi gjorde var at utsagnene som skulle sammenlignes måtte være korte, lette å forstå og begrepene hensiktsmessige. Noen av utsagnene ble etter første pilot endret til å bli kortere og mer presise.

Andre pilot ble gjennomført av oss og veileder og igjen ble noen av utsagnene forkortet og spisset. Faren med å forkorte utsagnene og endre ordlyden er at betydningen med utsagnene kan bli påvirket i prosessen. Ett av utsagnene under «validere» var utfordrende å forkorte uten at noe av betydningen forsvant: «å revidere løsningen dersom den matematiske løsningen ikke passer til det virkelige problemet». Vi vurderte å forkorte dette utsagnet til «å revidere løsningen», men valgte å la det originale utsagnet bestå. Grunnen er at vi ved å ta *bort matematisk løsning* og *virkelige problemet* også tok vekk betydningen av å knytte matematikken sammen med problemet i den virkelige verden.

Trinn i modelleringssyklusen med tilhørende utsagn
1. Konstruere
a) å forstå problemet b) å gi forslag på hvordan oppgaven kan løses c) å tilegne seg nødvendig informasjon for å løse oppgaven
2. Forenkle
a) å strukturere informasjon b) å forenkle virkeligheten c) å lage en skisse for å få oversikt
3. Matematisere
a) å gjøre den ikke-matematiske situasjonen matematisk b) å oversette fra virkelig problem til en matematisk sammenheng
4. Jobbe matematisk
a) å løse de matematiske utfordringene – selve regningen b) å samtale om metoder de benytter c) å benytte ulike representasjoner d) å vurdere ulike representasjoner e) å benytte sine matematiske kunnskaper f) å skrive ned utregninger
5. Tolke
a) å gjøre om matematikken til hverdagsspråk b) å vurdere om løsningen er riktig c) å beskrive løsningen sin med matematisk språk
6. Validere
a) å begrunne valgene de tar b) å sette seg inn i andre elevers løsning c) å reflektere over andre måter å løse problemet på d) å stille seg kritisk til egne og andres løsninger e) å revidere løsningene dersom den matematiske løsningen ikke passer til det virkelige problemet
7. Formidle
a) å overbevise andre om sin oppgaveløsning
8. Lærerutsagn utenfor modelleringsprosessen
a) å få motivasjon for å løse oppgaven b) å samarbeide om hvordan oppgaven kan løses

Tabell 3.2: Utsagn satt inn i modelleringssyklusen

3.5.4 Gjennomføring av undersøkelsen

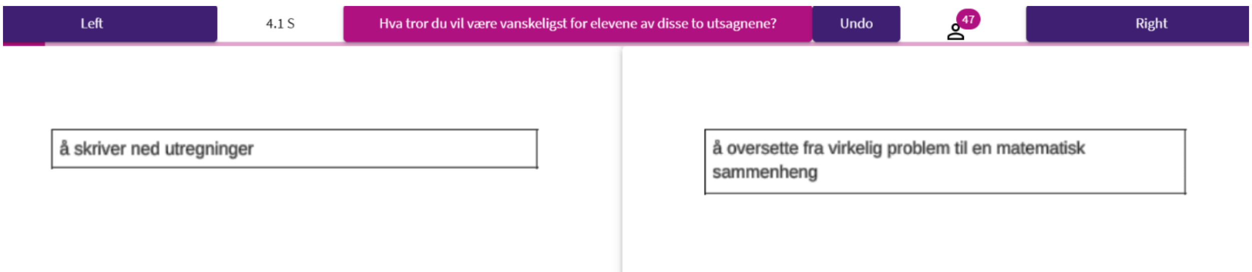
Gjennomføringen av CJ ble gjort ved hjelp av NoMoreMarking. NoMoreMarking er et digitalt verktøy som er utviklet for å bruke CJ i skolen (NoMoreMarking, 2019), men kan også benyttes til andre formål. I NoMoreMarking kalles det som skal vurderes for «kandidater» og de som vurdere «dommere». I vårt tilfelle vil «kandidatene» være de 25 utsagnene som skal vurderes, mens «dommerne» vil være våre lærerrespondenter som skal vurdere utsagnene.

For å kunne gjennomføre undersøkelsen må hver enkelt «dommer» logge seg inn med e-postadresse og navn. For at undersøkelsen ikke skal kunne spores tilbake til våre respondenter opprettet vi e-postadresser i våre navn, og respondentene gjennomførte undersøkelsen på våre PCer.

Eksempel på gjennomførelse av CJ med lærerrespondent:

1. Vi avtalte tid med en lærerrespondent for gjennomføring.
2. Vi logget inn på NoMoreMarking på vår PC med en e-postadresse opprettet for formålet og benyttet navnet «informant1», «informant2» og så videre.
3. Lærerrespondenten ble minnet om å ha den spesifikke modelleringsoppgaven i tankene under vurderingen av utsagnene, samt at elevene som skulle arbeide med oppgaven gikk på 5. trinn.
4. Vi forklarte hvordan undersøkelsen skulle gjennomføres: «to utsagn kommer opp, du vurderer hvilken som vil være mest utfordrende for elevene og klikker deretter høyre (right) eller venstre (left)».
5. PC'en ble deretter overlevert lærerrespondent og vi lot respondenten være alene under vurderingen.

Figur 3.2. viser et eksempel på hvordan undersøkelsen så ut for lærerrespondenten. Instruksjonen i midten, «Hva tror du vil være vanskeligst for elevene av disse to utsagnene?» sto uforandret gjennom hele undersøkelsen, mens utsagnene til høyre og venstre endret seg for hver vurdering. Knappen merket «Undo» gjorde det mulig for kandidatene å gå tilbake og foreta vurderinger på nytt.



Figur 3.2: Eksempel på vurdering i NoMoreMarking

I NoMoreMarking er det ikke antall «dommere» som har betydning for undersøkelsen, men antall sammenligninger. For hver «kandidat» som blir lagt inn i undersøkelsen, kreves det ti ganger så mange sammenligninger (NoMoreMarking, u.å.a). I vårt tilfelle betyr det at vi må ha minst 250 vurderinger siden vi har 25 utsagn. Disse 250 vurderingene behøver ikke å utføres av en respondent, men kan fordeles ut over flere.

3.5.5 Analyse av kvantitative data

Våre analyser av de kvalitative dataene baserer seg på resultatet av CJ i NoMoreMarking. I NoMoreMarking får hvert utsagn et mål på en skala som er skalert fra 0 til 100. Målene utsagnene får indikerer hvor utfordrende våre respondenter mener hvert utsagn er for elevene i arbeid med modellering. Dess høyere målet på et utsagn er, jo mer utfordrende mener respondentene utsagnet er for elevene.

Vi lagde et boksplott for hver av trinnene i modelleringssyklussen. En boksplott er en visuell fremstilling av standardverdiene i et datasett. I fremstillingen kommer den laveste og høyeste verdien i hvert trinn i modelleringssyklusen frem, medianen og gjennomsnittet for hele trinnet og variasjonsbredden innen hvert trinn. Boksen begynner med medianen for nedre halvdel og avsluttes med medianen for øvre halvdel, noe som gjør at boksen inneholder minst 50 % av utsagnene i trinnene (figur 4.3).

3.5.6 Validitet

Validitet omhandler datamaterialets gyldighet i forhold til problemstillingene vi har i vår kvantitative studie, og validiteten avhenger av forekomsten av systematiske feil (Cohen, Manion og Morrison, 2018). I vår studie er det to typer validitet som er relevant: begrepsvaliditet og innholdsvaliditet (Cohen, Manion og Morrison, 2018; Ringdal, 2013).

«Begrepsvaliditet går på om vi faktisk måler det teoretiske begrepet vi ønsker å måle» (Ringdal, 2013, s. 98). I vår studie er hensikten at vi skal måle hvor vanskelig lærerrespondentene mener de ulike overgangene i modelleringsprosessen er for elevene. Dette mener vi at vi får målt ved at utsagnene vi har utarbeidet måler *modelleringsprosessen* gjennom CJ.

«Innholdsvaliditet går (…) på (…) om målet dekker de viktigste aspektene av begrepet» (Ringdal, 2013, s. 98), altså om det er overensstemmelse mellom utsagnene og modelleringssyklusen. I vår undersøkelse er det avgjørende at utsagnene vi har utarbeidet er dekkende for de ulike trinnene i modelleringsprosessen.

Systematiske feil kan oppstå i vår studie ved at lærerrespondentene tolker og forstår uttrykkene vi utarbeidet om modellering annerledes enn oss. Utsagnene ble, for å tilpasses en undersøkelse, komprimert til korte og lett leselige fraser (beskrevet i avsnitt 3.5.2, utarbeidelse av utsagn). Faren ved å forenkle fagspråk er at noe av meningsinnholdet kan ha godt tapt, da teoretiske begreper ofte er rikere på meningsinnhold enn korte fraser (Ringdal, 2013). Imidlertid ble lærerrespondentene presentert for en modelleringsoppgave i e-postintervjuet. Intervjuet gjorde at respondentene måtte sette seg inn i oppgavens problemstilling. Før evaluering av utsagnene ble respondentene minnet på denne oppgaven og oppfordret til å ha oppgaven som utgangspunkt når de evaluerte utsagnene i CJ. Ved å gi lærerrespondentene denne preferansen, mener vi at det er mer sannsynlig at respondentene har den samme oppfattelsen av utsagnene som vi har og at sannsynligheten for feiltolkning er minimert.

3.5.7 Reliabilitet

I vår studie har vi vurdert studiens reliabilitet ved å måle graden av intern konsistens med Cronbachs alfa (NoMoreMarking, u.å.b). Chronbachs alfa er en statistisk størrelse som varierer fra 0 til 1. Reliabiliteten er tilfredsstillende hvis alfa blir målt til en høy verdi, helst over 0,7 (Ringdal, 2013, s. 98). NoMoreMarking bruker følgende skala på måling av intern konsistensen (vår oversettelse) (NoMoreMarking, u.å.b):

> 0,7 – akseptabel intern konsistens
> 0,8 – god intern konsistens
> 0,9 – meget god intern konsistens

For å oppnå tilfredsstillende reliabilitet kreves det ti ganger så mange sammenligninger som det finnes utsagn. I vårt tilfelle betyr det at vi må ha minst 250 vurderinger totalt i vår undersøkelse for å oppnå tilfredsstillende reliabilitet.

Reliabiliteten påvirkes også av hvordan lærerrespondentene oppfatter fagbegreper i utsagnene de vurderer. Respondentgruppens oppfatning av for eksempel begrepet «representasjon», vil ha innvirkning på reliabiliteten. Dersom gruppens forståelse av begrepet er lik, vil sannsynligheten øke for de vurderer det likt, noe som fører til høy reliabilitet. Hvis derimot forståelsen av begrepet er ulik, vil det være større sjanse for at respondentene svarer ulikt og reliabiliteten bli lavere (Cohen, Manion og Morrison, 2018).

3.5.8 Infit

I CJ får alle utsagnene og lærerrespondentene en infitverdi. **Utsagnenes infitverdi** sier noe om hvor enige respondentene var om det enkelte utsagn. En forventet infitverdi er 1. Hvis tallet er mindre enn 1 er respondentene relativt enige om hvor utfordrende det spesifikke utsagnet er for elevene. Hvis tallet er høyere enn 1 er lærerne uenige i sin vurdering; noen respondenter mener utsagnet er utfordrende for elevene, mens andre mener det er mindre utfordrende. En akseptabel grense for infitverdiene er 0,4-1,2 (Bond og Fox, 2015)

Lærerrespondentenes infitverdier sier noe om hvor enig, eller uenig, den enkelte respondent er med de andre respondentene generelt. Dersom en respondent får en infit mellom 0 og 1 betyr det at respondentens vurderinger er ganske lik de andre respondentenes vurderinger (Bond og Fox, 2015). Er derimot infitverdien 1,3 eller høyere, viser det at den aktuelle respondenten vurderer annerledes enn de andre respondentene som er med i undersøkelsen. Hvis en infitverdi på en respondent er 1,5, betyr det at respondenten er 50% uenig med de andre respondentene som er med i undersøkelsen (Bond og Fox, 2015). Forventet enighet er også her lik 1.

3.6 Metodiske konsekvenser ved valg av rammeverk

Rammeverket legger premisser for hvordan vi har utarbeidet studien og analyserer innhentet datamaterialet. Vårt rammeverk, modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007), fokuserer på de ulike overgangene i modelleringsprosessen. Hadde vi valgt et annet rammeverk, som for eksempel psykologiske sykluser (figur 2.3), ville vår forskning fått en annen retning og andre resultater.

Vi anser vårt valg av rammeverk som et godt verktøy for vår studie. Vi har ikke funnet tidligere forskning som kombinerer både kvalitative og kvantitative metoder opp mot modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007), men flere studier med kun kvalitativ eller kun kvantitativ tilnærming har hatt det samme rammeverket.

3.7 Etiske betraktninger

I de forskningsetiske retningslinjene for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi, utarbeidet av De nasjonale forskningsetiske komiteer (NESH) er det beskrevet hvilke forskningsetiske retningslinjer det er viktig å ta hensyn til i forskning som omhandler mennesker. Retningslinjene er rådgivende og veiledende, og de skal bidra til å utvikle forskningsetisk skjønn og refleksjon, avklare etiske dilemma og fremme god vitenskapelig praksis (NESH, 2016).

Respondentene våre har under hele forskningsprosessen mulighet til å trekke seg. De har alle fått et samtykkeskjema de har svart positivt i forhold til deltagelse på og har det fått opplyst om muligheten for å til enhver tid trekke seg. Vi har ikke lagret identifiserende opplysninger om deltagere annet sted enn på en kryptert ekstern harddisk lånt av veilederen vår på NTNU. Siden vi brukte det eksterne programmet NoMoreMarking, ønsket vi ikke at respondentene skulle kunne identifiseres der. I denne datainnsamlingen brukte vi derfor vår egen PC slik at respondentenes IP-adresser ikke skulle bli lagret av en tredjepart og fiktive e-postadresser når respondentene skulle vurdere uttrykkene.

Det understrekes i punkt 14 at barn og unge som deltar i forskning, har særlig krav på beskyttelse. Det stilles krav til at "forskeren må ha tilstrekkelig kunnskap om barn til å kunne tilpasse både metode for og innhold i forskningen til den aldersgruppen som skal delta", og at man må være klar over at "barn er ofte mer villige til å adlyde autoriteter enn voksne er, og de opplever ofte at de ikke kan protestere" (NESH, 2016, punkt 14).

Som utdannet adjunkt med fordypning i matematikk og matematikkdidaktikk mener vi å inneha kunnskapen som kreves til å tilpasse metode og innhold. Siden en av oss er elevens faste matematikklærer og har en god relasjon til elevene, mener vi at elevene er trygge nok på oss som voksenpersoner til å uttrykke om de ikke ønsket å delta på prosjektet. Vi informerte i tillegg elevenes kontaktlærere, slik at de respektive kontaktlærere kunne snakke med elevene, uten oss til stede, om prosjektet og på den måten få frem eventuell motvilje.

Vi har fulgt de forskningsetiske retningslinjene fra nasjonal forskningsetiske komité heretter kalt NESH. Vi fulgte Norsk senter for forskningsdata sine retningslinjer for datahåndtering, og vi har fått godkjent vår forskning i NSD med saksnummer 583331. Vi har ikke samlet data på lærerrespondentene utover samtykkeskjemaene. Disse er låst inn i en låsbar skuff og destrueres etter masteroppgaven er godkjent.

Elevene som deltok i studien ble spurt om de ønsket å delta, ble opplyst om at deltakelsen var frivillig og at de, uten begrunnelse, kunne forlate rommet undersøkelsen foregikk i når de måtte ønske. Dette imøtekommer NESH (2016) sine retningslinjer om alderstilpasset informasjon og frivillighet (punkt 14). Elevene arbeidet i grupper på 3, og de hadde tilgang til konkreter, papir og blyant under arbeidet. Før elevene startet arbeidet ble de fortalt at vi ikke ville kunne hjelpe de underveis, og at vi ønsket at de samarbeidet om oppgavene som skulle løses. Denne arbeidsformen er elevene godt kjent med fra matematikktimene, og er ikke spesiell for forskningssituasjonen. Elevene ble også opplyst om at vi var interessert i å se hvordan de løste oppgavene, og at vi ville ta bilde av elevarbeidene i etterkant. Av den grunn skulle de ikke skrive navnene sine på besvarelsen. Oppgavene elevene har jobbet med slettes sammen med besvarelsene og den krypterte listen når eksamen er bestått.

3.8 Metodekritikk

Våre utsagn som er benyttet som utgangspunkt til innhenting av kvalitative data er utarbeidet fra teori og uttalelser fra lærerrespondentene. At lærerrespondentene selv fikk påvirke utsagnene mener vi kan være en styrke i studien siden noen av uttrykkene er gjenkjennbare for respondentene. Imidlertid ble utsagnene endret fra teorien, noe som kan ha gjort noe av meningsinnholdet har gått tapt. Av den grunn kan det stilles spørsmål ved om våre utsagn beskriver modelleringsprosessen på en god måte. På en annen side var det nødvendig å operasjonalisere utsagnene slik at de ble overkommelige i undersøkelsen.

Alle våre respondenter kommer fra samme kommune, noe som kan ha påvirket resultatene i studien. Et bredere utvalg av respondenter kunne gitt andre resultater. Det er allikevel viktig å påpeke at lærerrespondentene som er med i undersøkelsen, jobber på forskjellige trinn og er fra to forskjellige skoler, noe som gir studien en viss bredde.

Programmet NoMoreMarking (2019) er laget for å evaluere elevbesvarelser og er ikke spesielt utformet til vårt formål. Andre forskere har imidlertid brukt programmet i forskning for å måle modelleringsprosessen slik vi har gjort (Strand,2019; Schølberg og Solli, 2020).

3.8.1 Forskning på egen praksis

I denne studien har vi hatt roller som både lærere, observatører og forskere. Å forske på egen praksis har både fordeler og ulemper. Goodchild (2008) er en av stemmene som taler varmt om forskning på egen praksis, eller utviklingsforskning, som han kaller det. I utviklingsforskning er målet er at forskningen leder til bedre praksis, og at praksis leder til ny forskning. Denne syklusen fører igjen til, mener han, bedre undervisning, mer læring for elevene og forbedret forskning. Stenhouse (i Postholm, 2007) mener at læreren er «den beste forskeren i eget klasserom, fordi det er han eller hun som kjenner elevenes historie og bakgrunnen for all aktivitet som foregår der best» (Postholm, 2007, s. 232). Også Kunnskapsdepartementet påpeker viktigheten av at lærere bør ha en reflektert holdning i sin egen undervisningspraksis:

> «Lærere i skolen trenger kunnskap fra forskning i de fagene de underviser i, og om hvordan fagene kan formidles og læres. Det er derfor nødvendig for lærere å kunne orientere seg i den aktuelle skoleforskningen og pedagogiske forskningen og kunne ta ny kunnskap i bruk. Den læreren som har en reflektert holdning til sin egen undervisningspraksis, og som selv er motivert for å delta i og gjennomføre systematisk utviklingsarbeid, vil være best i stand til å bidra til utvikling ved egen skole.» (Meld. St. 11 (2008-2009), s. 24).

Forskere påvirker situasjonen og respondentenes atferd, og klarer ikke være nøytrale og objektive i kvalitativ forskning (Ringdal, 2013; Fangen, 2011). Vi har forsøkt å minimere vårt eget avtrykk i forskningen ved at vi begge har vært til stede i undervisningen – den ene kjenner elevene den andre ikke, begge har tatt feltnotater, begge var til stede i intervjuet med elevene samt at vi analyserte innhentede data hver for oss. I tillegg ble intervjuet med lærerrespondentene foretatt via e-post. På den måten ble de ikke påvirket av vårt kroppsspråk, våre kommentarer eller oppfølgingsspørsmål. I den kvantitative forskningen gjennomførte respondentene undersøkelsen uten at vi var til stede.

4 Resultater

Analysene har resultert i funn om hva lærerrespondentene mener er utfordrende og mindre utfordrende for elevene i møte med gitt modelleringsoppgave sett opp mot modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Ved sammenligning av lærernes antakelser opp mot elevenes arbeid og opplevelser fant vi sammenfallende funn, men vi avdekket også motsetninger. Det er med andre ord ikke gitt at det lærerne antar er utfordrende for elevene oppleves slik av elevene selv.

4.1 Lærerrespondentenes rangering av utsagn og trinn

Gjennom lærerrespondentenes sammenligning og bedømmelse har utsagnene, ved hjelp av NoMoreMarking og Rasch-metoden, fått et mål som viser hvor utfordrende lærerrespondentene mener de ulike utsagnene er for elevene. Et mål på 0 poeng er minst utfordrende, og 100 poeng er mest utfordrende. Med råmateriale fra NoMoreMarking (vedlegg 4) som utgangspunkt har hvert utsagn fått sitt kategorinummer som er sammenfallende med trinnene i vårt rammeverk. Dette vises i tabell 3 hvor utsagnene er sortert kronologisk etter trinnene i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). I vår analyse har vi sett på målene til hvert enkelt utsagn, gjennomsnittsmålene for hvert trinn i modelleringssyklusen og variasjoner innenfor enkelte trinn.

4.1.1 Rangering av utsagn

I figur 6 er samtlige utsagn sortert i stigende rekkefølge etter estimerte mål. Målene på de ulike utsagnene er utgangspunkt for vår analyse og resultat. Vi har delt resultatene inn i tre kategorier for å samle funnene:

- Mål 0-25 mindre utfordrende for elevene
- Mål 25-75 middels utfordrende for elevene
- Mål 75-100 mer utfordrende for elevene

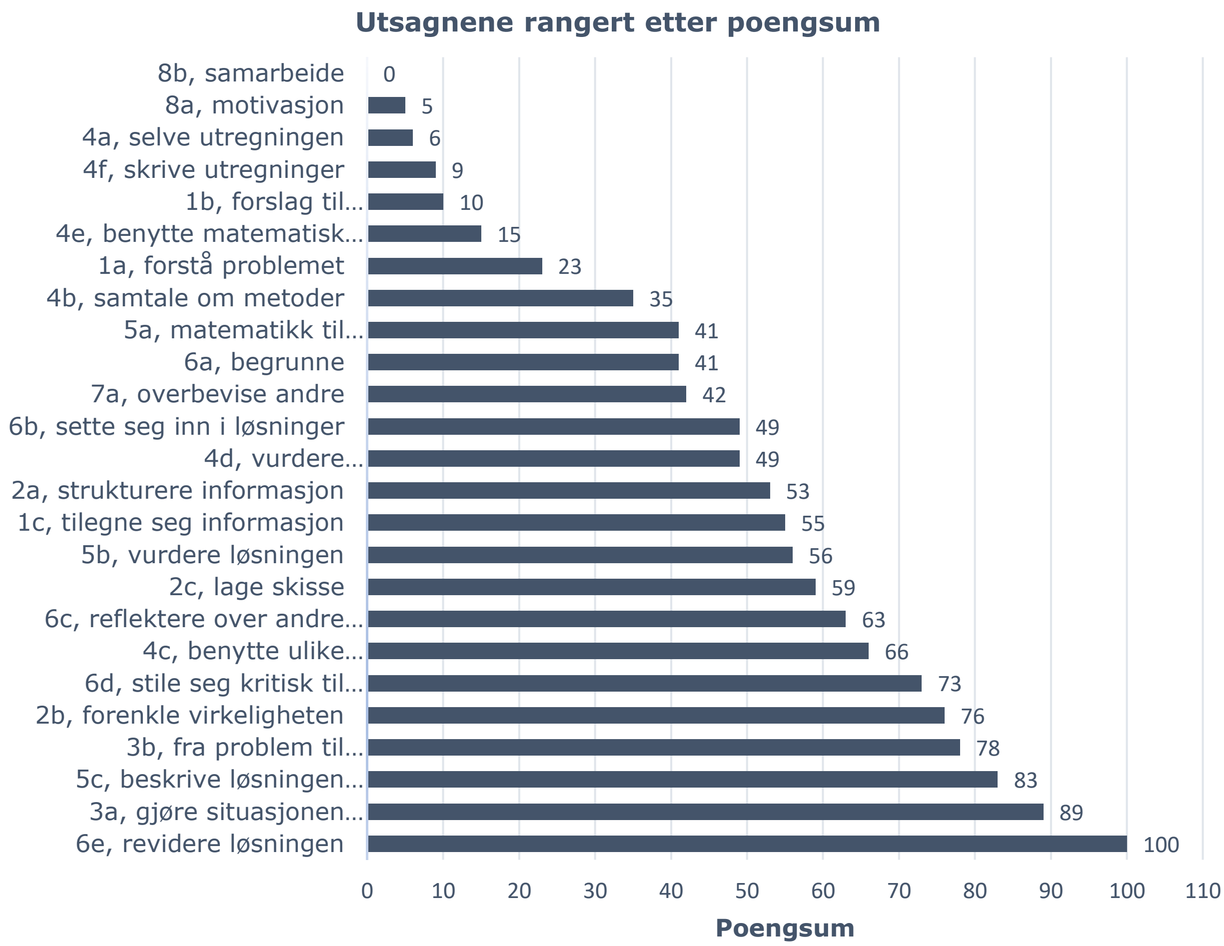
Mindre utfordrende for elevene
Våre lærerrespondenter rangerte syv utsagn som mindre utfordrende for elevene i NoMoreMarking:

- 8b, å samarbeide om hvordan oppgaven kan løses (0)
- 8a, å få motivasjon til å løse oppgaven (5)
- 4a, å løse de matematiske utfordringene - selve regningen (6)
- 4f, å skrive ned utregninger (9)
- 1b, å gi forslag på hvordan oppgaven kan løses (10)
- 4e, å benytte sine matematiske kunnskaper (15)
- 1a, å forstå problemet (23)

De to utsagnene med lavest mål, 8b og 8a, er lærerutsagn som faller utenfor selve modelleringssyklusen og omhandler motivasjon og samarbeid. De resterende utsagnene er alle innenfor trinnene «konstruere» eller «jobbe matematisk» og har til felles at de kan rettes mot generell matematikk og ikke kun modelleringsprosessen som særdeleshet. Samtlige utsagn ble pekt på som utfordrende av våre lærerrespondenter i e-postintervjuet, men likevel vektet lavest i NoMoreMarking.

Trinn / overgang i modelleringssyklusen med tilhørende utsagn	Gjennomsnitt / Mål
1. Konstruere	**29,33**
a) å forstå problemet b) å gi forslag på hvordan oppgaven kan løses c) å tilegne seg nødvendig informasjon for å løse oppgaven	23 10 55
2. Forenkle	**62,67**
a) å strukturere informasjon b) å forenkle virkeligheten c) å lage en skisse for å få oversikt	53 76 59
3. Matematisere	**83,50**
a) å gjøre den ikke-matematiske situasjonen matematisk b) å oversette fra virkelig problem til en matematisk sammenheng	89 78
4. Jobbe matematisk	**30,00**
a) å løse de matematiske utfordringene – selve regningen b) å samtale om metoder de benytter c) å benytte ulike representasjoner d) å vurdere ulike representasjoner e) å benytte sine matematiske kunnskaper f) å skrive ned utregninger	6 35 66 49 15 9
5. Tolke	**60,00**
a) å gjøre om matematikken til hverdagsspråk b) å vurdere om løsningen er riktig c) å beskrive løsningen sin med matematisk språk	41 56 83
6. Validere	**65,20**
a) å begrunne valgene de tar b) å sette seg inn i andre elevers løsning c) å reflektere over andre måter å løse problemet på d) å stille seg kritisk til egne og andres løsninger e) å revidere løsningene dersom den matematiske løsningen ikke passer til det virkelige problemet	41 49 63 73 100
7. Formidle	**42,00**
a) å overbevise andre om sin oppgaveløsning	42
8. Lærerutsagn utenfor modelleringssyklusen	**2,50**
a) å få motivasjon for å løse oppgaven b) å samarbeide om hvordan oppgaven kan løses	5 0

Tabell 4.1: Lærerrespondentenes vurdering av utsagnene



Figur 4.1: Utsagnene rangert etter mål

Middels utfordrende for elevene
Våre lærerrespondenter rangerte 13 utsagn som middels utfordrende for elevene i NoMoreMarking:

- 4b, å samtale om metoder de benytter (35)
- 5a, å gjøre om matematikken til hverdagsspråk (41)
- 6a, å begrunne valgene de tar (41)
- 7a, å overbevise andre om sin oppgaveløsning (42)
- 6b, å sette seg inn i andre elevers løsning (49)
- 4d, å vurdere ulike representasjoner (49)
- 2a, å strukturere informasjon (53)
- 1c, å tilegne seg nødvendig informasjon for å løse oppgaven (55)
- 5b, å vurdere om løsningen er riktig (56)
- 2c, å lage en skisse for å få oversikt (59)
- 6c, å reflektere over andre måter å løse problemet på (63)
- 4c, å benytte ulike representasjoner (66)
- 6d, å stille seg kritisk til egne og andres løsninger (73)

I denne kategorien er alle trinnene i modelleringssyklusen representert, bortsett fra trinn 3, «matematisere». Av de 13 utsagnene var det tre utsagn lærerne selv nevnte som utfordrende i e-postintervjuet: 2a, 1c og 2c. Utsagnene som ble sett på som middels vanskelige ser vi i stor grad faller inn under det vi kaller kognitivt krevende for elevene.

Med kognitivt krevende menes utsagn som innehar verb som revidere, begrunne, vurdere, reflektere og stille seg kritisk til og som dermed krever matematisk kompetanse utover det som betegnes som generell matematikk.

Mer utfordrende for elevene
Våre lærerrespondenter rangerer fem utsagn som mer utfordrende for elevene i NoMoreMarking:

- 2b, å forenkle virkeligheten (76)
- 3b, å oversette fra virkelig problem til en matematisk sammenheng (78)
- 5c, å beskrive løsningen sin med matematisk språk (83)
- 3a, å gjøre den ikke-matematiske situasjonen matematisk (89)
- 6e, å revidere løsningene dersom den matematiske løsningen ikke passer til det virkelige problemet (100)

Av disse utsagnene var det bare 2b som ble nevnt av våre lærerrespondenter i e-postintervjuet. I denne kategorien, mer utfordrende for elevene, ser vi utsagnene retter seg inn mot modelleringsprosessen i særdeleshet.

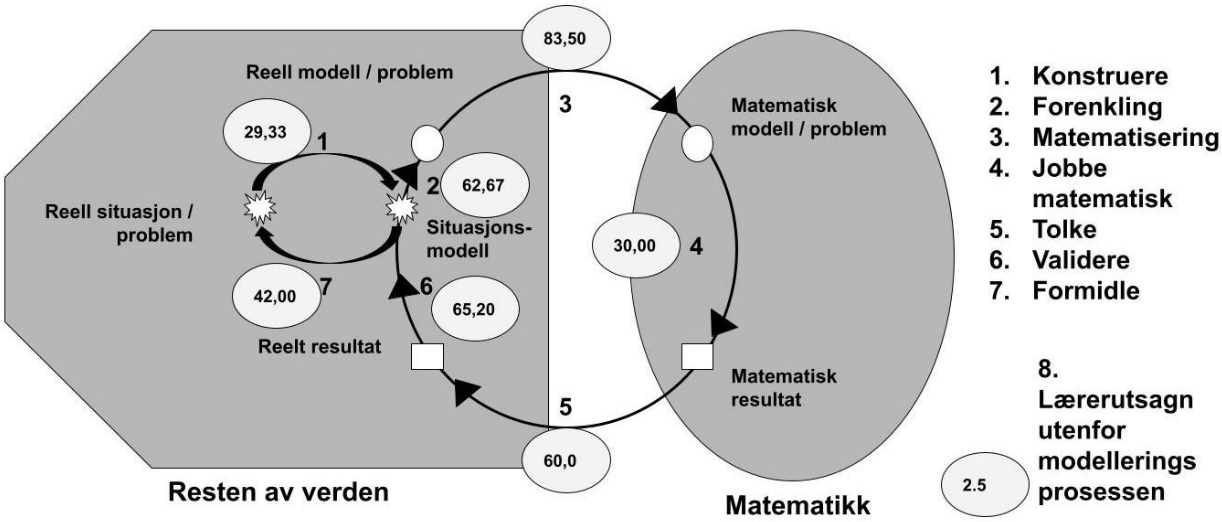
Våre analyser av lærerrespondentenes evaluering tyder på at utsagn som kan relateres til generell matematikk har fått lave mål, mens utsagn som retter seg direkte til modelleringsprosessen eller andre kognitivt krevende operasjoner har fått høye mål. Trenden i vårt datamateriale viser at utsagn våre lærerrespondenter oppga ville være krevende i e-postintervju senere ble evaluert som mindre krevende i NoMoreMarking.

4.1.2 Rangering av de ulike trinnene i modelleringssyklusen
I tabell 3 og i figur 7 vises trinnenes gjennomsnittsmål. I figur 7 er gjennomsnittsmålene satt inn i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007).

Gjennomsnittsmålene på de ulike trinnene viser at trinnet "matematisere" antas å være det desidert mest utfordrende for elevene med et gjennomsnitt på 83,50. Trinnene «validere», «forenkle» og «tolke» med gjennomsnitt på henholdsvis 65,20, 62,67 og 60,00 blir også antatt utfordrende for elevene i modelleringsprosessen. Felles for disse fire trinnene er at alle inneholder utsagn som retter seg spesifikt mot modelleringssyklusen eller er kognitivt krevende for elevene: «å revidere løsningene dersom den matematiske løsningen ikke passer til det virkelige problemet», «å beskrive løsningen sin med matematisk språk» og «å gjøre den ikke-matematiske situasjonen matematisk.

De trinnene som antas minst utfordrende for elevene i modelleringssyklusen er «konstruere», «jobbe matematisk» og «validere» med gjennomsnitt på henholdsvis 29,33, 30,00 og 42,00. Mange av utsagnene i disse trinnene kan relateres til generell matematikk, som for eksempel: «å forstå problemet», «å benytte sine matematiske kunnskaper» og «å skrive ned utregninger».

Trinn 8 er lærerutsagn som faller utenfor selve modelleringsprosessen, men som vi allikevel har tatt med i vår analyse fordi flere lærerrespondenter fremhevet «samarbeid» og «motivasjon» som antatt utfordrende for elevene i møte med gitt modelleringsoppgave. Etter vurderingen i NoMoreMarking endte imidlertid disse to utsagnene som desidert minst utfordrende for elevene med et gjennomsnitt på 2,5.



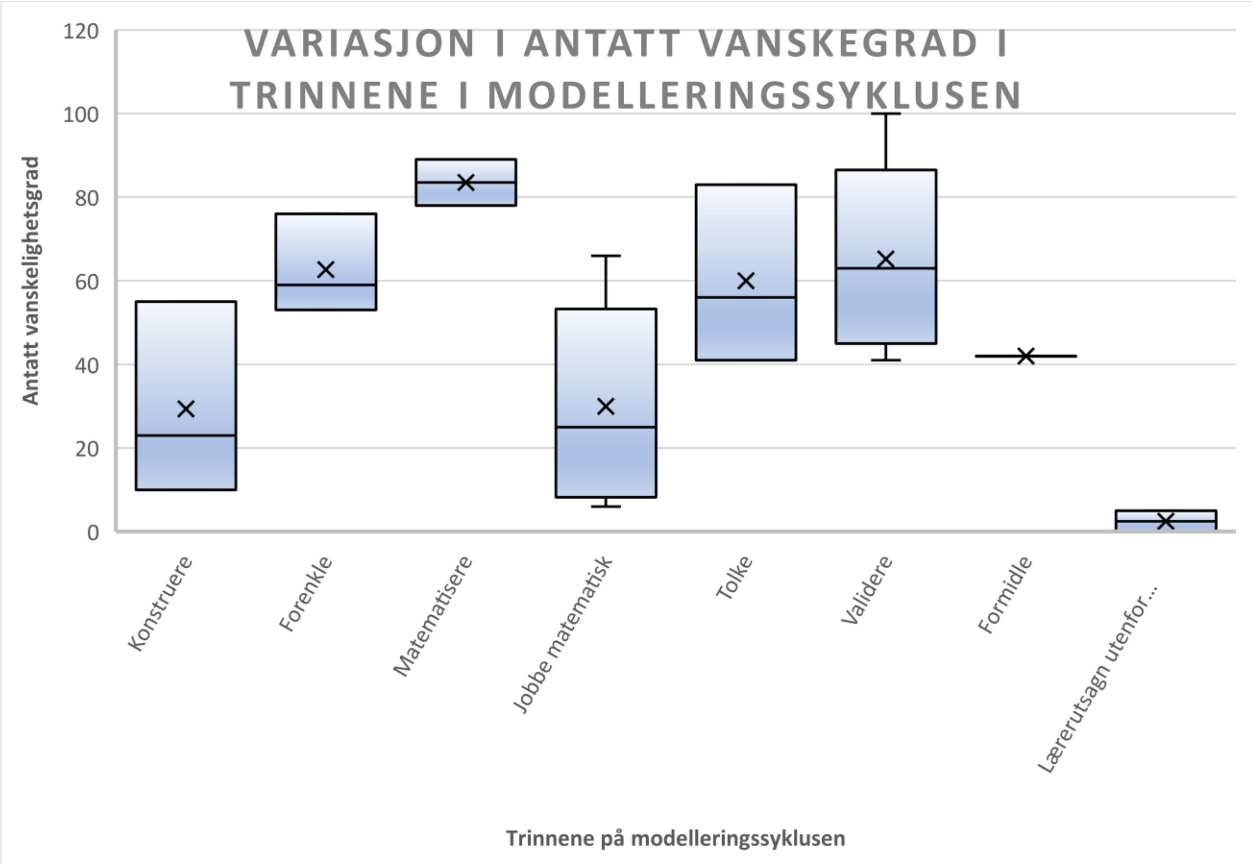
Figur 4.2: Gjennomsnittlige poengsummer satt inn i modelleringssyklusen

Figur 4.2 viser at våre lærerrespondenter antar det mindre utfordrende for elevene å forstå problemet i den virkelige verden, men at det vil være krevende å forenkle det reelle problemet og svært utfordrende å bevege seg fra den virkelig verden og over til matematikk-verden. Å være i matematikk-verdenen antas mindre krevende for elevene. Overgangen tilbake til den virkelige verden anses som utfordrende sammen med å validere det matematiske resultatet opp mot det virkelige problemet. Å formidle resultatet antar våre lærerrespondenter vil være mindre krevende for elevene.

Store variasjoner innenfor enkelte trinn

Våre analyser av lærerrespondentenes evaluering tyder på at utsagn som kan relateres til generell matematikk drar gjennomsnittene i de ulike trinnene ned, mens utsagn som retter seg direkte til modelleringsprosessen eller andre kognitivt krevende operasjoner drar gjennomsnittet opp. Denne trenden gjør at trinn som innehar utsagn som både kan relateres til generell matematikk og mot modelleringsprosessen eller andre kognitivt krevende operasjoner vil ha relativt stor variasjonsbredde. Dersom alle utsagnene på et trinn er innenfor den samme «kategorien» er variasjonsbredden liten. Siden flere av trinnene i modelleringssyklusen innehar utsagn som kan føre til variasjoner innenfor hvert trinn, er det hensiktsmessig å se på variasjonene innenfor trinnene.

Figur 4.3 viser de ulike trinnene representert med boksplott. Medianen blant alle utsagnene på hvert trinn vises med en horisontal linje inne i boksen, mens medianen i den øvre og nedre halvdel er topp og bunn i boksen. Nederste delen av boksen er altså første kvartil, mens øverste del av boksen er tredje kvartil. Gjennomsnittet er markert med et kryss i hver boks. Dersom det høyeste og laveste målet i trinnene er noe annet enn topp og bunn i boksen markeres dette med whiskers som indikerer laveste og høyeste mål på det aktuelle trinnet. Variasjonsbredden er differansen mellom disse.



Figur 4.3: Variasjon i antatt vanskegrad i trinnene i modelleringssyklusen

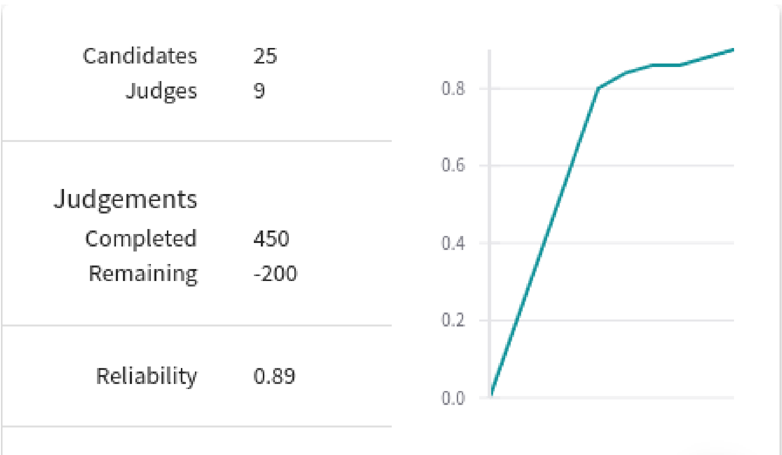
Vi ser variasjonsbredden er størst i trinnene «jobbe matematisk» og «validere». Begge boksene som illustrerer disse trinnene har whiskers og strekker seg over store deler av skalaen. Innenfor trinnet «jobbe matematisk» finner vi utsagn som både kan relateres til generell matematikk (f.eks. selve utregningen og å skrive ned utregninger) og mer kognitivt krevende operasjoner som å benytte ulike representasjoner og begrunne disse. Vi vurderer alle utsagnene i trinnet «validere» som kognitivt krevende for elevene. Selv om alle utsagnene blir vektet relativt høyt av våre lærer respondenter, er det vektingen av utsagnet «å revidere løsningene dersom den matematiske løsningen ikke passer til det virkelige problemet» som fører til den store variasjonsbredden. Dette utsagnet krever innslag fra alle de andre utsagnene på dette trinnet, så dette ser vi på som naturlig.

Trinnene med lavest variasjonsbredde i modelleringssyklusen er «matematisere», «forenkle» og «lærerutsagn som faller utenfor modelleringsprosessen». Vi ser bort fra trinnet «formidle» da dette trinnet kun har et utsagn og dermed ingen variasjonsbredde. Både «matematisere» og «forenkle» har relativt høye gjennomsnittsmål, og innehar kun utsagn som direkte retter seg mot modelleringsprosessen eller er kognitivt krevende. Eksempler på dette er «å forenkle virkeligheten» og «å oversette fra virkelig problem til en matematisk sammenheng». «Lærerutsagn som faller utenfor selve modelleringsprosessen» omhandler samarbeid og motivasjon og har svært lite variasjonsbredde.

Trinnet «tolke» har utsagn som alle kan relateres direkte til modelleringsprosessen, og det er utsagnet «å beskrive løsningen sin med matematisk språk» som har det høyeste målet og som er utslagsgivende for den relativt høye variasjonsbredden. I trinnet «konstruere» er det utsagnet «å tilegne seg nødvendig informasjon for å løse oppgaven» som har det høyeste målet og som i stor grad fører til variasjonsbredden. Dette utsagnet retter seg direkte mot modelleringssyklusen, mens de to andre utsagnene i trinnet kan relateres til mer generell matematikk.

4.2 Reliabilitet og infitverdier

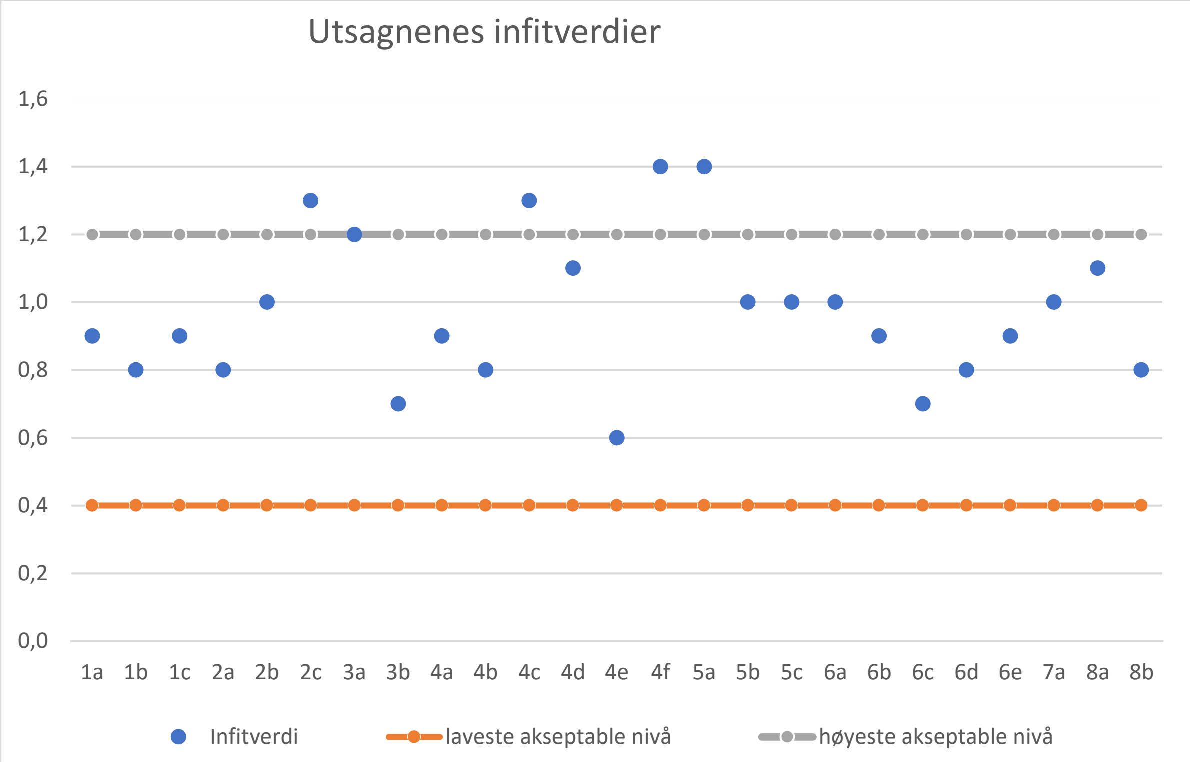
I vår studie brukte vi Cronbachs alfa for å få en reliabilitetsverdi på undersøkelsen. Cronbachs alfa gir en tallverdi på mellom 0 og 1 for intern konsistens, hvor akseptabel reliabilitetsverdi er over 0,7 (Ringdal, 2018; Langvik, 2016). Reliabilitetsverdien vil øke ved flere sammenligninger, enten ved at flere respondenter gjennomfører undersøkelsen eller ved at hver respondent gjør flere sammenligninger. I vår undersøkelse gjennomførte hver respondent 50 sammenligninger, og reliabiliteten økte for hver respondent som gjennomførte undersøkelsen. Da 5 hadde gjennomført var reliabiliteten 0,8 (se figur 4.4). Etter dette flatet kurven noe ut for hver respondent som gjennomførte. Ytterligere 4 respondenter gjennomførte undersøkelsen, og relabiliteten endte på 0,89. Dette er en ganske høy konsistens og er akseptabel verdi for relabilitet.



Figur 4.4: Reliabilitet i studien

4.2.1 Utsagnenes infitverdi

Utsagnenes infitverdi sier noe om hvor enige eller uenige våre respondenter har vært når de har sammenlignet de ulike utsagnene. En høy infitverdi viser at et utsagn har sprikende respons, mens en lav infitverdi betyr at våre respondenter i høy grad har vært enige i sin rangering av utsagnet. Akseptable infitverdier på den type undersøkelse vi har gjort er 0,4 og 1,2 (Bond og Fox, 2015). I vår studie varierer utsagnenes infitverdi mellom 0,6 og 1,4, illustrert i figur 4.5. Råmaterialet for infitverdiene i denne studien finnes i vedlegg 5.



Figur 4.5: Utsagnenes infitverdier

I figur 4.5 ser vi at det er fire utsagn som faller utenfor akseptable nivå:

- 5a, å gjøre om matematikken til hverdagsspråk (infitverdi 1,4)
- 4f, å skrive ned utregninger (infitverdi 1,4)
- 4c, å benytte ulike representasjoner (infitverdi 1,4)
- 2c, å lage en skisse for å få oversikt (infitverdi 1,3)

Felles for tre av disse utsagnene er at de er rettet direkte mot modelleringsprosessen (5a, 4c og 2c). Siden det er uenighet blant våre lærerrespondenter i antakelsen i hvor utfordrende disse utsagnene er for elevene, har vi valgt å utelukke disse utsagnene ved sammenligning av lærerrespondentenes antakelser opp mot elevenes arbeid og opplevelser.

Utsagn med stor enighet: Totalt er det 18 utsagn som har fått infitverdi 1 eller lavere, og ingen av disse er under vårt akseptable nivå på 0,4 (Bond og Fox, 2015). En infitverdi på 1 indikerer at lærerrespondentene våre er «som ventet» enige i sin rangering av utsagnene, mens en infitverdi under 1 indikerer at lærerne på disse utsagnene er mer enige enn forventet ifølge Rasch-modellen. I tabell 4.2 ser vi hvilke utsagn lærerne er mest enige om rangert etter infitverdien i stigende rekkefølge.

Tabell 4.2 viser at lærerne er enige om alle utsagnene i trinnene «konstruere», «validere» og «formidle» i modelleringsprosessen, siden alle utsagn i disse trinnene har en infitverdi på 1 eller lavere. Det er også stor enighet om hvilke utsagn som er mest og minst utfordrende for elevene i modelleringsprosessen. Utsagn 6e, mest utfordrende, med infitverdi på 0,9, og utsagn 8b, minst utfordrende, med infitverdi 0,8.

Utsagn	Mål	Infitverdi
4 e) å benytte sine matematiske kunnskaper	15	0,6
3 b) å oversette fra virkelig problem til en matematisk sammenheng	76	0,7
6 c) å reflektere over andre måter å løse problemet på	63	0,7
1 b) å gi forslag på hvordan oppgaven kan løses	10	0,8
2 a) å strukturere informasjon	53	0,8
4 b) å samtale om metoder de benytter	35	0,8
6 d) å stille seg kritisk til egne og andres løsninger	73	0,8
8 b) å samarbeide om hvordan oppgaven kan løses	0	0,8
1 a) å forstå problemet	23	0,9
1 c) å tilegne seg nødvendig informasjon for å løse oppgaven	55	0,9
4 a) å løse de matematiske utfordringene – selve regningen	6	0,9
6 b) å sette seg inn i andre elevers løsning	49	0,9
6 e) å revidere løsningene dersom den matematiske løsningen ikke passer til det virkelige problemet	100	0,9
2 b) å forenkle virkeligheten	76	1,0
5 b) å vurdere om løsningen er riktig	56	1,0
5 c) å beskrive løsningen sin med matematisk språk	83	1,0
6 a) å begrunne valgene de tar	41	1,0
7 a) å overbevise andre om sin oppgaveløsning	42	1,0

Tabell 4.2: Utsagn med stor enighet

Utsagn med mindre enighet: Det er syv utsagn med infitverdi over 1, og fire av disse faller utenom vårt fastsatte akseptable nivå på 1,2 (Bond og Fox, 2015). En infitverdi på over 1 indikerer at lærerrespondentene våre er mindre enige enn forventet ifølge Rasch-modellen. I tabell 4.2 ser vi hvilke utsagn lærerne er mest uenige om. Utsagnene er listet opp etter infitverdien i sykende rekkefølge.

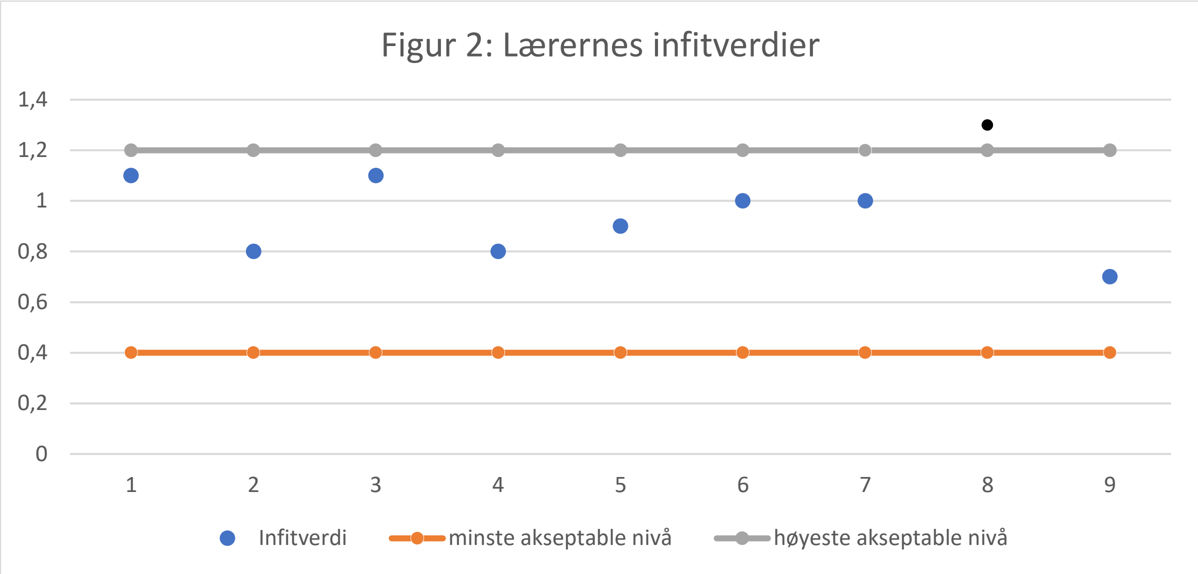
Utsagn	Mål	Infitverdi
4 f) å skrive ned utregninger	9	1,4
5 a) å gjøre om matematikken til hverdagsspråk	6	1,4
2 c) å lage en skisse for å få oversikt	59	1,3
4 c) å benytte ulike representasjoner	66	1,3
3 a) å gjøre den ikke-matematiske situasjonen matematisk	89	1,2
4 d) å vurdere ulike representasjoner	49	1,1
8 a) å få motivasjon for å løse oppgaven	5	1,1

Tabell 4.3: Utsagn med mindre enighet

Vi finner ingen infitverdier over 1 i trinnene "konstruere", "validere" eller "formidle". De fire første utsagnene i tabell 4.3 faller utenfor akseptable verdier, og er omtalt tidligere. De to neste utsagnene i tabellen, 3a og 4d, er utsagn rettet inn mot modelleringssyklusen eller er kognitivt krevende for elevene. Det siste utsagnet, 8a, kan være avhengig av lærerens erfaringsbakgrunn, og kan være årsaken til uenighet i vektleggingen av dette utsagnet.

4.2.2 Lærerrespondentenes infitverdi

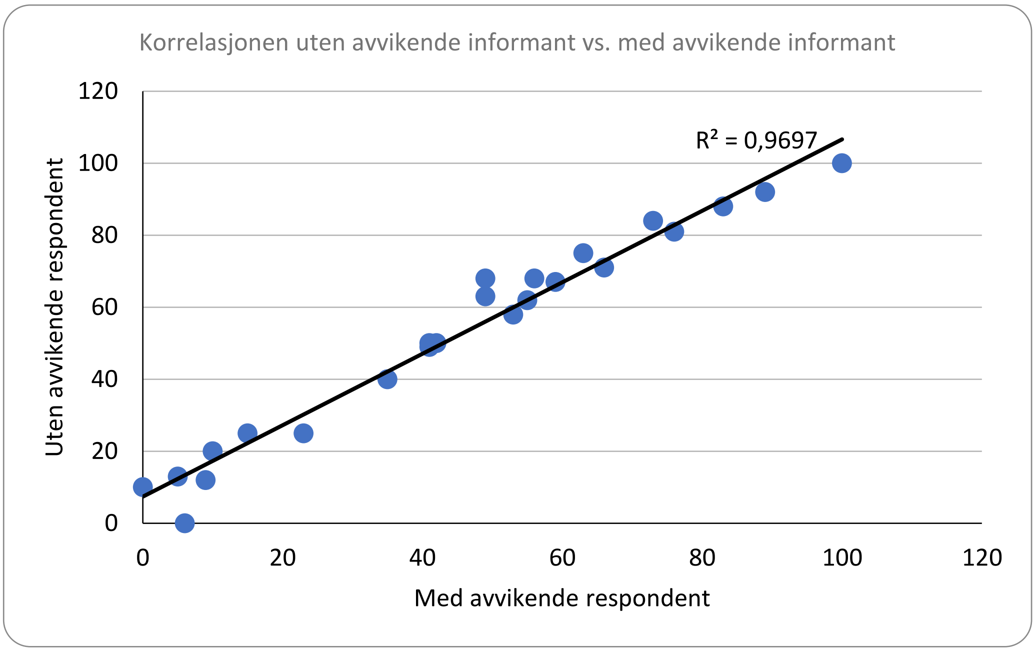
Lærernesrespondentenes infitverdi sier noe om hvor enig eller uenig den enkelte respondent er med de andre respondentene i vurderingen av utsagnene. Infitverdiene til våre lærerrespondenter varierte fra 0,7 til 1,3, illustrert i figur 4.6. Som vi ser faller èn av våre 9 respondenter utenfor vårt akseptable nivå med infitverdi på 1,3 (Bond og Fox, 2015), markert med sort sirkel. Dette tyder på at denne respondenten er 30 % mer uenig enn forventet i forhold til de andre respondentene i poengsetting av utsagnene.



Figur 4.6: Lærerens infitverdier

8 av respondentene faller innenfor akseptabelt nivå (Bond og Fox, 2015); en med 0,7, to med 0,8, en med 0,9, to med 1 og to med 1,1. Dette tyder på at det er en høy grad av enighet blant våre respondenter i vurderingen av hvor utfordrende utsagnene er for elevene i modelleringsprosessen.

Om vi fjerner respondenten med infitverdi 1,3 – heretter kalt avvikende respondent – fra vårt datamateriale ser vi i figur 8 at korrelasjonen er høy, $r^2 \approx 0{,}97$, ved sammenligning av datasettene med og uten avvikende respondent. Avvikende respondent vil med andre ord ikke ha noe å si for våre resultater; de utsagnene respondentene uttrykker er mest og minst utfordrende for elevene er de samme uavhengig om vi beholder eller tar bort vurderingen til avvikende respondent. Uendrede resultater, samt en økende reliabilitet på undersøkelsen etter respondentens vurderinger, gjør at vi beholder dataene vi fikk med alle våre ni respondenter.



Figur 4.7: Korrelasjon

4.3 Oppsummering av den kvantitative analysen

Våre analyser viste at det var krevende for våre lærerrespondenter å forutsi hva som ville være utfordrende for elevene i modelleringsprosessen. I tilbakemeldingene på e-postintervjuet fremhevet respondentene generell matematisk kompetanse som utfordrende for elevene, mens de siden vurderte denne kompetansen som mindre utfordrende i NoMoreMarking

Videre viste våre analyser at det er godt samsvar mellom de antatt mest utfordrende utsagnene og trinnene. Av den grunn vil de fire antatt mest utfordrende trinnene i modelleringsprosessen være det vi legger til grunn ved sammenligning av de kvantitative funnene opp mot de kvalitative.

Trenden i datasettet viser at lærerrespondentene har vektet utsagn som retter seg mot modelleringssyklusen eller kognitivt krevende operasjoner høyere enn utsagn som retter seg mot mer generell matematikk. Lærernes vekting har ført til at det innenfor enkelte trinn er til dels stor variasjon i antatt vanskegrad.

Våre lærerrespondenter var uenige i vurderingen av fire utsagn, og disse utsagnene falt utenfor akseptabelt infitverdinivå. I vurderingen av de øvrige 21 utsagnene var lærerne enige eller svært enige. En av våre lærerrespondenter var uenige med de andre respondentene i vurderingen av utsagnene, og fikk en infitverdi på 1,3. Imidlertid viste det seg ved sammenligning av datasettene med og uten denne respondenten at korrelasjonen var høy.

4.4 Krevede for lærerrespondentene å anta utfordringer

Det viste seg å være krevende for våre lærerrespondenter å anta hvilke utfordringer elevene ville møte i modelleringsprosessen. I første fase av vår studie ga lærerrespondentene oss en skriftlig tilbakemelding i et e-postintervju på hva de antok ville være utfordrende for elevene i møte med gitt modelleringsoppgave.

De skriftlige tilbakemeldingene ble, av oss, omskrevet til utsagn. Disse utsagnene, sammen med utsagn utarbeidet med utgangspunkt i modelleringsteori, ble deretter vurdert av våre lærerrespondenter i NoMoreMarking. Utsagnene som ble utarbeidet med bakgrunn fra e-postintervjuene ble av våre lærerrespondenter i stor grad vektet som mindre utfordrende for elevene i modelleringsprosessen, mens utsagn som var utarbeidet med utgangspunkt i teori ble vektet som mer utfordrende for elevene.

Ved analyse av de ulike utsagnene fant vi at utsagn basert på lærerrespondentenes tilbakemelding i stor grad rettet seg mot generell matematisk kompetanse, som for eksempel å samarbeide, ha motivasjon, foreta utregninger og benytte matematiske kunnskaper. Av de mer spesifikke modelleringskompetansene var det kun «å forenkle virkeligheten» som ble nevnt av respondentene i e-postintervjuet.

Våre analyser av besvarelsene i e-postintervjuet viste i tillegg at lærerrespondentene våre benyttet ordet «modellering» på måter som tyder på at respondentene mener noe annet enn matematisk modellering; fysisk modell, representasjoner og matematiske strategier.

Eksempler der ordet «modell» forveksles/brukes med betydning fysisk modell, ulike representasjoner eller regnestrategier:

> Respondent 3: «Hvordan lage en modell av det, uten å klippe ut 200 000 sedler i papir?»
>
> Respondent 5: «Og regnestykket: 10 000 000 : 50 som det tross alt er, virker nok diffust og vanskelig å få modellert.»
>
> Respondent 8-a: «La oss si at de velger gjentatt addisjon som strategi, og at deres modell er å tegne 50-lapper.»

Respondent 3 hentyder til en fysisk modell, eller representasjon med konkreter, av tohundretusen femtilapper. Det er mulig også respondent 5 mener det, men det kan også være at han mener en visuell representasjon (Svingen, 2018). Respondent 8 antar vi hentyder til visuell representasjon i setning a når han skriver «tegne 50-lapper».

4.5 Lærernes vurdering sett opp mot elevers arbeid og opplevelser

I den kvantitative undersøkelsen ble fem utsagn fremhevet som de mest utfordrende for elevene i arbeid med matematisk modellering og alle fem utsagn tilhører de antatt fire mest utfordrende trinnene i modelleringsprosessen: «forenkle», «matematisere», «tolke» og «validere». I vår kvalitative studie har vi analysert disse trinnene i elevenes arbeid med en modelleringsoppgave og elevenes uttalelser i etterkant. Når vi sammenligner våre kvantitative og kvalitative funn viser våre funn at to av trinnene, «forenkle» og «matematisere», var utfordrende for elevene (sammenfallende funn) mens trinnene «tolke» og «validere» viste seg å være mindre utfordrende (ikke sammenfallende funn).

Vår kvalitative analyse bygger på elevers arbeidet med følgende oppgave:

> «Tone har vunnet 10 millioner i lotto. Hun går i banken og vil ta ut pengene i 50-lapper. Får hun med seg pengene hjem?»

Elevene har fått i oppdrag å lage en rapport som begrunner svaret de kommer frem til. Oppgaven legger opp til flere runder i modelleringssyklusen, siden lærer er ment å gi opplysninger om høyden og vekten på femtilappene etter hvert som elevene jobber seg fremover i oppgaveløsningen. For å underbygge våre funn vil vi referere utdrag fra transkripsjonen fra videopptak både av elevenes arbeid og intervju med elever i etterkant av modelleringsarbeidet. Elevgruppen det refereres til består av fire elever på 5. trinn.

4.5.1 Sammenfallende funn

Vi velger å benytte rekkefølgen i modelleringssyklusen i presentasjonen av de sammenfallende funnene. Først trinn 2, forenkle, deretter trinn 3, matematisere. Begge disse trinnene antok lærerrespondentene ville være utfordrende for elevene, noe som viste seg å stemme med elevenes arbeid og opplevelser.

4.5.1.1 Forenkle

Å forenkle, strukturere og gjøre det reelle problemet mer presist viste seg å være utfordrende for elevene i arbeid med modelleringsoppgaven, noe også lærerrespondentene antok. Dette trinnet i modelleringsprosessen er viktig for å kunne ta de nødvendige forutsetningene slik at elevene finner frem til matematikken som skal anvendes for å løse problemet (Ferri, 2018). Et eksempel på at dette var krevende for elevene har vi hentet litt ut i oppgaveløsningen der elevene har funnet ut at de skal plassere 200.000 femtilapper i handlevogner, slik at Tone får med seg pengene hjem fra banken. Til tross for at elevene er enige om løsningen på problemet (stable pengene i handlevogner), klarer de ikke å forenkle situasjonen og strukturere opplysningene slik at de kan lage en felles skisse for å løse oppgaven (hvor mange pengesedler det er plass til i hver handlevogn).

Lærer har tatt en liten «timeout» i undervisningen for å oppsummere og komme med en ny opplysning:

> Lærer: Begge gruppene har funnet ut at ti millioner er 200 000 femtilapper. Jeg skal gi dere et hint for å komme videre. 200 femtilapper er så høyt (viser frem en kube som er 2x2x2 cm). To hundre femtilapper som ligger oppå hverandre (legger to femtilapper oppå hverandre) sånn… så er det så høyt (viser kuben igjen).

En ny opplysning fra lærer krever at elevene må tilpasse opplysningen til problemet og starte på nytt i modelleringsprosessen.

I elevgruppa skjer følgende:

> Emil: da får vi plass til sinnsykt mange i en handlevogn!

Emil henter klosser som ligger tilgjengelig for elevene mens Truls måler kuben og kommer frem til at den er 2 cm høy.

Både Emil og Truls viser her at de har koblet de nye opplysningene på det reelle problemet i oppgaven, men griper det an litt ulikt og samkjører ikke opplysningene sine.

Videre samtale i elevgruppen:

> Emil: dere vi kan bare stable opp… fordi en sånn vogn, ikke sant…
> Truls: jeg har funnet svaret
> Emil: Ja, men det er ikke riktig. Ok... ehe... hvor mange var det plass til?
> Emil: 200 femtilapper… så kan vi bare lage… så kan vi bare lage den så stor som, som…
> Per: en centimeter pr. . pr.

Så blir det helt stille i gruppa og elevene bygger tårn med klossene. Etter hvert diskuteres det i gruppa over hvor høyt tårnet med klosser må være og hvor høy handlevognen er. Elevene blir ikke enige om hvor høyt tårnet må være eller hvor høy handlevognen er. Lærer måtte inn å veilede elevene slik at de kom videre i modelleringsprosessen.

I intervjuet i etterkant av oppgaveløsningen uttrykte elevene at det hadde vært enklere å løse oppgaven om lærer hadde gitt de mer informasjon med en gang.

> Truls: Et tips til læreren er at hun kunne skrevet mer info. Det hadde vært bedre om hun skrev poser eller handlevogn.
>
> Emil: Oppgavene var vanskelige. Hvorfor skulle hun ha femtilapper?. Det hadde vært lettere å regne med hundrelapper.

Elevene ønsket altså at lærer skulle gitt de informasjon slik at det ble lettere å konkludere (poser eller handlevogn) eller gitt «snillere tall» (hundrelapper istedenfor femtilapper) slik at det ble enklere å strukturere problemet.

4.5.1.2 Matematisere

Våre lærerrespondenter antok at å «matematisere» ville være utfordrende for elevene, noe som viste seg å stemme. I trinnet «matematisere» skal elevene bevege seg fra det virkelige problemet og inn i matematikk-verdenen, det vil si at elevene skal knytte virkeligheten sammen med matematikken (Ferri, 2018).

Vi skal ta frem en hendelse fra elevenes arbeid som viser at overgangen fra den virkelige verden til matematikk-verdenen var utfordrende for elevene. Eksempelet er fra starten av oppgaveløsningen, der elevene bruker lang tid på å komme i gang med oppgaven matematisk. Først når lærer stiller et konkret spørsmål som får elevene penset inn på selve matematikken, klarer elevene å gjøre den ikke-matematiske situasjonen matematisk.

Kontekst: Elevene har fått presentert oppgaven muntlig og skriftlig (skrevet på tavla av lærer). Elevene jobber i gruppe på fire, og en elev kommer raskt med følgende utsagn:

> Per: Ti millioner delt på femti... ehe....

Ingen følger opp Per sitt forsøk på å komme med et forslag til å starte på den matematiske delen av problemet, heller ikke eleven selv. Diskusjonen går livlig i elevgruppen om mengden penger og om hvordan Tone skal få med seg pengene hjem: leie av lastebil, pengene som flyr rundt, tusenlapper i stedet for femtilapper. Etter noen minutter gjør Truls et forsøk på en matematisk utregning.

> Truls skriver på whiteboardarket: 10 m : 2 m =
> Lærer: Hvorfor deler dere på 2 millioner?
> Truls: For å dele det opp

Truls har startet med en utregning som egentlig ikke har noen annen hensikt enn å gjøre tallet mindre, eller som han selv sier: å dele opp tallet. Dividenden virker vilkårlig, kanskje ut fra erfaringer om at å halvere tall kan fungere i enkelte sammenhenger. I intervjuet i etterkant av arbeidet med oppgaven kan ikke Truls redegjøre for hvorfor han valgte å dele på 2 millioner.

Spørsmålet til lærer får imidlertid Per til å tenke over hva Truls har skrevet på whiteboardarket:

> Per: Hvorfor to millioner? Hvorfor… (han ser en stund på tavla der oppgaven står) hvorfor ikke femti delt på… nei… ti delt på femti?
> Truls: ti delt på femti?
> Per: ... jo, men, ti millioner delt på femti

Per tok her opp tanken han startet med, og elevene får beveget seg inn i matematikk-verdenen. Imidlertid tar det enda en stund før de tre andre elevene på gruppa klarer å følge og forstå Per sin tankegang. Om elevene hadde kommet hit uten at lærer stilte spørsmål ved Truls sitt regneoppsett vites ikke.

At det var utfordrende for elevene å gjøre den ikke-matematiske situasjonen matematisk er også noe elevene bekrefter i intervjuet i etterkant av arbeidet med oppgaven. Alle elevene uttrykte at det var vanskelig å komme i gang, noe følgende sitater gir uttrykk for:

> Kari: Det var vanskeligst til å begynne med. I starten visste vi ikke hva vi skulle begynne med.
>
> Truls: Vanskelig å vite hva en skulle regne.
>
> Emil: Jeg synes det hadde vært lettere å regne om vi hadde fått mer info. Da hadde vi visst hva vi skulle regne.

Her uttrykker elevene at det er utfordrende å knytte problemet til en matematisk sammenheng, og eksplisitt ønsker Emil at læreren skal gjøre det for de, slik at de kan gå inn den matematiske verden og foreta selve utregningene.

4.5.2 Funn som ikke sammenfaller med hverandre

Vi velger å benytte rekkefølgen i modelleringssyklusen i presentasjonen av de sammenfallende funnene. Først trinn 5, tolke, deretter trinn 6, validere. Begge disse trinnene antok lærerrespondentene ville være utfordrende for elevene, som viste seg å ikke stemme med elevens arbeid og opplevelser.

4.5.2.1 Tolke

Våre lærerrespondenter antok at «tolke» ville være utfordrende for elevene, noe som ikke viste seg å stemme overens med elevenes arbeid. Trinn 5 i modelleringssyklusen, «tolke» handler om at det matematiske resultatet må tolkes i den virkelige verden som et virkelig resultat og løsning på problemet (Blum og Leiß, 2007). På dette trinnet er det viktig å ha konteksten til det virkelige problemet i fokus, for med det virkelige resultatet beveger du deg fra matematikkens verden og tilbake til den virkelige verden (Ferri, 2018). Vår analyse viser at elevene mestrer å ha fokus på konteksten i sitt løsningsforslag, og de har en presis løsning på problemet.

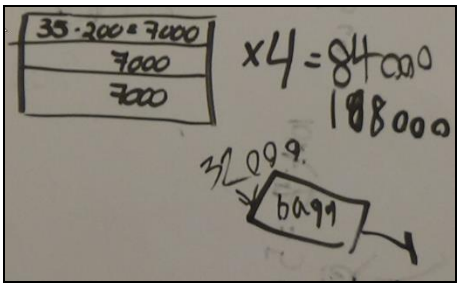
Kontekst: Elevene har funnet ut at de har 200.000 femtilapper som veier til sammen 200 kg, og om de stabler alle femtilappene oppå hverandre har de et tårn på 20 meter. Dette har elevene tenkt å frakte i handlevogner:

> Lærer: hvor mange femtilapper er det plass til i to handlevogner?
> Per: 168 tusen i to vogner

Per svarer ikke direkte på spørsmålet til læreren, han svarer utfra gruppas utregninger som ligger til grunn for det matematiske resultatet. Utregningen elevene har gjort, se figur 4.8, viser tydelig hvilke beregninger som ligger til grunn for pengenes plassering i handlevognen. Det store rektangelet øverst i venstre hjørne illustrerer bunnen av en handlevogn. Her er det plass til tre rader med 35x200 femtilapper, altså 7.000 femtilapper i tre rader (underforstått: 21.000 femtilapper). Det er plass til 4 slike lag i handlevognen, altså 84.000 femtilapper pr. handlevogn. To handlevogner rommer 168.000 femtilapper, og da er det 32.000 femtilapper som må plasseres i bagen (illustrert med et rektangel i høyre hjørne nederst).

Lærer stiller deretter spørsmål om vekten av pengene.

Lærer: hvor mye veier hver vogn?
Per: 84 kilo i en, og 32 i den bagen



Figur 4.8: Elevarbeid

Løsningen elevene har kommet frem til har tydelig fokus på konteksten til det virkelige problemet (får Tone med seg 10 millioner i femtilapper hjem?). Løsningen lar seg også validere i den virkelige verden.

4.5.2.2 Validere

Trinnet «validere» handler om at eleven skal sammenligne det matematiske resultatet med det opprinnelige problemet og vurdere om det er riktig og nøyaktig nok (Ferri, 2018). Som tidligere nevnt er oppgaven laget slik at elevene til stadighet må gå frem og tilbake mellom den virkelige verden og matematikkverdenen. Det kreves også flere runder med validering (av vekt, volum og antall). I analysen viste det seg at elevene mestret dette trinnet i modelleringssyklusen ved at de testet ut om handlevognen tålte vekten av pengene.

Fra tre handlevogner til to handlevogner og en bag

På slutten av oppgaveløsningen har elevene funnet ut at de ønsker å stable pengene i handlevogner, slik at det blir mulig for Tone å få med seg pengene hjem. Lærer spør hvor mange handlevogner de trenger:

Per: tre… eller to og en bag

Her viser Per at han tenker på konteksten. For å få plass til alle pengene trengs det i utgangspunktet 3 handlevogner. Imidlertid reviderer Per svaret sitt til to handlevogner og en bag. Grunnen vites ikke, men det er nærliggende å anta at det kan være fordi han «ser» at den tredje handlevognen ikke blir helt full, eller kan være vanskelig å få med seg. Uansett grunn mener Per at to handlevogner og en bag er den beste løsningen på problemet. Dette støttes av andre elever på gruppa:

Emil: «Vi kan legge bagen over alle pengene! Du har jo en sånn her (mener handlevogn) som er fullt opp med penger. Sant? Så kan du putte en bag oppå uten at den faller.»
Lærer: «Får Tone med seg de handlevognene da?»
Truls: «ja, hun gjør det. Hun klarer å legge den bagen oppå.»

Både Emil og Truls tenker her på konteksten når de uttaler seg. Emil er opptatt av at bagen ikke skal falle av handlevognen når Tone skal trille handlevognen hjem. Truls viser til at Tone fint klarer å løfte bagen opp på handlevognen.

Test av løsningen i den virkelige verden

Etter at elevgruppen hadde funnet den matematiske løsningen på problemet og konkludert med at Tone får med seg ti millioner i femtilapper hjem ved å bruke to handlevogner og en bag, tok elevene selv initiativ til å teste om en handlevogn tålte vekten av pengene. I denne delen av undervisningen var elevene langt unna opptaksutstyret, og dermed er ikke elevenes arbeid og samtaler fanget på film. Lærernes notater fra observasjon ligger til grunn for analyse og gjengivelse.

Underveis i undervisningen fant lærer utrolig nok en handlevogn på skolen, og elevene spurte om lærer ville være med å teste løsningen ved å skyve handlevognen med tre elever i. Elevene hadde funnet ut at de veide tilsammen ca. 120 kg, noe som tilsvarer omtrent det samme som en handlevogn med 84 kg femtilapper pluss en bag med 32 kg femtilapper. Handlevognen klarte testen og lærer hadde ingen problemer med å trille handlevognen med seg med en hånd. Elevene konkluderte med at Tone ikke ville ha noen problemer med å trille to handlevogner og en bag med seg hjem, om ikke hjemturen var altfor lang. Elevene diskuterte også andre aspekter ved løsningen:

- Hvordan var underlaget på veien hjem til Tone?
  Elevenes konklusjon: Helst asfalt eller liknende, i alle fall ikke grusvei med dumper i.
- Hvordan var veien hjem til Tone utformet?
  Elevenes konklusjon: Det burde helst ikke være bakker– hverken opp eller ned.
- Hvordan var adkomsten til Tone sin bolig?
  Elevenes konklusjon: Det burde ikke være noen trapper, og hvis det var det, måtte det finnes en heis. Aller helst burde inngangsdøra til Tone være på bakkeplan.

At elevene testet om handlevognen tåler vekten av pengene, at en voksen person klarer å trille handlevognen med vekten i, at de diskuterer veiens underlag og utforming samt adkomsten til boligen viser at elevene er i stand til å vurdere den matematiske løsningen sin opp mot det opprinnelige problemet. Elevene stiller selv spørsmål, og evaluerer disse, for å finne ut om det virkelig er mulig å gjennomføre løsningen de har kommet frem til. Lærer var svært lite verbalt aktiv i valideringsprosessen, og fungerte mest som en tilhører og observatør. Det var elevene selv som stilte de kritiske spørsmålene og som fant forutsetningene som måtte ligge til grunn for at den matematiske løsningen skulle være mulig å gjennomføre i den virkelige verden.

4.6 Oppsummering av den kvalitative analysen

I analysen av den kvalitative delen av vår studie har vi sett at elevenes arbeid og opplevelser ikke alltid stemmer overens med våre lærerrespondenters antakelser. I arbeid med modelleringssyklusen viste det seg utfordrende for elevene å «forenkle» og «matematisere», noe som var i tråd med antakelsen til lærerrespondentene. Flere ganger avdekket vi en blokkering hos elevene i disse trinnene underveis i undervisningen, og lærer måtte gå inn med støtte og veiledning for at elevene skulle komme videre i prosessen.

Derimot var trinnene «tolke» og «validere» mindre utfordrende for elevene, dette i strid med hva våre lærerrespondenter antok. I disse trinnene i modelleringssyklusen har vi pekt på flere hendelser der elevene viser at de har konteksten fra den virkelige verden med seg når de tolket og validerte resultatet sitt. I disse situasjonene var elevene aktive og trengte lite eller ingen lærerstøtte.

5 Drøfting

Målet med denne studien har vært å bidra til mer kunnskap om matematisk modellering slik at lærere kan legge til rette for at elever jobber med modelleringsaktiviteter på en god og læringsfremmende måte. I studien har vi undersøkt hva lærerne antok var utfordrende for elevene under arbeid med en gitt modelleringsoppgave og hvordan disse antakelsene sammenfalt med elevenes arbeid og opplevelser. I vår undersøkelse har vi brukt modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) som rammeverk både i den kvalitative og den kvantitative delen av studien. I teorikapittelet presenterte vi hva som kjennetegner modelleringskompetanse og modellfremkallende aktivitet. Videre redegjorde vi for ulike perspektiver på modellering og modelleringssykluser, samt ulike utfordringer elever og lærere ofte møter i arbeid med matematisk modellering.

Resultatet av våre analyser viser hva våre lærerrespondenter antok var utfordrende for elevene og vi har sett at disse antakelsene ikke alltid sammenfalt med elevenes arbeid og opplevelser.

Vi skal i dette kapittelet se nærmere på to funn. Først lærerrespondentenes antakelser om hvilke trinn i modelleringssyklusen som er mest utfordrende for elevene: «matematisere», «validere», «forenkle» og «tolke». Deretter skal vi drøfte de funnene som ikke er sammenfallende mellom lærerrespondenter og elevers arbeid og opplevelser: «tolke» og «validere».

I tillegg til funnene vil vi presentere ulike implikasjoner studien har for lærere og elever, diskutere hvilke begrensninger studien vår har og se nærmere på hvordan funnene våre kan brukes i videre forskning.

5.1 Matematikk rettet mot modelleringsprosessen antas mest utfordrende

Våre analyser viste at lærerrespondentene rangerte fire trinn i modelleringssyklusen som utfordrende for elevene; «forenkle», «matematisere», «tolke», «validere», hvor «matematisere» ble sett på som det mest utfordrende. Felles for disse trinnene er at utsagnene innenfor hvert trinn i hovedsak retter seg direkte mot modelleringssyklusen.

Tidligere studier støtter lærerrespondenter i deres vurderinger. Som nevnt under teorikapittelet viser flere studier at modelleringsoppgaver er krevende for elevene fordi modellering er en prosess der elevene bruker mange ulike ferdigheter og kompetanser samtidig (Blum og Ferri, 2009, s. 46, Blum 2015, s. 78). Både Jankvist og Niss (2019) og Galbraiht og Stillman (2006) peker på «matematisering» som den mest krevende overgangen når elever arbeider med modellering. Maaß (2006) nevner «matematisering» og «tolkning» som problematiske overganger i sin studie, mens Blum og Ferri (2009) kom frem til at «forenkle» og «validering» var to av de mest utfordrende overgangene i modelleringsprosedyren for elevene.

I analysen av elevenes arbeid med modelleringsoppgaven avdekket vi flere blokkeringer hos elevene relatert til overgangene «forenkle» og «matematisere». Blokkeringene er en kognitiv barriere der elevene ikke kommer videre i modelleringsprosessen uten hjelp (Galbraiht og Stillman, 2006). Blum (2015) kaller disse blokkeringene for «rødt-flagg-situasjoner» og kan ses på som det svakeste leddet i elevenes modelleringskompetanse som setter grenser for hva elevene får til på egenhånd (Treilibs et al. 1980 i Blum, 2015, s. 79). Når en «rødt-flagg-situasjon» oppstår er det nødvendig for læreren å veilede elevene videre, men hjelpen bør gis på en slik måte at eleven fortsetter arbeidet sitt uten å miste uavhengigheten (Blum og Ferri, 2009). Adaptiv intervensjon, kaller Blum (2015) denne hjelpen, der læreren balanserer mellom maksimal elevuavhengighet og minimal veiledning.

Våre funn viser at lærerrespondentene og elevene er enige i at «matematisering» og «forenkle» er utfordrende trinn i modelleringssyklusen. Hva er det som gjør at disse trinnene er utfordrende for elevene? Trinnet «forenkle» handler om å strukturere informasjonen og gjøre situasjonen mer presis (Blum og Leiß, 2007). Dette trinnet blir utfordrende for elever som mangler kompetanse i å gjøre antakelser, og de konkluderer med at det ikke er mulig å løse oppgaven om ikke alle opplysningene blir gitt i oppgaveteksten (Blum og Ferri, 2009; Blum, 2015). Et eksempel på at å forenkle situasjonen var utfordrende for elevene finnes i avsnitt 4.5.1.1, forenkle. I eksempelet har elevene en idé til løsningen på problemet, men de klarer ikke å innhente informasjon eller å strukturere den informasjonen de har, slik at de får laget en reell modell av problemet. I intervju med elevene kom det frem at de ønsket lærer hadde flere opplysninger for å slippe antakelser selv (poser eller handlevogn) og «snillere tall» som hadde gjort struktureringen av problemet enklere.

«Matematisering» knytter virkeligheten sammen med matematikken (Blum og Leiß, 2007), og er overgangen mellom den virkelige verden og matematikk-verdenen. Denne overgangen er i stor grad en individuell prosess og dermed avhengig av individets matematiske kunnskaper (Ferri, 2006). I avsnitt 4.5.1.2, matematisere, er det et eksempler som viser at elevene har problemer med å knytte problemet sammen med matematikken. At prosessen er individuell og avhengig av individets matematiske kunnskaper kommer også tydelig frem. Per klarer overgangen raskere enn de tre andre elevene på gruppa. Per finner den matematiske modellen mens de andre elevene på gruppa trenger flere forklaringer fra Per før de klarer å koble det virkelige problemet med den matematiske modellen.

5.2 Ikke alltid samsvar med lærernes antakelser og elevers arbeid

Våre analyser avdekket to funn der lærernes antakelser og elevenes arbeid og opplevelser ikke sammenfalt med hverandre. Lærerrespondentene antok at «tolke» og «validere» ville være utfordrende for elevene. Imidlertid så vi at elevene i arbeid med modelleringsoppgaven behersket disse to trinnene i modelleringssyklusen på en god måte. Dette funnet overrasket oss siden flere studier viser at «tolke» og «validere» er utfordrende for elevene i modelleringssyklusen.

Blum og Ferri (2009) fremhever at «validering» synes spesielt problematisk for elevene, og at lærerne oppfattes som eneansvarlig for korrekt løsning. Dette er i strid med vår studie som viser (beskrevet i avsnitt 4.5.2.2, validere) at elevene selv tok initiativ til å teste ut den matematiske løsningen i den virkelige verden samt problematiserte og konkluderte flere aspekter ved løsningen sin.

Årsaken til at lærerrespondentenes antakelser og tidligere forskning ikke sammenfaller med elevenes arbeid og opplevelser i denne studien, kan være todelt. En av grunnene kan være at læreren som hadde undervisningen behersket balansen mellom maksimal elevuavhengighet og minimal veiledning ved å la elevene prøve på oppgave selv, stille gode spørsmål uten å gi løsning eller strategi når eleven kom i en "rødt-flagg-situasjon" – en kognitiv barriere der elevene ikke kommer videre i modelleringsprosessen (Blum, 2015; Galbraiht og Stillman, 2006). En annen grunn kan være at denne elevgruppen er trent i å argumentere for sine løsninger, begrunne sine valg og reflektere over løsningsforslag og strategier. Elevene er med andre ord trent i å være kritiske til egne og andres løsningsforslag. Så selv om elevene ikke er godt kjent med modelleringsoppgaver, er elevene godt trent i elementer som tilhører modelleringsprosessen og har på den måten opparbeidet seg modelleringskompetanse i trinnene «tolke» og «validere». Det er nærliggende å anta at en kombinasjon av lærerens modelleringskompetanse og elevenes forutsetninger, er grunnen til at elevene mestret trinnene «tolke» og «validere» i arbeidet med modelleringsoppgaven på en god måte.

5.3 Mulige implikasjoner av funn

Funnene i vår undersøkelse viser at lærernes antakelser om hva som er utfordrende for elevene i modelleringsaktivitet sammenfaller med tidligere forskning, men at dette ikke alltid sammenfaller med elevenes arbeid og opplevelse. I tillegg viste våre analyser at det var krevende for våre lærerrespondenter å på forhånd anta hva som ville være utfordrende for elevene i modelleringsprosessen.

Lærerrespondentenes svar på e-postintervjuet rettet seg i stor grad mot generell matematikk og i liten grad mot modelleringskompetanse. I tillegg fant vi at lærerrespondentene benyttet begrepet «modellering» på måter som tyder på at respondentene mener noe annet, for eksempel fysisk modell, representasjoner eller matematiske strategier.

At spesifikke modelleringskompetanser ikke ble nevnt av våre lærerrespondenter i e-postintervjuet, samt at det kan virke som at lærerrespondentene har ulik forståelse av begrepet modellering, kan tyde på at lærerrespondentene ikke har erfaring med modelleringsaktiviteter eller kjennskap til selve modelleringsprosessen. Dette vil i så fall være sammenfallende med tidligere forskning som konkluderer med at flere lærere har utfordringer med den matematiske modelleringsprosessen og få, eller ingen, erfaringer med modelleringsaktiviteter (Blomhøj og Kjeldsen, 2006; Bal og Doğanay, 2014; Doerr, 2007). At lærerne har liten kjennskap til modelleringsaktiviteter er et dilemma når LK20 skal implementeres i skolene. Lærernes kunnskap om modellering er viktig for elevenes utbytte av oppgaver som krever modelleringskompetanse, samtidig som det er viktig at lærerne vet hvordan lærerrollen i modelleringsarbeid endres i forhold til arbeid med mer tradisjonell matematikk (Blum og Ferri, 2009; Bal og Doğanay, 2014; Blum, 2015).

Om intensjonen i LK20 er at modellering skal bli en integrert del av matematikkundervisningen gjennom hele utdanningsløpet, er det nødvendig at matematikklærere innehar den kompetansen som behøves. Dette ansvaret hviler på skoleeiere og skoleledere, men også lærerutdannere og Kunnskapsdepartementet. Gjennom for eksempel «Kompetanse for kvalitet» - videreutdanning for lærere – (Kunnskapsdepartementet, 2015) bør det tilbys videreutdanning spesielt innenfor matematisk modellering og lærerutdannere må kunne tilby adekvate utdanningsprogram for matematikklærere. I neste omgang må skoleeiere gi matematikklærere anledning til denne videreutdanningen. Dernest har skoleledere et ansvar for å utvikle lærerprofesjonen på hver enkelt skole. Å tilegne seg undervisningskompetanse i matematisk modellering skjer gjennom erfaringen man får ved å undervise (Maaß, 2006;

Bal og Doğanay, 2014). Vi vet at det er en klar sammenheng mellom profesjonsutviklingen som skjer innenfor arbeidsfellesskapet og elevenes læring (Meld. St. 21 (2016-2017); Jenssen og Roald, 2017; Munthe og Postholm, 2017). Skoleledere må prioritere og gi rom for en slik profesjonsutvikling om det skal lykkes å implementere matematisk modellering etter hensiktene i LK20.

Matematisk modellering er en viktig del av LK20 hvor modellering blir knyttet opp mot det å forstå den virkelige verden med matematikk. Elevene bygger på erfaringer de allerede har og jobber i dybden på oppgaver. De øver opp evnen til kritisk tenkning og validerer mulige løsninger. Vår studie viste at selv om elevene ikke hadde kjennskap til matematisk modellering som særdeleshet, hadde de gode ferdigheter innen enkelte overganger i modelleringsprosessen; å beskrive løsningen sin med matematisk språk, begrunne valgene de tar og stille seg kritisk til egne og andres løsninger. Dette er ferdigheter vi kjenner igjen fra andre kjerneelementer i matematikkfaget; resonnering og argumentasjon og abstraksjon og generalisering. At elevene opparbeider seg modelleringskompetanse gjennom aktivt å jobbe med andre kjerneelementer, tyder på at ved å arbeide aktivt etter andre kjerneelementer i matematikkfaget gjør at elevene også får modelleringskompetanse. Grunnen til dette er at matematisk modellering er en kognitivt krevende aktivitet som involverer andre kompetanser som for eksempel å lese, kommunisere og problemløse (Blum og Ferri, 2009; Blum 2015). Med andre ord vil kjerneelementene i matematikk være nyttige å navigere etter når undervisning skal planlegges.

5.4 Styrker og svakheter ved studien

Som forsker er man nødt til å ta valg for hvordan studien skal utformes og hvilken retning forskningsarbeidet skal ta (Nilssen, 2012). Valgene vil nødvendigvis gi konsekvenser for studiens resultater og tilfører studien både styrker og svakheter. I vår studie har vi valgt ulike metoder for innsamling av data, og valgene vi har tatt i forkant av datainnhentingen har gitt en retning for hvilke funn og resultater vi har fått. Vi har tidligere redegjort for våre valg og begrunnet disse:

- 3.1 , valg av deltakere
- 3.2, valg av oppgave
- 3.5.2, utarbeidelse av utsagn
- 3.6, metodiske konsekvenser ved valg av rammeverk
- 3.8, metodekritikk

Vi skal her komme med noen betraktninger rundt utsagnene som lå til grunn i undersøkelsen lærerrespondentene gjorde i CJ.

Utsagnene vi la til grunn i CJ ble revidert flere ganger for å være lette å lese og så korte som mulig. Operasjonaliseringen kan ha gjort at noe av meningsinnholdet ble tapt, og at enkelte utsagn kan ha blitt tolket ulikt av lærerrespondentene. Lærerrespondentene kan også ha tolket utsagnene på en annen måte enn vår intensjon. Imidlertid ser vi at lærernes vurderinger sammenfaller med tidligere forskning, og det er grunn til å anta at meningsinnholdet i utsagnene likevel i stor grad ble behold.

Tross arbeidet vi gjorde med å revidere utsagnene på forhånd, ser vi i etterkant at vi kunne jobbet enda mer med å få utsagnene tydeligere. Noen av utsagnene ligner på hverandre og er dermed vanskelig å vurdere opp mot hverandre. Det kunne også vært hensiktsmessig å foreta et dybdeintervju av lærerrespondentene for å få en dypere innsikt i hva de legger i noen av utsagnene de vurderte i CJ.

For å få kartlagt mer av modelleringsprosessen ville det vært nyttig med flere utsagn som beskriver de ulike overgangene, samt at antall utsagn på hvert trinn var nogen lunde likt. På den måten ville hvert trinn i syklusen blitt grundigere beskrevet og kartlagt. Flere utsagn kunne derimot ført til at det ville blitt mer utfordrende å skille utsagnene fra hverandre.

5.5 Videre forskning

Matematisk modellering ble, med LK20, et kjerneelement i matematikkfaget. Kunnskapsdepartementet og Udir slår fast at kjerneelementene er det «viktigste og mest sentrale i hvert fag» (Udir, 2019b) og «det viktigste innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen» (Kunnskapsdepartementet, 2018). Dette krever at matematikklærerne i hele utdanningsløpet er kompetente innenfor alle områdene som kjerneelementene omfatter. Matematisk modellering er, som vi har vært inne på tidligere, utfordrende både for elever og lærere. Tidligere forskning fra andre land viser at matematikklærere har utfordringer med den matematiske modelleringsprosessen og få, eller ingen, erfaringer med modelleringsaktiviteter (Blomhøj og Kjeldsen, 2006; Bal og Doğanay, 2014; Doerr, 2007). Det er elementer i denne studien som kan tyde på at dette kan stemme for norske matematikklærere også. Imidlertid må dette kartlegges bredere og mer inngående slik at adekvate og nødvendige tiltak kan iverksettes om resultatene i Norge er som undersøkelsene fra andre land.

Lærerrespondentene rangerte «matematisere» som den antatt mest utfordrende overgangen i modelleringssyklusen, og i analysen av elevenes arbeid så vi at det i denne overgangen oppsto flere «rødt-flagg-situasjoner». Det hadde vært interessant å finne ut hvordan man kan arbeide for å styrke elevene med å gjøre det virkelige problemet matematisk. Hvilke didaktiske grep er mest hensiktsmessig? Kan man i forberedelse til undervisning forberede «rødt-flagg-situasjoner», slik at man får veiledet elevene igjennom på en hensiktsmessig måte? Og vil denne veiledningen gjøre elevene bedre rustet i andre modelleringoppgaver? Ferri (2006) sier at «matematisere» er en individuell prosess og avhengig av individets matematiske kunnskaper. Er det kun matematisk kunnskap som trengs, eller finnes det andre kompetanser man kan styrke for å gjøre elevene mer kompetente i «matematisering»? Dette kunne vært gjort som et ledd i kompetanseutvikling på skoler. Forskning på dette feltet ville trolig hjulpet matematikklærere i å forberede gode modelleringsaktiviteter og gitt lærerutdannere god informasjon til å utvikle sine utdanningsprogram.

Det kunne vært hensiktsmessig å gjøre en replikasjonsstudie for å se om vår studie er avhengig av kontekst eller ikke. Dersom studien hadde blitt gjennomført en annen dag, et annet sted eller med andre respondenter, ville da resultatene blitt de samme? Særlig interessant hadde det vært i forhold til våre funn rundt «validering» og «tolkning» som ikke sammenfalt med tidligere forskning. Dersom resultatene av en replikasjonsstudie hadde sammenfalt med våre resultater, ville våre studier være mindre avhengig av konteksten og resultatene mer generelle.

5.6 Avsluttende refleksjon

Med bakgrunn i LK20 som ble innført i skolen høsten 2020, ønsket vi med vår studie å tilføre kunnskap innen kjerneelementet «modellering og anvendingar». Vi kan ikke trekke noen generelle konklusjoner om hvilke trinn som lærerne antar er utfordrende for elevene i modelleringssyklusen, men vi ser en tendens til at lærerne antar at de utsagnene som er typiske for modelleringsprosessen er mer utfordrende enn de utsagnene som dreier seg om mer generell matematikk. Imidlertid er det tegn i forskningen som tyder på at lærerne ikke har god nok kjennskap til den matematiske modelleringsprosessen, og dermed er det krevende for lærerne å komme med skriftlige antakelser om hva som vil være utfordrende for elevene i arbeid med matematisk modellering. Vi ser at våre lærerrespondenter endret syn på hvilke utfordringer elevene ville møte når de sammenlignet utsagnene som ble utarbeidet med bakgrunn i teori og lærerutsagn i NoMoreMarking.

Lærernes vekting av utsagnene i NoMoreMarking sammenfaller med tidligere forskning, men vi har også sett at dette ikke alltid sammenfaller med elevenes arbeid og opplevelse. Dette understreker viktigheten av å hele tiden være åpen for den utviklingen som skjer i klasserommet og elevgruppen. Ved å «jakte på det svake punktet» i modelleringsprosessen åpnes det opp for det Goodchild (2008) kaller "good research", eller utviklingsforskning, hvor målet er at forskningen leder til bedre praksis, og at praksis leder til ny forskning. På den måten er det mulig å utvikle undervisningspraksisen som de nye læreplanene krever med tanke på arbeid med matematisk modellering.

Det kan være vanskelig for lærere å endre undervisningspraksis og kurs alene er ikke nok uansett om hele personalet deltar (Helstad, 2014, og Munthe og Postholm, 2017). Profesjonsutviklingen til den enkelte lærer skjer først og fremst innenfor skolens arbeidsfellesskap (Jenssen og Roald, 2017). I de skolene som lykkes med endring, er det et systematisk samarbeid over tid, der det blir anvendt arbeidsformer som observasjon, refleksjon, oppfølging og erfaringsdeling, og det er tatt strukturelle grep for å få tid og rom til å drive utviklingsarbeidet (Ertsås og Irgens, 2014). Av den grunn stiller vi oss tvilende til at kompetansepakkene til Udir vil hjelpe til med å implementere modellering i matematikkundervisningen etter LK20 sine intensjoner, uten at det blir satt av nok tid til systematisk utviklingsarbeid på den enkelte skole.

Referanser

Antonius, S., Haines, C., Jensen, T. H. og Niss, M. (med Burkhardt, H.). (2007). Classroom activities and the teacher. I W. Blum, P.L. Galbraith, H-W. Henn og M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (s. 295-308). New York: Springer

Bal, A. og Doğanay, A. (2014). Improving primary school prospective teachers` understanding of the mathematics modeling process. *Journal of Educational Sciences: Theory and Practice, 14*(4), 1375-1384.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 293-301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Blomhøj, M. (2003). Modellering som undervisningsform. I O. Skovsmose og M. Blomhøj (Red.): *Kan det virkelig passe?* (s. 51-71). København: L&R Uddannelse.

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I O. Skovsmosse og M. Blomhøj (red.), *Kunne det tænkes? – Om matematikklæring* (1. utg.) Albertslund: Malling Beck.

Blomhøj, M. og Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: an international journal of the IMA, 22*(3), 123-139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blomhøj, M. og Kjeldsen, H. T. (2006). Teaching mathematical modelling through project work – Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 163-177. https://doi.org/10.1007/BF02655887

Blum, W. (2015) Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? I Sung Je Cho (Red.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 73-96)

Blum, W. og Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application 1*(1), 45-58.

Blum, W. og Ließ, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum og S. Khan (Red.), *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (s. 222-231). Chichester, UK: Horwood Publishing, 2006.

Bond, T. og Fox, C. M. (2015). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences* (3. utg.). New York: Routledge.

Buchholtz, N. (2019) Planning and Conducting Mixed Methods Studies in Mathematics Educational Research. I G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (p. 131- 152).

Christoffersen, L. og Johannessen, A. (2012) *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag AS

Cohen, L., Manion, L., og Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). New York, NY: Routledge.

Creswell, J. W. og Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2. utg.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Cronbach L.J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika 16*, 297–333. https://doi.org/10.1007/BF02310555

Fangen, K. (2011). *Deltagende observasjon*. (2. utg.) Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS

Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM Mathematics education, 38(2), 86-95.

Galbraiht, P. og Stillman, G. (2006). *A framework for identifying student blockages duringtransitions in the modelling process*. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 38(2), 143-162.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? I W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn og M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education*: The 14th ICMI Study (s. 69-78). New York, NY: Springer.

English, L. (2003). Mathematical Modelling with Young Learners. I Lamon, S, Parker, W, og Houston, K (Red.) *Mathematical Modelling: A Way of Life* (s. 3-17). Horwood Publishing, United Kingdom, 2003

Ertsås, T.I., Irgens, E.J. (2014), *Fra individuell erfaring til felles kunnskap: Når kompetanseutvikling er virkemiddel for å skape bedre skoler.* Oslo: Universitetsforlaget

Goodchild, S. (2008), A Quest for 'Good' Research The mathematics teacher educator as practitioner researcher in a community of inquiry. I Jaworski, B. og Wood, T (Red) *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (side 201-220). Rotterdam, Nederland: Sense Publishers.

Greefrath, G., og Vorholter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling. Approasches and Developments from German-speaking Countries*: Springer International Publishing AG Switzerland.

Guba, E. G. (1981) Criteria for Assessing the Trustworthiness of Naturalistic Inquiries i *Educational Communication and Technology,* Vol. 29, No. 2 (Summer, 1981), side. 75-91

Haines, C. og Crouch, R. (2010). Remarks on a modeling cycle and interpreting behaviours. I R. A. Lesh, P. L. Galbraith, W. Blum, og A. Hurford (Red.), *Modeling student` modeling competencies*. ICTMA 13 (s. 145-154). New York: Springer.

Helstad, K. (2014), *Profesjonelle læringsfellesskap: Kunnskapsutvikling gjennom samtaler*, Bedre skole, (1), 70-75

Jankvist, U. T. og Niss, M. (2019). *Upper secondary school students`difficulties with mathematical modelling.* International Journal of mathematical education in science and technology. Hentet fra: https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587530

Jenssen, E.S., Roald, K (2017) Skolen som organisasjon og arbeidsfellesskap i Postholm, Haug, Munthe, Krumsvik (Red.), *Lærere i skolen som organisasjon* (s. 119-135). Oslo: Cappelen Damm Akademisk

Justnes, C. N. (2018) *Representasjoner i matematikk*. Matematikksenteret http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-12/Hva%20er%20representasjoner%20i%20matematikk%2018.11.29_0.pdf

Langvik, E. (2016) *Testbruk og misbruk*. Hentet fra: https://veilederforum.no/artikler/metode-og-verktoy/testbruk-og-misbruk-kvalitetskrav-til-testene-og-de-som-benytter-dem

Lesh, R. og Doerr, H. M. (Red.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lesh, R. (2003). Matematical modelling: How Mathematizing Reality is Different from Realizing Mathemetics. I S. L. Lamon, W. A. Parker S. K. Houston (Red.), *Mathematical Modelling: A Way of Life* ITCMA 11 (s.37-52). Horwood, England

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. og Post, T., (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. I A. Kelly, R. Lesh (Red.), *Research Design in Mathematics and Science Education*. (s. 591-646). Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Kaiser, G. og Sriraman, B. (2006). A global survey of internnational perspectives on modelling in mathematics education. ZDM Mathematics education, 38(3), 302-310.

Kunnskapsdepartementet. (2018, 26. juni). *Fornyer innholdet i skolen*. Regjeringen. https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Kunnskapsdepartementet. (2017a). *Verdier og prinsipper for grunnopplæringen – overordnet del av læreplanverket*. Regjeringen. https://lovdata.no/static/LTI/sf-20170901-1332-01-01.pdf?timestamp=1595607354000

Kunnskapsdepartementet. (2015, 2. september). *Kompetanse for kvalitet*. Regjeringen. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/kompetanse-for-kvalitet/id2439181/

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38(2), 113-142.

Meld. St. 11 (2008-2009). *Læreren Rollen og utdanningen*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/dce0159e067d445aacc82c55e364ce83/no/pdfs/stm200820090011000dddpdfs.pdf

Meld. St. 21 (2016-2017). *Lærelyst – tidlig innsats og kvalitet i skolen*. Kunnskapsdepartementet.

https://www.regjeringen.no/contentassets/71c018d2f5ee4f7da7df44a6aae265bc/no/pdfs/stm201620170021000dddpdfs.pdf

Munthe, E, Postholm, M.B. (2017) Lærerens profesjonelle læring i skolen i Postholm, Haug, Munthe, Krumsvik (Red.), *Lærere i skolen som organisasjon* (s. 137-154). Oslo: Cappelen Damm Akademisk

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2016, april). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Hentet fra: https://www.forskningsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi.pdf

Nilssen, V. (2014). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlaget.

Nomoremarking.com. (2019). No More Marking, Comparative Judgement for Schools https://www.nomoremarking.com/

Nomoremarking.com. (u.å.a). *How many judgements?* Hentet 14.05.2021: https://www.notion.so/How-many-judgements-46c6d628e78043b9b3b2db520c39f188

Nomoremarking.com. (u.å.b). *Reliability*. Hentet 14.05.2021: https://www.notion.so/Reliability-bb843b13b7c44a3681628ca4212a6a3a

Ringdal, K. (2013). *Enhet og mangfold. Samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode*. (3. utg) Bergen: Fagbokforlaget.

Postholm, M.B. (2018). Læreren som forsker eller lærer. *Norsk Pedagogisk tidsskrift*, 91 (3), 232-244.

Postholm, M. B., og Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Schølberg. A.L., og Solli, I.E. (2020). *Utfordringer i modelleringsprosessen. En kvalitativ undersøkelse om læreres oppfatning om elevenes utfordringer under arbeidet med matematisk modellering* [Masteroppgave] Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Sfard, A. (2007). *When the rules of discourse change, but nobody tells you*. Journal of the Learning Sciences, 16: 567–615.

Strand, J. S. (2019). *Matematisk modellering. En kvantitativ studie om læreres opplevde utfordring i undervisning av modellering* [Masteroppgave] Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet. NTNU Open: https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/handle/11250/2610302

Svingen, O.E.L. (2018). *Representasjoner i matematikk*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P4_M1Representasjoner-i-matematikk_fagtekst.pdf

Thurstone, L.L. (1927) A law of comparative judgement. *Pscyhological Review*, 34(4), 273-286. https://doi.org/10.1037/h0070288

Utdanningsdirektoratet. (2019a, 13. mars). *Dybdelæring*. https://www.udir.no/laring-og trivsel/dybdelaring/?fbclid=IwAR3vhceDVU26ISPsZzaW9Wj4BGl5Eh5TR_4HzXcMEmtguF5t0ltiB01Ei9c

Utdanningsdirektoratet. (2019b, 18. november). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2019, 7. november). *Kompetansepakke for innføring av nytt læreplanverk*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kompetansepakke-for-innforing-av-nytt-lareplanverk/

Utdanningsdirektoratet. (2020a). *Fagrelevans og sentrale verdiar*. *Læreplan i Matematikk 1–10 (MAT01-05).* https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier

Utdanningsdirektoratet. (2020b). *Kjerneelement. Læreplan i Matematikk 1–10 (MAT01-05).* https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Våge, J. (2000). Matematisk modellering. I G. Gjone og T. Onstad (Red.), *Mathema 2000: Festskrift til Ragnar Solvang* (s. 158–169). Oslo: NKS-Forlage

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeskjema elever og foresatte

Vedlegg 2: Informasjonsskriv og samtykkeskjema matematikklærere

Vedlegg 3: Første e-post til lærerrespondenter

Vedlegg 4: E-postintervju lærerinformanter

Vedlegg 5: Råmateriale fra nomoremarking.com

Vedlegg 6: Refleksjoner rundt samarbeidet

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeskjema elever og foresatte

Vil du delta i forskningsprosjektet ”Utfordringer ved modellfremkallende aktiviteter”?

Til foresatte for elever på 5. trinn ved Blakstad skole

Vi er to masterstudenter ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, som skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt på skolen til ditt barn. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål
Formålet med dette forskningsprosjektet er en del av en masteroppgave der vi skal hva elevene synes er vanskelig når de jobber med modellfremkallende aktivitet.
Dette er særlig interessant å avdekke med tanke på den nye læreplanen som ble gyldig fra skolestart august 2020.

I forskningsprosjektet skal vi svare på følgende spørsmål:
- Hva synes elevene på femte trinn er utfordrende når de jobber med modellfremkallende aktiviteter?

Resultatene av studien vil bli brukt i en masteroppgave ved NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Elevene som skal delta blir trukket tilfeldig ut fra elevgruppa som har sendt inn samtykke.

Hva innebærer det for å delta?
Elevene som skal delta vil få en oppgave knyttet til modellfremkallende aktivitet, og det vil bli foretatt video og lydopptak av undervisningen og intervju. Elevarbeidene vil bli samlet inn.
I etterkant av undervisningen vil video og lydopptaket bli transkribert. I transkriberingen vil elevene bli anonymisert, og straks etter transkriberingen vil video og lydopptakene bli slettet. Det vil ikke forekomme navn på elevbesvarelsene.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du/ditt barn velger å delta, kan du/ditt barn når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om eleven vil da bli slettet og ikke bli benyttet i forskningen. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for eleven hvis du ikke ønsker at ditt barn skal delta, eller velger å trekke barnet ditt fra prosjektet senere.

Elevens personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker elevens opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Gunn Berit Nyhus Vik og Kristin Gudem samt veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Det anonymiserte datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.
- Navnet på eleven og kontaktopplysningene vil bli erstattet med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data, dataene blir lagret på kryptert ekstern harddisk som vi har lånt fra NTNU.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes september 2021, men kan bli forlenget til juni 2022. Før prosjektslutt er alle identifiserbare opplysninger slettet. Det er ønskelig at NTNU oppbevarer anonymisert datamateriale for fremtidig forskning. Dette kan det samtykkes til på svarslippen.

Dine rettigheter
Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert,
- å få rettet personopplysninger,
- få slettet personopplysninger,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av ditt barns personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for Lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan du finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved kristin@gudem.com, gvik@asker.kommune.no, eivind.kaspersen@ntnu.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen
Masterstudenter Gunn Berit Nyhus Vik og Kristin Gudem

(Eivind Kaspersen, prosjektansvarlig)

Elevens navn:

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet “representasjoner i arbeid med modellfremkallende aktiviteter”, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn kan

- delta i forskningsprosjektet
- NTNU kan oppbevare og bruke anonymisert datamateriale etter forskningsprosjektets slutt

----

(Signert av foresatt, dato)

Vedlegg 2: Informasjonsskriv og samtykkeskjema matematikklærere

Vil du delta i forskningsprosjektet ”Utfordringer ved modellfremkallende aktiviteter”?

Til matematikklærere på Blakstad og Hagaløkka skole

Vi er to masterstudenter ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, som skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt på Blakstad og Hagaløkka skole. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære deg.

Formål
Formålet med dette forskningsprosjektet er en del av en masteroppgave der vi skal er å avdekke utfordringer elevene har i møte med modellfremkallende aktivitet.

Dette er særlig interessant å avdekke med tanke på den nye læreplanen som ble gyldig fra skolestart august 2020.

I forskningsprosjektet skal vi svare på følgende spørsmål:

- Hvilke utfordringer tenker lærerne elevene har i arbeid med modellering?
- Hvordan sammenfaller disse antakelsene med elevenes arbeid og opplevelse?

Resultatene av studien vil bli brukt i en masteroppgave ved NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Det er ønskelig at praktiserende matematikklærere uttaler seg om hva de tenker er utfordrende for elever i møte med modellfremkallende aktivitet.

Hva innebærer det for deg å delta?
Undersøkelsen er tosidig for de matematikklærerne som deltar. Det vil først være en skriftlig undersøkelse via mail der du svarer på et spørsmål: hva tror du er utfordrende for elevene når de arbeider med modellering?
I etterkant skal du sammenligne diverse utsagn med “Comparative judgement”. Totalt tidsbruk på undersøkelsen antar vi vil være ca 15 minutter.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli slettet og ikke bli benyttet i forskningen. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke ønsker å delta, eller velger å trekke deg fra prosjektet senere.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene du oppgir til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Gunn Berit Nyhus Vik og Kristin Gudem samt veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.

- Navnet ditt og kontaktopplysningene vil bli erstattet med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data, dataene blir lagret på kryptert ekstern harddisk.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes september 2021, men kan bli forlenget til juni 2022. Før prosjektslutt er alle identifiserbare opplysninger slettet. Det er ønskelig at NTNU oppbevarer anonymisert datamateriale for fremtidig forskning. Dette kan det samtykkes til på svarslippen.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert,
- å få rettet personopplysninger,
- få slettet personopplysninger,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for Lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved kristin@gudem.com, gvik@asker.kommune.no, eivind.kaspersen@ntnu.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Masterstudenter Gunn Berit Nyhus Vik og Kristin Gudem

(Eivind Kaspersen, prosjektansvarlig)

Navn:

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet "representasjoner i arbeid med modellfremkallende aktiviteter", og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker å

- delta i forskningsprosjektet
- NTNU kan oppbevare og bruke anonymisert datamateriale etter forskningsprosjektets slutt

----

(Signatur, dato)

Vedlegg 3: Første e-post til lærerrespondenter

Tusen takk for at du vil delta på vårt forskningsprosjekt:

Utfordringer ved modellfremkallende aktiviteter

Med modellfremkallende aktiviteter mener vi for eksempel oppgaver av typen:

> ***Hurra! Tone har vunnet 10 millioner i lotto! Hun går i banken og vil ta ut pengene i 50-lapper. Får hun med seg pengene hjem?***

Ditt bidrag til forskningsprosjektet vil være todelt:

1. Dine antakelser/tanker rundt hva som vil være utfordrende for elevene i arbeid med modellfremkallende aktiviteter via mail (egen mail om dette vil komme snart)
2. En "spørreundersøkelse" der du sammenligner utsagn som har med arbeidsprosessen rundt modellfremkallende aktiviteter å gjøre.

mvh
Gunn Berit og Kristin

Vedlegg 4: E-postintervju lærerinformanter

Første del av forskningsprosjektet "Utfordringer ved modellfremkallende aktiviteter".

Her er første del av forskningsprosjektet vi ønsker at du skal svare på. Elevene på 5. trinn skal få følgende oppgave:

> ***Hurra! Tone har vunnet 10 millioner i lotto! Hun går i banken og vil ta ut pengene i 50-lapper. Får hun med seg pengene hjem?***

- Hva mener du vil være elevenes største utfordring i arbeid med denne modelleringsaktiviteten? Svarene dine skal relateres til elever på 5. trinn og nevnte oppgave. Du må gjerne nevne flere punkter.

Tidsfrist: 2 uker

Tusen takk for ditt bidrag!

mvh
Gunn Berit og Kristin

Vedlegg 5: Råmateriale fra nomoremarking.com

First Name	L...		Scaled Score		Infit
å forstå problemet	1a	F	23.0	r	0.9
å gi forslag på hvordan oppgaven kan løses	1b	F	10.0	r	0.8
å tilegne seg nødvendig informasjon for å løse oppgaven	1c	F	55.0	r	0.9
å strukturere informasjon	2a	F	53.0	r	0.8
å forenkle virkeligheten	2b	F	76.0	r	1.0
å lage en skisse for å få oversikt	2c	F	59.0	r	1.3
å gjøre den ikke-matematiske situasjonen matematisk	3a	F	89.0	r	1.2
å oversettefra virkelig problem til en matematisk sammenheng	3b	F	78.0	r	0.7
å læse de matematiske utfordringene - selve regningen	4a	F	6.0	r	0.9
å samtale om metoder de benytter	4b	F	35.0	r	0.8
å benytte ulike representasjoner	4c	F	66.0	r	1.3
å vurdere ulike representasjoner	4d	F	49.0	r	1.1
å benytte sine matematiske kunnskaper	4e	F	15.0	r	0.6
å skrive ned utregningene	4f	F	9.0	r	1.4
å gjøre om matematikken til hverdagsspråk	5a	F	41.0	r	1.4
å vurdere om løsningen er riktig	5b	F	56.0	r	1.0
å beskrive løsningen sin med matematisk språk	5c	F	83.0	r	1.0
å begrunne valgene de tar	6a	F	41.0	r	1.0
å sette seg inn i andre elevers løsning	6b	F	49.0	r	0.9
å reflektere over andre måter å løse problemet på	6c	F	63.0	r	0.7
å stille seg kritisk til egne og andres løsninger	6d	F	73.0	r	0.8
å revidere løsningen	6e	F	100.0	r	0.9
å overbevise andre om sin oppgaveløsning	7a	F	42.0	r	1.0
å få motivasjon for å løse oppgavene	8a	F	5.0	r	1.1
å sammarbeide om hvordan oppgaven kan løses	8b	F	0.0	r	0.8

Vedlegg 6 Refleksjoner rundt samarbeidet

Vi har gjennom hele prosessen samarbeidet godt og tett, og begge står ansvarlig for alle delene i denne masteroppgaven. Det å være to har vært berikende på alle måter. Det å alltid ha noen å støtte seg på, diskutere og reflektere, har vært uvurderlig. Vi har holdt motivasjonen oppe hos hverandre og har utfylt hverandre på en god måte.

Alle våre kladder og utkast har vært gjort i google disk. Det har gjort det mulig å hele tiden være oppdatert på hverandres arbeid.

Høsten 2020 ble brukt til å lese teori og bli kjent med comparative judgement og nomoremarking.com, samt planlegging av undervisning og utvelgelse av deltakere til studien. Før julen 2020 hadde vi gjennomført feltarbeidet, intervjuer og undersøkelsen i comparative judgement. I starten av prosessen delte vi en del oppgaver mellom oss, men de siste månedene har begge vært involvert i alle delene av masteroppgaven. Våre 2021 har gått med til analyse og diskusjoner av funn i datamaterialet.

Begge har et eieforhold til alle kapitlene i oppgaven, og vi har hatt mange gode diskusjoner og refleksjoner rundt analysene og funnene av all innhentet datamateriale. Begge har vært delaktige i kommunikasjon med veileder.

Samarbeidet har fungert godt og vi har benyttet oss av hverandres sterke sider.

NTNU
Kunnskap for en bedre verden