Olav Martens Solli

Jakten på aha-opplevelser

En kvalitativ studie av matematiske resonneringsprosesser hos elever på 10. trinn

Masteroppgave i Master lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 8-10.trinn
Veileder: Ole Enge
September 2022

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Olav Martens Solli

Jakten på aha-opplevelser

En kvalitativ studie av matematiske resonneringsprosesser hos elever på 10. trinn

Masteroppgave i Master lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 8-10.trinn
Veileder: Ole Enge
September 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne studien undersøker kjennetegn på individuell matematisk resonnering hos elever på 10. trinn. Formålet har vært å bidra med kunnskap om matematisk resonnering i skolen. Studiens forskningsspørsmål har vært følgende:

Hva kjennetegner tre elever på 10. trinn sin matematiske resonnering i møte med en utforskende aritmetikkoppgave i eksamensformat?

Det er tatt i bruk kvalitative forskningsmetoder der det er gjennomfør semi-strukturerte intervju av tre elever under arbeidet deres med en utforskende aritmetikkoppgave i et hundrekart. Oppgaven er utarbeidet av Matematikksenteret og har vært aktuell som utforskende eksamensoppgave. Datamaterialet ble analysert induktivt med åpen koding og gjennom Jeannotte og Kieran (2017) sin modell for matematisk resonnering i skolen, samt Sfard (2008) sine beskrivelser av matematiske diskurser og Balacheff (1988) sine beskrivelser av pragmatiske bevis.

I den grad det er mulig å identifisere kjennetegn på elevenes matematiske resonnering konkluderer studien med to hovedfunn: 1) Elevene i studien viser utforskende deltakelse i matematiske diskurser, og 2) Valideringsprosessene er utfordrende for elevene.

Nøkkelord: Matematisk resonnering, matematisk diskurs, bevis, argumentasjon,

Abstract

This study investigates characteristics of individual mathematical reasoning for students in the 10th grade. The aim has been to contribute knowledge about mathematical reasoning among students. The research question has been the following:

What characterizes the mathematical reasoning of three students in the 10th grade when faced with an exploratory arithmetic task in exam format?

Qualitative research methods have been used in which semi-structured interviews are carried out with three students during their work with an exploratory arithmetic task in a hundred map. The task has been prepared by Matematikksenteret and has been in discussion for use as an exploratory task for the 10th grade exam. The data was analyzed inductively with open coding and through Jeannotte and Kieran's (2017) model for mathematical reasoning in schools, as well as Sfard's (2008) descriptions of mathematical discourses and Balacheff's (1988) descriptions of pragmatic proofs.

To the extent that it is possible to identify characteristics of the students' mathematical reasoning, the study concludes with two main findings: 1) The students in the study show exploratory participation in mathematical discourses, and 2) The validation processes are challenging for the students.

Keywords: Mathematical reasoning, proof, argumentation, mathematical discourse

Forord

Jeg er lærer og stolt av det. Liker å undervise og elsker lyden av elevenes aha-opplevelser – når de har oppdaget eller forstått noe. Utfordringa med aha-opplevelsene er at jeg ikke alltid (les altfor sjeldent) får tak i hva som gjorde at eleven «knekte nøtta», «så lyset» eller med andre ord forstod noe (for vårt matematikksamfunn – vår klasse) matematisk viktig. Hva er det egentlig som skjer inne i hodene til podene våre?

På lærerskolen fikk jeg høre om matematikkdidaktikk for første gang, Vygotsky og Piaget, deduktiv og induktiv metode. En av foreleserne mine var opptatt av at elevene skulle oppdage matematikken selv, men matematikkundervisninga jeg har hatt i alle skoleløp, også på lærerskolen, har hovedsakelig orientert seg mer mot metodelæring. Selv har jeg alltid vært opptatt av forståelse i matematikkundervisninga – altså ikke at elevene skal kunne utføre en algoritme, men forstå matematikken og kanskje hvorfor en algoritme er hensiktsmessig. Likevel har jeg ofte endt opp med å vise metoder og bedt elevene å gjøre det samme som meg. Jeg har arbeidet med kollegaer som har terpet elever med divisjonsalgoritmen og enkel algebra, bare for å berge toeren på matematikkeksamen. Tilsynelatende blottet for ambisjoner om at matematikken skal være logisk, interessant eller morsom.

Men nå har det skjedd en endring. Endelig kom det en læreplan som passer synet mitt på matematikk – den er basert på forskning som har vært tilgjengelig lenge, men i tillegg kan det se ut som om noen har retta blikket enda lenger fram. Kompetansene i matematikk er ikke lenger kunnskapsmål, men formodninger om hva som ligger i matematikkens egenart og hva som skal til for å forstå og kunne bruke den.

Når jeg skal takke så la meg starte med Thorbjørn Røe Isaksen for endringa av «Kompetanse for kvalitet» til studiepoenggivende videreutdanning av lærere og den nyskapende satsinga på «Lærerspesialistordninga» - her var det en mulighet til å sikre kontinuerlig faglig utvikling av lærere i mange fag på alle skoler i hele landet – stoppinga har gjort det hele mer diffust igjen.

NTNU for svært godt sammensydd lærerspesialistutdanning, med inspirerende forelesere og veiledere. Jeg er en ny lærer og profesjonsutvikler

Veileder – Ole Enge for tips og kommentarer underveis

Matematikksenteret – Anne Gunn Svorkmo som stilte med eksamensaktuell matematikkoppgave

Dernest matematikklærere jeg har hatt under all utdanning – jeg har tatt nye steg, små og store, gjennom hver og en av dere.

Så til kollegene mine på Otta Ungdomsskole som er gode sparringspartnere i arbeidshverdagen og ikke minst ivrige etter utvikling.

Barnebarna som er ren glede.

Barna mine som ønsker faren sin det beste.

Broren min som hovedsakelig er fotballtrener i Bergen.

Foreldrene mine som alltid kommer til å være … foreldre. Og da er jeg glad jeg har dere.

Kona mi, Ingunn, for at du er her

Innhold

1 Innledning

Denne studien undersøker matematisk resonnering hos elever på 10. trinn. Prosessene som er sentrale i denne sammenheng inkluderer prosesser elever kan gjennomføre fra møte med et matematisk problem og helt til de formulerer eventuelle bevis av en formodning. Begreper og definisjoner er hentet fra Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematisk resonnering (MR) i skolen og tilstøtende litteratur.

Matematikkdidaktisk forskning har de siste tiårene anbefalt endring av undervisninga i matematikkfaget og flere har argumentert for at bevisrelaterte aktiviteter bør ha en større plass i skolen. Flere, blant andre Balacheff (2010) framholder at bevis er sentralt for å lære og forstå matematikk, andre går enda lengre og mener bevis er en nøkkelkomponent i matematikkutdanninga (Ball, Hoyles, Jahnke & Movshovitz-Hadar, 2002). A. J. Stylianides (2007) hevder at det har vært tradisjon for at bevisaktiviteter først innføres i videregående skoler og at disse bør inn i skolen langt tidligere. G. J. Stylianides (2008) hevder at bevis ofte er løsrevet fra resten av matematikkopplæringa og framholder resonnere-og-bevise-aktiviteter som noe som bidrar til å fremme elevenes matematikkforståelse.

A. J. Stylianides (2007) hevder at selv om bevisaktiviteter tradisjonelt har kommet sent i skoleløpet har nyere forskning og rammeverk for matematikkundervisning endret på dette og at bevisrelaterte kompetanser etter hvert har fått en mer sentral plass. At læreplanene har endret seg til å vektlegge bevis og resonneringsprosesser understøttes av Jeannotte og Kieran sin gjennomgang av forskning på matematisk resonnering (Jeannotte & Kieran, 2017).

Bakgrunnen for at jeg velger å undersøke resonneringsprosesser blant 10. klassinger er et resultat av egen skolegang, noen-og-tjue-års erfaring som matematikklærer og lærerspesialistutdanningen jeg tok ved NTNU fra 2018-2020.

Som skoleelev på 80- og 90-tallet kan jeg ikke huske at matematikk var interessant. Det var et fag på skolen, der det handlet om å regne raskt og riktig, og i det øyeblikket jeg behersket ligningsalgoritmen, var det heller ikke behov for å undersøke eller forstå noe. Det første møtet med matematiske beviser var på videregående skole. Så for min egen del er det lett å relatere til G. J. Stylianides (2008) beskrivelse av bevis som noe som kommer sent i og er løsrevet fra resten av skolematematikken. Jeg husker undervisningstimer fra videregående, der læreren fylte tavla (flere ganger) og «beviste» at matematikken var gyldig. Som elev, aksepterte jeg (og resten av klassen, etter egen hukommelse) at formelen var riktig og da pugget vi den. Vi lot oss ikke forstyrre av at vi ikke forsto og jeg kan heller ikke huske at læreren var spesielt fortvila – han hadde tross alt «bevist» for oss at matematikken var gyldig.

I yrket som matematikklærer har jeg gjennom hele karrieren vært opptatt av at elevene skulle forstå matematikken, og alltid gledet meg over elevenes aha-opplevelser når de oppdaget matematiske sammenhenger. På tross av dette har undervisningen min vært tradisjonell i den forstand at jeg ikke har designet undervisning for at elevene skal oppdage slike sammenhenger. Elevers aha-opplevelser har kommet mer eller mindre tilfeldig. Det var først i forbindelse med lærerspesialistutdanninga ved NTNU at jeg fikk øynene opp for at matematikkdidaktikken hadde utviklet seg og at det er mange måter å designe undervisning for å fremme elevers læring i matematikk. Jeg ser arbeid med elevenes matematiske resonneringsprosesser som et ledd i nettopp å fremme læring. Derfor er det interessant å undersøke disse prosessene hos egne elever.

Innføring av ny læreplan stiller krav til endring av matematikkundervisninga i norsk skole. Elevene skal ikke hovedsakelig lære metoder for å løse matematikkoppgaver, men utvikle evnen til å forstå problemer og arbeide fram strategier for å løse dem. Dette er i tråd med senere forskning på matematikkdidaktikk og kan føre til en endring i norsk skole, der elevenes tenkning og refleksjoner vektlegges mer enn før. I matematikkfaget kalles slik tenking gjerne matematisk resonnering og er tett knyttet opp mot matematisk argumentasjon og matematiske bevis – at en elev kan overbevise andre om at det hen har funnet ut, faktisk stemmer, og at det alltid gyldig (Valenta & Enge, 2020). Å beherske såpass komplekse oppgaver har endret kravet til kompetanse i matematikk og stiller krav til nye eksamensformer. Utdanningsdirektoratet (UDIR) utarbeidet forslag til ny eksamen og etter noen runder med kritikk (Larsen-Evjen, 2021), ble det i januar 2022 publisert eksempeloppgaver for eksamen 2022 (Utdanningsdirektoratet, 2022). Noe som var nytt var de to siste oppgavene på del to (med hjelpemidler). Disse var større oppgaver der elevene ble foreslått en tidsramme på

45 minutter for hver. Hensikten med oppgavene var å vise bredere kompetanse koblet til kjerneelementene i matematikkfaget. Selv om matematikkeksamen i 2022 ble avlyst fant jeg den siste oppgavetypen interessant. Hvordan ville elevene løse slike oppgaver individuelt. I klasserommet bruker jeg vanligvis å la elevene arbeid i grupper i møte med slike oppgaver – der de samtaler og samarbeider og deler tanker og ideer på tvers av gruppene. Å møte en utforskende oppgave individuelt krever muligens en annen tilnærming og jeg var nysgjerrig på hvordan elevene ville gå fram.

Denne studien tar utgangspunkt i en slik oppgave og elevers møte den. Oppgaven er en aritmetikkoppgave med et mønster i hundrekartet , og hensikten kan være å gi elever mulighet til å vise kompetanse i nettopp kjerneelementet resonnering og argumentasjon. Jeg vill undersøke hvordan elever angriper denne oppgaven og intervjue dem underveis for å forsøke å få dypere innsikt i hvordan de resonnerer underveis i arbeidet med oppgaven. Forskningsspørsmålet valgte jeg å formulere slik:

> *Hva kjennetegner tre elever på 10. trinn sin matematiske resonnering i møte med en utforskende aritmetikkoppgave i eksamensformat?*

I kapittel 2 presenterer jeg teori jeg legger til grunn for studien. Som teoretisk rammeverk har jeg valgt Jeannotte og Kieran (2017) sin modell for resonnering i skolen. Det er deres modell med tilhørende begreper og definisjoner jeg støtter meg til i analysen og som er grunnlaget for diskusjonen. Med denne modellen som utgangspunkt er det naturlig å komme inn på Sfard og kommognisjon (Sfard, 2008, 2012) for å beskrive matematiske diskurser. Jeannotte og Kieran bruker Sfard sin kommognisjon som en grunnpilar for modellen sin, der de gjentakende trekker fram kommognisjon og den kommognitive forskerens syn (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14 og 15). I tillegg tar jeg i bruk Balacheff (1988) sin beskrivelse av beviser – også disse er trukket fram i Jeannotte og Kieran (2017) sin modell.

Kapittel 3 er metodekapittelet der jeg forklarer hva jeg har gjort for å søke svar på forskningsspørsmålet. Kort oppsummert har jeg gjennomført tre semi-strukturerte intervjuer med 10. klassinger under deres arbeid med oppgaven. Oppgaven er en utforskende artimetikkoppgave med et mønster i hundrekartet. Den har vært aktuell for en eventuell eksamen etter ny form og er utarbeidet av Matematikksenteret ved NTNU (Matematikksenteret, 2021). Datainnsamlinga har vært lydopptak av intervjuene og elevenes notatark. Analysearbeidet har foregått induktivt, med åpen koding i NVivo etter konstant komparativ metode. Hovedekategoriene jeg endte opp med gir grunnlag for analysen.

Kapittel 4 inneholder analysen der jeg presenterer empiri fra intervjuene og mine tolkninger av disse, sett opp mot det teoretiske rammeverket. I analysen oppsummerer jeg funn som blir tema for diskusjonen.

Kapittel 5 er diskusjonsdelen av studien. Der oppsummeres sentrale funn og diskuteres i lys av rammeverket og annen relevant teori.

Kapittel 6 er avslutningskapittelet med betraktninger på funnene jeg har gjort og foreslår videre forskning.

2 Teori

2.1 Sentrale begreper

Sentrale begreper i denne studien er matematisk resonnering, bevis, diskurs, narrativ, formodning og argumentasjon, og selv om jeg kommer til å gå grundigere inn på flere av dem senere i teoridelen, vil jeg kort gjøre rede for hvordan jeg tolker disse i denne sammenhengen.

Matematisk resonnering (MR) er behørig omtalt senere, men kort forenkla ser jeg, i denne studien, MR som prosessen elevene gjennomgår fra møtet med en matematisk utfordring til de konkluder en hypotese eller beviser at den er sann. Det er mange som sier noe om dette og i denne studien støtter jeg meg i all hovedsak på Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematisk resonnering i skolen.

Bevis blir også grundigere forklart under, men hensikten med bevis er å verifisere at en påstand er sann. Jeg skiller mellom formelle matematiske beviser, som bygger på tidligere bevist matematikk med deduktiv struktur, og bevis i skolen der formålet ikke hovedsakelig å bevise formelt, men heller at beviset brukes som stillas for å forstå matematikken i det gjeldende matematikksamfunnet. Et *matematikksamfunn* kan i denne sammenhengen være en skoleklasse, men begrepet kan også brukes for verdensomfattende fagmiljøer i ulike matematiske retninger.

Diskurs. Stor norsk ordbok definerer diskurs som 1) drøftelse og 2) logisk tankeutvikling ledd for ledd. Som synonym foreslås debatt og samtale (Guttu, Gundersen & Wangsteen, 2022). I denne studien støtter jeg meg på Anna Sfard sine definisjoner (Sfard, 2001, 2008, 2012) og ser en matematisk diskurs, som en samtale (synkron eller diakron, muntlig eller med andre kommunikasjonsformer) om et matematisk emne i et gitt matematisk samfunn. I en klasse kan dermed diskursen handle om ett eller flere matematiske emner.

Narrativ – i en matematisk diskurs bygges narrativer – fortellinger om matematiske forhold – i det gjeldende matematikksamfunnet. I en klasse kan dette være hvordan titallsystemet er presentert/ arbeidet med/oppfattet. Elevene i klassen utvikler dermed narrativer om titallssystemet som gjelder for hver enkelt. Fellestrekk i forståelsen av titallssystemet for de noen eller de fleste elevene i klassen vil kunne tolkes som klassens gjeldende narrativ om titallsystemet.

Argumentasjon. Å argumentere innebærer å «fremføre saksforhold som styrker eller svekker en påstand» (NAOB, 2022). Argumenter kan dermed avgjøre om en påstand er mer eller mindre sannsynlig, sann eller feil og på den måten endre den epistemiske verdien til et narrativ. I den nevnte klassen kan tierpotenser utvide narrativet om titallsystemet og diskusjon om 10^0, 10^{-1}, 10^{-2} og så videre kan bygge forståelse for desimaltall og dermed forklare at 10-deler er mer enn 100-deler.

Formodning. Må innrømme at dette er et begrep det var vanskelig for meg å ta i bruk. Å *formode* noe virker som riksmål, en arv etter dansk og på vei ut av det norske språket fra 70-tallet av. Det lå nærmere å bruke *antakelse* eller *hypotese* som oversettelse for *conjecture*. *Formodning* blir imidlertid brukt som direkte oversettelse av conjecture i matematikk og fikk egen artikkel i store norske leksikon på nett i 2013 (Hervik, 2013). Roger Antonsen definerer begrepet slik*: En **formodning** (eng. conjecture) er en påstand som vi tror, eller har god grunn til å tro, er sann, men som vi ikke har bevist eller motbevist.* (Antonsen, 2014). G. J. Stylianides (2008) forklarer conjecture som en hypotese som er begrunnet. Da jeg søkte etter ordet formodning i Nasjonalbiblioteket fikk jeg flest treff på ordet i sammenheng med uttrykket «mot formodning». Ellers kun i forbindelse med kjente matematiske formodninger, som Goldbachs formodning, for eksempel, eller Formats formodning, som riktig nok ikke lenger er en formodning, etter som den ble bevist av Andrew Wiles i 1995. Når det gjelder bruk av dette begrepet i forbindelse med elevers matematiske resonnering er det derimot lite å finne. I et søk i ORIA på kombinasjonen av *elever* og *formodning* finner jeg 26 treff, der kun ett bruker formodning som en del av elevers søken etter matematisk sammenheng. Da jeg likevel velger å bruke formodning, vil jeg forsøke å skille mellom elevenes utforsking og produktet de kommer fram til i løpet av en resonneringsprosess. En påstand eller en hypotese er ikke like dekkende etter som en formodning krever at det er forsøkt å finne ut om den stemmer eller ikke. Elevenes formodninger kan neppe sammenlignes med kjente matematiske formodninger, men er like fullt *en påstand som eleven tror, eller har god grunn til å tro er sann*, jamfør

Antonsens definisjon. Å bruke formodning på denne måten kan gi matematikklærere et mer presist språk, når de samtaler om elevers matematiske resonnering.

2.2 Bevis

Matematiske beviser har utviklet seg opp gjennom århundrene og selv om flere er enkle å forstå, har matematiske beviser etter hvert blitt laget av matematikere for matematikere (Grabiner, 2012). Et formelt matematisk bevis må basere seg på tidligere beviste påstander (aksiomer og setninger) og ha en tydelig deduktiv struktur (Jeannotte & Kieran, 2017). Matematiske beviser er ofte forbundet med rigid oppbygging og at de kan være vanskelig tilgjengelig for folk flest. Eksempler på dette er formodninger som er bevist de siste århundrene. Blant andre nettopp Andrew Wiles sitt bevis av Fermats formodning, som selv de fleste matematikere i dag lar være å forsøke å forstå (Røislien & Nome, 2011, s. 111)

I denne studien bruker jeg Jeannotte og Kieran (2017) sine definisjoner av resonneringsprosessene som omhandler bevis. De skiller mellom å *bevise* og å *bevise formelt*. Dette blir omtalt under forklaringen av modellen.

2.3 Bevis i skolen

Det er mange som slår slag for at bevis skal være en del av skolematematikken. Ball et al. (2002) sier at arbeid med bevis i skolematematikken bør være et nøkkelpunkt i og med at bevis står så sentralt i selve matematikken. Dette støttes bredt i senere matematikkdidaktisk forskning (Balacheff, 2010; Jeannotte & Kieran, 2017; A. J. Stylianides, 2007; A. J. Stylianides, Bieda & Morselli, 2016; Valenta & Enge, 2020) og er tydeliggjort i mange nasjonale læreplaner i matematikkfaget, deriblant den norske (Utdanningsdirektoratet, 2019). Flere, blant andre A. J. Stylianides et al. (2016) argumenterer for å arbeide med bevis fra tidlig av, og gjennom hele skoleløpet.

Hanna (1989) skiller mellom bevis som beviser og bevis som forklarer og hevder at sistnevnte bør få større plass i matematikkopplæringa. Hun understreker at begge formene er legitime som bevis fordi de fyller alle krav til matematiske bevis og er akseptert av matematikksamfunnet, men at forskjellen ligger i at bevis som forklarer matematikken kan hjelpe til å bygge forståelse. «Forståelse innebærer mye mer enn å bekrefte at alle ledd i en deduktiv kjede er korrekte» (Hanna, 1989, s. 50).

Balacheff (1988) argumenterer også for bruk av beviser i matematikkopplæringa og poengterer viktigheten av å utvikle språket til å være et verktøy til logisk deduksjon og ikke bare være et kommunikasjonsmiddel. Han skiller mellom pragmatiske beviser som bygger på handlinger og kan vises, og begrepsmessige beviser som krever distanse til selve handlingen og baserer seg på formuleringer av egenskaper til handlinger og relasjoner mellom disse (Balacheff, 1988, s. 217). Han viser til tre typer pragmatiske beviser: 1) *naiv empirisme* (naiv empiricism) der en konklusjon trekkes fra få eksempler, 2) *det avgjørende eksperimentet* (crucial experiment) der en sjekker om hypotesen stemmer for et tilfeldig eksempel (gjerne langt ute i rekka) eller for å velge mellom to hypoteser og 3) det *generiske eksempelet* (generic example) som tar et steg bort fra konkrete eksempler og ser på et typisk eksempel og egenskapene og strukturene til dette. I tillegg viser han én type begrepsmessig bevis, 4) *tankeeksperimentet* (thought experiment), som fjerner seg fra den gjeldende representasjonen og nærmer seg matematiske bevis (Balacheff, 1988, s. 218-220).

2.4 Matematisk resonnering (MR)

Matematisk resonnering (MR) – hva er det egentlig? Begrepet er ullent, fordi det ikke er tydelig definert og det brukes med forskjellig innhold (Jeannotte & Kieran, 2017; Lithner, 2008). Likevel har det fått mer sentral rolle i matematikkdidaktiske kretser og etter hvert i flere nasjonale læreplaner (Jeannotte & Kieran, 2017). Men hva som menes med MR er fortsatt vanskelig. Lithner (2008) skriver at det virker som om det antas at det er en universell enighet om innholdet i begrepet, uten at det er tydelig definert. Det altså viktig å ha en forståelse av at MR ikke er et omforent begrep i matematikkdidaktiske kretser. Flere skriver om en underliggende problematikk i og med at MR brukes i forskjellige sammenhenger uten at det er tydelig hva som egentlig ligger i begrepet (Fischbein, 1989; Jeannotte & Kieran, 2017; Kollosche, 2021).

Et problem for engelskspråklige land kan være at ordet «reasoning» brukes for å «tenke fornuftig – bruke sunn fornuft» i dagligtale (Jeannotte & Kieran, 2017). I Norge derimot har vi ikke den samme utfordringa i og med at «resonnering» ikke brukes på samme måte. Verbet å resonnere forklares slik i Store Norske Leksikon: «*Resonnere betyr å tenke, reflektere, trekke fornuftige slutninger eller følge en tankerekke på en logisk måte.*» (Kjøll, 2021). Resonnering på norsk innebærer dermed en omstendig prosess for å ende opp med en «fornuftig slutning».

At matematisk resonnering er sentralt vises igjen i læreplanen i matematikk for grunnskoleopplæringa (LK-20), der resonnering er den ene hoveddelen i kjerneelementet «Resonnering og argumentasjon»:

> *Resonnering i matematikk handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer. Det inneber at elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar. Elevane skal utforme eigne resonnement både for å forstå og for å løyse problem. Argumentasjon i matematikk handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige.* (Utdanningsdirektoratet, 2019)

For elever i norsk skole handler MR dermed om å utforme egne resonnementer og å følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. De skal i tillegg argumentere for resonnementer og bevise at disse er gyldige. I dette kjerneelementet etableres det en sammenheng mellom resonnering og bevis og læreplanen legger dermed opp til at arbeid med resonnering og bevis skal integreres i all matematikkundervisning (Valenta & Enge, 2020).

Samtidig løfter de fram arbeid med resonnering, argumentasjon og bevis som sentrale for å utvikle elevenes matematikkompetanse. I LK-20, der resonnering, som nevnt, inngår i et eget kjerneelement, er det gjort et forsøk nettopp på å sette større trykk på å utvikle denne delen av elevenes matematikkompetanse. Dette er en radikal endring fra forrige læreplan i matematikk, der ordet resonnering ikke er brukt, resonnere én gang og resonnement to ganger – vel og merke uten noen form for utdyping (Utdanningsdirektoratet, 2013). I gjeldende læreplanverk ligger det altså implisitt at det er noen prosesser det er forventet at elevene skal ta del i. De skal kunne følge, vurdere og forstå. Men selv om det er understreket, er det likevel ikke entydig **hvordan** eleven skal følge, vurdere og forstå – altså hvordan de skal resonnere.

Lithner (2008) hevder at selv om matematikkdidaktikksamfunnet ønsker å utvikle elever som er kompetente i problemløsning, så er det fortsatt store utfordringer. Han deler MR i to og skiller mellom imitativ resonnering og kreativ resonnering, der den første handler om å imitere (for eksempel lærerens algoritmer) og der kreativ resonnering er beskrivelsen av en prosess der elever selv kommer fram til matematiske ideer. Han lanserer begrepet kreativ matematisk fundert resonnering (Creative mathematical founded reasoning – CMR), men utdyper at for å kunne betegnes CMR må resonneringen møte gitte kriterier: i) Nytt eller gjenoppdaget (novelty) – resonneringssekvensen skal være ny for den som resonnerer, ii) Sannsynlig (plausability) – det er argumenter for at konklusjonen er sannsynlig eller sann og iii) Matematisk fundert – argumentene må være forankra i egenskapene til matematikken som er involvert.

Hensikten med denne studien er å undersøke hvordan tre 10.-klasseelever resonnerer matematisk i møte med en utforskende aritmetikkoppgave. Jeg bruker modellen til Jeannotte og Kieran (2017) som grunnlag når jeg undersøker elevenes resonnering og derfor bruker jeg også deres definisjoner av de ulike matematisk resonneringprosessene. Senere vil jeg forklare hvordan jeg tolker modellen, men før jeg kommer så langt, finner jeg hensiktsmessig å komme innom Sfard og begrepene kommognisjon, matematisk diskurs og læring.

Ved første øyekast kan modellen virke enkel å ta i bruk, og jeg forstår Jeannotte og Kieran slik at de mener modellen kan brukes som et verktøy for både forskere og lærere når de undersøker skoleelevers matematiske resonnering.

2.4.1 Anna Sfard og Kommognisjon

Sfard kombinerer ordene kommunikasjon og kognisjon og konstrurerer begrepet kommogninsjon. Dette gjør hun på bakgrunn av blant andre Wittgenstein og Vygotsky (Haifa, 2021). Utgangspunktet til Sfard er at tenking er kommunikasjon med seg selv og at diskurs er sentral i så måte. Sfard definerer begrepet diskurs som: enhver form for kommunikasjon, synkron eller diakron, enten med andre eller seg selv, om den er verbal eller foregår med andre symboliske systemer (Sfard, 2001, s. 28). En matematisk diskurs kjennetegnes ved to hovedfaktorer: Først symboler som fungerer som verktøy i kommunikasjonen, dernest metaregler som regulerer slik kommunikasjon. Disse metareglene er ofte kun synlig for den som observerer og er underforstått av deltakerne i diskursen (Sfard, 2001, s. 13). Symboler/mediatorer (mediators) kan være matematiske symboler, grafer, tabeller og algebraiske formler, men først og fremst språket. Å kommunisere med andre, eller seg selv (tenking), vil være umulig uten disse verktøyene (Sfard, 2001, s. 29). Meta-diskursive regler er som sagt underforstått for deltakerne i diskursen og i tråd med normen vil deltakerne unngå å gjøre noe som ikke er passende. Når det kommer til matematikkfaget vil dette for eksempel styre måten definisjoner og bevis blir framført (Sfard, 2008).

Sfard løfter fram flere begreper som utdyper prosessen: *Visuelle mediatorer* (symboler) som konkreter, matematiske tegn, grafer, tegninger og så videre. *Narrativer,* som er tekst eller tale som framstår som beskrivelser av objekter eller relasjoner mellom objekter, eller aktiviteter med objekter og som kan aksepteres eller forkastes. *Rutiner* er vel-definerte gjentatte mønster blant deltakernes handlinger i diskursen. I tillegg er det regler på objektnivå (for eksempel regler for regnerekkefølge) og regler på meta-nivå (underforståtte regler for hva som er passende i diskursen). Disse reglene kan være ulike fra matematikksamfunn til matematikksamfunn. (Sfard, 2008, s. 572-573)

I forlengelsen av dette hevder Sfard at læring i matematikk kan sees på som endring i den matematiske diskursen. Ikke bare diskursen i matematikksamfunnet (les klassen), men også den individuelle diskursen som foregår i hver enkelt. Hun har beskrevet utvikling av slik diskurs hos små barn (Lavie & Sfard, 2019) og hos studenter på universitetsnivå (Sfard, 2014). Læringen kan foregå på alle de tidligere nevnte områdene: Ordbruken i diskursen, bruk av visuelle mediatorer (symboler o.l), mer utfyllende narrativer og endring i rutiner (Sfard, 2008, s. 573).

2.4.2 Jeannotte og Kieran sin modell for matematisk resonnering i skolen

Jeannotte og Kieran (2017) har gjennomgått det de har klart å finne av forskning på matematisk resonnering (MR) og utviklet en modell som kan brukes for nettopp å studere elevers MR. En av de store utfordringene under arbeidet med modellen var, som jeg har nevnt tidligere under beskrivelsene av MR, å forsøke å definere selve begrepet «matematisk resonnering», fordi det brukes av mange og med ulike nyanser. De påpeker videre at modellen ikke skal omfavne alle motsetningene av MR, som de har funnet i litteraturen, men heller systematisere variasjonen av konvergerende trekk ved MR, i en teoretisk samstemt ramme (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 3).

Sentralt i elevers resonnering står diskursaktiviteter. Her inkluderer Jeannotte og Kieran hva elever sier, hvordan de sier det, representasjoner og tegninger de lager og hvordan de bruker representasjonene, intonasjon og gester. Alt dette er "brekkstenger" for å aktivere lærerens input når det gjelder å lage en kultur for elevers deltakelse og hva slags resonnering som er forventet av dem. For å få til slik input, må ikke bare læreren være klar over hvilke metoder og prosesser som fremmer ønsket MR, men også ha et så godt utviklet syn på MR, at hen gjenkjenner det, når elevene involverer seg i ønsket MR.

Av dette definerer Jeannotte og Kieran at MR er en diskursaktiviteter og støtter seg på Sfard og kommognisjon, når de forklarer at kommognisjon er en kombinasjon av tenkning (individuelt – kognisjon) og kommunikasjon (mellom mennesker). Kommognisjon viser at disse to prosessene er forskjellige (individuelt og mellommenneskelig), men like fullt, sider av samme sak. De henviser til Sfard og sier at diskurs er en spesiell type kommunikasjon synliggjort av et repertoar av tilgjengelige handlinger og at diskursen i språk er framtredende med begreper, visuelle mediatorer, rutiner og tilsluttede narrativer. For en kommognitiv forsker er matematikk en diskurs – altså en spesiell form for kommunikasjon. Utvikling av den matematiske diskursen, er dermed utvikling av matematikken, involverer en forandring av diskursen, noe som skjer i det matematiske samfunnet, der endringer i diskursen blir foreslått, avslått og forhandlet. I forlengelsen av dette vil forestillingen av MR utvikles av gitte matematikksamfunn som bestemmer reglene, akseptable visuelle mediatorer og ordbruk (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 4).

I tillegg er det i hovedsak to måter å utvikle diskursen på: objektnivå og metanivå. Utvikling av diskursen på objektnivå refererer til utvikling av en eksisterende diskurs på allerede konstruerte matematiske objekter. På den andre siden beskriver utvikling på metanivå en konstruksjon av en ny diskurs, noe som forandrer spillereglene og går hånd i hånd med opprettelsen av nye matematiske objekter. Forskjellen på disse to nivåene er sentralt for å skille ut de matematiske tankeprosessene som vil bli vurdert som prosesser i MR.

Når Jeannotte og Kieran velger å bruke Sfard sin kommognitive ramme for utvikling av modellen, trekker de fram at modellen ikke er ment som praktisk hjelp til å finne ut hva som er best undervisning for å oppnå MR eller finne ut hva som utvikler de ulike aspektene ved MR. Målet har vært å konstruere, i harmoni med den kommognitive rammen, en sammenhengende teoretisk modell som setter sammen og bygger på det som er sammenfallende i forskningslitteraturen på matematikkundervisning, og at den dermed kan fungere som et begrepsverktøy for både forskere og lærere og på den måten forbedre kommunikasjon gjennom et felles vokabular.

2.4.2.1 Sentrale aspekter ved matematisk resonnering

Jeannotte og Kieran (2017) tar fatt i fire store elementer i MR, som de hevder klargjør sløret som ligger over begrepet.

1. Begrepsmotsetning mellom aktivitet/produkt slekter til resonneringsaktivitet som noe utilgjengelig og der produktet bare blir et ufullstendig hint.
2. Den logiske (inferential – avhengig av en slutning) naturen i MR framheves av mange forfattere, som peker på nye ideer som har kommet på bakgrunn av å trekke logiske slutninger - men presist hva som er naturen i slik nyskaping er ikke klarlagt.
3. Mål og funksjoner i MR fører til spørsmål som om målet med MR er begrenset til å bevise, eller om funksjonen til alle MR-prosesser er å endre epistemisk (vitenskapelig, kanskje) verdi til et narrativ.
4. Strukturperspektivet framheves ofte i MR - i hvilken form resonneringa er uttrykt - deduktivt, induktivt og abduktivt. Prosessperspektivet derimot (som er støttet av andre) er ofte ikke definert eller utforska.

Når de kombinerer disse fire elementene i et kommognitivt perspektiv definerer de MR som en kommunikasjonsprosess med seg selv eller andre som legger grunn for å utlede matematiske ytringer fra andre matematiske ytringer.

2.4.2.2 Det strukturelle aspektet ved matematisk resonnering:

Det strukturelle aspektet ved MR refererer til måten de diskursive elementene er satt i et ordnet system som beskriver både elementene og relasjonene mellom dem (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 7). Jeannotte og Kieran ser på disse som en mer statisk del av MR og viser videre til formene deduksjon, induksjon og abduksjon.

I det deduktive steget ligger strukturen i at en påstand (claim) utledes fra data og begrunnelse (warrant). I følge Jeannotte og Kieran mener noen at deduktiv resonnering er synonymt med MR og viser til Duval (1995) som beskriver deduktiv resonnering som den eneste måten å endre epistemisk verdi fra sannsynlig til sann (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 8). Det deduktive steget er spesielt viktig når det kommer til å utlede beviser og formelle beviser der det er krav til deduktiv restrukturering.

I det induktive steget ligger strukturen i at en begrunnelse (warrant) utledes fra data og en påstand (claim) om dataene. Induktiv resonnering kobles mot MR-prosessen generalisering fordi en generaliseringsprosess på et eller annet tidspunkt kan struktureres induktivt (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 8).

I det abduktive steget ligger strukturen at data utledes fra påstand (claim) og begrunnelse (warrant) eller at data og begrunnelse utledes fra påstanden. Jeannotte og Kieran skriver at abduktiv struktur er mindre beskrevet og viser til Rivera (2008) som hevder at abduktiv struktur noen ganger blandes med induktiv struktur. I følge Pedemonte og Reid kalles det abduksjon når en regel blir utledet av ett eksempel, i motsetning til induksjon som krever flere eksempler (Pedemonte & Reid, 2011, s. 299).

2.4.2.3 Prosessaspektet ved matematisk resonnering

Jeannotte og Kieran hevder at prosessaspektet i MR har vært lite utforsket i forbindelse med MR og at det ikke er innrammet begrepsmessig (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 9). I et kommognitivt lys mener de at prosessaspektet kan defineres på denne måten: «MR-prosesser er kommognitive prosesser som er meta-diskursive, det vil si at de utleder narrativer om objekter eller relasjoner gjennom å utforske relasjonene mellom objekter.»(Jeannotte & Kieran, 2017, s. 9)

I arbeidet med å utvikle modellen har de funnet ni prosesser som sentrale i undersøkelse av elevers MR. Åtte av dem er plassert i to kategorier: *Søken etter likheter og forskjeller* og *Validering*. Den niende – *eksemplifisering*, har de klassifisert som støtte for begge de to andre prosessene. Videre vil jeg beskrive hver enkelt av prosessene og oppsummere dem i en figur jeg etter hvert brukte i forbindelse med å kode elevbesvarelsene.

2.4.2.4 Prosesser relatert til søken etter likheter og forskjeller

Generalisere (Generalizing) – En MR-prosess som utleder narrativer om et sett med matematiske objekter eller en relasjon mellom objekter i settet, fra en undergruppe av dette settet (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 9). Generalisering handler derfor om å bevege seg fra et gitt sett til et større sett. Her støtter de seg, blant andre, på Dreyfus om at generalisere handler om å utlede fra detaljer, identifisere fellestrekk, og utvide gyldighetsdomener. (Dreyfus, 1991). Altså å bevege seg fra enkelteksempler til generelle regler (finn kilde)

Å formulere en formodning (Conjecturing) – En MR-prosess som ved å søke etter likheter og forskjeller, trekker ut et narrativ om en regelmessighet med mulig eller sannsynlig epistemisk verdi og som har potensial for matematisk teoretisering (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Prosessen med å formulere en formodning skal dermed ende opp med en begrunnet formodning. For det første er det en søken etter en regelmessighet som er med å bygge en relasjon mellom matematiske objekter eller andre matematiske relasjoner. For det andre vil formodninga, som et narrativ, alltid være knyttet opp mot en epistemisk verdi, om den er mulig eller sannsynlig. Det er andre MR-prosesser som avgjør om formodninga er sann eller ikke.

Identifisere et mønster (Identitying a pattern) – En MR-prosess som ved søken etter likheter og forskjeller, utleder et narrativ om en gjentakende relasjon mellom matematiske objekter eller relasjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). De støtter seg på G. J. Stylianides (2008) som hevder at det å identifisere et mønster innbefatter mer enn bare å observere det – å identifisere et mønster er aktiv søking, for så å betrakte fenomenet på avstand (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Videre skriver de at det ikke er tilknyttet noen spesiell epistemisk verdi til det utledete narrativet.

Sammenligne (Comparing) – En MR-prosess som utleder, gjennom søken etter likheter og ulikheter, et narrativ om matematiske objekter eller relasjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). Å sammenligne kan finne sted sammen med flere av de andre MR-prosessene, generalisere, identifisere et mønster, validere.

Klassifisere (Classifying) – En MR-prosess som utleder, gjennom søken etter likheter og forskjeller mellom matematiske objekter, et narrativ om en klasse objekter basert på matematiske egenskaper og definisjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). Jeannotte og Kieran trekker fram klassifisering som en viktig prosess som tillater utvikling på objektnivå, gjennom å sette sammen eller plukke fra hverandre ulike diskursive objekter og på den måten strukturere en diskurs. Klassifisere kan assosieres med sammenligne, formulere en formodning og generalisere (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11).

2.4.2.5 Prosesser som er relatert til validering

I det andre settet MR-prosesser er forandring av epistemisk verdi framhevet. Med utgangspunkt i blant andre Lithner (2008) viser Jeannotte og Kieran at begrepet validering er knyttet til den epistemiske verdien en matematiske ytring i et gitt narrativ kan ha (for eksempel sannsynlig, sann, mulig, usann) og avhenger av det matematiske diskurs-samfunnet der ytringen kom fram. Den epistemiske verdien er ikke bare avhengig av logisk validitet, men også av den delte diskursen i et gitt samfunn.

Validering (Validating) – En MR-prosess som har som mål å endre den epistemiske verdien (for eksempel sannsynligheten eller sannheten) til et matematisk narrativ (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). I motsetning til å formulere en formodning, der det ligger til grunn at narrativet allerede er sannsynlig, sikter valideringsprosessen mot å endre den epistemiske verdien til narrativet den ene eller den andre veien. Fra sannsynlig til sann, eller fra sannsynlig til usann. De meta-diskursive reglene i matematikken begrenser de mulige endringene i epistemisk verdi. Det innebærer søken etter diskursiv informasjon (data, begrunnelse (warrant), støtte (backing)), som tillater endring i epistemisk verdi. De har delt validering i tre prosesser:

Rettferdigjøre (justifying) – En MR-prosess som gjennom søken etter data, begrunnelse og støtte, tillater endring av epistemisk verdi av et narrativ (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12). Forandringen i epistemisk verdi er begrenset av de metadiskursive reglene innenfor et matematikksamfunn. For eksempel så må en endring fra sannsynlig til sann basere seg på deduktiv struktur, mens en endring fra sannsynlig til mer sannsynlig ikke har samme krav.

Bevise (proving) – En MR-prosess som, gjennom søken etter data, begrunnelse og støtte, tillater endring i epistemisk verdi fra sannsynlig til sann. Denne prosessen er begrenset av

i) narrativene som er akseptert av klassen og som er sanne (sett fra matematikkeksperters ståsted).
ii) en avsluttende restrukturering som er deduktiv.
iii) forståelsene eller oppdagelsene (jf Sfard (2008)) som er passende og kjent eller tilgjengelig for klassen (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12).

Den deduktive strukturen i matematikk er gjerne forbundet med å være rigid. Jeannotte og Kieran framhever at selv om de metadiskursive reglene i matematikk krever at valideringsprosessen blir deduktivt restrukturert en gang, betyr ikke dette gjennom alle steg. Å bevise handler om å bygge på et sett narrativer som aksepteres som sanne. Å bevise, skiller seg fra å rettferdiggjøre ved potensialet for teoretisering og at det er mer begrenset fordi det må restruktureres deduktivt, basert på et sett narrativer som er sammenfallende med diskursen til matematikkeksperter (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 13)

Bevise formelt (formal proving) – En MR-prosess som, gjennom søken etter data, begrunnelser og støtte, endrer den epistemiske verdien til et narrativ fra sannsynlig til sann. Denne prosessen er begrenset av:

i) narrativene som er akseptert av klassen og som er sanne (sett fra matematikkeksperters ståsted)
ii) en avsluttende restrukturering som er deduktiv.
iii) forståelser eller oppdagelser som er akseptert av klassen og matematiske samfunn

I motsetning til å bevise, baserer å bevise formelt seg på tidligere matematisk teori og formaliserte forståelser eller oppdagelser (aksiomer og teoremer) (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 13).

Den niende prosessen, eksemplifisere, brukes av Jeannotte og Kieran som støtte for de åtte andre prosessene.

Eksemplifisere – en MR-prosess som støtter andre MR-prosesser gjennom å utlede eksempler som støtter i:

i) søken etter likheter og forskjeller
ii) søken etter validering (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 14).

2.4.3. Oppsummering av rammeverk

Jeannotte og Kieran er tydelige på at modellen er beregnet for matematisk resonnering i skolen og ikke som en modell for resonnering per se. I tillegg er modellen et narrativ i seg selv og kan dermed tolkes, endres og utvikles av andre som tar den i bruk.

For bruk i denne studien har jeg valgt å sette opp modellen i tabellform, se figur 1.

<table>
<tr><th colspan="4">Modell for matematisk resonnering (MR) i skolen
Min figur etter Jeannotte og Kieran (2017)</th></tr>
<tr><th>Strukturaspektet</th><th>Prosessaspektet</th><th colspan="2">MR-prosesser:</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Deduksjon</td><td rowspan="5">Prosesser relatert til søken etter likheter og forskjeller</td><td>Generalisere</td><td rowspan="8">Eksemplifisere</td></tr>
<tr><td>Formulere en formodning</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Induksjon</td><td>Identifisere et mønster</td></tr>
<tr><td>Sammenligne</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Abduksjon</td><td>Klassifisere</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Prosesser relatert til validering</td><td>Rettferdigjøre</td></tr>
<tr><td>Bevise</td></tr>
<tr><td>Bevise formelt</td></tr>
</table>

Figur 1 Min tabell etter Jeannotte og Kieran (2017)

Tabellen oppsummerer enkelt modellen til Jeannotte og Kieran (2017). De lyseblå feltene til venstre viser strukturaspektet ved matematisk resonnering – altså hvordan elevenes argumenter er strukturerte. De mellomblå feltene til høyre viser Prosessaspektet og de ulike MR-prosessene. At eksemplifisere står på høykant ved siden av de åtte andre prosessene er for å illustrere at den er en til støtte for de andre prosessene.

3 Metode

Å prøve seg som forsker på egen skole, med egne elever som forskningsobjekter, stilte meg overfor en rekke valg. Hensikten med studien var altså å undersøke elever på 10. trinn sin matematiske resonnering i møte med en utforskende oppgave på eksamensform.

I og med at jeg valgte en slik «eksamenstilnærming», ville jeg lete fram til individuelle elevers matematiske resonnering og ikke hvordan resonnering foregår i grupper av elever. I tillegg er det kjente utfordringer med å forske på egne elever. Videre vil jeg presentere metodevalgene jeg har gjort og bakgrunnen for dem. La meg starte med de overordna prinsippene.

3.1 Kvalitativ forskning.

For å plassere studien i et paradigme, hører den til det konstruktivistiske, der «… virkeligheten er noe som skapes eller konstrueres av forskeren og personene som deltar i studiet.» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 90). De fortsetter med å vise til Guba og Lincoln som har skrevet at «Virkeligheten er konstruert av personer som befinner seg i den aktuelle situasjonen (Guba & Lincoln, 2008, sitert i (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 90). Eller som Vivi Nilssen utrykker det: «… forutsetningen er at det eksisterer mange virkeligheter. Virkeligheten blir sett på som kompleks, i stadig forandring og konstruert av de enkelte som er involvert i en forskningssituasjon.» (Nilssen, 2012, s. 25). Narrativet om elevenes matematiske resonnering ved min skole, tilhører og kan fortelles av elevene og en matematikklærer ved skolen. En kan på den måten hevde at det er fornuftig at det er elevene og jeg, læreren, som undersøker dette. Det er vi som utgjør det gjeldende *matematikksamfunnet*, for å bruke begrepet fra Jeannotte og Kieran (2017).

Postholm og Jacobsen (2018) hevder at moderne kvalitativ forskning kom som en reaksjon på naturvitenskapen og den positivistiske innstillingen om at «alt» kan måles kvantitativt (Postholm & Jacobsen, 2018). «Hovedformålet med kvalitativ forskning har siden dens opprinnelse vært å beskrive og forstå «den andre»» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 95). Sharan B. Merriam påpeker at verden består av en rekke konstruksjoner og tolkninger som er bevegelige og kan endres over tid – virkeligheten er ikke satt, entydig eller et målbart fenomen, slik det er antatt i positivistisk, kvantitativ forskning (Merriam, 2002, s. 3). Kvalitative metoder samler data om virkeligheten gjennom ord eller språk, ofte gjennom casestudier og små N-studier (studier med få forskningsobjekter, der fenomener og ikke kontekst settes i sentrum). På denne måten kan forskeren oppnå nærhet til forskningsobjektene og innsikt i hvordan de fortolker virkeligheten (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 74 og 92).

Denne studien har få forskningsobjekter (tre) – på den måten er den et lite N-studie. Gjennom datainnsamlinga som er gjennomført med lydopptak av semi-strukturerte intervju, der forskeren selv er deltaker, har jeg forsøkt å søke nærhet til forskningsobjektene, få innsikt i hvordan de fortolker virkeligheten og på den måten forsøkt å forstå «den andre». Formålet er å finne kjennetegn på disse elevenes matematiske resonnering.

3.2 Datainnsamling

Jeg har gjennomført individuelle semi-strukturerte intervjuer av tre 10. klassinger ved egen skole. Intervjuene ble tatt opp med lydopptaker, senere transkriberte og overført til NVivo – et dataprogram med kvalitativ analyse som hovedbruksområde (Klemp, 2012). I tillegg leverte elevene oppgavearket og kladdearkene som ble skannet og overført til NVivo.

Jeg bestemte meg for at datainnsamlinga skulle foregå gjennom lydopptak av semi-strukturerte intervjuer, der elevene ble presentert for oppgaven og oppfordret til å si høyt hva de tenkte og gjorde underveis. Videoopptak ble vurdert, men forkastet med begrunnelse i elevens personvern.

Jeg planla at forskerrollen min skulle være som tilbakeholden, men deltakende observatør. Prøve å ikke legge for sterke føringer for elevene og selv om jeg fungerte som samtalepartner underveis, ville jeg forsøke å unngå å lede dem i noen retning. Likevel hadde jeg noen stikkord jeg ville spørre dem om, etter at de hadde fått arbeidet med oppgaven en stund.

3.2.1 Om det semi-strukturerte intervjuet:

I følge Kvale og Brinkmann (2015) er det hensikten med det kvalitative forskningsintervjuet å forstå sider ved intervjupersonens dagligliv sett fra denne personens perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 44).

Et semi-strukturert intervju gjennomføres gjerne ved at forskeren har tema og forslag til spørsmål klare i forkant, men at det ikke spørsmålene nødvendigvis skal komme i en bestemt rekkefølge – de introduseres der det passer i samtalen. Forskeren er også åpen for at det kan dukke opp temaer hen ikke har tenkt på (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 121). I følge Galletta og Cross (2013), er det semi-strukturerte intervjuet verdsatt fordi det kan tilpasses mange ulike forskningsformål. Kombinasjonen av åpne og mer teoridrevne spørsmål kan belyse data ut fra deltakernes ståsted (Galletta & Cross, 2013, s. 45). Og det er nettopp dette som er hensikten med studien min. Å belyse elevenes matematisk resonnering. Det er deres tankeprosesser jeg er ute etter.

Et slikt intervju kan utformes på flere måter og jeg utformet etter hvert en intervjuguide inspirert av Galletta og Cross (2013) som mener en slik intervjuguide bør ha en tredelt struktur (se figuren under). Overordnet legger de til grunn at hensikten med alle spørsmålene er å belyse forskningsspørsmål i studien.

Mal intervjuguide – semi-strukturert intervju		
Åpningssekvens *Sette scenen for et narrativ basert på deltakerens erfaring.*	Mellomsekvens *Mer spesifikke spørsmål.*	Avslutningssekvens *Se tilbake på åpningsnarrativet for å finne forbindelser til teorien.* *Avslutte.*
• Skap trygg ramme og forsikre seg om at deltakeren forstår rettighetene sine. • Åpningsspørsmål som gir deltakeren mulighet til å snakke ut fra egen erfaring. • Be om utdyping – om nødvendig. • Merk deg momenter du vil ta opp igjen senere i intervjuet. • Støtt samtalen og led spørsmål mot problemstillinga.	• Vær oppmerksom på nyanser i narrativet så langt. • Skift til mer spesifikke spørsmål, relatert til forskningsspørsmålet. • Gå tilbake i deltakerens narrativ ved relevante spørsmål. • Utforsk videre det du har merka deg som interessante momenter fra åpningssekvensen. • Utvid undersøkelsene slik at du er sikker på at du forstår det deltakeren formidler i henhold til forskningsspørsmålet.	• Still spørsmål som kan utfordre teoretiske betraktninger – teoridrevne spørsmål. • Der det er mulig, ta tak i historier, metaforer som trenger mer utdyping. • Utforsk motsetninger • Begynne å avrunde. • Be deltakeren om betraktinger eller avsluttende poenger. • Takk deltakeren og framhev bidraget til forskninga.

Figur 2 Min tabell etter (Galletta & Cross, 2013)

Med utgangspunkt i Galletta og Cross (2013) arbeidet jeg fram en skisse til intervjumal, fikk innspill fra veileder og endte opp med et tosidig A4-ark med oppgaveteksten, samt en liste med stikkord til spørsmål jeg kunne stille underveis (vedlegg 3). Tanken bak intervjuguiden var at jeg skulle ha noe å lene meg på underveis i intervjuene, slik at jeg kunne følge lage trygge rammer for alle deltakerne, la dem få tid og ro til å sette seg inn i oppgaven og være aktivt lyttende og følge deres narrativ i starten, for deretter i økende grad stille spørsmål om elevens matematiske resonnering. Den tredelte strukturen i guiden ga meg ro i intervjusituasjonen – det ble klart for meg når vi beveget oss over i neste fase av intervjuet.

3.2.2 Om elevene

Deltakerne ble valgt ut på bakgrunn av flere forutsetninger. Jeg ønsket å undersøke matematisk resonnering blant elever på 10. trinn ved egen skole. På dette trinnet hadde elevene gjennom hele ungdomsskoletida, vært vant med læringspartnere (to og to eller tre og tre) i alle matematikktimer. Mange av undervisningsøktene var lagt opp til helklassediskusjoner og bruk av produktive samtaletrekk (Chapin, O'Connor & Anderson, 2009; Kazemi & Hintz, 2014) og de var i tillegg vant med utforskende matematikkarbeid i grupper på vertikale tavler etter mønster av å *Bygge tenkende klasserom* (Liljedahl, 2016, 2021). Elevene på trinnet var vant til å samtale om matematikk og løse utforskende oppgaver sammen med andre, mens i denne studien var et mål å se hvordan de resonnerer matematisk mer individuelt.

Antallet deltakere er viktig i kvalitativ forskning. Blir det for mange kan det være vanskelig å analysere datamengden og blir det for få går det ut over kvaliteten på studien. Jeg jeg ble enig med veileder om at jeg ville kunne få nok datamateriale ved å intervjue tre elever – et lite N-studie med andre ord.

Som matematikklærer for alle elevene på 10. trinn kjente jeg alle sammen. For å holde en viss distanse til «forskningsobjektene» spurte jeg ikke elever jeg hadde kontaktlæreransvar for, men elever som hovedsakelig kjente meg som matematikklærer. Jeg konfererte med den andre matematikklæreren på trinnet og endte opp med å lage en liste over hvem det kunne være interessant å se arbeide med oppgaven. Hovedmomentet var at det skulle være elever som vi trodde ville prate og dele tankene sine underveis i prosessen. Deretter spurte jeg elevene og intervjuet de tre første som aksepterte å bli med.

3.2.3 Om oppgaven – muligens i teoridelen (for å kunne bruke den for å eksemplifisere)

Valg av oppgave var sentralt og jeg gikk noen runder for å finne en oppgave som stimulerte kravene mine/ jeg var fornøyd med. Elevene måtte først og fremst ha et utgangspunkt å resonnere fra og muligens kunne komme fram til en påstand, formodning, eller bevis. I tillegg ønsket jeg at oppgaven skulle være relevant til kompetansemålene for 10. trinn etter LK-20 også kvalitetsmessig. Ikke minst ville jeg at den skulle være ukjent for elevene.

Jeg vurderte å bruke en av de to siste oppgavene fra eksempeloppgavene til ny matematikkeksamen (Utdanningsdirektoratet, 2022), der elevene er oppfordret til å bruke 45 min på hver av oppgavene. Men selv om oppgaven passet studien godt, hadde den vært tilgjengelig en god stund og dermed var det uklart om den var ukjent for elevene. Etter et nettmøte med Matematikksenteret, som hadde utformet eksempeloppgavene på oppdrag fra utdanningsdirektoratet, forstod jeg at de hadde flere oppgaver i samme kategori og tok kontakt for å høre om jeg kunne få tilgang til en av disse. Etter at matematikkeksamen ble avlyst for 2022 fikk jeg tilsend én som hadde vært vurdert som eksamensoppgave (figur 2). En utforskende aritmetikkoppgave i hundrekart. Fordelen med denne oppgaven er at den er ukjent for elevene, utarbeidet av eksperter, prøvd ut på elevgrupper og vurdert som godkjent for eksamen for 10. klasse. Dermed passet den formålet med studiet mitt svært godt.

Figur 3 Oppgaven slik elevene fikk den presentert

I oppgaven presenteres elevene for et hundrekart – et 10x10 rutenett med heltallene fra og med 1, til og med 100, der tallene står i stigende rekkefølge, som vist på figuren over. Tre av rutene er markerte på den måten at de berører hverandre i hjørnene slik at tallene i rutene øker med én tier og én ener fra den ene ruta til den neste. Påstanden til Lydia er at «summen alltid blir tre ganger det midterste tallet, så lenge tallene er markert etter samme mønster». Oppgaven ber elevene om å undersøke om Lydias påstand stemmer. Og for å fjerne all spenning - påstanden stemmer.

Oppgaven gir elevene mulighet til er å undersøke flere talleksempler (de vil ikke finne noen som ikke stemmer med påstanden). De har også mulighet til å begrunne løsningen sin ved å bruke flere representasjoner, for eksempel tegne løsninger, de kan forklare med ord og de kan løse den algebraisk. La meg vise noen eksempler:

3.2.3.1 Talleksempler
Vi undersøker Lydias eksempel i tillegg til to andre vilkårlige eksempler (se figur under).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figur 4 Tre eksempler etter samme mønster

Ved å undersøke de tre eksemplene vil du se at påstanden stemmer for alle tre. Summen av de tre tallene dividert på tre blir det midterste tallet:

$13 + 24 + 35 = 72$

$72 : 3 = 24$

$27 + 38 + 49 = 114$

$114 : 3 = 38$

$64 + 75 + 86 = 225$

$225 : 3 = 75$

Å konkludere at påstanden stemmer ut fra konkrete talleksempler kan ikke ses på som bevis, men kan være eksempler på «naiv empirisme» jf. Balacheff (1988).

3.2.3.2 Generiske eksempler

1) Dersom du studerer sammenhengen mellom eksemplene kan du oppdage at det første tallet er 11 mindre enn det midterste og at det siste er 11 mer. Så ved å «flytte» 11 fra det siste til det første tallet ender du opp med tre av det midterste. Alternativt kan du se at -11 + 11 = 0:

$$13 + 24 + 35 = 72$$

$$(24 - 11) + 24 + (24 + 11)$$
$$(24 - 11 + 11) + 24 + (24)$$
$$24 + 24 + 24$$

$$27 + 38 + 49 = 114$$

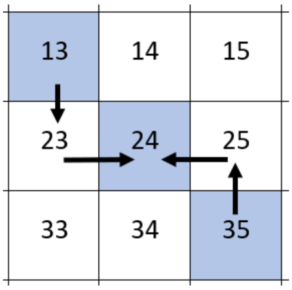
$$(38 - 11) + 38 + (38 + 11)$$
$$(38 - 11 + 11) + 38 + (38)$$
$$38 + 38 + 38$$

$$64 + 75 + 86 = 225$$

$$(75 - 11) + 75 + (75 + 11)$$
$$(75 - 11 + 11) + 75 + (75)$$
$$75 + 75 + 75$$

For å fortsette med Balacheff (1988) sin terminologi vil dette ligne «generiske eksempler».

2) Et annet generiske eksempel: Noen har god forståelse av titallsystemet og kan også forstå hundrekartet godt. Da kan det være innlysende at når du beveger deg vertikalt nedover så øker verdien med 10. Beveger du deg mot høyre, øker verdien med 1. Ned og til høyre blir dermed + 10 + 1 = + 11, opp og til venstre er omvendt – 10 – 1 = – 11 (se figur 4).



Figur 5 Bruk av hundrekartet for å vise at summen blir tre ganger det midterste tallet

Å forklare sammenhengen kan også være et sterkt argument for å vise at påstanden er sann.

3.2.3.3 Algebraisk bevis

Har du først kunnet vise et generisk eksempel trenger ikke veien å være lang for å utrykke sammenhengen for et vilkårlig heltall og dermed bevise påstanden formelt. Hvis du setter at et vilkårlig tall i hundrekartet som bokstaven n og sier at dette er det midterste tallet i mønsteret vil de tre tallene kunne uttrykkes og forenkles slik:

$$(n - 11) + n + (n + 11) = n + n + n - 11 + 11 = 3n$$

$$3n : 3 = n$$

I og med at n er det midterste tallet er summen av de tre tallene alltid tre ganger det midterste tallet.

Selv om jeg ikke forventer at alle elever på tiende trinn skal se alle aspektene i oppgaven, mener jeg oppgaven gir mulighet til vise matematisk resonnering på flere nivåer.

3.3 Gjennomføring av intervjuene og transkribering

Postholm og Jacobsen (2018) sier at kunnskapen blir skapt i møtet mellom forskeren og den intervjuedes synspunkt (Postholm & Jacobsen, 2018). Flere framholder forskeren som det viktigste instrumentet i kvalitativ forskning (Merriam, 2002; Nilssen, 2012). Nettopp fordi forskeren er tett på under intervjusituasjonen kan hen fange opp kommunikasjon som ikke er like lett å fange på opptak, det kan handle om kroppsspråk, mimikk eller å be om utdyping eller avklare misforståelser under selve intervjusituasjonen (Merriam, 2002).

Min umiddelbare opplevelse av intervjuene var positiv. Jeg var fornøyd med forberedelsene mine og støttet meg på strukturen jeg hadde planlagt. Jeg mener at rammen som ble satt var trygg, elevene fikk instruksjon og deretter tid til å sette seg inn i oppgaven. Jeg avventet også å svare på spørsmål elevene stilte. Lot det gå tid, ba dem lese teksten en gang til, ba om deres tolkning av det de leste og var generelt aktivt lyttende. I midtfasen forsøkte jeg å styre spørsmålene mer inn mot forskningsspørsmålet og gav tips om å skrive ned eller tegne, ba dem gjenta forklaringer og overbevise om at påstanden deres var sann. Avslutningene fulgt også den oppsatte planen med å takke for intervjuet og minne om hensikten med studien og deres rett til å trekke samtykket.

Jeg transkriberte intervjuene like i etterkant. Nilssen (2012) løfter fram tre fordeler ved at forskeren transkriberer intervjuene sine selv. For det første er transkripsjonen en del av analyseprosessen og forskeren kan få ideer og tanker allerede da. I tillegg blir forskeren godt kjent med datamaterialet og som det tredje kan det være en fordel at den som transkriberer kjenner konteksten og fagfeltet det forskes på (Nilssen, 2012, s. 47-48). Jeg hadde ikke utviklet koder for transkripsjonen i forkant, men skrev ikke-verbal informasjon i parenteser. For eksempel lengde på pauser i parentes med sekunder – (pause 6-7s), dersom eleven ler – (ler), dersom eleven skriver – (skriver). Transkripsjonene førte jeg i tabeller i word, med presise tidskoder.

Oppdagelsen under transkripsjonene var at jeg som forsker ikke hadde gjennomført arbeidet så grundig som jeg kunne ha tenkt meg. Jeg oppdaget at jeg hadde avbrutt noe som kunne virke å være et godt resonnement fra den ene deltakeren. Fant flere tilfeller der jeg burde ha bedt elevene om å utdype mer. Som uerfaren forsker så jeg i etterkant sekvenser der jeg burde ha lyttet til eleven, heller enn å forsere intervjuet.

3.4 Kodingsprosessen

Modellen til Jeannotte og Kieran gir grunnlag for å kunne undersøke elevers matematiske resonnering og sett i retrospekt kan det godt hende jeg hadde valgt å kun forholde meg til modellen deres i denne studien og heller velge en mer deduktiv inngang i kodingsarbeidet. Slik var det likevel ikke. Jeg deltok på en forelesning med Vivi Nilssen i forbindelse med masterstudiet, der hun snakket entusiastisk om åpen koding, grounded theory og konstant komparativ analyse (Nilssen, 2020). Jeg ble umiddelbart inspirert av grunntanken med å analysere datamaterialet induktivt. Det er noe fristende med å være åpen i møtet med datamaterialet og muligens avdekke noe uventet, å grave fram en skatt i eget forskningsmateriale, for å utrykke meg pompøst. Etter hvert som jeg skulle finne kjernekategorier, så jeg likevel at det jeg fant, i hovedsak stemmer godt overens med prosessene Jeannotte og Kieran (2017) viser i modellen sin. La meg fortelle om prosessen:

Etter at intervjuene var transkriberte overførte jeg word-dokumentene og skanningene av oppgave- og kladdeark til NVivo som er et program for PC og Mac som tradisjonelt er designet for bruk til å organisere, kode og analysere kvalitative data. Selv om datamengden i denne studien er liten, og behovet for organisering begrenset, så brukte jeg NVivo som verktøy i gjennomføring av all koding og gjennom hele analyseprosessen. Jeg startet med å kode åpent, det vil si at jeg forsøkte å møte dataene mine med så vidt perspektiv som mulig. Jeg gikk gjennom transkripsjonene og kodet nærmest setning for setning – det jeg trakk ut som essensen i de ulike ytringene. Kodene formulerte jeg etter hvert som jeg bevegde meg nedover i dokumentene. På denne måten utviklet antallet koder seg i et voksende, men etter hvert rotete hierarki. Etter hvert som jeg oppdaget nye koder i ett dokument, var det naturlig å lete etter tilsvarende funn i de andre dokumentene. Dette ligner på den åpne kodingsprosessen Nilssen (2012) beskriver når hun skriver om åpen koding i konstant komparativ analyse: «Koding er en fram-og-tilbake-prosess med gjentatte gjennomlesinger av materialet» (Nilssen, 2012).

Navn på kodene utarbeidet jeg underveis. Noen hadde jeg notert allerede under gjennomlytting av lydfilene. For eksempel «Leser oppgaven høyt» og «Omformulerer oppgaven» fordi jeg hadde merket meg at hvordan elevene forsøkte å forstå hva oppgaven gikk ut på. Andre navn på koder formulerte jeg etter hvert som gikk gjennom transkripsjonene. For eksempel merket jeg meg at elevene hadde lange pauser der de tenkte. Derfor lagde jeg koden «Pauser» for pauser lengre enn 5 sekunder. Det virker å være allment kjent at å møte dataene med helt objektive øyne er en utopi og det er jo ikke til å unngå at jeg var farget av erfaringene mine og teorien jeg hadde som bakteppe for studien. Derfor brukte jeg navn fra MR-prosessene (Jeannotte & Kieran, 2017) som koder på ytringer der jeg fant spor av disse, selv om jeg også brukte dette rammeverket som briller for egne kodingsgjennomganger.

Etter at jeg hadde kodet alle filene en første gang, studerte jeg lista over koder og forsøkte å sette dem i kategorier og se sammenhenger mellom koder og kategorier. Dette ligner på Nilssen (2012) sin beskrivelse av aksial koding *«der kategorier blir relatert til sine subkategorier slik at forklaringene til fenomenet blir mer presise og fullstendige.»* (Nilssen, 2012, s. 79). Jeg hadde ikke sett for meg hvor syklisk denne delen av analysearbeidet ble. Dersom jeg slo sammen noen koder eller endret navn på dem, fant jeg det nødvendig å gå gjennom" datamaterialet på nytt for å se om det var flere forekomster av samme fenomen. Det samme gjaldt for gjennomgangene der jeg fokuserte på MR-prosessene fra modellen til Jeannotte og Kieran (2017). Et eksempel er kodene «Bekrefter» og «Kontrollerer» fra den første gjennomgangen, som jeg samlet under koden for MR-prosessen «Rettferdiggjøre».

Nilssen (2012) beskriver (det analoge) analysearbeidet hun selv gjør med utskrifter av transkripsjoner som hun skriver på med penn og klistrer gule lapper med tanker og refleksjoner rundt om i dokumentene. Disse dokumentene lagres igjen i permer. Hun poengterer hvor viktig det er å arbeide systematisk og holde god orden i forskningsmaterialet (Nilssen, 2012, s. 84-85). Det samme gjør, for øvrig Postholm og Jacobsen (2018). I den forbindelse vil jeg slå et slag for digitalisering og bruk av NVivo (eller lignende programvare). Digitalt er det enkelt å holde god orden i materialet. Det er ingen gule lapper som forsvinner ut av ringpermen, for å si det slik. Tanker og refleksjoner kan noteres som memoer eller annotasjoner og kobles mot ulike koder og filer. Det er enkelt å endre navn på en kode eller slå sammen koder. En kan lagre kodene en har, for så å forsøke å gjennomføre prosessen flere ganger og enkelt ha tilgang til alle versjonene. Den samme muligheten til å gjennomføre prosesser flere ganger, benyttet jeg da jeg drev aksial koding. Da opprettet jeg mapper i NVivo med navnene «Første runde kategorisering» «Andre runde kategorisering» og så videre. Slik kunne jeg til enhver tid, med et klikk, se på forrige versjon og vurdere hva jeg fant viktig å ta med videre.

Selv om analyseprosessen er i gang helt fra første intervju, er det en tid for det som kalles sluttanalyse (Nilssen, 2012). Dette var etter at jeg hadde laget kategorier og avdekket noe som kunne kalles sentrale funn. Også her var NVivo til god nytte, der jeg leste gjennom memoene mine og laget koblinger mellom memoer, koder og sitater. Vivi Nilsen beskriver denne prosessen der hun noterer på A3-ark, finner nye spørsmål, går tilbake i datamaterialet og skriver på A3-ark igjen (Nilssen, 2012, s. 87-89). Jeg vil ikke påstå at digitale løsninger er overlegent i alt. Du kan for eksempel ikke legge mange dokumenter utover gulvet og se på dem samtidig – en skjerm gir ikke nødvendigvis godt overblikk. Likevel ga NVivo meg oversikt over datamaterialet og tankene jeg hadde gjort gjennom prosessen. Etter hvert som jeg snevret meg inn mot funnene mine, opplevde jeg å ha god oversikt.

Valget av sentrale funn var utfordrende. Gjennom den åpne kodinga oppdaget jeg flere momenter jeg fant interessante og som jeg tenkte kunne være funn verdt å diskutere – mulig gull, altså. Likevel valgte jeg å se bort fra dem til slutt og unnlot dem fra studien. Et eksempel er pausene i intervjuene. Lange pauser der jeg nær kunne se tankene kverne rundt i hodene på elevene. Spennende og egentlig sentralt fordi det er jo akkurat denne tenkinga som er matematisk resonnering. Jeg lekte med tanken om å undersøke hva som var sagt før disse pausene og hva som ble sagt i etterkant, men slo det fra meg. Hva som skjedde inni hodene til elevene hadde jeg uansett ikke data på – dermed så jeg bort fra disse kodene da jeg utformet hovedkategoriene. Et annet eksempel er kodene *glad*, *mestringfølelse* og *blir begeistret,* som jeg samlet under *Glede over mestring*. Selv om dette godt kan være kjennetegn hva elevene opplever under aktiviteter som stimulerer MR, og dermed kan si noe hva som kjennetegner elevenes MR. Dette går derimot under et annet teoriparadigme enn det jeg hadde valgt for studien, så jeg valgte det bort for denne også.

3.5 Studiens troverdighet

Troverdighet handler om å vise fram forskningsprosessen slik at leseren kan vurdere at resultatene ikke er feilaktige (Nilssen, 2012). Jeg har forsøkte gjennom hele studien å være så transparent jeg får til. Rammeverket jeg har basert studien på består av fagfellevurderte artikler. Jeg har forsøkt å vise hvordan planlegging og gjennomføring av studien foregikk og delt ærlig av refleksjonene mine underveis. I analysedelen har jeg forsøkt å vise empirien jeg trekker ut funn fra i og jeg har forsøkt å forklare mulige forbehold – for eksempel utfordringen med få deltakere i studien og i hvilken grad det er mulig å generalisere resultatene. Dette tar jeg forbehold om i konklusjonen.

Postholm og Jacobsen (2018) hevder at forskeren selv må reflektere over sin påvirkning. Jeg som forsker påvirker deltakerne. Ett eksempel er relasjonene mellom meg og elevene. I utgangspunktet har jeg tenkt at det er trygt og at det ville være gunstig for at elevene skulle tørre å dele tankene sine. Ikke være redde for å gjøre feil. Men det er jo ikke sikkert at elevene opplever relasjonen på samme måte som meg. Videre kan jeg ha forforståelser og oppfatninger om disse elevene som farger tolkningene jeg gjør av det som skjer underveis i intervjuet, slik at jeg legger til eller trekker fra det som er deres virkelighet – altså at jeg tror de resonnerer mer eller mindre enn det elevene faktisk gjør i **sin** virkelighet.

Merriam (2002) hevder at heller enn å forsøke å fjerne forutinntatthet, bør en avdekke subjektivitet og følge med på hvordan den eventuelt farger innhenting og tolkning av data (Merriam, 2002, s. 5) Utarbeidelsen av intervjumalen var gjort med hensikt slik at gjennomføringen av intervjuene skulle være så lik som mulig.

3.6 Etiske betraktninger

I denne studien har jeg etter beste evne forholdt meg til de forskningsetiske retningslinjene som er utarbeidet av De nasjonale forskningskomiteene (NESH, 2021). Dette innebærer at jeg har søkt og fått samtykke fra NSD om å gjennomføre studien (vedlegg 2) og innhentet skriftlig samtykke fra elevene som deltok og deres foresatte (vedlegg 3). Skolen ved rektor var også informert.

Retten til å trekke samtykket på et hvert tidspunkt ble også presentert i starten og avslutninga av intervjuene. Det ligger et særskilt ansvar når deltakerne i studien er under myndighetsalder og jeg har forsøkt å forklare deltakerne de forventningene og kravene som ligger til meg som forsker. I tillegg har jeg tatt forholdsregler for å sikre data og anonymisere deltakerne.

Lydopptakene er gjort med en opptaksenhet lånt fra NTNU og overført til kryptert minnepinne – denne har vært holdt innelåst med unntak av da jeg har hørt på opptakene. Opptakene slettes i henhold til avtalen med NSD.

Under transkripsjonen anonymiserte jeg deltakernes navn til det jeg anser som kjønnsnøytrale navn.

4 Analyse

Hensikten med denne studien er å finne ut hva som kjennetegner elever på 10. trinn ved en skole sin matematiske resonnering i møte med en utforskingsoppgave i eksamensformat. I dette kapittelet legger jeg fram analysen av datamaterialet strukturert etter de funnene jeg har gjort. Jeg har, som beskrevet i forrige kapittel, brukt åpen koding i arbeidet med datamaterialet, samt kodet etter modellen til Jeannotte og Kieran (2017). Arbeidet med å kategorisere førte meg fram til tre hovedkategorier jeg mener kjennetegner disse elevenes matematiske resonnering og som kan indikere hva som kjennetegner MR ved skolen. *MR-prosesser relatert til søken etter likheter*, *MR-prosesser relatert til validering* og *Oppdagelse av sammenhenger mellom flere mønstre*

Jeg starter med å ta utgangspunkt i Jeannotte og Kieran (2017) sin modell og beskrive MR-prosessene jeg mener å ha avdekket under intervjuene. Deretter vil jeg komme inn på elevenes bevisførsel, før jeg trekker fram to andre interessante funn som ble synliggjort under analysearbeidet.

Å *eksemplifisere* er den niende MR-prosessen og brukes som støtte for de åtte andre (Jeannotte & Kieran, 2017). Jeg starter med å nevne den først fordi den er fremtredende i alle faser av elevens arbeid med oppgaven. Det er tydelig i alle intervjuene – der elevene gjennomgående bruker eksempler i hele arbeidet med oppgaven. Dette gjelder alle faser av oppgaveløsninga, helt fra start til slutt. Elevene bruker eksempler fra første undersøkelse og til siste begrunnelse. Når jeg viser de andre MR-prosessene i teksten videre, vil jeg skrive at elevene bruker eksempler. Hvert bruk av eksempler er dermed å se som at MR-prosessen *eksemplifisere* brukes som støtte for de andre MR-prosessene.

4.1 MR-prosesser relatert til søken etter likheter og ulikheter

Jeg mener å ha gjort funn av alle MR-prosessene Jeannotte og Kieran (2017) beskriver som relaterte til søken etter likheter og ulikheter. *Sammenligne*, *Identifisere mønster*, *Formulere en formodning*, *Generalisere* og *Klassifisere*. Det er unaturlig å skulle beskrive disse prosessene hver for seg da de i opptrer overlappende i datamaterialet. La meg vise Nore sitt arbeid etter at hen har lest oppgaven:

00:01:51 Nore	Så 24 x 3 er det samme som 13 + 24 + 35? Da skal vi finne ut det.	
00:01:58 Intervjuer	Så du sjekker ut nå? Med kalkulator?	
00:02:00 Nore	Yess. 13 pluss – 24 pluss 35 – 72. 24 ganger 3 – er også 72. (Sier mens hen taster på kalkulatoren). Så da stemmer det iallfall på disse tre der. Og vi skulle finne ut om det stemte på absolutt alle?	

Tabell 1 Nore eksemplifiserer

Som vi ser av eleveksempel 1 har eleven forstått oppgavens intensjon – å undersøke om «*summen av de tre tallene alltid er tre ganger det midterste tallet*». Hen tar først tak i eksempelet som er markert i oppgaven og ser at påstanden stemmer for dette eksempelet. Her etableres starten av et narrativ – eleven har undersøkt ett eksempel og stiller spørsmål ved om påstanden (hypotesen) stemmer for alle varianter: *«Så da stemmer det iallfall på disse tre der. Og vi skulle finne ut om det stemte på absolutt alle?»*

Nore diskuterer med seg selv om at hen bør prøve med et nytt eksempel for å undersøke om påstanden stemmer for dette også:

00:02:30 Nore	Ja, jeg tror det var det. Jo det var det jeg kom på ... (utydelig). Så lenge det er markert dette samme mønsteret. Så disse tre og disse tre og disse tre (peker på	

	mønsteret fra oppgaven gjentatte ganger på hundrekartet) og absolutt alle, skulle stemme på samme måte, da.	
00:02:46 Intervjuer	Ja, det er slik jeg leser det også.	
00:02:53 Nore	Ehh - Jeg tenker ehh – det første jeg tenker da liksom er bare å prøve ut forskjellige, men det er sikkert noe annet, formel eller noe slikt som jeg kan gjøre som viser at det stemmer, da. Men La oss prøve noen av de høye tallene da. 78 + 89 + 100. 267. Og 89 x 3 er også 267.	
00:03:28 Intervjuer	Stemmer det da?	
00:03:28 Nore	Så det stemmer i iallfall på noen av de lavere og høyere tallene.	

Tabell 2 Nore sammenligner

I oppgaveteksten er det allerede foreslått en hypotese (at summen alltid blir tre ganger det midterste tallet, så lenge de tre tallene er markert etter samme mønster), og elevenes utforsking skal teste denne hypotesen. I eleveksempel 2 *sammenligner* eleven et nytt eksempel med det første og konkluderer at påstanden stemmer for begge disse eksemplene. Etter først å ha pekt med fingrene på flere mulige eksempler i hundrekartet velger hen 78 – 89 – 100 og ser at påstanden også stemmer her. Eleven har *identifisert et mønster* ved å bevise at påstanden stemmer for to eksempler. Narrativet eleven har begynt å se for seg, endrer dermed karakter i og med at det er en gjentakende relasjon mellom de to eksemplene. En forekomst kan være tilfeldig, men to… Den siste setningen viser imidlertid at eleven tar forbehold om at hen kun har sammenlignet to eksempler med ytringen: *«Så det stemmer i iallfall på noen av de lavere og høyere tallene.»* Det viser at hen ikke ser på påstanden som sann enda, og undersøker den ytterligere.

Hen fortsetter med å undersøke tallene 78 – 89 – 100 og leter etter en årsak til at påstanden stemmer for de to eksemplene og begynner etter hvert å *formulere en formodning*:

00:03:43 Nore	Så 100. Så flyttet over tall fra 100 til 78. Så vil det også gjøre slik at det blir 89 – 89 – 89 da. Tenker jeg med en gang. Og jeg tror det er det på alle sammen. At hvis jeg flytter over tallene fra her - over til det minste tallet, altså fra det høyeste til det minste. Så vil jeg alltid få det midterste tallet tre ganger. Som blir det samme som det midterst gange tre, da.	

Tabell 3 Nore formulerer en formodning

Hen studerer altså eksempelet 78 – 89 – 100 og undersøker om hen kan subtrahere noe fra 100 og legge det til 78 og på den måten få tre like verdier, noe hen får til med 89. Videre tror hen denne måten kan stemme for alle tall etter samme mønster og nærmer seg en begrunnet hypotese – en *formulering av en formodning*: *«Og jeg tror det er det på alle sammen. At hvis jeg flytter over tallene fra her - over til det minste tallet, altså fra det høyeste til det minste. Så vil jeg alltid få det midterste tallet tre ganger. Som blir det samme som det midterst gange tre, da.»* Elevens narrativ er igjen endret – han ser påstanden som sannsynlig.

Denne *formodningen* undersøker hen igjen med nye eksempler og oppdager at alle eksemplene har tilfelles at det minste tallet er 11 mindre enn det i midten og det største tallet er 11 mer enn det i midten:

00:04:18 Nore	Da tar jeg 13+24+35. Så da må jeg ta fem, seks, elleve . Hvis jeg tar 35 – 11 og 13+11=24. Og 24 er bare 24, da. Jeg kan gjøre det med et annet eksempel, da. 72+83+94. For å få 83 på 72, må jeg plusse til 11.	

	Å ja, det er 11 på alle, ser det ut som, da (tydelig fornøyd med oppdagelsen). Eller, ja... 72+11=83, 94-11=83, det også. Så har vi jo den tredje 83. Så har vi 83 gange 3 som blir svaret der også. Mhm..	
00:05:43 Nore	Vi kan prøve enda en for å sikre oss om det er 11 på alle som det skal bli trekt fra. Vi tar åtte, nitten og tredve. 8+19+30. 11 fra 30 da har vi 19, minus elleve ja og 8 pluss 11. Da har vi også 19.	
00:06:16 Nore	Så det ser ut som om det er 11 jeg må trekke fra det høyeste tallet og legge på det laveste og da får vi tre av det samme tallet – som er det i midten.	

Tabell 4 Nore identifiserer et mønster

Gjennom å sammenligne flere eksempler finner hen dermed en likhet som gjelder for alle eksemplene – en ny identifisering av et mønster: «Så det ser ut som om det er 11 jeg må trekke fra det høyeste tallet og legge på det laveste og da får vi tre av det samme tallet – som er det i midten.»

Videre forsøker hen å finne ut hvorfor tallet 11 er så sentralt i oppgaven:

00:07:14 Nore	Mhm... (Pause ca 5 sekunder) Mønsteret blir jo nedover og slik, da. Så det vil alltid være 11 mer på den eller på den. (Peker på hundrekartet, mens hen forklarer). Fordi den står én til høyre og nedover for den. For når det står en slik rekke, en til ti her, og så elleve til tjue og så 21 til tredve. Så vil det alltid være elleve mer fra tallet her og skrått nedover der, da – og så alltid elleve mer igjen. På grunn av rekkefølgen det står i, da. Og da vet vi jo alltid at hvis vi tar elleve fra den og flytter over dit, så vil vi få tre av det samme tallet. Og det stemmer vel da over alle sammen fordi de står i rekkefølge, da – med ti på hver rekke. (Pause 6-7 sekunder)	

Tabell 5 Nore generaliserer

I eleveksempel 5 ser vi at eleven studerer egenskapene til hundrekartet og slutter at neste tall alltid vil være 11 mer enn det forrige: *«Så vil det alltid være elleve mer fra tallet her og skrått nedover der, da – og så alltid elleve mer igjen. På grunn av rekkefølgen det står i, da.»* Hen fjerner seg fra de konkrete eksemplene og *generaliserer*. Hen begrunner ikke dette med titallsystemet og at en flytning ett steg til høyre er en økning på 1 og ett steg nedover en økning på 10 – til sammen 11. Men ser det tilsynelatende kun ut fra hundrekartet hen har foran seg. Likevel konkluderer hen med at påstanden stemmer: *«Og da vet vi jo alltid at hvis vi tar elleve fra den og flytter over dit, så vil vi få tre av det samme tallet. Og det stemmer vel da over alle sammen fordi de står i rekkefølge, da – med ti på hver rekke.»*

4.1.1 Oppsummering av MR-prosesser relatert til søken etter likheter og forskjeller

I tabell 1-5 mener jeg å ha avdekket de fleste MR-prosessene som er relaterte til søken etter likheter og forskjeller. I og med at eleveksemplene er gjengitt som fortløpende utdrag fra ett intervju, mener jeg også at de gir et bilde av hvordan én elev kan bevege seg mellom de ulike prosessene og utvikle narrativer gjennom å sammenligne – identifisere mønster – formulere en formodning – sammenligne igjen – identifisere mønster på nytt – generalisere. De andre elevene brukte noe lengre tid, men viste underveis lignende fremgangsmåter som Nore. Forløpet i starten var omtrent slik for alle: Oppgaven har en påstand – en hypotese elevene må teste. Alle elevene starter med å regne ut talleksempelet fra oppgaveteksten og ser at påstandene stemmer. Deretter velger de et nytt eksempel og regner ut det – de *sammenligner* med det første. Etter dette steget kan det se ut som om elevene *identifiserer et mønster* – at det er likheter mellom de to eksemplene. Likevel regner alle et tredje eksempel før de uttaler at de tror påstanden stemmer. De *formulerer en formodning* om at summen av de tre tallene alltid er tre ganger det midterste tallet.

Videre oppdager alle, gjennom å *sammenligne* eksemplene, at det er minste tallet er 11 mindre enn det i midten og at det største er 11 mer. På nytt *identifiserer de et mønster*. Det kan se ut som om alle oppfatter strukturer i hundrekartet, og kan begrunne hvorfor tallene er 11 mer eller 11 mindre enn det i midten. Nå tar intervjuene ulike retninger og det er færre forekomster av MR-prossessen generalisere i intervjuene med Toni og Rudy enn hos Nore. Den niende MR-prosessen, *eksemplifisere,* deriomot brukes, av alle, som støtte for de andre prosessene, på den måten at elevene enten regner med talleksempler eller peker med fingrene for å vise eksempler på hundrekartet. Det er også mulig å peke på prosesser relatert til validering i eleveksempel 1-5, men dette omtaler jeg i neste delkapittel.

4.2 MR-prosesser relatert til validering

MR-prosesser som er relaterte til validering handler i stor grad om prosesser som er med på å endre den epistemiske verdien til et narrativ. I forrige underkapittel har vi sett på prosesser der eleven, gjennom flere MR-prosesser, utviklet narrativer de mente var sannsynlige. Videre skal vi dukke inn i hvordan de validerer påstandene og endrer den epistemiske verdien til narrativene sine fra sannsynlig til mer sannsynlig eller sann.

4.2.1 Rettferdiggjøre

Toni starter med å undersøke eksempelet fra oppgaven og slår seg i første omgang til ro med at påstanden stemmer. Etter å bli oppfordret til å lese oppgaven én gang til vil hun derimot undersøke flere eksempler.

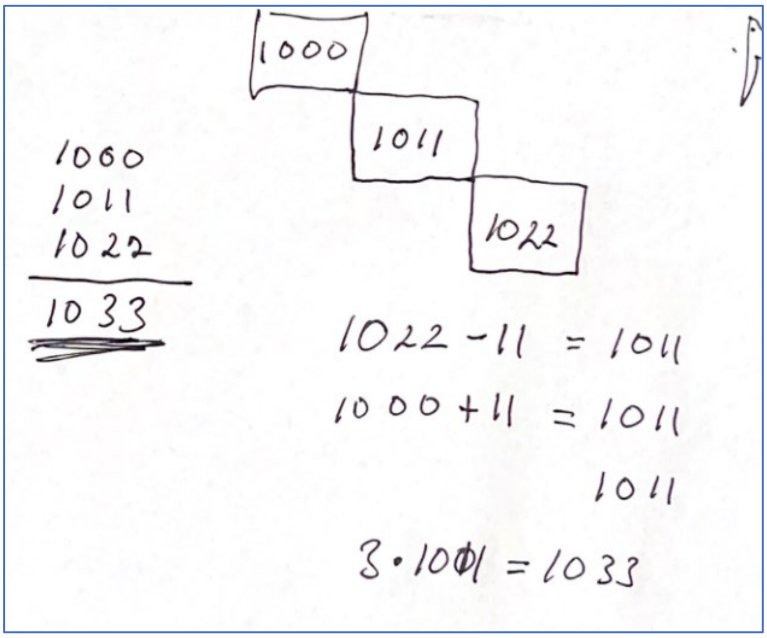
00:04:38 Toni	Så jeg kan ta samme hva for tall det er. Så hvis jeg tar 23, 34, 45, for eksempel, så blir det det samme som 34 gange 3?	
00:04:47 Intervjuer	Undersøk da!	
00:04:48 Toni	(Pause – summerer de tre tallene på kalkulator) Det er 102. Og hvis jeg tar 34 gange 2, nei 34 gange 3 … 102. Ja, da stemmer det.	
00:05:09 Intervjuer	Kan ikke du skrive ned også, slik at jeg har det. Hva du gjør. For nå undersøker du.	
00:05:27 Toni	(skriver med blyant) Haha (ler) Veldig fin og bein marg.	
00:05:29 Intervjuer	Flott marg.	
00:05:30 Toni	(skriver ned regnestykkene 30-40 sekunder) Hvor mange ganger skal jeg gjøre det? Har det noe å si?	
00:06:10 Intervjuer	Ja, men tenker du at nå vil det stemme på alle, tror du?	
00:06:18 Toni	Ehh. Hvis jeg tar 66, 77 og 88, da. Kalkulator (ler). Blir 231. Og da skal 77 gange 3 bli 231, da. Og det blir det. Og da vil jeg egentlig si at det stemmer. For det når har jeg har prøvd tre helt tilfeldige tallrekker og det stemmer, på alle.	

Tabell 6 Toni – naiv empirisme

Toni er overbevist om at påstanden stemmer etter å ha undersøkt tre eksempler: «*Og da vil jeg egentlig si at det stemmer. For det når har jeg har prøvd tre helt tilfeldige tallrekker og det stemmer, på alle*.» Dette mener jeg er et eksempel på hvordan en elev kan rettferdiggjøre påstanden – narrativet om at summen alltid er tre ganger det midterste tallet. Da hen har undersøkt tre tilfeldige eksempler og den epistemiske verdien til narrativet endres fra sannsynlig (etter ett eksempel som stemmer) til mer sannsynlig (etter tre eksempler som underbygger narrativet). Dette ligner på det Balacheff (1988) kaller naiv empirisme, når eleven trekker slutninger basert på noen få eksempler. Jeannotte og Kieran (2017) støtter seg på blant annet på (Sfard, 2008) og kommognisjon når de viser til den matematiske diskursen og matematikksamfunnet en slik diskurs foregår. Det kan være at i vårt matematikksamfunn (vår klasse) tilsier metareglene for diskursen at tre eksempler som underbygger påstanden er nok til å rettferdiggjøre at den er gyldig hele tiden.

4.2.2 Bevise

Nore starter med å *rettferdiggjøre* på samme måte som Toni. Hen argumenterer for at påstanden er gyldig etter noen få eksempler. Samtidig viser han til strukturer i selve hundrekartet. Etter å ha blitt utfordret av intervjuer, velger hen et eksempel utenfor hundrekartet (se figur 5 og tabell 10):



Figur 6 Nore sitt avgjørende eksperiment

Nore tegner mønsteret for et tenkt eksempel utenfor hundrekartet med talleksempelet 1000 – 1011 – 1022 forsøker å forklare hvorfor det er vilkårlig hvor i hundrekartet mønsteret blir plassert.

00:08:14 Intervjuer	Eh. Hvis du tenker at du skal overbevise noen om dette, da?	
00:08:20 Nore	Mhm	
00:08:21 Intervjuer	Og som påstår at når du kommer langt uti. På tusen og noe slikt. Så kan det hende at det ikke stemmer?	
00:08:27 Nore	Ja	
00:08:28 Intervjuer	Så kan det hende at det ikke stemmer? Er det noe? Har du sjanse til å kunne? Hvordan kan du liksom overbevise dem, da – om at det alltid gjelder? For du peker jo på et fint mønster nå.	
00:08:43 Nore	Mhm Det vil jo bare være det med at det. Siden det er ti på den rekka hele tiden. Så er jo. Du får jo akkurat ti pluss, hvis du går nedover, da. Det er alltid ti mer nedover. Så når du går én ned og én til siden så blir det elleve mer uansett hvilket tall du er på. Så når du er på tusen. Rett under blir det da tusen og ti – og én til, så blir det tusen og elleve. Og tusen og elleve og elleve til, blir tusen og tjueto. Så det kan være tusen, tusen og elleve og tusen og tjueto. Og om du tar 1022 minus 11, og	

	flytter over til den første 1000 , vil du få 1011, 1011, 1011. Og 1011 ganger 3 er også det samme som det, så (viser til utregning hen har gjort på ark).	

Tabell 7 Nore - eksempel på generisk eksempel

Dersom vi kun ser på dette talleksempelet kan en vurdere at eleven gjennomfører det Balacheff (1988) kaller det endelige eksperimentet – altså at hen tester et vilkårlig eksempel langt ute i rekka. Her er eksempelet 1000 – 1011 – 1022 og som en kan se av utregningene (figur 5) og det eleven sier: «Og om du tar 1022 minus 11, og flytter over til den første 1000 , vil du få 1011, 1011, 1011. Og 1011 ganger 3 er også det samme som det, så.»

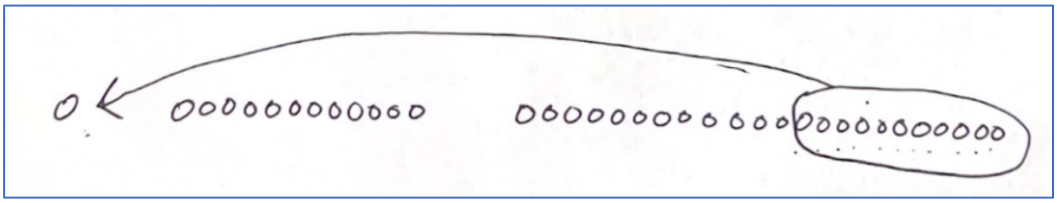
Nore gjør mer enn det og forklarer med strukturene i hundrekartet at dette alltid er gyldig (tabell 10): «*Siden det er ti på den rekka hele tiden. Så er jo. Du får jo akkurat ti pluss, hvis du går nedover, da. Det er alltid ti mer nedover. Så når du går én ned og én til siden så blir det elleve mer uansett hvilket tall du er på.*» Hen understreker dermed at påstanden er gyldig for alle tall i hundrekartet ved å vise nettopp til strukturene i hundrekartet; verdien øker med ti for hvert steg nedover og med én for hvert steg til høyre. Her generaliserer Nore og rettferdiggjør formodningen på en måte som kan minne om det Balacheff (1988) kaller generisk eksempel – altså et typisk eksempel der en ser på egenskapen og strukturene til eksempelet (Balacheff, 1988).

I skolesammenheng mener jeg Nore sitt generiske eksempel kan karakteriseres som bevis. Når Nore begrunner ut fra strukturene i hundrekartet ligger det et potensiale for teoretisering. I tillegg kan narrativene hen bygger på (for eksempel oppbygginga av hundrekartet og sammenhengen mellom tallene i mønsteret) være akseptable for matematikksamfunnet (klassen). Jeannotte og Kieran (2017) holder begge deler som forutsetninger for å kunne bevise.

Alle elevene fikk spørsmål om det var mulig å tegne en begrunnelse for påstanden, men det var kun Nore som endte opp med å lage en tegning. Hen starter med å tegne baller. Se dialogen i tabell 11 og tegninga i figur 6:

00:09:32 Intervjuer	Går det an å tegne dette på noe vis?	
00:09:40 Nore	Mhm, tja... Kan..	
00:09:43 Intervjuer	For du kommer med konkrete talleksempler, sant? Så lurer jeg på om det går an å se på dette på en generell måte. Slik at det vil gjelde for alle tall, da?	
00:09:56 Nore	Jeg kan jo tegne opp for eksempel én ball og så12 baller og så 23 baller? Eller tenker du noe annet?	
00:10:04 Intervjuer	Nei, jeg vet ikke. Jeg har ikke løste den selv.	
00:10:16 Nore	Jeg kan prøve på noe slik da. Hvis jeg har én ball - så blir det 12 på denne og 23... (tegner baller som representerer tallene) Da har vi det i hvert fall , da. Så hvis vi tar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 fra disse her (ringer rundt 11 av de 23 ballene han har tegnet som representasjon for 23) - tror det var disse og flytter dem over dit da (tegner pil til mengden med én ball) til den første som bare hadde én på seg. Så vil vi få like mange i alle av dem. Men dette var bare med ett eksempel igjen, da. Men det vil jo være det samme med alle, for det vil være elleve mer på hver av dem. Den andre vil ha elleve mer enn den første og den tredje vil ha elleve mer enn den andre.	

Tabell 8 Nore sin forklaring til tegning av generisk eksempel



Figur 7 Nore sin tegning av generisk eksempel.

Eleven tegner altså tre grupper med baller. Den første med én ball, den neste med 12 og den siste med 23 baller. Deretter ringer hen rundt 11 av de 23 og viser med en pil hvordan ballene kan flyttes fra den største gruppen til den minste, med resultat at det blir tre grupper med like mange baller i hver. Hen kommenterer at tegninga kun representerer ett talleksempel, men understreker at prinisippet gjelder uansett: «*Men dette var bare med ett eksempel igjen, da. Men det vil jo være det samme med alle, for det vil være elleve mer på hver av dem. Den andre vil ha elleve mer enn den første og den tredje vil ha elleve mer enn den andre.*» Dermed er dette også nært å være et bevis i skolesammenheng, et generisk eksempel, som Balacheff holder under paraplyen pragmatiske bevis (Balacheff, 1988).

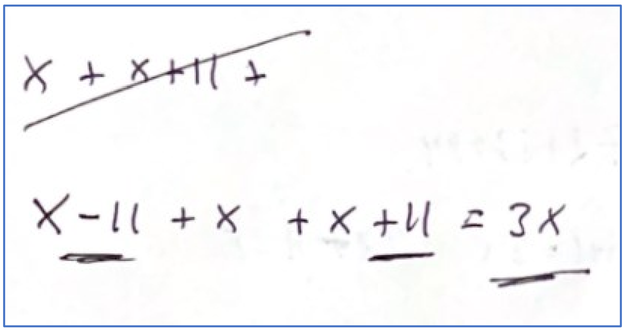
4.2.3 Bevise formelt

Det var ingen av elevene som, på egen hånd, kom på å bruke algebraiske uttrykk for å bevise påstanden. Likevel fant både Nore og Toni fram til slike uttrykk etter at de fikk spørsmål om det. Først Elev 1 sitt forslag:

00:11:43 Intervjuer	Hvis jeg utfordrer deg til å tenke bokstaver her nå. Går det an å finne en algebraisk løsning?	
00:11:54 Nore	Ehm... Kan starte... Hvis det første tallet blir X, da. X... ehm X+..., x+11.. På en måte. X + X+11... Eller kanskje det midterste tallet bør være … Ja tror det midterste tallet bør være X, jeg – for det gjør det lettere. Så X-11, på den første, da – pluss X – pluss X+11, da. For det tredje tallet er X+11, det midterste tallet er bare X og det første tallet er da X-11. Og hvis vi legger sammen disse tallene, så vil vi få -11+11 er jo 0 og da står vi igjen med tre X-er. Som er det vi fant ut i sted. At hvis vi flytter over 11 dit eller tar bort begge 11-erne fordi det er minus på den ene og pluss på den andre, så står vi med tre av det samme tallene – eller det midterste tallet gange 3. Ja...	

Tabell 9 Nore - algebra

Når Nore blir utfordret til å finne en algebraisk løsning på oppgaven, starter hen med å kalle det første tallet i mønsteret for X, og det neste tallet X+11, men ombestemmer seg og velger å kalle tallet midten for X i stedet: *«Hvis det første tallet blir X, da. X, ehm, X… +, x+11.. På en måte. X + X+11... Eller kanskje det midterste tallet bør være … Ja, tror det midterste tallet bør være X, jeg… for det gjør det lettere.»* Deretter skriver hen ganske raskt X-11 + X + X+11 = 3X (se figur 7).



Figur 8 Nore - algebraisk uttrykk

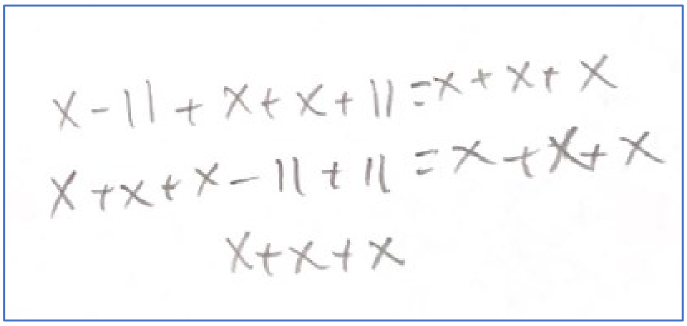
Nore forklarer mens hen viser til det hen har skrevet på arket (figur 7) at -11 + 11 = 0 og at når en summerer de tre uttrykkene står en igjen med 3X som er det samme som tre ganger det midterste tallet. Senere i intervjuet forklarer Nore at X kan stå for hvilket som helst tall i hundrekartet og at hen ser på dette som et godt matematisk argument. Jeg mener Nore sitt arbeid med det algebraiske uttrykket kan være et eksempel på MR-prosessen *bevise formelt*. I følge Jeannotte og Kieran (2017), skal formelle bevis følge en deduktiv struktur og det algebraiske uttrykket til Nore kan sies å ha slik struktur. Ved å forutsette at X er et vilkårlig tall på hundrekartet, og vise til strukturene som ligger i hundrekartet, beviser hen at summen alltid blir tre ganger det midterste tallet. Den epistemiske verdien til narrativet endres altså fra sannsynlig til sann.

4.2.4 Blander inn ligningsalgoritme

Toni kommer også fram til samme uttrykk, men tok en lengre vei fram og var ikke like sikker i sin sak om at uttrykket var et gyldig bevis for at påstanden stemte. Underveis dukket det imidlertid opp en utfordring – at tillærte algoritmer muligens ble mer hinder enn hjelp. Her fra første runde med å sette opp algebraiske uttrykk:

00:17:31 Toni	(eleven skriver opp på nytt – ca 20 sekunder) x-11 + x + x+11 = x+x+x for at det blir bare x og så er det da minus 11, men senere i ligninga så plusser du på 11. Så det blir bare x+x+x er lik … ja…	
00:18:09 Intervjuer	Ja – hvor mange x-er er det da?	
00:18:11 Toni	Til sammen er det seks. Men på den ene sida så er det bare tre på hver. Og så her tar du minus 11 og så plusser du på 11 senere. (pause 6-7 sekunder) Ja. Så kan jeg bare ta det slik her. Nei. Jo.	
00:18:34 Intervjuer	Hva er det du er usikker på nå , da?	
00:18:36 Toni	Nå er jeg usikker hva jeg tenkte akkurat selv, jeg, he he (ler). (skriver ca 10 sekunder) Nei dette blir ikke riktig.	
00:18:50 Intervjuer	Begynner du å tenke en slik ligningsstrategi nå på en måte?	
00:18:52 Toni	Ja	
00:18:54 Intervjuer	Åja sånn, ja.	
00:18:55 Toni	Ehh… Men jeg kjenner at det ikke blir riktig for at det blir bare én x. Og det stemmer ikke – eller ikkje. Jeg vet ikke hvorfor jeg sier ikke (kommentaren går på at eleven glipper med dialekta – begge ler). Nå er hjernen min litt kokt.	

Tabell 10 Toni sin «ligningsstrategi»



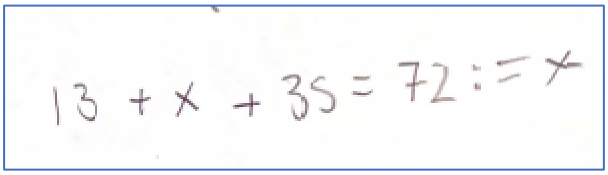
Figur 9 Toni sin "ligning"

Toni setter altså opp uttrykket og lager egentlig noe som ser ut som et godt bevis (i det gitte matematikksamfunnet) for at påstanden alltid er gyldig. X-11 + X + X+11 = X + X + X. Summen av tallene i mønsteret vil alltid være tre ganger det midterste tallet. Det hen imidlertid gjør er å forsøke å løse det som ligning og når uttrykkene så blir like på begge sider av likhetstegnet stopper det opp – hen gjenkjenner ikke dette som bekreftelse på at påstanden er sann, at de to uttrykkene er like, men tenker ligningsalgoritme og blir forvirret når det står tre X-er på hver side av likhetstegnet. Når jeg spør om hen tenker på en ligningsstrategi, svarer eleven umiddelbart bekreftende. Hen sier at det bare blir én X igjen, noe som muligens er en feilregning eller kan bety at hen ser hen vil ende opp med X = X. Eleven ser selv at her er det noe som ikke stemmer: Hen avbryter utregninga på papir og sier at hen er sliten: *«Nå er hjernen min litt kokt.».*

Når Elev 3 blir bedt om å tenke på bokstaver i matematikken går tankene straks til ligninger:

00:22:58 Intervjuer	Ja. Går det an å se på dette med bokstaver, noe mønster med bokstaver, på en måte?	
00:23:02 Rudy	Som en ligning … på en måte? Eller … hvis en skal da prøve å finne ut om det i midten blir dette da. Så kan vi kalle det for X, kanskje. Mhm. For hvis… Skal liksom… Jeg må bare prøve litt ut… 13+35… Hvis en skriver det som 13+x, hvis for eksempel den i miden var x, pluss 35. Det blir da, er lik, 72 dele på tre blir da er lik x. Altså der er da liksom noen i fjerde klasse kunne ha funnet ut slik, men jeg vet ikke helt hvordan jeg skal liksom, på en måte.	
00:24:14 Intervjuer	Nå begynner du tenke på en slik ligningsmetode.	
00:24:16 Rudy	Ja, ligningsmetode, ja.	

Tabell 11 Rudy sin "ligningsstrategi"



Figur 10 Rudy sin "ligning"

Rudy ser X som en ukjent, noe hen vil finne ut hva er og bruker eksempelet fra oppgaveteksten (figur 9). På spørsmålet om hun tenker en ligningsmetode svarer også hen bekreftende. For Rudy sin del kan det virke som om bokstaver automatisk betyr ligninger og at det er en del matematikken hen ikke har god kontroll på. Noe en kan se på bruken av likhetstegnet

Erkjennelsen av at både Toni og Rudy tyr til ligninger når de blir oppfordret til å bruke algebra, finner jeg interessant. Det kan være flere årsaker til dette. Begge elevene hadde dannet seg en formodning om at påstanden var sann, men klarte ikke å bruke algebraiske uttrykk for å vise dette.

4.2.5 Argumenterer med pragmatiske beviser

Felles for elevene var at de ville bruke konkrete eksempler dersom de skulle overbevise klassekameratene sine om at påstanden alltid stemmer. Toni ville ha startet med eksempelet i oppgaven:

00:15:48 Intervjuer	Du. Hvis du skal ta og gå inn til klassen din, nå. Og så skal du overtale, ehh, eller overbevise noen av medelevene dine om at her er det en løsning som stemmer alltid. Hvordan ville du ha gjort det?	
00:16:02 Toni	Jeg ville kanskje ha tegna opp den der da (viser til hundrekartet), så ville jeg begynt å vist at 13+24+35=72. Samme som at 24*3=72.	
00:16:18 Intervjuer	Så du ville vist dem eksempelet? Tatt med dette arket inn?	
00:16:22 Toni	Ja. Vist dem eksempelet og så kunne jeg da vist at det går også på andre ting… eller jeg kunne ha vist dem enda et eksempel for å se at det er 11 som må trekkes fra eller legges på.	

Tabell 12 Toni vil argumentere med konkrete eksempler

Det kan virke som om Toni vil bruke hundrekartet og to konkrete eksempler og deretter forklare at det er 11 som trekkes fra eller legges til tallet i midten for å finne det minste og det største.

Selv om Nore mente det algebraiske uttrykket hen sette opp var det beste matematiske beviset ville hen likevel ta utgangspunkt i hundrekartet for å overbevise klassekameratene om at påstanden alltid stemmer:

00:13:14 Intervjuer	Så dersom du skulle ha overbevist noen andre her da. Nå. At dette er riktig – det gjelder for alle. Alle tall. Hva slags...? Nå har du jo flere argumenter her. Hva vil du bruke for å argumentere? For å overbevise klassekameratene dine om at du har funnet en god løsning.
00:13:39 Nore	Ville nok brukt den første. Det med at det er tierrekker da. At én skrått nedenfor det tallet der alltid vil være 11 mer (peker på hundrekartet) Og da vet vi at det er 11 mer ned på den der. Og det vil alltid være 11 mer på den måten der. Så hvis vi tar 11 fra det største tallet og til det første tallet så får vi tre av det samme tallet som blir det midterste tallet gange tre, da. Og så ville jeg kommet med noen eksempler på både høyere og lavere tall, for å bevise dette da. Det tror jeg.

Tabell 13 Nore vil argumentere med hundrekart og konkrete eksempler

Nore vil altså starte med å vise til strukturene i hundrekartet for å overbevise medelever, men også hen vil bruke konkret eksempler for å «bevise» som hen sier: *«Og så ville jeg kommet med noen eksempler på både høyere og lavere tall, for å bevise dette da. Det tror jeg.»* Det kan være at hen er mottakerbevisst når det gjelder klassekameratene og tar høyde for hva hen anser som er kjente narrativer i klassen, men det kan også være et uttrykk for at hen er usikker på å abstrahere selv også.

4.2.6 Oppsummering av MR-prosesser relatert til validering

Jeg mener å ha funnet spor av alle MR-prosessene som er relatert til validering. Alle elevene *rettferdiggjør* at påstanden stemmer ved hjelp av *eksemplifisering*. Enten som *naiv empirisme* eller *det endelige eksperimentet* for å bruke Balacheff (1988) sine betegnelser. To av elevene beskriver strukturene i hundrekartet og sammenhengen mellom tre tall etter samme mønster – de nærmer seg dermed å uttrykke det Balacheff (1988) kaller *generiske eksempler* og igjen er nær ved det å *bevise*. (Jeannotte & Kieran, 2017). En av elevene utformet et algebraisk uttrykk som nærmer seg å være et formelt bevis.

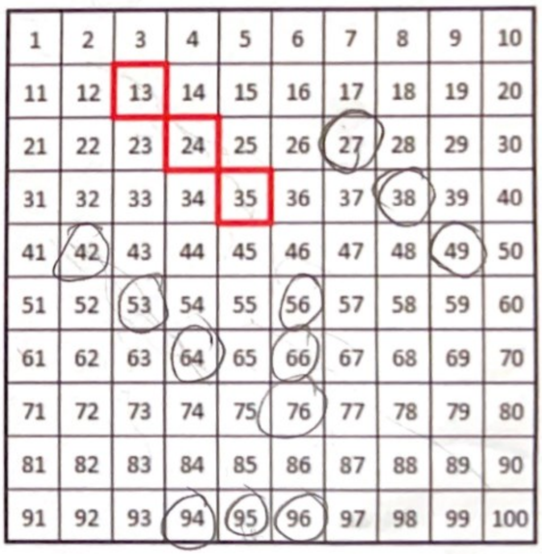
Noe jeg finner interessant er at elevene sier de helst vil argumentere for gyldigheten til påstanden, overfor medelever, ved hjelp av konkrete eksempler – altså pragmatiske beviser på lavt nivå. Dette på tross av at de i løpet av intervjuet har vist til pragmatiske beviser på høyere nivå og noe som nærmer seg et formelt bevis.

En annen interessant oppdagelse var at to av elevene blandet inn ligningsalgoritme da de forsøkte å uttrykke påstanden algebraisk. Begge to ble tydelig forvirret og det kan tolkes som om den tillærte algoritmen ble til hinder for å kunne utvikle et mer formelt bevis.

4.3 Oppdagelse av sammenheng mellom flere mønstre

Jeg vil trekke fram et særeksempel fra datamaterialet og selv eleven tolket oppgaven noe spesielt, kan en hevde at hen berører den siste MR-prosessen relatert til søken etter likheter og forskjeller, nemlig *klassifisering*:

Rudy brukte tid på å tolke oppgaven og undret flere ganger gjennom intervjuet over hva som mentes med *«markert etter samme mønster»* fra oppgaveteksten. Godt ut i intervjuet begynte hen å stille spørsmål om hva som skjedde dersom mønsteret med tre ruter fra hundrekartet ikke nødvendigvis måtte være på skrå, men om oppgaveteksten kunne tolkes til å at mønsteret var loddrett eller vannrett også – slik hen markerte eksemplene 56 – 66 – 76 og 94 – 95 – 96 på oppgavearket sitt (se figur 10):



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figur 11 Utklipp fra skanning av Rudy sitt oppgaveark – nye mønstre

Rudy studerer hundrekartet og blir bevisst at eneren øker med én for hvert steg til høyre og at tieren øker med én for hvert steg nedover og vurder om dette også kan være en del av mønsteret til oppgaven. Deretter begynner hen å stille spørsmål til seg selv:

00:16:17 Rudy	Hm? Hvis jeg gjør det loddrett? … Fordi at hvis jeg gjør det loddrett for eksempel, da er alle tallene like bakerst, men like fremst, eller i rekkefølge fremst. Så jeg tror en hele tida må gjøre det sidelengs … for at det skal bli riktig, da … så … egentlig tar hun feil fordi hvis en hadde gjort det loddrett, da hadde jo det ikke funka. Fordi at da hadde det ikke blitt …	
00:16:55 Intervjuer	For da tenker du at mønsteret er det samme hvis en har det loddrett også?	

00:16:59 Rudy	Mhm, det blir ikke det. Fordi at da blir det ikke et partall i midten og … oddetall på hver side, eller omvendt, da. Fordi det hele tiden er det samme tallet bak (henviser til eneren i tallene).	
00:17:16 Intervjuer	Ja, sånn ja.	

Tabell 14 Elev 3 endrer mønsteret

Mot slutten av eleveksempel 7 ser vi at hen finner noen forskjeller fra mønsteret presentert i oppgaven og det virker som om det horisontale og vertikale mønsteret forkastes. Hen sier: *«Mhm, det blir ikke det. Fordi at da blir det ikke et partall i midten og … oddetall på hver side, eller omvendt, da.»* Det virker som om de alternative mønstrene skal forkastes, men likevel slår hen seg ikke helt til ro og bestemmer seg for å undersøke:

00:17:17 Rudy	Som da gjør så at en kan ikke gjøre det da. Men jeg kan jo kanskje prøve loddrett også, bare for å sjekke? For eksempel 56, 66, 76. Mhm (taster på kalkulator) … Så deler en det på 3 … Det funker også! Ja! (Begeistret stemme)	
00:17:44 Intervjuer	Hva fikk du nå da?	
00:17:45 Rudy	Ja .. Da … Kan prøve vannrett, kanskje. 94+95+96 (taster på kalkulator). Det kan også deles på det, på 3!	
00:18:10 Intervjuer	Skriv opp det du gjør nå, så at jeg ser, så du har …	
00:18:12 Rudy	Ja. … Mhm … så det går an hele tida, hvis en liksom, tar tre tall. Enten vannrett, loddrett eller på siden (på skrå). Blir… kan uansett deles på tre. Og… Det er noe jeg vil prøve ut! Å sjekke om det går an å dele det på tre så det blir det svaret der. I midten. Eller lodd… nei vannrett, mener jeg. (Pause 7-8 sek) Ja det blir det i midten. Så det skal vel være… Det spiller ingen rolle hvilken måte det er satt opp på, bare det er tre ved siden av hverandre – som en da kan… plusse alle sammen og så dele på tre. Det blir hele tiden det tallet i midten. Så da blir vel… Det er vel… Feil den der da egentlig, fordi det går an loddrett og vannrett og liksom… (leser oppgaveteksten igjen) «Samme mønster». (spør) Er mønster liksom, slik loddrett og vannrett eller er det…?	

Tabell 15 Eleveksempel 8

Hen bestemmer seg for å undersøke den loddrette mønsteret, *«… bare for å sjekke?»*. Her driver eleven utforsking helt på egen hånd. Mine spørsmål blir ikke besvart, bare overhørt og eleven samtaler med seg selv om hva hen utforske og hvordan mønstrene passer sammen.

Etter å ha testet det loddrette mønsteret med tallene 56 – 66 – 76 og deretter et vannrett mønster med tallene 94 – 95 – 96 finner hen ut at påstanden stemmer for disse eksemplene også og konkluderer (ut fra svært begrenset empiri, riktignok) at påstanden også gjelder for disse: *«Det spiller ingen rolle hvilken måte det er satt opp på, bare det er tre ved siden av hverandre – som en da kan… plusse alle sammen og så dele på tre. Det blir hele tiden det tallet i midten.»* Rudy har beveget seg bort fra det oppgaven ber om (selv om en kan argumentere for at måten hen tolker mønsteret i oppgaven kan forsvares) og oppdaget at tre tall som «er ved siden av hverandre» alltid har sum som er tre gange det midterste tallet. Hen har altså oppdaget noen strukturer i hundrekartet som ikke bare gjelder mønsteret på skrå, men også horisontalt og vertikalt. En kan dermed hevde at Rudy *klassifiserer* når hen sammenligner mønsteret gitt i oppgaveteksten med det horisontale og vertikale mønsteret hun har oppdaget selv. Påstanden om at summen av tre tall «ved siden av hverandre» i et hundrekart alltid er tre ganger det midterste tallet, stemmer for mer enn kun mønsteret på skrå. Hen endrer narrativet om mønsteret og ser at påstanden gjelder for flere matematiske objekter enn bare mønsteret på skrå.

Jeannotte og Kieran (2017) hevder at klassifisering er en viktig prosess som kan føre til utvikling på objektnivå. I denne sammenhengen kan det hende at Rudy utvikler forståelsen sin av hundrekartet og dermed titallssystemet.

5 Diskusjon

I denne studien har jeg forsøkt å finne ut hva som kjennetegner noen elevers matematiske resonnering i møte med en utforskende oppgave i eksamensformat. Som beskrevet i forrige kapittel har jeg funnet spor etter alle de ni prosessene Jeannotte og Kieran (2017) beskriver i modellen sin. Jeg har delt inn disse i tre hovedfunn: *Prosesser relatert til søken etter likheter og forskjeller*, *Prosesser relatert til validering* og *Oppdagelse av sammenheng mellom flere mønstre - klassifisering*.

I dette kapittelet vil jeg diskutere funnene sett i lys av relevant litteratur.

5.1 MR-prosesser relatert til søken etter likheter og forskjeller

Analysen viser at samtlige av elevene har et relativt likt forløp i første del av oppgaveløsninga. De gjennomfører så å si alle MR-prosessene som er relatert til søken etter likheter og forskjeller, slik jeg tolker dem, etter Jeannotte og Kieran (2017) sin modell. (Unntaket er klassifisering, som jeg vil komme inn på under eget punkt i diskusjonen.) At det er forekomster av nær alle MR-prosesser i datamaterialet fra alle elevene kan antyde at det er naturlig for elevene å benytte disse prosessene i arbeidet med denne oppgaven. Måten de løste første del av oppgaven på (etter at de hadde tolket oppgaveteksten) var altså relativt lik for alle elevene og dette er interessant. Kan det være slik at elevene i klassen har en bestemt måte å angripe slike oppgaver på? En *rutine* jamfør Sfard (2008)? Oppgavetypen var valgt ut med hensikt om å være ukjent og selve begrepet *hundrekart* var nytt for alle sammen – dette bekreftes gjennom at to av dem først leser det som *hundekart*.

At alle tre hadde såpass likt forløp i den første delen av oppgaveløsninga kan således forklares med utgangspunkt i klassens rutiner – veldefinerte mønster blant elevenes deltakelse i diskursen. Diskurs i denne sammenhengen kan være elevens kommunikasjon med seg selv og at rutinen er en innlært framgangsmåte for ukjente oppgaver eller problemer. At det er en lært rutine kan underbygges av at alle starter med eksempelet fra oppgaveteksten og at de bruker likt antall (tre) eksempler før de slår seg til ro med at påstanden stemmer.

Slike rutiner kan være til hjelp for elevene. Sfard (2017) skiller mellom ritualisert (ritualized) og eksplorativ (explorative) deltakelse i matematisk diskurs. Der ritualisert deltakelse handler om å forsøke å imitere det de andre deltakerne i diskursen gjør, i motsetning til utforskende deltakelse, der deltakeren streber etter å forstå mer om matematiske objekter eller gjøre narrativer mer formelle. Sfard (2017) løfter fram utforskende deltakelse i matematiske diskurser er viktig for å forstå matematikk og hevder matematikklærere som utgangspunkt har to måter å endre elevenes deltakelse fra ritualisert til utforskende. Enten ved å demonstrere utforskende deltakelse eller ved å oppmuntre til slik deltakelse gjennom pedagogiske handlinger (Sfard, 2017, s. 44). I klassen til disse elevene er det arbeidet etter Liljedahl (2016) sine prinsipper for å «Bygge tenkende klasserom», der hensikten nettopp er å få elevene til å delta utforskende – til å tenke. Måten matematikkundervisningen har vært lagt opp i denne klassen er altså en mulig årsak til at elevene har såpass likt forløp i starten, men det kan jo selvfølgelig være andre forklaringer.

For eksempel kan det være at det er metareglene for diskursen mellom elevene og meg som intervjuer som medfører at forløpet ble så likt. Underforstått fra den ene eller begge parters side kan det være forventninger til hvordan forløpet skal være. Jeg har vært inne som matematikklærer i klassen så jeg kjenner elevene og de kjenner meg. Selv om jeg forsøkte å være nøytral og ikke involvere meg i særlig grad i første del av intervjuet, kan det være noe uuttalt i kommunikasjonen mellom meg og elevene som styrer retningen.

En kan heller ikke se bort fra at instruksjonen i oppgaveteksten er såpass styrende at det ikke er så mange andre muligheter å løse oppgaven på. Eller i hvert fall at det er en slik framgangsmåte som er mest nærliggende for disse elevene i møtet med oppgaven. Det kan selvfølgelig også være en kombinasjon av de tre. At det har sammenheng både med rutiner for utforskende arbeid, relasjon til intervjuer og oppgavetekst.

5.1.1 Oppsummering prosesser relatert til søken etter likheter og ulikheter

Er det da noe i prosessene relatert til søken etter likheter og ulikheter som kjennetegner elevenes matematiske resonnering? Dersom vi ser på rutiner for utforskende deltakelse i en matematisk diskurs som noe som kjennetegner disse elevenes matematiske resonnering vil det kunne sees på som en styrke. For de som deltar utforskende i en matematisk diskurs innebærer det at de er sjef over egen diskurs og involverer seg i den for å løse egne problemer (Sfard, 2017). Dette kan ifølge Sfard (2017) føre til at elevene utvikler og danner nye matematiske narrativer, matematiske objekter og/eller sammenhenger mellom matematiske objekter. Den matematiske diskursen vil dermed utvikles og læring skjer.

5.2 MR-prosesser relatert til validering

I analysen argumenterer jeg for å ha identifisert alle MR-prosessene relatert til validering, slik jeg tolker dem etter Jeannotte og Kieran (2017) sin modell. Alle elevene *rettferdiggjør* formodningen sin med konkrete eksempler (naiv empirisme). Etter at intervjuer spør om videre begrunnelser fjerner to av dem seg fra de konkrete eksemplene og begrunner med utgangspunkt i strukturene i hundrekartet og nærmer seg det å *bevise* (med generiske eksempler). Én elev satte opp et algebraisk uttrykk som ut fra konteksten nærmer seg MR-prosessen *bevise formelt*.

5.2.1 Argumentere med ett eller få eksempler

Det er kjent at elever slår seg til ro med ett eller få konkrete eksempler som nok begrunnelse for å bevise en påstand (Balacheff, 1988; G. J. Stylianides & Stylianides, 2017). Dette finner jeg også i denne studien. Ingen av elevene beveget seg bort fra talleksempler før de fikk spørsmål om de kunne vise at påstanden alltid var gyldig. Først da, gjorde de forsøk på å generalisere. Det kan være flere årsaker til dette, en av dem kan relateres til Balacheff (1991), som hevder at det ikke nødvendigvis er på grunn av at de ikke kan, elever ikke engasjerer seg i bevisprosesser, men at de ikke ser noen hensikt (Balacheff, 1991, s. 180). Det kan for eksempel være at elevene etter de første eksemplene kjenner seg sikre på at påstanden er gyldig og ikke ser behov for å undersøke videre.

5.2.2 Velger eksempler foran bevis

Overraskende fant jeg det likevel, at samtlige av dem ville bruke konkrete eksempler dersom de skulle overbevise klassekamerater om oppdagelsen sin (at summen av de tre tallene alltid var tre ganger det midterste tallet). La meg bruke Nore som eksempel. Gjennom intervjuet hadde Nore utviklet to generiske eksempler og et algebraisk bevis. Selv om hen forklarte at hen forstod at de generiske eksemplene og det algebraiske uttrykket hadde høyere matematisk bevisverdi, ville hen etter å ha vist generisk på hundrekartet, bekreftet overfor klassekameratene sine med «… noen eksempler på både høyere og lavere tall, for å bevise dette da» (jf. tabell 16). Slik jeg oppfattet hen under intervjuet, forstod hen godt at det algebraiske uttrykket hadde høyest matematisk bevisverdi, men like fullt ville hen understreke, «bevise», overfor klassekameratene med talleksempler. Det kan hende at hen er mottakerbevisst og forsøker å forestille seg hva som er riktig framgangsmåte å forklare til noen av klassekameratene, og dermed diskvalifiserer det algebraiske uttrykket, nettopp fordi hen mener det er et argument som er utenfor de narrativene som er kjent for klassen.

På den andre siden kan det indikere at hen ikke vet hva som kreves for å grunngi, eller bevise at en påstand alltid er gyldig. Selv om elevene har hatt utforskende undervisning på skolen som for eksempel (Liljedahl, 2021; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008), kan det være at validering fortsatt er relativt ukjent – altså at de ikke av seg selv vil utvikle narrativer mot mer formell matematikk, nettopp det som kjennetegner læring i matematikk, dersom vi tar på oss de kommognotive brillene (Jeannotte & Kieran, 2017; Sfard, 2008, 2017).

5.2.3 Blander inn ligningsalgoritme

På spørsmål fra meg om å begrunne påstanden algebraisk er det kun én av elevene som mestrer dette på egen hånd. De to andre forsøker å sette opp ligninger og løse dem ved hjelp av en ligningsalgoritme. Det kan se ut som om kompetansen i algebra ikke er solid. I et kommognitivt lys vil en muligens kunne si at elevenes narrativer som omhandler algebra i hovedsak omhandler ligninger og at de derfor ikke mestrer bruke algebra til å generalisere. Alternativ kan det hende at narrativer om å bruke algebra for å generalisere ikke var nærliggende for disse elevene denne gangen. Lithner (2008) skriver om algoritmisk resonnering (AR) som én type imitativ resonnering og hevder at en av utfordringene med AR nettopp er å finne en passende algoritme. Ligningsalgoritmen elevene valgte passet dårlig, denne gangen.

5.2.4 Oppsummering prosesser relatert til validering

Hvis vi ser utfordringer ved valideringsprosesser som noe av det som kjennetegner matematisk resonnering for disse elevene, kan dette relateres til andre studier. Det er flere norske masterstudier som rapporterer lignende funn, blant andre Nakkim (2019) som har gjennomført en studie der han har observert matematisk resonnering i grupper av 10. klasseelever og funnet at selv om grupper kom fram til matematiske bevis, så brukte de dem ikke da de presenterte begrunnelse for klassen og Størkson (2014) som i sin studie rapporterer om elever på en videregående skole som opplevde utfordringer med å formulere matematiske forklaringer og sette ord på egne resonneringer.

Mange av de studiene jeg har nevnt tidligere hevder også at validering eller bevisføring er utfordrende for skoleelever, for eksempel (Balacheff, 1988, 2010; Jeannotte & Kieran, 2017; Sfard, 2008, 2017; A. J. Stylianides, 2007; A. J. Stylianides et al., 2016; G. J. Stylianides, 2008).

At elevene må arbeide med å grunngi og bevise matematikk har vært tema i matematikkdiaktisk forskning gjennom mange år, for eksempel (Balacheff, 1988, 1991, 2010; Ball et al., 2002; Knuth, 2002). Og som også har ført til endringer i mange lands rammeverk for matematikkundervisning i skolen, også i Norge (Jeannotte & Kieran, 2017; Valenta & Enge, 2020).

5.3 Oppdagelse av sammenheng mellom flere mønstre

Rudy slo seg ikke til ro med hvordan mønsteret som var gitt i oppgaveteksten skulle være og tolket det etter hvert til å kunne være tre tall i rekkefølge, enten på skrå, loddrett eller vannrett. Hen fant ut at påstanden fra oppgaveteksten var riktig uansett (riktignok basert på enkelteksempler) og oppdaget dermed noen strukturer i hundrekartet som hen ble interessert i. Jeg argumenterte i analysen for at dette kan være eksempel på den siste MR-prosessen relatert til søken etter likheter og ulikheter, *klassifisering*. En prosess Jeannotte og Kieran (2017) hevder er viktig for utvikling av diskursen på objektnivå.

Det at eleven tar fullstendig kontroll over situasjonen og utforsker nye mønstre på egen hånd kan minne om Sfard (2017) sin beskrivelse av utforskende deltakelse i en matematisk diskurs – der eleven strever etter å vite mer om matematiske objekter og selv tar ansvar for egen diskurs for å løse sine egne (matematiske) problemer (Sfard, 2017). I denne delen av intervjuet løsriver Rudy seg fra den styrte intervjusituasjonen og fordyper seg i mønstrene i hundrekartet uten å la seg forstyrre av spørsmålene mine. For å bruke Lithner (2008) sin terminologi kan dette nærme seg å være eksempel på kreativ matematisk fundert resonnering (CMR) der eleven selv kommer fram til matematiske ideer etter tre gitte kriterium: i) Hen resonnerer rundt noe nytt (at flere mønstre har samme egenskaper), ii) det er sannsynliggjort (selv om det er på et bevismessig lavt nivå) og iii) det kan forsvares matematisk – gjennom strukturene i hundrekartet (selv om eleven bare delvis gjør dette).

Dersom slik utforskende matematisk diskurs og kreativ matematisk fundert resonnering er noe som kjennetegner matematisk resonnering blant elevene ved vår skole, ser jeg det som positivt i rollen som matematikklærer. Som forsker er jeg mer nøktern. Det var kun en av de tre elevene som gjorde disse oppdagelsene og oppdagelsene var tilsynelatende tilfeldige på grunn av det som en kan se som en misforståelse av oppgaven.

5.4 Studiens begrensninger

Jeg har jeg har gjennomført semistrukturerte intervju av tre 10. klassinger på egen skole under deres arbeid med en eksamensrelevant, utforskende matematikkoppgave. Her ligger det noen begrensninger.

5.4.1 Begrenset datautvalg

Å intervjue tre elever kan si noe om hva som kjennetegner nettopp disse tre sin matematiske resonnering. Å generalisere resultatene til større elevgrupper er vanskelig. Kanskje kan det indikere noe om kjennetegnene for MR i klassen elevene gikk i, men akkurat det matematikksamfunnet (med sine metaregler for matematiske diskurser) ble oppløst i det øyeblikket elevene slutta i 10. klasse. Å generalisere resultatene til andre klasser ved skolen, eller større grupper 10. klassinger er lite hensiktsmessig – da er dataene for få og mulige feilkilder mange.

5.4.2 Begrensninger med oppgavevalg

Oppgaven er laget med tanke på å kunne brukes ved en matematikkeksamen for 10. trinn, en eksamen som (enn så lenge) er individuell og skriftlig. I og med at elevene forklarer hvordan de tenker muntlig i en intervjusituasjon og skriver lite, så vet jeg ikke hvordan de ville ha løst en slik oppgave skriftlig på eksamen. Ei heller ikke om jeg som intervjuer ikke deltok i samtalen. Dette kan ikke studien si noe om.

Oppgaveformuleringen kan virke styrende for elevenes resonneringsprosess. For eksempel gir den elevene en hypotese de skal validere. Dette kan bety at denne oppgaven ikke gir rom for at elevene skal danne nye hypoteser som igjen kan utvikles til formodninger.

5.4.3 Begrensninger med meg som forsker

Å forske på egne elever medfører flere utfordringer. Som i andre undersøkelser der forskeren er deltakende påvirker jeg deltakerne i større eller mindre grad. I og med at dette er elever jeg kjenner, vil relasjonen vi har fra før også virke inn på intervjusituasjonen. De samme momentene virker også inn i kodings- og analyseprosessene. Mine forforståelser og forventninger kan styre hva jeg ser etter og hvordan jeg tolker datamaterialet. Metodekapittelet forteller mer om hva jeg har gjort for å vise transparens og sikre studiens validitet.

5.5 Studiens bidrag

5.5.1 Individuell resonnering

Denne studien konsentrerer seg om matematisk resonnering hos enkeltelever. Den kan derfor gi lærere og skoler informasjon om hvordan elever resonnerer selvstendig. Selv om jeg som intervjuer deltar i samtalen, har jeg forsøkt å begrense bidragene mine til diskursen, spesielt i første del av intervjuene. Studien skiller seg i så måte fra studier der deltakerne opptrer i grupper.

5.5.2 Utforskende deltakelse i matematisk diskurs

Analysen avdekker at resonneringsprosessene til elevene forløper relativt likt i første fase. De utvikler narrativer gjennom *å sammenligne – identifisere mønster – formulere en formodning – sammenligne* igjen – *identifisere mønster* på nytt – *generalisere.* Dersom denne framgangsmåten er innarbeidet for disse elevene, er det mulig å tenke seg at de har en rutine for utforskende deltakelse i matematiske diskurser. Elever som deltar utforskende har større utbytte av den matematiske diskursen (Sfard, 2017). Sagt med andre ord – de lærer bedre.

5.5.3 Utfordringer med valideringsprosesser

Selv om datamaterialet er såpass begrenset er det likevel funn i denne studien som støttes av tidligere forskning og som dermed «passer inn i bildet». At elever har utfordringer med valideringsprosesser er godt kjent, noe også denne studien støtter. Dermed kan studien sees på som et argument for at skoler bør bevisstgjøre lærere og elever om hvilke krav som stilles for validering. Eleveksemplene, gitt i denne studien, på de ulike valideringsprosessene fra Jeannotte og Kieran (2017) sin modell, kan i den anledning brukes av lærere for å identifisere slike i egne elevgrupper.

6 Konklusjon og avslutning

I denne studien har jeg forsøkt å finne ut hva som kjennetegner matematisk resonnering hos noen 10. klassinger i møte med en utforskende matematikkoppgave i eksamensformat. For å finne svar på problemstillingen har jeg gjennomført semi-strukturerte intervju med tre elever, der jeg fulgte prosessen deres i møte med oppgaven. Jeg har benyttet (Jeannotte & Kieran, 2017) sin modell for matematisk resonnering i skolen i analysearbeidet, i tillegg til Sfard (2008) sine beskrivelser av matematisk diskurs og Balacheff (1988) sine beskrivelser av pragmatiske bevis. I den grad jeg kan trekke ut kjennetegn på disse elevenes matematiske resonnering, jeg har vist til flere forbehold i analysen og diskusjonen, er det to hovedfunn jeg sitter igjen med.

6.1 Utforskende deltakelse i matematiske diskurser

For det første kan det være et kjennetegn at elevene viser utforskende deltakelse i matematiske diskurser. Elevene hadde relativt likt forløp i resonneringsprosessene de viste i første del av intervjuene. Dette sett i sammenheng med at en av elevene utforsker flere mønstre i hundrekartet senere i forløpet kan indikere at elevene har innarbeidet framgangsmåter for å utforske matematisk eller løse matematiske problemer. Altså at de har strategier for utforskende deltakelse i matematiske diskurser. Sfard (2017) hevder elever som deltar utforskende i matematiske diskurser, tar kontroll over egen matematisk diskurs, forstår mer om matematiske objekter og løser matematiske problemer selv. Dette i motsetning til elever som deltar ritualisert i diskursen, uten mulighet til å sette sitt preg på den i særlig grad (Sfard, 2017). I følge (Sfard, 2017) er det hovedsakelig to måter å utvikle utforskende deltakelse i matematiske diskurser. Den ene er å demonstrere hvordan slik diskurs kan være, den andre å oppmuntre elevene til ønsket diskurs gjennom pedagogiske trekk. Elevene i undersøkelsen gikk i en klasse der deler av undervisningen var problembasert og blant andre pedagogiske trekk, var flere utført i tråd med Liljedahls prinsipper for «Tenkende klasserom» (Liljedahl, 2016, 2021). For egen skole er det mulig å konkludere at denne måten å organisere matematikkundervisningen på, er noe vi skal fortsette med. Vi ønsker å utvikle elever som deltar utforskende i diskursen. For andre skoler og lærere kan studien inspirere til å gjøre noe av det samme.

6.2 Valideringsprosesser er utfordrende

For det andre er det rimelig å anta at det er et kjennetegn ved disse elevenes matematiske resonnering at valideringsprosesser er utfordrende. Det er mulig å anta at elevene i denne studien ikke vet hva som kreves for å kunne bevise en matematisk påstand. Selv om de finner generiske eksempler og det som nærmer seg formelt bevis, velger alle å argumentere med konkrete eksempler i tillegg. Dette er en kjent utfordring for elever på flere trinn og, som tidligere nevnt, godt dokumentert gjennom flere studier (Balacheff, 1988, 2010; Ball et al., 2002; Hanna, 1989; Jeannotte & Kieran, 2017; A. J. Stylianides, 2007; A. J. Stylianides et al., 2016; G. J. Stylianides, 2008) for å nevne noen. Disse nevnte studiene, riktignok med noe ulike fokus, fremmer alle at arbeid med resonneringsprosesser og bevisprosesser er heldig med tanke på å heve elevenes matematiske kompetanse – danne grunnlag for dybdelæring, som vi kaller det i Norge. Kanskje var noen av disse bidragsyterne medvirkende årsak til endrede rammeverk for matematikkopplæringa i flere land. Det har i hvert fall skjedd et tydelig skifte (Jeannotte & Kieran, 2017; Valenta & Enge, 2020). I Norge og LK-20 med kjerneelementet resonnering og argumentasjon, som inkludere at elevene må validere påstandene sine. Da det fortsatt er rimelig å hevde at ett av kjennetegnene for matematisk resonnering for disse elevene er at valideringsprosesser er utfordrende, ser jeg på dette på to måter. Først forskerens konstaterende blikk: «Slik er det. Studien har vist at elevene ikke kommer i gang med valideringsprosessene på egen hånd. I tillegg viser de heller ikke tydelig forståelse for nivåer på bevisføring.» Dernest lærerens fortvilte blikk: «Jeg ser at de ikke mestrer dette. Hvorfor?» La meg anta, for resonnementet sin skyld, at både forskeren og læreren kommer til samme konklusjon. Det er fornuftig å trene elevene i å se hva som kreves av matematiske bevis – både pragmatiske og formelle. For vår skole sin del vil dette kunne bety at vi kan vektlegge siste del av resonneringsaktiviteter mer. Den delen der vi oppsummerer hva elevene har funnet ut. Framover kan det være lurt å la elevene diskutere gyldigheten til de ulike argumentene i større grad enn hva vi har gjort før.

6.3 Oppsummering og videre forskning

Jeannotte og Kieran (2017) hevder at lærere bør bli flinkere til å gjenkjenne matematisk resonnering når det skjer i klasserommet og at de ved å kunne identifisere ulike deler av resonneringsprosessene står bedre rustet til å konstruere undervisning som legger opp til matematisk resonnering (Jeannotte & Kieran, 2017).

Dersom lærere klarer å avkle hva elevene oppdager og hvordan de gjør det – altså identifisere ulike MR-prosesser – kan de anerkjenne elevenes prosess og rette søkelys mot nettopp slike nøkkelpunkt i matematikkopplæringa. Kanskje kan vi unngå at aha-opplevelser blir tilfeldige og heller konstruere slike opplevelser for mange flere av elevene våre.

Hvis jeg skulle ha forsket videre ville jeg ha forsøkt å intensivere undervisning rettet mot valideringsprosesser for en gruppe elever, gjerne etter Liljedahl (2021) sine prinsipper. Deretter gitt samme eller tilsvarende oppgave til disse elevene og en kontrollgruppe som ikke hadde hatt samme intensiverte fokus på valideringsprosesser.

Referanseliste

Antonsen, R. (2014). *Logiske metoder : kunsten å tenke abstrakt og matematisk*. Oslo: Universitetsforlaget.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216-230.

Balacheff, N. (1991). The Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof. I A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. Van Dormolen (Red.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (s. 173-192). Dordrecht: Springer Netherlands.

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Prooving in Mathematics. A Didactical Perspective. I G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Red.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (s. 115-135). Boston, MA: Springer US.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. *ICM 2002*.

Chapin, S. H., O'Connor, M. C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn, Grades K-6* Math Solutions.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. I D. Tall (Red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 25-41). Dordrecht: Springer Netherlands.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of mathematics, 9*(2), 9-14.

Galletta, A. & Cross, W. E. (2013). *Mastering the Semi-Structured Interview and Beyond : From Research Design to Analysis and Publication*. New York, NY: New York University Press.

Grabiner, J. V. (2012). Why proof? A historian's perspective. I *Proof and proving in Mathematics Education* (s. 147-167). Springer, Dordrecht.

Guttu, T., Gundersen, D. & Wangsteen, B. (2022). Stor norsk ordbok. Hentet 14. august 2022 fra https://www.ordnett.no/search?language=no&phrase=diskurs&showSignLanguage=&selectedPubs=55

Haifa, U. o. (2021). Prof. Anna Sfard. Hentet 23.07.2022 2022 fra https://sfard.edu.haifa.ac.il/

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, 45-51.

Hervik, S. (2013, 16.01.2022). Formodning - matematikk. Hentet 4. juli 2022 fra https://snl.no/formodning_-_matematikk

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk: How to structure and lead productive mathematical discussions* Stenhouse Publishers.

Kjøll, G. (2021). resonnere. I *Store Norske Leksikon*. snl.no. Hentet 14. august 2022 fra https://snl.no/resonnere

Klemp, T. (2012). Kvalitativ analyse og bruk av programvare. I V. Nilsen (Red.), *Analyse i kvalitative studier*

(s. 119-134). Universitetsforlaget.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of mathematics teacher education, 5*(1), 61.

Kollosche, D. (2021). Styles of reasoning for mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 107*(3), 471-486.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Larsen-Evjen, P. K. (2021). Tilbake til todelt eksamen i matematikk frem til våren 2023. Hentet 5. juli 2022 fra https://udirbloggen.no/tilbake-til-todelt-eksamen-i-matematikk-frem-til-varen-2023/

Lavie, I. & Sfard, A. (2019). How Children Individualize Numerical Routines: Elements of a Discursive Theory in Making. *The Journal of the learning sciences, 28*(4-5), 419-461. https://doi.org/10.1080/10508406.2019.1646650

Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. I P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives* (s. 361-386). Cham: Springer International Publishing.

Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics, grades k-12 : 14 teaching practices for enhancing learning*. Thousand Oaks, California: Corwin.
Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.
Matematikksenteret, N. (2021). Mønster i hundrekart. I.
Merriam, S. B. (2002). Introduction to qualitative research. *Qualitative research in practice: Examples for discussion and analysis, 1*(1), 1-17.
Nakkim, R. (2019). *Resonnering og bevis i skolen* NTNU.
NAOB. (2022). argumentere. Hentet 14. august 2022 fra https://naob.no/ordbok/argumentere
NESH. (2021). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora. Hentet 29.7.2022 fra https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/
Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier* Universitetsforlaget.
Nilssen, V. (2020, 07.09.2020). Forelesning forskningsmetodikk I. NTNU - Kalvskinnet, Trondheim.
Pedemonte, B. & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 281-303.
Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.
Rivera, F. (2008). On the pitfalls of abduction: Compolicities and complexities in patterning activity. *For the learning of mathematics, 28*(1), 17-25.
Røislien, J. & Nome, M. (2011). *Siffer*. Oslo: Versal.
Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 13-57. https://doi.org/10.1023/A:1014097416157
Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge: Cambridge: Cambridge University Press.
Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 1-9. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013
Sfard, A. (2014). University mathematics as a discourse - why, how, and what for? *Research in mathematics education, 16*(2), 199-203. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918339
Sfard, A. (2017). Ritual for ritual, exploration for exploration: Or, what learners are offered is what you get from them in return. I J. Adler & A. Sfard (Red.), *Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (s. 41-63). New York: Routledge.
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning, 10*(4), 313-340.
Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.
Stylianides, A. J., Bieda, K. N. & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. I *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (s. 315-351). Brill.
Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the learning of mathematics, 28*(1), 9-16.
Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 119-127. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3
Størkson, M. A. (2014). *«Jeg forstår matematikken, jeg kan bare ikke bevise det» - bevisets og argumentasjonens stilling i matematikkfaget i norsk skole sett i lys av TIMSS og PISA resultater.* Universitetet i Stavanger.
Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*.

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1. - 10. trinn*. Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT01-05
Utdanningsdirektoratet. (2022). Eksempeloppgaver i matematikk for 10. trinn, del 2. Hentet 14.01.2022 2022 fra https://www.udir.no/contentassets/a97119d8db0f476eb6f7e9d4adb51e41/del-med-hjelpemidler_ny.pdf
Valenta, A. & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden, 14*(3). https://doi.org/10.5617/adno.8195

Vedlegg

Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Vurdering fra NSD

Intervjumal

Intervjuguide MR

Til høyre ser du et hundrekart. I hundrekartet er tre tall markert.

Lydia har funnet et mønster i hundrekartet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Undersøk om påstanden til Lydia stemmer.

Struktur

Introduksjon

Ønske velkommen
Takke for at du stiller
Minne om samtykkeerklæring og at du når som helst kan trekke deg.
Du deltar i min studie om hvordan elever løser en matematikkoppgave. Vil høre hva du tenker, så det er fint om du sier høyt hva du tenker underveis.
At jeg sier mindre enn vanlig, fordi det er dine tanker jeg er ute etter.
Helt ufarlig.
Noen spørsmål?

Oppgaveløsing

Vise til papir, blyant og kalkulator på pulten.
Dele ut oppgaven og la dem lese teksten selv.
Svare med spørsmål og de spør om oppgaven

Intervju

Deretter intervjuer/ samtaler jeg med eleven.

Intervjuet blir semistrukturert, på den måten at jeg har med noen hovedpunkter jeg vil spørre elevene om, men at det viktigste er å fange opp hvordan elevene resonnerer, generaliserer og argumenterer og la dem styre samtalen selv.

Instruksjon:

Nå får du en oppgave av meg som er tenkt som en skriftlig eksamensoppgave i matematikk. I tillegg til at du bruker papir og blyant er jeg interessert i å høre hvordan du tenker når du prøver å løse den. Det er fint om du forteller hva du tenker underveis og jeg kommer sikkert til å spørre deg også.

Dele ut. Legge klart papir og blyanter og kalkulator.

- Resonnere:
  - Hvordan tenker du om oppgaven?
  - Hvordan startet du?
  - Hvordan kan du undersøke?
  - Hvilke hjelpemidler har du?
  - Kan du tegne?
  - Kan du skrive

- Generalisere
  - hva legger du i det/ hva betyr det?
  - Flere talleksempler
  - Systematisk
  - Tegne
  - Algebra

- Argumentere
  - Gjelder det alltid
  - Hvordan kan du argumenterer løsninga di?
  - Hvilke argumenter har du?
  - Hva er det beste argumentet ditt?
  - Overbevis meg
  - Hvordan vil du forklare til en medelev
  - Hvordan vil du forklare til en som er mindre enn deg
  - (Kan du bevise)
  - (Formelle bevis)

Vurdering

Dato
30.03.2022

Type
Standard

Referansenummer
104531

Prosjekttittel
Hvordan mestrer tiendeklassinger generalisering og argumentasjon i eksamensoppgaver i matematikk?

Behandlingsansvarlig institusjon
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig
Ole Enge

Student
Olav Martens Solli

Prosjektperiode
17.03.2022 - 31.12.2022

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 31.12.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være de foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
Vi vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke typer endringer det er nødvendig å melde:

https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene

er avsluttet. Kontaktperson hos oss: Sturla Herfindal

Lykke til med prosjektet!

Vil du delta i forskningsprosjektet

Hvordan mestrer tiendeklassinger generalisering og argumentasjon i eksamensoppgaver i matematikk?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever generaliserer og argumenterer i matematikk. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Hvis du vil delta, ber jeg om at dine foresatte setter seg inn i dette skrivet og gir samtykke på vegne av deg.

Formål

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU og skal undersøke hvordan elever generaliserer og argumenterer i matematikk. For å få undersøkt vil jeg observere og intervjue elever mens de løser en matematikkoppgave.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Det er NTNU som er ansvarlig for prosjektet. Jeg er prosjektansvarlig sammen med veileder som heter Ole Enge (NTNU).

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Jeg ber deg om å delta fordi du er ungdomsskoleelev i målgruppa.

Hva innebærer det for deg å delta?

At du forsøker å løse en matematikkoppgave, mens jeg observerer deg og intervjuer deg om hvordan du tenkte underveis. Jeg gjør lydopptak av både oppgaveløsninga og intervjuet. I tillegg ønsker jeg å samle inn det skriftlige arbeidet du gjør med oppgaven.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Opptakene og oppgavebesvarelsen vil kun bli sett/hørt/lest av meg, og eventuelt min veileder og sensorer av masteroppgaven. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 31.12.2022.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- NTNU ved Olav Solli (olav.solli@sel.kommune.no), telefon 91382700; alternativt Ole Enge (ole.enge@ntnu.no), telefon 98483281
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no), telefon 93079038
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS (personverntjenester@nsd.no); telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig (Forsker/veileder) *Student*

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i oppgaveløsning og intervju
☐ å levere skriftlig arbeid med matematikkoppgaven
☐ at det blir gjort lydopptak av oppgaveløsninga og intervjuet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, senest 31.12.2022.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

NTNU

Kunnskap for en bedre verden