Emil Pladsen Røberg

Matematisk modellering

En studie av elevers arbeid med en modelleringsoppgave basert på Newtons avkjølingslov

Masteroppgave i Lektorutdanning i realfag
Veileder: Frode Rønning
Juni 2022

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Emil Pladsen Røberg

Matematisk modellering

En studie av elevers arbeid med en modelleringsoppgave basert på Newtons avkjølingslov

Masteroppgave i Lektorutdanning i realfag
Veileder: Frode Rønning
Juni 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Kunnskap for en bedre verden

Forord

Høsten 2017 flyttet jeg til Trondheim og visste lite om hva de neste fem årene skulle by på. Studiet, lektorutdanning i realfag, viste seg å være mye tyngre og mer krevende enn jeg hadde forestilt meg og det ble mange tunge eksamensperioder. Til tross for de mange timene på lesesalen, fem år senere er denne masteroppgaven et resultat av mine fantastiske år som student her i Trondheim.

Jeg er utrolig takknemlig for all hjelp jeg har fått i forbindelse med dette masterprosjektet. Spesielt vil jeg rette en stor takk til veilederen min Frode Rønning. Uten ham ville ikke dette blitt noen masteroppgave. Hans kunnskaper, ideer og tilbakemeldinger har vært helt avgjørende for dette masterprosjektet. Jeg er svært takknemlig for all hjelp jeg har fått fra ham.

Videre vil jeg rette en stor takk til alle mine medstudenter og venner som har gjort studieperioden min helt fantastisk. Spesielt vil jeg rette en takk til Morten Nygård, Stian Nygård og Bjarte Møllerup Boge for motivasjon og hjelp i arbeidet med denne masteroppgaven. I tillegg vil jeg sende en stor takk til familien min for all støtte og hjelp gjennom mine fem år som student i Trondheim og med dette masterprosjektet.

Til slutt vil jeg rette en takk til deg Inger. Det er vanskelig å beskrive hvor viktig du har vært for meg både gjennom studietiden, men også i arbeidet med denne masteroppgaven. Jeg gleder meg til fremtiden sammen med deg!

Trondheim, mai 2022. Emil Pladsen Røberg

Sammendrag

Denne masteroppgaven har som formål å undersøke hvordan elever arbeider med en modelleringsoppgave som tar utgangspunkt i Newtons avkjølingslov. Spesielt har jeg undersøkt hvilke matematiske kompetanser elevene benytter seg av, og hvor i en modelleringssyklus. Grunnlaget for denne studien er en datainnsamling fra én klasse i faget R2 hvor det ble gjennomført et forsøk der elevene arbeidet med tilhørende deloppgaver. Forskningsspørsmålene for studien er følgende: Hvor i modelleringssyklusen og med hvilke av de åtte kompetansene bruker elevene i arbeidet med Newtons avkjølingslov, og hvilke type kunnskaper og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet anvender elever i arbeidet med Newtons avkjølingslov? Ved å undersøke hvordan elevene arbeider med modelleringsoppgaven er det mulig å undersøke hvilke kompetanser de gjør seg nytte av, og hvor i modelleringssyklusen de bruker disse. Fra elevenes arbeid vil jeg også undersøke hvordan de knytter inn kunnskap og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet i arbeidet med en modelleringsoppgave som tar utgangspunkt i Newtons avkjølingslov.

Datamaterialet ble analysert ved å følge Pattons deduktive tilnærming ved å undersøke hvilke av de åtte kompetansene til Niss og Jensen elevene arbeidet med. Hvor elevene gjorde seg nytte av disse kompetansene ble undersøkt mot Blum og Leiß modelleringssyklus.

Resultatene fra analysen viste at elevenes begrepskunnskap i stor grad bestemmer hvordan de gjør seg nytte av de matematiske kompetansene. I tillegg viste resultatene at tankegangskompetanse og representasjonskompetanse utgjorde et viktig fundament i elevenes arbeid, og at disse kompetansene ofte ble benyttet sammen med andre kompetanser. Videre viste også resultatene at elevene i liten grad benyttet seg av kunnskap og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet i arbeid med modelleringsoppgaven.

Abstract

The purpose of this master thesis is to investigate how students work with a modeling task based on Newton's cooling law. I have investigated which mathematical skills the students use, and where in a modeling cycle. The basis for this study is data collection from one class in the mathematical subject R2 where an experiment was carried with the students working on associated tasks. The research question of this study is: Where in the modeling cycle and with which of the eight competencies does the students use in the work on Newton's cooling law, and what type of knowledge from physics and experiences from their daily life does the students work with in a modeling task? By analyzing how students work with a modeling task it will be possible to analyze what competencies they make use of, and where in the modeling cycle they make a use of it. Through the students work I will also analyze how they connect their knowledge from physics and daily life in the work with a modeling task based on Newtons law of cooling.

The data was analyzed by following Pattons deductive method by examining which of the eight competencies by Niss and Jensen the students worked with. Where the students made use of these competencies was analyzed toward Blum and Leiß modeling cycle.

The results from the analysis showed that the student's conceptual knowledge to a large extend decides how they make use of Niss and Jensen´s mathematical competencies. The results also showed that the mathematical thinking competence and representing competence made an important fundament in the students' work, and that these competencies often was used together with other competencies. Further on the results showed that the students to a small extent made use of knowledge from physics and experiences from daily life working with the modeling task.

Innhold

1 Innledning

1.1 Formålet med studien

Høsten 2020 begynte en gradvis innføring av den nye læreplanen Kunnskapsløftet 2020 (LK20) i den norske skolen. En av endringene fra den gamle læreplanen, Kunnskapsløftet 2006 (LK06), var innføringen av kjerneelementet *modellering og anvendelser* i læreplanene for matematikk. Modellering i matematikk handler om å lage modeller og vurdere disse med et kritisk syn, mens anvendelse i matematikk handler om at elevene skal bruke matematikk i ulike situasjoner, både i og utenfor faget. Formålet med denne studien er å undersøke hvordan en matematikklasse i faget R2, og som følger LK06, arbeider med en modelleringsoppgave som tar utgangspunkt i Newtons avkjølingslov. Elevene skal matematisk beskrive hva som skjer når en væske avkjøles ved å gjennomføre et forsøk. Her skal de varme opp væsken til en gitt temperatur og så la væsken avkjøles mens de gjør målinger av temperaturen. Videre skal elevene lage en graf som viser hvordan temperaturen i væsken avtar som en funksjon av tiden, og vurdere resultatet. Jeg ønsker å undersøke hvilke matematiske kompetanser elevene gjør bruk av på hvilke trinn i modelleringssyklusen. I tillegg ønsker jeg å undersøke hvilke kunnskaper og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet elevene anvender når de arbeider med denne modelleringsoppgaven.

1.2 Rammefaktorer for studien

I denne studien har jeg gjennomført et forsøk i en skoleklasse bestående av 19 elever. Klassen var en matematikklasse på VG3 i faget R2. Det var viktig for studien at elevene hadde kunnskaper fra fysikkfaget. Klassen ble derfor valgt ut til å være med i studien fordi 18 av 19 elever hadde tatt fysikkfaget Fysikk 1 på VG2. Fokuset under datainnsamlingen var å undersøke hvordan elevene arbeidet med en modelleringsoppgave. Datamaterialet jeg samlet inn bestod av lydopptak av elevene mens de arbeidet, og deres notater og besvarelser. Fordi elevenes synspunkter, tanker og refleksjoner er viktig i denne studien, ble elevene delt inn i grupper. Dette skyldes at det ofte er under diskusjonene mellom elevene at de reflekterer og argumenterer, og i større grad åpner seg.

Modelleringsoppgaven elevene skal arbeide med baserer seg på Newtons avkjølingslov som kan beskrives med 1. ordens differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$. Denne differensiallikningen skal elevene først formulere basert på en muntlig definisjon av Newtons avkjølingslov[1]. Fra denne differensiallikningen skal elevene finne den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ hvor T_v temperaturen i væsken, T_r er temperaturen i rommet og t er tiden. For å finne varmekoeffisienten k og integrasjonskonstanten C skal elevene først varme opp matolje eller vann til en gitt temperatur for så å la væsken avkjøles. Elevene gjør så målinger av temperaturen i væskene etter hvert som den avtar. Videre skal elevene regne ut C og k i den generelle løsningen basert på disse målingene. Til slutt skal elevene lage en graf i Geogebra som viser hvordan temperaturen i væsken avtar som en funksjon av tiden, og vurdere om denne grafen passer med den virkelige verden.

1.3 Teoretisk og metodisk rammeverk

I denne studien har jeg valgt å benytte meg av modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) for å illustrere modelleringsprosessen til elevene. I arbeidet med å undersøke hvilke kompetanser elevene gjør seg nytte av i arbeidet har jeg valgt å bruke de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) som utgangspunkt. Denne modelleringssyklusen og disse åtte kompetansene utgjør de mest sentrale teoretiske ramme-

[1]Endringsraten til temperaturen i en væske er proporsjonal med differansen mellom temperaturen i væsken, og temperaturen i rommet.

verkene for denne studien.

I arbeidet med å undersøke hvordan og hvor elevene benytter seg av disse åtte matematiske kompetansene i modelleringssyklusen har jeg valgt å benytte meg av en deduktiv analyse (Patton, 2002). De åtte matematiske kompetansene vil utgjøre kategorier som jeg vil benytte meg av for å strukturere analysen av elevenes arbeid med den gitte modelleringsoppgaven.

1.4 Forskningsspørsmål

I min forskning ønsker jeg å rette fokuset mot to aspekter av matematisk modellering. Det første aspektet vil omhandle hvor i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) hver av de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) blir brukt, og hvordan elevene gjør seg nytte av disse kompetansene. Det andre aspektet vil omhandle hvilke type kunnskaper og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet elevene anvender i arbeidet med en modelleringsoppgave. Mine forskningsspørsmål er dermed følgende:

1. Hvordan og hvor i modelleringssyklusen bruker elevene de åtte matematiske kompetansene i arbeidet med Newtons avkjølingslov?

2. Hvilke type kunnskaper og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet anvender elever i arbeidet med Newtons avkjølingslov?

1.5 Oppbygging av oppgaven

Denne oppgaven begynner først med å beskrive bakgrunnen for studien (kap. 2). Bakgrunnen for studien er matematisk modellering i skolen, og en gjennomgang av tidligere forskning rundt elevers arbeid med modelleringsoppgaver. Videre vil oppgaven ta for seg Newtons avkjølingslov som er utgangspunktet for modelleringsoppgaven elevene skal arbeide med (kap. 3). Etter dette vil det teoretiske rammeverket (kap. 4) som ligger til grunn for studien redegjøres for å gjennomgå modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) samt beskrivelsen av de åtte matematiske kompetansene (Niss & Jensen, 2002, s. 43-62). I metodekapitlet (kap. 5) vil det fremgå hvordan datamaterialet er samlet inn og hvordan teorien blir brukt i analysen. Analyse- og presentasjonskapitlet (kap. 6) vil gjennomgå datamaterialet i lys av modelleringssyklusen og de åtte matematiske kompetansene. I tillegg vil kapitlet synliggjøre hvordan elevene gjør seg nytte av kunnskap og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet i arbeidet med Newtons avkjølingslov. Elevenes bruk av de ulike matematiske kompetansene i arbeidet med modelleringsoppgaven og i modelleringssyklusen diskuteres i diskusjonskapitlet (kap. 7). Her diskuteres også hvordan de gjør seg nytte av kunnskap og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet i arbeidet med modelleringsoppgaven. Studien vil avslutte med å se på forbedringspotensialer ved studien, samt studiens betydning for min fremtid som lærer (kap. 8).

2 Bakgrunn for studien

2.1 Matematisk modellering i skolen

Til grunn for denne studien ligger matematisk modellering i skolen og innføringen av kjerneelementet *modellering og anvendelser* i matematikk i den nye læreplanen LK20. I dette kapitlet vil jeg gjennomgå matematisk modellering i skolen hvor jeg vil se på læreplaner og kompetansemål i den gamle (LK06) og nye (LK20) læreplanen som legger opp til arbeid med modellering i skolen.

Som det kommer frem i Opplæringsloven (1998) §1-1 skal opplæringen blant annet utvikle kunnskap, dyktighet og holdninger for at elevene skal kunne mestre livene sine, og for å at de skal kunne delta i arbeid og fellesskapet i samfunnet. I tillegg skal de få utfolde skaperglede, engasjement og utforskertrang. Å ha en solid kompetanse i matematikk og matematisk modellering er en forutsetning for å utvikle samfunnet. Dette skyldes at matematisk modellering er rundt oss hele tiden og inngår i vitale samfunnsområder som økonomi, teknologi, medisin, energi og byggevirksomhet (Blum, 2011; Utdanningsdirektoratet, 2013).

Elevene som deltar i denne studien følger læreplanen LK06. I denne læreplanen for den videregående skolen inngår temaet *modellering* i flere læreplaner enn bare matematikk, deriblant læreplanen i fysikk. I læreplanen i matematikk for realfag (LK06) finner man igjen matematisk modellering under flere kompetansemål. Et eksempel på et kompetansemål for matematikkfaget R2 er:

> formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte. (Utdanningsdirektoratet, 2006b, s. 6)

Elevene skal altså i matematikkfaget R2 arbeide med matematiske modeller hvor de benytter seg av observerte data, og bearbeide og drøfte dette arbeidet. I læreplanen for fysikk (LK06) kommer også arbeidet med modellering frem i kompetansemålene for Fysikk 1. Et kompetansemål for Fysikk 1 er for eksempel:

> lage en eller flere matematiske modeller for sammenhenger mellom fysiske størrelser som er funnet eksperimentelt. (Utdanningsdirektoratet, 2006a, s. 5)

Elevene skal altså i Fysikk 1 arbeide med matematiske modeller hvor de bruker data de har funnet gjennom eksperimenter. Arbeidet med matematisk modellering er med andre ord nært knyttet til fagene Fysikk 1 og R2 i læreplanen LK06. Modellering er altså et viktig tema også i LK06.

Matematisk modellering har i større grad blitt tydeliggjort og definert gjennom kjerneelementet *modellering og anvendelser* for de nye læreplanene i matematikk (LK20). Dette kjerneelementet inngår ikke i den nye læreplanen for fysikk (LK20), men det betyr ikke at modellering ikke lenger inngår i læreplanen for fysikk. I den nye læreplanen for fysikk kommer arbeidet med modellering frem i følgende kompetansemål for Fysikk 1:

> vurdere, bruke og lage modeller til å beskrive og forutsi fysiske fenomener. (Utdanningsdirektoratet, 2021b, s. 5)

I den nye læreplanen for matematikk R kommer blant annet arbeidet med modellering frem i følgende kompetansemål for matematikkfaget R2:

> gi eksempler på ulike situasjoner som kan modelleres ved å bruke ulike matematiske funksjoner, og modellere og analysere slike situasjoner ved å bruke reelle datasett. (Utdanningsdirektoratet, 2021a, s. 6)

Fra LK06 og til LK20 har matematisk modellering i større grad blitt tydeliggjort og definert gjennom kjerneelementet *modellering og anvendelser* i de nye læreplanene for matematikk. Ifølge Kunnskapsdepartementet er innføringen av kjerneelementene en sentral del av fagfornyelsen. De skriver at «kjerneelementene i et fag er det elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget, det mest betydningsfulle faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen» (Meld. St. 28 (2015-2016), s. 34). Kjerneelementene skal ifølge Kunnskapsdepartementet prege innholdet og progresjonen i læreplanene og bidra til at elevene over tid utvikler forståelse av innhold og sammenhenger i faget. Videre skal kjerneelementene bestå av sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer i faget. Kunnskapsdepartementet skriver at alle fag har metoder, tenkemåter, begreper, kunnskapsområder og uttrykksformer som er sentrale, men fordi fagene er ulike, må dette komme til uttrykk på fagenes premisser (Meld. St. 28 (2015-2016), s. 34).

Kjerneelementet *modellering og anvendelser* handler om hvordan modeller i matematikk kan brukes for å beskrive natur og samfunn. Videre handler det om å vurdere gyldigheten av og begrensningene til modellene, å vurdere modellene i lys av de opprinnelige situasjonene og å vurdere om de kan brukes i andre situasjoner enn matematikk. Anvendelse handler om kunnskap om hvordan matematikk anvendes i ulike situasjoner, både i og utenfor faget (Utdanningsdirektoratet, 2021a, s. 2-3). Elevene som deltar i denne studien følger i dag læreplanen LK06. Det kan derfor tenkes at disse elevene har mindre erfaring med modelleringsoppgaver enn om de hadde fulgt LK20. Anvendelser av matematikk har alltid vært sentralt. Som en fremtidig matematikklærer er det interessant for min egen del å undersøke hvordan elever arbeider med en modelleringsoppgave, uavhengig av hvilken erfaring de har med dette fra før. Som fremtidig matematikklærer skal jeg følge den nye læreplanen LK20 hvor modellering og anvendelser er mer aktuelt enn noen gang tidligere.

Totalt består de nye læreplanene i matematikk av seks slike kjerneelementer: *utforsking og problemløsing*, *modellering og anvendelser*, *resonnering og argumentasjon*, *representasjon og kommunikasjon* og *abstraksjon og generalisering*. Disse seks kjerneelementene er nært knyttet til Niss og Jensen (2002) sine åtte kompetanser: *tankegangskompetanse*, *problemløsningskompetanse*, *modelleringskompetanse*, *resonnementskompetanse*, *representasjonskompetanse*, *symbol- og formalismekompetanse*, *kommunikasjonskompetanse* og *hjelpemiddelkompetanse*. Disse åtte kompetansene vil jeg beskrive i detalj senere i oppgaven (se 4.3). De åtte ulike kompetansene inngår i matematikk hvor hver av de åtte kompetansene gir beskrivelser for ulike former for matematiske aktiviteter. Man kan se på disse kompetansene som et knutepunkt mellom "ting" (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Med *ting* mener her Niss og Jensen flere ulike matematiske tema som er sentrale for matematikken. Kjerneelementene omfatter også de mest sentrale matematiske temaene, og man kan dermed se på kjerneelementene som knutepunkt for de ulike temaene elevene skal gjennom i matematikken.

2.2 Tidligere forskning om å arbeide med matematisk modellering

Utfordringene innen matematisk modellering kommer med flere ubesvarte problemstillinger. Det er en enighet i matematikkdidaktikk om at matematisk modellering er viktig, men det eksisterer også en uenighet omkring hvordan prosessen rundt implementeringen av matematisk modellering skal foregå i skolen (Kaiser et al., 2011, s. 591). To av disse problemstillingene handler blant annet om hvilke matematiske kompetanser som inngår i arbeidet med matematisk modellering, og hvordan autentisiteten til en oppgave kan påvirke evnen til å overføre kunnskap og kompetanse til andre kontekster og situasjoner (Blum, 2002, s. 159). En elev som arbeider med å lære matematikk er avhengig av å forstå matematikkens begreper, dens natur og innhold. Denne prosessen kan i stor grad avhenge av hvilke situasjoner og eksempler de matematiske begrepene inngår i for den enkelte elev. Niss (1999) poengterer at oppmerksomheten til elever kan trekkes mot prosedyren for å løse en oppgave og at de dermed kan utvikle det han kaller et begrepsfilter for ulike begreper. Dette kan få konsekvenser for den videre utviklingen av forståelsen for begrepet (Niss, 1999, s. 16).

Forholdet mellom fysikk og matematikk er et stadig tilbakevendende tema i fysikkdidaktikk (Angell et al., 2019, s. 190). Som også Taber (2006) poengterer er det flere elever som opplever det som utfordrende å overføre kunnskap fra fysikken til matematikken. I sin studie undersøkte Michelsen (2006) hvordan elever kan ha utfordringer med å overføre begreper, ideer og prosedyrer de har lært i matematikk til en ny situasjon i naturvitenskapen, som for eksempel fysikk. Som Michelsen skriver, kan elevens oppfatning av et matematisk begrep bestemmes av måten begrepet presenteres for eleven. Når eleven blir presentert for et matematisk begrep som ikke dekker rekkevidden av begrepet, kan dette føre til vanskeligheter med å anvende begrepet i nye situasjoner (Michelsen, 2006, s. 271). Å lære matematikk gjennom naturvitenskapelige problemer kan ifølge Michelsen bidra til at elevene gjør seg nytte av de matematiske begrepene i større grad. Han foreslår modelleringsaktiviteter som en måte for å minske gapet mellom matematikkfaget og naturvitenskapelige fag. Dette går ut på å arbeide med modeller som kan generaliseres og formaliseres av elevene slik at de utvikler sine matematiske kunnskaper (Michelsen, 2006, s. 274). Michelsen refererer til Niss og Jensen (2002) sine åtte matematiske kompetanser som en forberedelse til å kunne handle riktig i ulike situasjoner som inneholder matematiske utfordringer.

Forskning har vist at elever kan arbeide i ulike modus avhengig av problemet elevene arbeidet med. Erickson (2006) oppdaget i sin studie at elevene kunne arbeide i ulike modus avhengig av om de arbeidet med et problem i fysikk eller et problem i matematikk. Erickson gjennomførte en studie med videregående elever i San Francisco, hvor målet var å undersøke hvordan elevene modellerte data og hvilke utfordringer dette innebar for elevene. Elevene fikk oppgitt data fra en værballong, og ble bedt om å lage en graf for høyden til ballongen som en funksjon av tiden. Elevene fikk da den lineære funksjonen $høyden = 4,26tid + 370$. Erickson oppdaget at elevene kunne ha vanskeligheter med å identifisere parameterne for den lineære funksjonen avhengig av informasjonen som ble gitt. Dersom elevene ble gitt funksjonen $y = 2x + 3$ kunne elevene fortelle at 2 representerte stigningstallet for grafen, men dersom elevene ble presentert for $høyden = 4,26tid+370$ opplevde de problemer med å forstå at 4,26 representerte raten meter per sekund når enhetene for høyden og tiden kom frem i oppgaveteksten. Erickson påpekte at elevene arbeidet i en matematikkmodus eller i en fysikkmodus avhengig av problemet. Da de arbeidet i matematikkmodusen opplevde elevene utfordringer knyttet til å bryte ut av modusen, og koble symbolene til situasjonen symbolene representerte.

Videre har forskning vist at elever kan ha utfordringer med å validere modellene sine. Geisler (2021) gjennomførte en studie med 19 elever fra en videregående skole i Tyskland hvor målet var å undersøke hvordan elevene validerte modellene sine, og å undersøke hvordan elevene forklarte relevansen for å validere modellene sine. Resultatet fra studien viste at flere av elevene opplevde utfordringer med å validere modellene sine, og at de hadde mer tillit til modellen enn til deres egne data. Flere elever ønsket altså å forbedre målingene sine, fremfor å forbedre modellen. Geisler (2021) påpeker at en årsak til dette kan være at elevene i større grad er vant til å arbeide med data som allerede passer modellen. I tillegg kan det ifølge Geisler skyldes at elevene ikke velger å endre modellen fordi elevene har et inntrykk av at matematikken alltid er presis, og at kun én løsning er rett.

Å validere en modell diskuterer Ferri (2006) i sin analyse av blant annet modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Denne modelleringssyklusen vil jeg beskrive i detalj senere i oppgaven (se 4.4.1). Modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) handler i korte trekk om hvordan man først arbeider i den virkelige verden, før man tar med seg problemet inn i matematikkverdenen og gjør beregninger, for så å ta med seg svaret tilbake til den virkelige verdenen og her tolker og validerer svaret. I sin analyse tar Ferri (2006) for seg blant annet de to overgangene (5) tolkning og (6) validering i syklusen (se Figur 2). Etter å ha funnet det matematiske resultatet tidligere må man (5) tolke dette mot den virkelige verden før man (6) validerer resultatet: Er det et fornuftig svar? (Blum & Leiß, 2007, s. 226). I overgangen *validering* poengterer Ferri (2006) at elevene kan akseptere resultatet basert på intuisjon eller på sine matematiske kunnskaper. Hun skiller elevenes validering avhengig av hvordan de reflekterer gjennom arbeidet med oppgaven. Ferri påpeker at en årsak til at flere ikke validerer resultatene sine skyldes at de gjør en indre-matematisk validering. For dem betyr å validere å beregne den matematiske modellen. Elevene kobler ikke resultatene til situasjonen i forhold til virkeligheten (Ferri, 2006, s. 93).

I dette kapitlet har jeg i hovedsak funnet forskning som rettes mot hvordan elevene arbeider, og hvilke utfordringer de har med modelleringsoppgaver. Jeg har funnet lite forskning knyttet til hvordan autentisiteten i en modelleringsoppgave påvirker elevenes evne til å overføre kunnskap og kompetanse til andre situasjoner. Et viktig aspekt i forskning og praksis for modellering er forestillingen om og rollen til autentisiteten til problemene og situasjonene som håndteres i modelleringsaktiviteter (Blum, 2002, s. 160). Et ubesvart spørsmål innenfor modellering er hvordan autentisiteten til et problem påvirker elevens evne til å overføre kunnskap og kompetanse til andre kontekster (Blum, 2002, s. 160). Min studie vil blant annet undersøke hvilke type kunnskaper og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet elevene anvender i arbeidet med en modelleringsoppgave.

Videre har jeg også funnet lite forskning omkring hvor elever benytter seg av de åtte kompetansene til Niss og Jensen (2002) i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Blomhøj og Jensen (2007) gjennomførte en studie blant 25 videregående elever i Danmark hvor målet var å undersøke utviklingen av matematiske kompetanser. Utgangspunktet for studien til Blomhøj og Jensen (2007) var de åtte kompetansene til Niss og Jensen (2002). Studien til Blomhøj og Jensen viste at for å kunne beskrive og støtte elevenes fremgang i arbeidet med matematisk modellering trengs det tre dimensjoner. En av disse dimensjonene innebærer å være oppmerksom på de ulike delene i modelleringsprosessen og i hvilken grad elevene arbeider med disse. Dette er for å kunne støtte deres fremgang i arbeidet med matematisk modellering (Blomhøj & Jensen, 2007, s. 55). Min studie vil også undersøke hvor i modelleringssyklusen og med hvilke av de åtte kompetansene til Niss og Jensen (2002) elevene bruker i arbeidet med Newtons avkjølingslov.

3 Newtons avkjølingslov

I 1701 publiserte Newton (1643-1727) den anonyme artikkelen *Scala grduum Caloris* i Philosophical Transactions of the Royal Society hvor han etablerer et forhold mellom temperaturen T og tiden t i en avkjølingsprosess. I artikkelen skrev han ingen formel, men uttrykte sin avkjølingslov på følgende måte[2],

> the excess of the degrees of the heat ... were in geometrical progression when the times are in an arithmetical progression. (Besson, 2010, s. 1087-1088)

I dag vet vi at med begrepet ≪degree of the heat≫henviser Newton til det vi idag kjenner som ≪temperature≫. Dette betyr at med ≪the excess of the degrees of heat≫viser Newton til ≪temperature difference≫ (Besson, 2010). Videre skriver Newton følgende i sin artikkel,

> the heat which hot iron, in a determinate time, communicates to cold bodies near it, that is, the heat which the iron loses in a certain time is as the whole heat of the iron; and therefore (ideoque in Latin), if equal time of cooling be taken, the degrees of heat will be in geometrical proportion. (Besson, 2010, s. 1088)

Newton observerte at hans lov kunne utledes matematisk som et lineært forhold mellom temperaturens endringsrate og temperaturforskjellen mellom et objekt og dets miljø (Besson, 2010). I dag kjenner vi Newtons avkjølingslov fra følgende beskrivelse,

> [...] the rate of temperature change of an object is proportional to the difference between the object temperature and the temperature with which the object is equilibrating. (Davis et al., 2016, s. 960-961)

[2]Den originale artikkelen til Newton er skrevet på latin. De engelske sitatene blir brukt i henhold til Besson (2010)

I en situasjon hvor vi har et objekt med en høyere temperatur enn miljøet $(T_v > T_r)$ vil vi få en negativ endringsrate $(\frac{dT_v}{dt})$. Matematisk kan dette uttrykkes på følgende måte,

$$\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r), \quad k > 0 \tag{1}$$

k i denne modellen er en konstant for varmeledningsevnen som i likning 1 er gitt ved $k = \frac{A}{C}$, hvor A er overflatearealet varmen utveksles fra og C er varmekapasiteten til objektet. Konstanten k for varmeledningsevnen beskriver hvor lett et objekt utveksler varme med omgivelsene. I tilfellet hvor vi har en konstant temperatur for omgivelsene kan vi løse likning 1 som en separabel differensiallikning og få (Davis et al., 2016),

$$T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r \tag{2}$$

hvor C er avhengig av initialbetingelsene. Videre kan man se på Newtons avkjølingslov som en matematisk modell. Angell et al. (2019) beskriver en matematisk modell på følgende måte:

> En matematisk modell er en symbolsk beskrivelse av en egenskap eller et aspekt ved naturen. (Angell et al., 2019, s. 190)

Den generelle løsningen av Newtons avkjølingslov $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ kan man se på som en matematisk modell. Denne beskriver hvordan temperaturen i et materiale vil avta eller øke som en funksjon av tiden. Hvert symbol i denne likningen beskriver noe med en fysisk størrelse. Denne modellen er i stor grad mer abstrakt enn det virkelige fysiske systemet fordi man gjerne må anta at visse ting skal være gyldig. For eksempel er Newtons avkjølingslov kun gyldig dersom varmetapet er forårsaket av stråling, temperaturforskjellene er små eller at temperaturen i omgivelsene er konstant. Dersom temperaturen ikke avtar som modellen beskriver betyr ikke dette at det er noe feil med modellen, men at noen av betingelsen ikke er oppfylt.

4 Teoretisk rammeverk

4.1 Begrepskunnskap og prosedyrekunnskap

Begrepskunnskap og prosedyrekunnskap er to begreper som er sentrale i forskningslitteratur som omfatter læring og undervisning i matematikk. Hiebert og Lefevre (1986) karakteriserer begrepskunnskap som rik på relasjoner. Dette kan bli betraktet som nettverk av kunnskap hvor de sammenkoblede relasjonene er like fremtredende som den enkelte informasjon. Relasjonene trenger gjennom de individuelle fakta slik at alle bitene av informasjonen er knyttet til et nettverk. Som Hiebert og Lefevre (1986) også poengterer kan ikke en enhet av begrepskunnskapen være en isolert del fra andre kunnskaper. Skal man kunne utvikle begrepskunnskap må man kunne koble ulike deler av kunnskap, hvor denne koblingsprosessen skjer mellom to ulike kunnskapselementer man allerede kan, eller mellom en eksisterende del av kunnskapen og en kunnskap man nettopp har lært (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). Med andre ord utvikler man begrepskunnskap gjennom å bruke kunnskap man allerede har utviklet og dermed kan tenke seg frem til relasjonene mellom disse.

Videre definerer Hiebert og Lefevre (1986) begrepet prosedyrekunnskap. Dette begrepet omfatter kjennskapen til det formelle matematiske språket. Dette språket omhandler symboler som brukes til å representere matematiske ideer og syntaktiske regler. I tillegg omfatter også begrepet ulike regler, algoritmer eller prosedyrer som blir brukt til å løse matematiske oppgaver. Dette inkluderer også instruksjonene som steg-for-steg forklarer hvordan man skal løse oppgaven. I tillegg vektlegger Hiebert og Lefevre (1986) at kunnskapen knyttet til symboler og regler kun viser en bevissthet for hvordan de kan brukes, og ikke kunnskapen eller forståelsen omkring hvorfor de kan brukes. Prosedyrekunnskap handler med andre ord om å inneha kunnskap om ulike matematiske prosedyrer som man klarer å utføre nøyaktig og hensiktsmessig.

Matematisk kunnskap inkluderer signifikante, fundamentale relasjoner mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap. Elever er ikke fullt ut kompetente innenfor matematikk dersom en av kunnskapene er mangelfull eller de ikke klarer å knytte de sammen. Klarer ikke elevene å knytte kunnskapen sammen kan de ha en god intuitiv følelse for matematikk, men klarer ikke å løse problemer, eller at de ikke forstår hva de gjør når de lager en løsning. En kobling mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap vil ikke bare forebygge at disse manglene utvikler seg, men også bidra til å utvikle en solid kunnskapsbase (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 9).

4.2 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Hjernen til mennesket er ikke en rent logisk enhet. Det er ikke alltid at ren logikk gir oss innsikt, og det er heller ikke tilfeldigheter som fører til at vi feiler. For å forstå hvordan disse prosessene foregår, kan vi definere et skille mellom de formelt definerte matematiske begrepene og de kognitive prosessene som de blir unnfanget ved (Tall & Vinner, 1981, s. 151).

Begrepsbilde brukes av Tall og Vinner (1981) for å beskrive den totale kognitive strukturen som er knyttet til et begrep. Dette inkluderer alle mentale bilder og tilhørende egenskaper og prosesser. Begrepsbilde bygger man gjerne opp gjennom årene gjennom opplevelser og det endres etter hvert som man møter nye eksempler. For eksempel kan man se på hvordan enkelte lærebøker bruker begrepet vekstfart for den deriverte. Vekst forstår man gjerne som at noe vokser, og fart knytter man til bevegelse i løpet av en tid. Ved å bruke begrepet vekstfart kan elevene få en oppfatning om at den deriverte beskriver noe som alltid vokser og har med fart å gjøre. Denne observasjonen er en del av elevens begrepsbilde. Dette kan forårsake problemer når elevene for eksempel skal begynne å arbeide med optimeringsproblemer hvor tid og fart er irrelevant. Har man for eksempel et optimeringsproblem hvor man skal klippe bort kvadrater med sidelengde x fra hjørnene på en rektangulær pappskive, brette opp sidene for så å finne det maksimale volumet til esken er tiden irrelevant, altså ser vi ikke på en vekst/endring i løpet av et tidsrom. Dette optimeringsproblemet har heller ingenting med fart å gjøre. Begrepet *endringsrate* er derfor et mer passende begrep å bruke for den deriverte da den ikke gir assosiasjoner som kan skape forvirring. Ved å bruke begrepet endringsrate kan elevene danne seg mentale egenskaper som ikke setter begrensninger for deres forståelse rundt den deriverte. Tall og Vinner (1981) argumenterer med at alle mentale egenskaper knyttet til et begrep, enten de ubevisste eller bevisste, må inkluderes i begrepsbildet. Dette skyldes at de mentale egenskapene kan inneholde frøet til fremtidig konflikt.

Begrepsdefinisjonen bruker Tall og Vinner (1981) for å betegne den formelle definisjonen av et begrep. Den kan læres av et individ gjennom en mekanisk måte eller gjennom en læringsfylt måte som knytter seg til begrepet. Det kan også være en personlig fremstilling fra eleven av en definisjon. I dette tilfellet vil da ordbruken reflektere elevens begrepsbilde. Om begrepsdefinisjonen er gitt til ham, eller konstruert av ham selv, kan han variere den fra tid til annen. På denne måten kan man da skille mellom personlig begrepsdefinisjon og en formell begrepsdefinisjon, hvor den sistnevnte er en begrepsdefinisjon som er akseptert i matematikksamfunnet (Tall & Vinner, 1981, s. 152-153).

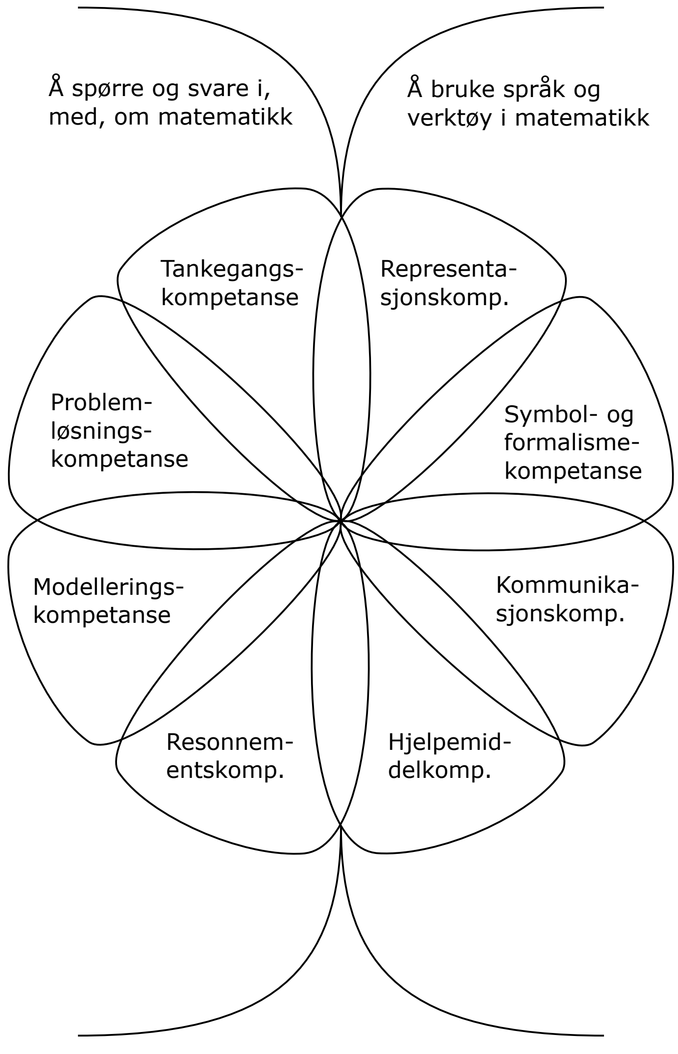
4.3 Matematisk kompetanse

Niss og Jensen (2002) skriver i sin rapport kalt «Kompetencer og matematiklæring» at en matematisk kompetanse handler om å vite om, forstå, utøve, anvende, og kunne ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i en mangfoldighet av virksomheter der matematikk inngår, eller kan inngå (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Videre skriver forfatterne at dette impliserer en mangfoldighet av kunnskap og konkrete ferdigheter innenfor ulike matematiske områder, men at den matematiske kompetansen ikke kan reduseres til disse forutsetningene. Som det kommer frem i rapporten innehar en person kompetanse innenfor et område dersom han eller hun er i stand til å ha gjennomslagskraft, en oversikt og kan med sikkerhet utøve en dømmekraft. Niss og Jensen definerer en matematisk kompetanse som en selvstendig, rimelig avgrenset hovedkomponent i matematikken (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Man kan med andre ord si at denne matematiske kompetansen handler om innsikt til å handle rasjonelt og hensiktsmessig overfor en matematisk utfordring. Med dette kan man ikke se på en matematisk kompetanse som en isolert kompetanse uten overlapp til andre kompetanser, men istedenfor som et bindeledd mellom kunnskap. Niss og Jensen (2002) skiller mellom to grupper av kompetanser som hver inneholder fire spesifikke kompetanser.

Å kunne spørre og svare i og med matematikk handler om å kunne stille spørsmål og samtidig ha et overblikk på mulige svar (4.3.1 tankegangskompetanse), å være i stand til å kunne svare på spørsmålet selv i og med matematikk (4.3.2 problemløsningskompetanse og 4.3.3 modelleringskompetanse) og å kunne forstå, reflektere og argumentere på matematiske spørsmål (4.3.4 resonnementskompetanse) (Niss & Jensen, 2002, s. 44-46).

Å kunne håndtere språk og verktøy i matematikk handler om å være i stand til å arbeide med forskjellige representasjoner av matematikk (4.3.5 representasjonskompetanse), å kunne arbeide med representasjoner som utgjøres av matematiske symboler og deres formaliteter (4.3.6 symbol- og formalismekompetanse), å kunne kommunisere i, med og om matematikk (4.3.7 kommunikasjonskompetanse) samt å være i stand til å bruke hjelpemidler for den matematiske virksomheten (4.3.8 hjelpemiddelkompetanse) (Niss & Jensen, 2002, s. 44-46).

I figur 1 er de åtte kompetansene visualisert ut ifra hvilken av de to gruppene de hører til. Som det kommer frem i rapporten til Niss og Jensen (2002) skal man ikke overtolke disse to gruppene og tenke at to kompetanser fra hver sin gruppe ikke er bundet sammen på et vis. For eksempel kan man argumentere for at symbol- og formalismekompetansen er en avgjørende faktor for å kunne svare på et spørsmål, og dermed en forutsetning for problemløsningskompetanse (Niss & Jensen, 2002, s. 44).



Figur 1: Egen oversettelse av en visuell representasjon av de åtte matematiske kompetansene. (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

4.3.1 Tankegangskompetanse

Denne kompetansen handler om å være klar over hvilke typer spørsmål som er karakteristiske for matematikken, å kunne stille slike spørsmål og ha et overblikk for hvilke svar man kan forvente. Videre omfatter kompetansen å kjenne, forstå og håndtere matematiske begrepers rekkevidde og begrensinger. Med dette menes å kunne abstrahere egenskaper i begrepet, og å kunne forstå hva som ligger i en generalisering av et matematisk begrep til å også omfatte en større klasse av objekter. Kjernen i denne kompetansen er kunsten å kunne stille et matematisk spørsmål, og kunne svare på det. Det skal sies at det ikke er betingelsene i spørsmålene eller svarene, fremgangsmåten til svarene eller svarets gyldighet som er essensielt i denne kompetansen, men heller å utøve en matematisk tankegang. Denne tankegangen kan gjerne ha sitt utspring i matematikkens verden, omverdenen eller i andre fagområder (Niss & Jensen, 2002, s. 47-48).

4.3.2 Problemløsningskompetanse

Denne kompetansen handler om å kunne oppstille, formulere, avgrense og presisere ulike typer av matematiske problemer. Dette handler om løse matematiske problemer i ferdigformulert form på forskjellige måter om dette trengs. Et matematisk problem kan anses som en type matematisk spørsmål hvor det er nødvendig med undersøkelse for å kunne besvare et problem hvor få rutine operasjoner er nødvendig. Det skal sies at begrepet *matematisk problem* er relativ til personen det stilles til. Et matematisk problem kan oppfattes som et problem for én, men som en rutineoppgave for en annen. Videre man må være klar over at det å formulere et matematisk problem, og det å løse et ferdig formulert matematisk problem ikke er det samme. Man kan være i stand til å formulere et matematisk problem, og ikke løse det, og omvendt. Problemløsningskompetansen handler altså om være i stand til å formulere et matematisk problem og løse problemet, uten at det er en betingelse å være i stand til å både formulere og løse problemet for å inneha kompetansen (Niss & Jensen, 2002, s. 49-50).

4.3.3 Modelleringskompetanse

I denne kompetansen handler det om å være i stand til å analysere grunnlaget for og egenskapene til en modell, og videre reflektere rundt modellens rekkevidde og holdbarhet. Med dette menes å kunne dekode matematikken og tolke elementer og resultatene i forhold til den situasjonen modellen representerer. På den andre siden handler denne kompetansen om å utføre en modellering, det vil si å sette matematikken i spill og bruke den til å behandle sammenhenger som ligger utenfor matematikken. Aktiv modellbygging består av forskjellige elementer: *strukturering*, *matematisering*, *behandle*, *validering*, *validerer modellen kritisk*, *kommunisere*, *overblikk* og *styring*. Det første elementet, strukturering, handler om å være i stand til å strukturere området eller situasjonen som skal modelleres. Det andre elementet, matematisering, handler om å oversette objekter, relasjoner, problemstillinger og andre sammenhenger, mens det tredje elementet, behandle, handler om å løse de matematiske problemene. Videre må man være i stand til å validere resultatet. Dette utgjør det fjerde elementet og vektlegger det å vurdere modellens holdbarhet. Dette gjelder både den matematiske holdbarheten, men også den eksterne delen som omhandler situasjonen eller området modellen er basert på. Kritisk validering regnes som det femte elementet i modellbygging, og tar for seg hvordan man skal analysere modellens nytteverdi og i forhold til andre alternative modeller. Til slutt må man være i stand til å kommunisere med andre om modellen og dens resultater, ha et overblikk i modellbyggingen og ha evnen til å styre modelleringsprosessen (Niss & Jensen, 2002, s. 52-53).

4.3.4 Resonnementskompetanse

Denne kompetansen handler om å følge og reflektere rundt et matematisk resonnement. Dette betyr å evne å argumentere for en påstand, å vite og forstå hva som utgjør et matematisk bevis og vite hvordan dette skiller seg fra andre matematiske resonnementer, og å vite når et matematisk resonnement utgjør et bevis eller ikke. Videre handler denne kompetansen om å tenke gjennom og gjennomføre uformelle og formelle bevis, altså å omforme heuristiske resonnementer til gyldige bevis. Resonnementskompetanse spiller også en viktig rolle når det gjelder å bedømme holdbarheten av en matematisk påstand. Dette kan dreie seg om riktigheten rundt bruk av regler og setninger, men også riktigheten av svar på spørsmål, oppgaver eller problemstillinger. På denne måten er resonnementskompetanse nært forbundet til problemstilling- og modelleringskompetanse (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

4.3.5 Representasjonskompetanse

Denne kompetansen tar for seg det å kunne forstå og håndtere forskjellige representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemet eller situasjoner. Med dette menes evnen til å dekode, tolke og skille mellom symbolske, algebraiske, geometriske, grafiske, diagrammer, tabeller eller verbale og konkrete representasjoner. Videre bygger kompetansen også på evnen til å forstå forbindelser mellom ulike representasjoner og deres styrker og svakheter, dette betyr evnen til å velge mellom og oversette mellom ulike representasjoner etter gitte betingelser, hvor det blitt hensyn til formålet og situasjonen. Symbolske representasjoner har en stor betydning i matematikk, derfor er det en nær forbindelse mellom resonnementskompetanse (se 4.3.4) og symbol- og formalismekompetanse (se 4.3.6) (Niss & Jensen, 2002, s. 56-57).

4.3.6 Symbol- og formalismekompetanse

Denne kompetansen består av å kunne dekode symbol- og formelspråket, dette innebærer å oversette mellom det matematiske språket og det naturlige, og å kunne arbeide med matematiske symboler i utsagn, uttrykk og formler. Dette krever at man har en forståelse og innsikt i reglene i formelle matematisk systemer. Denne kompetansen er nært beslektet med representasjonskompetansen (se 4.3.5) men skiller seg ut ved å fokusere på symbolenes karakter og betydningen av håndteringen av disse. I tillegg skiller kompetansen seg ut ved å også fokusere på matematiske systemer, uavhengige av om de inneholder en symbolsk form eller ikke. Med matematiske symboler menes her matematiske spesialsymboler, tallsymboler og tegn som blir brukt i regneoperasjoner. Videre omhandler symbolhåndteringen den typiske bokstavregning og videre kalkulus, men også formelle sider av elementær regning (Niss & Jensen, 2002, s. 58-59)

4.3.7 Kommuniskasjonskompetanse

Denne kompetansen omhandler å kunne sette seg inn i og fortolke matematikk, enten om matematikken er skriftlig, muntlig eller visuell. Videre omhandler denne kompetansen evnen til å kunne uttrykke seg på forskjellige måter, og med forskjellige nivåer av teoretisk eller teknisk presisjon. Man skal kunne uttrykke seg gjennom forskjellige matematiske medier, som skriftlig, muntlig eller visuelt til ulike grupper av mottakere. I og med at denne kompetansen har som krav å kunne uttrykke seg på flere ulike representasjonsformer og medier, er denne kompetansen nært knyttet til representasjonskompetanse (se 4.3.5). Videre er kommunikasjonskompetanse også nært beslektet med symbol- og formalismekompetanse (se 4.3.6). Kommunikasjonskompetansen går derimot videre og omhandler kommunikasjonen mellom avsender og mottaker hvor formål og forutsetninger tas med i betraktningen på lik linje med budskapet og media for kommunikasjonen (Niss & Jensen, 2002, s. 60-61).

4.3.8 Hjelpemiddelkompetanse

Denne kompetansen handler om å ha kjennskap til diverse relevante redskaper til bruk for matematisk arbeid, og ha en kjennskap til deres muligheter og begrensninger i ulike situasjoner. Dette inkluderer å ha evnen til å bruke disse redskapene på en reflektert måte. Med redskaper menes her lommeregner, grafiske tegneprogrammer, beregningsprogrammer, tabeller, linjaler, passere m.m. I denne kompetansen handler det altså om å evne å benytte seg av og forholde seg til slike hjelpemidler. Videre er denne kompetansen nært knyttet til representasjonskompetanse (se 4.3.5) og symbol- og formalismekompetanse (se 4.3.6). Dette skyldes at bruken av et hjelpemiddel ofte involverer forskjellige typer av matematiske representasjoner og at hjelpemidlene ofte er knyttet til formaliteter eller andre matematiske forutsetninger (Niss & Jensen, 2002, s. 62).

4.4 Matematisk modellering

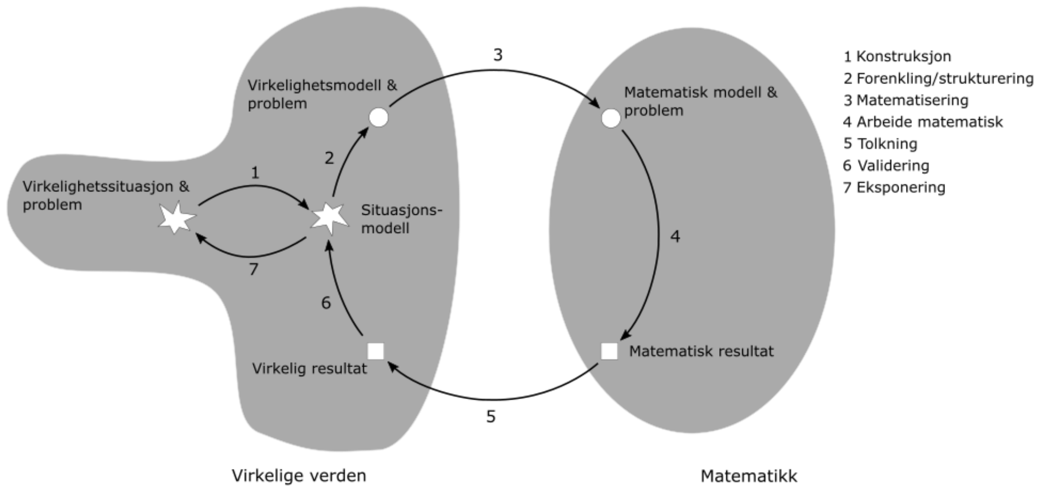
Ifølge Blum (2011) er en forståelse for matematisk modellering en viktig forutsetning for å forberede elever til å være ansvarlige medborgere og aktive i samfunnsutviklingen. Matematisk modellering er rundt oss hele tiden, og med en modelleringskompetanse kan man være i bedre stand til å forstå verden på en bedre måte (Blum, 2011, s. 19).

4.4.1 Modelleringssyklusen til Blum og Leiß

I sin analyse presenterer Ferri (2006) flere ulike modelleringssykluser og gjennomgår disse. Jeg velger å bruke Blum og Leiß (2007) sin modelleringssyklus som blir illustrert av Blum og Ferri (2009) (se Figur 2). Denne modellen separerer de ulike kognitive barrierene elever kan møte på i arbeidet med matematisk modellering gjennom 6 kognitive steg og 7 overganger. Alle disse trinnene er potensielle kognitive barrierer for elevene og er derfor viktige stadier i modelleringsprosessen (Blum & Ferri, 2009, s. 47). At modelleringssyklusen er delt inn i disse trinnene med detaljerte beskrivelser kan gjøre det enklere for meg å undersøke hvor elevene arbeider med de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002).

4.4.2 Kognitive faser knyttet til modelleringsprosessen

Modellen til Blum og Leiß (2007) bygger på ulike kognitive og konseptuelle tilnærminger til matematisk modellering. I modellen finnes det 6 ulike faser som knyttes til det kognitive perspektivet. Definisjonen på disse 6 fasene er hentet fra Blum og Leiß (2007) og Ferri (2007). (1) *Virkelighetssituasjon og problem* presenterer problemet. Dette kan



Figur 2: Egen oversettelse av modelleringssyklusen. (Blum & Ferri, 2009, s. 46)

være gjennom et bilde, tekst eller begge deler. (2) *Situasjonsmodellen* omfatter å lese og forstå problemet. Ferri (2007) argumenterer for at situasjonsmodellen også kan kalles *mental representasjon av situasjonen*. Dette er fordi det er viktig å her skape et mentalt bilde av problemet som skal modelleres. (3) *Virkelighetsmodell og problem* handler om å forenkle, strukturere og presisere situasjonen. Denne fasen er nært knyttet til situasjonsmodellen og avhenger i stor grad av individets indre nivå. Tegninger eller formler kan representere virkelighetsmodellen, men disse må knyttes til verbale forklaringer. (4) *Matematisk modell og problem* tar for seg hvordan matematisering transformerer det reelle problemet til et matematisk problem. I denne fasen er fokuset å lage en ekstern representasjon på et matematisk nivå. (5) *Matematisk resultat* kommer som et resultat etter å ha anvendt matematiske verktøy på modellen. (6) *Virkelig resultat* handler om hvordan man tolker det matematiske svaret og knytter dette til den virkelige verden.

4.4.3 Overganger mellom de kognitive fasene

I modellen til Blum og Leiß (2007) inngår det 7 overganger mellom de kognitive fasene. Disse overgangen tar for seg hvordan man skal arbeide mellom fasene. (1) *Konstruere* handler om å forstå problemet og gjøre seg en mental rekonstruksjon av problemet. (2) Strukturering handler om å forenkle, strukturere og presisere den informasjonen man får fra problemet som resulterer i en virkelig modell. Avhengig av spørsmålet vil denne overgangen kreve en stor forståelse for matematikk. Som også Blum og Leiß (2007) poengterer er det i de to første overgangene, *konstruere* og *strukturering*, problemløseren støter på problemer. Å lese en tekst og forstå både situasjonen og problemet er regnet for å være kognitive barrierer for elever. (3) Videre må man *matematisere* den virkelige modellen. Dette betyr å bygge en matematisk modell av den virkelige modellen gjennom matematiske begreper. Etter å ha konstruert en matematisk modell kan man (4) *arbeide matematisk*. I overgangen mellom den matematiske modellen og til det matematiske resultatet må problemløseren benytte seg av matematiske verktøy for å løse likninger og gjøre beregninger. Dette er å arbeide matematisk. Etter å ha funnet det matematiske resultatet må man (5) *tolke* dette. Dette innebærer å knytte det matematiske resultatet til den virkelige verden som et virkelig resultat. Videre må man (6) *validere* det virkelige resultat. Gir resultatet mening? Er antagelsene/forenklingene som er blitt gjort forenlige med resultatet? Gjennom validering av resultatet kan det vise seg at det er hensiktsmessig å gjøre endringer i et av de tidligere overgangene. Modelleringsprosessen avsluttes med en (7) formidling av det endelige svaret til det originale problemet i form av en presentasjon (Blum & Leiß, 2007; Ferri, 2007; Leiss et al., 2010).

5 Metode

I dette kapitlet skal jeg gjøre rede for gjennomføringen av datainnsamlingen, datagrunnlaget og metodiske valg som omhandler hvordan jeg har bearbeidet og analysert datamaterialet. Til slutt skal jeg gjøre rede for etiske betraktninger som ble gjort underveis i forskningen.

5.1 Gjennomføring av datainnsamling

5.1.1 Modelleringsoppgaven basert på Newtons avkjølingslov

Modelleringsoppgaven elevene arbeidet med tar utgangspunkt i Newtons avkjølingslov og inneholder 8 deloppgaver (se Tabell 1) og ett forsøk. Elevene ble delt inn i fire tilfeldige grupper, med 4-5 elever på hver gruppe, hvor de arbeidet med de 8 deloppgavene og forsøket i tilsammen 120 minutter. Disse 8 deloppgavene er utformet med hensikt at elevene skal følge modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). Selve modelleringsoppgaven går ut på å modellere en situasjon og lage en matematisk modell som beskriver hvordan temperaturen i en væske avtar til temperaturen i omgivelsene. Til slutt skal elevene lage en graf i Geogebra som viser hvordan temperaturen i væsken avtar som en funksjon av tiden, og vurdere om denne grafen passer med den virkelige verden. Denne modelleringsoppgaven baserer seg altså på Newtons avkjølingslov som kan beskrives med 1. ordens differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$. I avsnittet som følger vil jeg detaljert beskrive de 8 deloppgavene som inngår i modelleringsoppgaven, og beskrive hvordan de ble lagt frem til elevene da de arbeidet med disse.

I oppgave 1 var målet at elevene skulle formulere differensiallikningen,

$$\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r) \tag{3}$$

Elevene fikk i forkant av oppgave 1 en kort introduksjon til Newtons avkjølingslov. Her fikk de vite at dersom man varmer opp en væske til en gitt temperatur for så å la væsken avkjøles, kan Newtons avkjølingslov brukes til å beskrive hvordan temperaturen i væsken avatar. Deretter fikk elevene oppgitt definisjonen av Newtons avkjølingslov muntlig, altså,

> Endringsraten til temperaturen i en væske er proporsjonal til differansen mellom temperaturen i væsken, og temperaturen i rommet.

Fra denne definisjonen skulle altså elevene formulere differensiallikningen,

$$\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r) \tag{4}$$

I oppgave 2 skulle elevene diskutere hva varmekoeffisienten k kan representere og hva fortegnet til denne konstanten har å si for likningen. Målet for denne oppgaven var at elevene skulle reflektere rundt hva Newtons avkjølingslov forteller oss, og den deriverte i differensiallikningen de fant i oppgave 1. Ut i fra hvordan likningen er skrevet, og med antakelsen om at det er avkjøling som beskrives, så må k være positiv, altså $k > 0$, dette fikk elevene oppgitt. I oppgave 3 arbeidet elevene med å finne den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ av differensiallikningen de fant i oppgave 1. Etter dette fikk elevene vite at de skulle gjennomføre et forsøk hvor de enten skulle varme opp matolje eller vann. I oppgave 4 skulle elevene diskutere hvordan matolje og vann vil påvirke modellen, før de i oppgave 5 skulle formulere en hypotese for hvordan de tror k vil variere avhengig av væsken. Før elevene begynte å arbeide med oppgave 6 skulle de gjennomføre et forsøk hvor de skulle varme opp enten matolje eller vann, og gjøre målinger. Dette forsøket blir detaljert beskrevet i neste avsnitt. I oppgave 6 skulle elevene bruke målingene de fant i forsøket og finne verdien for k. Videre i oppgave 7 skulle elevene først diskutere for så å skrive ned årsaker til hvorfor gruppene som gjorde målinger på vann får ulik k enn gruppene som gjorde målinger på matolje. Før oppgave 8 fikk elevene en muntlig beskjed om å lage en lage en graf i Geogebra som viser hvordan temperaturen i væsken avtar som en funksjon av tiden. I oppgave 8 skulle elevene forklare hva som skjer i grafen, begrunne valg av modell, og vurdere om denne modellen passer med den virkelige verden.

5.1.2 Forsøket tilknyttet modelleringsoppgaven

Imellom deloppgavene 5 og 6 skulle de 4 gruppene hver for seg gjennomføre et forsøk i tilknytning til modelleringsoppgaven de arbeidet med. Vedlegg A.2 inneholder en skriftlig instruks som elevene fikk i begynnelsen av forsøket. Gruppe 1 og 4 arbeidet med vann, mens gruppe 2 og 3 arbeidet med matolje. Gruppene målte opp 5 dl vann eller matolje i et målebeger før de helte dette i hver sine identiske kasseroller. Deretter varmet de opp væsken til $90°C$, og lot temperaturen synke til $85°C$. Årsaken til at elevene først begynte å notere ned temperaturendringene ved $85°C$ skyldes at elevene måtte ha en felles starttemperatur i målingene. I forkant av datainnsamlingen gjennomførte jeg forsøket hjemme på egenhånd. Da ble jeg klar over hvor vanskelig det er å varme opp matolje og vann til nøyaktig $90°C$ da temperaturen ofte gikk over $90°C$. Jeg fant derfor ut at det ville være best for elevene å varme opp væsken til $90°C$, for så å la temperaturen synke til $85°C$. Da ville de få en felles starttemperatur for målingene sine. De fire gruppene utførte 25 målinger av temperaturen i væsken med 15 sekunders mellomrom. Totalt utførte gruppene målinger i 6 minutter. For hver måling noterte elevene ned temperaturene i tabellen som var inkludert på instruksjonsskrivet de fikk utlevert i forkant (se Vedlegg A.2).

	Beskrivelse
Oppgave 1	Formuler Newtons avkjølingslov som en differensiallikning.
Oppgave 2	Felles diskusjon: Hva representerer k, og hva har fortegnet for k å si for likningen?
Oppgave 3	Finn den generelle løsningen av differensiallikningen.
Oppgave 4	Felles diskusjon: Hvordan vil ulike typer væsker påvirke modellen?
Oppgave 5	Formuler en hypotese for hvordan k vil variere avhengig av væsken, og begrunn hypotesen.
Oppgave 6	Bruk målingene dere fant i forsøket og finn k for modellen.
Oppgave 7	Skriv ned årsaker for hvorfor vi får ulike verdier for k.
Oppgave 8	Forklar hva som skjer i grafen dere fant i Geogebra. Hvorfor synker grafen, og hvorfor flater den etter hvert ut? Begrunn hvilken modell dere brukte, og hvorfor.

Tabell 1: De 8 deloppgavene som ble gitt i modelleringsoppgaven og som elevene arbeidet med.

5.2 Datagrunnlaget

Hver gruppe fikk utlevert et oppgaveark som inkluderte alle de 8 deloppgavene hvor de også kunne notere ned alle beregninger og målinger de gjorde underveis. I tillegg ble det plassert én båndopptaker på hver av de fire gruppene som tok opp samtalene mellom elevene mens de arbeidet med modelleringsoppgaven. Totalt ble det lagt ut fire båndopptakere. I denne studien utgjør gruppenes skriftlige svar fra deloppgavene samt lydopptakene fra hver gruppe datagrunnlaget for den kommende analysen. I forkant av analysen laget jeg for min og veileders del et sammendrag fra lydopptakene som inkluderte alle de fire gruppene sine diskusjoner knyttet til arbeidet med de 8 deloppgavene og forsøket. Dette sammendraget brukte jeg til å få oversikt over elevenes arbeid og til å finne interessante spor som kunne brukes til å besvare de to forskningsspørsmålene mine.

5.3 Metoder for analyse av data

Nilssen (2012) skriver at kvalitativ forskning handler om å nærme seg verden der ute for å forstå, beskrive og enkelte ganger forklare sosiale fenomener fra innsiden, alt dette fra forskningsdeltakerens perspektiv (Nilssen, 2012, s. 13). I tillegg handler kvalitativ forskning om å utforske menneskelige prosesser i en virkelig situasjon (Postholm, 2010, s. 9). Målet med denne masteroppgaven er blant annet å undersøke hvor i modelleringssyklusen hver av de åtte matematiske kompetansene blir brukt i elevenes arbeid med modelleringsoppgaven. I tillegg er målet å undersøke hvilke type kunnskaper og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet elevene anvender i arbeidet med modelleringsoppgaven. Fordi forskningsperspektivet er rettet mot elevene og deres arbeid med modelleringsoppgaven valgte jeg en kvalitativ forskningsmetode som baserer seg på menneskelige prosesser i en virkelig situasjon. Jeg ønsker med dette valget å kunne oppnå en større grad av nærhet til deltakerne da det er deres perspektiv jeg ønsker å få tak i. En kvalitativ forskningsmetode kan føre til at jeg klarer å fange opp deltakernes oppfatninger, tanker og forståelser rundt deloppgavene som inkluderes i studien i større grad enn om jeg hadde valgt en kvantitativ forskningsmetode.

I en kvalitativ studie kan man skille mellom en induktiv eller deduktiv analyse. Ifølge Patton (2002) innebærer en induktiv analyse å finne mønstre, kategorier eller temaer fra datamaterialet, mens i en deduktiv analyse blir datamaterialet analysert ved å bruke forhåndsdefinerte mønstre, kategorier eller temaer. Man kan gjerne si at en induktiv analyse handler om å oppdage, mens deduktiv analyse handler om å verifisere (Patton, 2002, s. 67). Kvalitativ analyse er som regel induktiv i begynnelsen der man forsøker å lage forskjellige kategorier basert på koder. Dette blir ofte omtalt som *åpen koding* før man deduktivt tester kategoriene mot datamaterialet. Det finnes flere ulike årsaker for hvorfor man ønsker å gjennomføre en deduktiv analyse på et datamateriale. En årsak er for eksempel at man kan teste om kategoriene som er utviklet passer datamaterialet, eller undersøke om forskningsdeltakerne viser egenskaper knyttet til kategoriene (Patton, 2002, s. 454). I avsnittet *Analyse av elevenes arbeid i modelleringssyklusen og med de åtte matematiske kompetansene* vil jeg benytte en deduktiv tilnærming i analysen. En deduktiv tilnærming i analysen innebærer å bruke forhåndsdefinerte kategorier og undersøke om de er til stede i situasjonen (Nilssen, 2012, s. 71). Disse forhåndsdefinerte kategoriene vil utgjøres av de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002).

En årsak til at jeg ønsker å benytte meg av disse åtte kompetansene til Niss og Jensen (2002) som kategorier i den kommende analysen skyldes at de ifølge Niss og Jensen er formet for at man skal kunne kjenne de igjen i en aktivitet. Å være i besittelse av en eller flere av disse åtte kompetansene vil si å være i stand til å utføre visse matematiske handlinger. Handlinger her kan både være fysiske, språklige og mentale. En gyldig og dekkende undersøkelse av en elevs kompetanser må derfor baseres på tilstedeværelsen og rekkevidden av disse handlingene i forhold til en matematisk aktivitet. Denne matematiske aktiviteten tar da for seg utføringen av bevisste og formålsbestemte matematiske handlinger i en situasjon (Niss & Jensen, 2002, s. 125). Som Niss og Jensen poengterer videre kan en slik matematisk handling for eksempel være å bygge en konkret matematisk modell. Modelleringsoppgaven som baseres på Newtons avkjølingslov passer derfor godt som en matematisk handling da elevene blant annet skal arbeide med en matematisk modell.

I tillegg ønsker jeg å benytte meg av disse åtte kompetansene til Niss og Jensen (2002) som kategorier i den kommende analysen fordi en undersøkelse av kompetansene i en gitt aktivitet baserer seg på et teoretisk og analytisk arbeid fra empiri (Niss & Jensen, 2002, s. 125). Dette betyr at en undersøkelse av hvilke kompetanser en person gjør seg nytte av i en matematisk aktivitet først og fremst er en empirisk virksomhet ifølge

Jensen og Niss. Man kan undersøke hvordan elevene gjør seg nytte av kompetansene gjennom aktiviteten og resultatene fra den, dersom det lar seg oppdage på en gyldig, pålitelig og klar måte fra empirien (Niss & Jensen, 2002, s. 125). Gjennom å analysere datamaterialet fra elevenes arbeid kan jeg dermed undersøke hvordan deres handlinger samsvarer med definisjonene av de ulike kompetansene.

Videre baserer min kvalitative forskning seg rundt en studie hvor deltakerne ikke er tilfeldig valgt, men plukket ut etter bestemte kriterier. Fordi enkelte deloppgaver i forsøket inkluderer differensiallikninger og integrasjon, og det andre forskningsspørsmålet blant annet tar for seg hvilke type kunnskaper fra fysikkfaget elevene arbeider med, var jeg avhengig av elever ved en videregående skole som tar matematikkfaget R2, og som tidligere har tatt fysikkfaget Fysikk 1. Jeg tok derfor kontakt med to matematikklærere i faget R2 ved en videregående skole i Trondheim, og spurte om å få gjennomføre datainnsamling i den klassen hvor flest elever hadde tatt Fysikk 1. Totalt 18 av 19 elever fra klassen som deltok i studien hadde tatt Fysikk 1 året før og jeg anså derfor klassen som relevant til å delta i studien.

5.4 Gjennomføring av analysene

De 8 deloppgavene elevene arbeidet med i forsøket var designet for å kunne gi svar på begge forskningsspørsmålene mine, men hensikten med enkelte deloppgaver var å kunne gi svar på forskningsspørsmål 1 eller 2. For eksempel oppgave 7 som går som følger: Skriv ned årsaker for hvorfor vi får ulike verdier for k. Denne deloppgaven legger opp til at elevene skal reflektere rundt kunnskaper eller erfaringer de kan ha fra fysikkfaget eller dagliglivet, og dermed kunne gi svar på forskningsspørsmål 2. Oppgave 3 går som følger: Finn den generelle løsningen av differensiallikningen. Denne deloppgaven legger opp til at elevene må gjøre seg nytte av kompetanser innenfor matematikk, og dermed kunne gi svar på forskningsspørsmål 1.

Etter en gjennomgang av dataene viste det seg at svarene til elevene kunne skilles mellom å besvare forskningsspørsmål 1 eller 2. Data fra oppgave 1, 2, 3, 6 og 8 vil derfor bli benyttet til å besvare forskningsspørsmål 1, mens oppgave 4, 5 og 7 vil bli benyttet til å besvare forskningsspørsmål 2. Fordi datamaterialet fra deloppgave 4, 5 og 7 er begrenset, presenterer jeg de mest sentrale funnene under avsnittet *Presentasjon av elevenes nyttiggjøring av kunnskaper og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet* (se 6.3). Datamaterialet fra oppgave 1, 2, 3, 6 og 8 har et større omfang, og vil derfor bli analysert under avsnittet *Analyse av elevenes arbeid i modelleringssyklusen og med de åtte matematiske kompetansene* (se 6.2).

I denne studien vil jeg totalt gjennomføre to analyser under avsnittene: *Føranalyse av deloppgavene i modelleringsoppgaven* og *Analyse av elevenes arbeid i modelleringssyklusen og med de åtte matematiske kompetansene*. Den første analysen er en faglig analyse av fagstoffet som inngår i modelleringsoppgaven. I denne masteroppgaven bruker jeg begrepet *føranalyse* om denne prosessen. Denne føranalysen tar for seg de 8 deloppgavene elevene arbeidet med (se 5.4.1), mens den andre analysen vil undersøke hvordan elevene arbeider i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) og hvordan elevene arbeider med de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002).

5.4.1 Føranalyse av deloppgavene i modelleringsoppgaven

I forkant av datainnsamlingen gjennomførte jeg en føranalyse av de 8 deloppgavene elevene arbeidet med (se 6.1). Dette er altså en faglig analyse som er uavhengig av dataene fra elevenes arbeid og som tar for seg et mulig løsningsforslag på deloppgavene, begreper som kan være utfordrende for elevene og temaer fra fysikken som kan være relevante. Bakgrunnen for at jeg ønsker å gjennomføre denne føranalysen er for å kunne være best mulig forberedt når forsøket skal gjennomføres i klasserommet. Å lage et løsningsforslag, gjøre rede for begreper og temaer fra fysikken på forhånd kan bidra til å skape en faglig trygghet for meg selv når forsøket skal gjennomføres i klasserommet. Føranalysen baseres på de 8 deloppgavene elevene skal arbeide med som igjen baseres på modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007).

5.4.2 Analyse av elevenes arbeid i modelleringssyklusen og med de åtte matematiske kompetansene

I arbeidet med denne analysen vil jeg benytte meg av en deduktiv tilnærming hvor det er de åtte matematiske kompetansene tilNiss og Jensen (2002) som utgjør de forhåndsbestemte kategoriene. Kategoriene for denne analysen er dermed: tankegangskompetanse, problemløsningskompetanse, modelleringskompetanse, resonnementskompetanse, representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse. Målet med denne analysen vil være å bruke disse åtte kategoriene til å gi svar på det første forskningsspørsmålet,

1. Hvordan og hvor i modelleringssyklusen bruker elevene de åtte matematiske kompetansene i arbeidet med Newtons avkjølingslov?

Denne analysen baserer seg altså på en deduktiv tilnærming hvor de åtte kompetansene utgjør kategoriene. I arbeidet med denne analysen gjennomgikk jeg datamaterialet og forsøkte å finne spor av de forhåndsbestemte kategoriene. Målet var å finne ut hvilke av de forhåndsbestemte kategoriene elevene brukte. For eksempel kunne jeg finne et interessant spor i sammendraget før jeg deretter gikk inn i lydopptakene og hørte gjennom samtalen mellom elevene. Fra definisjonene av de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) kunne jeg da knytte elevenes arbeid mot en kompetanse. Sporene kunne også komme fra elevenes egne notater, og enkelte spor kunne også knyttes til flere kompetanser.

I tillegg undersøkte jeg i denne analysen hvor i modelleringssyklusen til Blum og Leiß

(2007) elevene gjorde bruk av de ulike kompetansene. Dette gjorde jeg ved å først identifisere hvilke av kompetansene elevene arbeidet med, for deretter å identifisere hvor i modelleringssyklusen elevene arbeidet ved å bruke definisjonene til Blum og Leiß (2007) omkring de kognitive fasene og overgangene mellom disse.

5.5 Etiske betraktninger

I arbeidet med denne studien har jeg tatt stilling til etiske spørsmål. I kvalitativ forskning er det etiske hensyn, dilemmaer og betraktninger man hele tiden må forholde seg til (Nilssen, 2012, s. 144).

Før gjennomføringen av datainnsamlingen var det nødvendig med godkjennelse fra Norsk senter for forskningsdata (NSD). Det ble derfor innhentet skriftlig samtykke fra alle elevene som deltok i studien gjennom et samtykkeskjema (se Vedlegg A.1). I dette skjemaet ble elevene informert om formålet ved studien og hvordan datainnsamlingen skulle gjennomføres. Fordi elevene som deltok var over 16 år var det ikke nødvendig med tillatelse fra foreldre.

Konfidensialiteten i studien er bevart gjennom at alle navnene på elevene som deltok er anonymisert. Videre ble lydopptakene kun hørt av meg før de etter hvert ble transkribert og slettet innen 1. juni 2022.

Som Nilssen skriver er en kvalitativ forsker avhengig av at andre viser en godvilje og lar deg som forsker slippe inn i livet deres (Nilssen, 2012, s. 144). Elevene som deltar i denne studien bruker av tiden sin og går blant annet glipp av undervisningstid. Jeg gjorde derfor en nøye planlegging i samarbeid med læreren i forkant av datainnsamlingen omkring hvilke temaer elevene arbeidet med, og når de skulle begynne på neste. Etter å ha kartlagt elevenes progresjon i temaet differensiallikninger, kunne jeg avtale et tidspunkt for gjennomføringen av datainnsamlingen. På denne måten kunne jeg gjennomføre datainnsamlingen til studien hvor temaet og oppgavene i studien var relevante for elevene. Å delta i denne studien kan derfor ha en positiv innvirkning på elevenes forståelse i temaet differensiallikninger.

6 Presentasjon og analyse av funn

Som nevnt tidligere ønsker jeg i denne studien å gjennomføre to analyser og én presentasjon. En føranalyse av de 8 deloppgavene elevene arbeidet med og en analyse som vil rette fokuset mot funnene knyttet til forskningsspørsmål 1. Presentasjonen vil rette fokuset mot funnene knyttet til forskningsspørsmål 2.

6.1 Føranalyse av deloppgavene i modelleringsoppgaven

I dette avsnittet ønsker jeg å gjennomføre en føranalyse av de 8 deloppgavene elevene arbeidet med i modelleringsoppgaven som baserer seg på Newtons avkjølingslov. Til hver deloppgave vil jeg presentere et mulig løsningsforslag, redegjøre for begreper som kan være utfordrende for elevene og temaer fra fysikken som kan være relevante. Alle verdier som blir brukt i denne føranalysen er basert på en gjennomføring av modelleringsoppgaven som jeg gjorde i forkant. Verdiene i denne føranalysen er altså uavhengig av dataen fra elevenes arbeid.

6.1.1 Oppgave 1

Formuler Newtons avkjølingslov som en differensiallikning.

Målet for denne deloppgaven er at elevene skal utlede en 1. ordens differensiallikning basert på formuleringen av Newtons avkjølingslov. Denne formuleringen blir gitt til elevene muntlig i forkant av oppgaven og er som følger:

> Endringsraten til temperaturen i en væske er proporsjonal til differansen mellom temperaturen i væsken, og temperaturen i rommet.

Denne formuleringen må elevene bearbeide for å etter hvert kunne formulere differensiallikningen under,

$$\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r), \quad k > 0 \tag{5}$$

Elevene fikk i denne oppgaven beskjed i forkant at de kunne anta at $k > 0$. I denne deloppgaven anser jeg begrepene endringsrate og proporsjonal som utfordrende for elevene, og redegjør derfor videre for definisjonene av disse begrepene.

Definisjonen av den deriverte av en funksjon f er gitt ved,

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{6}$$

for alle punkter x i definisjonsmengden til funksjonen $f(x)$ hvor grenseverdien eksisterer (Adams & Essex, 2018).

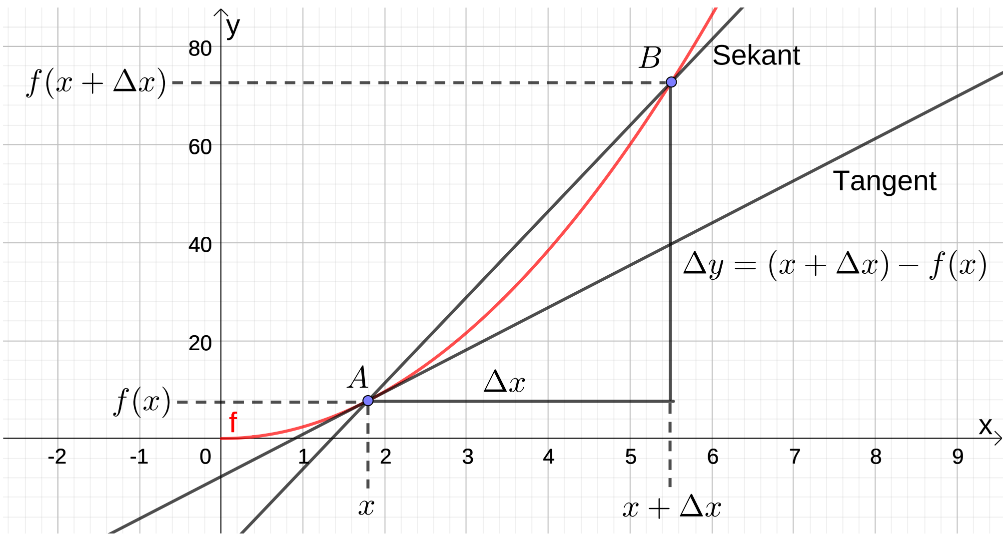
Dette betyr at den deriverte i et punkt x er grenseverdien når man betrakter endringen i funksjonsverdien $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ i forhold til Δx når Δx går mot null. Den deriverte forteller oss da hvor mye funksjonen $f(x)$ øker eller minker i punktet x per x-enhet. Dette kan man knytte til begrepet *rate* som uttrykker et forhold mellom en mengde eller grad av noe per enhet av noe annet. I arbeidet med oppgave 1 ser man på forholdet mellom hvordan temperaturen i væsken avtar per sekund som en rate. Tolker man videre størrelsen,

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{7}$$

i intervallet fra x til $x + \Delta x$ gir dette oss en gjennomsnittlig endringsrate. Dersom vi lar $\Delta x \to 0$ gir grenseverdien oss et uttrykk for den momentane endringsraten til f i et punkt x.

I Figur 3 illustreres hvordan man gjennom to punkter $A = (x, f(x))$ og $B = (x +$

$\Delta x, f(x + \Delta x))$ på grafen til funksjonen f kan trekke en sekant. Denne sekanten er en lineær funksjon med uttrykket $y = ax + b$ hvor a er stigningstallet til grafen og b er konstantleddet. Dette stigningstallet blir definert som $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Stigningstallet vil være likt som den gjennomsnittlige endringsraten i intervallet $[x, x+\Delta x]$. Dersom vi lar $\Delta x \to 0$ vil punktet $B = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ nærme seg punktet $A = (x, f(x))$ på grafen til funksjonen f. Tangenten er definert som grensestillingen til sekanten i punktet $A = (x, f(x))$ hvor stigningstallet til tangenten er lik den momentane endringsraten for funksjonen f i punktet $A = (x, f(x))$.



Figur 3: Illustrasjon av hvordan sekanten gjennom punktene A og B vil nærme seg tangenten i punktet A når Δx går mot null.

I matematikkundervisningen på videregående skole er differensialregning, også kjent som derivasjon, et sentralt tema i fagene 1T, S1, R1 og R2. Derivasjon er et sentralt tema i matematikk og andre matematiske vitenskaper som for eksempel fysikk. Dette er et viktig matematisk verktøy som brukes blant annet til å studere momentan endring. I dette forsøket ser vi på hvordan temperaturen T i enten matolje eller vann endrer seg i et tidspunkt t. Når elevene etter hvert i oppgave 3 finner et uttrykk for temperaturen som en funksjon av tiden $T_v(t)$, kan de derivere uttrykket og få et nytt uttrykk for temperaturendringen som en funksjon av tiden $T_v'(t)$. Denne temperaturendringen forteller da hvor fort temperaturen synker/øker ved ulike tidspunkt, altså endring i temperatur per sekund.

En proporsjonal funksjon er en bestemt type lineær funksjon som kan skrives på formen $y = ax$. De to størrelsene x og y er proporsjonale dersom forholdet mellom dem er konstant og kan uttrykkes slik,

$$a = \frac{y}{x} \tag{8}$$

Dette er altså en lineær funksjon hvor konstantleddet er 0. Dette fører til at grafen vil være en rett linje som går gjennom origo. Stigningstallet a bestemmer hvordan grafen stiger eller synker. I dette forsøket kan en proporsjonal funksjon brukes til å representere hvordan temperaturen i en væske vil avta i forhold til tiden. Proporsjonaliteten i forsøket er mellom differansen i temperatur og endringsraten.

6.1.2 Oppgave 2

Felles diskusjon: Hva representerer k, og hva har fortegnet for k å si for likningen?

Målet for denne deloppgaven er at elevene skal reflektere rundt hva Newtons avkjølingslov forteller oss, og arbeide med den deriverte i differensiallikningen de fant i oppgave 1. I introduksjonen til denne oppgaven bruker jeg en fiktiv kaffekopp med varm kaffe i som et eksempel for å vise hvordan differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = k(T_v - T_r)$ kan brukes og for at elevene i en større grad skal få et mentalt bilde av dette. Elevene skal altså i oppgave 2 arbeide med hvordan temperaturen i en væske avtar og hvordan dette påvirker endringsraten til differensiallikningen.

Deloppgaven tar utgangspunkt i at temperaturen i væsken (T_v) er høyere enn temperaturen i rommet (T_r) altså $(T_v > T_r)$. Dette vil føre til at temperaturen i væsken etter hvert vil avta. Dette betyr at endringsraten $\frac{dT}{dt}$ må være negativ. Fordi vi antar at temperaturen i væsken er større enn temperaturen rommet $(T_v > T_r)$ er differansen mellom disse større enn 0 $((T_v - T_r) > 0)$. Ved å anta at varmekoeffisienten (k) er positiv $(k > 0)$ får man altså uttrykket, $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$.

Før jeg presenterer mulige løsninger for hvordan man kan tolke endringsraten når temperaturen i væsken avtar, vil jeg formulere to teoremer og én definisjon. Teorem 1 redegjør for betingelsene for den 1. deriverte som fører til at en funksjon f er voksende/synkende. Teorem 2 redegjør for betingelsene rundt den 2. deriverte som fører til om en funksjon f er konveks/konkav. Definisjon 3 gir definisjonen på et vendepunkt. Figur 4 illustrerer hvordan en konkav og konveks graf ser ut, og hvor vendepunktet mellom disse er.

Voksende/synkende funksjon f

Den 1. deriverte av en funksjon $f(x)$ kan skrives som $f'(x)$, eventuelt også $\frac{df}{dx}$, og forteller oss om funksjonen $f(x)$ er voksende eller synkende, og hvor mye den øker/minker per tidsenhet. Dette reflekteres i hvordan helningen til tangentlinjen i et punkt på grafen til $f(x)$ er.

Når den 1. deriverte er positiv $(f'(x) > 0)$ er helning på tangentlinjen til $f'(x)$ i et punkt p på grafen $f(x)$, positiv. Altså når den 1. deriverte er positiv $(f'(x) > 0)$ er grafen til $f(x)$ voksende når x øker.

Når den 1. deriverte er negativ $(f'(x) < 0)$ er helning på tangentlinjen til $f'(x)$ i et punkt p på grafen $f(x)$, negativ. Altså når den 1. deriverte er negativ $(f'(x) > 0)$ er grafen til $f(x)$ synkende når x øker.

Følgende teorem (Briggs & Cochran, 2010, s. 187) gir kriterier for om en funksjon er voksende eller synkende,

Teorem 1 *Anta at f er kontinuerlig på intervallet [a, b], og deriverbar på det åpne intervallet (a, b). Da gjelder,*

$$f'(x) > 0 \textit{ for alle } x \in \textit{(a, b)} \implies f \textit{ er voksende på (a, b)}$$
$$f'(x) < 0 \textit{ for alle } x \in \textit{(a, b)} \implies f \textit{ er synkende på (a, b)}$$

Konkav/konveks funksjon f

Den 2. deriverte av en funksjon er den deriverte av den 1. deriverte. Denne kan vi skrive som $f''(x)$, eventuelt også $\frac{d^2f}{dx^2}$. Mens den 1. deriverte kan fortelle oss om funksjonen $f(x)$ er økende eller stigende, og hvor mye den øker/minker per tidsenhet, forteller den 2. deriverte oss om den 1. deriverte er stigende eller synkende.

Hvis den 2. deriverte er positiv $(f''(x) > 0)$ så er $f(x)$ konveks. Fordi den 2. deriverte er positiv er den 1. deriverte voksende på (a, b), altså er stigningstallet til tangentlinjen i et punkt p på grafen til $f(x)$ voksende når x øker.

Hvis den 2. deriverte er negativ $(f''(x) < 0)$ så er $f(x)$ konkav. Fordi den 2. deriverte er negativ er den 1. deriverte synkende, altså er stigningstallet til tangentlinjen i et punkt p på grafen til $f(x)$ synkende når x øker.

Følgende teorem (Briggs & Cochran, 2010, s. 192) gir kriterier for om en funksjon er konveks eller konkav,

Teorem 2 *Anta at f er kontinuerlig på intervallet [a, b], og to ganger deriverbar på det åpne intervallet (a, b). Da gjelder,*

$$f''(x) > 0 \textit{ for alle } x \in (a, b) \implies f \textit{ er konveks på } (a, b)$$
$$f''(x) < 0 \textit{ for alle } x \in (a, b) \implies f \textit{ er konkav på } (a, b)$$

Et vendepunkt

Den 2. deriverte kan altså fortelle oss om funksjonen $f(x)$ er konkav eller konveks. Om en funksjon er konkav eller konveks spiller en viktig rolle også for den 1. deriverte. Dersom tangentlinjen til den 1. deriverte er stigende når x øker, er funksjonen konveks. Dersom stigningstallet til tangentlinjen til den 1. deriverte er synkende når x øker, er funksjonen konkav. Når funksjonen f går fra konkav til konveks, eller motsatt, i et punkt p kaller vi dette punktet *vendepunkt*. Definisjonen (Briggs & Cochran, 2010, s. 191-192) på et vendepunkt er følgende,

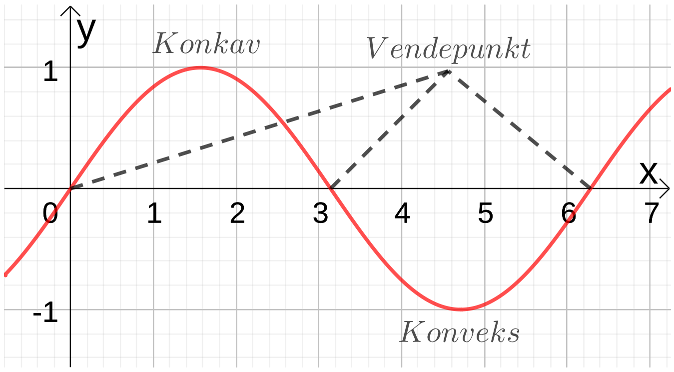
Definisjon 3 *Anta at f er deriverbar på det åpne intervallet (a, b),*

Hvis f' er stigende på (a, b), så er f konveks.
Hvis f' er synkende på (a, b), så er f konkav.

Hvis f er kontinuerlig i et punkt p og f skifter fra konkav til konveks, eller motsatt, har f et vendepunkt i punktet p.

Det finnes ulike situasjoner for hvordan temperaturen i en væske kan avta. Videre vil jeg redegjøre for tre måter for hvordan det kan tenkes at temperaturen i væsken avtar.

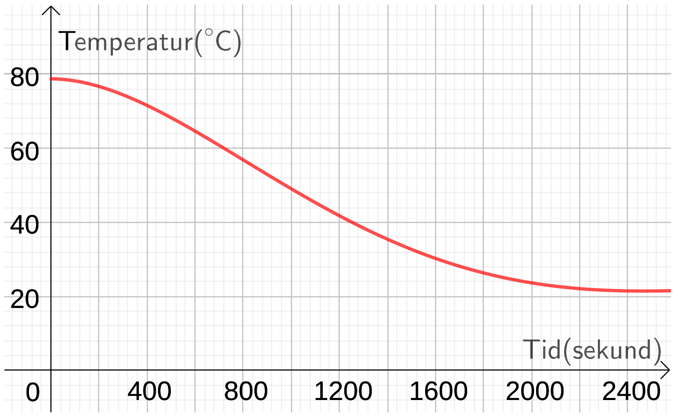
I den første situasjonen antar man at temperaturen i væsken har en utvikling som vist i Figur 5. I denne situasjonen vil temperaturen i væsken gradvis begynne å synke før den



Figur 4: Funksjonen $f(x) = sin(x)$ som viser hvordan formen til en konkav og konveks graf ser ut. I tillegg viser den hvor vendepunktet mellom en konkav og konveks graf er.

etter hvert jevner seg ut med temperaturen i rommet. I denne situasjonen antar man at funksjonen til temperaturen i væsken har en negativ 1. derivert $(f'(x) < 0)$ hele tiden. Dette skyldes at man forventer at temperaturen i væsken skal avta, og fra Teorem 1 vet man at når den 1. deriverte er negativ må grafen være synkende. I denne situasjonen vil den 1. deriverte være synkende i begynnelsen for funksjonen, altså må grafen til temperaturen i væsken ifølge Definisjon 3 ha en konkav form. Når grafen har en konkav form skyldes dette av at den 1. deriverte er synkende som igjen skyldes av at den 2. deriverte er negativ $(f''(x) < 0)$. Man antar så at den 1. deriverte går fra å være synkende til voksende i et vendepunkt p. Grafen til temperaturen i væsken går da ifølge Definisjon 3 fra en konkav til konveks form. Når grafen har en konveks form skyldes dette av at den 1. deriverte er stigende som igjen skyldes av at den 2. deriverte er positiv $(f''(x) > 0)$.

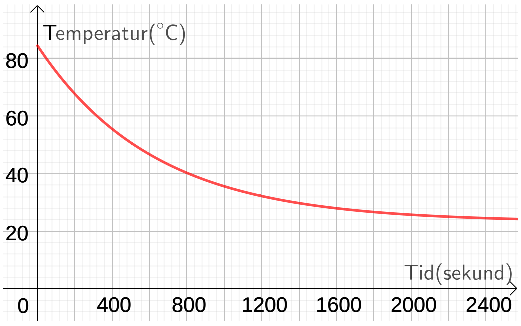
I den andre situasjonen antar man at temperaturen i væsken har en utvikling som vist i Figur 6a. I denne situasjonen vil temperaturen i væsken synke raskt fra starten, før den jevner seg ut med temperaturen i rommet. I denne situasjonen antar man at grafen til temperaturen i væsken har en negativ 1. derivert $(f'(x) < 0)$ hele tiden. Man forventer at temperaturen i væsken skal avta, og da må den 1. deriverte være negativ og grafen være synkende (Teorem 1). Videre antar man at 1. deriverte er stigende hele tiden fordi



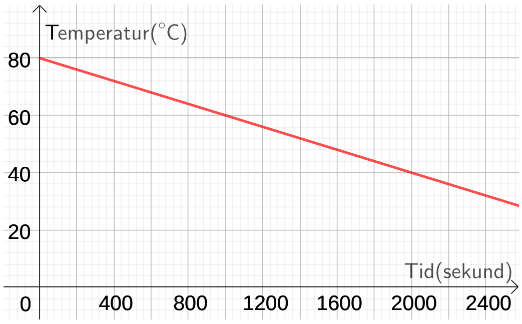
Figur 5: Første situasjon hvor temperaturen i væsken vil ha en konkav form, før den etter hvert går over til en konveks form.

den etter hvert skal jevne seg ut med romtemperaturen. Grafen til temperaturen i væsken må da ha en konveks form (Definisjon 3). Når grafen har en konveks form skyldes dette av at den 1. deriverte er stigende som igjen skyldes av at den 2. deriverte er positiv $(f''(x) > 0)$

I den tredje situasjonen antar man at temperaturen i væsken har en utvikling som vist i Figur 6b. I denne situasjonen vil temperaturen i væsken synke lineært, altså at temperaturen i væsken vil avta konstant i forhold til tiden. I denne situasjonen antar man at grafen til temperaturen i væsken har en negativ 1. derivert $(f'(x) < 0)$ hele tiden. Man forventer at temperaturen i væsken skal avta, og da må den 1. deriverte være negativ og grafen være synkende (Teorem 1). Videre antar man at temperaturen i væsken synker lineært. Da er hverken den 1. deriverte voksende eller avtagende som skyldes at den 2. deriverte er 0 $(f''(x) = 0)$.



(a) Andre situasjon hvor man antar at temperaturen i væsken begynner å synke umiddelbart før den jevnes ut mot romtemperaturen.



(b) Tredje situasjon hvor man antar at temperaturen i væsken synker lineært.

Figur 6: Andre (a) og tredje (b) situasjon å betrakte hvordan temperaturen i væsken kan avta.

6.1.3 Oppgave 3

Finn den generelle løsningen av differensiallikningen.

Målet for denne deloppgaven er at elevene skal finne den generelle løsningen

$$T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r \tag{9}$$

til differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$, hvor vi antar at $k > 0$. Løsningsmetoden som presenteres under er den samme som elevene lærer i arbeidet med differensiallikninger på skolen (Oldervoll et al., 2015, s. 280-285). Den generelle løsningen kan utledes som følger:

$$
\begin{aligned}
\frac{dT_v}{dt} &= -k(T_v - T_r) \\
\frac{dT_v}{dt} + k(T_v - T_r) &= 0 \\
\frac{dT_v}{dt} + k(T_v - T_r) &= 0 \;\mid \cdot e^{kt} \\
\frac{dT_v}{dt} \cdot e^{kt} + k(T_v - T_r)e^{kt} &= 0 \\
\frac{dT_v}{dt} \cdot e^{kt} + kT_v e^{kt} - kT_r e^{kt} &= 0
\end{aligned}
$$

Produktregelen går som følger,

$$\frac{d}{dt}(u \cdot v) = \frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dt}$$

Ved å bruke denne regelen hvor $u = T_v$ og $v = e^{kt}$, får vi videre,

$$\frac{d}{dt}(T_v e^{kt}) = \frac{dT_v}{dt} \cdot e^{kt} + kT_v e^{kt},$$

Altså kan vi skrive,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(T_v e^{kt}) - kT_r e^{kt} &= 0 \\
\frac{d}{dt}(T_v e^{kt}) &= kT_r e^{kt} \\
\int \frac{d}{dt}(T_v e^{kt}) dt &= \int kT_r e^{kt} dt \\
\int \frac{d}{dt}(T_v e^{kt}) dt &= \int kT_r e^{kt} dt \\
T_v(t) e^{kt} &= T_r e^{kt} + C \\
T_v(t) e^{kt} &= T_r e^{kt} + C \ \mid \cdot e^{-kt} \\
T_v(t) &= Ce^{-kt} + T_r
\end{aligned}$$

$T_v(t)$ beskriver da temperaturen i væsken ved et tidspunkt t.

6.1.4 Oppgave 4

Felles diskusjon: Hvordan vil ulike typer væsker påvirke modellen?

Målet for denne deloppgaven er at elevene skal diskutere hvordan matolje og vann kan påvirke den matematiske modellen de fant i oppgave 3.

$$T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r \tag{10}$$

Varmer man opp de ulike væskene til en lik temperatur for så å la de avkjøles i samme rom med lik romtemperatur, vil integrasjonskonstanten C være lik for begge væskene. En lik verdi for intergrasjonskontant C forutsetter at temperaturene i væskene er like i det de begynner å avta. Da vil kun varmekoeffisienten k være en varierende faktor som påvirker modellen. Denne varmekoeffisient er en konstant som blant annet er avhenger av væskens evne til å overføre varme. Varmer man derimot opp de ulike væskene til ulike temperaturer for så å la de avkjøles i samme rom med lik romtemperatur, vil C variere for begge væskene. Da vil både varmekoeffisienten k og integrasjonskonstanten C være en varierende faktor som påvirker modellen.

En sentral del av denne deloppgaven handler derfor om å forsøke å forstå hvordan varmekoeffisienten k vil variere avhengig av om man bruker vann eller matolje. I arbeidet med dette er begrepet varmeoverføring sentralt.

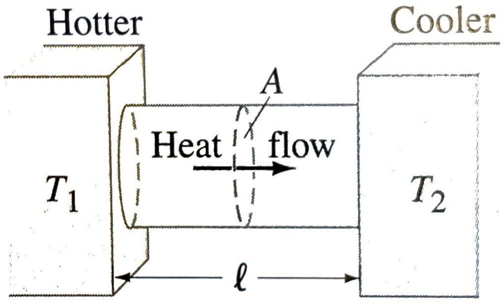
Giancoli (2009) beskriver hvordan varmeoverføring i et materiale kan visualiseres ved å se på hvordan molekylene i stoffet kolliderer. Når man varmer opp materialet vil molekylene bevege seg raskere og raskere. etter hvert som de kolliderer med andre molekyler som ikke beveger seg like raskt, overføres noe av den kinetiske energien fra de raske og til de saktegående molekylene, som igjen vil overføre energi til andre saktegående molekyler. Varmeoverføring i et materiale skjer ved en differanse i temperaturen i materialet. Hastigheten for varmestrømmen i et materiale er proporsjonal med differansen mellom temperaturene. Varmestrømmen ΔQ over et tidsintervall Δt er gitt ved,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA\frac{T_1 - T_2}{l} \tag{11}$$

hvor A er arealet av tverrsnittet til sylinderen hvor varmestrømmen beveger seg i, l er avstanden i materialet og lengden på sylinderen, k er en varmekoeffisient til materialet, som er lik k-en i differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$, og T_1 og T_2 er temperaturer ved to ulike steder på materialet (Giancoli, 2009, s. 515). Varmeoverføring i et materiale vises i Figur 7. I modelleringsoppgaven som elevene skal arbeide med ser vi på varmeoverføring mellom en væske og rommet væsken står i, derfor kan vi forenkle uttrykket.

T_1 vil tilsvare T_v og T_2 vil tilsvare T_r. I tillegg vil ikke arealet A eller avstanden mellom væsken og rommet l være relevant fordi temperaturen i væsken er omgitt av temperaturen i rommet. Altså vil ikke sylinderen i Figur 7 mellom T_1 og T_2 være relevant. Ved å fortsatt anta at $k > 0$ kan man da skrive uttrykket som,

$$\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r). \tag{12}$$



Figur 7: Varmeoverføring i et materiale med temperaturene T_1 og T_2. Når $T_1 > T_2$ går varmestrømmen mot høyere. (Hentet fra Giancoli, 2009, s. 515)

Et materiale hvor verdien for varmekoeffisienten k er høy vil kunne overføre varme raskt og kan ses på som en god varmeleder. For et materiale som har lav verdi for k vil overføringen av varme ta lenger tid og er derfor dårlige ledere for varme. Man kan si at et materiale med lav verdi for k er en god varmeisolator (Giancoli, 2009, s. 516).

6.1.5 Oppgave 5

Formuler en hypotese for hvordan k vil variere avhengig av væsken, og begrunn hypotesen

Denne deloppgaven knytter seg i stor grad inn i forrige deloppgave (oppgave 4) hvor elevene skulle diskutere hvordan ulike typer væske vil påvirke den gitte modellen. Med denne deloppgaven skal elevene i større grad konkludere og sette ord på disse forventningene gjennom å finne en hypotese. Målet for denne deloppgaven er at elevene skal forsøke å finne en hypotese for hvordan verdien for k vil variere for matolje og vann.

$$T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r. \tag{13}$$

Som det kommer frem i føranalysen av oppgave 4 representerer k-verdien væskens evne til å overføre energi og kan knyttes til begrepet varmeoverføring. Det kan derfor tenkes at elevene knytter elementer fra begrepet varmeoverføring inn i deres hypotese. En mulig hypotese kan for eksempel være:

> Matolje har en tykkere konsistens enn vann og molekylene vil derfor bevege seg saktere i olje enn vann. Dette fører til at evnen matolje har til å overføre varme er lavere enn hos vann, og dermed vil verdien for k være lavere hos matolje enn vann.

6.1.6 Oppgave 6

Bruk målingene dere fant i forsøket og finn k for modellen.

Målet for denne deloppgaven er at elevene skal regne ut integrasjonskonstanten C, og varmekoeffisienten k i den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$. Når elevene har gjennomført de 25 målingene vil de kunne bruke disse verdiene til å først regne ut den ukjente integrasjonskonstanten C og deretter varmekoeffisienten k i den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$. Hvordan dette kan gjøres vises i utregningene som følger.

Gitt verdiene $T_v(0) = 85°C$ og for eksempel $T_r = 23,0°C$ kan man regne ut integrasjonskonstanten C.

$$\begin{aligned}
T_v(t) &= Ce^{-kt} + T_r \\
T_v(0) &= Ce^{-k \cdot 0} + 23,0 \\
T_v(0) &= Ce^{0} + 23,0 \\
T_v(0) &= C + 23,0 \\
85,0 &= C + 23,0 \\
C &= 62,0°C
\end{aligned}$$

Gitt verdiene $C = 62°C$ og for eksempel $T_v(30) = 82°C$ kan vi finne verdien for k.

$$\begin{aligned}
T_v(t) &= 62,0e^{-kt} + 23,0 \\
T_v(30) &= 62,0e^{-k \cdot 30} + 23,0 \\
82,0 &= 62,0e^{-k \cdot 30} + 23,0 \\
58,0 &= 62,0e^{-30k} \\
\frac{58,0}{62,0} &= e^{-30k}
\end{aligned}$$

Ved å anvende den naturlige logaritmen på begge sidene får vi,

$$\begin{aligned}
\ln(\frac{58,0}{62,0}) &= -30k \\
\frac{\ln(\frac{58,0}{62,0})}{-30} &= k \\
k &\approx 0,0022
\end{aligned}$$

Hvor k er en konstant for varmeledningsevnen avhengig av hvilken type væske målingene er utført på.

Videre kan grupper som arbeider med lik type væske oppleve å få ulike verdier for k. En årsak til dette kan skyldes hvilke verdier de bruker når de regner ut varmekoeffisient k. I utregningen ovenfor ble verdiene $T_v(0) = 85°C$ og $T_r = 23,0°C$ benyttet for å finne integrasjonskonstanten C. Verdien for denne konstanten vil være lik for alle gruppene siden de skal bruke lik startverdi for temperaturen i væsken, altså $(T_v(0) = 85°C)$, og lik verdi for temperaturen i rommet. Når elevene skal regne ut verdien for k må de selv velge én verdi fra målingene de bruker i utregningen. For eksempel, om man velger å bruke måling nr. 2 $(T_v(15) = 83,4°)C$ får man $k \approx 0,0017$. Om man velger å bruke måling nr. 25 $(T_v(360) = 64,1°C)$ får man $k \approx 0,0011$. Valget for hvilken verdi man bruker for å regne ut k har med andre ord stor betydning for verdien for varmekoeffisienten k. For å unngå å få denne høye eller lave verdien for k kan elevene eventuelt finne snittet av den høyeste og laveste verdien for k, og da finne en gjennomsnittlig verdi for k. Elevene får da $k = \frac{(0,0017+0,0011)}{2} = 0,0014$. Eventuelt kan elevene også velge å bruke en verdi fra midten av målingene. Velger man for eksempel måling nr. 12 $(T_v(180) = 71,5°C)$ får man $k \approx 0,0014$.

6.1.7 Oppgave 7

Skriv ned årsaker for hvorfor vi får ulike verdier for k.

Målet for denne deloppgaven er at elevene skal reflektere rundt hvorfor vi får ulike verdier for k. Matolje og vann vil gi ulike verdier for k. Det kan også tenkes at gruppene som arbeider med lik type væske opplever avvik til hverandre, men det kan også forekomme avvik innenfor gruppene om de gjør flere utregninger for ulike tidspunkt.

Denne deloppgaven kan knyttes til oppgave 4, hvor elevene skulle diskutere hvordan ulike typer væske ville påvirke modellen under,

$$T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r. \tag{14}$$

I oppgave 4 var evnen et stoff har til å overføre varme sentralt. Denne varmeledningsevnen til et stoff er også sentral i denne deloppgaven, men i tillegg er også termodynamikkens 0. lov svært sentral for å forstå hvorfor temperaturen etter hvert blir like i de to væskene. Formuleringen av denne loven er følgende:

> Hvis system 1 og system 2 er i termisk likevekt med system 3, så er også system 1 og system 2 i termisk likevekt med hverandre. (Giancoli, 2009, s. 459).

Termisk likevekt betyr her at temperaturen i system 1 og system 2 etter hvert blir lik. Temperatur er en egenskap ved et system som bestemmer om systemet vil være i termisk likevekt med andre systemer. Når to systemer er i termisk likevekt vil temperaturen deres fra definisjonen av være like og ingen netto energi vil bli overført mellom systemene. Denne loven kan gjenspeiles i vår hverdagslige oppfatning rundt temperaturer. Lar man et varmt objekt være i kontakt med et kaldt objekt, får de etter hvert samme temperatur (Giancoli, 2009, s. 459). Dette kan knyttes til modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ som elevene arbeider med i dette forsøket. Temperaturen i væsken vil avta og etter hvert bli lik temperaturen i rommet, uavhengig av verdien for k. Dette kan vises med grensen $\lim_{t\to\infty} T_v(t) = T_r$ hvor $\lim_{t\to\infty} e^{-kt} = 0$ når $k > 0$.

I tillegg kan man også trekke inn feilkilder som en mulig forklaring på hvorfor man får ulike verdier for k. Disse kan være,

1. Temperaturmåleren. Var denne i kontakt med kjelen underveis i målingene, eller lå den i væsken.
2. Kjelen. Ble denne flyttet på underveis i målingene, eller var denne i ro da målingene ble gjennomført.

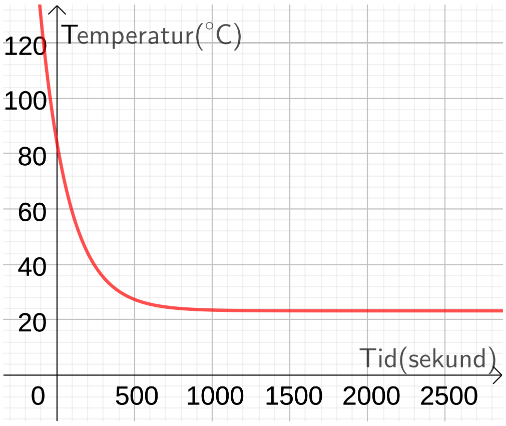
6.1.8 Oppgave 8

Forklar hva som skjer i grafen dere fant i Geogebra. Hvorfor synker grafen, og hvorfor flater den etter hvert ut? Begrunn hvilken modell dere brukte, og hvorfor

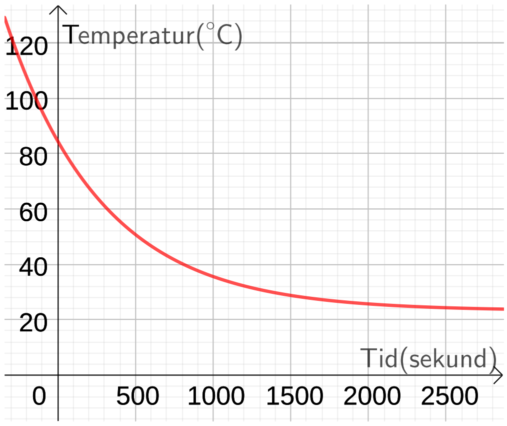
Som en introduksjon til oppgave 8 får elevene en muntlig beskjed om å bruke Geogebra til å lage en graf som viser hvordan temperaturen i væsken deres avtar. Målet for denne deloppgaven er at elevene skal bruke Geogebra til å finne en graf som viser hvordan temperaturen i væsken deres synker og reflektere rundt denne. Elevene skal altså finne denne grafen, forklare hvilken modell de valgte å basere grafen på og tolke grafen.

Denne deloppgaven kan løses ved å bruke den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ med de tilhørende verdiene for C og k som ble funnet i oppgave 6 og T_r som elevene får oppgitt. Denne kan for eksempel være $23,0°C$. Verdiene elevene regner ut for k vil her avhenge av om de arbeider med matolje eller vann som væske. Ved å for eksempel bruke verdiene $C = 62,0°C$, $T_r = 23,0°C$ og $k = 0,00054$ for matolje eller $k = 0,0014$ for vann kan man forvente å få grafene som er vist i Figur 8.

Grafene synker som et resultat av at temperaturen i væsken avtar. I tillegg vil grafen flate ut som følger av at temperaturen i væsken jevnes ut med temperaturen i rommet. Grafene som viser utviklingen for temperaturen i matolje og vann i Figur 8 er begge eksponentielle funksjoner som er basert på Newtons avkjølingslov. Denne loven kunne



(a) Modellen $T_v(t) = 62,0e^{-1,4\cdot 10^{-3}\cdot t} + 23,0$ hvor tallene er basert på vann.



(b) Modellen $T_v(t) = 62,0e^{-5,4\cdot 10^{-4}\cdot t} + 23,0$ hvor tallene er basert på matolje.

Figur 8: Modeller basert på den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ av 1. ordens differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$

beskrives som 1. ordens differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$ hvor man antar at $k > 0$ som igjen ga den den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$. Grafene som viser utviklingene for temperaturen i Figur 8 er basert på denne generelle løsningen.

6.2 Analyse av elevenes arbeid i modelleringssyklusen og med de åtte matematiske kompetansene

Med denne analysen er målet å finne ut hvor i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) elevene benytter seg av de åtte ulike matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002). Dette kommer frem i forskningsspørsmål 1. I dette inngår det å undersøke hvor i modelleringssyklusen elevene arbeider og hvordan de arbeider med de ulike kompetansene. Fordi mange av kompetansene er nært knyttet til hverandre er det også interessant å se hvordan elevene knytter de ulike kompetansene sammen.

6.2.1 Tankegangskompetanse

Denne kompetansen handler om å se på hvordan elevene klarer å utøve en matematisk tankegang. I dette ligger det blant annet at elevene skal kunne forstå og kjenne matematiske begrepers rekkevidde og begrensinger, og inneha en evne til å svare på og stille matematiske spørsmål.

Kompetansen kommer blant annet til syne når elevene skal arbeide med oppgave 1. Oppgave 1 går som følger: Formuler Newtons avkjølingslov som en differensiallikning. Denne deloppgaven kan knyttes til overgang nr. 3 (matematisering) i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). I denne overgangen skal elevene matematisere den virkelige situasjonen ved å bygge en matematisk modell. I denne deloppgaven anser jeg det derfor som viktig at elevene forstår den deriverte i differensiallikningen.

Elevene viser ulike tilnærminger gjennom arbeidet og benytter seg av tankegangskompetansen av ulik grad. Under viser jeg en samtale mellom fire elever fra gruppe 1 som forsøker å knytte den deriverte til konteksten.

Elev 1: Nå må vi vel skrive opp sånn x for temperaturen i rommet, eller a for temperaturen i rommet og b for temperaturen i væsken

Elev 2: Temperaturen i væsken blir vel y da, så den y-deriverte er endringen.

Elev 1: Åja, sånn ja.

Elev 3: Okei, men den y-deriverte, hva blir det?

Elev 4: y-deriverte blir vel temperaturen da?

Elev 2: Ja, så den y deriverte blir endringen

Elev 3: Endringen av temperaturen i rommet eller væsken?

Elev 2: Væsken.

Som Tall og Vinner (1981) skriver inkluderer et begrepsbilde alle mentale bilder og tilhørende egenskaper og prosesser, og utgjør den kognitive strukturen for et begrep. Fra samtalen tolker jeg at Elev 2 viser at han har et begrepsbilde for den deriverte gjennom å knytte endringen av temperaturen til den y-deriverte. At eleven knytter temperaturendringen i væsken til den y-deriverte kan tyde på en viss forståelse for rekkevidden av den deriverte. Han knytter begrepet den deriverte til noe som har med endring å gjøre. Som det kommer frem i føranalysen under oppgave 1 (se 6.1.1) kan den deriverte knyttes til hvor fort temperaturen synker/øker ved en tid, altså endring i temperatur per sekund. Dermed vil den y-deriverte representere temperaturendringen i væsken per tidsenhet. Man kan si at den deriverte angir den momentane endringsraten ved et tidspunkt t. En gjennomsnittlig endringsrate ville på sin side angitt endringsraten i et intervall fra t_1 til t_2. Som Niss og Jensen (2002) skriver handler tankegangskompetanse om å kjenne, forstå, og håndtere matematiske begrepers rekkevidde og begrensninger. Fra denne definisjonen og samtalene mellom elevene tolker jeg at Elev 2 har en begrenset tankegangskompetanse. Eleven snakker kun om endring, og trekker ikke inn begrepet momentan endringsrate eller endring per tidsenhet. Dette kan bety at begrepsbildet for eleven er ufullstendig, noe som kan skape avstand mellom begrepsbildet og begrepsdefinisjonen. Jeg ville ha ansett en fullverdig tankegangskompetanse hos eleven dersom han i en større grad hadde knyttet den deriverte til temperaturendringen i væsken per tidsenhet, og knyttet inn at den deriverte kan vise hvor fort temperaturen synker/øker ved en tid.

En begrenset begrepsforståelse kan få konsekvenser for hvordan man arbeider med en oppgave. Gruppe 2 sitt arbeid i oppgave 6 kan være et eksempel på dette. Oppgave 6 går som følger: Bruk målingene dere fant i forsøket og finn k for modellen. Elevene skal altså bruke data fra målingene av temperaturen i væsken, og finne k-verdien for den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$. Denne deloppgaven kan knyttes til overgang nr. 4 i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). I denne overgangen skal elevene arbeide matematisk, og elevene må benytte seg av matematiske verktøy for å løse likninger og gjøre beregninger.

Elevene har nettopp målt temperaturendringen i væsken og gjort 25 målinger. I arbeidet med å finne k velger en gruppe elever å regne ut det de tror er gjennomsnittet per 15. sekund av disse målingene. Elevene velger hvert 15. sekund fordi de 25 målingene er gjort med 15 sekunders mellomrom. Samtalen mellom elevene går som følger:

Elev 1: Men k ja, det er jo hvor mye den synker per da. Først da så tar vi gjennomsnittet av hvor mye den synker per da, skal vi ikke det?

Elev 2: Er det hvert 15. sekund da?

Elev 1: Så da tar vi differansen mellom første temperaturen og siste. Og deler det på antall...

Elev 2: Målinger. Hvor mange målinger er det?

Elev 3: Jeg fikk 25.

Elev 2: Det er 21,9 i differanse. Da får jeg 0,876 i gjennomsnitt. Så det er det den synker hvert 15. sekund.

Som Niss og Jensen (2002) skriver handler tankegangskompetanse om å kjenne, forstå, og håndtere matematiske begrepers rekkevidde og begrensninger. Et gjennomsnitt beskriver middelverdien av alle dataene, og man finner dette ved å ta summen av alle dataene for så å dele på antall data. Dette betyr at i oppgave 6 vil gjennomsnittet av alle temperaturene beskrive middelverdien for de 25 målingene. I arbeidet med oppgave 6 velger altså elevene å finne det de tror er gjennomsnittet av hvor mye temperaturen synker hvert 15. sekund, og tenker at dette må representere verdien for k. Dette gjør de ved å ta differansen mellom den høyeste målte temperaturen og den laveste, for så å dele denne differansen på antall målinger. Elevene benytter seg av følgende tall; $(85-63,1)/25 = 0,876$ (elevene har selv notert ned 64,1$°C$ fra målingene sine på oppgavearket sitt, og ikke 63,1$°C$ som de benytter seg av her). Skulle elevene her ha regnet ut gjennomsnittet av temperaturen korrekt måtte de ha tatt summen av alle målingene, for så å dele summen på antall målinger. Men målet med denne deloppgaven er ikke for elevene å finne en gjennomsnittlig verdi for temperaturen, men en tilnærmet verdi for k. Elevene kunne ha benyttet seg av gjennomsnitt for å finne denne tilnærmede verdien for k. Da måtte elevene hadde benyttet seg av følgende utregning,

$$\frac{T_v(t+15) - T_v(t)}{15} = -k(T_v(t+15)) - T_r \quad \text{for} \quad t = 0, 15, 30... \tag{15}$$

Dette ville da ha gitt dem et estimat på k for hvert intervall. Tar man deretter gjennomsnittet av disse k-verdiene vil må få en tilnærmet verdi for k. Fra elevenes arbeid anser jeg to svakheter som kan tyde på en begrepskunnskap med utviklingspotensiale. Den første svakheten er at elevene ikke regner ut gjennomsnittet på riktig måte, og den andre er at elevene ikke kobler at de forsøker å regne ut en gjennomsnittlig verdi for temperaturen, mens oppgaven ber de om å finne en verdi for k. At elevene velger å bruke gjennomsnitt, og i tillegg regner ut gjennomsnittet på feil måte, tolker jeg i retning av at elevene ikke kjenner eller forstår rekkevidden og begrensningene til begrepet gjennomsnitt. Fra dette tolker jeg at elevens løsningsprosess skyldes en manglende begrepskunnskap rundt gjennomsnitt som fører til en svikt innenfor tankegangskompetansen.

Etter en videre gjennomgang av elevenes arbeid knyttet til oppgave 1 kan det virke som at elevene opplever begrepet proporsjonalitet som utfordrende. I samtalen som følger hos gruppe 2 er elevene i gang med å formulere et matematisk uttrykk. Ut ifra samtalen mellom elevene tolker jeg kommentarene deres i retning av at de opplever et problem med å forstå begrepet proporsjonal.

Elev 3: Proporsjonal, sikkert noe som er opphøyet i noe.

Elev 2: Ja, altså det må jo sikkert være noe x i andre eller noe i andre.

Elev 1: Mhm.

Elev 3: Sikkert e opphøyet i noe, eller noe. Ett eller annet.

Elev 1: Du tror e?

Elev 3: Ja vi har nå brukt å ende opp med e på differensiallikninger hvert fall.

Elev 3 mener at gruppen må inkludere en eksponentiell e i differensiallikningen fordi de har pleid å ende opp dette før når de har arbeidet med temaet. Det kan virke for meg som at de knytter begrepet proporsjonal mot den eksponentielle e-en. Det stemmer at elevene som regel ender opp med en eksponentiell del i den generelle løsningen av en differensiallikning. Dette kan skyldes at elevene i arbeidet med å finne den generelle løsningen vanligvis multipliserer inn en eksponentiell faktor som gjør det enklere for dem å etter hvert integrere. Fra samtalen tyder jeg Elev 3 sin kommentar ≪Proporsjonal, sikkert noe som er opphøyet i noe≫i retning av at han opplever problemer med begrepet proporsjonal. Som det kommer frem i føranalysen under oppgave 1 (se 6.1.1) kan proporsjonalitet knyttes mot en bestemt type lineær funksjon som kan skrives på formen $y = ax$. De to størrelsene x og y vil da være proporsjonale dersom forholdet $\frac{y}{x}$ er en konstant. Som Niss og Jensen (2002) skriver handler tankegangskompetanse om å kjenne, forstå, og håndtere matematiske begrepers rekkevidde og begrensninger. At Elev 3 knytter begrepet proporsjonalitet med den eksponentielle e-en tolker jeg som at han ikke kjenner rekkevidden og begrensningen av begrepet proporsjonalitet. Denne sviktende begrepsforståelsen kan føre problemer når eleven skal gjøre seg nytte av tankegangskompetansen.

Etter en videre gjennomgang av elevenes arbeid knyttet til oppgave 1 kan det virke som at også flere elever opplever begrepet proporsjonalitet som utfordrende. I arbeidet med denne deloppgaven forsøker gruppe 3 å forstå hvordan de skal inkludere at differansen mellom temperaturen i væsken og rommet er proporsjonal med endringsraten til temperaturen i differensiallikningen. Samtalen mellom elevene går som følger:

Elev 1: Proporsjonal tror jeg betyr at de endrer seg lik.

Elev 2: Ja, vil ikke det si en endring der også da?

Elev 1: Men det vil jo også si at vi kan ha noe utenfor en parentes. Fordi det inni parentesen, de to temperaturene, endrer seg likt.

Elev 3: Men vi kan i hvert fall ta væske temperaturen minus temperaturen i rommet? Eller motsatt? Jeg vet bare ikke hvilken vei.

Elev 1: Ja, det spørs jo hvilken som er høyest.

Elev 3: Ja, men det er sikkert den, eh, væsken som er høyest.

Elev 1: Eh, ja, men det må jo være noe før det for å vise at den er proporsjonal.

Elev 1 forteller at han tror proporsjonal betyr at de (temperaturen mellom væsken og rommet) endrer seg likt. Det kan tenkes at eleven her tenker i retning av proporsjonalitet eller linearitet, men at begrepsbildet har et forbedringspotensiale. I matematikken betyr proporsjonalitet at to størrelser varierer slik at forholdet mellom størrelsene er konstant. Dette kan illustreres med uttrykket,

$$a = \frac{y}{x} \tag{16}$$

Forholdet mellom størrelsene x og y utgjør da en konstant a. Som det kommer frem i føranalysen av oppgave 1 (se 6.1.1) er det forholdet mellom endringsraten og differansen mellom temperaturen i væsken og temperaturen i rommet som utgjør en proporsjonalitet. Ut ifra elevens utsagn «endrer seg likt» tolker jeg at eleven anser differansen mellom temperaturen i væsken og rommet som en proporsjonalitet. Som det kommer frem fra definisjonen av Newtons avkjølingslov, «Endringsraten til temperaturen er proporsjonal med differansen mellom temperaturen i væsken og rommet». Endringsraten til temperaturen handler i denne situasjonen om hvor fort temperaturen endres avhengig av tiden. Den momentane endringsraten kan gjerne ses på som et øyeblikksbilde av hvor fort temperaturen endres ved en tid. Dette kan illustreres med grenseverdien,

$$\frac{dT_v}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} \tag{17}$$

Denne grenseverdien vil da være proporsjonal med differansen mellom temperaturen mellom væsken og rommet. Dette betyr at det er grenseverdien for ΔT og Δt når Δt går mot 0, og differansen mellom temperaturen i væsken og temperaturen i rommet som utgjør en konstant. Altså er det forholdet mellom endringsraten og differansen mellom temperaturen i væsken og rommet som utgjør en proporsjonalitet. Dette kan vises med uttrykket,

$$\frac{dT_v}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = -k(T_v - T_r) \tag{18}$$

Som nevnt tidligere handler tankegangskompetanse om å kjenne, forstå, og håndtere matematiske begrepers rekkevidde og begrensninger. At Elev 1 forteller at han tror proporsjonal betyr at de (temperaturen mellom væsken og rommet) endrer seg likt tolker jeg i retning av at begrepsbildet rundt proporsjonalitet har et utviklingspotensiale. Det kan være at eleven tenker at temperaturen i væsken vil falle med en konstant fart, og at man dermed vil få en lineær funksjon i negativ retning som er proporsjonal. Men i dette tilfellet er det endringsraten og temperaturdifferansen som er proporsjonal. Dette kan knyttes mot begrepskunnskap rundt den deriverte som har et forbedringspotensiale, men at eleven i det hele tatt knytter ordet *likt* til proporsjonal er interessant. Som det kommer frem av definisjonen av proporsjonal under,

$$a = \frac{y}{x} \tag{19}$$

utgjør a er konstant. Altså vil denne konstanten alltid være lik når forholdet mellom størrelsene x og y er proporsjonale. Videre sier Elev 1: ≪Eh, ja, men det må jo være noe før det for å vise at den er proporsjonal». At eleven forteller at noe må være før for å vise at den er proporsjonal knyttes igjen til definisjonen av proporsjonalitet. En omskrivning av definisjonen gir oss,

$$y = ax. \tag{20}$$

Altså skriver man konstanten a ***før*** størrelsen x i likningen $y = ax$ når størrelsene x og y er proporsjonale. Elevene har i forkant diskutert differansen mellom temperaturene i væsken og rommet hvor Elev 1 foreslo å sette denne differansen i parentes. At Elev 1 nå forteller at noe må stå før denne parentesen knytter jeg til at han har en begrepsforståelse rundt proporsjonalitet. Fra elevens arbeid tolker jeg dette som at han i stor grad gjør seg nytte av sin begrepskunnskap rundt begrepet proporsjonal, men at denne og begrepsbildet har et utviklingspotensiale. Fra elevenes arbeid tolker jeg dette i retning av at han viser en tankegangskompetanse gjennom sine meninger som kan forbedres.

6.2.2 Modelleringskompetanse

Å arbeide med modellering handler i stor grad om å kode og dekode matematikken og tolke elementer i forhold til den situasjonen modellen representerer. I arbeidet med oppgave 6 skal elevene bruke målingene de fant i forsøket og finne k for modellen. Oppgave 6 går som følger: Bruk målingene dere fant i forsøket og finn k for modellen. Gruppe 1 har nettopp funnet en verdi for k, men begynner etter hvert å diskutere resultatet. k-verdien elevene har funnet gjelder for vann, og de blir usikre på om denne verdien bør være mindre eller større for matoljen. Samtalen mellom elevene går som følger:

Elev 1: Ifølge vår teori (basert på tidligere diskusjon mellom elevene på gruppen) så skal denne (eleven henviser til verdien for k) være større enn hos de andre.

Elev 2: Ja, Ifølge vår teori så skal den være større. Eller skal den være mindre? Hehe, nå ble jeg usikker.

Elev 1: Den her skal være større.

Elev 3: For vann ja?

Elev 2: Skal ikke verdien for olje være mindre? Eller?

Elev 3: Ja, jo... Den bør jo være det.

Elev 2: Nå ble jeg plutselig usikker.

Elev 3: Hvis k-verdien er mindre, fordi k-verdien er jo under C liksom, eller e opphøyet i k og t.

Elev 2: Ja, så jo større k-verdien er, jo mindre blir tallet.

Elev 3: Ja, og da jo større blir C-verdien. Og hele temperaturen.

Elev 1: Som betyr?

Elev 3: At oljen holder bedre på temperaturen enn vann.

Elev 1: Ja, men hva er k da? Beskriver den varmetapet? Eller beskriver den hvor godt den holder på temperaturen.

Elev 2: Den beskriver på en måte da hvor mye varme som går tapt per enhet av tid.

Elev 1: Okei, så da skal den være mindre enn for vann?

Elev 2: Den her (eleven henviser til k-verdien) skal være mindre enn for vann, så for vann skal den være større fordi den vil bli raskere kald.

Elev 1: Okei.

Fra samtalen mellom elevene tolker jeg det som at elevene forsøker å dekode matematikken og tolke elementene fra situasjonen modellen er basert på. For eksempel spør Elev 1 «Ja, men hva er k da? Beskriver den varmetapet? Eller beskriver den hvor godt den holder på varmen?». Hvor Elev 2 svarer «Den beskriver på en måte da hvor mye varme som går tapt per enhet av tid». Dette tyder jeg som at elevene evner å dekode matematikken og forstår at de må koble de matematiske elementene til den virkelige situasjonen, og dermed viser modelleringskompetanse i sitt arbeid. Det er også interessant å legge merke til hvilke overganger elevene arbeider i, i modelleringssyklusen til

Blum og Leiß (2007). I oppgave 6 og arbeidet med å finne k-verdien arbeider elevene i overgang nr. 4 som kalles *arbeide matematisk*. I denne overgangen må elevene benytte seg av matematiske verktøy for å kunne løse likninger og gjøre beregninger. I samtalen over har derimot elevene beveget seg videre til overgang nr. 5 som innebærer å tolke resultatet. I denne overgangen må elevene knytte det matematiske resultatet til den virkelige verden. I samtalen over tolker jeg elevenes arbeid i retning av at de forsøker å knytte den virkelige verden til matematikken, og forsøker å legitimere resultatet basert på hva de forventer vil skje. Elevene argumenterer for at vann vil ha en høyere verdi for k fordi temperaturen i vann vil avta raskere enn temperaturen i matolje. De knytter altså den virkelige verden sammen med den matematiske i argumentasjonen. Fra samtalen mellom elevene tolker jeg det som at de har litt utfordringer med å komme frem til konklusjonen om at k-verdien i vann har en høyere verdi enn for matolje. Elevene kommer med flere fornuftige argumenter som er basert på kvalitative egenskaper, men å overføre det til matematikken virker ikke å være så lett. Til tross for disse utfordringene tolker jeg elevenes arbeid som at de i stor grad klarer å knytte den virkelige verdenen til matematikken, som de blant annet gjør gjennom modelleringskompetansen.

I tillegg er også denne samtalen et godt eksempel på resonnementskompetanse, en kompetanse jeg kommer nærmere tilbake til senere i analysen (se 6.2.3). Kort handler denne kompetansen om å kunne reflektere og argumentere rundt et matematisk resonnement og påstand. Elev 2 og 3 reflekterer og argumenterer flere ganger rundt påstander de kommer med under samtalen. For eksempel sier Elev 3 følgende, «Hvis k-verdien er mindre, fordi k-verdien er jo under C liksom, eller e opphøyet i k og t»hvor Elev 2 svarer, «Ja, så jo større k-verdien er, jo mindre blir tallet». Disse refleksjonene og argumentasjonene elevene kommer med underveis kan knyttes til resonnementskompetansen. Denne kompetansen er viktig for å kunne drive diskusjonen i en modelleringsoppgave og kan vise viktigheten av å inneha resonnementskompetanse når man arbeider med matematisk modellering.

I modelleringskompetansen er det interessant å se nærmere på samspillet mellom denne kompetansen og representasjonskompetansen. Oppgave 1 går som følger: Formuler Newtons avkjølingslov som en differensiallikning. Gruppe 3 klarer etter hvert å løse denne deloppgaven, og elevenes svar (se Figur 9) og samtalen som følger er et eksempel på hvordan modellering- og representasjonskompetansen kan spille på lag.

Elevene får formulert Newtons avkjølingslov muntlig og begynner umiddelbart å diskutere hvordan de skal løse problemet. etter hvert begynner elevene å diskutere hva endringsraten betyr:

Elev 1: Ja du kan jo skrive sånn endring i temperaturen... altså definisjonen.

Elev 3: Skal jeg bare skrive det?

Elev 1: Ja, er proporsjonal med differansen mellom væsketemperaturen og temperaturen i rommet. [Elev 3 skriver ned definisjonen på arket]. Okei, du kan jo begynne med t er lik da.

Elev 3: Ja. Skal jeg ta en sånn der? [Eleven skriver ned «$\Delta t =$» på arket] Betyr det endring?

Elev 4: Den betyr endring ja.

Elev 3: Da skriver jeg det.

Etter hvert som elevene begynner å formulere en differensiallikning bestemmer de seg for å endre formuleringen $\Delta t =$ til $y' =$ og knytter dette til formuleringen «endringsraten er lik».

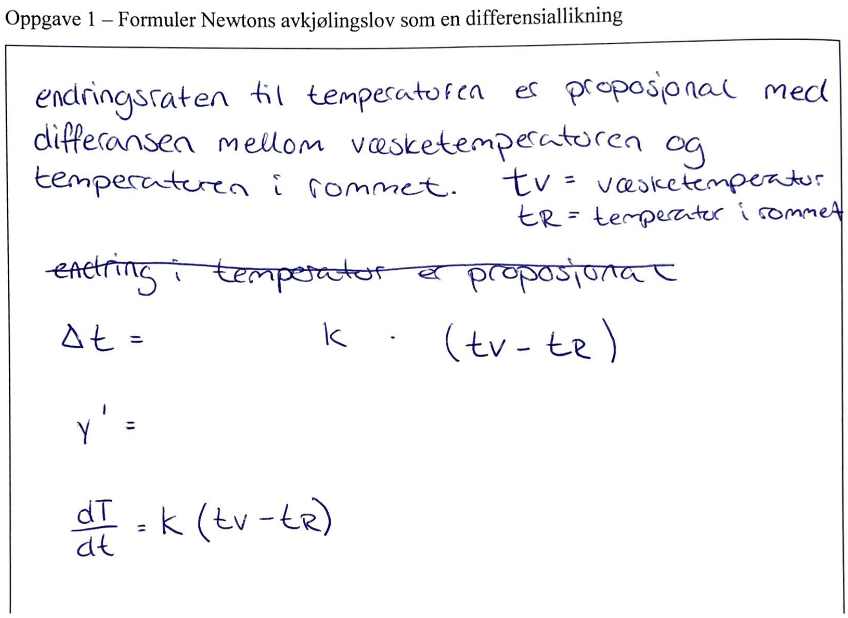
Elev 3: Skal vi skrive ned hvordan den likningen ser ut da?

Elev 4: Ja.

Elev 1: Det er jo en derivert er lik noe.

Elev 3: Skal jeg skrive y derivert er lik da?

Elev 1: Ja. Det betyr jo, endringsraten er lik.



Oppgave 1 – Formuler Newtons avkjølingslov som en differensiallikning

endringsraten til temperaturen er proposjonal med differansen mellom væsketemperaturen og temperaturen i rommet.

tv = væsketemperatur
tR = temperatur i rommet

~~endring i temperatur er proposjonal~~

$\Delta t = k \cdot (tv - tR)$

$y' =$

$\frac{dT}{dt} = k\,(tv - tR)$

Figur 9: Gruppe 3 sin skriftlige besvarelse på oppgave 1.

Det kan virke som at det å skrive ned den muntlige fremstillingen av Newtons avkjølingslov gjør det enklere for dem å formulere og etter hvert oppstille en differensiallikning. Jeg tolker dette slik fordi elevene begynner å diskutere hvordan de skal formulere differensiallikningen først etter at de har skrevet ned den muntlige formuleringen. At elevene dekoder matematikken og tolker elementene i formulering kan knyttes til modelleringskompetansen. Videre tolker jeg elevenes måte å gå mellom forskjellige representasjoner i matematikken som en representasjonskompetanse. Dette mener jeg kommer til syne når elevene knytter formuleringen «endringsraten er lik»til $y' =$ og dermed knytter inn en forståelse for overgangene. Dette er et eksempel på hvordan kompetansene griper inn i hverandre og kan vise at elevene trenger representasjonskompetanse for å kunne drive modellering.

6.2.3 Resonnementskompetanse

Denne kompetansen handler i korte trekk om å være i stand til å reflektere og argumentere rundt et matematisk resonnement og påstand, og gjennomføre et matematisk resonnement. I dette inngår det å kunne bedømme riktigheten av et svar på et spørsmål, oppgave eller problemstilling, men også riktigheten rundt bruk av setninger eller regler. I tillegg må man kunne bedømme holdbarheten av en matematisk påstand.

I oppgave 8 skal elevene blant annet begrunne hvilken modell de brukte i Geogebra, og hvorfor. Elevene på gruppe 4 har valgt å bruke regresjonsanalyse til å finne en modell, og forsøker nå å finne ut hvilken modell fra analysen de skal velge.

Elev 1: Skal vi se, begrunn hvilken modell dere brukte og hvorfor. Hvilken modell brukte dere nå?

Elev 2: Eksponential.

Elev 1: Ja okei, og sett hvilke som passer best?

Elev 2: Ja men det er jo eksponential, e opphøyet i noe.

Elev 3: Problemet vårt er at modellen flater ut rundt 0 grader, og ikke 23,2 grader

Elev 2: Men det er ikke så farlig.

Elev 1: Kan du prøve noen andre da?

Elev 3: Ja, jeg kan vise hvordan det blir. Hvis jeg for eksempel går på lineær...

Elev 2: Ja, vi kan ikke ha lineær.

Elev 3: Polynom. Problemet her er at den (kurven) går opp igjen.

Elev 2: Ja, så da må det være eksponential.

Fra samtalen til elevene tolker jeg det slik at de forstår hvordan modellen deres bør se ut. For eksempel påpeker Elev 3 at grafen deres bør flate ut rundt 23,2 grader og ikke 0 grader. Dette tyder jeg som et logisk resonnement fra Elev 3 og kan knyttes til resonnementskompetansen. Videre synes jeg elevene viser en forståelse for hvordan de forventer at grafen deres skal se ut. Altså at de klarer å knytte modellen deres til den virkelige verden. For eksempel poengterer Elev 2 at grafen deres ikke kan være et polynom, fordi da vil grafen deres etter hvert gå oppover. Dette tyder jeg som at elevene viser en forståelse for at om grafen deres etter hvert øker, så må dette bety at temperaturen i væsken også må øke. Dette knytter jeg til resonnementskompetansen, men også modelleringskompetansen da elevene både reflekterer og argumenterer samtidig som de tolker grafen. Resonnementskompetansen handler om å være i stand til å reflektere og argumentere rundt et matematisk resonnement og påstand, mens modelleringskompetansen handler nettopp om å tolke situasjonen modellen representerer.

Elevenes arbeid med oppgave 8 i forbindelse med resonnementskompetansen knytter jeg til overgang nr. 4 og 5 i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007). I overgang nr. 4 skal elevene blant annet benytte seg av et matematisk verktøy i arbeidet. I forbindelse med dette må elevene også resonnere rundt hvordan de skal benytte seg av dette verktøyet. Gruppe 4 for eksempel benytter seg av Geogebra som et verktøy og må underveis bevege seg til overgang nr. 5 hvor de tolker de ulike modellene. Dette kan vise hvordan resonnementskompetansen inngår i overgang nr. 4 og 5.

Jeg begynner med å spørre klassen hva som skjer med temperaturen i en fiktiv kaffekopp med varm kaffe som står på en benk i romtemperatur. Elevene svarer at temperaturen i kaffekoppen må synke. Elevene får nå spørsmål om differensiallikningen vi fant tidligere kan beskrive temperaturendringen som skjer i kaffekoppen. Ingen elever svarer på dette. Samtalen som følger går mellom meg og elevene i klasserommet.

Lærer: Når vi nå bruker disse tallene i uttrykket vårt, hva skjer med den deriverte i differensiallikningen?

Elev 1: Temperaturen i kaffekoppen må synke, men endringsraten vil ikke synke.

Elev 2: Endringen vil jo bli større etter hvert som tiden går, og da må jo endringsraten være positiv.

Elev 3: Temperaturen i kaffen synker, så endringsraten må vel være negativ.

Før jeg kommenterer elevenes svar vil jeg presentere en analogi for å tydeliggjøre en problemstilling for leseren. I nyhetsbildet leser man gjerne om at økonomien vokser, altså at grafen som symboliserer økonomien går oppover, i positiv retning. Men andre ganger kan man høre at veksten i økonomien er synkende. Å forstå forskjellen på disse to tilfellene kan forklares ved undersøke egenskapene til den 1. deriverte eller den 2. deriverte. Forklaring rundt begrepene konkav, konveks samt den 1. deriverte og 2. deriverte blir definert i føranalysen under oppgave 2 (se 6.1.2). Å skille mellom konkav og konveks form på grafen er viktig, nettopp fordi dette bestemmes av om den 1. deriverte er synkende eller stigende, eller om den. 2 deriverte er negativ eller positiv. Å undersøke om den 1. deriverte er positiv eller negativ er viktig når man skal forstå om selve funksjonen er avtagende eller stigende. Når vi vet at grafen er avtagende vet vi at den 1. deriverte er negativ $(f'(x) < 0)$, mens når grafen er stigende vet vi at den 1. deriverte er positiv $(f'(x) > 0)$. Når den 1. deriverte er avtagende skyldes dette av at den 2. deriverte er negativ $(f''(x) < 0)$, og når den 1. deriverte er økende skyldes dette at den 2. deriverte er positiv $(f''(x) > 0)$. Altså betyr dette at ved å undersøke om den 1. deriverte er stigende eller synkende, eller om den 2. deriverte er positiv eller negativ, kan vi bestemme om funksjonen er konkav eller konveks. Tilbake til økonomien betyr dette at når veksten i økonomien er økende i positiv retning er den 1. deriverte positiv og stigende, altså må den ha den en konveks form. Om veksten økonomien er synkende i positiv retning er den 1. deriverte positiv og synkende, altså må den ha en konkav form. Å være klar over forskjellen mellom en konkav og konveks form på en graf, den 1. deriverte og 2. deriverte kan gi en bedre forståelse for hvordan en graf beveger seg.

Som nevnt i føranalysen av oppgave 2 kan man betrakte situasjonen hvor temperaturen i en væske avtar på tre måter (se 6.1.2). I denne føranalysen inkluderes det også figurer av de ulike situasjonene. Disse tre måtene tok for seg hvordan temperaturen i en væske kunne avta. Vil temperaturen i væsken synke raskere etter hvert før den jevnes ut med romtemperaturen, vil den begynne å synke raskest i starten eller synker den proporsjonalt med tiden? Elevene fikk ikke oppgitt disse tre måtene å betrakte situasjonen på underveis i forsøket. Disse tre måtene ble kun gjennomgått i føranalysen for å vise leseren at man kan betrakte situasjonen på ulike måter.

I den første situasjon ble det antatt at temperaturen i væsken gradvis ville begynne å synke før den etter hvert jevnet seg ut med romtemperaturen. Grafen til temperaturen i væsken ville ha en konkav form, før den i et vendepunkt ville endre seg til å ha en konveks form. Vi antok i denne situasjonen at væsken ikke fikk tilført varme, og dermed ville 1. deriverte hele tiden være negativ $(f'(x) < 0)$. Dette vil da føre til at grafen til temperaturen i væsken alltid vil være synkende. I denne situasjonen er grafen til temperaturen av væsken både konkav og konveks, den 1. deriverte er både synkende og stigende, og den 2. deriverte er både negativ og positiv.

I den andre situasjonen ble det antatt at temperaturen i væsken ville synke raskt fra starten av, før den etter hvert ville jevne seg ut med romtemperaturen. Også i denne situasjonen antok vi at væsken ikke fikk tilført varme, og dermed ville den 1. deriverte hele tiden være negativ $(f'(x) < 0)$. I denne situasjonen er grafen til temperaturen kun konveks, den 1. deriverte er stigende, og den 2. deriverte er positiv.

I den tredje situasjonen ble det antatt at temperaturen i væsken ville synke lineært som følge av at temperaturen i væsken avtar konstant i forhold til tiden. Også i denne situasjonen antok vi at væsken ikke fikk tilført varme, og dermed ville den 1. deriverte hele tiden være negativ $(f'(x) < 0)$. I denne situasjonen er grafen til temperaturen synkende som følge av at den 1. deriverte alltid er negativ, og den 2. deriverte alltid er 0.

Dette er altså tre måter å betrakte en situasjon hvor temperaturen i en væske avtar. Elevenes kommentarer kan knyttes til disse tre måtene å betrakte situasjonen på, men om elevene er bevisste på at deres kommentarer kan knyttes til en av disse måtene er uklart.

Elev 1 forteller at temperaturen i kaffekoppen synker, men at endringsraten ikke vil synke. Dette kan knyttes til den tredje måten å betrakte situasjonen på. Når endringsraten ikke vil synke kan den være konstant, og dermed vil man ha en lineær utvikling. Fordi eleven også påpeker at temperaturen i kaffekoppen synker, betyr dette at den lineære utviklingen er negativ. Et problem med denne utviklingen er at den ikke tar høyde for romtemperaturen. Man kan forvente at temperaturen i kaffekoppen vil avta til romtemperaturen, men denne negative utviklingen vil fortsette. Altså vil en lineær utvikling føre til at temperaturen i kaffekoppen fortsetter å synke, også når den kommer under x-aksen og dermed 0 grader. Som Niss og Jensen (2002) skriver handler resonnementskompetanse om å være i stand til å bedømme riktigheten av svar på en oppgave. Jeg tolker elevens svar i retning av at han bedømmer svaret på korrekt måte, men mangler en videre refleksjon. Det kan tenkes at temperaturen i kaffekoppen vil synke lineært i begynnelsen, men etter hvert må utviklingen til temperaturen i væsken endres for å kunne jevne seg ut med romtemperaturen. Elevens resonnement kan passe en måte å beskrive situasjonen hvor temperaturen i en væske avtar, men resonnementet bærer preg av lite refleksjon. Dette kan knyttes til en resonnementskompetanse som har et utviklingspotensiale.

Elev 2 mener at endringen vil bli større etter hvert som tiden går, og derfor må endringsraten være positiv. Fra Teorem 1 fra føranalysen av oppgave 2 (se 6.1.2) vet vi at dersom den 1. deriverte er positiv på intervallet (a, b), så er funksjonen f voksende på intervallet (a, b). Altså dersom endringsraten er positiv, vil temperaturen i kaffekoppen stige. Dette er ikke det man forventer når man setter fra seg en varm kaffekopp i et rom. Man forventer gjerne at temperaturen i kaffekoppen avtar og dermed må grafen til temperaturen i kaffekoppen være synkende. Elev 2 sin kommentar tolker jeg som at han ikke bedømmer svaret sitt i riktig retning. Elevens resonnement kan ikke passe en måte å beskrive hvordan temperaturen i væsken avtar. Dette kan knyttes til en svikt i resonnementskompetansen.

Elev 3 forteller derimot at temperaturen i kaffen synker, så endringsraten må være negativ. Dette stemmer da alle tre måtene (se Figur 5 og 6) baserer seg på at temperaturen synker, og har en negativ endringsrate $(f'(x) < 0)$. Som Niss og Jensen (2002) skriver handler resonnementskompetansen om å være i stand til å reflektere og argumentere rundt et matematisk resonnement og påstand. Eleven gir ingen videre argumentasjon rundt sin forklaring annet enn at endringsraten må være negativ. Man kan forvente at endringsraten er negativ i starten, men etter hvert må temperaturen jevnes ut mot romtemperaturen, og da må den 1. deriverte være stigende. Jeg tolker fra elevens svar at han viser en begrenset resonnementskompetanse. Skulle eleven i en større grad vist en resonnementskompetanse burde han også ha inkludert om endringsraten etter hvert blir stigende/avtagende eller argumentert for at en lineær utvikling etter hvert ikke vil være mulig, og dermed kunne ha vist en større vurdering av sin matematiske bedømmelse.

6.2.4 Representasjonskompetanse

Representasjonskompetansen handler om å kunne forstå og håndtere ulike representasjoner knyttet til matematikken. Med dette menes å kunne dekode, tolke, skille mellom symbolske, algebraiske, geometriske, grafiske, diagrammer, tabeller eller verbale og konkrete representasjoner. Det viktigste i denne kompetansen er å skille og oversette mellom disse representasjonene.

Under gjennomgangen av hvordan elevene gjorde seg nytte av tankegangskompetansen (se 6.2.1) kom det frem at enkelte elever hadde utfordringer med begrepskunnskapen rundt endringsrate. I representasjonskompetansen må elevene klare å se sammenhenger mellom begreper og matematisk notasjon. Etter å ha gjennomgått resultatene kan det virke som at dersom begrepskunnskapen mangler kan dette føre til utfordringer for representasjonskompetansen.

En utfordring blant elevene kan knyttes til den matematiske notasjonen for endringsraten. Dette omfatter hvordan endringsraten kan skrives som en matematisk notasjon, og hvilke sammenhenger det er mellom ulike representasjoner for endringsraten.

Endringsraten i dette forsøket tar for seg hvor fort temperaturen i væsken endrer seg per sekund ved en gitt temperatur i væsken. For eksempel, med de gitte betingelsene $k = 0,0005$, $T_v = 70°C$ og $T_r = 20°C$ satt inn i differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$ får vi $\frac{dT_v}{dt} = 0,025°C/s$. Dette betyr altså at når temperaturen i væsken er $70°C$ med en varmekoeffisient $k = 0,0005$ som avhenger av sekund som tidsenhet i et rom med $20°C$, synker temperaturen i væsken med $0,025$ grader per sekund.

Oppgave 3 går som følger: Finn den generelle løsningen av differensiallikningen. I arbeidet med denne deloppgaven skal altså elevene finne den generelle løsningen for differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$ hvor $k > 0$. Notasjonen for endringsraten ble altså oppgitt som $\frac{dT_v}{dt}$ i begynnelsen. Elevene får oppgitt likningen og beskjed om å løse denne. Læreren for klassen kommer deretter med et innspill om at likningen istedenfor burde skrives med notasjonen y', fremfor $\frac{dT_v}{dt}$. Elevene får derfor oppgitt likningen $y' = -k(y_v - y_r)$ og ny beskjed om å løse denne likningen. Samtalen som følger kommer fra gruppe 1 som nettopp har fått beskjed om at de istedenfor kan bruke differensiallikningen $y' = -k(y_v - y_r)$, Elev 1: Ja det ga jo litt mer mening.

Elev 2: Ja, men hvordan skal vi løse den da tro?

Elevenes reaksjon tolker jeg i retning av at de foretrekker den siste formulering, altså $y' = -k(y_v - y_r)$. Dette kan skyldes at elevene har vanskeligheter for å forstå forbindelsene mellom de ulike representasjonene og dette kan knyttes til en begrenset representasjonskompetanse. Uten å trekke slutninger kan denne begrensede representasjonskompetansen være et resultat av tidligere undervisningen som har prioritert å bruke notasjonen y', og kun denne, for begrepet endringsrate. Ved å undersøke hvilken notasjon som brukes i læreboken deres ser man også her at y' kun brukes for begrepet endringsrate i kapitlet om differensiallikninger (Oldervoll et al., 2015). Dette kan skyldes hvorfor læreren ønsker at elevene skal arbeidet med formuleringen $y' = -k(y_v - y_r)$, fremfor $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$.

En viktig del av representasjonskompetansen handler om å kunne oversette mellom det matematiske språket og det naturlige. I dette tilfellet er endringsraten det matematiske språket som må oversettes. Samtalen som følger ble også brukt under Tankegangskompetansen (se 6.2.1), men er også relevant her. Elevene er i gang med å arbeide på oppgave 1, og diskuterer hvordan de skal formulere differensiallikningen.

Elev 1: Nå må vi vel skrive opp sånn x for temperaturen i rommet, eller a for temperaturen i rommet og b for temperaturen i væsken.

Elev 2: Temperaturen i væsken blir vel y da, så den y-deriverte er endringen.

Elev 1: Åja, sånn ja.

Elev 3: Okei, men den y-deriverte, hva blir det?

Elev 4: y-deriverte blir vel temperaturen da?

Elev 2: Elev 2: Ja, så den y deriverte blir endringen.

Elev 3: Endringen av temperaturen i rommet eller væsken?

Elev 2: Væsken.

Samtalen mellom elevene tyder jeg i retningen av at de forstår at endringsraten kan knyttes til den matematiske notasjonen y', men at Elev 1, 3 og 4 har noen utfordringer med å forstå hva y' kan representere. For meg virker det som at Elev 1, 3 og 4 har et utviklingspotensiale innenfor både tankegangskompetansen og representasjonskompetansen. I tankegangskompetanse må en ha begrepskunnskap og være i stand til å forstå og håndtere begrepets rekkevidde og begrensning. At Elev 1, 3 og 4 ikke i større grad klarer å knytte den y-deriverte til temperaturendringen tyder jeg som at elevene mangler en begrepskunnskap rundt endringsrate og at deres tankegangskompetanse dermed har et utviklingspotensiale. Representasjonskompetanse spiller en viktig rolle når elevene skal oversette hva endringsraten betyr i den virkelige verdenen og knytte den opp mot situasjonen i forsøket. Fra elevenes arbeid med oppgave 1 tolker jeg at Elev 1, 3 og 4 også opplever å ha et utviklingspotensiale rundt representasjonskompetansen. Dette kommer frem i arbeidet med å oversette y' til det naturlige språket, som i dette tilfellet ville ha vært ≪den momentane endringsraten til temperaturen i væsken≫. Denne oversettelsen er det Elev 2 som driver frem. I tillegg tolker jeg Elev 1, 3 og 4 sine kommentarer i retningen av at de opplever en utfordring knyttet til å oversette representasjonen y' til situasjonen modelleringsoppgaven baserer seg på. Dette kan altså knyttes til at deres representasjonskompetanse har et utviklingspotensiale.

Det kan for meg virke som at en manglende begrepskunnskap rundt endringsrate, fører til en utfordring når elevene skal komme opp med en representasjon for endringsraten. Dette kommer til syne under en samtale mellom elevene på gruppe 3 mens de arbeider med oppgave 1. Samtalen går som følger:

Elev 1: [...] ja, hva skal jeg formulere?

Elev 2: Nei, du skal jo ende opp med en differensiallikning. Okei, men du kan jo begynne med en t= da.

Elev 1: Ja. Skal jeg ta en slik der? [Eleven tegner et delta symbol før t]. Betyr det endring?

Elev 3: Den der betyr endring ja. [Eleven henviser til delta-symbolet]

Elev 1: Skal jeg skrive det da?

Elev 2: Ja.

Starten på definisjonen av Newtons avkjølingslov går som følger, «endringsraten til temperaturen i væsken er proporsjonal med [...]». Fra elevenes kommentarer tolker jeg det slik at de oppfatter ordet *endring* fra definisjon av Newtons avkjølingslov og arbeider ut ifra dette ordet. De bruker det matematiske symbolet Δ og knytter dette mot ordet endring. Dette kan vise en representasjonskompetanse hos elevene fordi de lager en kobling mellom et ord og et symbol. At elevene ikke diskuterer eller bruker ordet *rate* finner jeg interessant. Dette kan tyde på at elevene har problemer knyttet til ordet rate, og velger da heller å fokusere på ordet endring. Dette kan skyldes en manglende begrepsforståelse for endringsrate, som fører til at elevene ikke klarer å nyttiggjøre seg av representasjonskompetansen. Den manglende nyttiggjøringen av representasjonskompetansen tyder jeg i retningen av at elevene ikke knytter begrepet endringsrate mot derivasjon. Det kan for meg virke som at elevene ikke oversetter mellom den konkrete og verbale representasjonen for endringsrate, nettopp fordi de mangler begrepskunnskapen rundt endringsrate.

I samtalen som følger ønsker jeg å kaste lys over konsekvensene av hvordan et forbedringspotensiale innenfor representasjonskompetansen kan påvirke elevenes nyttiggjøring av hjelpemiddelkompetansen. Elevene har i en tidligere undervisningstime, uavhengig av denne studien, fått utlevert et skriftlig notat som stegvis viser hvordan de kan løse en differensiallikning på formen $y' + f(x)y = g(x)$. Dette notatet vil i denne masteroppgaven bli omtalt som SDL-notatet (SDL = stegvis løsningsmetode for differensiallikninger). Figur 13 viser dette SDL-notatet. I arbeidet med oppgave 1 begynner gruppe 2 først å definere hva den y-deriverte er, basert på situasjonen fra den virkelige verdenen. Deretter forlater de konteksten og endrer fokuset:

Elev 2: Men man må jo skrive ned sånn x for temperaturen i rommet, eller a for temperaturen i rommet, og b for temperaturen i væsken.

Elev 4: Temperaturen i væsken blir vel y da, så grafen og y-deriverte er endringen.

Elev 2: Åja sånn ja. Det gir mening.

Elev 1: Hva skal jeg skrive?

Elev 4: y derivert i hvert fall.

Elev 1: Ja, men y derivert, hva blir det?

Elev 2: y blir vel temperaturen.

Elev 4: Ja, så y-derivert blir endringen.

Etter hvert som elevene arbeider med deloppgaven begynner de å diskutere hvordan de kan formulere differensiallikningen basert på den generelle beskrivelsen av en differensiallikning som elevene får presentert i SDL-notat, nemlig $y' + f(x) \cdot y = g(x)$:

Elev 2: Hvordan pleier en differensiallikning vanligvis å se ut?

Elev 3: Er ikke det y derivert lik f(x)y + g(x) eller noe sånn?

Elev 1: Det har jeg glemt.

Elev 2: Ja f(x) blir jo endringen, nei differansen mellom temperaturen mellom væsken og rommet.

Elev 4: Nei f(x) blir jo y i denne sammenhengen her da.

Elev 3: Ja det er grafen til temperaturen, er det ikke?

Elev 1: Men er det ikke et integraltegn da? Skal ikke det å være med?

Elev 2: Ikke i selve differanselikningen nei, det er når du løser den.

Elev 1: Ja.

Elev 2: Men mener at det var y derivert er lik f(x) ganger y + g(x) er den der formelen for differensiallikninger. [Eleven skriver ned definisjonen på arket.]

Elev 1: Der g(x) er hva da?

Elev 2: Det er et godt spørsmål. Det vet jeg ikke.

Elev 1: Men da skjønner jeg ikke, f(x) ganger y, er ikke det... hva er f(x), når y blir temperaturen i væsken? [Elever blir stille en god stund.] Eller tenker vi for avansert?

Elev 2: Jeg tror det er den der.

Elev 4: Vi har jo differansen, så vi må jo ha minus etter eller annet da, så hvis man har temperaturen i væsken så vil jo den være y minus temperaturen i rommet, men jeg får ikke helt den til å gå opp heller.

I den første delen av elevenes arbeid kan det for meg virke som at elevene tolker den y-deriverte i forhold til den situasjonen deloppgaven baserer seg på. Dette kan knyttes til representasjonskompetansen som blant annet handler om å ta hensyn til formål og situasjon når man går imellom forskjellige representasjoner. Etter hvert endres fokuset til elevene seg fra konteksten deloppgaven tar utgangspunkt i, til å forsøke å få konteksten til å passe inn i den matematiske formuleringen $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ som de kjenner fra før gjennom SDL-notatet. Elevene diskuterer hva $f(x)$ og $g(x)$ blir, uten at noen kommer frem til et endelig svar. Dette tolker jeg som at deres representasjonskompetanse har et forbedringspotensiale da de ikke ser forbindelsen imellom de ulike representasjonene. Fra elevenes arbeid med oppgave 1, tolker jeg det slik at elevene må kunne se disse sammenhengene for å kunne nyttiggjøre seg av representasjonskompetansen, men også for å kunne nyttiggjøre seg av SDL-notatet og dermed også hjelpemiddelkompetansen. Dette kan vise at elevene er avhengig av en representasjonskompetanse for å kunne nyttiggjøre seg av SDL-notatet som et hjelpemiddel.

Elevenes arbeid knyttet til oppgave 3 kan vise hvordan de arbeider i overgang nr. 4 i

Blum og Leiß (2007) sin modelleringssyklus. Her skal elevene arbeide med matematikken og blant annet bruke verktøy for å løse likninger. Fra elevenes arbeider tolker jeg det slik at elevene er avhengig av en representasjonskompetanse for å kunne arbeide i denne overgangen. Verktøyet elevene benytter seg av er SDL-notatet. I tillegg tolker jeg elevenes arbeid omkring representasjonskompetansen at de også gjør seg nytte av denne kompetansen i overgang nr. 5 og 6, tolkning og validering. Dette skyldes at representasjonskompetansen handler om å kunne oversette mellom ulike representasjoner hvor det blir tatt hensyn til formålet. For at elevene skal kunne gjøre dette, må de også tolke og validere arbeidet sitt.

6.2.5 Symbol- og formalismekompetanse

Symbol- og formalismekompetansen handler om symbolenes karakter og betydning, og håndteringen av disse. Dette krever en forståelse og innsikt i de matematiske reglene samt å være i stand til å håndtere bokstavregning og kalkulus. Med andre ord handler denne kompetansen om å kunne utføre regningen i matematikken.

En gjennomgang av elevenes arbeid knyttet til oppgave 3 viser at elevene har utfordringer knyttet til symbolhåndteringen i symbol- og formalismekompetansen.

Oppgave 3 som elevene fikk går som følger: Finn den generelle løsningen av differensiallikningen. I føranalysen til oppgave 3 beskrives det hvordan elevene kan løse denne oppgaven (se 6.1.3). Elevene skal altså bruke differensiallikningen fra oppgave 1, og finne den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ som etter hvert ble skrevet om til $y(x) = Ce^{-kx} + y_r$. Etter en gjennomgang av alle besvarelsene til oppgave 3 viser det seg at samtlige besvarelser inneholder feil. Besvarelsen til gruppe 2 inneholder mindre feil og gruppen kommer etter hvert frem til rett svar. Besvarelsene til gruppe 1, 3 og 4 inneholder større feil. Videre vil jeg derfor presentere besvarelsene til gruppe 1, 3 og 4 og tydeliggjøre feilene.

En utfordring til oppgave 3 kan knyttes til bruken av parenteser, og hva disse betyr i ulike settinger. I besvarelsen til gruppe 1 (se Figur 10) kan man se at gruppen har kommet i gang med å løse deloppgaven, men møter etter hvert på problemer. Elevene skriver ned følgende, $y' + k(y) = 0$. Her er det verdt å merke seg at elevene skriver $k(y)$ hvor y ser ut til å være argumentet for funksjonen k og ikke $k \cdot y$. Den samme skrivemåten har også gruppe 3 i arbeidet med å løse denne deloppgaven (se Figur 11). Elevene på gruppe 3 skriver etter hvert ned følgende, $y' + k(y - y_r) = 0$ og ender opp med uttrykket $e^{-ky} \cdot k(y) = 0$ nederst på oppgavearket sitt. Tilfellet til gruppe 3 tolker jeg i retning av at de ser på y som et argument for k, men dette er ikke tilfellet. Elevenes oppgave er å løse differensiallikningen $y' = -k(y_v - y_r)$. Fordi differansen $y_v - y_r$ er et tall, vil parentesene falle bort. Dette betyr at $y_v - y_r$ ikke er et argument for k. Dette tolker jeg som at elevene har et utviklingspotensiale rundt å arbeide med parenteser og da matematiske symboler. Dette kan knyttes mot symbol- og formalismekompetansen som omhandler symbolhåndtering og den typiske bokstavregningen.

En annen utfordring i oppgave 3 kan knyttes mot SDL-notatet som skal hjelpe elevene med å løse en differensiallikning. Dette notatet tar utgangspunkt i at differensiallikningen er på formen $y' + f(x)y = g(x)$. Her er det viktig å legge merke til detaljen rundt y. Denne står etter $f(x)$, og alene utenfor parentesene. I besvarelsen til gruppe 4 (se Figur 12) tolker jeg det slik at de ser på $f(x)$ i likningen $y' + f(x)y = g(x)$ som $k(y - y_r)$ fra likningen $y' = -k(y_v - y_r)$, og dermed finner integralet av $y - y_r$. En årsak til dette kan være at elevene på gruppe 4 også har utfordringer knyttet til bruken av parenteser, og dermed har et utviklingspotensiale innenfor symbol- og formalismekompetansen. Fra elevenes arbeid knyttet til oppgave 3 tyder jeg det som at elevene benytter seg av

$$y' = -k(y - y_R)$$

$$y' + k(y) = 0$$

$$F(x) = \int k \, dx$$

$$= \frac{1}{2}k^2 + C$$

$$y' \cdot e^{\frac{1}{2}k^2} + ky \cdot e^{\frac{1}{2}k^2} = 0$$

$$F(x) = \int ky \, dy$$

$$F(x) = k \int y \, dy$$

$$F(x) = k \cdot \frac{1}{2}y^2 + C$$

Figur 10: Gruppe 1 sin løsning til oppgave 3.

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_R)$$

T = temperatur
t = tid

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_R)$$

$$y' = -k(y - y_R) \quad \cancel{y' + k(}$$

$$y' + k(y - y_R) = 0$$

$$F(x) = \int k = kx$$

$$y' + k(y - y_r) = 0 \quad | \cdot e^{f(x)}$$

$$y' \cdot e^{kx} + e^{kx} \cdot k(y - y_r) = 0 \cdot e^{kx}$$

$$y' \cdot e^{ky} + e^{ky} \cdot k(y) = 0$$

$$(e^{ky} \cdot k(y))' = 0$$

$$\int (e^{ky} \cdot k(y))' = \int 0$$

$$e^{ky} \cdot k(y) = 0$$

Figur 11: Gruppe 3 sin løsning til oppgave 3.

symbol- og formalismekompetansen i overgang nr. 4 til Blum og Leiß (2007). Dette skyldes at elevene i denne overgangen skal arbeide matematisk, noe gruppe 4 gjør i oppgave 3.

$$y' + k(y - y_r) = 0$$

$$F(x) = \int y - y_r \, dy$$

$$= \frac{1}{2}y^2 - y_r \cdot y \quad (+C)$$

$$y' \cdot e^{\frac{1}{2}y^2 - y_r \cdot y} + k(y - y_r) \cdot e^{\frac{1}{2}y^2 - y_r \cdot y} = 0$$

Figur 12: Gruppe 4 sin løsning til oppgave 3.

6.2.6 Hjelpemiddelkompetanse

Denne kompetansen handler om elevenes kjennskap til relevante redskaper for matematisk arbeid, og hvilke muligheter og begrensninger disse redskapene har. I tillegg handler denne kompetansen om hvordan man tar i bruk disse redskapene på en reflektert måte.

Gjennom forsøket er det spesielt to hjelpemidler elevene benytter seg av, Geogebra og SDL-notatet (se Figur 13). I arbeidet med disse redskapene kommer hjelpemiddelkompetansen til syne i form av *hvor* og *hvordan* disse verktøyene blir brukt.

R2 Kapittel 7 Differensiallikninger. Ha gjerne dette arket foran deg når du løser oppgaver.

Differensiallikninger

Mål: Kunne løse diffliknigner på formen $y' + f(x)y = g(x)$

1) $F(x) = \int f(x)$
2) Multipliser begge sider med $e^{F(x)}$
3) Bruk kjerneregelen baklengs på venstre side
4) Integrer på begge sider
5) Løs integraler på høyre side
6) Løs med hensyn på y

Viktig potensregel: $e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}$ og $e^{2x} = \frac{1}{e^{-2x}}$

Kjerneregel for derivasjon: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Figur 13: SDL-notatet. Instruksjoner for hvordan man løser differensiallikninger. Utdelt til elevene på et tidligere tidspunkt.

Oppgave 3 går som følger: Finn den generelle løsningen av differensiallikningen. I oppgave 3 skulle elevene altså finne den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$. Et mulig løsningsforslag av oppgave 3 vises i føranalysen (se 6.1.3). I arbeidet med å finne denne løsningen velger samtlige elever å benytte seg av SDL-notatet som et hjelpemiddel.

Dette notat har som mål at elevene skal kunne løse en differensiallikning på formen $y' + f(x)y = g(x)$, og viser stegvis hvordan elevene skal gjøre dette. Problemet for elevene er derimot at deres differensiallikning ikke er på denne formen, men heller følgende form, $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$. Fordi elevene ikke var vant til skrivemåten $\frac{dT_v}{dt}$ ble etter hvert variablene endret til $y' = -k(y_v - y_r)$, og den generelle løsningen elevene skulle finne ble da $y(x) = Ce^{-kx} + y_r$.

En viktig egenskap ved representasjonskompetansen er nettopp å kunne skille mellom ulike representasjoner når man arbeider med å løse en oppgave. I arbeidet med oppgave 3 er det flere elever som forsøkte å sammenlikne likningen fra SDL-notatet $y' + f(x)y = g(x)$ med likningen i oppgave 3, $y' = -k(y_v - y_r)$ i et forsøk på å finne ut hvilke faktorer som tilsvarer hverandre. Denne sammenlikningen byr på flere utfordringer og vanskeligheter for elevene. Et problem er for eksempel differansen $(y_v - y_r)$ og arbeidet med å forstå hvor i $y' + f(x)y = g(x)$ denne differensen kan plasseres. En gruppe elever ser ut til å tenke at $(y_v - y_r)$ må tilsvare y i $y' + f(x)y = g(x)$, mens en annen gruppe ser ut til å tenke at $(y_v - y_r)$ må tilsvare $f(x)$ i likningen $y' + f(x)y = g(x)$. Fra løsningsforslaget til oppgave 3 (se 6.1.3) så er det k som tilsvarer $f(x)$ hvor $F(x)$ da blir kx. Man multipliserer da etter hvert begge sidene med e^{kx}. At elevene velger å sammenlikne likningene fremfor å forsøke å finne ut hvordan de skal løse likningen tolker jeg som et resultat av at elevenes representasjonskompetanse svikter. Med en representasjonskompetanse skal elevene klare å se forbindelser mellom ulike representasjoner og forstå forbindelsene mellom disse. For meg virker det ikke som at elevene er i stand til å knytte de ulike likningene sammen på en annen måte enn å sammenlikne hva som ser likt ut, fremfor å forstå hva variablene representerer. Dette fører til at elevenes hjelpemiddelkompetanse blir svekket i form av at de ikke klarer å bruke SDL-notatet som et redskap på en reflektert måte. For meg virker det som at elevene er helt avhengig av dette SDL-notatet i arbeidet med differensiallikninger, og at deres arbeidsmetode baserer seg på en prosedyrekunnskap. Som Hiebert og Lefevre (1986) skriver handler en slik prosedyrekunnskap om å følge en algoritme eller prosedyre til å løse en matematisk oppgave. Dette tolker jeg som at en prosedyrekunnskap i større grad kan føre til svikt i representasjonskompetansen, enn om elevene hadde en større begrepsmessig forståelse for differensialregning.

Oppgave 8 lyder som følger: Forklar hva som skjer i grafen dere fant i Geogebra. Hvorfor synker grafen, og hvorfor flater den etter hvert ut? Begrunn hvilken modell dere brukte, og hvorfor. I oppgave 8 skal altså elevene bruke Geogebra til å finne en modell, og etter hvert forklare hva som skjer i grafen. I føranalysen av oppgave 8 beskrives det hvordan man kan løse denne oppgaven ved å ta utgangspunkt i den generelle løsningen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ hvor man antar at $k > 0$ (se 6.1.8). Denne deloppgaven knytter seg til hvordan elevene arbeider med selve modelleringen i forsøket og bygger på overgang nr. 5 mellom de kognitive fasene i Blum og Leiß (2007) sin modelleringssyklus. Overgang nr. 5 handler om å tolke det matematiske resultatet, og å knytte dette resultatet til den virkelige verdenen.

I forkant av oppgave 8 har elevene arbeidet med overgang nr. 3 i modelleringssyklusen; matematisering. I denne overgangen skal den matematiske modellen bygges basert på den virkelige verdenen. Elevene gjennomførte en datainnsamling mellom oppgave 5 og 6 hvor de målte endringen i temperaturen i væsken over 6 minutter som resulterte i 25 målinger. Disse verdiene brukte elevene til å beregne de ukjente verdiene for C og k i den generelle løsningen av Newtons avkjølingslov $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ gjennom overgang nr. 4 i modelleringssyklusen; arbeide matematisk. Elevene har altså i forkant av oppgave 8 bygget en matematisk modell som er basert på den virkelige verden gjennom de 25 målingene de gjennomførte. Videre skulle elevene lage en graf i Geogebra. Meningen her var at elevene skulle benytte seg av den matematiske modellen

$T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$, hvor de allerede hadde funnet verdiene for C og k, og lage en graf med Geogebra. Det viste seg at elevene valgte å benytte seg av regresjonsanalyse på de 25 målingene og dermed bygge en ny modell.

Den første situasjonen baserer seg altså på å bruke modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ hvor verdiene for C og k er funnet gjennom de 25 målingene. Elevene arbeider først i overgang nr. 3 (matematisering) i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007), før de i overgang 4 (arbeide matematisk) skal bruke Geogebra til å lage en graf. Som vist i føranalysen av oppgave 8 (se 6.1.8) trenger elevene her kun å skrive inn modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ med de tilhørende dataene C, k og T_r i Geogebra. Elevene vil da få en graf som baserer seg på den virkelige situasjonen og konteksten forsøket bygger på. Etter dette kan elevene gå videre til overgang nr. 5 og nr. 6 hvor de knytter den virkelige verden til resultatet, altså å tolke og validere grafen de fant i Geogebra.

Den andre situasjonen baserer seg på at elevene gjennomfører en regresjonsanalyse i Geogebra av de 25 målingene i arbeidet med å finne en graf. På lik linje som i den første situasjonen arbeider elevene først i overgang nr. 3 (matematisering) i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) hvor de etter hvert finner modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$, og de tilhørende verdiene C og k. I overgang nr. 4 (arbeide matematisk) skifter derimot elevene kontekst når de forsøker å lage en modell basert på målingene, fremfor modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$. Den virkelige verdenen som forsøket baserer seg på endres. Dette får konsekvenser når elevene skal forsøke å rettferdiggjøre grafen de finner ved å tolke og validere resultatene i overgang nr. 5 og nr. 6.

Forskjellen på de to situasjonene knyttes til sammenhengen mellom den matematiske og virkelige verdenen. I den første situasjonen hvor elevene finner verdiene for C og k basert på de 25 målingene, er det differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$ som legger grunnlaget for arbeidet. Denne differensiallikningen er knyttet til den virkelige verdenen og den situasjonen forsøket er basert på. I den andre situasjonen forlater elevene konteksten forsøket baserer seg på og forsøker på nytt å knytte seg til den virkelige verdenen, denne gangen med et annet utgangspunkt. I denne situasjonen ligger utgangspunktet på de 25 målingene, og kun disse.

Resultatene fra oppgave 8 viser at samtlige elever valgte å bruke regresjonsanalyse som et hjelpemiddel for å lage grafen i Geogebra. Figur 14 viser elevenes grafer som ble modellert i Geogebra. Elevene velger altså å ta utgangspunkt i de 25 målingene i arbeidet med å lage en graf i Geogebra. At elevene velger å benytte regresjonsanalyse som ikke tar hensyn til den virkelige verdenen som forsøket til nå har vært basert på, tyder jeg som svikt innenfor hjelpemiddelkompetansen. Hjelpemiddelkompetanse handler blant annet om å være i stand til å bruke redskaper på en reflektert måte. Å koble seg av situasjonen vi til nå har arbeidet i, og forsøke å danne grunnlaget for en ny situasjon gjennom regresjonsanalyse anser jeg ikke som en reflektert måte å bruke Geogebra på. Fra samtalen som følger hos gruppe 1 kan det virke som at denne svikten fører til problemer i arbeidet med å lage en graf:

Elev 1: Skal vi se. Vi bruker regresjonsmodell. Er det lineær som passer best? Nei den vil jo flate ut etter hvert. Polynom er den ikke...

Elev 2: Kanskje den er eksponentiell?

Elev 1: Skal vi se, nei det var ikke den.

Elev 2: Nei

Elev 1: Potens? Ikke potens heller.

Elev 2: Ingen da.

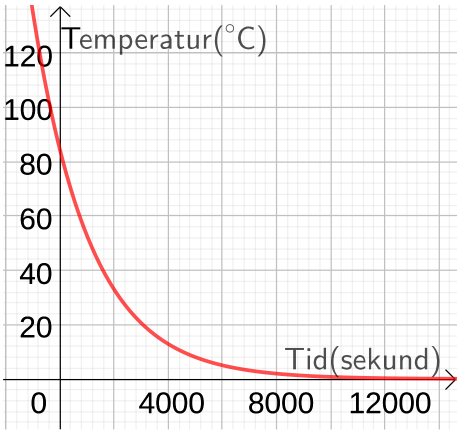
Elev 1: Det er ingen av dem som fungerer.

Elevene oppdager at ingen av modellene de finner gjennom regresjonsanalysen i Geogebra lenger passer den virkelige verden og konteksten som forsøket til nå har vært basert på. Dette oppdagelsen skyldes at ingen av modellene som foreslås av regresjonsanalysen passer deres målinger. Dette tyder jeg som at elevene forsøker å koble seg til den virkelige verden igjen. Som Niss og Jensen (2002) skriver handler representasjonskompetanse om å oversette mellom ulike representasjoner hvor det blir tatt hensyn til formål og situasjon. At elevene nå forsøker å knytte hva modellen representerer mot situasjonen kan vise at elevene har en representasjonskompetanse.

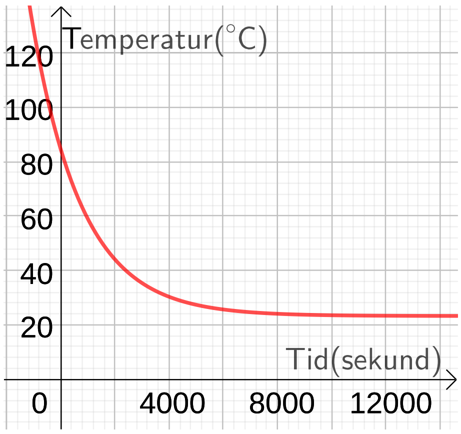
Jeg tyder disse resultatene i retningen av at hjelpemiddelkompetansen og representasjonskompetansen er nært knyttet til hverandre. At elevene velger å bruke regresjonsanalyse gjennom den andre situasjonen, fremfor å bruke modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ i den første situasjonen tyder jeg i retningen av at elevene ikke klarer å se sammenhengen mellom de to situasjonene. Det kan altså virke som at elevene ikke ser sammenhengen mellom modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ med de tilhørende verdiene for C og k og som er basert på de 25 målingene. Som nevnt tidligere handler representasjonskompetanse i stor grad om å forstå forbindelser mellom ulike representasjoner hvor formål og situasjon blir tatt i betraktning. I dette tilfellet er modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ med de tilhørende verdiene C og k resultatet. At elevene ikke velger den første situasjonen og bruker modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ tolker jeg som at elevene ikke klarer å se forbindelsen mellom de to situasjonene og dermed svikter representasjonskompetansen. Videre kan det virke som at denne svikten innenfor representasjonskompetansen får konsekvenser når elevene begynner å jobbe med den andre situasjonen og regresjonsanalysen.

Gjennom regresjonsanalysen får elevene presentert ulike modeller, men fordi elevene opplever svikt i representasjonskompetansen kan det virke som at de ikke er klar over at de nå har forlatt situasjonen forsøket er basert på, og at regresjonsanalysen av de 25 målingene danner grunnlaget for en ny situasjon. Når elevene nå forsøker å få resultatet fra regresjonsanalysen til å passe situasjonen som forsøket opprinnelig var basert på opplever de utfordringer. For meg virker det som at elevene rett og slett ikke er klar over at regresjonsanalysen danner grunnlaget for en ny verden som baserer seg på nye betingelser.

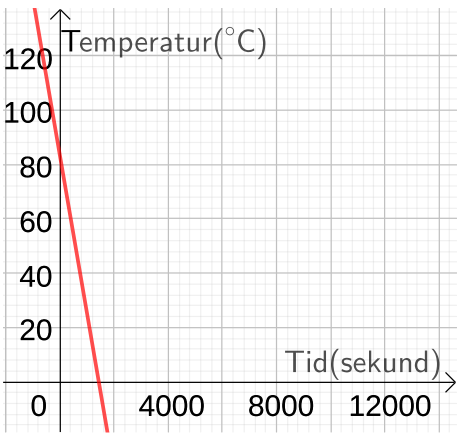
Samtlige elever valgte altså å bruke regresjon i arbeidet med å finne en modell i Geogebra. Å benytte seg at dette verktøyet betyr at Geogebra lager en matematisk modell og en tilhørende graf basert på målinger som man fører inn i Geogebra. Man kan da velge mellom ulike matematiske modeller hvor man gjerne velger den modellen og grafen som passer målingene best. Elevenes modeller er vist i Figur 14. Den eneste gruppen som ikke endte opp med en graf som var laget med regresjon var gruppe 1. Dette skyldes at de hadde problemer med å bruke regresjonsanalysen i Geogebra, og klarte aldri å finne en modell med dette verktøyet. Elevene tenkte derfor at det ikke var mulig å bruke regresjon på deloppgaven, og valgte istedenfor å bruke modellen $y(x) = Ce^{-kx} + y_r$ og de tilhørende verdiene $C = 61,8$ og $k = 5,4 \cdot 10^{-4}$ som de hadde funnet tidligere. Gruppe 2 og gruppe 4 velger en eksponentiell graf fra regresjonsanalysen, mens gruppe 3 velger en lineær graf fra regresjonsanalysen. At elevene evnet å bruke regresjon i Geogebra viser at de kan bruke det rent teknisk, og det kan tenkes at de har benyttet seg av dette før. Elevenes arbeid i oppgave 8 tyder jeg i retningen av at elevene anvender regresjonsverktøyet i Geogebra som en standardisert løsningsprosess. De vet hvilke steg de skal gjøre, og gjør kun disse stegene. Som Hiebert og Lefevre (1986) skriver handler prosedyrekunnskap om instruksjonene som steg-for-steg forklarer hvordan man skal løse en oppgave. Denne kunnskapen knyttes til symboler og regler, og viser kun en bevissthet for hvordan de kan brukes, og ikke kunnskapen eller forståelsen omkring hvorfor de kan brukes. Elevene kan vite at regresjonsanalyse i Geogebra kan benyttes som et redskap i arbeidet med matematikk, men viser i denne deloppgaven kun en prosedyrekunnskap for hvordan de kan bruke dette verktøyet. Dersom elevene skulle ha utvist en hjelpemiddelkompetanse basert på regresjon i Geogebra som et redskap, måtte elevene i tillegg ha visst når de skulle ha benyttet seg av dette og ikke. At elevene velger å benytte seg av regresjon som et hjelpemiddel tyder jeg i retningen av at elevene ikke har en forståelse for mulighetene og begrensningene omkring regresjons-verktøyet i Geogebra. Dette kan knyttes mot hjelpemiddelkompetanse hvor det å se muligheter og begrensinger i et hjelpemiddel er avgjørende.



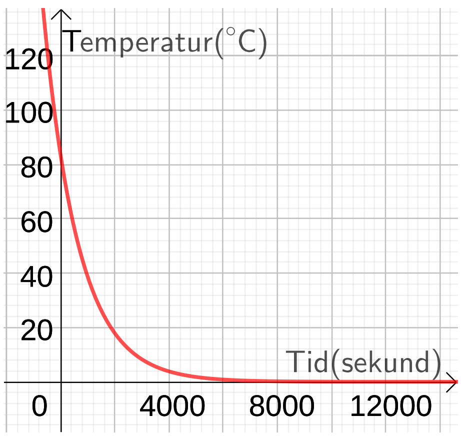
(a) Gruppe 4 sin modell basert på matolje. Grafen viser funksjonen $T_v(t) = 84.4e^{-4.7\cdot 10^{-4}\cdot t}$.



(c) Gruppe 1 sin modell basert på matolje. Grafen viser funksjonen $T_v(t) = 61,3e^{-5.4\cdot 10^{-4}\cdot t} + 23.2$.



(b) Gruppe 3 sin modell basert på vann. Grafen viser funksjonen $T_v(t) = -0,058t + 83,1883$.



(d) Gruppe 2 sin modell basert på vann. Grafen viser funksjonen $T_v(t) = 83,0e^{-7,7\cdot 10^{-4}\cdot t}$.

Figur 14: De fire gruppenes modeller laget i Geogebra.

Jeg oppsummerer og tolker elevenes arbeid rundt oppgave 8 som at de ikke klarer å knytte sammenhengen mellom de 25 målingene til det matematiske uttrykket $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ og regresjonsanalysen. Årsaken for dette tyder jeg mot svikt innenfor representasjonskompetansen som blant annet handler om å se forbindelser mellom ulike representasjoner, velge mellom og oversette mellom disse hvor det blir tatt hensyn til formål og situasjon. Sviktet innenfor representasjonskompetansen fører etter hvert til svikt i hjelpemiddelkompetansen hvor man må evne å bruke redskaper på en reflektert måte. Å forstå forbindelser i arbeidet med en modelleringsoppgave der formål og situasjon blir tatt hensyn til, virker å være avgjørende for å kunne gjøre seg nytte av hjelpemiddelkompetansen.

6.3 Presentasjon av elevenes nyttiggjøring av kunnskaper og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet

Målet med denne studien er blant annet å undersøke hvilke type kunnskaper og erfaringer fra fysikken og dagliglivet elevene anvender i arbeidet med Newtons avkjølingslov. Dette kommer frem i forskningsspørsmål 2. I dette avsnittet vil jeg presentere funnene knyttet til dette spørsmålet. Oppgavene som vil inngå i dette avsnittet er deloppgave 4, 5 og 7. Disse deloppgavene er blant annet utviklet for at elevene skal kunne knytte kunnskap og fra fysikkfaget og erfaringer fra dagliglivet inn i arbeidet.

I arbeidet med oppgave 4 skulle elevene diskutere hvordan ulike typer væsker kan påvirke modellen de hadde funnet i oppgave 3. Oppgave 4 gikk som følger: Hvordan vil ulike typer væsker påvirke modellen? Modellen elevene skulle arbeide med var 1. ordens differensiallikningen $\frac{dT_v}{dt} = -k(T_v - T_r)$. Ved å løse denne fikk elevene den generelle løsningen,

$$T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r, \quad k > 0 \tag{21}$$

I arbeidet med å forstå hvordan matolje og vann kan påvirke denne modellen diskuterer gruppe 3 hvordan væsker har ulike evner til å overføre varme. Under viser jeg et utdrag fra samtalen deres.

Elev 2: Hvordan påvirkes modellen da?

Elev 1: Den varierer med tiden?

Elev 3: Ja eller, men også forskjellige ting. Væsker har jo forskjellig evner til å overføre varme, og det vil jo spille en rolle for tiden og hvordan de kjøler seg ned.

Elev 3 forteller at væsker har forskjellige evner til å overføre varme. Dette tolker jeg i retningen av at eleven innehar et begrepsbilde av varmeledningsevne. Som nevnt i føranalysen til oppgave 4 (se 6.1.4) angir varmeledningsevne i korte trekk hvordan et stoff evner å lede varme. At eleven bruker dette begrepsbilde aktivt i diskusjonen kan vise at eleven har begrepskunnskap for begrepet varmeledningsevne. Dette kan da vise at Elev 3 klarer å bruke kunnskap fra fysikken inn mot deloppgaven.

En elevs arbeid i oppgave 7 kan vise at å knytte begrepsbildet fra et tema i fysikk mot dens formelle begrepsdefinisjon er utfordrende for eleven. Oppgave 7 er først en diskusjonsoppgave hvor elevene diskuterer hvorfor vi får forskjellige verdier for k før gruppene skriver ned årsakene sine på oppgavearket. Oppgave 7 gikk som følger: Skriv ned årsaker for hvorfor vi får ulike verdier for k. Jeg stiller klassen et felles spørsmål om vi med sikkerhet vet at temperaturen i væsken vil falle til romtemperaturen, hvor en elev svarer at det kun vil være et tidsspørsmål før vannet eller matoljen får lik temperatur som rommet. Dette er et eksempel på et fornuftig svar, basert på dagligdagse erfaringer. Jeg spør deretter elevene om noen kjenner til termodynamikkens 0. lov. Ingen av elevene svarer på dette spørsmålet.

Som nevnt i føranalysen til oppgave 7 (se 6.1.7) sier termodynamikkens 0. lov i korte trekk at to systemer i termodynamisk likevekt også vil være i likevekt med hverandre. Dette betyr at dersom man setter en kopp med varm kaffe i et rom, vil etter hvert temperaturen i rommet og temperaturen i den varme kaffen bli lik. Som Tall og Vinner (1981) poengterer er begrepsdefinisjonen en form for ord som brukes til å definere et begrep. Dette kan like gjerne være en personlig fremstilling fra eleven hvor da ordbruken til eleven reflekterer hans begrepsbilde. Jeg tolker elevens svar i retning av at han viser sin personlige fremstilling av hans begrepsbilde av termodynamikkens 0. lov. Eleven knytter relasjonen mellom situasjonen i forsøket med sitt begrepsbilde og dette kan vise begrepskunnskap rundt begrepet termodynamikkens 0. lov. Men når eleven ikke svarer på spørsmålet om noen i klassen kjenner til termodynamikkens 0. lov tolker jeg dette som at eleven ikke knytter kunnskapen til selve begrepet. Altså kan det for meg virke som at elevene er klar over at temperaturen i en varm væske, for eksempel kaffe, vil få den samme temperaturen som omgivelsene. Dette kan man gjerne se på som en hverdagskunnskap som samsvarer godt med fagkunnskapen. Dette kan vise hvordan elevene har utfordringer med å knytte hverdagslige erfaringer mot fagkunnskapen og bruke dette i argumenter.

Enkelte elever knytter også argumentasjonen sin direkte til hvordan de fysisk oppfatter forskjellene i vann og olje. Gruppe 3 arbeider med oppgave 5 som lyder slik: Formuler en hypotese for hvordan k vil varierer avhengig av væsken, og begrunn hypotesen. Under viser jeg et utdrag fra samtalen deres.

Elev 2: Jeg tror egentlig ikke at olje har lavere kokepunkt enn vann.

Elev 2: Tror du det?

Elev 1: Det kan være...

Elev 2: Det tror ikke jeg.

Elev 1: Olje er jo seigere enn vann.

Elev 2 forteller at han tror olje ikke har et lavere kokepunkt enn vann, hvor Elev 1 etter hvert følger opp med at olje er seigere enn vann. Det er viktig å poengtere at elevene ikke fikk kjenne på konsistensen av vannet eller oljen underveis i forsøket. Elev 1 bruker altså sin egen erfaring rundt olje og vann i arbeidet med deloppgaven. Dette ser jeg på som et eksempel på hvordan en elev kan bruke en konkret erfaring fra dagliglivet i arbeidet med en deloppgave. Hiebert og Lefevre (1986) argumenterer for at begrepskunnskap handler om å koble ulike deler av kunnskapen sammen gjennom en koblingsprosess. Eleven har kunnskap og erfaring fra dagliglivet om både olje og vann, og i koblingsprosessen knytter han kunnskapen sammen. Dette tolker jeg i retningen av at Elev 1 klarer å bruke konkrete erfaringer og kunnskaper fra dagliglivet inn i arbeidet med deloppgaven.

I arbeidet med oppgave 4 diskuterer gruppe 4 om olje i det hele tatt har et kokepunkt eller ikke. Også her knytter en elev inn et konkret eksempel fra dagliglivet i arbeidet med deloppgaven. Oppgave 4 gikk som følger: Hvordan vil ulike typer væsker påvirke modellen? I utdraget under viser jeg en del av samtalen mellom elevene.

Elev 2: Jeg tenker at olje også må ha et kokepunkt?

Elev 1: Nei kanskje ikke...

Elev 3: Når jeg bruker olje til steking blir jo det veldig varmt. Jeg brenner meg hvert fall alltid når jeg steker egg i olje.

Elev 3 forteller her at når han bruker olje til steking blir dette veldig varmt, og han brenner seg alltid når han steker egg. Dette tolker jeg som at eleven forsøker å finne svar på deloppgaven ved å knytte inn kunnskap han har om olje fra det daglige livet. I dette tilfellet har eleven en konkret erfaring som han knytter opp mot deloppgaven. Videre i arbeidet med oppgave 4 diskuterer gruppe 2 om oljen eller vannet kommer til å falle i temperatur raskest. Oppgave 4 gikk som følger: Hvordan vil ulike typer væsker påvirke modellen? I utdraget under viser jeg en del av samtalen mellom elevene.

Elev 1: Så vil olje eller vann synke raskest i temperatur?

Elev 2: Jeg aner ikke.

Elev 3: Jeg føler at vannet kommer til å miste temperaturen raskere enn oljen. Kanskje fordi olje kan være litt tykkere.

Elev 3 har altså en følelse av at temperaturen i vannet vil falle raskere enn temperatur i oljen og knytter dette opp mot at olje kan være litt tykkere enn vann. Dette tolker jeg i retningen av at eleven baserer sine tanker rundt erfaringer han har til vann og olje fra dagliglivet. Som Hiebert og Lefevre (1986) argumenterer for handler begrepskunnskap om å kunne koble ulike deler av kunnskapen sammen gjennom en koblingsprosess. Eleven har kunnskap om både olje og vann, og i koblingsprosessen knytter han kunnskapen om disse sammen og forsøker å finne en kobling til hvordan temperaturen vil synke hos de to etter å ha blitt varmet opp. Fordi elevene gjør denne koblingen klarer han da å komme frem til at temperaturen i vannet vil avta raskere enn oljen, fordi oljen er litt tykkere enn vannet. Dette tolker jeg i retningen av at eleven resonnerer seg frem til erfaringer og kunnskaper fra dagliglivet og klarer å bruke dette til å arbeide med deloppgaven.

I oppgave 5 knytter også en elev fra gruppe 3 sin erfaring fra dagliglivet inn i arbeidet med deloppgaven. Oppgave 5 går som følger: Formuler en hypotese for hvordan k vil variere avhengig av væsken, og begrunn hypotesen. Samtalen mellom elevene går som følger,

Elev 1: Olje er jo varmt da. Sånn frityrolje.

Elev 2: Men det skal jo være varmt da.

Elev 3: Jeg tenkte egentlig at oljen holder best på varmen.

Elev 2: Jeg å.

Elev 3: Jeg tror det er fordi den er tykkere.

Elev 2: Jo, men det tar jo ikke så lang tid når du venter på at vann skal bli varmt. Fordi vann blir jo kaldt med en gang føler jeg.

Samtalen mellom elevene viser hvordan de knytter erfaringer fra dagliglivet og inn i arbeidet med deloppgaven. For eksempel sier Elev 3 at han tror oljen holder best på varmen, fordi den er tykkere. Elev 2 forteller at det ikke tar lang tid når man venter på at vann skal bli varmt, og at han føler at vannet blir kaldt med en gang. Som i forrige eksempel knytter elevene deler av kunnskapen sin og gjennom en koblingsprosess og forsøker å finne forklaringer til deloppgaven. Dette kan knyttes til den konseptuelle kunnskapen hvor relasjon mellom kunnskap er viktig. Igjen tolker jeg dette som at elevene resonnerer seg frem til forklaringer fra dagliglivet og bruker dette aktivt inn i arbeidet med deloppgaven.

7 Diskusjon

I det forrige kapitlet *Presentasjon og analyse av funn* kom det blant annet frem hvor og hvordan elevene gjør seg nytte av de ulike matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002). I tillegg kom det også frem hvor eventuelle svikt i kompetansene skjedde, og hvilke konsekvenser dette førte med seg. Videre ble også funnene knyttet til hvordan elevene gjør seg nytte av kunnskap og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet i arbeidet med modelleringsoppgaven presentert. I dette kapitlet skal jeg drøfte funnene mot tidligere forskning og undersøke om det finnes noen sammenhenger mellom tidligere forskningen og mine funn.

7.1 Begrepskunnskapen i arbeidet med en modelleringsoppgave

Datamaterialet som ligger til grunn for denne studien viser at en manglende begrepskunnskap etter hvert kan føre til at elever opplever utfordringer med å arbeide og nyttiggjøre seg av begrepene i den grad de burde.

Det kan virke som at en manglende begrepskunnskap gir ringvirkninger for hvordan elevene arbeider i en modelleringsoppgave. Et begrep som flere elever hadde utfordringer med var endringsrate. Denne manglende begrepskunnskapen rundt begrepet endringsrate er synlig blant elevene gjennom hele arbeidet med forsøket og knyttes til hvordan elevene diskuterer, formulerer seg og resonnerer. I analysen av hvordan elevene gjør seg nytte av de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) ble det synlig hvordan en manglende begrepskunnskap kunne føre til svikt i ulike kompetanser. En av de fire gruppene valgte for eksempel å kun ta utgangspunkt i ordet *endring* fremfor *endringsrate* i diskusjonen til en av deloppgavene. Dette fikk konsekvenser da elevene skulle nyttiggjøre seg av representasjonskompetansen og oversette mellom den verbale representasjonen og den symbolske representasjonen. Fordi elevene kun fokuserte på ordet *endring* førte dette til at den symbolske representasjonskompetansen deres ble feil.

Ifølge Michelsen (2006) kan det å arbeide med en modelleringsoppgave bidra til at elevene generaliserer og formaliserer deres matematiske kunnskap. En betingelse for dette er at elevene faktisk har denne matematiske kunnskap på forhånd. Dette er igjen et argument for at begrepskunnskap er grunnleggende for arbeidet med modellering. Elevene opplever utfordringer knyttet til begrepene proporsjonalitet[3], gjennomsnitt[4] og endringsrate[5] som alle inngår i læreplaner de har vært gjennom tidligere og elevene burde dermed ha bygget seg opp en begrepsforståelse for disse begrepene på forhånd. Fordi elevene følger LK06 kan det tenkes at de har mindre erfaring med å knytte begreper sammen i arbeidet med en oppgave da denne læreplanen har et mindre fokus på modellering og anvendelser enn LK20.

Niss poengterer blant annet at oppmerksomheten til elever kan trekkes mot prosedyren for å løse en oppgave og dermed kan de utvikle et begrepsfilter for ulike begreper (Niss, 1999, s. 16). Dersom elevene har tilegnet seg en prosedyrekunnskap rundt begrepene gjennomsnitt, proporsjonalitet og endringsrate, og ikke har erfaring med å bruke begrepene i en matematisk modellering, kan dette få konsekvenser for begrepskunnskapen. En modelleringsoppgave krever at begrepene settes i sammenheng, og som Hiebert og Lefevre (1986) definerer begrepskunnskap inngår de i et nettverk av relasjoner. Begrepskunnskap er grunnleggende for å kunne arbeide med matematikk. Dette kommer også frem fra funnene i denne studien. Elevene må kunne koble kunnskap sammen og tenke seg frem til relasjonene mellom disse for å kunne utvikle begrepskunnskap. Dersom elevene ikke har arbeidet med begrepene i større matematiske situasjoner som i en modelleringsoppgave, kan dette føre til utfordringer når de nå skal bygge relasjoner

[3]Proporsjonalitet kommer først inn i matematikkfaget for 10. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013).
[4]Gjennomsnitt kommer først inn i matematikkfaget for 7. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013).
[5]Endringsrate kommer først inn i matematikkfaget 1T (Utdanningsdirektoratet, 2013).

mellom kunnskapen og gjøre seg nytte av begrepene i en større grad enn tidligere.

7.2 Matematiske kompetanser elevene bruker for å drive modellering

Som Kaiser et al. (2011) argumenter for er det en uenighet innenfor matematikkdidaktikken omkring hvilke prosesser og kompetanser innenfor matematisk modellerings som skal vektlegges. Datamaterialet fra denne studien peker i retning av at enkelte matematiske kompetanser i større grad er viktigere enn andre i arbeidet med Newtons avkjølingslov.

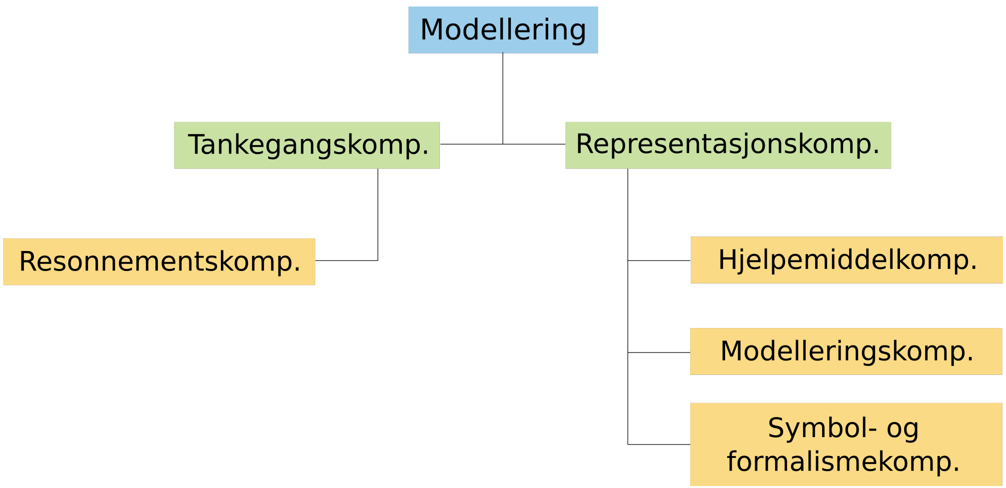
Av de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) var det kun seks av dem som elevene benyttet seg av i arbeidet med Newtons avkjølingslov. Disse var tankegangskompetanse, modelleringsoppgave, resonnementskompetanse, representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse og hjelpemiddelkompetanse. Elevenes arbeid viser at de benyttet seg av kompetansene i ulike grad, og at modelleringskompetansen på mange måter bygges opp av andre kompetanser. Det kan fra denne studien virke som at svikt innenfor tankegangskompetansen og representasjonskompetansen i stor grad påvirker hvordan elevene gjør seg nytte av resonnementskompetanse, hjelpemiddelkompetanse, modelleringskompetansen og symbol- og formalismekompetansen.

I representasjonskompetansen må elevene blant annet kunne se sammenhenger mellom begreper og matematisk notasjon. Fra elevenes arbeid kan det virke som at når elevene opplever en manglende begrepskunnskap, som inngår i tankegangskompetansen, klarer de ikke å se disse sammenhengene, og representasjonskompetansen svikter. Denne manglende begrepskunnskapen får da konsekvenser når elevene skal resonnere rundt begrepets egenskaper. Dermed kan elevene også oppleve svikt innenfor resonnementskompetansen dersom de ikke har denne begrepskunnskapen.

Videre kommer det frem fra analysen at svikt innenfor representasjonskompetansen får konsekvenser for blant annet modelleringskompetansen og hjelpemiddelkompetansen. Fra analysen kommer det for eksempel frem under modelleringskompetansen (se 6.2.2) hvordan representasjonskompetansen og modelleringskompetansen er avhengig av hverandre. I modelleringskompetansen må elevene forsøke å dekode og tolke elementene i en situasjon, mens i representasjonskompetansen må elevene være i stand til å bevege seg mellom ulike representasjoner. Elevene må være i stand til å tolke elementene for å kunne bevege seg mellom representasjonene, og man må kunne bevege seg mellom representasjonene for å kunne tolke elementer på ulike måter. I hjelpemiddelkompetansen er det blant annet viktig å kunne reflektere rundt hvordan man bruker redskaper som for eksempel Geogebra. Fra analysen av elevenes arbeid kan det virke som at denne refleksjonen svikter når de for eksempel ikke ser forbindelsene mellom det matematiske uttrykket $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ og regresjonsanalysen i Geogebra. Elevene skal ikke behøve å bruke regresjonsanalyse nettopp fordi de allerede kjenner uttrykket $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$. Velger derimot elevene å benytte seg av regresjonsanalysen må de også bruke rett modell. Fra analysen kommer det frem at gruppe 3 velger å benytte en lineær funksjon fra regresjonsanalysen. Dette viser hvor viktig det er å kunne dekode og tolke elementene i en situasjon (modelleringskompetanse), og å kunne bevege seg frem og tilbake mellom representasjonene (representasjonskompetanse) i arbeidet med en modelleringsoppgave. I tillegg er også symbol- og formalismekompetanse viktig for å i det hele tatt kunne arbeide med de ulike representasjonene. Dette viser på mange måter viktigheten av representasjonskompetanse i arbeidet med modellering.

Denne studien viser altså at elevene er avhengig av flere ulike kompetanser for å kunne gjøre seg nytte av andre. Tankegangskompetanse og representasjonskompetanse kan virke som viktige byggesteiner for å kunne skape et fundament for elevenes arbeid med matematisk modellering, men elevene er også avhengig av de andre kompetansene som hjelpemiddelkompetanse og resonnementskompetanse for å i det hele tatt kunne drive modelleringen. Som Kaiser et al. (2011) poengterer er det uenighet innenfor matematikkdidaktikken omkring hvilke kompetanser innenfor matematisk modellering som skal vektlegges. Resultatene fra denne studien er i stor grad knyttet til modelleringsoppgaven elevene fikk. Dersom elevene hadde fått en annen type modelleringsoppgave kunne disse resultatene vært annerledes og andre matematiske kompetanser enn tankegang- og representasjonskompetansen kunne ha pekt seg ut som sentrale. Dette kan underbygge uenigheten omkring hvilke av kompetansene som er viktigst.

I figur 15 illustreres det hvordan elevene gjør seg nytte av de ulike kompetansene. Modelleringen drives i hovedsak frem av samspillet mellom tankegangskompetanse og representasjonskompetanse som knyttes sammen med for eksempel hjelpemiddelkompetansen.

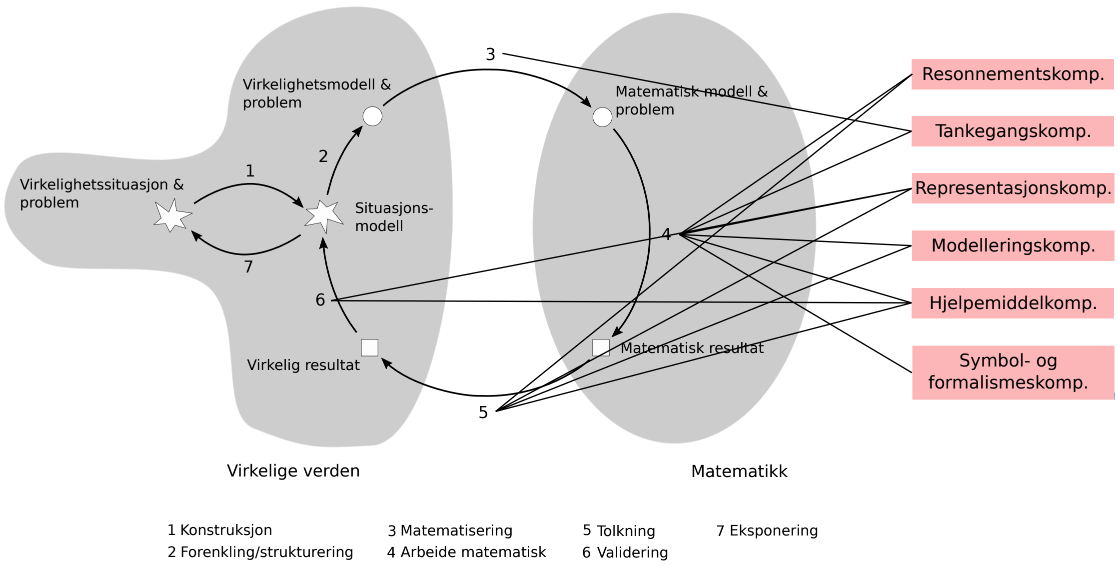


Figur 15: Skisse for hvordan elevene i studien brukte de ulike matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) i arbeidet med Newtons avkjølingslov.

7.3 Elevenes arbeid i modelleringssyklusen

Modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) gir en detaljert beskrivelse over de 6 kognitive fasene samt de 7 overgangene imellom. Et av målene i denne studien var å undersøke hvor i modelleringssyklusen disse åtte kompetansen til Niss og Jensen (2002) ble brukt.

Funnene i denne studien (se 7.2) viser at elevene anvender tankegangskompetanse, modelleringskompetanse, resonnementskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, representasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse i arbeidet med Newtons avkjølingslov som en modelleringsoppgave. Basert på elevenes arbeid og hvilke kompetanser de anvender i de ulike deloppgavene, presenterer jeg i Figur 16 et mulig resultat for hvor elevene benytter seg av de ulike kompetanse i modelleringssyklusen. Kompetansene er i denne figuren kun knyttet til overgangene mellom de kognitive fasene. Elevene kan gjøre seg nytte av kompetansene i de kognitive fasene også, men et av funnene i denne studien var at elevene primært gjorde seg nytte av kompetansene i overgangene mellom disse fasene. Det var utfordrende å plassere hvor elevene arbeidet med de ulike kompetanse i disse overgangene. Dette skyldes at elevene ofte gjør seg nytte av flere kompetanser samtidig i forskjellige deloppgaver. I tillegg var det også utfordrende å identifisere hvilke kompetanser som var nyttige for elevene da flere viste svikt innenfor ulike kompetanser. Elevenes arbeid i oppgave 8 viser for eksempel at elevene arbeider i overgang nr. 5 og 6 kalt tolkning og validering. I arbeidet med denne deloppgaven kan blant annet representasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse være nyttige. Elevenes arbeid viser at de benytter seg av disse kompetansene i overgangen, men flere viser også svikt rundt disse kompetansene. Dette fører til at arbeidet elevene skal gjøre i overgangene ikke får det resultatet det burde og kunne ha fått.



Figur 16: Skisse over hvor elevene benytter seg av de ulike åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007).

Videre i arbeidet med Newtons avkjølingslov skulle elevene i oppgave 8 lage en graf basert på en modell og redegjøre for hvorfor de valgte modellen de gjorde. Tidligere i modelleringsoppgaven hadde elevene arbeidet med modellen $T_v(t) = Ce^{-kt} + T_r$ og gjort målinger for å finne C og k. Funn fra elevenes arbeid viser at de velger å bruke regresjon på målingene de tidligere har gjort til å finne en ny modell. Elevene velger altså å lage en ny modell som kun baseres på de målte dataene. Geisler (2021) oppdaget i sin studie at elevene hadde større tillit til modellene sine enn til dataene, men resultatene i min studie peker i retningen av at elevene ikke klarer å se sammenhengen mellom dataene og modellene. En av de viktigste årsakene for at de ikke klarer å se denne sammenhengen skyldes en mangel på å knytte representasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse sammen. Elevene må klare å oversette og se forbindelser mellom de ulike representasjonene hvor hensyn til formål og situasjon blir tatt i betraktning, og bruke hjelpemidler for dette på en reflektert måte. En årsak til at elevene ikke i større grad reflekterer rundt bruken av regresjon i dette forsøket kan skyldes hvordan regresjon læres i matematikkundervisningen. Som lærerstudent med hovedfag i matematikk har jeg selv vært vitne til en undervisningsøkt i skolen hvor målet var for elevene å lære regresjonsanalyse i Geogebra. For elevene handlet denne undervisningen om å forstå hvordan man plotter inn data i Geogebra, for så å bruke regresjonsanalysen til å finne den *fineste* grafen som passet dataene. Med fineste menes at elevene kan velge mellom ulike modeller som Geogebra foreslår, elevene velger deretter den modellen som følger dataene deres best. Dette blir gjerne omtalt som den fineste grafen. Etter å ha laget ulike grafer for 2-3 samlinger med data var undervisningen ferdig. Resultatet av dette er at elevene får en prosedyrekunnskap i hvordan de skal bruke regresjon i Geogebra. De får en samling data, bruker regresjonsanalyse og finner en graf. Denne prosedyrekunnskapen kan være en årsak til at elevene i dette forsøket ikke reflekterer rundt valgene sine i større grad og klarer å nyttiggjøre seg forholdet mellom representasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse.

Som Ferri (2006) poengterer i sin analyse av modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) kan en årsak til at elever ikke validerer resultatene sine skyldes en indre-matematisk validering. Altså at elevene ikke kobler resultatene til situasjonen i forhold til virkeligheten. I min studie skulle elevene lage en graf for temperaturen i væsken som en funksjon av tiden. Etter dette skulle elevene vurdere om grafen de fant passer med den virkelige verden, altså skulle de tolke og validere grafen. For at elevene skal kunne tolke og validere grafen, må de ifølge Ferri (2006) koble grafen til situasjonen i forhold til den virkelige verden. Et interessant funn fra min studie er at flere av elevene oppdager at modellene deres ikke passer situasjonen lenger etter å ha benyttet seg av regresjonsanalysen i Geogebra. Til forskjell fra Ferri (2006) sin påstand, kobler elevene i denne studien resultatene til situasjonen i virkeligheten. Fordi konteksten utgjør en stor del av dette forsøket, kan dette være en faktor for hvorfor elevene i stor grad kobler resultatene til virkeligheten. Dette kan støttes av Michelsen (2006) som argumenterer for at matematikk bør læres gjennom naturvitenskapelige problemer for at elevene kan nyttiggjøre av de matematiske begrepene gjennom en meningsfull kontekst.

7.4 Elevenes nyttiggjøring av kunnskap og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet i modelleringsoppgaven

Et av målene i denne studien var å undersøke hvilke type kunnskap og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet elevene anvender i arbeidet med Newtons avkjølingslov. Modelleringsoppgaven elevene arbeider med i denne studien er basert på Newtons avkjølingslov hvor både kunnskap fra fysikk og matematikk kan brukes. 18 av 19 elever hadde på forhånd tatt Fysikk 1 hvor blant annet temaene termodynamikk og varmeoverføring var gjennomgått. I tillegg var elevene midt i arbeidet med å gjennomgå differensiallikninger i matematikkfaget R2. Elevene hadde altså kunnskapen de trengte til å arbeide med modelleringsoppgaven, men klarte kun å nyttiggjøre seg av matematikk og ikke fysikken. Enkelte elever klarte å knytte inn erfaringer fra dagliglivet, men også her var det i liten grad. Resultatene peker altså i retningen av at elevene i liten grad klarte å knytte inn kunnskap og erfaringer fra fysikkfaget og dagliglivet inn i arbeidet med Newtons avkjølingslov. Dette kan det være flere ulike årsaker til.

I dag er det ikke et nasjonalt krav at du må velge matematikkfaget R1 dersom man velger Fysikk 1, altså kan man både velge Fysikk 1 og Fysikk 2, uten å velge matematikkfaget R1 og R2. Dette setter begrensninger for fysikkfaget i hvilken grad det kan forventes at elevene skal bruke matematikk. Som det kommer frem i rammene for studien (se 2.1) er det store likheter i hvordan fagene Fysikk 1 og R2 legger opp til at elevene skal arbeide med matematisk modellering. Funnene fra denne studien peker i retningen av at elevene er avhengig av ulike matematiske kompetanser for å kunne arbeide med en modelleringsoppgave. Altså må elevene kunne arbeide med og i matematikk for at de skal kunne arbeide og reflektere rundt en modelleringsoppgave. Et helt spesifikt funn fra min studie er betydningen av elevenes begrepskunnskap, og hvordan denne påvirker deres arbeid rundt Newtons avkjølingslov. Har ikke elevene denne begrepskunnskapen fra matematikken, får heller ikke elevene arbeidet med modelleringsoppgaven i den grad de kunne ha gjort. Dette viser viktigheten av at elevene er sterkt matematisk faglige når de begynner å bruke matematikk i fysikksammenhenger. At fysikk- og matematikkfagene ved den videregående skolen ikke er knyttet tettere sammen med krav om å velge matematikk dersom man velger fysikk, bidrar til å sette begrensninger på fysikkfaget. Uten et slikt krav kan ikke fysikken nyttiggjøre seg av matematikken i like stor grad.

En annen ting som kan skyldes utfordringen elevene opplever med å knytte kunnskap fra fysikk og inn mot matematikkfaget er hvordan oppgavene er formulert i en fysikkoppgave, kontra matematikkoppgave. Taber (2006) argumenterer for at en årsak til at elevene ikke i en større grad klarer å nyttiggjøre seg av fysikken skyldes at man ofte stiller flere spørsmål rundt en fysikkoppgave enn ved en matematikkoppgave. Denne argumentasjonen kan man trekke paralleller til i denne studien. Elevene får i dette forsøket totalt 8 deloppgaver hvor de skal finne og løse en differensiallikning, forklare ulike egenskaper ved differensiallikninger og dens generelle løsning, og etter hvert modellere løsningen som en graf. Elevene skal i de 8 deloppgavene tolke og forklare i en større grad enn i typiske numerisk oppgaver som man gjerne finner i matematikkbøker. Dette krever at elevene har en god begrepskunnskap ved å knytte kunnskap sammen og ser relasjonene mellom disse. Taber sier dette på følgende måte:

> The teacher's job should not be to help students to find a path through the curriculum but to help them to build a conceptual web that allows them to move freely around a territory that they have made their own. (Taber, 2006, s. 287)

At elevene ikke klarer å knytte kunnskap fra fysikken i større grad inn i arbeidet med Newtons avkjølingslov kan skyldes at elevene mangler disse relasjonene, og dermed ikke klarer å bevege seg mellom matematikkfaget og fysikkfaget. Dette kan relateres til studien til Erickson (2006) som oppdaget at elevene kunne enten arbeide i en matematikkmodus eller fysikkmodus. Dette gjorde det vanskelig for dem å tolke tallet 4,26 i likningen $høyden = 4,26tid + 370$ til tross for at de visste at 2 representerte stigningstallet i likningen $y = 2x + 3$. Denne utfordringen kan også finnes igjen blant elevene i min studie. Flere elever hadde utfordringer med å knytte den deriverte til mer enn kun temperaturen, altså knyttet de ikke den deriverte til temperaturen per tidspunkt. Årsaker for dette kan for eksempel være at ordet *tid* ikke eksplisitt ble presentert i den muntlige definisjonen for Newtons avkjølingslov (se 6.1.1). Elevene måtte dermed selv reflektere rundt hvordan den deriverte hadde endringsraten temperatur$(°C)$ per sekund ut ifra situasjonen. Dette kan vise at elevene er i denne matematikkmodusen, og ikke klarer å bryte ut og koble begreper og symboler til situasjonen som man ofte gjør i fysikk.

Et annet interessant funn i denne studien er hvordan elevene i liten grad anvender erfaringer fra dagliglivet i arbeidet med Newtons avkjølingslov. Eleven tar med seg deler av kulturen både fra familie og venner inn i klasserommet og tar samtidig med seg ulike måter å beskrive fysiske fenomener (Angell et al., 2019, s. 136). I tillegg har elever ofte begreper og forestillinger i forkant av en undervisningsøkt som stammer fra dagliglivet eller hverdagslige erfaringer (Angell et al., 2019, s. 128). Derfor kunne det tenkes at elevene forsøkte å knytte refleksjonene og diskusjonene seg imellom mot erfaringer de kunne ha i arbeidet med Newtons avkjølingslov. Funnene fra studien viser at av de 19 elevene som deltok i forsøket, var det kun 4 personer som i varierende grad knyttet inn erfaringene sine fra hverdagen og inn i arbeidet. Det kan være ulike årsaker til dette. For eksempel kom det ikke eksplisitt frem i de 8 deloppgavene at elevene skulle bruke erfaringer fra dagliglivet inn i arbeidet sitt. I tillegg gjorde jeg datainnsamlingen i en matematikkklasse som kan gjøre det enklere for de å gå inn i en matematikkmodus. At elevene ikke brukte erfaringer fra dagliglivet kan skyldes at man sjeldent gjør dette i matematikkfag. I den nye læreplanen LK20 for Matematikk R knyttes anvendelsene fra faget opp mot situasjoner utenfor matematikkfaget i større grad enn i den utgående læreplanen LK06. Under kjerneelementer for Matematikk R nevnes det for eksempel:

> Anvendelser i matematikk R handler om kunnskap om hvordan matematikk anvendes i ulike situasjoner, både i og utenfor faget. (Utdanningsdirektoratet, 2021a, s. 3)

Altså knyttes anvendelser i matematikkfaget til å også omhandle situasjoner utenfor faget. Anvendelsen av matematikk formuleres på følgende måte i læreplanen for matematikk fagene R1 og R2:

> Matematikk brukes til å utforske universet, systematisere erfaringer og beskrive og forstå naturgitte og samfunnsmessige sammenhenger. (Utdanningsdirektoratet, 2006b, s. 2)

Her er formålet for matematikken å systematisere erfaringene fremfor å arbeide med dem. Fra dette kan det virke som at det er en utvikling i læreplanene for matematikk omkring hvordan elevene skal arbeide med erfaringer i matematikk. Kanskje vil generasjonen som fra sommeren 2022 begynner å bruke den nye læreplanen LK20 i R2 nyttiggjøre seg av erfaringene sine fra dagliglivet i større grad enn elevene som deltok i denne studien, og som i dag følger den utgående læreplanen LK06 i matematikkfaget.

8 Fremtidige perspektiver

8.1 Begrensninger ved studien

Dersom jeg skulle ha gjennomført denne studien på nytt ville jeg gjort enkelte ting annerledes. Et av målene med denne studien var blant annet å undersøke hvor i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) elevene arbeidet med de ulike matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002). Etter å ha gjennomført denne studien har jeg oppdaget hvor utfordrende dette kan være, nettopp fordi elevene benytter seg av flere ulike kompetanser samtidig til deloppgavene. Ved en ny gjennomgang ville jeg ha designet deloppgavene mer tydelig. I tillegg ville jeg ved enkelte deloppgaver gjort de mindre ledende for elevene. Oppgave 8 gikk som følger: Forklar hva som skjer i grafen dere fant i Geogebra. Hvorfor synker grafen, og hvorfor flater den etter hvert ut? Begrunn hvilken modell dere brukte, og hvorfor. Denne deloppgaven ville ha endret til, 8a) *Bruk Geogebra til å lage en graf som viser hvordan temperaturen i væsken endres*, 8b) *Redegjør for hvorfor grafen beveger seg som den gjør*, 8c) *Passer grafen den virkelige situasjonen? Hvorfor?* En slik inndeling ville gjort det mulig i større grad å knytte de forskjellige kompetansene til deloppgavene, og peke på hvor i modelleringssyklusen elevene arbeidet.

Under datainnsamlingen ble også tid et problem. Elevene holdt på i 120 minutter og ble akkurat ferdig med oppgave 8. Dersom jeg hadde inkludert færre deloppgaver kunne elevene fått bedre tid til å arbeide med hver enkelt deloppgave. I tillegg er 120 minutter lenge for mange elever, og dette merket jeg på motivasjonen for mange av elevene under datainnsamlingen. Ved en ny gjennomgang av studien bør også tiden elevene bruker på deloppgavene kortes ned.

Som Michelsen (2006) poengterer kan det å knytte naturvitenskapelige problemer til matematikken gjøre det enklere for elevene å lære matematiske begreper gjennom meningsfull kontekst. Et av målene for denne studien var å undersøke hvordan kontekst spilte en rolle i elevenes arbeid med en modelleringsoppgave. I denne studien valgte jeg å benytte Newtons avkjølingslov fra fysikken og knytte dette opp som en modelleringsoppgave. Men naturvitenskapen inneholder mer enn bare fysikk. For eksempel inneholder naturvitenskapen også kjemi, biologi og teknologi. I en ny gjennomgang av studien kunne det vært interessant å knytte andre naturvitenskapelige fag til matematisk modellering, og undersøkt om dette ville ha gitt andre resultater.

Det er viktig å poengtere at funnene i denne studien baserer seg på elevenes arbeid knyttet til Newtons avkjølingslov. Som Nilssen (2012) også poengterer kan aldri en kvalitativ forskning bli objektiv fordi forskningsdeltakerne har verdier og holdninger de inkluderer i svarene sine. Gjennomfører man datainnsamlingen i et annet miljø kan dette påvirke resultatene da forskningsdeltakerne kan ha andre verdier og holdninger. Hadde jeg gjennomført denne studien ved en annen skole hos en R2 matematikkklasse hvor flertallet av elevene også hadde tatt fysikkfaget Fysikk 1, ville jeg forventet andre funn.

8.2 Studiens betydning for min fremtid som lærer

Arbeidet med denne studien har først og fremst gitt meg innsikt i betydningen av begrepskunnskap. Å ha god kunnskap og forståelse rundt et begrep er viktig i arbeidet med matematikk, og ikke minst i arbeidet med matematisk modellering. Som fremtidig matematikklærer tar jeg med meg viktigheten av dette inn i planleggingen av undervisningen og videre inn i klasserommet.

Videre har arbeidet med de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) gitt meg lærdom i hvordan jeg kan konkretisere ferdighetene til elevene under hver kompetanse. På denne måten kan jeg identifisere hvilke kompetanser elevene behersker og ikke. I tillegg har arbeidet med disse kompetansene lært meg viktigheten av å beherske én kompetanse, for å i en større grad kunne beherske en annen kompetanse også.

Mine fremtidige elever i matematikk vil følge LK20 som har et større fokus på modellering og anvendelser enn dagens læreplan LK06, blant annet gjennom det nye kjerneelementet *modellering og anvendelser*. Arbeidet med denne masteroppgaven har åpnet øynene mine opp for hvor viktig det er for elever å arbeide med modelleringsoppgaver, nettopp fordi disse deloppgavene krever *mer* av elevene. Elevene må aktivt bruke begrepskunnskapen for å kunne nyttiggjøre seg av de matematiske kompetansene. Dette krever trening og det tror jeg elevene i større grad vil få i LK20 enn i LK06.

Et av funnene i studien til Blomhøj og Jensen (2007) var at må man være oppmerksom på de ulike delene i modelleringsprosessen, og i hvilken grad elevene arbeider med disse. Dette for å kunne støtte deres fremgang i arbeidet med matematisk modellering. Arbeidet med å undersøke hvor i modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) elevene arbeider har gjort meg mer oppmerksom på de ulike delene av modelleringsprosessen, og hva de ulike fasene og overgangene innebærer. Dette tror jeg er til stor nytte når jeg en dag skal hjelpe og veilede elever med å arbeide med modelleringsoppgaver.

Arbeidet med denne masteroppgaven har vært en lang prosess. Gjennom seks måneder har jeg lest og gjort undersøkelser. Jeg har kokt vann og matolje om hverandre, og som regel måtte ha kokt og målt på nytt. Arbeidet tok til stadighet nye veier i møtet med virkeligheten, men for hver ny vei følte jeg også at oppgaven ble litt bedre. På samme måte som arbeidet med denne masteroppgaven ser jeg også på læreryrket som en prosess. I læreryrket skal det planlegges ut ifra kunnskapsmål og læreplaner, og som med masteroppgaven min finner også disse planene nye veier i møtet med virkeligheten. Etter å ha arbeidet med denne masteroppgaven jeg er klar for at undervisningsplanen finner nye veier i klasserommet, og håper at disse nye veiene også gjør undervisningen litt bedre.

9 Litteraturliste

Adams, R. & Essex, C. (2018). *Calculus: A complete course* (9. utg.). Pearson.

Angell, C., Bungum, B., Henriksen, E., Kolstø, S., Persson, J. & Renstrøm, R. (2019). *Fysikkdidaktikk* (2. utg.). Cappelen Damm.

Besson, U. (2010). The history of the cooling law: When the dearch for dimplicity can be an obstacle. *Science & Education*, *21*(8), 1085–1110. https://doi.org/10.1007/s11191-010-9324-1

Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education* (s. 45–56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_3

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1/2), 149–171. https://doi.org/10.1023/A:1022435827400

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. I G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (s. 15–30). Springer.

Blum, W. & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (s. 222–231). Horworod Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Briggs, W. & Cochran, L. (2010). *Calculus: International edition*. Pearson.

Davis, L. J., Reiter, M. & Groom, J. D. (2016). Modelling temperature change downstream of forest harvest using Newton's law of cooling. *Hydrological Processes*, *30*(6), 959–971. https://doi.org/10.1002/hyp.10641

Erickson, T. (2006). Stealing from physics: Modeling with mathematical functions in data-rich contexts. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, *25*(1), 23–32. https://doi.org/10.1093/teamat/hri025

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 86–95.

Ferri, R. B. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (s. 260–270). Horworod Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Geisler, S. (2021). Data-based modelling with experiments - students' experiences with model-validation. I M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Red.), *Proceedings of the 44th conference of the international group for the psychology of* *mathematics education* (s. 289–296). Thailand Society of Mathematics Education.

Giancoli, D. (2009). *Physics for scientists engineers with modern physics* (4. utg.). Pearson Prentice Hall.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1–23). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kaiser, G., Schwarz, B. & Buchholtz, N. (2011). Authentic modelling problems in mathematics education. I G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (s. 591–601). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_57

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R. & Pekrun, R. (2010). The role of the situation model in mathematical modelling—task analyses, student competencies, and teacher interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 119–141. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0006-y

Michelsen, C. (2006). Functions: A modelling tool in mathematics and science. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 269–280. https://doi.org/10.1007/BF02652810

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren*. Universitetsforlaget.

Niss, M. A. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(1), 1–24. https://doi.org/10.1023/A:1003715913784

Niss, M. A. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriets forlag.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2015). *Sinus R2: Grunnbok i matematikk: Studiespesialiserende program* (2. utg.). Cappelen Damm.

Opplæringsloven. (1998). *Lov om grunnskolen og den videregående opplæring* (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3. utg.). Sage Publications.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Taber, K. S. (2006). Conceptual integration: A demarcation criterion for science education? *Physics Education*, *41*(4), 286–287. https://doi.org/10.1088/0031-9120/41/4/F01

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Utdanningsdirektoratet. (2006a). *Læreplan i fysikk - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering* (FYS1-01). http://www.udir.no/kl06/FYS1-01

Utdanningsdirektoratet. (2006b). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering* (MAT3-01). https://www.udir.no/kl06/MAT3-01

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). http://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2021a). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R)* (MAT03-02). https://www.udir.no/lk20/MAT03-02

Utdanningsdirektoratet. (2021b). *Læreplanen for Fysikk* (FYS01-02). https://www.udir.no/lk20/fys01-02

A Vedlegg

A.1 Samtykkeskjema

I dette vedlegget følger informasjon- og samtykkeskjemaet som ble delt ut til elevene. Tittelen på prosjektet ble endret underveis.

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Fysikkens rolle matematikkemnet»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er undersøke hvordan fysikk kan gi støtte til matematikkemnet. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Prosjektet tar for seg hvordan elever kan bruke fysikk som en støtte til å forstå matematikk.

Å bruke fysikk som et verktøy kan for mange elever være et hjelpemiddel til å øke forståelsen rundt ulike temaer i matematikken. For å forstå og beherske matematikk er man avhengige av å ha en god forståelse for begreper og notasjoner. Med denne oppgaven ønsker jeg å undersøke hvordan elever får nytte av bruken av fysikk i matematikkundervisningen. Er det slik at elevene føler de behersker matematikken de skal bruke fordi de har en dypere forståelse rundt begreper og notasjoner fra fysikken, eller blir bruken av notasjoner og begreper fra fysikken borte i matematikkens verden?

Prosjektet er en del av masteremnet «Masteroppgave i matematikk» (MA3950)» ved NTNU. Prosjektet er individuelt og opplysningene som blir innhentet vil kun bli brukt i dette prosjektet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Instituttet for matematiske fag er ansvarlig for prosjektet. Veileder for prosjektet er professor Frode Rønning. Prosjektansvarlig er Emil Røberg.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
I prosjektet inngår det å samle inn data fra en gruppe elever fra en ungdomsskole eller en videregående skole. Du får spørsmål om å delta i dette prosjektet fordi du er i den gruppen din lærer/fagansvarlig har godkjent til å være med i dette prosjektet etter forespørsel fra prosjektansvarlig.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i dette prosjektet, innebærer det at du godkjenner å bli observert under et forsøk hvor det vil bli brukt lydopptak.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Det vil heller ikke påvirke ditt forhold til skolen eller læreren din.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Ingen andre enn prosjektansvarlig og emneansvarlig vil ha tilgang til dataen som blir samlet inn i dette prosjektet. Lydopptakene vil bli lagret adskilt fra øvrige data.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet forventes å være ferdig innen 1. juni 2022. Etter dette vil all data bli slettet, observasjonene vil bli transkribert og lydfilene slettet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra instituttet for matematiske fag ved NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Instituttet for matematiske fag ved NTNU ved Frode Rønning, frode.ronning@ntnu.no, +4795218138
- Emil Røberg, emilpr@stud.ntnu.no, 413 59 348
- NTNUs personvernombud er Thomas Helgesen: tlf. 93079038; epost thomas.helgesen@ntnu.no.

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Frode Rønning (Professor/veileder)

Emil Røberg (Prosjektansvarlig)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «*Fysikkens rolle matematikkemnet*», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til å delta i et forsøk hvor det vil bli benyttet lydopptak.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

A.2 Instrukser for gjennomføring av forsøket i modelleringsoppgaven

I dette vedlegget følger instruksene elevene fikk utdelt da de skulle gjennomføre forsøket i modelleringsoppgaven.

Newtons avkjølingslov

Plan for gjennomføring av eksperiment:

- 2 grupper gjennomfører målinger med matolje.
- 2 grupper gjennomfører måling med vann.
- <u>Utstyr hver gruppe trenger:</u>
    - Kokeplate
    - Termometer
    - Kjele
    - Stoppeklokke
    - Notatark og penn
    - Vann eller matolje
    - Målebeger – 5 dl.

Gjennomføring.

1) Mål opp 5 dl vann/matolje i målebegeret.
2) Hell oljen/vannet i kjelen, og plasser kjelen på kokeplaten.
3) Varm opp vannet/oljen til 90 grader.
4) Vent til væsken begynner å kjøle seg ned. Når temperaturen går ned til 85,0 grader skal dere starte stoppeklokken og begynne å notere ned temperaturer i tabellen under.
   Dere skal gjøre målinger hvert 15. sekund i 6 minutter. Totalt 25 målinger.
5) La vannet/oljen kjøle seg ned.

Temperaturen i rommet:	

Tid	**Grader(celsius)**	**Tid**	**Grader(celsius)**
T(0s)		T(4min)	
T(15s)		T(4.15)	
T(30s)		T(4.30)	
T(45s)		T(4.45)	
T(1min)		T(5min)	
T(1.15)		T(5.15)	
T(1.30)		T(5.30)	
T(1.45)		T(5.45)	
T(2min)		T(6min)	
T(2.15)			
T(2.30)			
T(2.45)			
T(3min)			
T(3.15)			
T(3.30)			
T(3.45)			

Emil Pladsen Røberg

Matematisk modellering

NTNU
Kunnskap for en bedre verden