Mattis Næss

Abc-formel eller hoderegning?

En studie av elevers strategivalg i løsning av andregradslikninger

Masteroppgave i Master lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 11.-13
Veileder: Trygve Solstad
September 2022

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Mattis Næss

Abc-formel eller hoderegning?

En studie av elevers strategivalg i løsning av andregradslikninger

Masteroppgave i Master lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 11.-13
Veileder: Trygve Solstad
September 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne masteroppgaven har jeg analysert 59 elevers løsningsstrategier i arbeid med andregradsligninger. Jeg har analysert elevenes bruk av en hoderegningsstrategi (sum og produktmetoden) og en standardalgoritme (abc-formelen). Elevene i studien gikk første året på videregående skole og hadde valgt teoretisk matematikk. Hovedmålet med studien var å avdekke om innføringen av en hoderegningstrategi i tillegg til standardalgoritmen kunne hjelpe elevene til å bli gode på å tilpasse valg av løsningsstrategi til den oppgaven de skulle løse.

Etter å først ha utledet og fått opplæring i hoderegningstrategien og senere standardalgoritmen, fikk elevene opplæring i når de to metodene var mest egnet. Elevene gjennomførte deretter en test der de både fikk oppgaver som stimulerte dem til å bruke hoderegningstrategien, og oppgaver som stimulerte dem til å bruke standardalgoritmen. Testen besto av tre deler. På den første delen fikk elevene selv velge strategi, på del to ble elevene pålagt å benytte hoderegningstrategien - og på del tre ble elevene pålagt å benytte standardalgoritmen.

Resultatet av studien var at flertallet av elevene byttet mellom strategier og tilpasset strategiene til oppgavene de stod ovenfor. Flertallet av elevene valgte hoderegningstrategien oftere enn standardalgoritmen. Elevene viste også at de hadde utviklet en adaptiv strategi, nemlig at de først prøvde hoderegningstrategien og byttet til standardalgoritmen først når de så at hoderegningstrategien ikke fungerte.

Resultatene av studien viser at elever som har høy kompetanse på andre deler av matematikkpensum er mye mer adaptive i strategivalg enn elever med lavere matematikkompetanse. Likevel viser resultatene at også elevene med lav kompetanse, som hadde lært seg å tilpasse valg av strategi til oppgaven, gjør det bra på testen. Resultatene viser at elevene presterer bedre på oppgaver der de velger å bruke hoderegningstrategi enn på oppgaver der de velger å brukestandardalgoritmen. Dette til tross for at elevene behersker begge metodene like bra på oppgavene der de ikke kunne velge strategi.

Analysen og drøftingen av resultatene viser at innføringen av en hoderegningstrategi fører til at elevgruppen utvikler adaptive ferdigheter, og at disse ferdighetene hjelper elevene til å få en dypere forståelse av andregradsligninger.

Abstract

In this master's thesis, I analyzed the adaptiveness of 59 Norwegian students in the use of a mental computation strategy (the sum and product method) and a standard algorithm (the quadratic formula) in solving quadratic equations. The students in this study were in their first year of high school (age 16) in theoretical mathematics class. The main objective of the study was to reveal whether learning a mental computation strategy could help the students to become better at adapting the choice of solution strategy to the task they were solving.

After first learning the mental computation strategy and later the standard algorithm, the students received specific training in when to use the different methods.

The students completed a test where they were given tasks that allowed them to use the mental computation strategy and tasks that allowed them to use the standard algorithm. The test consisted of three parts. In the first part, the students were allowed to choose their own strategy in the second part the students were required to use the mental computation strategy and in the third part the students had to use the standard algorithm.

The result of the study reveal that the majority of the students switched between strategies and adapted the strategies to the task. The majority of the students chose the mental computation strategy more often than the standard algorithm. The students also showed that they had developed an adaptive strategy, namely that they first tried the mental computation strategy and switched to the standard algorithm only when they realized that the mental computation strategy did not work. The results show that students who had high competence in other parts of the mathematics curriculum, were much more adaptive in their choice of strategy than students with lower mathematics competence. Nevertheless, the results show that those students with low competence who had learned to adapt the choice of strategy to the task, performed well on the test. The results show that students perform better on tasks where they chose the mental computation strategy than on tasks where they chose the standard algorithm, even though the students mastered both methods equally well in the no choice condition.

The analysis and discussion of the results show that the introduction of a mental computation strategy has led to the student group developing adaptive skills, and that these skills can help students gain a deeper understanding of quadratic equations.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på et 3 år langt lærerspesialiststudie i matematikk. Studiet har jeg gjennomført ved siden av jobben min som lærer og studiet har gitt meg spennende innsikt i forskning på matematikkundervisning som jeg har fått anledning til å teste ut i klasserommet samtidig som jeg har lest forskningsartiklene.

Først vil jeg takke min veileder Trygve Solstad for god veiledning og gode, konstruktive tilbakemeldinger. I tillegg vil jeg takke Eivind Kaspersen for å ha gitt meg innsikt i adaptivitet og choice/no choice-metoden samt god opplæring i oppgaveskriving.

Jeg vil også takke kollegene mine for å ha lånt bort elever, prøvd ut nye undervisningsopplegg og lyttet til lange utgreinger om hvordan man kan gjøre matematikkundervisning bedre.

En stor takk også til Rosenvilde vgs som har gitt meg anledning og tilpasning slik at det har vært mulig å gjennomføre dette studiet.

Den aller største takken er til familien min og spesielt til min kjære Ingrid som har heiet på meg og har gitt meg tid til å gjennomføre dette prosjektet på bekostning av ferier, helger og kvelder sammen. Takk for utallige gjennomlesninger og innspill og ikke minst tålmodighet med en mann som forsvinner inn i sin egen boble.

Kolsås, 6. september 2022

Mattis Næss

Innhold

`

Figurer

Tabeller

Forkortelser/symboler

SP	Sum og produktmetoden
abc	Abc-faktoriseringsformel
TA	Tematisk analyse
LK20	Læreplaner – kunnskapsløftet 2020
MR	Memorised reasoning
AR	Algorithmic reasoning
CMR	Creative mathematically founded reasoning
MMR	Mixed methods research

1 Innledning

Temaet i denne masteroppgaven er betydningen av elevers utvikling av adaptivitet i arbeidet med matematiske utfordringer, mer spesifikt arbeidet med andregradsligninger.

Adaptivitet er viktig for at elevene skal lære seg å tenke selv i problemløsning, noe som er tydelig nedfelt i LK20 både i overordnet del og konkrete læreplanmål i matematikk 1T (UDIR, 2019). Her fra overordnet del:

> *Faget skal gi elevene mulighet til å utvikle problemløsingsstrategier som forbereder dem til videre arbeid i andre fag som krever matematikk.*

Det er bred konsensus i forskning på matematikkopplæring om at elever bør være i stand til å løse matematikkoppgaver ikke bare raskt og nøyaktig, men også adaptivt (Heinze et al., 2009, s. 535). Adaptivitet i denne sammenhengen betyr at eleven velger bevisst en strategi som løser oppgaven effektivt, kreativt og fleksibelt (Heinze et al., 2009). Adaptivitet er sånn sett motstykket til å lære en standardalgoritme til å løse alle regnestykker av en gitt type. Det at elevene er adaptive innebærer med andre ord at elevene forstår hvordan oppgaven på best mulig måte kan løses, og dermed også en forståelse for hva man gjør og hvorfor.

Verschaffel, Torbeyns, De Smedt, Luwel, & Van Dooren (Verschaffel et al. 2007) har studert adaptivitet hos lavt presterende elever. Artikkelen konkluder med at lavt presterende elever i særlig liten grad er adaptive. Dette til tross for at denne elevgruppen vil ha stor nytte av nettopp dette, fordi det å kjenne til ulike løsningsstrategier bidrar til å styrke elevenes forståelse. Verschaffel et al. argumenterer for at alle barn, på alle nivåer, bør få opplæring i varierte løsningsstrategier slik at de selv kan finne ut hvilke strategier som er mest effektive i en gitt kontekst. Forskerne påpeker at det gjenstår mye forskning for å finne ut hvordan man kan utvikle adaptivitet og fleksibilitet særlig hos barn med liten grad av matematisk kompetanse.

Siden læreplanen vektlegger at elevene skal ha kjennskap til ulike løsningsstrategier, er opplæring av ulike strategier selvsagt også vektlagt i alle læreverk for matematikk 1T. I møte med temaet andregradsligninger går alle læreverk gjennom kvadratsetningene, produktregelen, fullstendig kvadrat og abc-løsningsformel. Læreverkene legger slik sett opp til at elevene skal kunne velge mellom ulike strategier.

Til tross for at forskning og læreplan betoner betydningen av at elevene får utforske ulike strategier i arbeidet med matematiske problemer, og til tross for at alle læreverkene i matematikk 1T presenterer elevene for et sett med ulike tilnærmingsmetoder i arbeidet med andregradsligninger – så er min erfaring at elevene likevel ikke benytter disse framgangsmåtene. Årsaken er sannsynligvis at kvadratsetningene og konjugatsetningen bare fungerer for et begrenset utvalg av oppgaver, og fullstendig kvadraters metode er vanskelig å forstå og utføre for mange elever. Elevene sitter dermed igjen med abc-formelen som foretrukne løsningsstrategi i møte med alle typer andregradsligninger selv på oppgaver der en annen strategi er mye mer effektiv. En studie utført av Torbeyns og

Verschaffel (2016) viser at elever, når de har lært seg en standardalgoritme, ofte holder seg til denne strategien og i liten grad skifter mellom løsningsstrategier. Mine erfaringer støttes dermed i forskning.

En annen årsak til at elever gjerne velger en standardalgoritme, kan være at vi som lærere i liten grad underviser elevene våre i adaptivitet i seg selv. Vi presenterer elevene for ulike strategier, uten å gjøre dem bevisste på hvilke metoder som egner seg når og hvorfor. Vi lar det dermed være opp til elevene å velge strategi uten at vi innfører en metasamtale om styrker og svakheter ved ulike strategier.

Det at elevene benytter seg av en standardalgoritme som de gjerne ikke forstår utledningen av, er et stort problem dersom man ønsker å oppnå læreplanens intensjoner om dybdelæring. Dersom elevene i tillegg lærer seg at en løsningsmetode er bedre eller mer anvendelig enn alle andre, fratar man dem i praksis forståelsen av betydningen av å være adaptive i arbeidet med matematikk. Elevene utvikler dermed ikke den dybdeforståelsen de trenger i møtet med matematiske problemer.

Sum og produkt-metoden er en enkel framgangsmåte for å løse andregradsligninger – det Torbeyns og Verschaffel (2016) trolig ville omtalt som en smart hoderegningsstrategi. Siden det å utvikle adaptive ferdigheter vektlegges både i forskning og i læreplanen for matematikk, ønsker jeg å finne ut om opplæring i sum og produkt-metoden, sammen med opplæring i mer tradisjonelle løsningsmetoder som blant annet abc-formelen, kan bidra til å gjøre elevene adaptive i arbeid med andregradsuttrykk og andregradsligninger. Jeg ønsker dessuten å undersøke om en målrettet opplæring i adaptivitet i seg selv kan bidra til å realisere intensjonene i LK2020 om at elevene skal benytte ulike løsningsstrategier i arbeidet med faget. I tillegg er jeg interessert i å studere det faglige utbyttet av adaptivitet hos elever med ulik matematisk kompetanse, og da særlig de svakeste elevene (jamfør studiet til Verschaffel et. al.).

For å finne ut av dette, vil jeg besvare følgende forskningsspørsmål:

- *Viser elevene adaptivitet i valg av løsningsstrategier etter at de har fått opplæring i sum og produkt-metoden og spesifikk opplæring i adaptivitet?*
- *Vil utvikling av adaptive strategier bidra til gode prestasjoner hos elever med ulik matematisk kompetanse?*

Dersom jeg finner av disse spørsmålene, vil jeg kunne komme med anbefalinger om hvordan vi matematikklærere kan legge opp undervisningen i andregradslikninger for å stimulere elevene til å utvikle ulike strategier og på den måten oppfylle læreplanens intensjoner.

Svarene på forskningsspørsmålene vil jeg finne ved å analysere oppgavebesvarelser fra 59 elever i matematikk-1T. Jeg vil drøfte funnene med utgangspunkt i læringsteori, i forskning som belyser betydningen av å la elever utlede beviser selv, og i forskning som sier noe om betydningen av adaptivitet i matematikkfaget.

2 Teoretisk rammeverk

2.1 Forskning på matematikkundervisning

Denne masteroppgaven handler om matematikkdidaktikk. Jeg tar utgangspunkt i et konstruktivistisk syn på læring. Ifølge Piaget kan ikke kunnskap overføres mellom mennesker. Kunnskap må konstrueres i enkeltindividet, i hvert fall hvis kunnskapen skal være varig (Piaget, 1964). Med andre ord bør man, med et konstruktivistisk syn på undervisning, tilrettelegge for at læring skjer i elevene gjennom arbeid med matematiske problemstillinger, alene eller sammen med andre. «You cannot teach higher mathematics to a five-year-old. He does not yet have structures which enables him to understand» (Piaget, 1964, s 180). Det er altså ikke lærerens oppgave å forklare elevene alt, men heller legge til rette for at elevene selv utforsker temaene og slik oppdager og selv utvikler logiske strukturer som danner fundamentet i elevenes forståelse. Piaget argumenterer videre med at «the structure which you want to teach to the subjects can be supported by simpler more elementary, logical-mathematical structures» (Piaget, 1964, s 183).

For å ta Piaget på alvor, er viktig at strategiene elevene benytter, kan utledes og forklares med enklere strukturer og logikk som elevene allerede forstår. Dette for å skape sammenheng i kunnskapen slik at de nødvendige strukturene dannes i elevene. Gila Hanna skiller i artikkelen *Proofs that Prove and Proofs that Explain* (Hanna, 1989) mellom bevis brukt av matematikere for å bevise matematikk, og bevis som er laget for å øke elevenes forståelse. Et sentralt poeng for Hanna er at dette ikke er, eller bør, være det samme. Hanna kritiserer matematikkundervisningen i den forstand at lærere og læreverk i stor grad vektlegger konseptuelle bevis som det har tatt matematikere årevis å komme frem til. Utfordringen er at det er vanskelig, for ikke å si umulig, å bruke disse bevisene som et ledd i å skape sammenheng og logiske overganger for elevene. Til det er bevisene for avanserte. Bevisføringen ender dermed med å bli bevis for bevisets skyld, og ikke bevis som fører til økt forståelse hos elevene. Hanna argumenterer for at matematikklærere i større grad bør tilrettelegge for at elevene får utlede sammenhenger selv, og at elevene selv bør komme frem til bevisene slik at bevisene er med på å bygge opp under elevenes forståelse.

Balacheff (1988) er som Gila Hanna opptatt av betydningen av å forstå matematiske utledninger. I artikkelen *Aspects of proof in pupils practice of school mathematics* skriver han om viktigheten av å la elevene utlede og bevise sammenhenger for å konstruere matematisk kunnskap. Balacheff skiller mellom det han kaller pragmatisk bevisføring og konseptuell bevisføring. Pragmatisk bevisføring tar utgangspunkt i handlinger, eksempler og konkretiseringer for å finne sammenhenger. Konseptuell bevisføring går ut på å fjerne seg fra konkretiseringen og eksemplene, og heller bygge bevis på generelle sammenhenger. Konseptuell bevisføring er en viktig gren av matematikken, og elever som skal lære seg avansert matematikk må etter hvert lære seg en slik mer teoretisk tilnærming. Likevel påpeker Balacheff at en mer pragmatisk bevisføring er langt mer egnet for å hjelpe elevene til å se sammenhenger og logiske koblinger i matematikkfaget. Med andre ord kan det være, skal vi tro Hanna og Balacheff, en fordel for elever i norske klasserom om lærere og læreverk i større grad enn i dag tar elevene med på matematiske utledninger og at vi, i større grad enn i dag, tar utgangspunkt i elevenes forståelse for de operasjonene og handlingene de utfører i arbeid med matematikk. Dette poenget kommer jeg tilbake til senere i oppgaven.

Mange elever synes det er vanskelig å lære matematikk, og mange elever får problemer med å forstå matematikken etter hvert som matematikken blir mer komplisert. Lithner (2007) har i artikkelen *A reseach framework for creative and imitative reasoning* laget et rammeverk som beskriver hvordan elever lærer og forstår matematikk. Elever kan lære seg matematikk ved å kopiere resonnementer fra andre og skrive dem ned uten å ha forstått dem, hevder Lithner. Et eksempel er at elevene kopierer det læreren gjør på tavla, uten å forstå det de gjør. Dette omtales av Lithner som «Memorised reasoning» (MR). Elever kan også lære seg algoritmer, med andre ord strukturerte løsningsmetoder, for å løse matematiske oppgaver. Elevene forsøker da å finne frem til riktig algoritme og anvende den på en oppgave. Lithner omtaler en slik framgangsmåte som «Algorithmic reasoning» (AR). AR er en måte å forstå matematikk på som, i motsetning til MR, kan gi gode resultater på prøver og eksamener. Problemet for mange elever kommer når de skal anvende forståelsen som ligger bak algoritmene for å bygge ny kunnskap. Da blir det vanskelig for elevene å henge med, og mange elever synes matematikken blir meningsløs og uforståelig. En mulig løsning på dette problemet er, ifølge Lithner, at elevene i stedet for å lære faste løsningsmetoder stimuleres til «*Creative mathematically founded reasoning*» (CMR) (Lithner, 2007). CMR innebærer at elevene læres opp til å forstå sammenhengene i det de gjør, at de forstår grunnlaget for algoritmene - og at de dermed blir i stand til å anvende den forståelsen de har etablert til å se nye sammenhenger. Det er trolig ingen overraskelse at det å stimulere til CRM er å foretrekke dersom man har et konstruktivistisk syn på læring, en tilnærming til undervisning som understøttes både i nyere forskning og i skolens forskrifter.

Barn bruker varierte løsningsstrategier allerede tidlig i sine læringsprosesser, og fortsetter å bruke både enkle og mer avanserte strategier om hverandre etter hvert som de utvikler seg (Siegler, 2003). Til tross for at barn etter hvert mestrer raskere og mer presise strategier, vil de fortsette å bruke enkle strategier innimellom. Ifølge Piaget er dette viktig for å utvikle strukturene i elevenes forståelse. Selv hos eldre elever, og til og med hos voksne, vil man finne igjen veksling mellom mer avanserte og enklere strategier. Siegler (2003) bruker som eksempel barn som teller på fingrene for å addere eller subtrahere tall. Dersom oppgaven blir vanskelig nok kan også voksne falle tilbake til metoden med å telle på fingrene (Shrager & Siegler, 1998). Siegler hevder at barn lærer bedre når de selv får velge strategi, og at de mer primitive strategiene gradvis vil forsvinne. Adaptivitet i matematikk handler da, i følge Siegler, om at elever i møte med matematiske oppgaver er i stand til å velge den strategien som gir størst sannsynlighet for suksess ut fra særlige kjennetegn ved oppgaven. Kjennetegn ved oppgaven kan for eksempel være hvor kompleks oppgaven er, eller det kan være snakk om ytre rammefaktorer som for eksempel hvor lang tid elevene har på å løse en oppgave.

Torbeyns & Verschaffel gjennomførte i 2016 en studie av grunnskoleelevers bruk av hoderegningsstrategier og bruk av standard løsningsalgoritmer i arbeidet med subtraksjonsoppgaver (Torbeyns & Verschaffel, 2016). Studiene viser at de aller fleste elevene foretrekker standardiserte algoritmer, til tross for at de behersker smarte hoderegningsstrategier. Disse funnene gjaldt også på oppgaver der hoderegning klart ville være den mest effektive tilnærmingsmåten for elevene. Torbeyns og Verschaffel påpeker også at for tidlig innlæring av standardalgoritmer kan føre til feil bruk og misforståelser av algoritmene, såkalte buggy-prosedyrer. Så hva kan være årsaken til dette? Det kan man selvsagt ikke vite. Kanskje er det slik at elevene velger den metoden som de opplever som enklest, der de ikke trenger å tenke. Eller kanskje velger de den metoden de selv vurderer som minst sårbar for logiske brister, altså den metoden de tror er den sikreste. Eller kanskje mangler elevene en forståelse av hva som er de ulike strategienes styrker og svakheter, og dermed en manglende forståelse for hva strategiene de lærer kan brukes til. Funnene til Torbeyns og Verschaffel peker uansett på en betenkelig praksis. I dag har vi drøssevis av hjelpemidler rundt oss. Elevene har kalkulatorer tilgjengelig i lomma til enhver tid. Dersom vi som lærere underviser i metoder som elevene ikke forstår, oppskrifter de kan følge for å få et riktig svar, så gjør vi dem ikke selvstendige og tenkende i møte med de oppgavene vi ønsker at de skal løse.

Et annet interessant funn, er at hoderegningstrategien som stod sentralt i Torbeyns & Verschaffel sine studier, er en metode som man finner i bruk hos de fleste voksne (Siegler & Lemaire, 1997). Det at elevene ikke benyttet disse hoderegningsstrategiene på testen til Torbeyns & Verschaffel, betyr altså ikke at elevene kommer til å bruke standardalgoritmen resten av livet. Funnene viser heller at det tar tid å utvikle strategier, og at elevene selv må ta del i utviklingen av disse. Det er altså viktig at vi som lærere tenker lenger frem enn til neste eksamen eller prøve og lar elevene utvikle strategier som de har bruk for senere i livet eller som er viktige for elevenes forståelse av matematikk.

Heinze et al. (2009, s 536) skiller mellom adaptiv ekspertise og rutineekspertise. Rutineekspertise vil si at elevene gjør matematikkoppgaver etter en oppskrift og uten særlig forståelse. Dette minner om det Lithner i sine studier omtaler som Algoritmic reasoning (AR). Den adaptive ekspertisen viser elevene ved å anvende meningsfulle strategier fleksibelt og kreativt. Dette minner om Lithners tanker om Creative matematically foundend reasoning (CMR). Heinze et al. (2009) skiller videre mellom varierte løsningsstrategier og adaptive løsningsstrategier. Varierte løsningsstrategier betyr at elevene behersker flere løsningsstrategier, men at de ikke nødvendigvis tar bevisste valg rundt hvilke strategier de benytter seg av. Adaptive løsningsstrategier vil si at elevene tilpasser valg av strategier til den oppgaven de skal løse. Dette er et viktig skille, da jeg i mine studier kommer til å fokusere særlig på elevenes bevisste valg av strategier i arbeidet med andregradsligninger.

2.2 Læreplanverket for matematikk 1T

Nå har vi sett hva sentrale forskere har funnet ut om matematikkopplæring. Læreplanverket for matematikk i Norge er selvsagt fundert i forskning om læring generelt og læring i matematikk spesielt. Jeg skal nå i grove trekk vise hvordan mange av tankene til forskerne er å kjenne igjen i læreplanen for 1T.

Læreplanen (UDIR, 2019) innledes med:

> *Matematikk T er et sentralt fag for å tilegne seg verktøy for å kunne forstå matematiske sammenhenger. Faget skal gi elevene mulighet til å*

utvikle problemløsingsstrategier som forbereder dem til videre arbeid i andre fag som krever matematikk. Matematikk T skal forberede elevene på en utdanning og et arbeidsliv som stiller krav om matematisk forståelse, gjennom teoretisk bruk av matematikk.

I innledningen ser vi at læreplanen forfekter et konstruktivistisk syn på læring, gjennom at utvikling av elevenes forståelse er det sentrale. Gjennom å framheve forståelse, framgangsmåter og strategier mer enn selve løsningene, støtter læreplanen seg dermed på blant annet på Piagets tanker om at kunnskap og forståelse konstrueres i enkeltindividet, samt Balacheff og Hannas vektlegging av behovet for at elevene forstår matematiske utledninger gjennom å aktivt ta del i dem.

Et konstruktivistisk syn på læring ser vi også i kjerneelementet «utforsking og problemløsning». Her står det nemlig at

Utforsking i matematikk 1T handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. <u>Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene</u> (Min utheving.). Problemløsing i matematikk T handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før. Algoritmisk tenkning er viktig i prosessen med å utvikle strategier og framgangsmåter (...)»

Læreplanen hevder dermed, som Heinze et al. (2009) , at det er viktig å lære elevene ulike strategier, og at elevene bør utvikle et bevisst forhold til hvilke strategier de bruker og hvorfor. Gjennom å utvikle adaptive ferdigheter blir elevene i stand til å møte matematiske utfordringer på en selvstendig og kritisk måte, noe som er en forutsetning for at de skal kunne løse problemer de ikke kjenner fra før.

Under kjerneelementet «resonnering og argumentasjon» poengteres det at resonnering i matematikk 1T handler om at elevene skal «følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker». Videre står det at «elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer.» Læreplanen vektlegger, på samme måte som Hanna og Balacheff, at man bør undervise i matematikk på en måte som gjør elevene delaktige i utledningen til de algoritmene de benytter seg av. Matematikkundervisningen bør konsentrere seg mer rundt bevis som beviser enn bevis som forklarer, for å bruke Hannas termer.

Det er flere konkrete kompetansemål i læreplanen i matematikk 1T som understøtter, eller understøttes, av forskningen vist til tidligere. Blant annet står det i læreplanen at et mål er at eleven skal kunne «Forstå og løse problemer ved hjelp av algoritmisk tenkning, <u>ulike problemløsningsstrategier</u>, digitale verktøy og programmer (min utheving)», eleven skal kunne «lese og <u>forstå matematiske bevis</u> og <u>utforske og utvikle bevis</u> i relevante matetiske emner (mine uthevinger)», «<u>utforske strategier</u> for å løse ligninger, ligningssystemer og ulikheter og <u>argumentere for tenkemåtene sine</u> (mine uthevinger)». Det at elevene utvikler forståelse gjennom å være aktivt deltakende og kunne beskrive tenkemåtene sine, blir vurdert som helt sentralt i elevens kompetanse. Det samme gjør elevens evne til å bruke ulike problemløsningsstrategier i arbeidet med oppgaver, og å kunne bruke disse bevisst. Under underveisvurdering står det blant annet at «Elevene viser kompetanse i faget når de finner, forstår og generaliserer matematiske sammenhenger.», og «Elevene viser og utvikler også kompetanse ved å utforske fagbegreper, bruke matematiske metoder og resonnere matematisk.»

Kort oppsummert ser vi at læreplanen forfekter et konstruktivistisk syn på læring gjennom en vektlegging av at elevene selv skal være aktivt deltakende i utledning av problemløsningsstrategier, og at elevene skal kunne bruke ulike strategier i ulike sammenhenger bevisst samtidig som de skal kunne forklare hvorfor.

2.3 Min studie i møte med tidligere forskning

Studiene av elevers adaptivitet som det er referert til over, er rettet mot elever i grunnskolen. Det er grunnskoleleveres strategier i aritmetikk som er undersøkt. Men verdien av det å utvikle elevers evne til å utnytte ulike strategier i møte med matematiske utfordringer, er like stor på videregående skole som i grunnskolen. Om ikke større. Dette grunnleggende synet på læring og kompetanse i matematikkfaget underbygges som vi nettopp har sett av det nye læreplanverket i matematikk for 1T.

Det kunne være naturlig å studere om eksisterende undervisningspraksis i videregående skole er i tråd med det forskning sier om problemløsningsstrategier og elevers adaptive ferdigheter. Etter min erfaring, både fra egen skole – men også slik jeg kjenner praksis andre steder – har vi en vei å gå. I stedet for å sette søkelys på *om* vi underviser i henhold til intensjonene i læreplanen for matematikk, ønsker jeg heller å fokusere helt konkret på *hvordan* vi kan undervise på en måte som gjør at vi realiserer intensjonene om å utvikle elevenes adaptive kompetanse. Nærmere bestemt tar jeg utgangspunkt i undervisning av sum og produkt-metoden i møte med løsning av andregradsligninger. Jeg ønsker å studere hvorvidt prinsippene til Heinze et al. (2009), Hanna (1989), Balacheff (1988) og Siegler (2003) er relevante også for eldre elever, altså elever på videregående skole. Dette er sannsynligvis den første studien på temaet adaptivitet og andregradsligninger i videregående skole.

3 Løsningsstrategier i arbeid med andregradsuttrykk

3.1 Vanlige metoder for løsning av andregradsligninger i læreverk

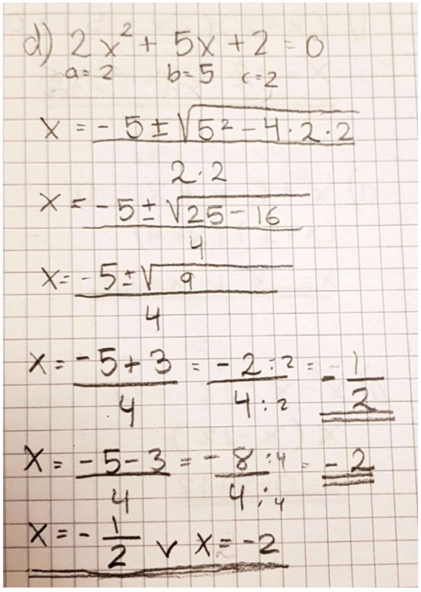
I de tre mest brukte læreverkene i Norge, *Mønster 1T* (Kalvø et al., 2020), *Matematikk 1T* (Borge et al., 2020) og *Sinus 1T* (Oldervoll, 2020), får elevene innføring i flere strategier for å løse andregradslikninger. En vanlig rekkefølge er at lærebøkene starter med å faktorisere andregradsuttrykk og bruker kvadratsetningene til faktorisering. Elevene lærer så å bruke produktregelen til å finne løsninger på ligninger. Lærebøkene presenterer etter dette fullstendige kvadrat, slik at elevene blir i stand til å faktorisere flere uttrykk enn det er mulig med kvadratsetningene. Mot slutten av opplæringen i andregradsligninger, introduserer alle de tre mest brukte læreverkene abc-løsningsformel.

Andregradsuttrykk kan i mange tilfeller også enkelt faktoriseres gjennom bruk av metoden sum og produkt (SP). Sum og produkt-metoden kan betegnes som en hoderegningsstrategi, siden den kan utføres uten penn og papir. Sum og produkt-metoden er rask og enkel å benytte. Metoden tar utgangspunkt i algebra som eleven kjenner fra grunnskolen, og metoden er dermed lett å utlede for elevene. I læreboken *Mønster 1T* (Kalvø et al., 2020, s 87) blir elevene presentert for sum og produkt-metoden som en mulig tilnærming i arbeidet med andregradsligninger, i tillegg til metodene nevnt over.

I min studie har jeg valgt å konsentrere meg om to løsningsstrategier, nemlig abc-løsningsformel og sum og produkt-metoden. Dette fordi disse to metodene er veldig forskjellige i hvordan de kan utledes og hvordan de stimulerer til elevenes forståelse.

3.2 Abc-løsningsformel

Abc-løsningsformel eller abc-metoden, er altså en dominerende metode i norsk skole. Abc-formelen tar utgangspunkt i en generell andregradsligning $ax^2 + bx + c = 0$ og finner løsningene på ligningen ved $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Formelen gir en, to eller ingen reelle løsninger avhengig av verdiene til a, b og c. Den store fordelen med abc-løsningsformel, er at man gjennom bruk av denne metoden kan løse alle typer andregradsligninger. Figur 3.1 viser et eksempel på hvordan en elev bruker abc-formelen til å løse en andregradsligning.



Figur 3.1 Elev løser en andregradsligning med abc-løsningsformel

Sammen med faktoriseringsformelen kan abc-formelen også benyttes til å faktorisere og til å finne nullpunkter til andregradsfunksjoner.

Beviset for abc-formelen er det vanskelig for elevene i 1T å utlede ut fra de erfaringene og den kunnskapen de har fra før. Det vanlige er derfor at lærer viser hvordan formelen kan utledes gjennom blant annet fullstendige kvadraters metode. Dette gjøres på tavla og elevene tar dermed i liten grad del i utledningen av formelen. Beviset for abc-formelen blir da et bevis *som beviser* og ikke et bevis *som forklarer* (Hanna, 1989). Beviset blir for mange elever det Balacheff (1988) betegner som et konseptuelt bevis. Bevisføringen er dermed lite egnet til å utvikle elevenes «creative mathematically founded reasoning (CMR)» (Lithner, 2017). Elevene lærer seg så å benytte løsningsformelen, og metoden blir det Heinze et al. (2009) vil omtale som rutineekspertise for elevene, eller det Lithner vil omtale som «memorised reasoning (MR)» eller i beste fall «algoritmic reasoning (AR)» (Lithner, 2017). Elevene benytter med andre ord formelen uten å reflektere over hvorfor den fungerer, og formelen er lite egnet for å utvikle elevens matematiske forståelse.

3.3 Sum og produkt-metoden

Sum og produktmetoden (SP) er ikke noen ny metode. Den omtales gjerne som heltallsmetoden siden den alltid fungerer dersom en andregradsligning har heltallige løsninger. Metoden er vist i flere læreverk, men gjerne etter at elevene har lært abc-løsningsformel.

Sum og produkt-metoden går ut på å først faktorisere ut tallet foran x^2-leddet i et andregradsuttrykk:

$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$3(x^2 + 4x + 3) = 0$$

Videre går metoden ut på å se på hvordan konstantleddet som står igjen kan faktoriseres. I dette eksempelet i produktet $3 \cdot 1$. Samtidig sjekker man om summen av de to tallene i produktet blir tallet foran x-leddet, her blir dette $(3 + 1)$.

$$3(x^2 + (3 + 1) \cdot x + 3 \cdot 1) = 0$$

Neste trinn er å se at dette igjen kan skrives som:

$$3(x + 3)(x + 1) = 0$$

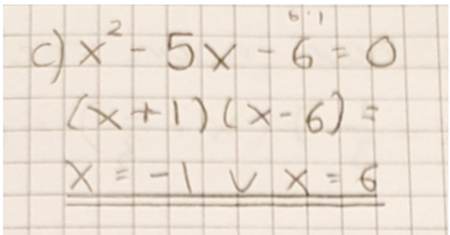
Videre bruker man produktregelen for å se at det er to muligheter for at denne ligningen kan bli null:

$$x + 3 = 0 \; eller \; x + 1 = 0$$

Dette gir løsningene:

$$x = -3 \; eller \; x = -1$$

I utgangspunktet er oppgaven over en algebraoppgave som elevene utfører med penn og papir, men sum og produkt-metoden fungerer også godt som hoderegningsstrategi. Etter å ha fått trening i sum og produkt-metoden ser elevene hvordan de skal komme frem til produktet og summen uten å skrive opp mellomregninger, som vist i figur 3.2.



Figur 3.2 Et eksempel på løsning med SP uten mellomregninger

3.4 Fordeler ved bruk av sum og produkt-metoden

Utledningen av SP er enkel og forutsetter bare grunnleggende ferdigheter i algebra. Ved å la elevene utlede sammenhengene i metoden selv, konstrueres kunnskapen hos den enkelte elev, i tråd med Piagets teorier om læring. Det er kort vei tilbake til utledningen dersom elevene blir usikre på metoden. Utledningen av sum og produkt-metoden kan dermed bli et bevis *som forklarer* (Hanna, 1989)noe som kan bidra til at elevene opplever forståelse og mestring.

Abc-metoden er, som jeg har vist, en standard løsningsalgoritme, mens SP-metoden kan betegnes som en smart hoderegningsstrategi (Torbeyns & Verschaffel, 2016). Abc-metoden stimulerer til å utvikle elevenes rutineekspertise (Heinze et al., 2009), eller det Lithner omtaler som AR (Lithner, 2017). Sum og produktmetoden er derimot en metode som i større grad bidrar til å hjelpe elevene til å se sammenhenger, stimulerer elevenes CMR (Lithner, 2017) og elevenes adaptive ekspertise (Heinze et al., 2009).

LK20 (UDIR, 2017) fokuserer i stor grad på dybdelæring og utvikling av elevenes faglige forståelse. I denne sammenheng betyr dybdelæring blant annet at elevene utforsker strategier for å løse andregradsligninger. Mine kollegaer og jeg var enige om at abc-løsningsformel i liten grad gir rom for den type utforskning og selvstendighet i tilnærmingen som reell dybdelæring legger opp til. Vi ønsket derfor å ta utgangspunkt i løsningsstrategier som var enklere å utlede og forstå for elevene. For å gjøre dette måtte vi starte undervisningen med en enklere tilnærming til andregradsligninger enn abc-formelen. Vi valgte derfor å starte undervisningen av andregradsligninger gjennom en grundig opplæring i sum og produkt-metoden.

4 Metode

4.1 Utvalg

Deltagerne i studien var 59 elever fra tre klasser i 1T matematikk på studieforberedende utdanningsprogram. Jeg var selv lærer i en av klassene. Studien tar dermed utgangspunkt i et bekvemmelighetsutvalg, noe som gjør at jeg må være ekstra forsiktig med å generalisere funnene til å gjelde alle elever som velger matematikk 1T (Cohen et al., 2018, s218).

Elevene som deltok i studien, gikk ut fra grunnskolen våren 2021. De har dermed fulgt læreplanen i matematikk fra 2013 (UDIR, 2013). Etter denne læreplanen skulle elevene kunne kvadratsetningene fra før, og de skulle kunne bruke kvadratsetningene til faktorisering. Elevene skulle beherske løsning av kvadratiske ligninger, f.eks. $x^2 = 9$. Det er rimelig å anta at elevene ikke kjente hverken abc-formelen eller sum og produkt-metoden fra før.

Alle elevene ble på forhånd spurt om de ønsket å delta i studien. Samtlige deltagere undertegnet samtykkeskjema. Elever som ikke deltok i studien, jobbet med de samme oppgavene som resten av klassen uten at oppgavene ble samlet inn. Besvarelser fra elever som ikke undertegnet samtykkeskjema er utlatt fra studien.

4.2 Kategorisering i prestasjonsgrupper

For å kunne sammenligne elevenes adaptivitet med elevenes generelle ferdighetsnivå i matematikk, fulgte jeg prosedyren til Torbeyns og Verschaffel (2016) med å dele elevene inn i kategorier. For å lage kategoriene tok jeg utgangspunkt i resultater fra en kartleggingsprøve som elevene gjennomførte i august der elevene fikk oppgaver fra hele pensum i matematikk. Elever i øverste kvartil på kartleggingsprøven ble kategorisert som «høyt presterende». Elever i nedre kvartil ble kategorisert som «under middels». Elever mellom øvre og nedre kvartil kategoriserte jeg som «middels presterende». Høyeste antall oppnåelige poeng på kartleggingsprøven var 43. Kategoriseringen er oppsummert i tabell 4.1.

Prestasjonsgruppe	Poeng på kartlegging	Antall
Høyt presterende	Over 32 poeng	18
Middels presterende	Mellom 22 og 32 poeng	24
Under middels presterende	Under 22 poeng	14

Tabell 4.1 Inndeling i prestasjonsgrupper basert på score på kartleggingsprøve

Fire elever manglet data fra kartleggingsprøven. Disse utelot jeg når jeg sammenlignet prestasjonsgruppene.

4.3 Undervisning før datainnsamling

Elevene i studien er hentet fra tre ulike klasser og har tre ulike lærere. Jeg er en av disse. Vi lærere samarbeidet i team og hadde et fast, ukentlig samarbeidsmøte. I temaet andregradsligninger ble vi enige om hvilke strategier for å løse andregradsligninger vi skulle gi elevene opplæring i, og vi fulgte den samme fremdriftsplanen. Undervisningen i andregradsligninger foregikk i uke 41 til og med uke 45 i alle tre klassene.

Vi startet undervisningen med at elevene bygde opp andregradsuttrykk ved å multiplisere to parenteser. Elevene jobbet i grupper på tre på vertikale tavler som beskrevet i artikkelen *Building Thinking Classrooms* (Liljedahl, 2018). Liljedals metode går kort fortalt ut på å stimulere elevene til å tenke selv og utforske matematiske problemstillinger, uten for mye innblanding fra læreren. Målet var at elevene selv skulle komme frem til at multiplikasjonen av to parenteser ble: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b) \cdot x + a \cdot b$, noe som er utgangspunktet for å forstå sum og produkt-metoden.

I etterkant brukte elevene resultatet til å faktorisere andregradsuttrykk gjennom å gå motsatt vei. Elevene faktoriserte det siste tallet og fant ut hvordan de kunne legge sammen a og b for å få tallet i midten. På denne måten kom elevene frem til sum og produkt-metoden på egenhånd. Vi la opp undervisningen på denne måten for å oppfylle målet i læreplanen om utforskning og dybdelæring.

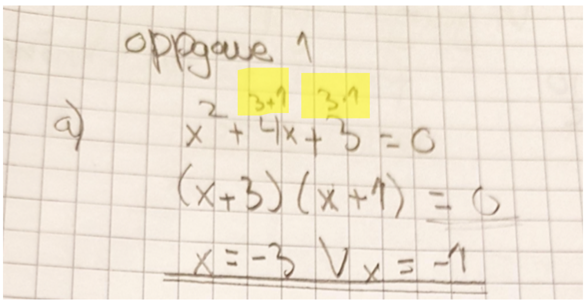
Elevene jobbet videre med SP. De kom frem til en metode for å løse andregradsligninger ved å først faktorisere uttrykket, og så finne løsningene på ligningen ved å sette inn tall i parentesene som oppfylte ligningen.

$$(x+a)(x+b) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -a \ eller \ x = -b$$

Et eksempel på hvordan en elev løste ligninger med SP, er vist i figur 4.1. I denne besvarelsen kommer det frem hvordan eleven har tenkt for å løse oppgaven. Her kan man se at eleven har faktorisert det siste tallet til $3 \cdot 1$ og delt opp tallet foran x til $3 + 1$ (markert med gult).



Figur 4.1 Eksempel på bruk av sum og produkt-metoden

I de fleste besvarelsene som er analysert i denne oppgaven, har elevene løst oppgavene i hodet og skrevet opp faktoriseringen og løsningene direkte uten å ta med utregning (figur 3.2).

Etter å ha jobbet i to uker med sum og produkt-metoden, ble elevene introdusert for abc-løsningsformel (abc). Elevene lærte seg å benytte formelen for å finne løsninger på andregradsligninger, og de fikk innføring i hvordan de kunne bruke løsningene til faktorisering. I denne delen av undervisningen ble det i liten grad lagt opp til at elevene skulle forstå utledningen av abc-formelen. Fokuset var på hvordan elevene skulle bruke løsningsalgoritmen.

I det videre arbeidet med andregradsligninger fikk elevene jobbe med oppgaver der de kunne velge strategi selv. Elevene ble oppfordret til først å prøve SP, og kun benytte abc dersom de ikke klarte å finne heltallige løsninger med SP. I denne tiden jobbet elevene mye på vertikale tavler (Liljedahl, 2018), og fokuset i oppsummeringer var å få frem ulike strategier og å få elevene til å reflektere rundt hvilke strategier som var mest effektive til de ulike oppgavene. Elevene fikk altså spesifikk undervisning i det å være adaptive, noe vi lærere hadde blitt enige om.

Undervisningen i forkant av datainnsamlingen la altså opp til at elevene skulle benytte SP som første løsningsstrategi. Elevene fikk også opplæring i bruk av abc-formelen. I tillegg fikk elevene trening i å selv vurdere hvilke metoder som egnet seg best for å løse ulike oppgavetyper.

4.4 Datainnsamling

I uke 2, åtte uker etter at undervisningen i andregradsligninger var avsluttet, gjennomførte elevene en test basert på «choice/no choice-metoden» (Shrager & Siegler, 1998). «Choice/no choice-metoden» er en metode som også Torbeyns & Verschaffel (2016) benyttet i sin studie.

I «choice/no choice-metoden» får elevene først oppgaver der de fritt kan velge metode (choice). Etterpå får elevene oppgaver der de er pålagt å følge en bestemt strategi (no choice). Poenget er å se om elevene er adaptive i tilnærmingen sin til matematiske oppgaver. Metoden avdekker hvilke strategier elevene velger i de tilfellene der de kan velge (choice-delen). Et annet mål er å få informasjon om elevene velger den strategien som er den mest effektive for den enkelte. Dette gjør man gjennom å teste om elevene behersker oppgaver også når de blir pålagt en bestemt løsningsstrategi (no choice).

For elevene i min studie kan for eksempel en elev som kun benytter abc på choice-delen av oppgavene, likevel vise adaptivitet dersom eleven på no choice-oppgavene regner oppgaver med abc mer effektivt og nøyaktig enn gjennom bruk av SP. Da har eleven valgt den strategien som ga størst sannsynlighet for å komme frem til det riktige resultatet i den aktuelle situasjonen.

I utvalget av oppgaver til choice-delen var det viktig å presentere elevene for oppgaver som kunne løses med både abc og SP. På noen av oppgavene er det ikke opplagt at en av metodene har en klar fordel, for eksempel $x^2 + 4x + 3 = 0$. I denne ligningen er tallene enkle å faktorisere med SP, men tallene er også enkle å håndtere i abc. I andre oppgaver som $x^2 - 12x + 36 = 0$ blir det store tall å håndtere med abc-metoden, men enkle tall å faktorisere med SP-metoden. På samme måte er oppgaver som $2x^2 + 5x + 2 = 0$, enkle å løse med abc-metoden, men vanskelig med SP-metoden siden man må faktorisere med brøker. Elevene fikk også en oppgave som ikke hadde noen løsning. Denne oppgaven var det ikke mulig å løse med SP-metoden alene. SP-metoden vil kun vise at det ikke finnes heltallige løsninger. Elevene måtte da ta med en tilleggsforklaring, eller løse oppgaven ved å vise at diskriminanten (tallet under kvadratroten i abc-formelen) blir negativ.

Målet med choice-oppgavene var altså å avdekke om elevene valgte den strategien som var mest effektiv for dem selv. På no choice-delen fikk elevene oppgaver de måtte løse med SP-metoden, og etter dette oppgaver de måtte løse gjennom bruk av abc-metoden. Oppgavene gitt i no choice-delen liknet på oppgavene på choice-delen. Som i studien til Torbeyns og Verschaffel (2016), var målet å avdekke hvor effektive elevene var til å utnytte de to metodene på ulike oppgaver, altså å avdekke elevenes adaptive ferdigheter og dybdeforståelse.

4.5 MMR som metode

Jeg har valgt «mixed methods research (MMR)» (Cohen, Manion, & Morrison, 2018, s38-50) som metode for å analysere innsamlede data. Ved å kombinere informasjon fra kvalitative og kvantitative data kan man med MMR få mer informasjon og forståelse for forskningstemaet enn man hadde fått ved å analysere data utelukkende kvantitativt eller kvalitativt. MMR er egnet for denne studien, siden jeg kan kombinere kvalitativ informasjon jeg får ved å analysere hvordan elevene løser oppgavene med kvantitativ informasjon fra kartleggingsprøven og elevenes score på de ulike oppgavetypene. Jeg har benyttet kvalitative metoder, som tematisk analyse (TA) (Braun & Clarke, 2012), for å lete etter kjennetegn på adaptivitet. I studien har jeg også brukt kvantitative metoder og statistikk for å få et overblikk over og kunne si noe om elevers adaptivitet.

I MMR (Cohen et al., 2018, s 38) er det viktig å velge hvordan man prioriterer mellom kvalitative og kvantitative metoder for analyse av data. I påfølgende avsnitt vil jeg beskrive hvordan jeg har benyttet kvalitative og kvantitative metoder i denne studien.

4.6 Kvalitative data

For å svare på hvordan opplæring i adaptivitet og bruk av SP påvirker elevenes adaptivitet i løsning av andregradsligninger, har jeg lett i datamaterialet etter eksempel på løsninger av oppgaver der elever viser adaptivitet. Elevenes adaptivitet er det vanskelig å avdekke med statistiske metoder alene. For å analysere kvalitative data har jeg derfor valgt å benytte Tematisk Analyse (TA) (Braun & Clarke, 2012). I TA er målet å få innsikt gjennom å systematisk identifisere og organisere data og på den måten finne mønster. I en slik analyse vil man, ifølge teorien, finne mange mulige mønstre. Målet med min analyse er selvsagt å finne mønstre som er med på å svare på forskningsspørsmålene jeg har stilt, altså om elevene er adaptive.

I TA er det anbefalt å gå gjennom seks faser for å analysere data. Jeg har i studien min valg å følge disse seks fasene. I den første fasen ble jeg kjent med datagrunnlaget ved å lese gjennom elevbesvarelsene mange ganger. Jeg leste aktivt og kritisk, og prøvde å forstå hva elevenes svar egentlig betydde. Jeg avdekket funn som var relevante for forskningsspørsmålet. Den andre fasen gikk ut på å kode data. Ved å legge koder på en observasjon, så tolker man data og plasserer data inn i et teoretisk rammeverk. Kodene trenger ikke å være selvforklarende, og de trenger ikke å gi mening for andre. I fase tre vurderte jeg funn jeg hadde oppdaget og kodet, opp imot hele datasettet. Fasen var ment som en kvalitetssjekk. Videre lette jeg i fase fire etter mønstre og funn, og sammenlignet funnene med resten av datamaterialet. I fase fem prøvde jeg å avdekke hva som er unikt og spesifikt med funnene mine, og passet på at hvert funn ikke omfattet for mye. I siste fase var det viktig at det var sammenheng mellom funnene, og at funnene hadde relevans for forskningsspørsmålet.

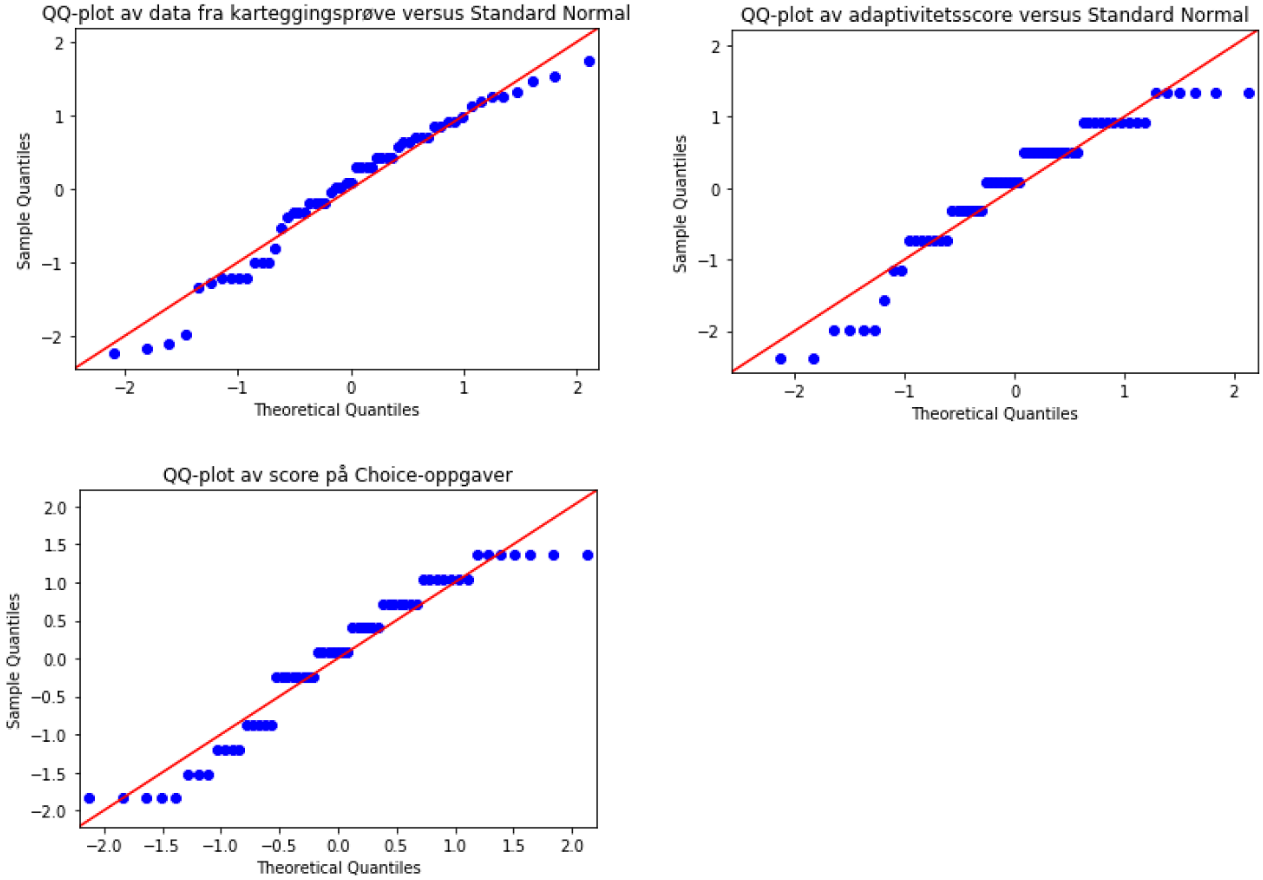
Etter å ha gjennomført TA kom jeg frem til følgende kvalitative kriterier for å vurdere elevenes adaptivitet:

- Eleven benyttet begge metodene, både sum og produkt-metoden og abc-lønsningsformel (eller eventuelt andre metoder), på choice-oppgavene.
- Eleven benyttet den metoden på choice-oppgaver som eleven viste var mest effektiv på no choice.
- Eleven valgte den samme metoden som gruppen som helhet viste at var den mest effektive metoden på den enkelte oppgaven.

Disse kriteriene er inspirert av studien til Torbeyns & Verschaffel (2016), bortsett fra at jeg i min studie ikke hadde ressurser til å observere og ta tiden på elevene på de enkelte oppgavene slik Torbeyns & Verschaffel gjorde.

4.7 Kvantitative data

Cohen et al. (2018, s 725 - 737) trekker frem flere forhold i arbeidet med kvantitative data som jeg har tatt hensyn til i studien. Variablene i studien er poeng fra kartleggingtesten, en adaptivitetsscore som graderer elevenes evne til å være adaptive, samt score på choice og no choice-oppgaver. Jeg har brukt QQ-plot (Seabold & Perktold, 2010) for å vurdere om dataene mine er normalfordelt. Figur 4.2 viser at det er en rimelig antagelse at data fra kartleggingsprøven, adaptivitetscore og score på choice-oppgavene er normalfordelt. Jeg har derfor benyttet korrelasjonsplott, z-tester og t-tester i min analyse, siden disse testene er avhengig av at data er tilnærmet normalfordelt.



Figur 4.2 QQ-plot av ulike data versus standard normalfordeling

For å avdekke om det var grunnlag for å benytte de statiske metodene nevnt over, prøvde jeg først metoden med tilfeldig genererte normalfordelte data med samme gjennomsnitt og standardavvik som dataene jeg skulle analysere.

For signifikante funn har jeg benyttet et signifikansnivå på p=.05. Siden jeg utfører mange tester på samme datamateriale, vil jeg risikere å få signifikante forskjeller selv med et signifikansnivå på p=.05 selv ved forskjeller som egentlig ikke er signifikante (Cohen et al., 2018, s 742). Ved flere analyser av samme datamateriale har jeg derfor fordelt signifikansnivået på antall tester, f.eks. når jeg har sett på sammenhenger mellom prestasjonsgruppene. På denne måten har jeg forsøkt å unngå å få falske positive funn.

For å kunne konkludere med at flertallet av en gruppe har et positivt eller negativt resultat har jeg satt nullhypotesen til 0.50.

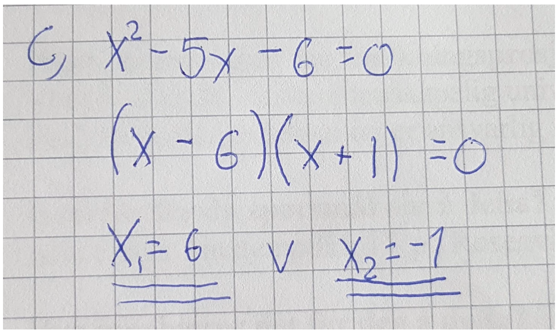
Til å analysere data har jeg benyttet bibliotekene statsmodels (Seabold & Perktold, 2010) og scipy (*SciPy*, n.d.) i python og standard statistikkfunksjoner i Excel.

Jeg beregnet Pearson Correleation Coefficient (Cohen et al., 2018, s 746) for alle spredningsplott.

4.7.1 Poengsetting på elevbesvarelser

I poengsettingen av oppgaver så jeg bort fra notasjonsfeil (for eksempel feil bruk av likhetstegn), opplagte slurvefeil og noen fortegnsfeil. Jeg valgte å ikke gi poeng dersom fortegnsfeil ble gjentatt på flere liknende oppgaver, siden feilene da kan bety at elevene brukte metodene feil.

Jeg har registrert hvilken metode elevene har valgt på alle valgfrie oppgaver. Elever som går rett fra andregradsuttrykket til faktorisert form, har jeg markert som SP (figur 4.3). På 60 av totalt 478 oppgaver har jeg ikke kunnet avgjøre hvilken metode eleven har valgt eller eleven har benyttet en annen metode enn SP og abc.



Figur 4.3 Eksempel på oppgave som er tolket som SP, selv om det ikke kommer frem hvordan eleven har tenkt.

4.7.2 Adaptivitetsscore

Elevene har fått poeng for å benytte den løsningsstrategien som er vurdert som den mest effektive for den enkelte elev utfra hvordan elevene presterte på tilsvarende oppgaver på no choice. I tilfeller der det er vanskelig å bedømme hvilken metode som var mest effektiv for den enkelte elev, har jeg vurdert hvordan elevene som gruppe løser oppgavene mest effektivt. Oppgaver der elevene fikk best uttelling ved å bruke SP, kodet jeg som en SP-oppgave. Oppgaver der abc var mest effektiv, ble kodet som en abc-oppgave. Elever som besvarer en SP-oppgave korrekt med SP fikk da ett adaptivitetspoeng. Elever som besvarte en SP-oppgave korrekt med abc, fikk null poeng og en elev som besvarte en SP-oppgave galt med abc, fikk -1 poeng. På denne måten fikk jeg tallfestet elevenes adaptive ferdigheter, noe jeg kunne benytte for å sammenligne med elevenes score på de ulike oppgavetypene og elevenes score på kartleggingstesten. Den samlede poengsummen for adaptivitet har jeg kalt adaptivitetscore.

Jeg har tatt med oppgave 1a til og med 1e + 1h, i vurderingen av adaptivitetscore siden resten av choice-oppgavene ikke blir testet på no choice-oppgavene. Jeg har valgt å gi noen elever poeng selv om de ikke har oppfylt kriteriene for adaptivitet. Elevene kan f.eks. ha gjort slurvefeil og fått en løsning med SP på 1e.

Siden forskningsspørsmålet mitt handler om å vurdere om elevene viser adaptivitet, ønsket jeg å være sikker i vurderingen av adaptivitet på hver enkelt elev. Jeg valgte derfor å sette grensen til over to adaptivitetspoeng for å vurdere en elev som adaptiv.

4.8 Validitet og etiske problemstillinger

Siden dataene i mine studier er hentet fra elevbesvarelser, har jeg brukt rådene som står i kapitlet «Validity and reliability in tests» (Cohen et al., 2018, s. 245 - 283) som et rammeverk for å sikre troverdigheten i min forskning. Teorien lister opp en rekke kilder til manglende troverdighet. Jeg vil i det følgende beskrive hvordan jeg har tatt hensyn til disse rådene, spesielt i dataanalysene.

For det første kan det ha påvirket elevenes evner til å være adaptive at de har øvd på lignende oppgaver tidligere. Oppgavene elevene fikk var stort sett oppgaver med heltallige løsninger. Det er begrenset hvor mange ulike oppgaver man kan lage av denne typen. Elevene hadde derfor løst mange tilsvarende oppgaver før. Den adaptiviteten elevene viser kan være tillært ved at de kjenner igjen oppgaven og velger den metoden de har lært at fungerer.

For det andre kan man stille spørsmål til om de utvalgte oppgavene i denne studien er gode nok til å avgjøre om elevene faktisk var adaptive. Dette er en stor utfordring ved utvelgelse av data. Det er vanskelig å forutse hvilke oppgaver som er enklest å løse med abc eller SP. Et eksempel på dette så jeg på oppgave 1b. Oppgaven, $x^2 - 13x + 42 = 0$ tok jeg med fordi den skulle være vanskelig å benytte med abc-metoden, men enkel å faktorisere med SP. Det viste seg, når jeg så gjennom elevbesvarelsene, at flere elever ikke så at 42 kunne faktoriseres som $7 \cdot 6$. De endte da med å benytte abc-metoden.

Et tredje poeng er at jeg kjenner noen av elevene godt. Det er lett å tillegge elever som presterer bra i andre tema en bedre forståelse enn de egentlig har - og omvendt for elever som presterer dårlig. Dette omtales gjerne som «Halo effect» (Cohen et al., 2018, s. 321), noe som kan påvirke mine tolkninger av data.

Et fjerde kilde til manglende troverdighet er at elevene kan ha valgt andre metoder for å løse andregradsligninger enn den de selv foretrekker fordi de trodde at det var forventet fra læreren. Funnene mine kan være preget av dette.

Alle disse punktene har jeg forsøkt å ta hensyn til i utvelgelse av oppgaver og i analysen av elevenes besvarelser gjennom å anonymisere besvarelser, gi varierte og mange oppgaver, ved å være åpen om at elevene hadde løst lignende oppgaver tidligere og at elevene hadde øvd på adaptivitet.

Følgende elementer fra teorien (Cohen et al., 2018, s. 268 – 284) kan styrke forskningens troverdighet: Jeg har tykke data, siden jeg har komplette elevbesvarelser med utregning og forklaringer. Jeg informerte elevene om at resultatene fra testen ble gitt til lærerne deres. Jeg kan dermed anta at elevene gjorde så godt de kunne. Jeg og de andre lærerne fikk lite mulighet til å påvirke elevenes besvarelser underveis, siden dette var en skriftlig test uten hjelpemidler.

For å gjennomføre analysen av data på en etisk god måte, har jeg brukt anbefalinger fra Cohen et al., (2018, s 111-141). Disse er relevante for min undersøkelse. Jeg har brukt anerkjente analyseteknikker (Braun & Clarke, 2012), og jeg har vært åpen om hvilke data jeg har inkludert i analysen og hvilke data som er ekskludert. I analysen av data tilstreber jeg å ikke overdrive betydningen av data eller trekke konklusjoner det ikke er grunnlag for, og jeg forsøker å lete etter alternative forklaringer til funnene mine. I en studie som denne, der jeg som forsker både er en del av studien (siden jeg er lærer i faget) og er den som analyserer, vil det ikke være mulig å være objektiv. Jeg har derfor etterstrebet å være åpen om de verdiene og erfaringer jeg tar med meg inn i forskningen.

Siden lærerne som deltok i studien er mine kolleger, ønsket jeg ikke å vurdere forskjeller mellom klassene. Jeg har valgt å ikke sammenligne elevene på tvers av undervisningsgruppene.

5 Resultater

I denne delen oppsummerer jeg relevante resultater. I kapittel 5.1 oppsummerer jeg funn som er relevante for forskningsspørsmålet; *Viser elevene adaptivitet i valg av løsningsstrategier etter at de har fått opplæring i sum og produkt-metoden og spesifikk opplæring i adaptivitet?* I kap. 5.2 har jeg samlet funn som er relevante for spørsmål to; *Vil utvikling av adaptive strategier bidra til mestring hos elever med ulik matematisk kompetanse?*

5.1 Høy adaptivitet

Som nevnt i 4.7.2, ga jeg elevene en adaptivitetscore basert på hvordan de tilpasset valg av løsningsstrategi på choice-oppgaver. I adaptivitetscoren har jeg også vurdert hvilken metode som viste seg å være mest effektiv for den enkelte elev.

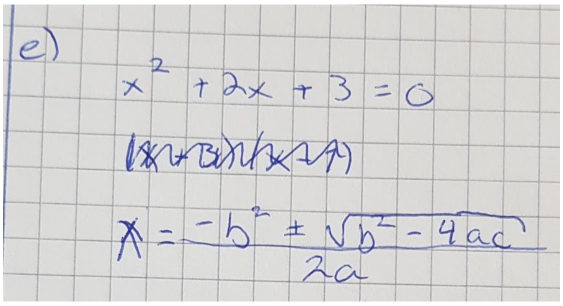
Resultatet av analysen er at flertallet av elevene (41 av 59) fikk en adaptivitetscore på mer enn to. Elevgruppen som helhet viste dermed høy grad av adaptivitet, $z=2.99$, $p=.001$.

Som sagt er det slik at skal metoden sum og produkt skal ha noen betydning for elevenes adaptivitet, må elevene benytte metoden på oppgaver der metoden er den mest effektive (Heinze et al., 2009). På choice-oppgavene viser funnene at flesteparten av de adaptive elevene valgte sum og produkt-metoden hyppigst. For de elevene som ikke var adaptive, var det ikke like stor andel som valgte SP hyppigst (9 av 15). Resultatene er vist i tabell 5.1.

	SP	abc
Adaptive elever	37	4
Ikke adaptive elever	9	6

Tabell 5.1 Adaptive og ikke-adaptive elevers valg av løsningsstrategier

I choice-delen av oppgavesettet skiftet 44 av 59 elever strategi underveis, fra å velge SP på oppgave 1a til å velge abc på 1d eller 1e. Flertallet av elevene skiftet altså strategi fra SP-metoden til abc-metoden når SP-metoden ikke fungerer like godt, $z=3.77$, $p<.001$. Et eksempel på en elev som skifter strategi, er vist i figur 5.1.



Figur 5.1 En elev skifter strategi fra SP (strøket ut) til abc på oppgave 1e

Med forbehold om at elevene valgte den metoden de trodde var forventet av dem (Cohen et al., 2018), mener jeg det er grunnlag for å hevde at flertallet elevene viser adaptivitet. Resultatene viser også at elevene har utviklet en bestemt adaptiv strategi, nemlig å først prøve SP og deretter bytte til abc dersom de ikke klarer å løse oppgaven med SP. Funnene viser dermed at systematisk opplæring av sum og produkt-metoden, kombinert med opplæring i bruk av ulike løsningsstrategier, fører til adaptivitet i elevgruppen.

5.2 Adaptivtet fører til bedre resultater for alle elevgrupper

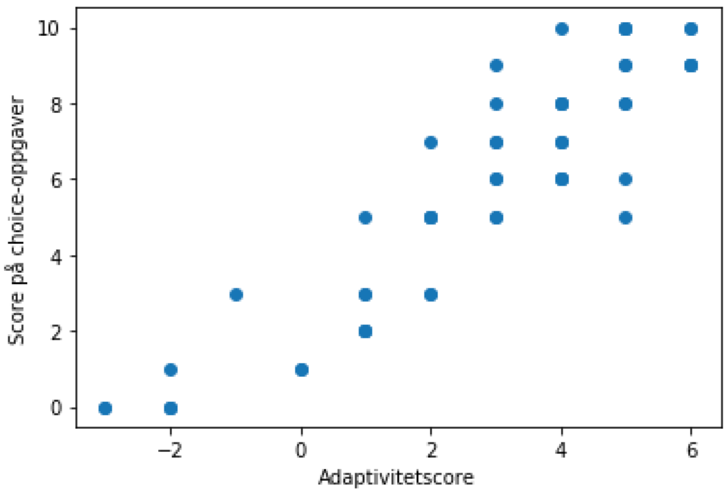
5.2.1 Høyt presterende elever er mest adaptive

46% av elevene som ble definert som under middels på kartleggingsprøven, fikk en adaptivitetscore på mer enn to i testen. Til sammenligning hadde 94% av de høyest presterende elevene en adaptivitetscore på over 2. Gjennomsnittlig adaptivitetscore for elevene som var kartlagt til under middels, var 0,69. For de høyt presterende var adaptivitetscoren i gjennomsnitt 4,6. Resultatene viser at de høyest presterende elevene er langt mer adaptive enn elever med lavere grad av kompetanse (tabell 5.2).

	Andel adaptive	Gjennomsnittlig adaptivitetscore
Under middels	46%	0,69
Høyt presterende	94%	4,6

Tabell 5.2 Andel adaptive og adaptivitetscore etter prestasjonsgruppe

Det er en sterk positiv korrelasjon mellom adaptivitet og score på choice-oppgaver, r(57)=0.910, p<.001. Figur 5.2 viser denne sammenhengen i et spredingsplott. Vi ser tydelig i plottet at dess mer adaptive elevene er, dess bedre gjør elevene det på testen. Vi ønsker dermed at flest mulig av elevene våre skal befinne seg øverst til høyre i denne modellen. Plottet viser altså en tydelig sammenheng mellom adaptive ferdigheter og resultater, et funn som underbygges av Siegler (2003) og (Heinze et al., 2009)sine studier.



Figur 5.2 Sammenhengen mellom adaptivitet og score på no choice-oppgaver

5.2.2 Sum og produkt-metoden gavner alle elever

Elevene som helhet gjør det omtrent like bra ved bruk av SP og bruk av abc på no choice-oppgavene. Gjennomsnittscore her er 54% i delen med SP og 47% i delen med abc.

48 elever velger SP hyppigst som løsningsstrategi i choice-oppgavene. Disse elevene har en gjennomsnittsscore på 65% riktige svar. 10 elever velger abc oftest. Disse elevene har en gjennomsnittsscore på 27% riktige svar. Elevene som velger SP på choice-oppgaver, gjør det altså bedre enn de elevene som velger abc. Resultatene viser dessuten at elevene presterer bedre ved å velge SP på de fleste oppgavene, selv om de viser at de behersker begge strategiene på no choice-oppgaver. En elev benyttet begge strategiene like hyppig og er utelatt fra analysen. Resultatene er oppsummert i tabell 5.3.

	Antall	Choice	No choice SP	No choice abc
SP hyppigst	48	65%	61%	49%
abc hyppigst	10	27%	38%	40%
Alle	49	58%	54%	47%

Tabell 5.3 Gjennomsnittscore delt etter hvilken strategi elevene velger hyppigst

5.2.3 Elever under middels

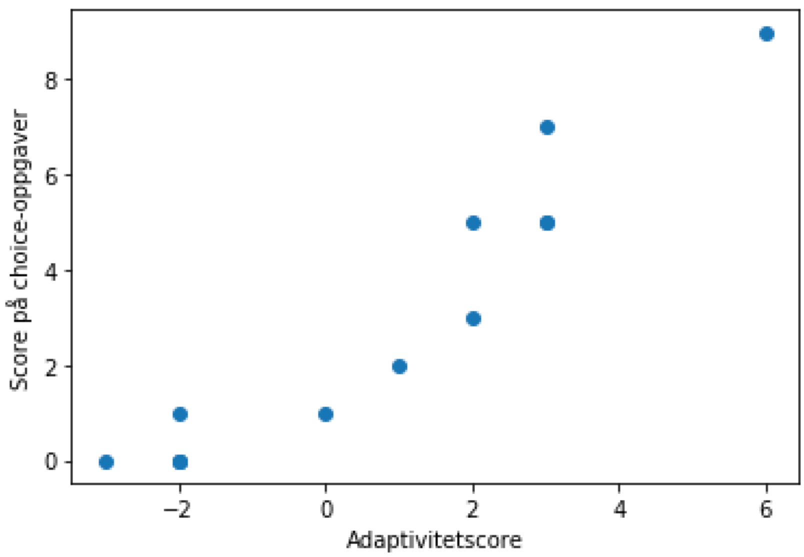
5.2.3.1 Adaptive ferdigheter positivt for elevgruppen

I datamaterialet er 13 elever definert som under middels presterende, det vi si 21,5 poeng eller lavere kartlagt i starten av skoleåret. Disse elevene får en gjennomsnittsscore på 34% riktige svar på choice-oppgavene. Til sammenligning fikk hele utvalget 60% riktige svar i gjennomsnitt. Seks av de under middels presterende elevene er vurdert som adaptive. Den adaptive delen av denne elevgruppen oppnår en gjennomsnittscore på 58% riktige svar på choice-oppgavene. De resterende syv elevene i denne elevgruppa er vurdert som ikke adaptive, med en adaptivitetscore på under 2. Disse elevene får en gjennomsnittscore på 6% riktige svar på choice-oppgavene. Med andre ord ser det ut til at det å ha utviklet en adaptiv kompetanse gavnet også den svakeste elevgruppa. Resultatene er oppsummert i tabell 5.4.

	Under middels		Middels		Høyt presterende		Alle	
	Antall	Score	Antall	Score	Antall	Score	Antall	Score
Adaptive	6	58%	20	64%	17	89%	37	74%
Ikke adaptive	8	6%	4	15%	1	20%	16	16%

Tabell 5.4 Gjennomsnittsscore for de ulike elevgruppene fordelt etter adaptivitet

Figur 5.3 viser et spredningsplott for elevene kategorisert som under middels på kartleggingsprøven ved inngangen til skoleåret. Hos denne elevgruppen er det en enda sterkere korrelasjon mellom adaptivitetscore og score på choice-oppgavene enn det er for hele elevgruppen (vist i figur 5.2), r(11)=0.952, p<.001.



Figur 5.3 Sammenheng mellom adaptivitet og score for under middels-elever

Resultatene over viser altså at elever kartlagt til under middels ved inngangen til skoleåret og som er adaptive, prester godt og langt bedre enn elever kategorisert i samme prestasjonsgruppe. De presterer til og med langt bedre enn ikke-adaptive høyt presterende elever (vist i tabell 5.3).

5.2.3.2 Sum og produkt-metoden spesielt godt egnet

Av 14 elever kategoriserte som under middels, velger 9 SP-metoden som oftest. Disse elevene oppnår 41% riktige svar på choice-oppgavene. Under middels-elever som valgte abc-metoden oftest, fikk 5% riktige svar. Elevenes score på choice-oppgaver etter prestasjonsgruppe og valg av strategi er vist i tabell 5.5. (En elev er ikke tatt med i tabellen siden han brukte de to løsningsstrategiene like ofte.)

	Under middels		Middels		Høyt presterende		Alle	
	Antall	Score	Antall	Score	Antall	Score	Antall	Score
SP hyppigst	9	41%	18	63%	14	91%	43	67%
abc hyppigst	4	5%	3	27%	2	70%	9	27%

Tabell 5.5 Gjennomsnittscore på choice-oppgaver etter prestasjonsgruppe og valg av strategi

For å kunne si noe om bruk av sum og produkt-metoden øker elevenes sannsynlighet for å lykkes, så jeg også på enkeltoppgaver. Dette for å få et mer utfyllende bilde av hvilken kompetanse elevene er i besittelse av. For under middels-elevene var 27 av totalt 47 oppgaver løst med SP riktige. Tilsvarende var 5 av 20 oppgaver løst med abc riktige. Oppsummeringen av antall riktige svar fordelt på prestasjonsgruppe, er vist i tabell 5.5.

	SP			abc		
	Riktige	Totalt	Andel	Riktige	Totalt	Andel
Alle	194	252	77 %	83	119	71 %
Under middels	27	47	57 %	5	20	25 %
Høyt presterende	92	106	87 %	47	53	89 %

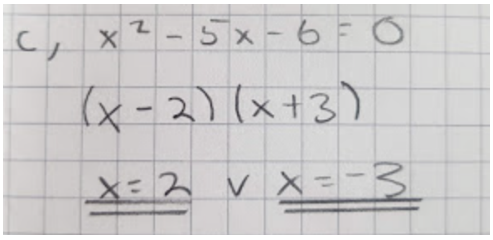
Tabell 5.6 Oversikt over antall riktige oppgaver fordelt etter metode og prestasjonsgruppe

En z-test av resultatene i tabell 5.6 viser at elevene kategorisert som under middels gjorde det statistisk signifikant bedre (36%) på choice-oppgaver når de benyttet SP enn de elevene som benyttet abc, $z=1.34$, $p=.014$. For middels og høyt presterende elever fant jeg ingen tilsvarende forskjell mellom SP og abc. Dette resultatet er viktig fordi det viser at elever med under middels kompetanse har mye høyere sannsynlighet for å klare å løse en oppgave dersom de benytter sum og produkt-metoden i arbeid med andregradsligninger.

5.2.3.3 Forekomst av buggy-prosedyrer og betydning av å sette prøve på svaret

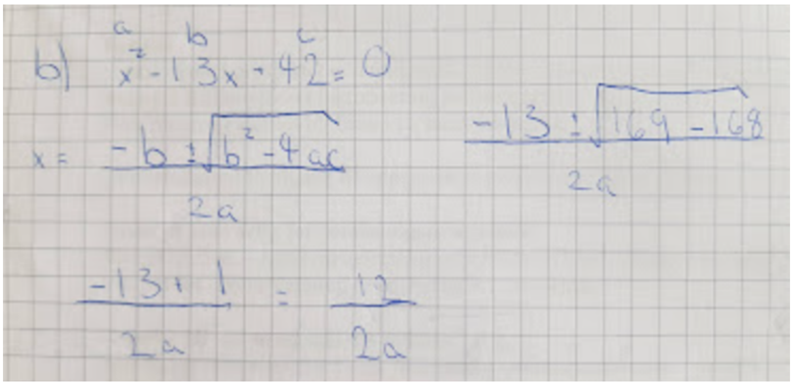
Det kan være mange årsaker til at elever gjør feil på oppgaver. Som tidligere nevnt er det viktig at elevene forstår de strategiene de benytter seg av, slik at de unngår å gjøre feil som skyldes buggy-prosedyrer (Torbeyns & Verschaffel, 2016). I datamaterialet fant jeg at det var mange feil som trolig skyldes buggy-prosedyrer blant elevene kategorisert til under middels i kartleggingstesten. Blant resten av elevene var det få slike feil.

Figur 5.4 viser besvarelsen til en elev kategorisert til under middels, som gjør en feil som kan skyldes en buggy-prosedyre. Eleven faktoriserer produktet riktig, men glemmer å kontrollere at summen blir riktig. Det er sannsynlig at eleven ikke har forstått metoden, altså en buggy-prosedyre (Torbeyns & Verschaffel, 2016).



Figur 5.4 Eksempel på buggy-prosedyre hos en elev som bruker SP

Figur 5.5 viser en annen elev i samme elevgruppe som blander tall og bokstaver i svaret. Dette kan indikere at eleven ikke behersker hvordan han skal bruke abc-formelen, og elevene ender med å dele med 2a i svaret sitt. Også det er trolig en buggy-prosedyre siden eleven ikke har forstått hvordan abc-metoden skal utføres.



Figur 5.5 Eksempel på buggy-prosedyre hos en elev som bruker abc

Det ser ikke ut til at disse to elevene er i stand til å vurdere om svarene de får er rimelige løsninger på oppgavene. Det er grunn til å tro at årsaken til dette ligger i at de ikke har utviklet tilstrekkelig forståelse for de framgangsmåtene de bruker. Eksemplene viser også at buggy-prosedyrer forekommer ved bruk av begge løsningsstrategier.

Elevene kunne rettet opp feil som kommer fra buggy-prosedyrer (Torbeyns & Verschaffel, 2016) ved å sjekke om løsningen de kom frem til stemmer, og på den måten undersøkt om de benyttet metoden riktig. Ingen av elevene i studien setter slik prøve på svaret. Det var ikke fokus på det å sjekke om svaret man fikk var riktig i undervisningen i forkant av testen. Det er derfor ikke så rart at elevene ikke gjør dette. Hvorfor jeg likevel har dette funnet med, henger sammen med betydningen av å sette prøve på svaret som et ledd i å utvikle matematisk forståelse – noe jeg vil komme tilbake til i drøftingsdelen av oppgaven.

6 Drøfting

6.1 Lignende studier

I forskningsarbeid er det alltid interessant å se på hvordan nye funn stiller seg i forhold til tidligere studier, og reflektere rundt hva som kan være årsak til eventuelle likheter og forskjeller. Som tidligere nevnt i den teoretiske introduksjonen, studerte forskerne i studien til Torbeyns & Verschaffel, (2016) hvordan elever løser subtraksjonsoppgaver. I studien ble resultatet som sagt at elevene på choice-oppgavene valgte standardalgoritmen fremfor den mer smarte hoderegningstrategien. Elevene viste seg altså å være lite adaptive. I min studie viser elevene derimot stor grad av adaptivitet. I det følgende vil jeg se på mulige forklaringer på hvorfor jeg får et annet resultat enn Torbeyns & Verschaffel.

I studien til Torbeyns & Verschaffel, (2016) var elevene yngre enn de elevene jeg har studert. I tillegg har elevene i studien min valgt teoretisk matematikk. Torbeyns & Verschaffel fremhever at det er stor sammenheng mellom generell mestring i matematikk og elevenes adaptive evner. Det er gjerne de flinkeste elevene som velger 1T. Det er derfor rimelig at en høyrere andel av elevene i min studie er adaptive enn de elevene Torbeyns og Verschaffel studerte.

Mange av elevene som deltok i min studie, forsøker sum og produkt-metoden først og bytter til abc-metoden når de ser at de ikke klarer å løse oppgaven med SP. Elevene i min studie fikk selv anledning til å erfare, gjennom undervisningen, i hvilke situasjoner det lønner seg å benytte de forskjellige strategiene, noe man kan se tydelige resultater av i selve funnene. Et stort flertall byttet strategi underveis i testen. Det at mine elever viser seg å være mer adaptive enn elevene som deltok i Torbeyns & Verschaffels studie, kan være et direkte resultat av at elevene nettopp hadde fått opplæring i adaptivitet i seg selv – i motsetning til det som var tilfelle hos Torbeyns og Verschaffel.

I undervisningen var lærerteamet enige om at vi ønsket å la elevene komme frem til sum og produkt-metoden selv gjennom det Balacheff (1988)ville omtalt som et pragmatisk bevis og et bevis som forklarer (Hanna, 1989) Vi ønsket at elevene gjennom eksempler og konkretiseringer skulle oppdage sammenhenger selv. På den måten ønsket vi å utvikle elevenes forståelse for andregradsligninger. Det er uklart om elevene i Torbeyns & Verschaffels studie fikk ta del i en tilsvarende utledning av de strategiene de benyttet, og dermed vanskelig å si noe om elevenes forståelse av strategiene de brukte. Det at vi systematisk jobbet med en utforskningsbasert innlæring av strategier, og at vi startet med den minst kompliserte tilnærmingen, kan være med på å forklare noen av forskjellene i resultatene.

I min studie gjør elevene færre feil når de bruker SP-metoden enn de gjør med abc-metoden. Dette støttes i resultatene ved at elevene som velger sum og produktmetoden hyppigst, får en gjennomsnittlig score på 65% mens elevene velger som velger abc-metoden hyppigst scorer 27% (se tabell 5.2). Min opplevelse er også at elevene løser oppgavene raskere med SP-metoden uten at jeg har data som kan bekrefte dette. I Torbeyns & Verschaffels studie førte hoderegningstrategien til flere feil. Dette kan skyldes at SP er en enklere metode å benytte og at standardalgoritmen (abc) er mer krevende enn i Torbeyns & Verschaffels studier. I følge Siegler & Lemaire (1997) kan dette forklares med at elevene velger den metoden de mener er mest effektiv og gir størst sannsynlighet for riktig svar.

I studien til Verschaffel et al, (2007) var konklusjonen at svakt presterende elever i liten eller ingen grad viser tegn til adaptivitet. Dette bekrefter funnene mine. Det er langt flere blant de høyt presterende elevene som er adaptive, enn blant elevene som har de svakeste resultatene på kartleggingstesten, noe tabell 5.2 viser. Likevel viser min studie at også elever som presterer under middels, kan vise høy grad av adaptivitet. Studien viser at flere i denne elevgruppen, gjennom systematisk opplæring i å bruke ulike metoder, oppnår stor effekt på prestasjonene sine. Dette er et viktig resultat. Det viser at det å jobbe målrettet med varierte løsningsstrategier, og la elevene få utforske metodene selv, kan ha stor effekt også på de elevene som i utgangspunktet har lavest matematisk kompetanse. Det å la elevene utforske metoder selv, er vi som lærere dessuten pålagte etter læreplanen i 1T, så en slik praksis støttes også i forskriftene som ligger til grunn for vår praksis som matematikklærere.

Ut fra det jeg har observert, er sum og produkt-metoden en metode som elevene med lav grad av kompetanse kan forstå og beherske. Dette mener jeg er et argument for å undervise også de svakeste elevene i sum og produkt-metoden som en av flere metoder, slik at også disse elevene får flere strategier å velge mellom. Dette vil være i tråd med anbefalingene til Verschaffel et al. (2007), som skriver at man bør ha som målsetning å utvikle adaptiv kompetanse også hos de svakeste elevene – da dette vil ruste også denne elevgruppen på best mulig måte for de problemstillingene de vil møte i framtiden.

6.2 Adaptive ferdigheter og læreplanen

I læreplanen av 2020 har dybdelæring kommet inn som begrep (UDIR, 2017). I dybdelæring ligger det at eleven skal utvikle en grunnleggende forståelse som har overføringsverdi til problemstillinger eleven vil møte i framtiden. Elevene skal altså lære seg å tenke selv og å søke å forstå nye problemstillinger gjennom å bygge på, og videreutvikle, egen kompetanse. Dette både alene, men gjerne også sammen med andre.

Det å være adaptiv, altså å tilpasse framgangsmåtene sine til den problemstillingen man står overfor, henger nøye sammen med dybdelæring. Er man i stand til å være adaptiv, er man i stand til å reflektere rundt hva man skal oppnå og hvordan man skal komme dit. Man har utviklet en evne til å abstrahere og til å se på utfordringen på avstand. Dette krever en grunnleggende forståelse både for matematikk og for problemløsning generelt. Derfor er nettopp det å jobbe med varierte løsningsstrategier også framhevet på ulike måter i læreplanen for matematikk.

I arbeidet med andregradsligninger vektla vi nettopp fokus på fremgangsmåter mer enn løsning gjennom å undervise i, og stimulere elevene til å faktisk bruke, ulike metoder i arbeidet. Gjennom å teste elevene i ulike strategier, fikk jeg avdekket at elevene faktisk behersket ulike tilnærmingsmetoder. Funnene mine viser dessuten at elevene i den delen av oppgaven som var valgfri, utforsket ulike løsningsstrategier. Dette kommer tydelig frem ved at 44 av 59 elever skifter strategi underveis i testen.

Lithner (2017) skiller som tidligere nevnt mellom «Memorised reasoning (MR)», «Algoritmic reasoning (AR)» og «Creative matematically founded reasoning (CMR)». I dette ligger et helt grunnleggende syn på læring og forståelse. Det er vanskelig for elevene å bygge ny kunnskap og forståelse dersom forutsetningen deres er innlærte strukturer og framgangsmåter som de ikke forstår. Lithner anbefaler derfor at vi underviser på en slik måte at elevene selv får være med på å tenke ut hvordan de skal løse matematiske problemstillinger kreativt (CRM). Læreplanen i matematikk forfekter også et slikt syn på læring gjennom å hevde at elevene skal oppdage sammenhenger og strukturer og ikke bli presenterte for ferdige løsninger. Elevene skal med andre ord være skapende og aktivt deltakende i arbeidet med matematikk. Dette er også i tråd med hvordan Piaget (1964) mener at kunnskap utvikles i elevene.

Skal elevene utvikle sin egen faglige forståelse, er det avgjørende at vi som lærere nettopp tar utgangspunkt i dette når vi underviser. Dette gjorde vi gjennom å starte med å undervise i sum og produkt-metoden, en metode som det er enkelt for de fleste elever å forstå. Vi valgte å starte undervisningen med en enkel metode til tross for at denne ikke kan anvendes i alle tilfeller der andregradsligninger skal løses. Dette for å sette elevene i stand til å tenke selv, og ikke bare utføre innlærte algoritmer – det Lithner i sin artikkel omtaler som «Algoritmic reasoning.»

I kjerneelementet resonnering og argumentasjon står det at elevene skal «forstå at matematiske resultat og reglar ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar.» Dette målet kan oppnås både med utledning av sum og produkt- metoden og gjennom undervisning av abc-metoden. Men som jeg har nevnt tidligere vil en utleding av abc-formelen lett bli et konseptuelt bevis (Balacheff, 1988) og et bevis som beviser (Hanna, 1989). Dette fordi det er vanskelig for de fleste elevere å forstå hvorfor abc-formelen fungerer. Dersom man derimot lar elevene utlede sum og produkt-metoden selv, vil utledning bli et pragmatisk bevis som elevene kan forstå og bruke til å utvikle sin forståelse.

Jeg mener at studien min viser at undervisning i sum og produkt-metoden i arbeid med andregradsligninger er godt egnet fordi metoden er lett å forstå og utlede for elevene. Utledningen er det Hanna vil omtale som et bevis som forklarer. Sum og produkt-metoden egner seg godt til å gjøre eleven mer adaptive, gjennom at eleven forstår at metoden kan brukes i noen tilfeller – men ikke alle. Elevene får da muligheten til å utvikle en forståelse for at matematiske oppgaver kan løses på ulike måter, og at tilnærmingen man velger er avhengige av en rekke faktorer som for eksempel oppgavens kompleksitet, tiden man har til rådighet eller andre faktorer. Sum og produkt-metoden bør altså velges når denne metoden er den mest hensiktsmessige.

Sum og produkt-metoden er også godt egnet fordi det er en hoderegningsmetode som de fleste elever kan forstå. Metoden er egnet for å unngå at elevene utvikler buggy-prosedyrer, og den er godt egnet til å trene elevene til i å sette prøve på svaret. Eleven vist i figur 5.4 som gjør feil som kan tyde på at han ikke har forstått sum og produktmetoden. I dette eksemplet skal det bare en liten justering til for at eleven forstår hva han har gjort feil. En kontrollsjekk av at løsningene han har fått, ville kanskje være nok til at den logiske strukturen faller på plass for eleven (Piaget, 1964). Gjennom å kontrollsjekke egne svar, og utvikle evne til å vurdere egne svar, vil elevene også utvikle sin egen forståelse. Det er også et krav i læreplanen at elevene skal «vurdere om løysingane er gyldige» (UDIR, 2019), noe som forutsetter at elevene forstår sammenhengen mellom svaret og den framgangsmåten de benytter.

6.3 Konsekvenser for videregående skole

Vi har nå sett hvordan undervisningen av andregradsuttrykk samsvarer med både forskning om læring i matematikk og intensjonene i læreplanen. Men har funnene også betydning for hvordan vi underviser matematikk mer generelt på videregående skole? Jeg mener det.

6.3.1 Starte med metoder elevene forstår

Siegler (2003) hevder at en viktig faktor for å få elevene til å utvikle adaptivitet er å la elevene selv få finne ut hvilken strategi som er mest effektiv og på den måten la elevene få eierskap til strategivalget. Hanna (1990) fremhever også viktigheten av at elever har kjennskap til hvordan matematiske sammenhenger er utledet. Det er derfor viktig at matematikklærere velger metoder som elevene kan forstå utledingen av.

I mitt eksempel har sum og produkt-metoden en stor fordel fordi det er lett for elevene å forstå utledningen av metoden. Metoden gir dermed elevene mer innsikt i matematikken som ligger bak andregradsuttrykk enn det for eksempel abc-formelen gjør. Funnene mine viser også at vi gjennom å starte undervisningen med en løsningsstrategi som elevene selv kan utlede, så blir resultatene for elevgruppen som helhet gode. Ikke minst presterer elever som i utgangspunktet scorer lavt, godt med denne metoden. Det kan dermed virke som om særlig elever med under middels kompetanse har utbytte av en tilnærming som dette, uten at det går på bekostning av resultatene til de høyt presenterende elevene. Konsekvensen av et slikt funn må være at vi i all matematikkundervisning på videregående skole bør introdusere nye temaer på måter som gir mening for flest mulig av elevene, der elevene selv får delta i å finne sammenhenger og utledninger. Gjennom å ta utgangspunkt i en så enkel og pragmatisk tilnærming som mulig, som bygger på elevens logiske forståelse, er sjansen størst for å få elevene med seg også når faget blir mer teoretisk og abstrakt senere i utdannelsen.

Jeg mener at vi matematikklærere i større grad må gjøre en vurdering av hvilke strategier det er nødvendig for elevene å lære. Ikke bare velge metoder ut fra hvilke metoder det er forventet at elevene skal beherske på eksamen, men heller la hver enkelt elev selv utvikle strategier som stimulerer til å etablere strukturer som gjør eleven bedre i stand til å forstå den matematikken elevene skal lære senere. Her er standardalgoritmen for subtraksjon fra Torbeyns & Verschaffel (2016) sin studie ett godt eksempel. Min erfaring er at veldig få voksne benytter denne strategien, som går ut på å sette tallene under hverandre og låne fra tierplassen eller hundrerplassen. Voksne har ofte glemt denne metoden og benytter heller hoderegning eller kalkulator. For å forstå dette vil jeg bruke begrepene til Piaget (1964). Det at en strategi er glemt, mener jeg skyldes at denne strategien ikke var nødvendig for å bygge strukturen i den matematiske forståelsen. Primitive strategier, som å telle på fingrene, er noe vi aldri glemmer, nettopp fordi dette er strategier som var en nødvendige strukturer for vår tallforståelse. Man kan derfor stille spørsmålet om det var nødvendig å lære denne standardalgoritmen for subtraksjon, eller mange andre standardalgoritmer, som er glemt hos voksne.

6.3.2 Undervisning i adaptivitet

For å kunne være fleksible og adaptive må elevene beherske flere strategier. Sum og produkt-metoden er godt egnet fordi metoden ikke fungerer som eneste metode. Dersom elevene oppdager begrensningene med en metode, blir det naturlig for dem å variere mellom metoder når der er nødvendig. På den måten stimuleres elevene til å bli adaptive i sine valg av strategi. Dette viser min studie at elevene faktisk gjør i oppgave 1e, der flertallet av elevene bytter strategi siden sum og produktmetoden ikke fungerer på denne oppgaven.

I avsnittet over skrev jeg om betydningen av å tilnærme seg matematiske problemstillinger gjennom at elevene selv får utforske og utlede sammenhenger. Videre viser min studie at adaptive elever presterer bedre enn andre. Med andre ord tjener elevene på å ha ett sett med strategier som de kan velge mellom når de arbeider med ulike matematiske problemer. I overført betydning betyr dette at vi bør jobbe godt med å vise elevene at det faktisk finnes ulike måter å løse de fleste matematiske oppgaver på. Men dette er ikke tilstrekkelig. Vi bør også undervise elevene helt spesifikt i adaptivitet. Det betyr at vi både stimulerer elevene til å utvikle ulike strategier, men at vi også lar elevene diskutere og reflektere rundt hvilke fordeler og ulemper de ulike strategiene har i møte med ulike oppgaver. Vi bør med andre ord gjøre elevene bevisste om ulike strategiers fordeler og ulemper.

6.4 Metodiske svakheter

Etter å ha analysert resultatene i min undersøkelse, ser jeg noen svakheter ved metoden jeg har valgt å benytte

Elevene kan ha utviklet rutineekspertise (Heinze et al., 2009) også i bruk av sum og produktmetoden uten å ha forstått hvorfor metoden fungerer. Det viste seg under analysen at dette var vanskelig å avdekke. Elevene kan også ha utviklet rutineekspertise i å skifte strategi når elevene kjenner igjen bestemte oppgaver (f.eks. benytte abc når det står et tall foran x^2).

Jeg hadde begrenset innsikt i hvordan undervisningen foregikk i to av klasserommene. Påstanden min om at elevene har fått undervisning i adaptivitet er begrunnet ut ifra at det var enighet om dette på samarbeidsmøter mellom lærerne. Jeg kan dermed ikke med sikkerhet si at elevene har fått opplæring i adaptiv kompetanse.

En annen utfordring med metoden er at jeg ikke får testet funnene mine opp mot en kontrollgruppe. Det hadde vært interessant å sammenligne resultatene mine med en kontrollgruppe som gjennomførte undervisningen slik det er lagt opp til i lærebøkene.

7 Avslutning

Vi har nå sett at forskning på matematikkundervisning samlet sett forteller oss at det er avgjørende at vi som matematikklærere underviser på en slik måte at eleven får konstruert sin egen forståelse. I praksis betyr dette at vi må utlede bevis som forklarer og som elevene kan forstå. Med andre ord må vi bruke eksempler og metoder som elevene kan utlede sammenhengene i selv. I tillegg er det avgjørende at vi viser elevene at matematiske oppgaver kan løses gjennom ulike tilnærminger. Vi må lære dem ulike metoder, og vi må lære dem å reflektere rundt hvilke metoder som egner seg til bruk i ulike sammenhenger. Gjennom en slik undervisning kan elevene utvikle en mer kritisk tilnærming til matematikkfaget, der de lærer seg å tenke selv og der de lærer seg å vurdere hvilken tilnærming til oppgaver som er mest hensiktsmessig. En slik adaptiv kompetanse vil elevene ha bruk for i stadig nye sammenhenger, både i arbeid med matematikk – men også i arbeid med mer komplekse oppgaver der kompetanse fra ulike fagområder kreves.

Vi har også sett at det er liten tradisjon for å undervise i adaptivitet i matematikkfaget. Elevene lærer flere strategier, men ender som Torbeyns & Verschaffel (2016) påpeker, med å bare benytte standardalgoritmer. Dette til tross for at læreplanen i matematikk på mange områder nettopp vektlegger betydningen av det å undervise elevene i det å anvende ulike løsningsstrategier. Læreplanen er jo lagt opp slik fordi det å være kritisk og det å velge tilnærming av metoder selv, er avgjørende for å utvikle elevenes grunnleggende matematiske forståelse. Vi har også sett at det er få studier som belyser temaet adaptivitet for elever på videregående skole.

I denne studien vektla vi nettopp det å undervise i ulike løsningsstrategier systematisk. Og vi startet opplæringen i løsning av andregradsligninger gjennom å gi elevene opplæring i sum og produkt-metoden. Studien viser at vi som lærere, gjennom å vektlegge en metode som elevene selv kan utlede og forstå, har lykkes i å gjøre elevene mer adaptive. Forhåpentligvis har metoden etablert strukturer i den enkelte elev som eleven kan bygge videre på når eleven skal bruke forståelsen i nye sammenhenger. Studien har også vist at opplæring i adaptivitet i seg selv, der elevene lærer seg begrensingene i de metodene de lærer seg (i dette tilfellet sum og produkt-metoden), nytter. Elevene blir adaptive etter endt periode. Studien viser også at det er få elever som setter prøve på svaret. Gjennom å lære seg å sette prøve på svaret, vil trolig enda flere elever kunne utvikle evne til å abstrahere. Gjennom å sette prøve på svaret vil elevene øve seg i å vurdere om svaret de har kommet fram til, er rimelig. Slik vil også elevens evne til kritisk tenkning øves. Skulle jeg gjennomført studien på ny, ville jeg vektlagt dette elementet i undervisningen tydeligere. Det ville være spennende å se om resultatene til elevene da ble enda bedre.

I denne studien gikk det åtte uker fra elevene avsluttet undervisningen i andregradsligninger til elevene gjennomførte choice/no-choice testen. Piaget mener den beste testen på om man virkelig har lært noe, er å teste kunnskapen lenge etter at læringen foregikk (Piaget, 1964). Da får man testet om læringen ble en del av strukturen i forståelsen til den som har lært. I LK20 så vi at dette blir omtalt som dybdelæring. Jeg er så heldig at jeg kan få følge elevgruppen som deltok i denne studien videre i to år. Det blir interessant å se om sum og produktmetoden består testen til Piaget og at elevene viser at de benytter og forstår metoden også i et lenger tidsperspektiv.

Referanser

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics (ODD). *Mathematics, Teachers, and Children*, 215–235.

Borge, I. C., Heir, O., Engeseth, J., Haug, H., Moe, H., Norderhaug, T. T., & Vie, S. M. (2020). *Matematikk 1T*. Aschehoug undervsning.

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. *APA Handbook of Research Methods in Psychology, Vol 2: Research Designs: Quantitative, Qualitative, Neuropsychological, and Biological.*, *2*, 57–71. https://doi.org/10.1037/13620-004

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). Research Methods in Education. In *Research Methods in Education* (8th ed.). https://doi.org/10.4324/9781315456539

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13h Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 45–51.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6–13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(5), 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Skrindo, K., & Weider, Ø. J. (2020). *Mønster Matematikk 1T* (1. utgave). Gyldendal Norsk Forlag AS.

Liljedahl, P. (2018). *Building Thinking Classrooms*. 307–316. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92390-1_29

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM*, *49*(6), 937–949. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3

Oldervoll, T. (2020). *Sinus 1T*. Cappelen Damm.

Piaget, J. (1964). Part I: Cognitive development in children: Piaget development and learning. *Journal of Research in Science Teaching*, *2*(3), 176–186. https://doi.org/10.1002/tea.3660020306

SciPy. (n.d.). Retrieved July 1, 2022, from https://scipy.org/

Seabold, S., & Perktold, J. (2010). Statsmodels: Econometric and Statistical Modeling with Python. *PROC. OF THE 9th PYTHON IN SCIENCE CONF*. http://statsmodels.sourceforge.net/

Shrager, J., & Siegler, R. S. (1998). SCADS: A Model of Children's Strategy Choices and Strategy Discoveries. *Psychological Science*, *9*(5), 405–410. https://doi.org/10.1111/1467-9280.00076

Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, *June*, 219–233.

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and Younger Adults' Strategy Choices in Multiplication: Testing Predictions of ASCM Using the Choice/No-Choice Method. *Journal of Experimental Psychology: General*, *126*(1), 71–92. https://doi.org/10.1037/0096-3445.126.1.71

Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2016). Mental computation or standard algorithm? Children's strategy choices on multi-digit subtractions. In *European Journal of Psychology of Education* (Vol. 31, Issue 2). https://doi.org/10.1007/s10212-015-0255-8

UDIR. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. https://www.udir.no/kl06/mat1-04/

UDIR. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/

UDIR. (2019). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01)*. https://www.udir.no/lk20/mat09-01

Verschaffel, L., Torbeyns, J., de Smedt, B., Luwel, K., & van Dooren, W. (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational and Child Psychology*, *24*(2), 16–27.

Vedlegg 1 Elevtest

Tid: 45 minutter fordelt på 25minutter på oppgave 1, 10minutter på oppgave 2 og 10 minutter på oppgave 3

Ta med utregning på oppgavene

Oppgave 1

På disse oppgaven skal du selv velge løsningsstrategi

Løs likningene

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$
b) $x^2 - 13x + 42 = 0$
c) $x^2 - 5x - 6 = 0$
d) $2x^2 + 5x + 2 = 0$
e) $x^2 + 2x + 3 = 0$

Faktoriser

f) $x^2 - 7x + 10$
g) $3x^2 - 6x - 9$

Lag en andregradslikning som:

har løsninger $x = -1 \;\vee\; x = 2$

h) ikke har noen reelle løsninger

Løs likningen

i) $(x + 2)(2x + 5) = 0$

Oppgave 2

Løs likningene ved å bruke sum og produkt-metoden

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$
b) $x^2 - x - 12 = 0$
c) $3x^2 + 12x + 12 = 0$
d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Sum og produkt-metoden

$$x^2 + \overset{3+4}{7}x + \overset{3\cdot 4}{12} = 0$$

$$(x+3)\cdot(x+4) = 0$$

Oppgave 3

Løs likningene ved å bruke abc-formelen

a) $x^2 + 7x + 10 = 0$
b) $3x^2 + 15x + 12 = 0$
c) $2x^2 - 3x - 2 = 0$
d) $x^2 - 3x + 4 = 0$

Abc-formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vedlegg 2 Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet: «Fleksibilitet i løsning av andregradsuttrykk i matematikk»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke valg av løsningsstrategier. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med prosjektet er å undersøke hvilke løsningsstrategier elever benytter i oppgaver med og andregradslikninger og faktorisering av andregradsuttrykk.
Data fra prosjektet vil bli bruk i en masteroppgave

Læreren din vil få tilgang til oppgavebesvarelsen din slik at du kan få tilbakemelding på besvarelsen.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Norges teknisk – naturvitenskapelig universitet NTNU, fakultet for samfunns og utdanningsvitenskap / Institutt for lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Alle elever i matematikk 1T på Rosenvilde inviteres til å delta i prosjektet

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du regner gjennom oppgaver du får utlevert. Dette vil ta deg ca. 45 minutter. Du blir i oppgavene spurt om å faktorisere andregradsuttrykk og løse andregradslikninger med forskjellige metoder. Dine svar på oppgavene blir registrert elektronisk. Noen elever kan senere bli intervjuet om besvarelsen sin. Intervjuet vil vare ca. 10 minutter og det vil bli tatt lydopptak.

I forbindelse med prosjektet vil jeg innhente resultater fra kartleggingstesten vi gjennomførte i starten av skoleåret.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å

trekke deg. Det vil ikke påvirke ditt forhold til skolen/lærer. Elever som ikke ønsker å delta i prosjektet vil jobbe med de samme oppgavene uten at resultatene blir samlet inn til prosjektet.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Student og veileder vil ha tilgang ved behandlingsansvarlig institusjon

- Navnet og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Oppgavebesvarelser og notater vil lagres innelåst og lydopptak og datafiler blir lagret kryptert på forskningsserver.

- I publikasjon av masteroppgaven vil det publiseres bilder av elevers oppgavebesvarelser. Navn vil bli fjernet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres og lydopptak slettes når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 01.01.2023.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Norges teknisk – naturvitenskapelig universitet NTNU, har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Norges teknisk – naturvitenskapelig universitet NTNU, fakultet for samfunns og utdanningsvitenskap / Institutt for lærerutdanning ved Trygve Solstad trygve.solstad@ntnu.no
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen thomas.helgesen@ntnu.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Trygve Solstad
Førsteamanuensis
Institutt for lærerutdanning

Masterstudent - Lærerspesialist i matematikk

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Fleksibilitet i løsning av andregradsuttrykk i matematikk» og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å besvare oppgaver
- ☐ å delta i intervju om oppgavebesvarelsen
- ☐ at bilder av min oppgavebesvarelse publiseres (navn blir da fjernet)

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

---

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3 NSD

Vurdering

Dato
10.11.2021

Type
Standard

Referansenummer
877384

Prosjekttittel
Masteroppgave - fleksibilitet i løsning av andregradsuttrykk i matematikk

Behandlingsansvarlig institusjon
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig
Trygve Solstad

Student

Prosjektperiode
01.09.2021 - 01.01.2023

[Meldeskjema](#)

Kommentar
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 10.11.2021, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.01.2023.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

• lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
• formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
• dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
• lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art.

17), begrensning (art. 18), og dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

NTNU

Kunnskap for en bedre verden