Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Morten Nygård

Digitale læreverk — fremskritt eller fase?

En case-studie om videregåendeelevers bruk av hjelpemidler og valg av løsningsmetoder på en digital plattform i matematikk

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Frode Rønning
Juni 2022

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Morten Nygård

Digitale læreverk — fremskritt eller fase?

En case-studie om videregåendeelevers bruk av hjelpemidler og valg av løsningsmetoder på en digital plattform i matematikk

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Frode Rønning
Juni 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Hver elev i den videregående skolen har i dagens skolelandskap tilgang på en egen datamaskin. Tilbydere av matematisk innhold har i lyset av dette utviklet nye måter å jobbe med matematikkfaget. Denne studien tar for seg elevers arbeidsmetoder i konteksten av oppgaver fra det digitale læreverket Campus Inkrement. Studien setter spesielt fokus på hjelpemidlene elevene bruker samt løsningsmetodene de anvender i prosessen frem mot svaret. Oppgaven baseres på observasjon og intervju av åtte elever fra de videregående matematikkursene 1T og R1, og teorien om instrumentell skapelse.

Morten Nygård studerte ved lektorutdanningen i realfag ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet i Trondheim. Her utgjorde han en større forskjell på det sosiale miljøet enn på det faglige.

Analysen tar utgangspunkt i et utvalg av artefakter fra observasjonen. Følgende artefakter ble med i utvalget: Campus Inkrement (herunder automatisk tilbakemelding, fasit og videoleksjoner), dialog, Google, nettbaserte algebrakalkulatorer og til slutt blyant og papir.

Det viser seg at begrensninger i én artefakt, fører til at elevene finner nye artefakter. Disse artefaktene har muligheter som veier opp for begrensningene i det forrige. Dette eksemplifiseres ved at begrensninger knyttet til tilbakemeldings- og veiledningssystemet i Campus Inkrement førte til at elevene fant algebrakalkulatorer på nettet for å kunne se på forslag til oppgaveløsninger.

Nøkkelord: digitale læreverk, hjelpemidler, digitale verktøy, instrumentell skapelse, tilbakemelding, Campus Inkrement

Abstract

All high school students in Norway have access to their own personal computer. In response to this, content providers have developed new ways of working with the subject of mathematics. This study details the student's work methods in the context of working with tasks from the digital curriculum Campus Inkrement. The study focuses on the aids used by the students and the methods they apply when solving tasks. Based on observation and interviews with eight students from two theoretical mathematics courses and the theory of instrumental genesis a case is made.

The analysis is based on a selection of artifacts seen in the observation. The following artifacts were selected: Campus Inkrement (which consists of automatic feedback, answer keys and video lectures), dialogue, Google, web-based algebraic calculators, and lastly pencil and paper.

It appears that constraints in one artifact led the students to find new artifacts to make up for these lacks. An example of this is that constraints tied to the feedback- and guidances ystems in Campus Inkrement lead the students to find algebraic calculators on the internet to view sample solutions for certain tasks.

Keywords: Digital curricula, learning aids, digital tools, instrumental genesis, feedback, Campus Inkrement

Forord

300 studiepoeng senere sitter vi her, men hvor ble tiden av? Denne oppgaven markerer slutten på en fem år lang reise. På ferden har jeg møtt mange vidunderlige mennesker, som alle har fortjent en personlig takk i dette forordet.

Først vil jeg takke min veileder Frode Rønning som ble med på reisen helt mot slutten. Takk til Heidi, Yael og Marius som også fortjener en del av æren for å ha holdt kursen stø det siste skoleåret.

Dernest vil jeg sende en enorm takk til Linjeforeningen Spanskrøret. Takk for å ha tatt meg imot og gitt meg den beste tenkelige starten på reisen. Takk for å ha gitt meg deres tillit og for å ha latt meg utfolde meg på så mange ulike arenaer. Takk til hver eneste LURing som har gjort disse fem årene til en vakker dans på daljer.

Videre er det to gjenger som fortjener en personlig hilsen. Takk til Personalformidlinga, bestående av Sondre, Stian og Julie, som har gjort Tiller til et godt sted å leve. Takk til MasterChefs, bestående av Bjarte og Emil, som på mystisk vis har omgjort selv de mest kritiske tilbakemeldingene til noe å le av. Livet på Matteland hadde vært hardt uten dere.

Den største takken går derimot til mine foreldre som ga meg livets gave. Dere har vært mine største støttespillere gjennom mine 18 uavbrutte år på skolebenken.

Takk til alle som har deltatt i denne studien og i pilotprosjektene. Uten dere hadde denne oppgaven vært omtrent 90 sider kortere. Alle andre som ikke ble nevnt med navn får ta imot denne takken på deling; tusen takk!

Trondheim, juni 2022

Morten Nygård

Innholdsfortegnelse

Liste over figurer

Kapittel 1

Innledning

I et skolelandskap hvor hver elev har tilgang på en egen datamaskin og et påfølgende krav om opplæring i digitale ferdigheter, faller det naturlig at det utvikles stadig nye måter å digitalisere undervisning og læring. I matematikkfaget har man sett en stor utvikling fra de første verktøyene, som kalkulatorer og graftegnere, ble innført i klasserommet til dagens situasjon hvor videregående-elever må beherske et bredt utvalg digitale hjelpemidler og digitale verktøy for å kunne holde følge med undervisningen. I nyere tid har flere aktører lansert produkter som kan, hvis ønskelig, overta rollen læreboka har hatt som presentatør av fagstoff og tilbyder av oppgaver. Inkludert i de fleste av disse produktene finner man et stort repertoar av oppgaver som kan løses direkte i nettleseren.

Da jeg startet min masterreise høsten 2021, hadde jeg nettopp vært ute i lektorstudiets siste og mest omfattende praksisperiode. I åtte uker hadde jeg vært i praksis på en videregående skole hvor jeg underviste et 1T-kurs. Dette var mitt første møte med det digitale læreverket Campus Inkrement, Norges største tjeneste for omvendt undervisning (Campus Inkrement, 2022). I tillegg hadde jeg siden starten av 2021 vært ansatt som konsulent i Cappelen Damm for å produsere innhold til deres digitale læreverk: coSinus. På et tidspunkt i løpet av sommeren gikk det opp et lys for meg om at disse digitale læreverkene var et godt utgangspunkt for å skrive min matematikkdidaktiske masteroppgave. Dette resulterte først i to pilotprosjekter i emnene MA2010 og RFEL3100 og nå denne oppgaven du leser. Oppgaven ble tidlig innsnevret til å omhandle hjelpemiddelbruken og løsningsmetodene til elever i konteksten av å løse oppgaver digitalt på det digitale læreverket Campus Inkrement.

1.1 Forskningsspørsmål

Oppgaven tar utgangspunkt i forskningsspørsmålet: *«Hvilke løsningsmetoder og hjelpemidler bruker videregåendeelever når de jobber med matematikk i det digitale læreverket Campus Inkrement, og hvordan påvirkes elevene av mulighetene og begrensningene ved de ulike artefaktene?»*

I forskningsspørsmålet ansees både løsningsmetoder, hjelpemidler og selve læreverket Campus Inkrement som artefakter. Artefakt er et begrep fra teorien om instrumentell skapelse og vil bli forklart nærmere i delkapittel 2.3.

I denne oppgaven vil ordet hjelpemiddel dukke opp ofte. Jeg vil skille mellom interne og eksterne hjelpemidler knyttet til Campus Inkrement. Interne hjelpemidler, som det finnes totalt tre av, er hjelpemidler som er innebygde deler av det digitale læreverket. Disse er automatisk tilbakemeldinger, fasit og videoleksjoner. Eksterne hjelpemidler, som det finnes utallige av, er hjelpemidler som finnes uavhengig av Campus Inkrement og kan brukes i matematikken uansett hvordan man foretrekker å jobbe med den; digitalt eller analogt.

I denne oppgaven anser jeg Campus Inkrement i seg selv som en artefakt. Løsningsmetodene som elevene bruker er artefakter. Alle de eksterne hjelpemidlene er artefakter. Både interne og eksterne hjelpemidler er til for å hjelpe elevene på veien mot en løsning på et matematisk problem. Jeg skal altså se på både hvilke hjelpemidler som er innebygd i Campus Inkrement, men også på eksterne hjelpemidler som elevene tyr til når de innebygde strategiene ikke er tilstrekkelig hjelpsomme.

1.2 Konteksten til studien

Studien er skrevet i konteksten av et skolelandskap i endring. Digitalisering av skolen er et særdeles hett tema. Den nye læreplanen (LK20) er snart i full effekt på den videregående skolen. Med seg bringer den nye læreplanmål, ny organisering av eksamen i matematikk og mange andre spennende perspektiver. Den første forslåtte eksempeleksamen i matematikk var designet på en slik måte at alle hjelpemidler var tillatt under hele eksamenstiden. Følgelig er det viktig å lære elevene opp i bruken av så mange hjelpemidler som mulig. Resultatene fra denne studien kan da være til hjelp med å velge hvilke hjelpemidler som skal vies mest tid.

1.3 Teorigrunnlaget

Ved hjelp av begreper fra teorien om instrumentell skapelse skal jeg identifisere ulike muligheter og begrensninger tilknyttet artefakten Campus Inkrement, de eksterne hjelpemidlene og løsningsmetodene. Dette gjøres også for å bestemme hvordan egenskapene ved disse artefaktene påvirker elevenes bruk av læreverket og de andre relevante hjelpemidlene. Jeg vil også være på utkikk etter instrumenterte teknikker: et begrep som omhandler de synlige aksjonene elever gjør ut fra deres mentale forståelse av hjelpemidlene de arbeider med.

Jeg skal også benytte tilbakemeldingsteori som et viktig teoretisk perspektiv. Denne teorien vil være spesielt viktig i analysen av den automatiske tilbakemeldingen som er en del av artefakten Campus Inkrement.

De ovenfor nevnte teoriene danner det teoretiske rammerverket. Jeg vil utover dette inkludere tre kilder til teori, som er med på å belyse enkelte deler av forskningsspørsmålet. Disse blir presentert i seksjon 2.5.

1.4 Metodegrunnlaget

Det ble i hovedsak brukt kvalitative metoder i dette prosjektet. Dette reflekteres både i datamaterialet som ble anskaffet og innsamlingsmetodene som ble brukt for å anskaffe det. Datamaterialet som skal analyseres består av observasjon (fire videoopptak) og intervju (to lydopptak). Datagrunnlaget bygger på arbeider og intervju av åtte videregåendeelever. Jeg har også intervjuet en utvikler. Informasjonene innhentet fra dette intervjuet skal ikke analyseres eller diskuteres, men blir aktivt brukt i definisjonen av sentrale begreper. Studien er en case-studie, som kjennetegnes av flere ulike innsamlingsmetoder.

Kapittel 2

Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere det teoretiske rammeverket som skal brukes til å belyse, analysere og diskutere aspekter rundt oppgavens tematikk. Først vil jeg, i from av en taksonomi av begreper, redgjøre for noen digitale tjenester som opptrer i denne teksten. Deretter vil jeg presentere de to teoriene som sammen utgjør det teoretiske rammeverket for denne oppgaven. Til slutt vil jeg presentere tilleggsteori som vil være til hjelp med å belyse forskningsspørsmålet.

2.1 En taksonomi av digitale tjenester

I skolematematikken har datamaskiner, og de teknologiske nyvinninger de fører med seg, fått en større og større rolle. I denne seksjonen vil jeg presentere en taksonomi bestående av tre begreper. Disse tre begrepene har mye til felles, og det er derfor viktige å kunne differensiere dem og skille dem fra hverandre. Taksonomien er basert på informasjon generert fra et intervju med Reodor (pseudonym), en utvikler av et digitalt læreverk. Mer informasjon om dette intervjuet og denne respondenten finnes henholdsvis i seksjon 3.5.1 og seksjon 3.4.1.

Et *digitalt verktøy* har som formål å hjelpe en utøver av matematikk med å løse et matematisk problem. Et digitalt verktøy har ikke eget innhold, men er laget for å bearbeide innhold fra andre tjenester. Eksempler på digitale verktøy er GeoGebra (graftegner, algebra- og statistikkalkulator), Trinket (programmeringsverktøy i nettleser) og Microsoft Excel (regneark, datavisualisering og dataanalyse).

Et *digitalt læremiddel* er en kombinasjon av verktøy og teknologier som presenterer faglig innhold. Innholdet kan for eksempel være en kombinasjon av fagstoff presentert med tekst eller video, teorioppgaver, utforskende oppgaver, diskusjonsoppgaver og prøver. Et digitalt læremiddel behøver ikke dekke alle behov for verktøy og innhold i et fag. Denne definisjonen kan også forenes med ordlyden fra Opplæringsloven: «Med læremiddel meiner ein alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa. Dei kan vere enkeltståande eller gå inn i ein heilskap, og dekkjer aleine eller til saman kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet» (Forskrift til opplæringslova, 2006, §17-1). Et eksempel på et digitalt læremiddel er NDLA (Nasjonal digital læringsarena).

Digitale læreverk er i stor grad like som digitale læremidler, men er ment å dekke alle behov for innhold i et fag. Et digitalt læreverk kan være en erstatning for en lærebok. Alle digitale læreverk er digitale læremidler, men ikke omvendt. Eksempler på digitale læreverk er Campus Inkrement (matematikk for 1. til 13. klasse utviklet av Inkrement AS) og coSinus (videregående matematikk utviklet av Cappelen Damm).

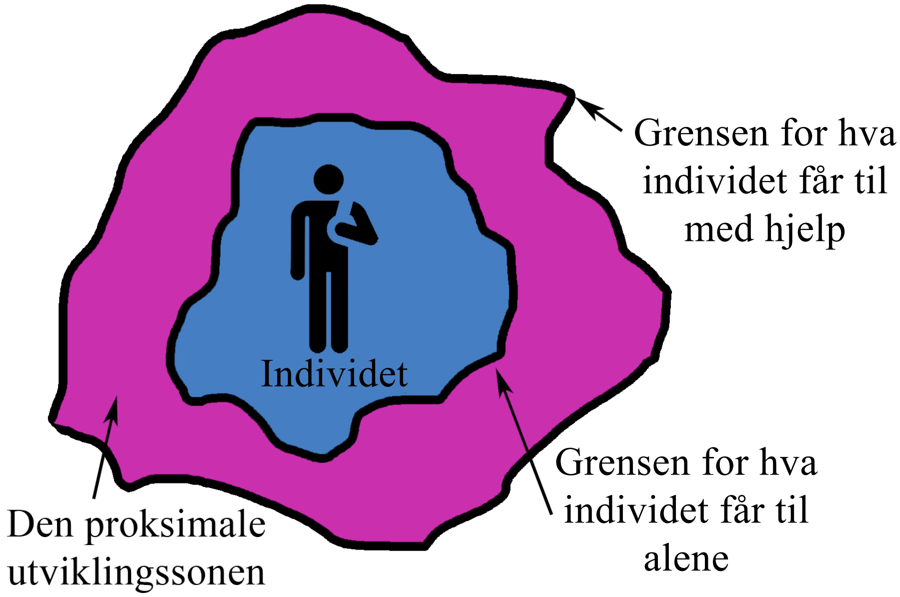
2.2 Den sosiokulturelle læringsteorien

Den sosiokulturelle læringsteorien ser på læring i konteksten læringen foregår i. Den sosiale konteksten *former* læringen, og læringen *skapes* i konteksten. Denne læringsteorien bygger på perspektiver myntet av den russiske psykologen Lev Vygotsky. Teorien forteller om hvordan individet skaper kognitive ferdigheter og høyere psykologiske funksjoner gjennom sosial interaksjon og tale med andre individer (Vygotsky, 1978, s. 23).

Læring skjer i to steg. Det første steget involverer å interagere med andre mennesker. Prosessene som skjer i dette steget kalles *interpsykologiske*, fordi læringen skjer gjennom interaksjoner med andre mennesker og med artefaktene de jobber med (Vygotsky, 1978, s. 57). Elever som jobber i grupper og par har muligheten til å snakke sammen for å opparbeide seg en felles forståelse. Gjennom samtalen, finner de løsninger som de i det andre steget prosesserer og internaliserer. Det andre steget involverer å skape metale strukturer i sitt indre og kalles *intrapsykologisk*.

Vygotsky (1978) poengterer at mennesker er aktive deltakere i sin egen tilværelse og i sine egne læringsprosesser. Dermed er det viktig å skape og bruke stimuli, i form av verktøyene man gir dem og språket man utsetter dem for. Prosessen med å adaptere stimulien er individuell for hvert menneske, da fordi mennesker besitter ulike tidligere erfaringer og tidligere kunnskaper.

Dette leder oss inn på et begrep som omhandler hva et menneske klarer å få til alene sammen-



Figur 2.1: Den proksimale utviklingssonen.
Figuren er tilpasset etter informasjonen i Vygotsky (1978).

liknet med hva mennesket kan få til sammen med en hjelper. Følgende sitat oppsummerer begrepet *den proksimale utviklingssonen* i Vygotsky (1978) sine egne ord:

> The zone of proximal development [. . .] is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers. (Vygotsky, 1978, s. 86)

Figur 2.1 tegner et bilde av hvordan den proksimale utviklingssonen kan se ut for et individ. Vedkommende som hjelper individet nå ytterkanten av den proksimale utviklingssonen kaller jeg for en *medierende hjelper*.

Denne medieringen, både mellom individ og medierende hjelper, og mellom subjekt og artefakt, danner grunnlaget til et rammeverk kalt instrumentell skapelse. For å introdusere dette skal jeg i neste seksjon presentere synspunkter fra Trouche (2005) og Drijvers og Gravemeijer (2005).

2.3 Instrumentell skapelse

Instrumentell skapelse, oversatt fra det engelske begrepet *instrumental genesis*, betegner en struktur av prosesser mellom det som kalles artefakt og subjekt (figur 2.2 skaper et klarere bilde av strukturen). Teorien om instrumentell skapelse inneholder mange begreper. Jeg har lånt norske oversettelser av disse begrepene fra masteroppgaven «CAS - bruke for å lære, eller lære å bruke» av Moe (2019).

2.3.1 Artefakter og instrumenter

En artefakt får følgende definisjon av Trouche (2005): «An *artifact* is a material or abstract object, aiming to sustain human activity in performing a type of task; it is *given* to a subject» (s. 144). Det er altså snakk om både fysiske og abstrakte objekter som hjelper mennesker gjennom en prosess eller til å utføre en oppgave. Artefakten kan være alt fra en håndholdt- eller datamaskinell kalkulator (fysisk) eller en algoritme slik som andregradsformelen (abstrakt). Det sies at artefakten gis til subjektet. Dette vil si at på et tidspunkt var artefakten ukjent for subjektet før de ble introdusert for hverandre. Da elevene, under innsamlingen av datamaterialet, tok med sine egne fysiske og abstrakte objekter, kan det ikke sies at det ble gitt ut noen nye artefakter til dette forskningsprosjektet. En konsekvens av dette er at man ikke kan observere deler av instrumentaliseringsfasen, slik som eksplosjons- og renselsesfasen. Disse fasene vil allikevel forklares senere i delkapittelet.

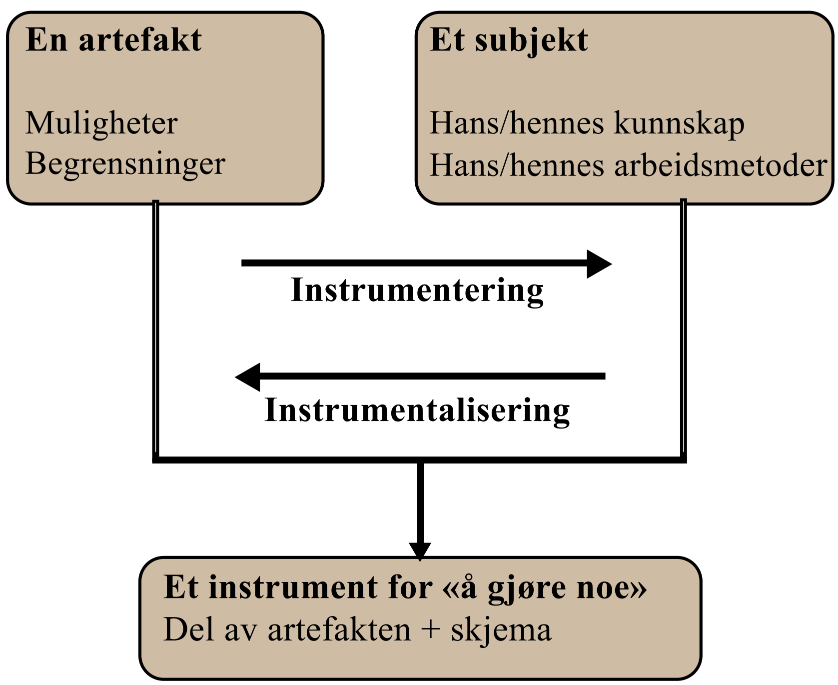
Videre gir Trouche (2005) følgende definisjon for begrepet instrument: «An *instrument* is what the subject *builds* from the artifact» (s. 144). Drijvers og Gravemeijer (2005) supplerer med følgende:

> We speak of an *instrument* when there is a meaningful relationship between the artifact – or a part of the artifact – and the user for dealing with a certain type of task, in our case mathematical tasks, which the user has the intention to solve. (Drijvers & Gravemeijer, 2005, s. 166)

Fra dette sitatet viser det seg at en artefakt først blir til et instrument når subjektet som har mottatt det, har opparbeidet seg en forståelse og et meningsfylt forhold til det. En artefakt er ikke et instrument når subjektet ikke har noen kjennskaper til, eller erfaringer knyttet til det. En artefakt kan i praksis være et hvilket som helst hjelpemiddel eller hvilken som helst løsningsmetode man som lærer gir til elevene (eller som elevene selv finner opp eller oppdager). I denne studien, som undersøker flere ulike hjelpemidler og løsningsmetoder, er det potensielt mange instrumenter involvert. I det øyeblikket elevene begynner å benytte seg av en artefakt, starter prosessen kalt «bygging» av instrumenter. Dette er det som kalles instrumentell skapelse (Trouche, 2005, s. 144).

2.3.2 Instrumentering og instrumentalisering

Som figur 2.2 viser, eksisterer det to interaksjoner mellom subjektet og artefakten i instrumentell skapelse. Den ene interaksjonen, som kalles instrumentering, er rettet fra artefakten mot subjektet. Den andre interaksjonen, som kalles instrumentalisering, er rettet fra subjektet mot artefakten. Disse to interaksjonene sammenfattes som: Det gjensidige forholdet mellom elev og læringsverktøy er en prosess hvor verktøyet *former* (instrumentering) elevens tankegang, samtidig som verktøyet *blir formet* (instrumentalisering) av elevens kunnskap og handlinger (Drijvers & Gravemeijer, 2005, s. 190).



Figur 2.2: Instrumentell skapelse: fra artefakt til instrument. Figuren er tilpasset etter Trouche (2005, s. 144).

Instrumentalisering er en prosess knyttet til subjektets bruk av artefakten, ut fra hvordan subjektet tolker artefaktens bruksområde. Instrumentaliseringsprosessen er altså definert ut fra hvordan artefakten brukes og formes av brukeren, og den deles inn i tre ulike faser. Disse er oppdagelse og utvelgelses-, personaliserings- og transformasjonsfasen. Disse fasene karakteriseres av at subjektet først oppdager og velger seg noen hjelpemidler, personaliserer disse til eget bruk og til slutt gjør om på hjelpemidlet slik at det ikke nødvendigvis opptrer slik det var tiltenkt av dets skaper (Trouche, 2005, s. 148).

Instrumentering er på den andre siden prosessen hvor en artefakts muligheter og begrensninger (som forklares nærmere i neste seksjon) former subjektet. Instrumenteringsfasen inneholder flere faser. Selv om disse fasene er mest interessante når man er til stede for å observere et subjekts første møte med en artefakt, kan det tenkes at nye arbeidsmetoder oppstår som følge av at elevene møter nye og ukjente oppgaver eller utfordringer. Da datamaterialet innsamlet i denne studien inneholder lite slik observasjon, er det ikke interessant å gå for dypt inn på de ulike fasene. For ordens skyld nevner jeg *eksplosjons*- og *renselsesfasene*. Den første fasen involverer en metaforisk eksplosjon av nye teknikker og strategier som subjektet utforsker og prøver å koble sammen med teknikker de var kjent med fra før. Renselsesfasen inkludere å plukke ut noen av de teknikkene de lærte å bruke i eksplosjonsfasen. Andre teknikker som ikke førte til suksess blir forkastet i denne fasen (Trouche, 2005, s. 149).

2.3.3 Muligheter og begrensninger

Artefakter har to vesentlige indre egenskaper som spiller inn i byggingen av instrumenter og som er verdt å ta en nærmere titt på. Disse to egenskapene er *muligheter* og *begrensninger*. Disse to tilsynelatende selvforklarende egenskapene spiller inn på elevens konseptuelle utvikling, deres oppfatning av artefakten og måtene de velger å bruke artefakten. Mulighetene og begrensningene kan i tillegg føre til at elevene gjør endringer på artefakten og tilpasser det til oppgaven de står overfor (Drijvers & Gravemeijer, 2005, s. 168) og dette er da en del av instrumentaliseringsprosessen. Et eksempel på en mulighet er at man i GeoGebra kan løse hele oppgaver, for så å lagre løsningen i en fil på datamaskinen. De fleste håndholdte kalkulatorer har i motsetning en begrensning da den ikke kan lagre utregninger mellom ulike kalkuleringssessjoner.

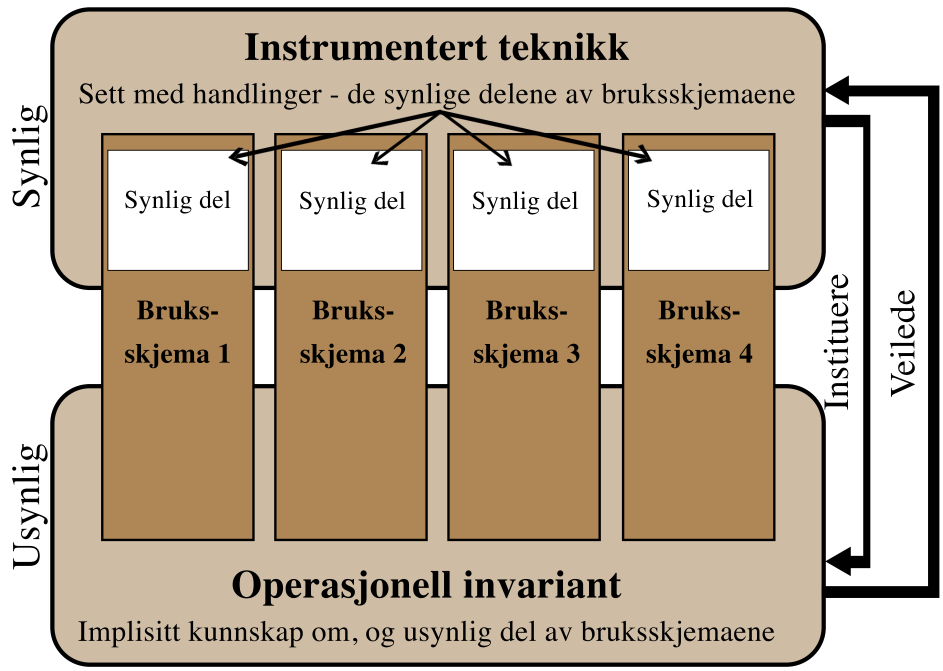
2.3.4 Mentale skjema og instrumenterte teknikker

I løpet av prosessene hvor hjelpemidlene og løsningsmetodene (som er artefakter) utvikles til instrumenter, utvikler brukeren det man kaller *mentale skjema* (mental schemes). Et mentalt skjema er den kognitive organiseringen av problemløsningsstrategiene knyttet til spesifikke problemer, konseptene og teorien som underbygger løsningsstrategiene, samt de tekniske aspektene knyttet til bruken av det aktuelle hjelpemiddelet. Det ferdige instrumentet inneholder med andre ord bare de delene av artefakten som faktisk brukes. Instrumentet involverer ikke bare artefakten, men også de mentale skjemaene som eleven (subjektet) har utviklet fra artefakten og oppgaven (Drijvers & Gravemeijer, 2005, s. 166).

Trouche (2005) og Drijvers og Gravemeijer (2005) skiller mellom utviklingen av to distinkte skjema. *Bruksskjema* (usage schemes) er grunnleggende og elementære skjema, knyttet direkte opp mot artefakten. Bruksskjema er en mental organisering av de tekniske og fysiske aspektene knyttet til artefakten (Drijvers & Gravemeijer, 2005, s. 167). Et slikt teknisk aspekt kan eksemplifiseres gjennom artefakten CAS, hvor elevene må vite hvilken av knappene i verktøylinja man må trykke på for å løse en likning.

Instrumenterte handlingsskjema (instrumented action schemes) er sammenhengende og meningsfylte mentale skjema, som bygges opp av de elementære bruksskjema gjennom instrumentell skapelse. Poenget med instrumenterte handlingsskjema er å utføre spesifikke transformasjoner på objektene som inngår i aktiviteten. Disse objektene er i matematikken ofte formler, grafer eller liknende (Drijvers & Gravemeijer, 2005, s. 167). For en observatør med interesse for instrumentell skapelse, er det problematisk at store deler av det instrumenterte handlingsskjema inneholder abstrakte og mentale aspekter. Det er vanskelig å observere, forske på og analysere disse skjemaene. Heldigvis er enkelte deler av de instrumenterte handlingsskjemaene, kalt *instrumenterte teknikker* (instrumented techniques), tett knyttet til bruksskjemaene, og er følgelig observerbare. Man ser på instrumenterte teknikker som et sett med regler og metoder som i et teknologisk miljø brukes for å løse en spesifikk type oppgave. For å få innblikk i de instrumenterte handlingsskjemaene ser man på de ytre, synlige og manifesterte delene av dem, kalt *handlinger* (gestures). Gitt at disse instrumenterte teknikkene er synlige og observerbare, gir det mening at det er de som er ankerpunktet for en analyse av instrumentell skapelse. De instrumenterte handlingsskjemaene i sin helhet eksisterer i stor grad i subjektenes indre, og er dermed uegnet for å være dette ankerpunktet.

I figur 2.3 under kan man se et eksempel på hvordan et tomt instrumentert handlingsskjema kan se ut. Selve figuren, som vil dukke opp flere ganger i denne teksten, er basert på en figur av Trouche (2005), som er videreutviklet av Nygård (2022).



Figur 2.3: Et tomt instrumentert handlingsskjema. Figuren et tilpasset etter Nygård (2022).

Bruksskjemaene er byggestene som utgjør de instrumenterte handlingsskjemaene. Den usynlige delen av det instrumentert handlingsskjemaet dannes av såkalte operasjonelle invarianter, som betegner implisitt kunnskap brukeren besitter. Det tomme skjemaet i figur 2.3 består av fire bruksskjemaer som utgjør én instrumentert teknikk. Her ser man også at de operasjonelle invariantene instituerer de instrumenterte teknikkene og de instrumenterte teknikkene til gjengjeld veileder de operasjonelle invariantene (Trouche, 2005, s. 154).

2.4 Tilbakemelding

Tilbakemeldinger har direkte innvirkninger på elevers læring. Jeg har valgt å inkludere teori om tilbakemeldinger i det teoretiske rammeverket da en sentral del av hovedartefakten Campus Inkrement dreier seg om dette.

Gjennom en omfattende syntese av flere studier og meta-studier, gjør John Hattie og Helen

Timperley jobben med å konseptualisere og modellere begrepet *feedback*. Jeg kaller dette begrepet *tilbakemelding*. På et generelt nivå sier Hattie og Timperley (2007, s. 81) dette om tilbakemelding: «In this review, feedback is conceptualized as information provided by an agent regarding aspects of one's performance or understanding». Det sies videre at tilbakemelding er en konsekvens av en prestasjon. I denne sammenhengen er prestasjonen et stykke arbeid som er levert, fremført eller på andre måter gjennomført. *Formidleren* (agenten), som nevnes i sitatet, kan for eksempel være en lærer, en medelev, en bok eller andre objekter (typiske en datamaskin) som er i stand til å gi tilbakemelding. Tilbakemeldingens hensikt er å minske avstanden mellom elevens nåværende forståelsesnivå og det nivået eleven ønsker å være på. For elevens del kan dette enten gjøres ved å legge ned større innsats eller ved å senke målene sine. Formidleren kan hjelpe til med å minske gapet ved å sørge for at tilpassede utfordringer og mål er tilgjengelige, samt tilby effektive læringsstrategier og tilpassede tilbakemeldinger.

Hattie og Timperley (2007) deler tilbakemeldinger inn i fire nivåer. Nivåene defineres ut fra hva hensikten med tilbakemeldingene er. Det første nivået fokuserer på *produktet* av arbeidet, og hvorvidt eleven har kommet frem til noe som er riktig eller galt. Det andre nivået fokuserer på *prosessen*, altså hvordan man kom frem til noe. Det tredje nivået fokuserer på *selvregulering*, altså elevers egenskap til å vurdere seg selv og regulere egen adferd for å møte sine mål. Det fjerde og siste nivået går på det *personlige*. Det vil si tilbakemeldinger (gjerne positive) som er knyttet til mottakerens person eller adferd (Hattie & Timperley, 2007, s. 86–87). Av disse er det fjerde nivået det minst effektive nivået, da fordi tilbakemeldingene gjerne bare brukes som en positiv forsterkning til en persons selvoppfatning. Tilbakemeldinger på det andre og tredje nivået, er på et generell basis, de mest effektive. Dette er fordi tilbakemeldingene på nivå to kan forbedre prosessene og følgelig brukes på senere lignende arbeider. Tilbakemeldingene på nivå tre kan øke et menneskes evne til å regulere seg selv og er følgelig anvendelig i senere situasjoner. Tilbakemeldinger på det første nivået er kraftige hvis de senere kan brukes til å forbedre selvreguleringen og strategiene som brukes i prosessen. Det bemerkes riktignok at tilbakemeldingene på det første nivået, sjeldent kan brukes til slike forbedringer (Hattie & Timperley, 2007, s. 90–91).

2.5 Andre teoretiske perspektiver og tidligere forskning

Jeg har også valgt å inkludere noen flere teorietiske perspektiver som jeg har funnet i løpet av mitt arbeid med denne oppgaven. Her er også inkludert tidligere forskning på nærliggende fenomener som kan brukes til mitt formål.

2.5.1 Skinners læringsmaskiner

Allerede på 1950-tallet utviklet den amerikanske psykologen og pedagogen Burrhus Frederic Skinner det som ble kalt *teaching machines*. Dette var et mekanisk apparat som presenterte en møysommelig opplagt løype med utfordringer for å effektivisere læringen i fag som engelsk og aritmetikk. I et vindu på maskinen ble elevene møtt med en tekststripe som kunne inneholde deler av en setning som skulle fullføres eller et matematisk problem som skulle løses. De skrev så inn den delen av setningen som manglet, eller svaret på problemet på en egen liten papirstripe. Ved å snu på en bryter avslørtes det en tekststripe i et eget vindu som inneholdt tekstsvaret eller løsningen på oppgaven (Giovanni Bonaiuti, 2011, 1:20).

Skinner presenterte i en informativ video to hovedeffekter som følger av bruken til slike læringsmaskiner. Den første var at dette førte til en rask utvikling av korrekt oppførsel. Elevene lærte seg kjapt å svare riktig. Det andre var en motiverende effekt. Elevene ble frigjort fra usikkerhet, angst og følelser knyttet til det å lykkes kontra det å mislykkes. Det å arbeide på en slik maskin skulle være fornøyelig, på en slik måte at eleven ikke behøvde å tvinge seg selv til å jobbe (Giovanni Bonaiuti, 2011, 2:06).

Skinner presenterte en av de store fordelene ved å designe et klasserom med utgangspunkt i et slikt apparat; nemlig det at elevene kunne jobbe i sitt eget tempo. En sterk elev ville kunne dekke over et kurs raskt, mens en svak elev kunne dekke over samme kurset på sine egne premisser og i sin egen tid. Poenget var at begge elevene lærte seg fagstoffet grundig. Den sterke eleven kastet ikke bort tid på å vente på at hele klassen skal ta han igjen, mens den svake eleven som ellers ville blitt tvunget til å jobbe i et tempo den ikke hadde kapasitet til slapp å falle av lasset (Giovanni Bonaiuti, 2011, 2:55).

I Skinners iterasjon av maskinlæring, ble stoffet presentert i gradvis økende kompleksitetsnivå. Hver oppgave er litt vanskeligere enn den forrige, slik at elever som fikk til en oppgave alltid skulle være i stand til å løse den neste oppgaven uten problemer. Hvert steg elevene skulle ta var alltid tilstrekkelig små, slik at det neste steget, med stor sannsynlighet, ville blitt tatt på en korrekt måte.

2.5.2 En-til-en-klasserommet

I forskningsprosjektet «På nye veier: Læremidler og digitale verktøy fra kunnskapsløftet til fagfornyelsen» setter Øystein Gilje seg mål om å undersøke undervisning med læremidler og digitale verktøy i en-til-en-klasserommet. Gilje (2021) definerer en-til-en-klasserom som: «Klasserom der hver elev har fått tildelt sin egen digitale enhet fra skoleeier som de bruker i det fysiske klasserommet og som de kan ta med seg hjem» (s. 229). De videregående skolene i Norge har i over ti år operert med slike klasserom. Dette skyldes trolig loven som sier at fylkeskommunen har et økonomisk ansvar overfor elevene i videregående opplæring om å dekke utgifter til læremidler og utstyr (Forskrift til opplæringslova, 2006, §16-4). Herunder følger det at elever i videregående skal få tilbud om en datamaskin til en pris som tilsvarer tre ganger den laveste satsen på utstyrsstipendet fra Lånekassen.

Gilje (2021) begynner artikkelen med å vise til tidligere studier gjort i en-til-en-klasserom, hvor det har vært mer fokus på papirbaserte læremidler enn på digitale læremidler og verktøy, selv om dette digitale klasserommet fører med seg en betraktelig økning i bruk av digitale verktøy (Gilje, 2021, s. 228). Videre peker han på tre strukturelle og økonomiske utviklingstrekk som har lånt sitt bidrag til å endre læremiddelkulturen i skolen det siste halvannet tiår. Det første av disse tre utviklingstrekkene er som tidligere nevnt etableringen av en-til-en-klasserommet, som alt er fullført på VGS, og tilnærmet fullført på grunnskolen. Det andre utviklingstrekket er knyttet til den økonomiske omsetningen av trykte og papirbaserte læremidler samt digitale læremidler. De rapporterte tallene avslører at omsetningen av digitale læremidler har blitt like stor som omsetningen av papirbaserte læremidler. Det tredje, og for meg viktigste, utviklingstrekket forteller at EdTech-selskaper (slik som Inkrement AS, utviklerne bak Campus Inkrement) også har opplevd en betydelig vekst i omsetning (Gilje, 2021, s. 229–230).

2.5.3 Innovativ utdanning i matematikk

Et forskningsprosjekt fra NTNU med matematikk-professorer i spissen satte et mål om innovere undervisningen i faget for å øke læringsutbyttet til studentene. Forskningsprosjektet kalles *Kvalitet, tilgjengelighet og differensiering i grunnutdanningen i matematikk* (KTDiM) (NTNU, 2022) og deler noen likhetstrekk med mitt prosjekt.

Den første likheten kommer i form av Maple T.A., som er et et system for elektronisk innlevering og vurdering av øvinger. Øvingsopplegget til NTNU krever at man leverer og får godkjent et visst antall øvinger før man får lov til å gå opp til eksamen i et emne. I emnene matematikk 1 og matematikk 2, ble såkalte Maple-øvinger brukt. I en artikkel presenterer Rønning (2015) noen foreløpige funn fra prosjektet. Et av funnene oppsummeres i følgende sitat: «Den store styrken til Maple T.A., sett fra studentenes side, synes å være at de får rask respons på om svaret er rett eller galt, men her ligger også en stor svakhet». Svakheten viser seg å være at studentene som avgir gale svar ikke aner hvorfor svaret ikke godkjennes. De gis ingen antydning til om det skyldes unøyaktig avrunding eller feil fremgangsmåte. En særdeles stor prosentandel av studentene kjenner seg igjen i denne problematikken. Maple T.A. har i senere tid blitt forbedret til å kunne gjenkjenne matematisk ekvivalente svar. En student vil med andre ord få delvis riktig på en oppgave ved å svare $\frac{6}{2}$, når fasiten er 3 (Rønning, 2017, s. 96).

Maple T.A. har også gjort det vanskeligere for studentene å kopiere hverandres svar, da systemet generer ulike tall til de ulike studentene. Fremgangsmåten vil fremdeles være den samme for alle studentene, men skal man kopiere må man i det minste ha en samtale om metode først. Dette fremmer konstruktivt samarbeid og utveksling av metoder heller enn utveksling av bare sluttsvarene (Rønning, 2017, s. 96).

Den andre likheten kommer i form av innspilte forelesninger. Dette er altså opptak av forelesninger som blir lagt ut for at studentene kan følge undervisningen hjemmefra eller til å repetere. En betraktelig mindre andel av studentene svarer at de benytter seg av videoforelesningene i forhold til forelesningene «live» i et auditorium. Det virker som at studentene foretrekker å være til stedet i forelesingene, selv om de ikke nødvendigvis lærer best av å være der. De som svarer at de bruker videoforelesningene avslører at de sjeldent ser en hel video, men heller spoler frem til den delen av forelesningen som er av interesse for dem.

I nyere tid har NTNU gått vekk fra Maple T.A. og startet å bruke STACK: et vurderingssystem utviklet i Storbritannia, som er veldig brukervennlig og tilpasset universitetsmatematikken. Sangwin (2013) beretter om STACK og mulighetene som systemet tilbyr. Systemet er i stand til å gi tilpassede tilbakemeldinger og hint. I tillegg vil systemet ta brukerens input og tolke det. Brukeren vil da bli vist et sitt input i LaTeX. På denne måten kan brukeren bekrefte eller avkrefte om dette var svaret den ønsket å avgi.

Gitt en oppgave som ber brukeren om å presentere et eksempel på en funksjon f, hvor $f(3) = 4$ og som er ikke-deriverbar i $x = 0$. Systemet kan ta et svar og avgjøre om ingen, ett eller begge kriterier er møtt og ut fra dette gi en tilpasset tilbakemelding til brukeren (Sangwin, 2013, s. 4).

Kapittel 3

Metode

I dette kapittelet vil jeg beskrive de metodene som ble brukt til innsamling og analysering av datagrunnlaget til denne oppgaven. Jeg vil først beskrive hva et fleksibelt design er og hva en case-studie er.

3.1 Fleksibelt design

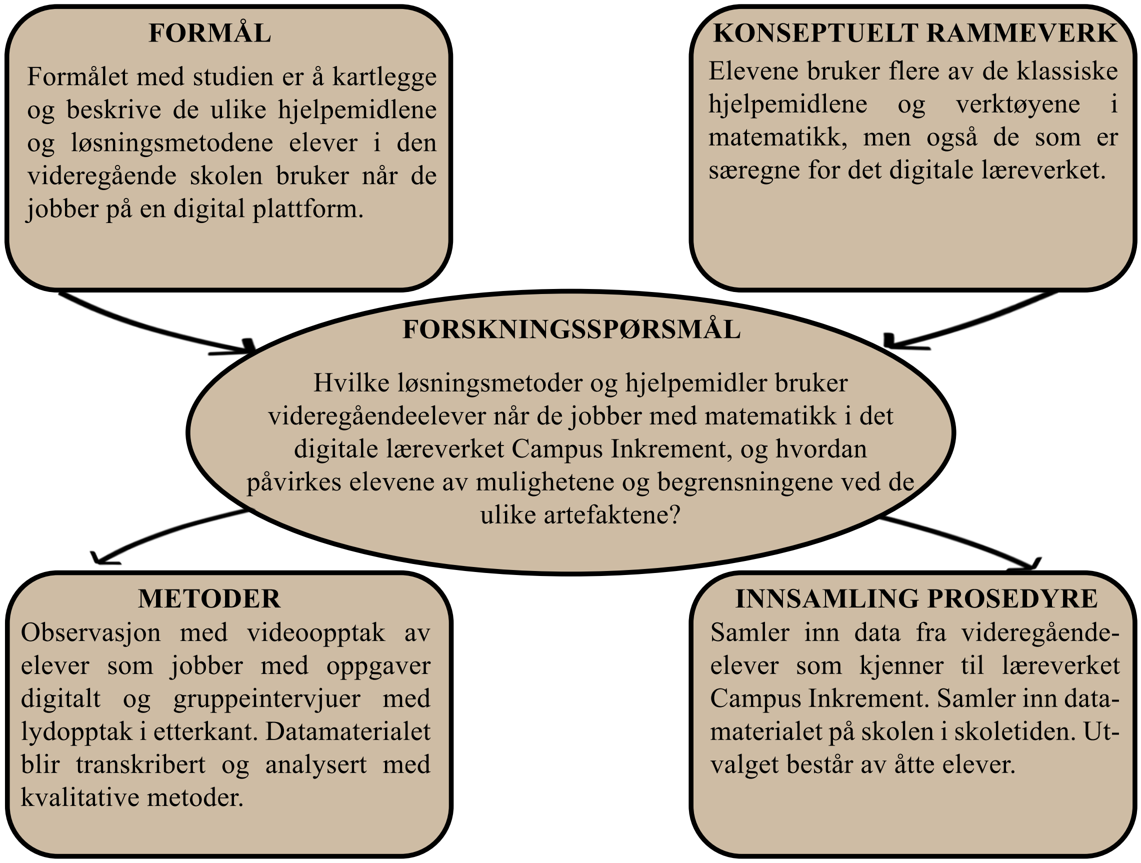
Et fleksibelt design karakteriseres av Robson og McCartan (2016) som et design som gjerne inkluderer flere kvalitative teknikker for å samle inn data, er konstant under utvikling, presenterer flere virkeligheter, bruker forskeren aktivt som et instrument for innsamling av data og fokuserer på respondentenes synspunkter (s. 147).

3.2 Hva er en case-studie?

En case-studie er et sett med metoder for å bedrive forskning på, som har som mål å analysere, beskrive og/eller forklare kompleksiteten og unikheten til en spesifikk case. En case kan være så mangt. Det kan blant annet være en person, et klasserom, en institusjon, et program eller et system. Case-studier er grunnet i forskning og evidensbasert og legger opp til bruk av flere metoder (Simons, 2009, s. 21).

Simons (2009) beskriver case-studier som «the process of conducting systematic, critical inquiry into a phenomenon of choice and generating understanding to contribute to cumulative public knowledge of the topic» (2009, s. 18).

Figur 3.1 visualiserer tankene bak oppbygningen til denne studien. Figuren er basert på et fore-



Figur 3.1: Rammeverket for forskningsdesignet. Figuren er tilpasset etter Robson og McCartan (2016, s. 73).

slått rammeverk fra Robson og McCartan (2016, s. 72). De fem komponentene danner et flytskjema som starter med formålet og det konseptuelle rammeverket for studien. Fra dette danner man seg ett eller flere forskningsspørsmål som videre veileder valget for hvilke metoder og innsamlings-strategier som er best egnet for å besvare dette/disse. *Formålskomponenten* forteller om hva man som forsker setter seg som mål å undersøke, hva man ønsker å avdekke, forklare eller beskrive samt hva man ønsker å endre som resultat av studien. I en case-studie, vil formålet definere hva casen som skal undersøkes er. *Konseptuelt rammeverk-komponenten* forteller om forskerens hypoteser og teorier om hva som foregår, hva som skjer og hvorfor dette skjer. Her beretter man om de ulike aspektene og funksjonene som inngår i forskningsobjektet/casen, samt hvordan disse relaterer til hverandre. *Forskningsspørsmålkomponenten* tar utgangspunkt i de to tidligere nevnte komponentene og stiller spørsmålene som man er ønsker å finne svar på innenfor studiens tids- og ressursrammer. *Metodekomponenten* tar for seg spesifikke teknikker for innsamling og analyse av datamateriale. *Innsamling prosedyre-komponenten* beskriver de ulike utvalgene av respondenter og praktiske anliggende tilknyttet innsamling av datamateriale, slik som hvor og når, samt hvordan man kan balansere riktig mengde data med brukbare data.

3.3 Hva er casen?

Casen som skal studeres er det digitale læreverket Campus Inkrement og elevene som bruker det. Dette er i seg selv en stor case, slik at jeg måtte velge meg ut noen få innfallsvinkler å belyse om gangen. Innfallsvinklene som belyses i denne oppgaven er løsningsmetoder og hjelpemidler som brukes av elever når de jobber med matematikkoppgaver på de digitale læreverket Campus Inkrement.

3.4 Opprette kontakt med respondentene

3.4.1 Utvalg 1 - Utvikler av digitalt læreverk

Fra tidligere forsøk på å forske på digitale læreverk ble det lagt merke til at unøyaktig begrepsbruk førte til flere misforståelser mellom forsker og respondenter. Som et preventivt tiltak mot at dette skulle skje igjen, tok jeg kontakt, via e-post, med en utvikler av et digitalt læreverk og ba om et intervju. Vedkommende har ansvarsoppgaver knyttet til utviklingen av Cappelen Damms digitale læreverk coSinus og var kjent for meg gjennom en konsulentjobb knyttet til dette læremidlet. Han sa gladelig ja til å bli med på et intervju.

3.4.2 Utvalg 2 - Elever som bruker digitale læreverk

Da jeg i starten av prosessen jobbet med å formulere forskningsspørsmålet mitt, ble det klart for meg at elever ville spille en svært stor rolle i prosjektet. For å maksimere sjansen for å oppdage pålitelige resultater var det viktig å inkludere elever i genereringen av datamaterialet. Når denne tankerekken ble om til et faktum, startet søken for å finne elever som var

- godt kjente med ett eller flere digitale læreverk
- villige til å avse opptil to skoletimer for å delta i et forskningsprosjekt
- under opplæring i et videregående matematikkurs i Trondheimsområdet.

For å skaffe elevrespondenter sendte jeg ut e-post til to matematikklærere ved en videregående skole. Disse to lærerne hadde jeg blitt kjent med i ulike situasjoner tilknyttet min egen opplæring på lektorstudiet. Fra tidligere forskning visste jeg at disse lærerne brukte digitale læreverk i undervisning og som konsekvens underviste elever som innehadde den innsikten jeg søkte etter. Den ene læreren informerte meg om at hen ikke underviste noen klasser i matematikk den aktuelle våren, og sendte meg følgelig videre til en kollega. Denne kollagen samt den andre opprinnelige mottakeren av min e-post ga sin tillatelse til å la meg gjennomføre forskning i deres klasser. På mine vegne inviterte de sine elever til å være med i forskningsprosjektet. Dette resulterte i at jeg hadde åtte elever som alle oppfylte de tre kravene ovenfor. Fire elever var fra et 1T-kurs og fire elever var fra et R1-kurs. De fire elevene fra R1-kurset hadde jeg undervist ett år tidligere i en obligatorisk praksisperiode i regi av lektorstudiet. De fire elevene fra 1T-kurset var ukjente for meg.

3.5 Metoder for datainnsamling

Datagrunnlaget for denne masteroppgaven består av flere ulike modale og multimodale uttrykk, hvorav lyd og bilde er fremtredende. Metodene som brukes er kvalitative, da dette tillater meg å kunne si noe spesifikt ut fra den lille gruppen respondenter.

For de to utvalgene med respondenter skjedde innsamlingen av data i tre distinkte steg. Det første steget innebar ett semistrukturert intervju med Reodor fra utvalg 1. Dette ble gjennomført midt i januar, via et digitalt møte på Microsoft Teams. Intervjuet hjalp meg å sette presedens for begrepsbruken i resten av innsamlingsprosessen og for oppgaven i sin helhet. Den viktigste lærdommen fra dette intervjuet ble samlet og presentert i form av en taksonomi over digitale tjenester (se seksjon 2.1). Informasjonen innsamlet fra dette intervjuet vil ikke analyseres på lik linje som resten av det innsamlede datamaterialet.

Steg to av datainnsamling skjedde i uke 6, hvorpå jeg dro på besøk til den videregående skolen der respondentene fra utvalg 2 er elever. På dette besøket ble det gjennomført en observasjon assistert av et videokamera. De åtte elevene ble hentet ut i par hvorpå de ble møtt med et tilpasset sett med oppgaver fra det digitale læreverket Campus Inkrement. Mens de jobbet seg gjennom oppgavene på en datamaskin ble det gjort videoopptak av det som skjedde på skjermen, samt lydopptak av elevenes matematiske samtaler og reaksjoner. Dette steget la grunnlaget for det som skulle bli tatt opp i det siste steget.

Steg tre av datainnsamlingen skjedde i uke 9 og uke 10. Da returnerte jeg til den videregående skolen for å gjennomføre to fokuserte gruppeintervjuer med respondentene. Spørsmålene ble stilt etter en analyse av videoopptakene fra steg to, og var en invitasjon til elevene om å reflektere rundt det de hadde gjort forrige gang. Én elev blant de åtte kunne ikke være til stedet under gruppeintervju.

3.5.1 Semistrukturert enkeltintervju

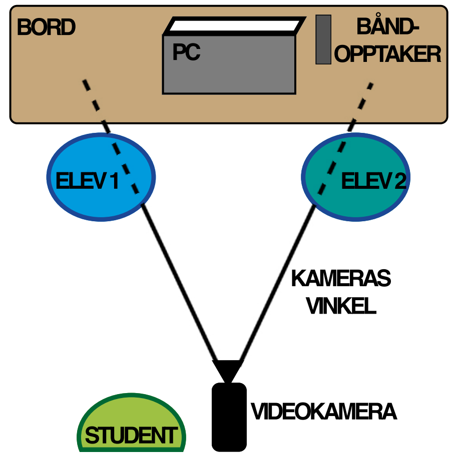
I anledning intervjuet med Reodor fra utvalg 1 satt opp et digitalt møte på Microsoft Teams. Intervjuet var av typen semistrukturert, som involverer en egen metode. Denne metoden vil jeg beskrive i seksjon 3.5.3. Intervjuobjektet var en av utviklerne bak det digitale læremidlet coSinus, et faktum som gjør vedkommende til en langt mer kunnskapsrik person på dette temaet enn meg som nylig har begynt å studere det.

Under intervjuet ble Reodor spurt om hvilket pedagogisk- og didaktisk grunnsyn utviklingsteamet hadde anvendt under utviklingen av coSinus. Selv om han svarte veldig godt for seg på dette spørsmålet, kunne svaret ikke brukes aktivt i masteroppgaven, da den snevret seg inn på å forske på Campus Inkrement, en konkurrent av coSinus. Det som, på den andre siden, ble inkludert var de lange og nyanserte definisjonene av begrepene digitale verktøy, digitale læremiddel og digitale læreverk.

Intervjuet ble en nødvendig start på et semesterlangt prosjekt. Det gjorde en viktig jobb med å definere de hyppigst brukte begrepene i forskningen og oppgaveskrivingen. Intervjuguiden for dette intervjuet kan sees i vedlegg A.

3.5.2 Videoopptak

En viktig del av datamaterialet som behandles i denne oppgaven kommer fra videoopptak av videregåendeelever som jobber med oppgaver i det digitale læremidlet Campus Inkrement. Som nevnt i seksjon 3.4.2 har jeg forsket på åtte elever, fordelt på fire par, som jobbet med et håndplukket sett med oppgaver hentet fra det digitale læremidlet de var mest vant med. Elevene i 1T-kurset jobbet med oppgaver om formler, funksjoner og likninger mens elevene i R1-kurset jobbet med oppgaver om vektorer. Oppgavene de jobbet med var hentet fra temaer de hadde jobbet med i klassen i nær fortid. Til å velge ut oppgavene fikk jeg hjelp av faglæreren til elevene, slik at vanskelighetsgraden var passende. Ingen av eleven hadde jobbet med disse spesifikt utvalgte oppgavene tidligere, men skulle (ifølge fremdriftsplanen til klassen) være i stand til å løse dem. Et faktum som kan være verdt å merke seg er at elevene i R1-kurset skulle ha en summativ prøve under en uke senere, hvor oppgavene de jobbet med var høyaktuelle. Dette kommer tydelig frem, da de hadde god kontroll på de fleste oppgavene som ventet dem. Elevene ble plassert på et mindre grupperom, vekk fra resten av klassen. Det ble gjort slik både av etiske og praktiske årsaker. Oppsettet for denne delen av datainnsamlingen kan sees i figur 3.2.



Figur 3.2: Oppsett for videoopptak. Sett ovenfra.

Fenomenet som studeres er i stor grad det som skjer på skjermen til elevene, og i liten grad hva de skriver i kladdeboka. Av den grunn ble kamera satt opp på en slik måte at det filmet skjermen. I de periodene hvor ingenting skjedde på skjermen ble kamera zoomet ut for å inkludere elevene og deres eventuelle aksjoner og gestikulasjoner. På denne måten kunne man plukke opp hjelpemiddelbruken til elevene, herunder lærebøker, håndholdte kalkulatorer og lignende. Når kamera ikke behøvde justering, brukte jeg tiden på å notere ned hva elevene gjorde og hva de sa. For å sikre at lyden i rommet ble fanget opp med tilstrekkelig høy kvalitet ble en båndopptaker plassert på bordet foran elevene.

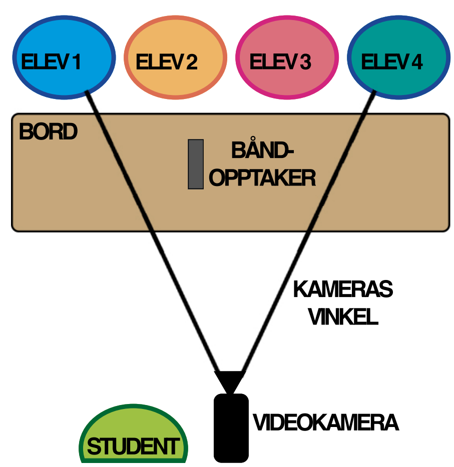
Under alle opptakene var kameraet plassert på et fiksert punkt i rommet og var rettet mot objektet i rommet som var av størst interesse, i dette tilfellet elevenes PC-skjerm. Slik fjernes noe av oppmerksomheten fra bakgrunnen og retter mer detaljert oppmerksomhet mot hovedmotivet. Som tidligere nevnt var det elevenes PC-skjerm (og det som skjedde digitalt) som var av størst interesse, og dermed hovedmotivet. En slik bildeutsnitt kaller Bjørndal (2017) et «halvtotalbilde». Ved å sette kameraet bak elevens rygg ble den forstyrrende faktoren som oppstår når man vet at man blir filmet minsket, og de kunne enklere fokusere på oppgavene foran dem.

3.5.3 Gruppeintervju

Fra steg 2 i datainnsamlingen til steg 3, gikk det nærmere fire uker. På denne tiden er det rimelig å anta at elevrespondentene har begynt å glemme detaljene rundt det som skjedde i steg 2. Når jeg returnerte til skolen for å gjennomføre intervjuer var det viktig å sørge for at elevene ble påminnet om hva de gjorde sist.

Planen for gruppeintervjuene var å samle alle fire elever fra 1T-kurset til et intervju og alle fire elever fra R1-kurset til ett annet, men tilsvarende intervju. Fra 1T-kurset var alle fire elever til stede under gruppeintervjuet, mens det bare var tre av fire elever fra R1-kurset som var til stede. Selv om dette ene fraværet potensielt fjernet ny og interessant innsikt fra datagrunnlaget mitt, anser jeg det som akseptabelt at det var minst én elev fra hvert par til stede for å utdype og oppklare funnene fra steg 2.

Oppsettet av opptaksredskaper for dette steget minner veldig om oppsettet fra steg 2. Elevene satt på en rekke med en båndopptaker midt på rekka. Et videokamera ble også satt opp og vendt mot elevene. Se figur 3.3 for et overblikk. Med dette oppsettet kunne jeg sørge for at kvaliteten på lyden ble god nok til å høre alt som ble sagt i tillegg til at jeg under transkribering kunne se på videoopptaket for å være sikker på at de ulike utsagnene ble kreditert til riktig elev. Dersom jeg ikke hadde hatt videoopptaket å støtte meg på kunne det blitt vanskelig å skille stemmene til elevene fra hverandre, noe som hadde gått på bekostning av validiteten og påliteligheten av på resultatene.



Figur 3.3: Oppsett for gruppeintervju. Sett ovenfra.

Robson og McCartan (2016, s. 298–300) beskriver slike grupper av respondenter som fokusgrupper. Noen av fordelene med å gjennomføre intervju i slike fokusgrupper er at:

- det er en effektiv måte å samle inn store mengder kvalitative data, siden man har flere respondenter til stede samtidig

- deltakernes egenskap til å sette egne ord på ting kan styrkes i en slik gruppe og stimuleres av andres innspill og tanker
- respondentene deltar som en naturlig kvalitetskontroll, da de arresterer hverandre på, og luker ut, de mest ekstreme utsagnene.

Det er også noen ulemper som er verdt å nevne om bruken av fokusgrupper, blant annet at:

- intervjuet må styres på en slik måte at ingen sterke personligheter overstyrer de mindre artikulerte i gruppa
- resultatene kan være vanskelige å bruke til å generalisere. Et såpass lite utvalg kan umulig representere hele populasjonen

Når det kommer til gruppestørrelse og gruppekomposisjon, foreligger det flere ulike syn blant forskere. Der hvor noen ville anbefalt å intervjue en gruppe på seks til ti respondenter, ville noen andre anbefale åtte til tolv. Her gjorde jeg valget om å ha grupper på bare fire respondenter. Denne inndelingen ga meg to homogene grupper av elever med en felles bakgrunn og erfaring. Bruken av homogene grupper fremmer god kommunikasjon, utveksling av ideer og trygghet blant gruppens medlemmer (Robson & McCartan, 2016, s. 301). Da tenker jeg spesifikt på at elevene kommer fra samme matematikkurs og har jobbet med de samme oppgavene i det foregående steget av datainnsamling. Datainnsamling i form av fokusgrupper kan være primærkilden til data, men slik som i mitt tilfelle, brukes det oftest i kombinasjon med andre typer data som observasjon (Robson & McCartan, 2016, s. 301).

Selve intervjuet var semi-strukturert. Det vil si at jeg hadde forberedt meg på intervjuet ved å lage en intervjuguide, med spørsmål, prober og prompts, men utøvde allikevel en stor frihet rundt tidsbruk, rekkefølge og ordlyd på spørsmålene. Selv om begge gruppene ble stilt det samme spørsmålet, la jeg som forsker og intervjuer ingen føring på hvilken retning samtalen dro i. Som intervjuer gjorde jeg bare det jeg måtte for å holde samtalen i gang og stoppet den bare dersom den endte opp på et sted som var helt irrelevant for det opprinnelige spørsmålet.

Da jeg satte meg ned med elevene i denne intervjusituasjonen ønsket jeg at de selv skulle reflektere over deres egne meninger og holdninger knyttet til egen hjelpemiddelbruk og til det digitale læreverket. De forberedte spørsmålene og probene ble formulert på en slik måte at de skulle være en invitasjon til å reflektere. Tjora skriver dette om intervju som metode:

> Målet med dybdeintervjuer er i hovedsak å skape en situasjon for en relativt fri samtale som kretser rundt noen spesifikke temaer som forskeren har bestemt på forhånd. Ved å skape en avslappet stemning og en noenlunde romslig tidsramme [...] er det meningen å få informanten til å reflektere over egne erfaringer og meninger knyttet til det aktuelle temaet for forskningen. (Tjora, 2018, s. 113)

Intervjuene fulgte rekkefølgen presentert av Robson og McCartan (2016, s. 290). Først en introduksjon, i mitt tilfelle en re-introduksjon for å minne respondentene på deres rettigheter og for å be om tillatelse til å gjøre nye opptak. Deretter stilte jeg respondentene noen få oppvarmingsspørsmål. Dette gjør man for å forberede respondentene på å snakke og for å ufarliggjøre situasjonen som, for dem, kan være uvant. Når respondentene har fått varmet opp stemmebåndene går intervjuet videre til hovedbolken av spørsmål. I dette steget, stiller man alle de spørsmålene man ønsker og trenger svar på. Her ble tatt opp ulike fenomener observert i steg 2 av datainnsamlingen, og elevene ble invitert til å reflektere rundt det de gjorde da. For hvert intervju ble det skrevet ut og utdelt skjermbilder av noen oppgaver de hadde jobbet med. På disse oppgavene hadde elevene enten gjort, sagt eller hintet til noe av interesse for forskningen. Det fjerde steget i intervjurekkefølgen innebærer å «kjøle ned» respondentene. Her kan man ta tak i eventuelle løse tråder eller spørre respondentene rett ut om de ønsker å komme med noen avsluttende kommentarer. Det siste steget innebærer å runde av intervjuet, dette gjør man gjerne ved å takke respondentene for deltakelsen og sende dem på dør.

3.6 Metoder for analyse av datamaterialet

Metodene som brukes er både deduktive og induktive. Fra det teoretiske rammerverket har jeg funnet flere begreper (slik som begrensninger, muligheter og instrumenterte teknikker) som jeg anvender på, og letter etter i datamaterialet. På denne måten bruker jeg deduktive metoder. Ut fra datamaterialet finner jeg hjelpemidler og løsningsmetoder som er eksempler på artefakter og instrumenter. Disse knyttes opp mot teorien om disse begrepene. På denne måten bruker jeg induktive metoder. Robson og McCartan (2016) kaller en slik fremgangsmåte, som bytter på å være deduktiv og induktiv for *abduktiv resonnering* (abductive reasoning). Man beveger seg altså ikke bare fra teori til observasjon eller fra observasjon til teori, men blander ulike tilnærminger for å forklare egenarten til dette åpne systemet.

3.6.1 Transkripsjon og sammendrag

Før en faktisk analyse av datamaterialet kunne skje var det hensiktsmessig å gjøre de fire videoopptakene og de to elevintervjuene og det ene utviklerintervjuet om til ren tekst. Dette gjorde jeg gjennom transkripsjon. Med utgangspunkt i John W. Du Bois (1991) satte jeg meg ned for å bearbeide rådataene. I appendikset til artikkelen lister Du Bois opp symbolene han bruker for å transkribere en diskurs. Da mange av symbolene brukes for å beskrive tonefall, trykk og hastighet i tale, som er overflødig informasjon for min egen analyse, bruker jeg bare et lite knippe symboler i min egen transkripsjon. Jeg benytter meg av ett egendefinerbart symbol: Tilde-symbolet (~) brukes for å beskrive aksjoner eller gestikulasjoner som ble plukket opp med videokamera. Eksempelvis brukes dette symbolet for å beskrive når respondenter nikker i enighet i stedet for å ytre sin enighet muntlig. Tabellen nedenfor inneholder tegnene som ble brukt til transkripsjon til denne oppgaven.

Taler identitet	:
Tale overlapp	[ ]
Kort pause	..
Lang pause	...
Latter	@
Kommentar fra forsker	(( ))
Aksjon/gestikulering	~ ~
Sitat	« »

Tabell 3.1: Tegnene er basert på systemet til John W. Du Bois (1991).

Transkripsjonen var er gylden mulighet for meg å bli kjent med datamaterialet jeg var i besittelse av. I dette steget ble også alle respondentene gitt pseudonymer. All rådataene ble trygt oppbevart på en ekstern harddisk som jeg fikk lånt av NTNU.

Jeg laget også sammendrag av alle opptakene slik at jeg enklere kunne ha kontroll over hva jeg hadde å jobbe med. For videoopptakene ble det fokusert på hvilke hjelpemidler som ble anvendt og hvilke oppgaver som bød på størst utfordringer. Slike sammendrag faller innenfor kategorien av *document sheets* som blir beskrevet av Robson og McCartan (2016, s. 467).

3.6.2 Valg og bortvalg av artefakter

På dette stadiet ble datagrunnlaget gjennomgått flere ganger og en rekke utvalg ble skapt. Et utvalg bestod av et sett med eksterne hjelpemidler. Det vil si hjelpemidler som ikke er knyttet til selve læreverket Campus Inkrement. Et annet utvalg bestod av et sett med løsningsmetoder. Dette utvalget ble kortet ned til én enkelt løsningsmetode, da det viste seg å være lite fruktbart å inkludere flere metoder. Disse utvalgene ble skapt med et mål om å kunne skrive den rikeste mulige analysen. De tre interne hjelpmidlene fasit, videoleksjon og automatisk tilbakemelding ble valgt på forhånd.

Den rutinerte matematikkdidaktiker eller lærer vil trolig bemerke seg et viktig hjelpemiddel er fraværende. I analysekapittel 7 vil man ikke møte på hjelpemidlet GeoGebra. GeoGebra er unnlatt fra analysen, selv om det ble observert i bruk, fordi det ikke ble brukt på noen måter som hadde gitt en fruktbar analyse. På flere av oppgavene som elevene jobbet med hadde GeoGebra, enten grafikkdelen eller CAS-delen, vært svært anvendelig, men i disse tilfellene ble andre hjelpemidler brukt i stede.

3.6.3 Analyser

For å hjelpe til med analysene har jeg inkludert flere utdrag fra observerte elevdialoger. Disse er både hentet fra videoopptakene og fra intervjuene, og er viktige for å underbygge mine foreslåtte svar på forskningsspørsmålet. Det vil også inkluderes utdrag fra oppsummeringene som ble skrevet tidlig i prosessen. Disse utdragene inkluderes for å belyse perspektiver som ikke ble formidlet med ord, men med aksjoner og gestikulasjoner.

Faglig føranalyse av oppgaver

I seksjon 4.1 går jeg systematisk gjennom de 10 utvalgte oppgavene som jeg vurderte til å gi det rikeste grunnlaget for å besvare forskningsspørsmålet. For hver oppgave presenterer jeg de mest fremtredende matematiske konseptene som er til stede og de egenskapene som er av interesse for å løse oppgaven. På hver oppgave har jeg laget ett eller flere løsningsforslag basert på lærebøkene i det aktuelle faget eller videoleksjonene på Campus Inkrement. Disse løsningsforslagene skal være tilpasset nivået i faget, og inkludere noen av de mest effektive fremgangsmåtene. Det er en overvekt av oppgaver fra 1T-kurset. Dette skyldes at oppgavene fra 1T var mye mer varierte og rike enn oppgavene fra R1.

Analyse av elevenes arbeid med matematikkoppgaver

I seksjon 4.2 går jeg gjennom datamaterialet som ble samlet inn under videoopptak og beskriver hva elevene gjør på de utvalgte 10 oppgavene. Her settes søkelyset på hjelpemidlene de velger å bruke og hvilke løsningsmetoder de velger å sette ut i livet. Denne beskrivelsen gir innsikt i prosesser (som instrumentaliserings- og instrumenteringsprosessene) elevene ubevisst går gjennom og er nyttig for analysene som starter i det påfølgende kapitlet. Også i diskusjonen er disse beskrivelsene nyttige.

Analyse av hjelpemidler og løsningsmetoder

I disse tre kapittelene skal søkelyset endelig settes på hjelpemidlene og løsningsmetodene. I kapittel 6 er det de tre interne hjelpemidlene som er spesifikt inneholdt i Campus Inkrement som blir plassert under lupen. I kapittel 7 ser jeg på bruken av de eksterne hjelpemidlene som eksisterer uavhengig av om man jobber med oppgaver digitalt eller på en mer tradisjonell måte. I kapittel 8 analyseres én løsningsmetode; andregradsformelen.

Det teoretiske rammeverket som består av teorien om instrumentell genesis og tilbakemeldingsteori, vil være viktig i disse kapitlene. Hvert artefakt gis et eget delkapittel, som igjen deles inn i mindre seksjoner. De fleste artefaktene blir delt inn i tre seksjoner som går ut på å belyse mulighetene, begrensningen og de instrumenterte teknikker knyttet til det. I de tilfelle hvor ingen instrumenterte teknikker ble observert inkluderes det ikke en slik seksjon. Artefakten Campus Inkrement, som er særdeles stort og sammensatt, blir først delt inn etter de tre ulike interne hjelpemidlene. Hvert interne hjelpemiddel deles så inn etter muligheter, begrensninger og instrumenterte teknikker.

De mest interessant instrumenterte teknikkene blir visualisert i form av et instrumentert handlingsskjema.

3.7 Etiske perspektiv

Når man tar på seg rollen som forsker ender man opp i en posisjon med mye makt. Med stor makt, må det alltid følge et stort ansvar. Som forsker har man et særskilt ansvar overfor alle parter, personer og institusjoner involvert i forskningen. Spesielt viktig er det å overholde de løfter man gir til sine respondenter. Lover man anonymitet og trygg oppbevaring av personlige opplysninger er det uakseptabelt å ikke innfri dette.

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, forkortet NESH, publiserte i slutten av 2021 et revidert sett med forskningsetiske retningslinjer. Overfor deltakerne i mitt prosjekt og jamfør disse retningslinjene har jeg satt i stand flere tiltak for å «respektere deres menneskeverd og ta hensyn til deres personlige integritet, sikkerhet og velferd» (NESH, 2021, s. 17).

Beskyttelse av respondentenes identitet

For respondentenes anonymitet, oppgavens leselighet og leserens fornøyelse har jeg gitt de åtte elevrespondentene pseudonymer. *Pseudonymisering*, som denne strategien kalles, svekker forbindelsen mellom opplysningene og personen de kommer fra. Det eksisterer en koblingsnøkkel som kan knytte pseudonymene til personene. *Anonymisering*, som er en kraftigere strategi, hadde fjernet koblingen mellom person og informasjon helt (NESH, 2021, s. 21). Typen data jeg innhentet gjorde anonymisering til en ugunstig strategi å bruke.

Pseudonymene jeg har valgt, reflekterer hverken respondentenes kjønn, etnisitet, kunnskapsnivå eller andre parametere. På denne måten skal ingen respondenter være identifiserbare. I et forsøk på å reflektere respondentenes rolle som elever samt matematikkens magiske natur, har hver og en av dem fått et pseudonym fra en elev ved den fiktive magiskolen Galtvort. Par 1 fra 1T-kurset går heretter under pseudonymene Patrea og Draco. Par 2 fra 1T-kurset går heretter under pseudonymene Grylius og Vincent. Par 1 fra R1-kurset går heretter under pseudonymene Hermine og Lavendel. Par 2 fra R1-kurset går heretter under pseudonymene Harry og Ronny.

Den ene respondenten fra utvalg 1 har fått pseudonymet Reodor; et navn som reflekterer vedkommende sin rolle som utvikler og oppfinner av nye løsninger.

Samtykke

Det foreligger en etisk hovedregel om at alle deltakere i forskning skal gi sitt samtykke til å være med. Det forskningsetiske samtykket skal være frivillig, informert og utvetydig. Selv om forskningen ikke innhenter personlige- eller sensitive opplysninger om deltakerne, skal samtykke innhentes. Potensielle deltakere skal ikke utsettes for et ytre press eller fare for konsekvenser knyttet til deres deltakelse i forskning. De skal inviteres på så nøytralt vis som mulig (NESH, 2021, s. 17).

Reodor; den ene respondenten fra utvalg 1 ble informert om prosjektet og sine rettigheter digitalt på e-post. Han ble også sendt et samtykkeskjema på e-post. Dette skjema ble underskrevet på et senere tidspunkt da vi møttes fysisk. Dette samtykkeskjema kan sees i vedlegg D.

I praksis ble de åtte elevrespondentene spurt av sin faglærer om de var villige til å delta i mitt prosjekt, noe de aksepterte. Da jeg møtte dem til datainnsamling ble de informert muntlig om de viktigste rettighetene de hadde som deltakere. De ble også gitt et informasjonsskriv med detaljert informasjon om deres rettigheter samt, kontaktinformasjon til personvernombudet på NTNU, veilederen for denne oppgaven, NSD og meg selv. De signerte så et samtykkeskriv. Dette skrivet kan sees i vedlegg E.

Konfidensialitet og taushetsplikt

Når en forsker lover, slik som jeg lovte, sine respondenter konfidensialitet er det veldig viktig å overholde dette løftet. Dette løftet innbærer en forsikring om at all informasjon fra forskning skal behandles på en fortrolig måte og ikke formidles på måter utover det som står i avtalen eller til folk som ikke er nevnt i avtalen (NESH, 2021, s. 21–22).

Siden det ikke eksisterte noen taushetsbelagte forhold mellom respondentene og det aldri ble oppgitt konfidensiell informasjon som gjelder eventuelle mennesker respondentene hadde taushetsplikt overfor ble det aldri nødvendig å sikre dispensasjon fra å samle inn og bruke slik informasjon.

Lagring og deling av forskningsmateriale

Da det ble klart hvilken type datamateriale som trengtes for å besvare forskningsspørsmålet ble det også klart at det måtte lagres på en smart måte. Råmaterialet, som til sammen var et par gigabyte, ble lagret på en ekstern harddisk (som jeg fikk låne fra NTNU) som bare jeg hadde tilgang til. Siden ingen andre trengte tilgang til datamaterialet under skrivingen av denne oppgaven, lå det på denne harddisken under hele prosjektet. Under innsamlingen av datamaterialet ble respondentene informert om hvilke tiltak som ville bli iverksatt for å beskytte deres personlige opplysninger. Herunder ble de informert om hvilken praksis som gjelder angående sletting av datamaterialet. Alle filer og skrevne verk som inneholder personopplysninger og/eller identifiserbare sitater/arbeider vil slettes/destrueres etter innleveringen av denne oppgaven. Enkelte anonymiserte og bearbeidede deler vil oppbevares frem til oppgaven har fått godkjent sensur.

Alternativer til forskning

Når man gjennomfører forskning på elever på skolen i skoletiden, er det viktig at man balanserer ut visse aspekter. Det skal være et tilsvarende aktivitetstilbud for de som ikke deltar i forskningen som for deltakerne. Alternativet til å delta skal med andre ord ikke være fritime. Det skal være lik «kompensasjon» for de som deltar i forskning som de som ikke deltar. I mitt tilfelle, hvor bare et lite knippe elever ble hentet ut av klasserommet, ble det ingen kompensasjon for noen av partene. Elevene i klasserommet hadde vanlig undervisning med faglæreren, mens elevene som ble med på forskningen jobbet med det som essensielt er å regne som repetisjonsoppgaver. Det skal med andre ord ikke være til noen slags fordel eller ulempe å delta i forskningen (Robson & McCartan, 2016, s. 226–227).

NSD

Norsk senter for forskningsdata (NSD) har gjennomgått disse aspektene ved mitt forskningsprosjekt og ga sitt klarsignal før selve forskningen begynte i starten av våren. Denne institusjonen holder meg ansvarlig for at alle steg i forskningsprosessen blir gjennomført på en forsvarlig og etisk måte, spesielt med tanke på datahåndtering og sletting av datamateriale.

3.8 Validitet av metodene

I denne seksjonen skal jeg presentere enkelte perspektiver som spiller inn på validiteten av metodene som ble brukt i innsamling av data samt metodene som ble brukt til å analysere datamaterialet.

Den sikreste måten å presentere valid forskning er å gi en fullstendig og omfattende beskrivelse av hvordan datamaterialet ble samlet inn og hvilke metoder som inngikk i denne innsamlingen. Det er i tillegg viktig å ramme inn disse metodene i en bestemt type design. Som nevnt tidligere i dette kapittelet er denne case-studien basert på et fleksibelt design. Jeg har gjennom dette metodekapittelet gjort nettopp dette.

3.8.1 Forskerrefleksivitet

Vivi Nilssen (2012) beskriver refleksivitet som «en erkjennelse av at all kvalitativ forskning er verdiladet og påvirket av forskerens subjektive, individuelle teorier. Forskningen reflekterer uunngåelig forskerens livshistorie slik den framkommer gjennom bakgrunn, verdier, holdninger, interesser, behov, miljø osv» (s. 139). Forskningens validitet avhenger med andre ord av at forskeren er konstant selvbevisst på sin rolle som et forskningsinstrument og i stedet for å kaste bort tid på å eliminere «forskereffekter» fokuserer på å forstå effektene og hvordan de kan virke inn på resultatene. Denne subjektiviteten skal ikke godtas som et uunngåelig faktum i kvalitativ forskning, men må reflekteres over og tas et oppgjør med. Ifølge Nilssen (2012, s. 141) må den kvalitative forskeren si noe om:

- sin forståelse, sitt teoretiske fundament og sin underliggende epistemologi
- sin egen bakgrunn og egne erfaringer
- forholdet til forskningsdeltakerne, og hvordan interaksjonene foregikk
- problemer underveis i alle deler av prosessen
- hvordan tolkning og forståelse har utviklet seg og eventuelt endret seg underveis
- styrke og svakhet ved forskningsdesignen (sic)

May Britt Postholm (2005) er også inne på tematikken rundt forskningens subjektivitet og sier: «likevel er intensjonen med kvalitative analyser at forskeren mest mulig skal møte datamaterialet med et åpent sinn, og legge til side sine allerede ervervede perspektiver» (s. 86). Oppgjøret med denne subjektiviteten tas i diskusjonskapittelet.

3.8.2 Troverdigheten til studien

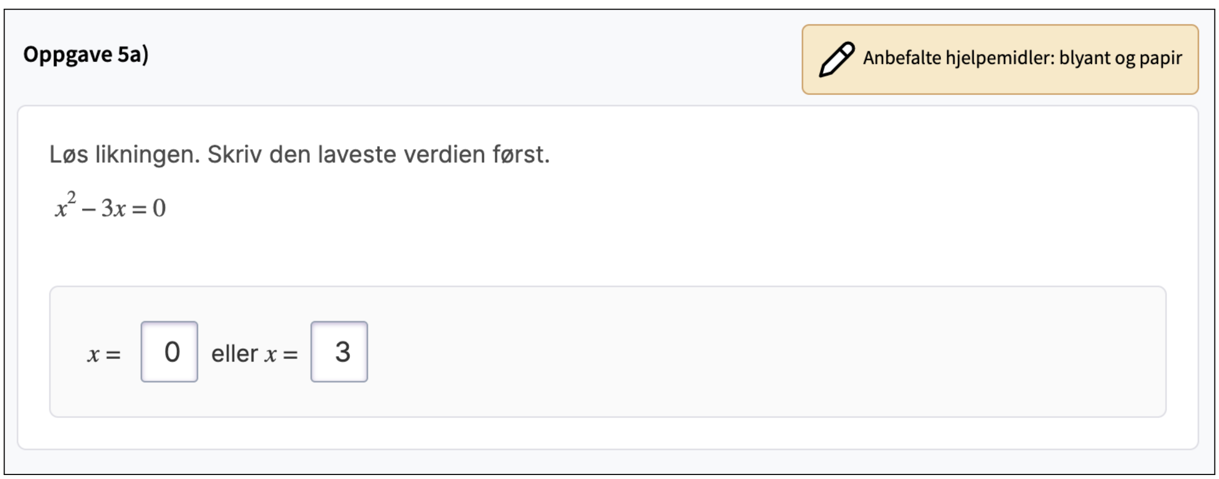
Ingen kvalitativ studie kan gjennomføres på presist samme måte to eller flere ganger. Det er dermed den kvalitative forskerens ansvar å forsikre leseren om de presenterte funn og analyser er en virkelig gjenspeiling av de faktiske forholdene og ikke et forvrengt og feilaktig bilde (Nilssen, 2012, s. 141). Det er i forskerens beste interesse å unngå misforståelse overfor sine forskerkolleger og de øvrige leserne. All forskning er unik sett i sammenheng med konteksten den ble gjennomført i. Selv om noen hadde gjenskapt metoden min steg for steg et annet sted i verden, ville datamaterialet trolig sett svært ulikt ut fra mitt. Dermed er troverdigheten knyttet til hvorvidt funnene er konsistente med datamaterialet og hvorvidt funnene gir mening i lyset av datamaterialet (Nilssen, 2012, s. 142). En måte å øke troverdigheten til forskningen og samtidig formidle den til leseren er ved å ta tak i egne skjevheter og subjektiviteter på en systematisk måte. Dette kan for eksempel gjøres ved hjelp av punktlista som det ble presentert i seksjonen ovenfor.

Kapittel 4

Føranalyse

4.1 Faglig analyse av matematikkoppgavene

Elevene fra 1T-kurset jobbet med 14 oppgaver til sammen. Elevene fra R1-kurset jobbet med 10 oppgaver til sammen. I denne seksjonen skal jeg gjøre en matematikkfaglig analyse av enkelte av disse oppgavene. De oppgavene som analyseres her ble valgt fordi de var de ga det rikeste grunnlaget for en videre analyse av elevenes hjelpemiddelbruk.



Figur 4.1: Oppgave 3.1.5a fra 1T-kurset på Campus Inkrement.

Oppgave 3.1.5a (figur 4.1) involverer å løse en andregradslikning som inneholder ett andregradsledd og ett ledd av første grad. Andregradslikninger er ofte kjent for å ha to løsninger, et faktum oppgaven hinter til ved å ha to inntastingsfelt og i tillegg ber elevene skrive den laveste x-verdien først. Mellom inntastingsfeltene bruker oppgaven ordet «eller». Oppgaven kunne også brukt symbolet $\vee$ for å inkludere mer matematisk notasjon i oppgaven. Det er flere måter å gå frem for å løse likningen. For elever i et matematikk 1T-kurs er det to fremgangsmåter som trer frem som sentrale å kunne. Den første, og mest spesifikke løsningsmetoden for andregradslikninger på denne formen, ser slik ut:

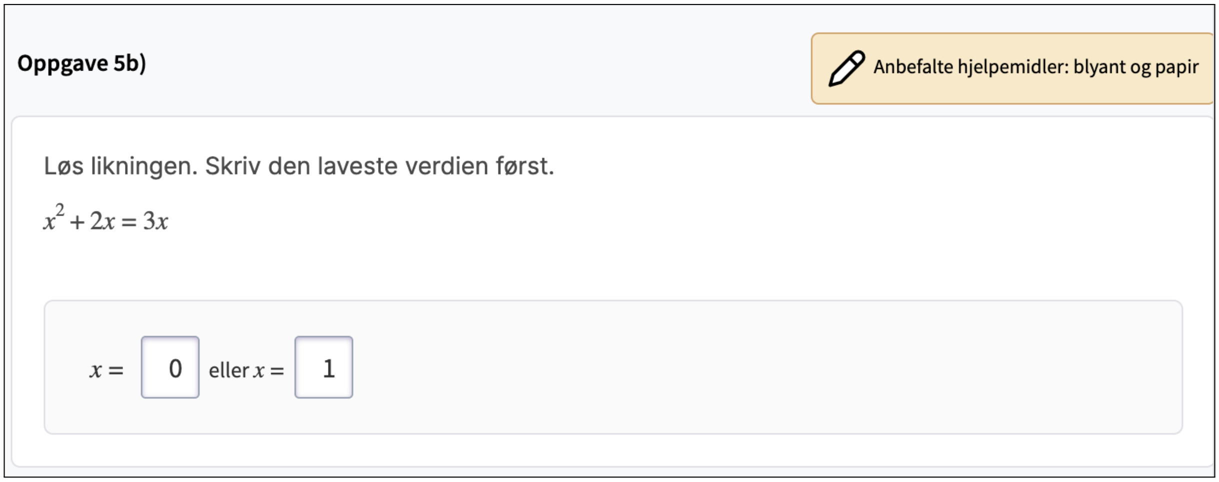
$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x &= 0 \vee x - 3 = 0 \\ x &= 0 \vee x = 3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Denne fremgangsmåten involverer å bruke at begge leddene på venstre siden av likhetstegnet inneholder x og følgelig kan faktoriseres til $x(x-3)$. Deretter må man vite at et produkt mellom to tall/uttrykk kun er 0 dersom én eller begge faktorene er 0. Fra dette får man at enten er $x = 0$ eller så er $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Den andre løsningsmetoden involverer å bruke andregradsformelen med konstantleddet lik 0. Andregradsformelen, som er brukbar på alle andregradslikninger, kan brukes på denne oppgaven med like stor suksess som fremgangsmetoden beskrevet ovenfor. Ut fra den opprinnelige likningen kan man skrive ned følgende tre opplysninger: $a = 1$, $b = -3$ og $c = 0$, for så å sette opp og løse følgende likning:

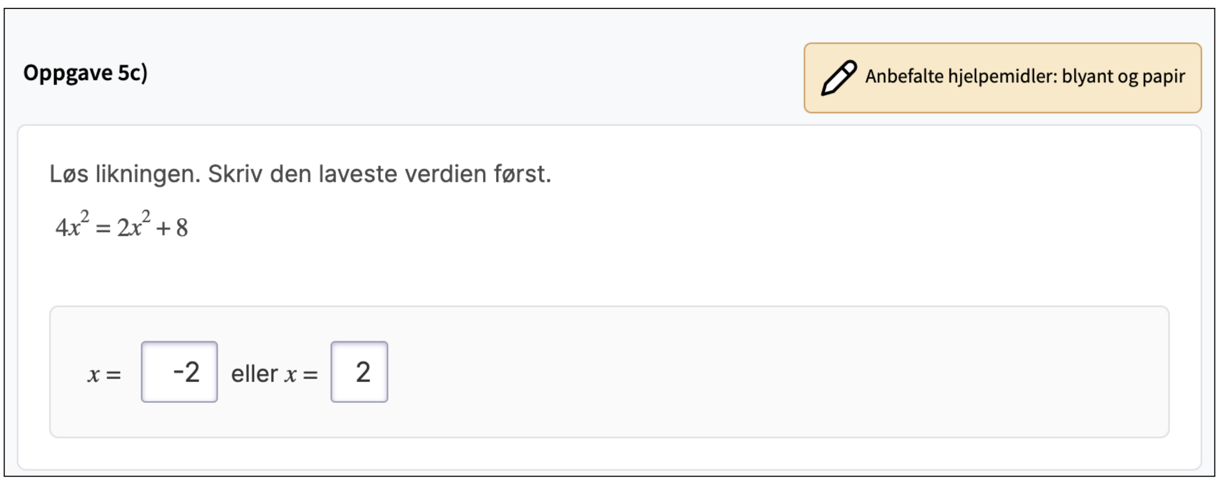
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} \\ &\vdots \\ x &= \frac{3 \pm 3}{2} \\ x &= \frac{0}{2} \vee x = \frac{6}{2} \\ x &= 0 \vee x = 3 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Denne løsningsmetoden fører frem til det samme svaret, selv om den opprinnelige likningen ikke opptrer på nøyaktig den formen man er vant til å se før man bruker andregradsformelen.



Figur 4.2: Oppgave 3.1.5b fra 1T-kurset på Campus Inkrement.

Oppgave 3.1.5b (figur 4.2) kan løses ved hjelp av de samme to fremgangsmetodene beskrevet ovenfor. Det eneste som er annerledes er at man bør trekke fra $3x$ fra begge sidene av likhetstegnet før man faktoriserer venstresiden.



Figur 4.3: Oppgave 3.1.5c fra 1T-kurset på Campus Inkrement.

Oppgave 3.1.5c (figur 4.3) løses enklest med følgende fremgangsmåte:

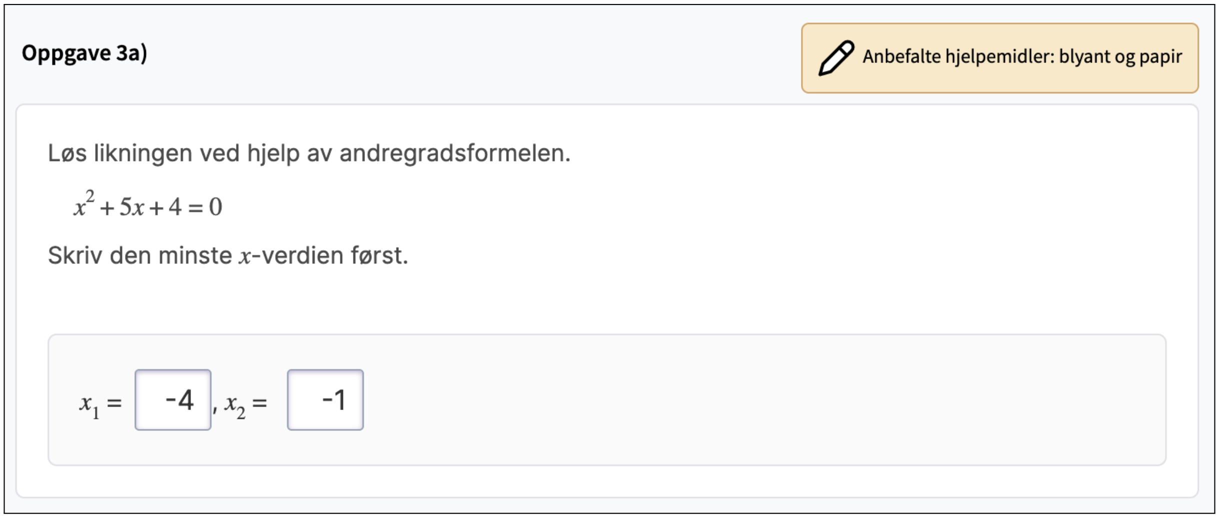
$$\begin{aligned} 4x^2 &= 2x^2 + 8 \\ 2x^2 &= 8 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= -2 \vee x = 2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Denne fremgangsmåten bygger på prinsippet om å samle alle x-avhengige ledd på samme side av likhetstegnet og alle x-uavhengige ledd på den andre siden. Deretter gjør man flere steg frem til man har x alene.

Likningen kan selvfølgelig også løses ved hjelp av andregradsformelen. Da samler man alle ledd på én side og noterer ned følgende tre opplysninger: $a = 2$, $b = 0$ og $c = -8$.

Andregradslikninger, slik som disse tre jeg nå har sett på, deler en rekke egenskaper med de øvrige likningstyper. Blant annet at man kan addere og subtrahere tall/uttrykk til likningen så lenge man gjør det på begge sider av likhetstegnet og at man kan multiplisere og dividere likningen med tall/uttrykk, så lenge man gjør det på alle ledd i likningen og tallet/uttrykket er ulikt 0. I tillegg til dette har andregradslikninger den egenskapen at de kan løses med den generelt gyldige formelen, andregradsformelen, som gir løsningene (både i tilfeller hvor det er to løsninger og i tilfeller det bare er én løsning). I tilfeller hvor det blir et negativt tall under rottegnet og det følgelig ikke eksisterer en løsning (på den reelle tallinjen), kreves det matematisk innsikt for å nå en konklusjon. Innsikten man trenger går ut på å innse at man ikke kan gjøre mer med likningen. Elever i 1T-kurs blir ikke introdusert til imaginære tall, og blir heller fortalt at kvadratrota av et negativt tall ikke eksisterer. I 1T vil man si at det ikke eksisterer noen x-verdier som oppfyller likningen og at likningen dermed ikke har en løsning.

Oppgave 3.5.3a (figur 4.4 samt oppgave 3.5.3b, figur F.11) inneholder andregradslikninger. Elevene blir bedt om å løse den ved hjelp av andregradsformelen. Andregradsformelen er som kjent: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Her kan man sette opp følgende opplysninger om koeffisientene i likningen: $a = 1$, $b = 5$, og $c = 4$, før man setter tallene inn i selve formelen. En helt standard utregning på



Figur 4.4: Oppgave 3.5.3a fra 1T-kurset på Campus Inkrement.

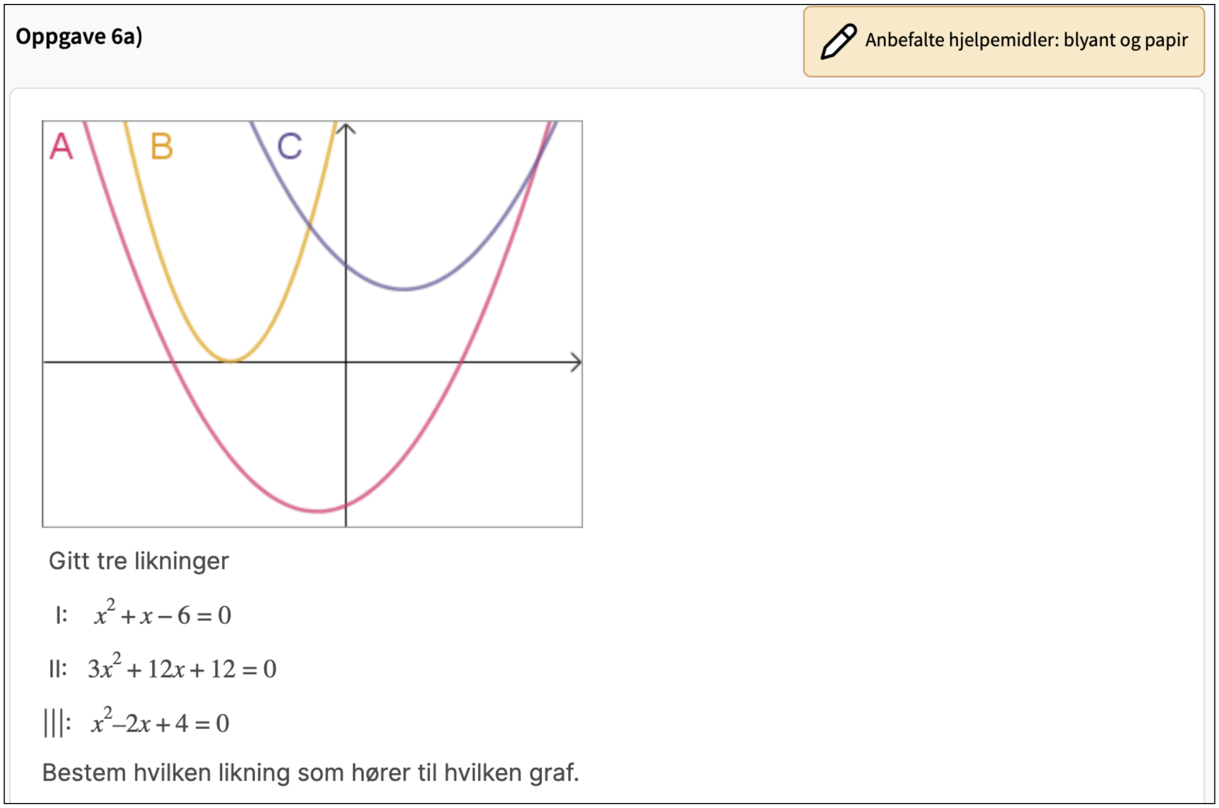
denne spesifikke oppgaven ville sett slik ut:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x &= \frac{-5 \pm 3}{2} \\ x &= -4 \vee x = -1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Andre løsningsstrategier inkluderer å tegne grafen til andregradsuttrykket og undersøke for hvilke x-verdier den skjærer linja $y = 0$. Dette ville vært en løsningsmetode som går mot det opprinnelige oppdraget gitt av oppgaven, da den dikterer at andregradsformelen skal brukes i tillegg til at den bare ville gitt en antydning til hva som er løsningene.

Oppgave 3.7.6a (figur 4.5) er særdeles interessant. Elevene blir, ut fra tre grafer A, B og C, bedt om å bestemme hvilken av tre andregradslikninger som beskriver dem. Oppgaven har mange fremgangsmetoder som kan brukes for å nå frem til svaret. Dette er fordi andregradsfunksjoner har mange ulike egenskaper som kan brukes for å knytte dem til deres grafiske fremstillinger.

En egenskap som kunne vært til hjelp er at fortegnet på andregradsleddet bestemmer hvilken vei grafen krummer seg. I dette tilfellet krummer alle grafene oppover, fordi alle likningene har et



Figur 4.5: Oppgave 3.7.6a fra 1T-kurset på Campus Inkrement.

positivt andregradsledd. Dette fører dermed ikke nærmere noen løsning.

En annen egenskap er konstantleddet som bestemmer hvor på y-aksen grafen skjærer. Da aksene i koordinatsystemet til figuren ikke har tall på seg, må man tenke litt systematisk. Grafen B skjærer y-aksen høyest opp etterfulgt av grafen til C. Grafen til A skjærer y-aksen på den negative siden av x-aksen, og følgelig vil uttrykket inneholde et negativt konstantledd. Ut fra dette kan man konkludere med at graf A beskrives av likning I, graf B beskrives av likning II og graf C beskrives av likning III.

En annen fremgangsmåte involverer antall løsninger for hver likning. Ser man på grafene ser man at graf C ikke har noen nullpunkter, graf B har ett nullpunkt og graf A har to nullpunkter. Løser man hver av de tre andregradslikningene og sammenlikner antall løsninger med antall nullpunkter for hver graf, skal man også være i stand til å konkludere riktig. Løser likningene ved hjelp av andregradsformelen i tabell 4.1.

Vi ser at likning I har to løsninger, likning II har én løsning og likning III har ingen løsninger. Dette betyr at likning I tilhører graf A som har to nullpunkter. Videre finner man at likning II

I: $x^2+x-6=0$	II: $3x^2+12x+12=0$	III: $x^2-2x+4=0$
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}$	$x=\frac{-12\pm\sqrt{(12^2-4\cdot3\cdot12}}{2\cdot3}$	$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$	$x=\frac{-12\pm\sqrt{144-144}}{6}$	$x=\frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2}$
$x=\frac{-1\pm5}{2}$	$x=\frac{-12\pm0}{6}$	$x=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}$
$x=2\vee x=-3$	$x=-2$	Ingen løsninger

Tabell 4.1: Løsninger på de tre andregradslikningene, funnet ved hjelp av andregradsformelen.

tilhører graf B som har ett nullpunkt. Til slutt finner man at likning III hører til graf C som ikke har noen nullpunkter.

Vi kan også se på denne egenskapen på en litt annen måte, hvis man spisser seg inn på diskriminanten i andregradsformelen: b^2-4ac. Dersom man regner ut verdien til dette uttrykket kan man si hvor mange løsninger likningen har. Dersom diskriminanten er negativ, altså $b^2-4ac<0$ har likningen ingen reelle løsninger. Dersom diskriminanten er lik 0, altså: $b^2-4ac=0$ har likningen én reell løsning (eventuelt kan man se på det som to identiske løsninger). Dersom diskriminanten er positiv, altså: $b^2-4ac>0$ har likningen to reelle løsninger. Regner ut diskriminantene i tabell 4.2.

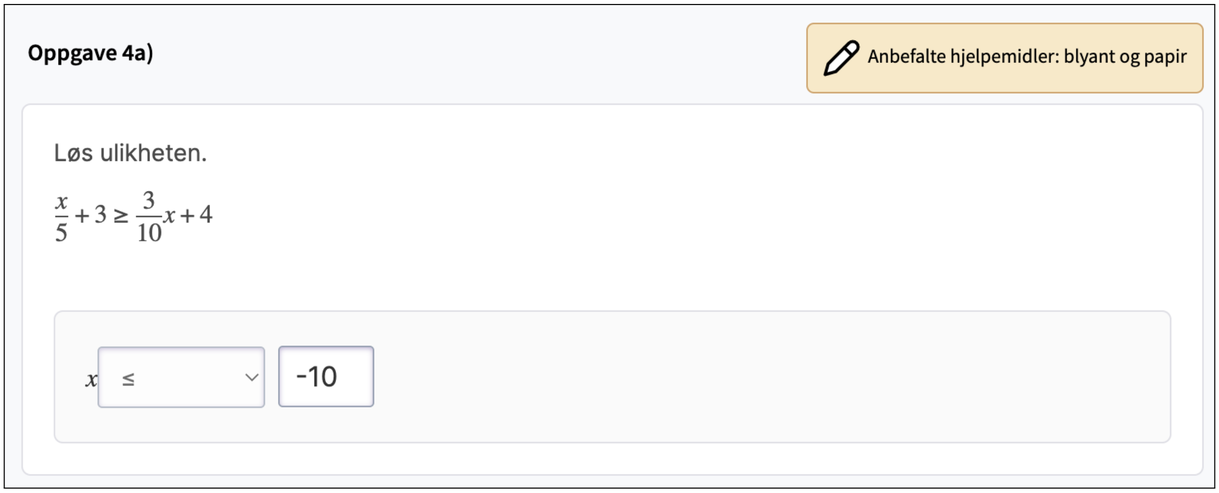
$I: x^2+x-6=0$	II: $3x^2+12x+12=0$	III: $x^2-2x+4=0$
$D=1^2-4\cdot1\cdot(-6)$	$D=12^2-4\cdot3\cdot12$	$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot4$
$D=25$	$D=0$	$D=-12$
$D>0$	$D=0$	$D<0$
To reelle løsninger	Én reell løsning	Ingen reelle løsninger

Tabell 4.2: Utrekning av tre diskriminanter D.

Fortegnet til førstegradsleddet avslører også brukbar informasjon, i form av forskyvningen langs x-aksen. Man leser av forskyvningen på x-koordinaten til ekstremalpunktet til grafen. Er førstegradsleddet lik 0 er grafen ikke forskjøvet, men er symmetrisk om y-aksen ($x=0$).

Ekstremalpunktet til en graf ligger i $x=-\frac{b}{2a}$. Regner man ut x-verdien til ekstremalpunktet til de tre grafene kan man sortere dem etter størrelse og finne løsningen.

Disse fremgangsmåtene er noen av de mest aktuelle å undersøke i et 1T-kurs. Selv om det sikkert finnes mange flere fremgangsmåter, holder dette til min faglige analyse.



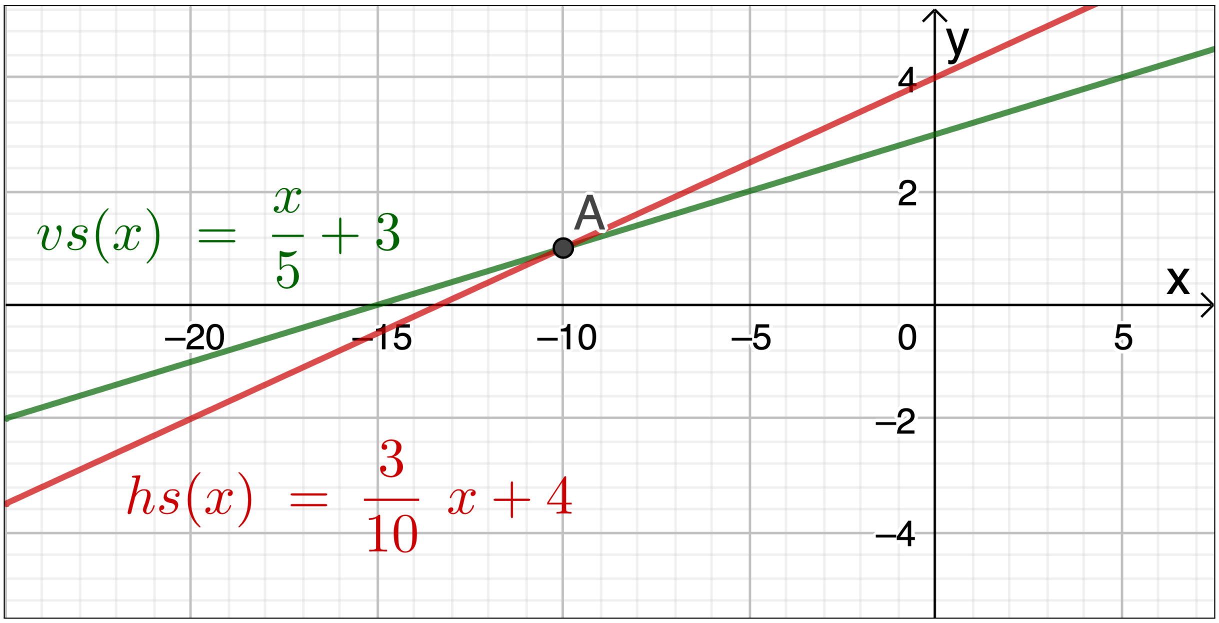
Figur 4.6: Oppgave 4.3.4a fra 1T-kurset på Campus Inkrement.

Oppgave 4.3.4a (figur 4.6) ber elevene om å løse en ulikhet. Når man løser ulikheter, er det visse ting man må ha i tankene. Dersom man, på et hvilket som helst tidspunkt, må multiplisere eller dividere ulikheten på et negativt tall, må man endre retningen til ulikhetstegnet. En utregning for denne ulikheten kan se slik ut:

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} + 3 &\geq \frac{3}{10}x + 4 \qquad | \cdot 10 \\ 2x + 30 &\geq 3x + 40 \\ 2x - 3x &\geq 40 - 30 \\ -x &\geq 10 \qquad\qquad | \cdot -1 \\ x &\leq -10 \end{aligned} \tag{4.5}$$

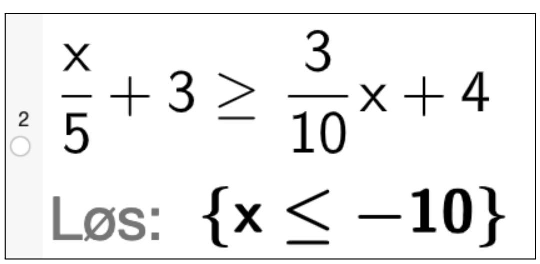
Når en elev starter denne oppgaven, er det enda ikke valgt et likhets- eller ulikhetstegn fra rullegardinmenyen til venstre for inntastingsfeltet. I tillegg til $\geq$ og $\leq$ inneholder rullegardinmenyen tegnene $<$, $>$ og $=$. Dette kan skape hodebry for de svakeste elevene, da man kan bli usikker og svare med $<$ i stedet for $\leq$, eller glemme og endre retning på ulikhetstegnet og svare $\geq$ i stedet for $\leq$.

For de sterkeste elevene, eller de som ønsker å dykke dypere inn i oppgaven, kan man se på ulikheten grafisk i GeoGebra. Dette kan man gjøre ved å tegne en graf for uttrykket på venstre siden av ulikhetstegnet og en graf for høyresiden. Ved å finne x-verdien til skjæringspunktet mellom grafene kan man finne tallet som skal tastes inn i inntastingsfeltet. Så må man undersøke om det er til høyre eller venstre for dette punktet venstresiden er større enn høyresiden. På figur 4.7 kan man se at verdien til grafen til venstresiden er større enn eller lik verdien til grafen til høyresiden for x-verdier fra og med -10 og nedover. Løsningsmengden til ulikheten blir dermed $\{x \leq -10\}$. Svakheten ved å løse oppgaven grafisk er at man ikke kan se hvorvidt skjæringspunktet er innehold i løsningmengden eller ikke, altså om man må bruke et <-tegn eller et $\leq$-tegn.



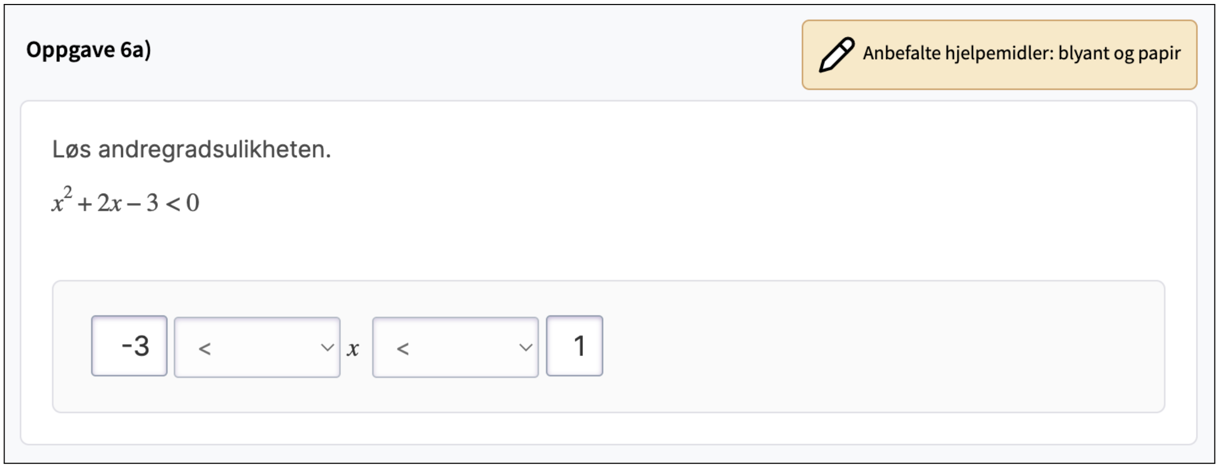
Figur 4.7: Mulig grafisk løsning på oppgave 4.3.4a.

Skal man først bruke GeoGebra, kan man også finne løsningen ved å bruke likningsløseren i CAS. Dette gjør man ved å skrive ulikheten inn i CAS og trykke på knappen fra verktøylinja som ser slik ut x=. Figur 4.8 er et skjermbilde fra CAS, og viser hvordan en slik løsning vil se ut.



Figur 4.8: Løsning av oppgave 4.3.4a i CAS.

Oppgave 4.4.6a (figur 4.9) krever at elevene har kontroll på flere egenskaper ved andregradsuttrykk og ulikheter. Den første måten elevene lærer for å løse slike oppgaver på, involverer og først



Figur 4.9: Oppgave 4.4.6a fra 1T-kurset på Campus Inkrement.

faktorisere andregradsuttrykket (gjerne ved hjelp av andregradsformelen eller heltallsmetoden).

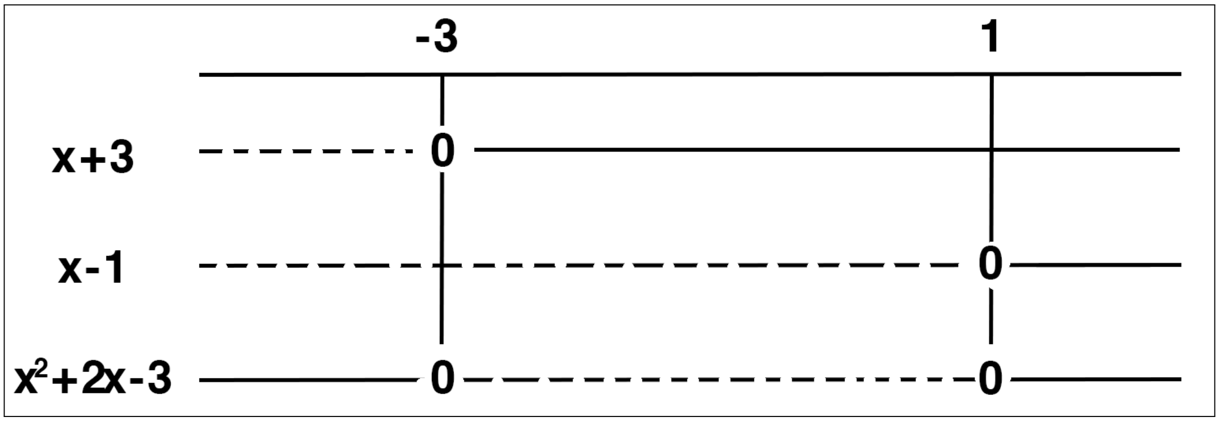
Heltallsmetoden sier at hvis man finner to tall d og e slik at $b = d + e$ og $c = d \cdot e$, så er $x^2 + bx + c = (x + d)(x + e)$.

Viser fremgangsmetoden ved hjelp av heltallsmetoden:

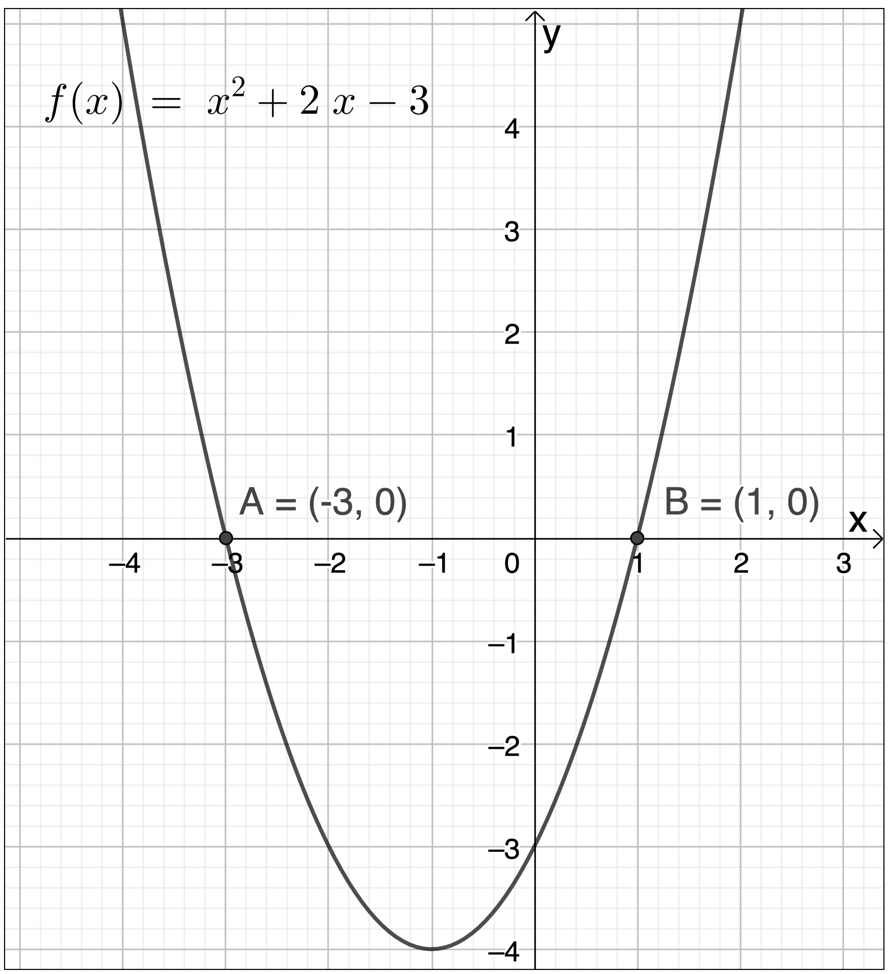
$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 \qquad & \text{Her må man finne to tall som er slik at produktet av tallene blir } -3, \\ & \text{og at summen blir lik } 2. \text{ Tallene er } 3 \text{ og } -1. \\ (x+3)(x-1) \qquad & 3 \cdot (-1) = -3 \text{ og } 3 + (-1) = 2 \end{aligned}$$

Ut fra denne faktoriseringen kan man dedusere at det er tallene -3 og 1 som skal fylle de tomme inntastingsfeltene, da disse tallene innsatt i uttrykket gjør at en av faktorene blir lik 0. Skal man finne riktig ulikhetstegn for å fullføre løsningen, kan man tegne en fortegnslinje. De heltrukne linjene på fortegnslinja (figur 4.10) sier når uttrykket er positivt. Fortegnslinja til $x^2 + 2x - 3$ sier at uttrykket er negativt for $-3 < x < 1$, som er svaret på den opprinnelige ulikheten.

Man kan bruke GeoGebra til å løse oppgaven eller til å kontrollere at man har gjort riktig ved hjelp av en annen løsningsmåte. Dette gjør man ved å tegne grafen og undersøke for hvilke(t) intervall grafen ligger under x-aksen. På figur 4.11 ser man at grafen til $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ligger under x-aksen i intervallet $x \in (-3, 1)$. Dette er analogt med løsningen på ulikheten: $-3 < x < 1$.

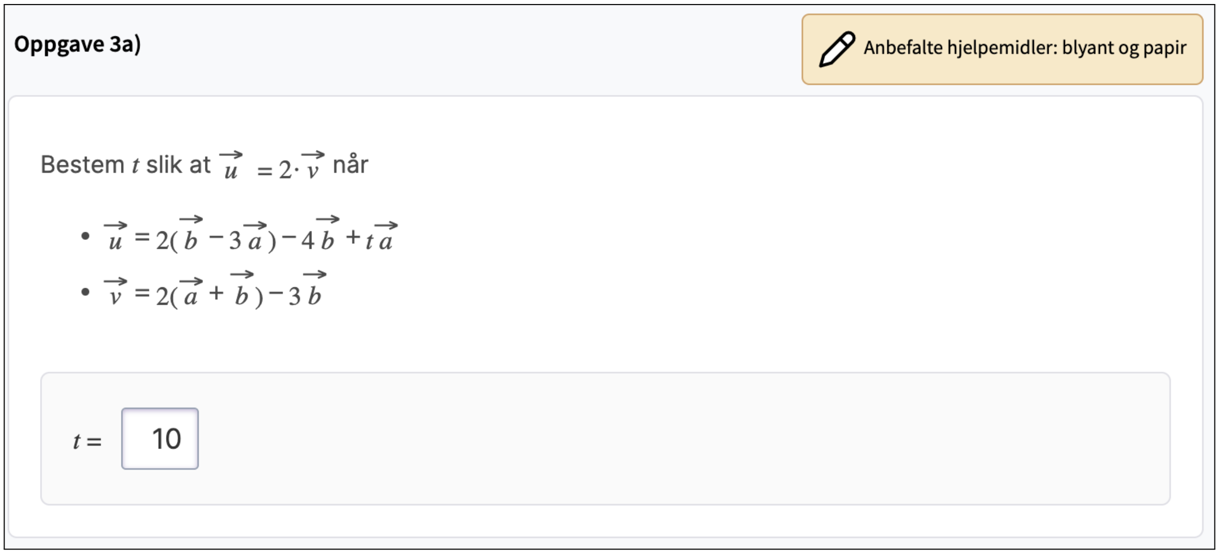


Figur 4.10: En fortegnslinje for ulikheten $x^2 + 2x - 3 < 0$.



Figur 4.11: Grafisk løsning/kontroll for ulikheten $x^2 + 2x - 3 < 0$.

De neste to oppgavene er hentet fra oppgavesettet som de to parene fra R1-kurset jobbet med. De fire elevene fra dette kurset fikk utdelt oppgaver utelukkende hentet fra kapittelet om vektorer. Disse to var de oppgavene som ga dem de største utfordringene.



Figur 4.12: Oppgave 5.4.3a fra R1-kurset på Campus Inkrement.

På oppgaven 5.4.3a (oppgave 5.4.3a, figur 4.12) blir elevene bedt om å finne verdien av t som oppfyller likningen $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v}$, når

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 2\left(\vec{b} - 3\vec{a}\right) - 4\vec{b} + t\vec{a} \qquad \text{og} \\ \vec{v} &= 2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - 3\vec{b} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Det er bare én ukjent og man får oppgitt én likning, slik at denne oppgaven er løselig.

Når man regner med vektorer har man i hovedsak fire operasjoner og forholde seg til. Disse er addisjon av to vektorer, multiplikasjon av en skalar med en vektor, indreprodukt/skalarprodukt av to vektorer og vektorprodukt/kryssprodukt av to vektorer. Av disse fire kommer bare de to første til syne i løsningen på denne oppgaven. En nyttig regel presenteres i videoleksjonen til temaet om vektorlikninger fra Campus Inkrement. Denne regelen sier at:

$$a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d, \tag{4.7}$$

forutsatt at ingen av vektorene er nullvektoren $\vec{0}$.

Setter inn uttrykkene for $\vec{u}$ og $\vec{v}$ inn i likningen $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v}$ og løser likningen slik:

$$\begin{aligned} 2\left(\vec{b} - 3\vec{a}\right) - 4\vec{b} + t \cdot \vec{a} &= 2\left(2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - 3\vec{b}\right) \\ 2\vec{b} - 6\vec{a} - 4\vec{b} + t\vec{a} &= 4\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{b} \\ (-6 + t)\,\vec{a} - 2\vec{b} &= 4\vec{a} - 2\vec{b} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bruker regel 4.7.

$$\begin{aligned} &(-6 + t)\,\vec{a} - 2\vec{b} = 4\vec{a} - 2\vec{b} \\ &(-6 + t) = 4 \quad \wedge \quad -2 = -2 \\ &\qquad\quad t = 10 \end{aligned} \tag{4.9}$$

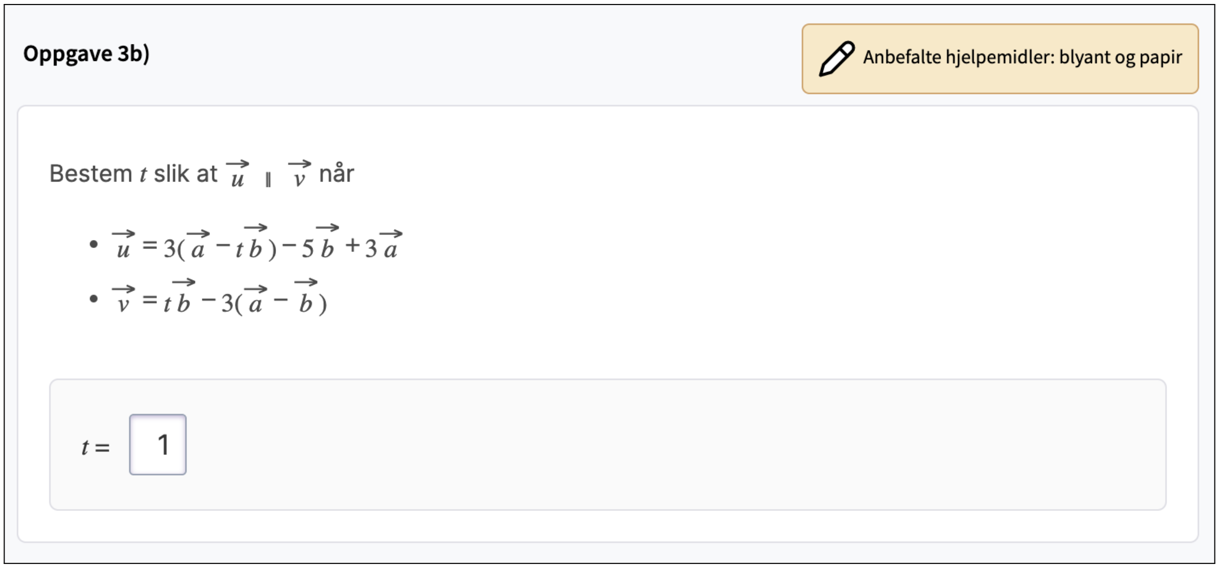
Opplysningen om at $-2 = -2$ er kanskje intetsigende, men det hadde vært bekymringsverdig om de to sidene i denne andre likningen ikke stemte overens. Alternativt kunne man jobbet videre med den opprinnelige likningen og fått følgende:

$$\begin{aligned} 2\left(\vec{b} - 3\vec{a}\right) - 4\vec{b} + t \cdot \vec{a} &= 2\left(2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - 3\vec{b}\right) \\ 2\vec{b} - 6\vec{a} - 4\vec{b} + t\vec{a} &= 4\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{b} \\ t\vec{a} &= 4\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{b} - 2\vec{b} + 6\vec{a} + 4\vec{b} \\ t\vec{a} &= 10\vec{a} \\ t &= 10 \end{aligned} \tag{4.10}$$

I siste steg bruker man det samme prinsippet som i regel 4.7: $a\vec{u} = b\vec{u} \Leftrightarrow a = b$, slik at man sitter igjen med at skalaren t er lik skalaren 10.

På oppgave 5.4.3b (figur 4.13) ser man en liknende oppgave som den forrige. Man får følgende to vektorer, og skal bestemme hvilken t-verdi som gjør at de er parallelle. Den ukjente verdien t opptrer som en skalar multiplisert med den vilkårlige vektoren $\vec{b}$, og spiller inn på både retningen og lengden til $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 3\left(\vec{a} - t\vec{b}\right) - 5\vec{b} + 3\vec{a} \\ \vec{v} &= t\vec{b} - 3\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$



Figur 4.13: Oppgave 5.4.3b fra R1-kurset på Campus Inkrement.

Denne gangen vet man ikke hvilket tall k som oppfyller kravet for parallellitet: $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$. Dette betyr at man har en situasjon med to ukjente. man kan, med utgangspunktet i $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, skaffe seg to likninger og løse oppgaven.

$$
\begin{aligned}
3\left(\vec{a} - t\vec{b}\right) - 5\vec{b} + 3\vec{a} &= k \cdot \left(t\vec{b} - 3\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\right) \\
3\vec{a} - 3t\vec{b} - 5\vec{b} + 3\vec{a} &= kt\vec{b} - 3k\vec{a} + 3k\vec{b} \\
6\vec{a} + (-3t - 5)\,\vec{b} &= -3k\vec{a} + (kt + 3k)\,\vec{b}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Bruker at $a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

$$
\begin{aligned}
6 = -3k \quad &\wedge \quad (-3t - 5) = (kt + 3k) \\
k = -2 \quad &\wedge \quad -3t - kt = 3k + 5 \\
&\quad -3t - (-2) \cdot t = 3 \cdot (-2) + 5 \\
&\quad -t = -1 \\
&\quad t = 1
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Fra verdien til k får man vite at vektor $\vec{u}$ er dobbelt så lang som vektor $\vec{v}$, men motsatt rettet. Verdien $t = 1$ gjør at $\vec{u} \;||\; \vec{v}$.

4.2 Analyse av elevers arbeid med matematikkoppgaver

Da elevene jobbet gjennom disse settene med oppgaver, jobbet de i par under en oppfordring om å snakke gjennom matematikken høyt. Dette gjorde det mulig å analysere arbeidene deres selv om det bare er de ulike svarene de faktisk avgir som lagres digitalt i Campus Inkrement sitt system.

Den første oppgaven (oppgave 3.1.5a, figur 4.1) bød på problemer for det første paret, bestående av Grylius og Vincent. De var inneforstått med den mest grunnleggende egenskapen ved likninger, nemlig at venstresiden alltid må være lik høyresiden. Da de med stor sikkerhet visste at høyresiden av likningen var lik 0, startet de å lete etter x-verdier som gjorde at høyresiden også ble null. De begynte med å undersøke $x = 1$ og fortsatte å teste x-verdiene som var større enn dette. Dette betød at de rimelig kjapt fant at $x = 3$ var en løsning. De testet relativt høye verdier, før de innså at de måtte lete etter den siste x-verdien på andre steder av tallinja. Før de bega seg ut på å teste de utallige negative verdiene, kom de på at $x = 0$ er en interessant verdi å teste. Testen var en suksess og paret fikk følgelig løst oppgaven.

Grylius og Vincent brukte den samme løsningsstrategien på den andre oppgaven (oppgave 3.1.5b, figur 4.2). De testet mange ulike verdier for x for å se om venstresiden ble lik høyresiden. De gjorde ingen forsøk på å forenkle likningen, ved for eksempel trekke fra $3x$ på begge sider. Dette faktumet gjorde at paret måtte regne ut tallverdien til både venstresiden og høyresiden for hver x-verdi og følgelig måtte bruke lengre tid enn nødvendig for å finne de to løsningene. De hadde flaks når det viste seg at de to løsningene $x = 0$ og $x = 1$ er to av de første verdiene for x som de tester.

Det andre paret, bestående av Patrea og Draco, var først innom muligheten for å løse oppgavene ved hjelp av andregradsformelen. De slo fra seg denne tanken da de innså at ikke alle de tre leddene fra uttrykket $ax^2 + bx + c$ var til stedet i oppgavene. De var tilsynelatende ikke klare over at andregradsformelen er brukbar i denne situasjonen også. Dette kunnskapshullet satte heldigvis ingen stopper for paret, da de gjennomfører oppgavene med en fremgangsmåte veldig lik den man ser i fremgangsmåte 4.1.

På den tredje oppgaven (oppgave 3.1.5c, figur 4.3) startet Grylius og Vincent på samme strategien som de anvendte på de to første oppgavene. De snakket om muligheten for å «flytte» ledd fra den ene siden til den andre, men gjorde det dessverre ikke. Å ha separert de x-avhengige leddene fra de x-uavhengige leddene hadde trolig spart dem mye hodebry, da et nytt kunnskapshull kommer til syne. I denne oppgaven var det i utgangspunktet to andregradsledd med ikke-null koeffisienter, noe som virker å være til stor forvirring for Grylius og Vincent. Jeg får høre sitater som «2 ganger 1 i andre er 4» eller skrevet matematisk «$2 \cdot 1^2 = 4$». Det virket som at koeffisientene til andregradsleddene skapte (eventuelt avslørte) en forvirring disse to elevene har angående potenser. I det spesifikke tilfellet som nettopp ble sitert behandlet de 1^2 som $1 \cdot 2$, eller $2 \cdot 1^2$ som $(2 \cdot 1)^2$. Hvilken av disse som er den faktiske feiloppfatningen er uvisst. De finner frem til løsningene $x = -2$ og $x = 2$, men de sa selv at det ikke var annet enn to heldige gjetninger.

På denne oppgaven prøvde det andre paret bestående av Patrea og Draco flere fremgangsmåter. Først prøvde de å samle alle leddene på samme side. Da fikk de likningen $2x^2 - 8 = 0$, noe som ikke var til hjelp med å finne løsningene, da ingen meningsfull faktorisering kan gjøres på de to leddene. De gjorde allikevel en ulovlig faktorisering og endte opp med likningen $2(x - 2) = 0$. Fra dette konkluderte de med at enten er $2 = 0$ eller $x = 2$. Da ingen varsellamper lyste av synet på den første «løsningen», godtok de fremgangsmåten og $x = 2$ som en riktig løsning og gikk til verks for å finne den andre. De startet blant annet med å skrive opp andregradsformelen, men de slo tanken fra seg i det de innså at koeffisienten til førstegradsleddet var 0, eller som de selv sa på lekmannspråk «vi har ikke et x-ledd». Det endte med at paret sjekket fasiten på oppgaven og fikk følgelig vite at den andre løsningen var $x = -2$. De innså at mange andregradslikninger har løsningssett med en positiv og en negativ variant av det samme tallet. De sa: «Ja, fordi kvadratrota av 4 kan være både 2 og -2». Dette er ikke helt riktig å påstå, da definisjonen av kvadratrota til et tall a er det positive tallet som i andre potens er lik a. Kvadratrota av 4 er da kun 2, derimot er løsningene av likningen $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4}$ både $x = 2$ og $x = -2$.

Begge parene valgte en brukbar løsningsstrategi på de neste to oppgavene (oppgave 3.5.3a og 3.5.3b, figur 4.4 og F.11) hvor egenskapene som testes var knyttet til bruken av andregradsformelen. Hverken den første eller den andre gruppa klarte begge oppgavene feilfritt. Begge parene begikk enkelte slurvefeil som ga dem en eller to gale løsninger på den første oppgaven. Ut fra det som ble observert, virket dette å være kun uheldig slurv. Elevene kjente fremgangsmåten godt og kunne hente ut selve andregradsformelen fra hukommelsen.

På den sjette oppgaven (oppgave 3.7.6a, figur 4.5) gikk begge parene for samme løsningsstrategi. I forrige seksjon så jeg flere egenskaper ved andregradsfunksjoner som kunne brukes for å koble sammen en graf til en likning. Jeg så blant annet at man kunne bruke konstantleddet til et andregradsuttrykk i kombinasjon med grafens skjæring med y-aksen, antall nullpunkter sammen med antall løsninger og fortegnet til førstegradsleddet sammen med forskyvningen langs x-aksen. Skjæringen med y-aksen var en visuell egenskap å studere, og konstantleddene er relativt enkle å rangere etter størrelse. Skulle man gått for en mer matematisk innfallsvinkel, hadde det trolig vært mest fornuftig å sammenlikne antall løsninger for hver likning, med antallet nullpunkter for hver graf. Dette hadde vært konkret bevis, da de tre grafene har tre ulike antall nullpunkter. Utvalget av elever fra dette 1T-kurset brukte utelukkende konstantleddene til uttrykkene og skjæringene med y-aksen. Dette er nødvendigvis ikke en antydning til at det eksisterte hull i elevenes kunnskaper, heller enn at de valgte den enkleste veien til mål. Ingen av parene dvelte på oppgaven for å undersøke flere av egenskapene, men gikk videre til neste oppgave. Det første paret bestående av Grylius og Vincent avgir feil svar, selv om alt de sa om oppgaven er riktig. De identifiserte de ulike grafene ut fra hvor de skar y-aksen, men trykket inn feil bokstav i inntastingsfeltene. Dette analyserer jeg som enten bare slurvete inntasting eller en forvirring oppstående av Campus' noenlunde upresise inntastingsfelter.

Den syvende og åttende oppgaven (oppgave 4.3.4a og oppgave 4.4.6a, figur 4.6 og figur 4.9) som jeg har valgt å analysere er de to oppgavene som inneholder ulikheter. Allerede på den første av disse merket jeg at parene ikke hadde kontroll på hvordan man løser ulikheter. Paret bestående av Grylius og Vincent gjorde ingen fremskritt med oppgaven annet enn å skrive om $\frac{x}{5}$ til $0,2x$ og $\frac{3}{10}x$ til $0,3x$, som i praksis ikke førte dem nærmere løsningen. Det virket ikke som at elevene i dette paret visste hvordan løsningen på en ulikhet så ut da de prøvde svar med både flere ulike ulikhetstegn samt likhetstegnet fra oppgavens rullegardinmenyen. De testet ut løsninger med ulikhetstegnene $<$ og $>$, selv om oppgaven implisitt fortalte at svaret skulle inneholde $\leq$ eller $\geq$. Også tallet som skulle tastes inn i det tomme feltet gjettet de på. Etter at de har gjettet omtrent ti ganger på ulike løsninger, ga paret opp og sjekket fasiten. Grylius og Vincent ble mildt sjokkert over at svaret var $x \leq -10$, da det aldri falt dem inn å teste noen verdier i nærheten av -10.

Patrea og Draco fra det andre paret gjorde det marginalt bedre på denne oppgaven. De var tilsynelatende like fortvilet og fortapt ved det første møtet med ulikheten som Grylius og Vincent var. Da de ikke klarte å finne en løsningsstrategi selv, oppsøkte de først hjelp fra videoleksjonen tilknyttet temaet om ulikheter fra teorisidene på Campus Inkrement. Da dette ikke ga elevene noen åpenbaringer, tydde de til et hjelpemiddel litt utenom det vanlige. Hjelpemidlet de valgte å bruke er en nettbasert algebrakalkulator, kalt MathPapa, som tilbyr steg-for-steg løsningsforslag på algebraiske regnestykker (MathPapa, 2022). De skrev inn uttrykket slik det ble presentert for dem i oppgaven og klikket på «CALCULATE IT!». Først vistes bare selve svaret, men så trykket de på «Show Step-By-Step» som avslørte et løsningsforslag med de viktigste stegene med en tilhørende forklaring på hva som skjer mellom hvert steg (figur 4.14). Paret satte av et par minutter til å studere det maskingenererte løsningsforslaget før de sa seg fornøyde og gikk videre til neste oppgave. Fra den observerende sitt ståsted virket det ikke som at dette var nok til å tette kunnskapshullet elevene hadde knyttet til ulikheter.

Let's solve your inequality step-by-step.

$$\frac{x}{5} + 3 \geq \frac{3}{10}x + 4$$

Step 1: Simplify both sides of the inequality.

$$\frac{1}{5}x + 3 \geq \frac{3}{10}x + 4$$

Step 2: Subtract 3/10x from both sides.

$$\frac{1}{5}x + 3 - \frac{3}{10}x \geq \frac{3}{10}x + 4 - \frac{3}{10}x$$

$$\frac{-1}{10}x + 3 \geq 4$$

Step 3: Subtract 3 from both sides.

$$\frac{-1}{10}x + 3 - 3 \geq 4 - 3$$

$$\frac{-1}{10}x \geq 1$$

Step 4: Multiply both sides by 10/(-1).

$$\left(\frac{10}{-1}\right) * \left(\frac{-1}{10}x\right) \geq \left(\frac{10}{-1}\right) * (1)$$

$$x \leq -10$$

Answer:

$$x \leq -10$$

Figur 4.14: Steg-for-steg løsningsforslag for oppgave 4.3.4a, generert av MathPapa.

Den andre ulikheten var en andregradsulikhet. Grylius og Vincent starter å løse oppgaven på riktig måte, ved å finne førstegradsfaktorene til andregradsuttrykket ved hjelp av andregradsformelen. De fant frem til de riktige to x-verdiene. De satte inn disse to verdiene i inntastingsfeltene og prøvde ut flere ulike kombinasjoner av ulik- og likhetstegn. Slik oppgaven ble analysert i den forrige seksjonen, virker det vanskelig å gjennomføre denne oppgaven ordentlig uten å tegne en fortegnslinje. Dette paret nevnte aldri muligheten for å gjøre det, og ender heller aldri opp med å løse oppgaven. Det endte opp med at elevene sjekket fasiten. For Grylius og Vincent forble kunnskapshullet like stort som det var før de startet på ulikhetsoppgavene.

Patrea og Draco rakk ikke starte på den andre ulikheten.

På oppgave 5.4.3a fra R1-settet (figur 4.12) observerte jeg et klassisk tilfelle av «feil løsningsmetode som leder til riktig svar». Paret bestående av Hermine og Lavendel startet oppgaven på riktig måte, med å sette inn uttrykkene til vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ inn i den oppgitte likningen $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v}$. De brukte ikke at $a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ og gjorde noen ulovlige overganger for å kompensere.

$$
\begin{aligned}
2\left(\vec{b} - 3\vec{a}\right) - 4\vec{b} + t \cdot \vec{a} &= 2\left(2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - 3\vec{b}\right) \\
2\vec{b} - 6\vec{a} - 4\vec{b} + t\vec{a} &= 4\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{b} \\
t\vec{a} &= 4\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{b} - 2\vec{b} + 6\vec{a} + 4\vec{b} \\
t\vec{a} &= 10\vec{a} \\
t &= 10
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Feilen ligger i den siste overgangen, hvor Hermine og Lavendel deler begge sider av likningen med $\vec{a}$. I den faglige analysen presenterer jeg de fire operasjonene som man kan anvende innen vektorregning, og der kommer det implisitt frem at det ikke finnes en divisjonsoperasjon for å dele en vektor på en annen vektor, slik man kan med tall. Dette tyder på at det eksisterer et kunnskapshull hos elevene. Det er forståelig at slike feil skjer, spesielt når slike oppgaver eksisterer og gir denne misoppfatningen et sted å blomstre. «Også deler du bare på $\vec{a}$», er et sitat hentet fra videoopptaket, hvorpå Lavendel gjennomgår oppgaven med Hermine.

Gitt at man ender opp med $t\vec{a} = 10\vec{a}$, kunne man også argumentert seg frem til $t = 10$ ved bruk av samme regel som nevnt ovenfor: $a\vec{u} = c\vec{u} \Leftrightarrow a = c$.

Det andre paret fra R1-kurset, bestående av Harry og Ronny, løste denne oppgaven på tilsvarende vis som jeg presenterte i den faglige analysen av oppgaven. Da deres løsningsmetode tok en annen retning enn det foregående paret, støtte de aldri på problematikken knyttet til den siste overgangen i utregning 4.14.

På den andre oppgaven (oppgave 5.4.3b, figur 4.13) var det ikke gitt hvilken faktor k som oppfyller kravet om at vektoren $\vec{u}$ skal kunne uttrykkes som $2 \cdot \vec{v}$ for at de skulle være parallelle. Dette bød på vanskeligheter for Hermine og Lavendel, mens Harry og Ronny klarte å overkomme dette ekstra hindret.

Hermine og Lavendel som i forrige oppgave ikke brukte metoden som gjør en likning om til to likninger, klarte å finne frem til svaret fordi det kun var en ukjent involvert. De brukte altså ikke det faktumet at $a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$. Når de gjentar metoden fra forrige oppgave ender de opp på et sted som ikke tillater dem å finne løsningen fordi det var to ukjente involvert.

$$\begin{aligned} 3\left(\vec{a} - t\vec{b}\right) - 5\vec{b} + 3\vec{a} &= k \cdot \left(t\vec{b} - 3\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\right) \\ 3\vec{a} - 3t\vec{b} - 5\vec{b} + 3\vec{a} &= kt\vec{b} - 3k\vec{a} + 3k\vec{b} \\ 6\vec{a} - 3t\vec{b} - 5\vec{b} &= kt\vec{b} - 3k\vec{a} + 3k\vec{b} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Likningen Hermine og Lavendel har utledet, er ikke løselig på egenhånd. For å finne verdien til t, måtte man først finne verdien til k. Kunnskapshullet knyttet til regel 4.7 gjorde denne oppgaven uoverkommelig. Paret klarte ikke å finne svaret med sin forsøkte løsningsmetode og endte opp med å sjekke fasiten.

Det andre paret, med Harry og Ronny, som på forrige oppgave hadde vist at de var kjent med regelen presentert i videoleksjonene på Campus Inkrement (regel 4.7), klarte å løse denne oppgaven. De brukte regelen og satte opp likningen som inneholdte skalarene knyttet til $\vec{a}$. Denne likningen står til venstre i løsning 4.13 og nedenfor i 4.16.

$$\begin{aligned} 6 &= -3k \\ k &= -2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Med den ene ukjente avdekket, startet de på nytt med den opprinnelige likningen, nå med bare én ukjent: t.

$$
\begin{aligned}
3\left(\vec{a}-t\vec{b}\right)-5\vec{b}+3\vec{a} &= -2\cdot\left(t\vec{b}-3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right) \\
3\vec{a}-3t\vec{b}-5\vec{b}+3\vec{a} &= -2t\vec{b}+6\vec{a}-6k\vec{b} \\
-3t\vec{b}+2t\vec{b} &= 6\vec{a}-6\vec{b}-3\vec{a}-3\vec{a}+5\vec{b} \\
-t\vec{b} &= -\vec{b} \\
t &= 1
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Nøyaktig hvilken argumentasjon Harry og Ronny brukte i den siste overgangen kom ikke tydelig frem fra datamaterialet. Paret har tydelig vist at de kjente til regelen som gir den matematisk riktige overgangen (regel 4.7), men samtidig er det lett å gå i fella og dividere begge sider av likningen med $\vec{b}$ slik som Hermine og Lavendel gjorde på oppgave 4.12.

Kapittel 5

Introduksjon til analysene

I de neste to kapitlene av denne teksten skal jeg kartlegge og beskrive noen av egenskapene ved hjelpemidlene som blir brukt under sesjonen med oppgavejobbing beskrevet i seksjon 3.5.2, samt noen de hjelpemidlene elevene selv beskriver under intervjuene beskrevet i seksjon 3.5.3. Det som preget den første sesjonen, var at elevene kun hadde tilgang på de hjelpemidlene de selv valgte å ta med ut på rommet sesjonen foregikk på og de tre interne hjelpemidlene fra Campus Inkrement. Det vil si at hjelpemidler som for eksempel foreldre, læreren og andre former for kommunikasjon var utilgjengelige. Fra intervjuene vil jeg fokusere på hva elevene selv svarte om deres egen hjelpemiddelbruk. Jeg forventet at det de sa både ville motsi det jeg observerte, men også supplere og utdype det. Hjelpemidlene som ble diskutert her vil også være situasjonsavhengige, som vil si at noen av dem ikke er like hjelpsomme eller like tilgjengelige i alle situasjoner. Dette vil beskrives i de tilfellene det faller naturlig. De fire elevene fra 1T-kurset, som under intervjuet var samlet i samme rom, var en viktig kilde til min kartlegging av hjelpemidlene som brukes på dette nivået i matematikkopplæringen. Fra R1-kurset kunne bare tre av fire elevrespondenter stille til intervju. Disse tre tilbød også innsikt inn i flere interessante perspektiver.

I kapittel 6, 7 og 8 vil jeg anvende teorien om instrumentell skapelse. Da legger jeg til grunn at hjelpemidlene og løsningsmetodene i seg selv er artefakter. Jeg vil, med bakgrunn i observasjonen og intervjuene, presentere ulike begrensninger og muligheter knyttet til de forskjellige artefaktene. Jeg vil også presentere ulike instrumenterte teknikker, de observerbare delene av de mentale skjemaene tilknyttet bruken av artefaktene, som kommer til syne fra disse datakildene.

Jeg vil, i de tilfellene hvor det ble observert, presentere de instrumenterte teknikkene elevene demonstrerer. I teorikapitlet snakket jeg om bruksskjema, elementære metale organiseringer for å gjennomføre en aksjon som bygger opp de instrumenterte handlingsskjemaene. I de tilfellene hvor bruksskjemaene er av interessante har jeg laget instrumenterte handlingsskjema for å illustrere dem.

I det første analysekapittelet vil jeg se på Campus Inkrement som en egen artefakt, og dermed beskrive bruken av tre særegne hjelpemidler – automatisk tilbakemelding, fasit og videoleksjoner – som er innebygd i det digitale læreverket elevene jobber med. Jeg vil se på hvilke muligheter og begrensninger hvert av disse hjelpemidlene innehar, og hvordan disse påvirker elevene og deres bruk av Campus Inkrement som artefakt.

Kapittel 6

Analyse av Campus Inkrement som artefakt

Før jeg starter på analysen av artefakten Campus Inkrement, vil jeg bruke et avsnitt på å redegjøre for læreverket Campus Inkrement. Taksonomien av digitale tjenester (seksjon 2.1) sier av digitale læreverk er de ment å dekke alle behov for innhold i et fag. Campus Inkrements sine læreverk er bygget etter Kunnskapsløftet (LK20) og inneholder teori, oppgaver, diskusjoner og prøver. Teorien presenteres i hovedsak gjennom videoleksjon og eksempler, men det finnes også korte sammendrag av teorien i tekstformat. Oppgavene er integrert i nettsiden til Campus Inkrement og evalueres digitalt i nettleseren. Hvilke fremgangsmåter og hjelpemidler som brukes på siden bestemmes av den enkelte bruker. Diskusjoner og prøver kan benyttes der læreren anser det som fornuftig. Systemene som er inkludert i læreverket er godt egnet til å samle inn og presentere data om hver enkelte elev eller klassen som helhet. På denne måten kan læringen tilpasses den enkelte eller felleskapet. Selv om Campus Inkrement kan brukes som den eneste kilden til innhold, er utviklerne åpne om at det også er fint og bruke det i kombinasjon med andre læreverk og læremidler.

6.1 Automatisk tilbakemelding

En av de største forskjellene mellom å jobbe med oppgaver analogt og å jobbe med oppgaver digitalt er muligheten for å få automatisk tilbakemelding på alle avgitte svar umiddelbart. Dette innebærer at når man har tastet inn et tall eller uttrykk i et inntastingsfelt og trykker på Enter-knappen, eller har huket av på ett eller flere alternativer, får man vite umiddelbart om man har besvart oppgaven riktig eller feil. Denne delen av artefakten Campus Inkrement, automatisk tilbakemelding, påvirker elevene på flere ulike måter når de avgir svar i på oppgaver. Det kan brukes, slik som Grylius og Vincent fra 1T-kurset gjorde, for å teste sluttproduktet av flere ulike løsningsstrategier. På oppgave

3.1.5c (figur 4.3) hvor man skal komme frem til de to løsningene av likningen $4x^2 = 2x^2 + 8$ finner paret den første løsningen $x = 2$. Disse to elevene sliter tilsynelatende med potenser, noe som fører til at de har flere ulike gale forslag til den andre løsningen. Ved å teste flere ulike løsninger og se hvilke som gir positiv tilbakemeldinger, kan elevene finne ut hvilke av de tilhørende løsningsstrategiene som er riktige. Etter bare ett eksempel dukker det opp flere muligheter og begrensninger knyttet til denne artefakten.

6.1.1 Muligheter ved den automatiske tilbakemeldingen

Den største muligheten dette hjelpemidlet tilbyr til elever som jobber digitalt er at de får umiddelbar respons på om de har funnet det riktige svaret eller ikke. Slik som Skinner poengterte om sine egne læringsmaskiner, slipper elever som får slik automatisk bekreftelse på sine arbeider å vente på retting fra en lærer (Giovanni Bonaiuti, 2011). Dette er en gyllen mulighet som raskere tillater elevene å møte på oppgaver med riktig mengde utfordring. Som Harry trekker frem under intervjuet: «Jeg foretrekker å være sikker på at jeg har mestret en type oppgave, før jeg starter på vanskeligere utfordringer». Elevene som slipper å vente på retting fra læreren kan starte på nye utfordringer umiddelbart. Læreren som slipper å bruke tiden sin på å bekrefte riktigheten til hver enkelt elevs mange svar, kan i stedet bruke tiden på veiledning av de som oftest støter på gale svar. Jo mer frigjort læreren er fra elevgruppen som helhet, desto mer tid kan hen bruke på å være en medierende hjelper til elevene som sliter mest. De sterke elevene får styrt sitt eget løp og de svake elevene får hjelpen de trenger til å nå yttergrensen til sin proksimale utviklingssone (Vygotsky, 1978).

På et punkt kan man argumentere for at Campus Inkrement har forbedret brukeropplevelsen fra Skinner sin tid. Dette punktet er hvordan man mottar tilbakemelding. Fra Skinners læringsmaskin fikk man tilbakemeldingen i form av selve fasiten. Det vil si at man ikke fikk flere forsøk på å løse en oppgave, da kunnskapen om hva svaret er kunne blitt et hinder. I løpet av de fire videoopptakene ble det observert flere ganger at parene gjør feil. De avgir svar og får den negative tilbakemeldingen: «Ikke riktig svar! Du kan prøve igjen eller vise fasit». Campus Inkrement gir dem altså valget mellom å prøve igjen og se fasiten. Dermed kan man i praksis forsøke å løse en oppgave så mange ganger man selv vil. Elevene avslører under intervjuet hvor mange ganger de vanligvis forsøker å løse en oppgave før de sjekker fasiten:

DRACO: Altså, jeg prøver alltid igjen et par ganger. Enten prøve en helt ny utrekning, eller gjøre utrekningen helt på nytt, hvis jeg ikke ser det med en gang. Fortsetter det å gå til helvette ser jeg på fasiten. Noen ganger, hvis jeg ser jeg var nærme, tar jeg bare og fortsetter å regne helt til jeg får samme svaret som fasiten. Hvis ikke kopierer jeg svaret fra fasiten og går videre.

GRYLIUS: To til tre ganger kanskje.

PATREA: Alt fra en gang til fem ganger.

VINCENT: Ja, to-tre ganger.

Dette tyder på at elevene, til en viss grad, klarer å motstå fristelsen til å vise fasiten. Det viser at de har pågangsmotet til å gå på et par smeller før de gir opp. De tar den spede tilbakemeldingen til hjertet og går igang med et nytt forsøk.

I det følgende utdraget blir elevene fra R1-kurset spurt om hva de vanligvis gjør om de er usikre på en fremgangsmåte de bruker, mens de jobber for seg selv.

INTERVJUER: Hvis dere får riktig på en oppgave, men var veldig usikre på fremgangsmåten, går dere også da videre til neste oppgave?

HARRY: I Campus er oppgavene organisert på en sånn måte at det kommer flere like oppgaver etter hverandre, bare litt vanskeligere. Man får fort prøvd og gjort det samme, eller tilnærmet det samme, i neste oppgave. På denne måten får man dobbeltsjekket fremgangsmåten.

HERMINE: Neste oppgave pleier å være ganske lik. Får du feil svar da med samme fremgangsmåte, vet man at man kanskje gjorde feil på forrige oppgave.

Det de sier forsterker sammenlikningen mellom Campus Inkrement og en av Skinners læringsmaskiner. Når de jobber med oppgavene i den tiltenkte rekkefølgen opplever de at den medfølgende kontinuiteten tilrettelegger for læringen deres og at den tillater dem å oppdage at det eksistere en misoppfatning om fremgangsmåtene. Tilbakemeldingene er dessverre til ingen nytte når det kommer til å avdekke hva misoppfatningene er. Selv om de var usikre på om fremgangsmåten de brukte var gyldig valgte de å forlate den aktuelle oppgaven. De tenker at hvis fremgangsmåten er ugyldig vil den, etter gjentatt bruk, til slutt føre til et feil svar. På denne måten bruker elevene muligheten

Campus Inkrement gir dem til å finne ut om svaret er korrekt eller ukorrekt til å reflektere over sine egne løsningsstrategier.

Det følgende utdraget er hentet fra intervjuet med elevene fra R1-kurset:

INTERVJUER: Ser dere på den automatiske tilbakemeldingen fra Campus et hjelpemiddel?

HERMINE: Ja, det er så slitsomt å bla bak i boka for å finne fasiten. Det er lettere å bare trykke og så få at det var feil eller rett.

LAVENDEL: Det er også mye lettere, hvis du gir opp oppgaven. Da skriver du bare inn noe, og så kan du trykke på vis fasit. Da kan man ende opp med å bare skrive ned det svaret da. Jeg har hvertfall gjort det noen ganger.

HARRY: Det gir jo en viss mestringsfølelse da, å få det riktige svaret.

Disse elevene har ulike strategier for hvordan de bruker tilbakemeldingene de får. Hermine og Harry opplever det som et enkelt hjelpemiddel å ta i bruk for å sjekke svaret. Lavendel viser at hun bruker tilbakemeldingssystemet for å komme rett til fasiten, uten å bry seg om svaret var riktig eller galt. Når tilbakemeldingene elevene får ikke blir brukt konstruktivt lenger, skaper det en begrensning ved hjelpemiddelet som fører til at de bruker det for å komme seg gjennom oppgaven, uten at de ønsker å lære eller forstå innholdet.

6.1.2 Begrensninger ved den automatiske tilbakemeldingen

Den første og kanskje største begrensningen ved dette hjelpemidlet er at det kun skiller mellom riktige og gale svar. Det eksisterer ingen mellomting mellom riktig og galt. Dette kan være problematisk for elevene i flere ulike situasjoner. For 1T-elevene som jobbet mye med andregradslikninger med to løsninger hadde det vært hjelpsomt å få vite om man har funnet en av to riktige løsninger. Jeg så dette skje med Grylius og Vincent på oppgave 3.1.5c (figur 4.3), hvor de relativt kjapt finner den første løsningen $x = 2$. Slik som det er i Campus Inkrement nå, får de ingen antydning til at de har funnet én riktig løsning. Dermed vil svarene som bare inneholder én riktig løsning, regnes som feil av systemet, og tilbakemeldingene elevene får reflekterer dette. Under gruppeintervjuet ble de fire elevene fra 1T-kurset spurt om deres tanker rundt den automatiske tilbakemeldingen:

INTERVJUER: Ser dere på den automatiske tilbakemeldingen dere får fra Campus som et hjelpemiddel?

DRACO: Den sier jo om jeg får riktig eller feil svar, som er en viss pekepinn. Bortsett fra det gjør det jo egentlig veldig lite.

PATREA: Jeg skulle ønske at Campus ga utregning eller i det minste en form for hint. Ideelt sett kunne det vært et ordentlig forslag til en løsning som var i tråd med de metodene vi lærer.

VINCENT: Ja, for slik det er nå får man ingen hjelp til å komme seg videre. Altså, man får feil, men man er ikke noe klokere på hvor man skal videre, eller hva man gjør feil.

Patrea trekker frem enda en begrensning ved den automatiske tilbakemeldingen. Det at man ikke mottar noen former for hint eller veiledning fra systemet de jobber i, gjør det vanskeligere for elevene å være autonome i egen opplæring da de i større grad må støtte seg på læreren og medelevene sine. Det finnes vurderingssystemer slik som STACK (Sangwin, 2013) som er utviklet til å gi tilpassede hint og tilbakemeldinger. Her til lands finnes det også systemer som kan gi hint og løsningsforsalg i form av det digitale læreverket coSinus (Cappelen Damm, 2022). Det virker å være unødvendig at elevene som jobber med Campus Inkrement må slite med disse problemene når teknologien finnes der ute og er i bruk.

Fra teorikapittelet konseptualiserte Hattie & Timperley (2007, s. 81) tilbakemelding som informasjon, levert av en formidler, som omhandler aspekter av ens prestasjoner eller forståelse. Formidleren som leverer tilbakemeldingene her er selve systemet utviklet for Campus Inkrement, som sjekker elevens inntasting opp mot den lagrede verdien for oppgavens svar. Som tidligere nevnt gir dette systemet kun tilbakemelding på om hvorvidt det inntastede svaret er riktig eller galt. Dette er tilbakemeldinger som eksklusivt tilhører nivå det første nivået fra Hattie og Timperley (2007) sin modell. Tilbakemeldingene fra Campus Inkrement mangler flere av aspektene som gjør dette nivåets tilbakemeldinger effektive. Tilbakemeldingene kan ikke brukes til et eneste formål i ettertid av at den er gitt, hverken til å forbedre egen selvreguleringen eller egne strategier. Gjerne skal tilbakemeldingene være til hjelp med å tilegne seg mer informasjon eller ny informasjon, samt å bygge mer overflatekunnskap (Hattie & Timperley, 2007, s. 91), noe tilbakemeldingene ikke gjør. En tilbakemelding som hadde vært til hjelp for Vincent og Grylius som jobbet med oppgave 3.1.5c kunne vært «Samle alle ledd med x alene på venstresiden og alle tall på høyresiden».

En begrensning ved bruken av Campus Inkrement spesifikt under innspillingen av videoopptakene, var at elevene jobbet med oppgaver fra flere ulike delkapitler og flere kapitler i deres respektive matematikkurs. Dette gjorde at den tiltenkte rekkefølgen på oppgavene fra utviklerne bak Campus Inkrement ble sett bort fra. Dette går mot en av de viktigste forutsetningene Skinner presenterer i sin informasjonsvideo, nemlig det at oppgavene skal være så like hverandre at ingen elever skal falle av i overgangen og at hvert steg skal være tilstrekkelig lite, slik at hver elev klarer å ta det.

Som Draco insinuerer har de ikke funnet noen meningsfulle måter å bruke den automatiske tilbakemeldingen på. Mangelen på denne meningsfylte samhandlingen mellom artefakten og brukeren, omtalt av Drijvers og Gravemeijer (2005, s. 166), gjør at man ikke kan snakke om automatisk tilbakemelding som et hjelpemiddel som påvirker elevene i særlig positiv grad.

Til slutt ønsker jeg å også trekke frem Skinners læringsmaskiner igjen. Som du Boulay (2019) nevner i sin tekst er slike nymotens *intelligente læringsmiljøer* (Intelligent Learning Environments) ofte kritiserte for å iverksette en gammeldags behavioristisk tilnærming til læring, bare i en ny teknologisk drakt. Ser man tilbake på Skinners faktiske læringsmaskiner, ser man at det er mange likhetstrekk mellom dem og oppgavedelen av Campus Inkrement.

6.1.3 Instrumentert teknikk ved den automatiske tilbakemeldingen

En instrumentert teknikk som elevene ser ut til å ha utviklet fra det automatiske tilbakemeldingssystemet er å teste ut forslag til svar som de har kommet frem til. Etter at elevene har løst en oppgave kan de taste inn svaret sitt for å bekrefte eller avkrefte om svaret, og dermed løsningsmetoden deres var gyldig. Jeg tolker at denne teknikken kan være både til hjelp for å utvikle ny kunnskap, men samtidig være en lettvint løsning som oppfordrer til gjetning.

Begrensningene knyttet til denne delen av artefakten ser ut til å veie tyngre enn mulighetene, noe som ikke gjør de automatiske tilbakemeldingene i Campus Inkrement til et optimalt hjelpemiddel for å *løse* oppgavene.

6.2 Fasit

Skriver man inn et svar som Campus Inkrement ikke godkjenner vil man alltid bli møtt med beskjeden «Feil svar. Trykk her for å se fasit». Trykker man på her får man oppgitt det ene tallsvaret eller uttrykket Campus Inkrement godkjenner. Hvordan dette brukes som et hjelpemiddel varierer nok i stor grad fra elev til elev og fra par til par.

Jeg vil i denne seksjonen identifisere de ulike begrensningene og mulighetene som følger fra den innebygde fasiten i Campus Inkrement. For å belyse tematikken presenterer jeg følgende utdrag fra intervjuet hvor elevene fra 1T-kurset meddeler sine tanker om fasitfunksjonen:

INTERVJUER: Dere nevner fasiten, er det et hjelpemiddel?

DRACO: Ja, men nei. Fordi, på en måte, kan jeg bruke fasiten til å reverse engineere mattestykket. Jeg finner ut hva som er på den ene siden av likhetstegnet og hva som er på den andre. Dermed kan jeg jobbe meg tilbake slik. Klassikeren for når du derimot ikke gidder å gjøre matteleksa, er å trykke på «vis fasit» og kopierer svaret, laster inn siden på nytt og limer inn svaret. Jeg hadde løyet, hvis jeg sa at jeg ikke hadde gjort det på noen oppgaver.

PATREA: Ja, samme.

INTERVJUER: Er dere enige? ((Spørsmål rettet mot Grylius og Vincent))

GRYLIUS: Ja, sånn fasit hvor det bare står svaret, er ikke så kjempehjelpsomt.

VINCENT: Ja.

En fasit kan i følge elevene brukes på to forskjellige måter, enten for å sjekke et svar uten å tenke noe videre over hvorfor svaret er som det er, eller så kan den brukes til å jobbe seg bakover fra svaret til å finne en strategi. Hvis fasiten brukes bare for å «skrive inn det riktige svaret», så mister fasiten det meste av sitt bruksområde. Svaret på en oppgave er generelt sett veldig uinteressant i seg selv. Det er måten man kommer frem til svaret som er av betydning for å lære noe, og dermed kan fasiten brukes til å sjekke om fremgangsmåten man har brukt har ledet til riktig svar.

6.2.1 Begrensninger ved å bruke fasiten

Metoden som Draco i sitatet ovenfor betegnet som en klassiker virker å være en institusjonalisert og innøvd måte å bruke fasiten for å unngå og gjøre matematikken. Under intervjuet kom det frem at denne metoden ofte brukes i situasjoner hvor elevene opplever tidspress. I følge Patrea oppstår slike situasjoner gjerne «ti minutter før mattetimen på bussen eller i timer i andre fag, idet man innser at man har glemt å gjøre matteleksa». Denne spesifikke varianten av metoden involverer ingen innsats rettet inn mot å faktisk løse oppgaven.

Grylius supplerer utsagnene til Draco med å si at en fasit, i ordets forstand, altså resultatet av et matematikkstykke, ofte ikke er til stor hjelp. Begrensningen til fasiten, er at den ikke antyder hvilken metode som kan eller bør brukes. Det eksister ingen løsningsforslag til oppgavene på Campus Inkrement. Som jeg senere vil poengtere fører denne mangelen til at elevene går på leting etter og finner nye hjelpemidler.

Paret bestående av Vincent og Grylius bruker fasiten på en litt annen måte når de jobber med oppgave 4.3.4a (figur 4.6) som inneholdt en ulikhet. Etter flere forsøk på å gjette svaret gir Grylius og Vincent opp og sjekker fasiten. Paret ble svært forundret over at svaret de var ute etter var så forskjellig fra selv deres beste gjetning. Tilsynelatende har paret glemt hvordan man løser ulikheter. Etter å ha fått avslørt fasitsvaret, gjør de ingen forsøk på å bruke den nye innsikten til å lære seg å løse ulikheter. I stedet sier de «Åja, det var ikke i nærheten av det vi trodde» og trykker seg videre til neste oppgave. Den neste oppgaven (4.3.4b, figur 4.9) er en ny ulikhet og den samme problematiske strategien brukes om igjen. Forskjellen mellom denne metoden og metoden Draco skisserer er at den faktisk involverer et forsøk på og et ønske om å løse oppgaven.

Vi ser flere tilfeller av at fasiten vises for å tillate elevene å gå videre til neste oppgave. Elevene trenger ikke avgi et svar og sjekke fasiten for å forsette til neste oppgave, men det virker som dette er det elevene foretrekker å gjøre. Det andre alternativet som er tilgjengelig for elevene er å klikke seg helt ut av oppgaven og navigere seg frem til andre oppgaver gjennom en av de mange menyene på Campus Inkrements nettsider.

6.2.2 Muligheter ved å bruke fasiten

Det at man i søken etter forståelse kan starte med svaret på en oppgave og så jobbe seg bakover er en mulighet i enkelte situasjoner. Draco nevner (i det første sitatet fra denne seksjonen) spesifikt løsninger som inkluderer likhetstegn, men dette er en strategi som kan fungere for mange typer oppgaver, der svaret gir en pekepinn på hvordan man kunne ha løst oppgaven. Et eksempel på dette er når Patrea og Draco i oppgave 3.1.5c (figur 4.4) skulle bestemme verdien av x i en andregradsligning, og de hadde kommet frem til $x = 2$, men ikke klarte å finne den andre løsningen. Etter å ha sett på fasiten at den andre verdien skulle være $x = -2$ skjønte de at løsningsstrategien deres burde inneholdt noe med kvadratrøtter. Denne informasjonen kunne de bruke til å gå tilbake å se på oppgaven med nye øyne.

6.2.3 Instrumentert teknikk ved bruk av fasiten

Fra det som har blitt observert og diskutert med elevene angående fasiten som et hjelpemiddel, virker det trygt å fastslå at denne delen av artefakten Campus Inkrement ikke nødvendigvis bidrar positivt til utviklingen av et instrument for oppgaveløsning. I de tilfellene der elevene klarer å knytte fasitsvaret opp mot eventuelle løsningsstrategier som hadde hjulpet dem, virker den positivt inn. De fleste elevene mangler derimot den meningsfulle sammenknytningen mellom fasiten som et læringsverktøy, og læringsmålet som de skal oppnå.

Den eneste instrumenterte teknikken som er verdt å nevne er Draco sin klassiker som involverer de seks stegene:

- Avgi et vilkårlig galt svar
- Klikke på «vis fasit»
- Memorere fasiten eller kopiere den til utklippstavlen
- Laste inn siden på nytt
- Skrive inn fasiten eller lime den inn og avgi svaret
- Gå videre til neste oppgave

6.3 Videoleksjoner

Bjørn Ove Thue (personlig kommunikasjon, 1. februar 2022) som er pedagogisk ansvarlig for Campus Inkrement, avslører på e-post at læreverket ble bygget rundt prinsippet om *omvendt undervisning* (flipped classroom), der undervisningen blir gitt i i lekse slik at tiden i klasserommet blir frigjort til mer aktive læringsformer. Bergmann og Sams (2012) poengterer at det ikke finnes noe som heter «*the* flipped classroom». Det finnes utallige forskjellige former for omvendt undervisning (s. 6), men likt med disse to amerikanske lærerne bruker Campus Inkrement videoleksjoner som undervisningsform.

6.3.1 Begrensninger ved videoleksjonene

På samme oppgave som ble beskrevet tidligere (oppgave 4.3.4a, figur 4.6), forsøkte Draco og Patrea først å finne hjelpen de trengte ved å oppsøke videoleksjonen som tilhørte delkapitlet om ulikheter.

Problemet med dette er at det bare finnes én videoleksjon per delkapittel/tema, og denne er ofte så grunnleggende at lærdommen den formidler ikke alltid er direkte overførbar til alle problemene som dukker opp i oppgaveseksjonen. Selv om denne fremgangsmåten ikke ga resultater for dette paret på denne oppgaven, er dette en indikasjon på at videoleksjonene er på repertoaret over hjelpemidler som elevene kan finne på å ta i bruk.

Under intervjuet trekker Draco frem en begrensning knyttet til denne delen av Campus Inkrement. Han følger opp med å si noe om hvordan han veide opp for denne begrensningen.

DRACO: Det du får i videoleksjon og det du får i oppgave er på helt forskjellig nivå av .. faglig avansert. Og når du da ikke vet hvordan du skal regne ut det som er på siste oppgaven, så hadde det vært fint med litt veiledning. Det er kanskje hovedgrunnen til at jeg fant den MathPapa-siden, for der får man hjelp.

VINCENT: Jeg føler oppgavene hopper veldig frem og tilbake i vanskelighetsgrad. De er i det minste markert med en farget figur som sier noe om vanskelighetsgraden.

Begrensningen Draco snakker om er et uhensiktsmessig stort gap mellom det faglige nivået på videoleksjonen og oppgavene i oppgavesamlingen. Nivået på videoleksjonen er egnet til å sette elevene i gang med den første oppgaven i oppgavesamlingen, men som Vincent poengterer er ikke alltid rekkefølgen på oppgavene optimal med tanke på progresjon. På grunn av disse hoppene, minsker nytten av videoleksjonen betraktelig jo lengre ut i oppgavesamlingen man kommer. Dette funnet viser hvordan Campus Inkrement, når det kommer til jobbing med oppgaver, ikke engang er på høyde med B.F. Skinners mekaniske læringsmaskiner fra 50-tallet. Skinner mente at oppgavene skulle presenteres i en slik rekkefølge at sjansen for at en elev gjør feil var minimal. Dette kan, etter min oppfatning, ikke sies å være ivaretatt på Campus Inkrement.

Dette gapet ble observert da Patrea og Draco ønsket en tilførsel av ny kunnskap eller et nytt perspektiv på den første ulikhetsoppgaven (oppgave 3.1.5a, figur 4.6) og oppsøkte videoleksjonen til temaet om ulikheter. De hoppet raskt gjennom videoen og eksemplene før de konkluderte med at det var til ingen nytte.

Lavendel fra R1-kurset supplerer det 1T elevene mente om videoleksjonene: «Det er kanskje litt for få eksempler for hvert tema og de er gjerne veldig enkle. Som er bra for en første gjennomgang, men det hjelper ikke med de vanskeligste oppgavene». Det er sjeldent mer enn to eksempler tilknyttet hvert tema sin videoleksjon, og som Lavendel påpeker er ingen av dem tilstrekkelig avanserte for å være til hjelp med å løse mest krevende oppgavene.

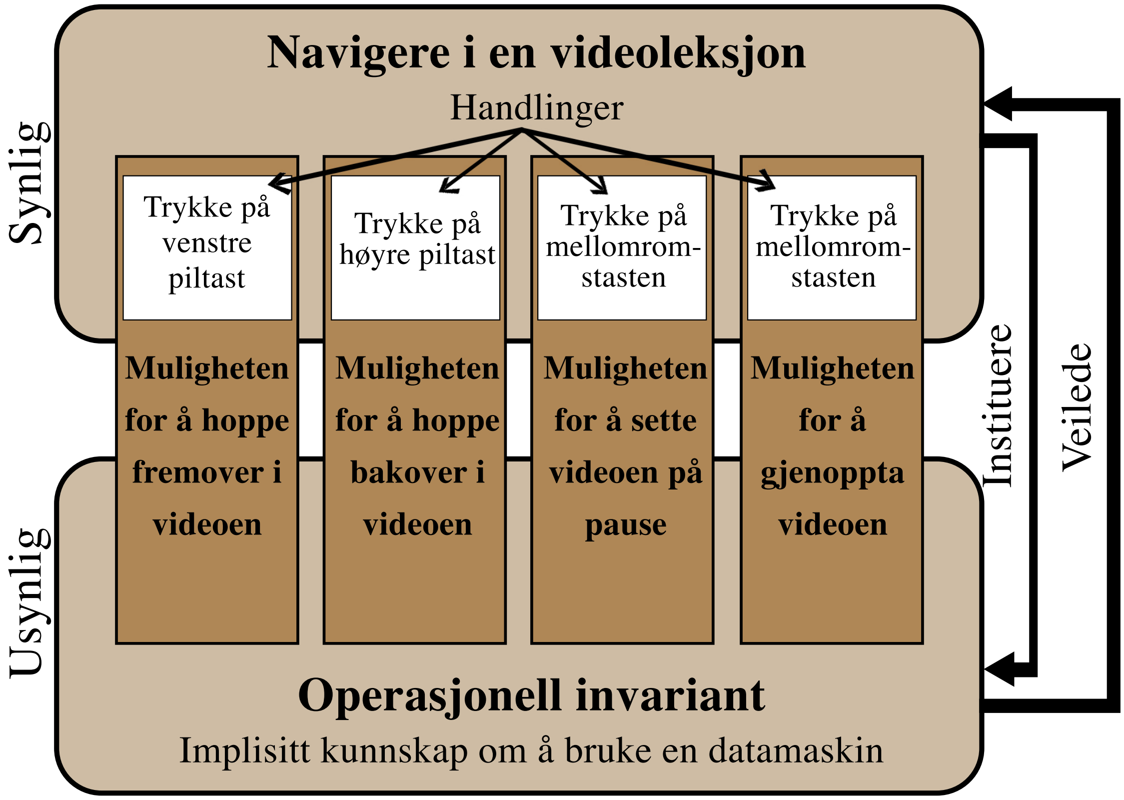
Harry følger opp med enda en begrensning, han sier: «Det er teit at man .. man kan ikke spørre om hjelp når man sitter hjemme og ser video i lekse. De spørsmålene man lurer på fra videoen, må jeg liksom spekulere på selv, helt til jeg er tilbake i klasserommet og kan spørre læreren». Harry som opptrer som en elev som liker å skjønne ting raskt og ikke liker å bli holdt i mørket, synes det er teit å måtte vente til neste mattetime for å få svar på det han lurer på.

6.3.2 Muligheter ved videoleksjonene

Harry fra R1-kurset trekker en mulighet angående videoleksjonene. Han var forsåvidt den eneste som pekte på en eventuell muligheter ved videoen: «Det er fint at man i en video kan sette på pause og spole tilbake. Det hjelper når temaene som gjennomgås er vanskelige og hvis man har god tid på å gjennomgå». Videoleksjonene kan settes på pause og sees om igjen etter eget ønske. Videoleksjonene blir gjerne gitt i lekse slik at elevene stiller mer forberedt til aktivitetene som skal skje i timen, jamfør prinsippet om omvendt undervisning. I motsetning til en gjennomgang med læreren i plenum, som ikke kan settes på pause, er dette en måte å sørge for at alle faktisk kan starte på de planlagte aktivitetene på lik linje. Den svake eleven trenger kanskje å se videoen flere ganger for å oppnå forståelse, mens den sterke eleven kan hoppe kjapt gjennom hele videoen. Dette er i tråd med Skinners prinsipp om et elevtilpasset tempo.

6.3.3 Instrumentert teknikk ved bruk av videoleksjoner

En instrumentert teknikk som kommer til syne, gir meg innsikt i hvordan elevene faktisk bruker videoleksjonene som hjelpemidler etter at de har startet på oppgavene i oppgavesamlingen. Denne instrumenterte teknikken inneholder fire ikke-trivielt bruksskjema. Disse bruksskjemaene involverer bruken av høyre- og venstre piltast samt mellomromstasten på tastaturet (dette visualiseres i figur 6.1). Disse piltastene tillater elevene å hoppe to sekunder frem og tilbake i videoen. Dette bruksskjemaet er en viktig del av det instrumenterte handlingsskjemaet og fullfører den instrumenterte teknikken. Elevene trenger ofte ikke se hele videoen uavbrutt for å skjønne om den vil være til nytte, dermed bruker de piltastene til å spare inn tid, som kan brukes til å oppsøke andre løsningsmetoder. De bruker mellomromstasten til å sette videoen på pause for å ta inn over seg matematikken på skjermen uten fare for at foreleseren går videre. Når de har fått med seg innholdet trykker de igjen på mellomromstasten for å starte videoen igjen.



Figur 6.1: Instrumentert handlingsskjema for videoleksjoner. Figuren et tilpasset etter Nygård (2022).

Kapittel 7

Analyse av eksterne hjelpemidler i matematikk

I dette kapittelet skal jeg fokusere på hjelpemidler som er uavhengig av det digitale læreverket som brukes. Med andre ord er dette hjelpemidler utenfor Campus Inkrement, som elevene enten har funnet selv, eller blitt tipset om gjennom undervisningen. Disse hjelpemidlene og metodene er anvendelig både når man jobber analogt og digitalt med matematikk, men sees her i sammenheng med hvordan de har blitt brukt for å tilføre ekstra hjelp med oppgaver i Campus Inkrement.

7.1 Den matematiske samtalen

Dialog, eller den matematiske samtalen, er et av de kraftigste hjelpemiddelet som tas i bruk blant de fire parene som ble gjort opptak av. Dette hjelpemidlet kan brukes i alle grener av matematikk, med tanke på at det uansett oppgavetype er til hjelp å snakke sammen for å nå frem til en løsning.

7.1.1 Muligheter ved den matematiske samtalen

Vincent og Grylius benytter seg av dialog som hjelpemiddel, riktignok i sparsommelige mengder. På flere oppgaver ytrer ingen i paret ett eneste ord. På disse oppgavene jobbet de i stillhet, med andre hjelpemiddel og avgir svaret til den som ble først ferdig. Når dialog først ble tatt i bruk, ble det enten brukt for å oppklare hva oppgaveteksten ber om eller for å sikre et felles utgangspunkt på oppgaven. Et eksempel på det første tilfellet finnes på oppgave 2.2.7c (figur F.3, denne oppgaven har ikke fått en egen faglig analyse). På denne oppgaven måtte 1T elevene først koble riktige fysiske enheter til de størrelsene som er oppgitt i formelen, slik som at spenning U måles i volt og strøm

I måles i ampere. Paret satte av omtrent et minutt på å oppnå en felles forståelse av de ulike symbolene, enhetene og størrelsene før de jobbet gjennom oppgaven for seg selv. Det forekommer ander eksempler på slik bruk av dialog i videoopptaket av dette paret.

Vincent og Grylius bruker også dialog i en annen sammenheng senere. På oppgavene som inneholder andregradslikninger, men som ikke er på formen $ax^2 + bx + c$ (Oppgave 3.1.5 a, b og c, figur 4.1, 4.2 og 4.3) bruker de dialog som en del av deres utvalgte metode. Metoden de valgte for å løse likningene, var å teste ulike x-verdier og sjekke om hvorvidt de oppfylte likningene. Denne metoden, kombinert med at elevene ikke var stødige på hvordan man regner med potenser, gjorde at denne bolken med oppgaver var utfordrende. Når man skal teste de fleste heltallsverdiene i omegn av 0, blir det mye tid til dialog. Når elevene hadde valgt ut en x-verdi å teste, snakket de seg frem til verdien for venstre side og høyre side av likhetstegnet og sammenliknet. Da dette ofte slo feil, måtte dette paret rekke enda lengre ned i verktøykassen og ta i bruk det neste hjelpemidlet på lista.

I tillegg til å bruke dialog som et middel for å få en samlet og felles forståelse for et matematiske problem og dets premiss, bruker Patrea og Draco dialog til å forklare og utarbeide en felles forståelse for en oppgaves løsning. Dette kan sees på oppgave 3.1.5a (figur 4.1) hvor Draco løser oppgaven på den tiden Patrea har skrevet ned likningen. Det ender opp med at Patrea, i stedet for å starte på oppgaven, ber om en forklaring av løsningen fra Draco. I den påfølgende dialogen forklares og utspørres det i like mengder. Når dialogen tilknyttet denne spesifikke oppgaven ender, virker det å ha oppstått en felles forståelse mellom elevene og de går videre med stor tilfredshet.

På senere oppgaver, hvor begge elever i paret starter en oppgave med likt utgangspunkt får jeg innblikk i en type dialog som er noe annerledes. For ingen av elevene i paret er veien til svaret på det aktuelle problemet kjent, men sammen, gjennom dialog, finner de den. Man ser dette spesielt på oppgave 3.1.5b og 3.1.5c (figur 4.2 og 4.3) hvor det er en likning av andre grad, men som ikke er skrevet på formen $ax^2 + bx + c = 0$ og som heller ikke inneholder alle tre ledd av grad 0, 1 og 2. Som følge av dette er hver oppgavene av denne typen tilstrekkelig unike til at løsningsstrategien fra den foregående oppgaven ikke kan gjentas direkte på den nye. Elevene må snakke sammen for å oppdage det som er unikt og løse oppgavene.

I de tilfellene hvor deltakerne i samtalen ikke er på samme kunnskapsnivå er det fremdeles et stort læringsutbytte å hente for elevene på begge endene av skalaen. For elevene som er på det laveste kunnskapsnivået er det til stor hjelp å snakke med en elev som har god kontroll og kan forklare et konsept eller metode på lekmannspråk. For elevene på det høyeste kunnskapsnivået er det til stor hjelp å måtte forklare et konsept eller en metode til noen andre. På denne måten får man testen hvor godt man egentlig har skjønt disse temaene. Eleven som blir utfordret til å forklare til en medelev ender opp med rollen som formidler. Formidlerrollen som jeg presenterte i teorikapitlet til Hattie og Timperley (2007) sin tilbakemeldingsteori, involverer å kunne bistå med tilpassede tilbakemeldinger til de som trenger det. Medelever, som til tross for en mangel på en pedagogisk opplæring, kan gi tilbakemeldinger på alle fire nivåer av definert av Hattie og Timperley (2007). Elever som gir tilbakemeldinger til hverandre er trolig mer utsatt for å bruke tilbakemeldinger fra det fjerde nivået, tilbakemeldinger som går direkte på medeleven.

I denne situasjonen får eleven i formidlerrollen også rollen som medierende hjelper. Ved å dele sin innsikt og kunnskap med en medelev, vil medeleven bevege seg nærmere kanten av sin proksimale utviklingssone (Vygotsky, 1978).

7.1.2 Begrensninger ved den matematiske samtalen

En begrensning ved denne artefakten er at det fort kan gå fra å være en dialog til å være en monolog hvis kunnskapsnivået mellom talerne er for spredt. Dette kunne vært tilfellet i situasjonen beskrevet ovenfor hvor Draco forklarer sin løsningsstrategi til Patrea. I dette paret var det til en hver tid en sunn balanse mellom hver deltakers bidrag til dialogen, slik at dette ikke ble en monolog. Denne begrensningen ble observert mellom Harry og Ronny på oppgave 5.4.3a (figur 4.12). Harry beretter om sin løsningsmetode, mens Ronny er en uoppmerksom lytter. Ronny virker mest fokusert på at beretningen skal komme til en ende slik at han kan taste inn det endelige svaret, og får tilsynelatende ikke med seg ett eneste steg i løsningsmetoden til Harry. Harry har vist at han er den sterkeste av de to elevene i paret, og på oppgavene om parallelle vektorer som var de vanskeligste i oppgavesettet, blir forskjellen i kunnskapsnivåene mellom dem svært tydelig.

7.1.3 Instrumentert teknikk ved den matematiske samtalen

Dialogen trenger ikke være i gang kontinuerlig for å være meningsfull. En instrumentert teknikk viser seg å være utbredt blant alle parene, hvorpå begge elevene først utfører sin egen utregning i stillhet. Når begge elevene har kommet frem til et svar, går de gjennom løsningsmetodene steg for steg og diskuterer hva som ble gjort. Hvis elevene på et tidspunkt har gjort ulike steg, oppstår en diskusjon som gjerne kan ha flere utfall. Utfallet kan være at én elev har gjort en feil, at begge elevene har gjort en feil eller at elevene har gjort to ulike, men fremdeles gyldige steg. På denne måten lærer begge elevene mer enn hvis de bare sjekket om de fikk samme svar.

7.2 Blyant og papir

Denne artefakten har vært sentral innen matematikken i flere århundre, i flere ulike varianter. Fra fjærpenn og pergament, gjennom blyant og papir til moderne tider med elektronisk penn og nettbrett, har den skriftlige matematikken vært enestående. Gjennom min egen observasjon virker det ikke som at blyanten og papiret har mistet sin plass i den videregående opplæringen. Dette kan tenkes å være på grunn av at elevene fra tidlig alder har startet på utviklingen av artefakten til et instrument.

7.2.1 Muligheter ved blyant og papir

Foruten å være et velegnet verktøy for å uttrykke skriftlig matematisk symbolspråk, har man gjennom bruken av blyant og papir muligheten til å skaffe seg oversikt over et problem ved å tegne figurer. Man kan se dette blant annet på oppgave 2.5.3a (figur F.4, denne oppgaven har ikke fått en egen faglig analyse), hvor elevene skulle finne likningen til en lineær funksjon. Når Grylius ikke visste hva origo var, tok Vincent opp blyanten og tegnet et enkelt koordinatsystem. Han pekte så på skjæringspunktet mellom aksene og sia «dette er origo» og la til koordinatene $(0, 0)$ ved punktet. Med situasjonen tilsynelatende krystallklar for begge elevene bruker de kort tid på å finne formelen for den aktuelle lineære funksjonen.

Vi ser også representanter fra hvert par ta i bruk den mest vanlige måten å benytte seg av blyant og papir, som involverer å skrive ned og løse et matematisk problem steg for steg. Mulighetene her er mange og begrensningene få. Starter man med en likning og jobber med den ender man oftere enn ikke i nærheten av svaret. Innser man at man har gjort en feil, kan man viske ut utregningen som inneholder feilen og potensielle følgefeil.

Både når det er snakk om å tegne hjelpefigurer og å løse regnestykker, tillater blyanten elevene å gjøre de mentale konstruksjonene i sinnet sitt om til noe fysisk på papiret. Å løse likninger utelukkende ved hjelp av hoderegning er mulig, men ofte mer krevende enn det er verdt. Dermed velger man å representere det man har i hodet fysisk på papiret for å hjelpe tankeprosessen. Denne artefakten tillater også matematikkens brukere med å effektivt kommunisere med hverandre. Jeg observerte Grylius og Vincents forsøk på å løse likningen $4x^2 = 2x^2 + 8$ (oppgave 3.1.5c, figur 4.3) utelukkende ved å kommunisere muntlig. I denne situasjonen hadde Grylius og Vincent trolig vært tjent med å skrive ned likningen i skrivebøkene sine og bearbeidet den.

7.2.2 Begrensningner ved blyant og papir

Fra det innsamlede datamaterialet fremkommer det ingen betydelige begrensninger ved bruken av blyant og papir. Dette er en artefakt som tilsynelatende bare virker positivt, spesielt når det kombineres med andre artefakter.

7.3 Google

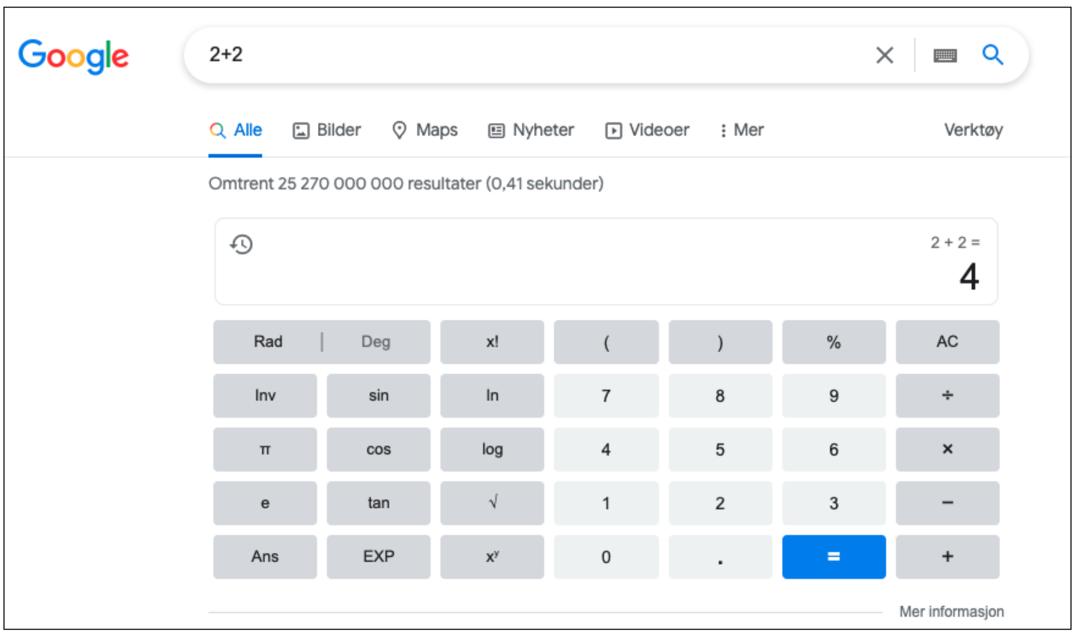
Søkemotoren Google er et nyttig hjelpemiddel i så og si alle fag i den videregående skolen og matematikk er intet unntak. Ved analyse av videoopptaket av Patrea og Draco, fant jeg to forskjellige måter elevene bruker Google som hjelpemiddel.

7.3.1 Muligheter ved Google

Den første og antakeligvis den mest vanlige måten elevene bruker Google på i matematikkfaget er som en kalkulator. Ved å «søke» på et regnestykke vil det første resultatet som dukker opp på nettsiden være det aktuelle stykkets svar. Dette bruker elevene flere ganger i løpet av sesjonen til å finne svar på diverse mellomregninger og for å finne svar på oppgavene. Google-kalkulatoren er godt egnet til å gjøre gjennomføre enkle binære operasjoner som for eksempel multiplikasjon og addisjon.

Den andre måten Patrea og Draco benytter seg av Google på, er for å finne tilleggsinformasjon om en oppgave etter at de har løst den. Dette skjer allerede på den første oppgaven de jobber med (oppgave 2.2.7a, figur F.1, denne oppgaven har ikke fått en egen faglig analyse). De fant et svar, hvis fysiske betydning tilsynelatende gjorde dem svært usikre. Etter et raskt søk på Google, fant de en opplysning som gjorde saken tydeligere for dem. De kunne deretter avgi svaret de hadde funnet med en betraktelig større grad av selvsikkerhet. Muligheten er at all verdens kunnskap ligger tilgjengelig på internettet, begrensningen er at man ofte trenger erfaring og ekspertise for å kunne finne den. Denne måten å bruke Google på tilbyr derimot en sjanse på til å øve på å finne informasjon og en sjanse til å trene opp de grunnleggende digitale ferdighetene knyttet til det å *finne informasjon med digitale verktøy* (Kunnskapsdepartementet, 2020, 2021).

En annen mulighet angående Google og følgelig også Google-kalkulatoren er at de er tilgjengelig på alle datamaskiner og telefoner så lenge man har en nettleser og tilgang til internett (som er to ting man alltid har når man jobber med oppgaver digitalt på nettet).



Figur 7.1: Skjermbilde av kalkulatoren på Google.

7.3.2 Begrensninger ved Google

Google-kalkulatoren er mindre egnet for å regne ut lengre stykker som for eksempel involverer andregradsformelen. Dette skyldes til dels at det kreves større ferdigheter for å taste inn ett lengre uttrykk uten å begå en feil i for eksempel parentessetting. Kalkulatoren fra Google tolker heller ikke symboler på samme måte som GeoGebra eller MathPapa gjør. Dette gjør at de inntastede uttrykkene (slik som i figur 7.2) er vanskelige å tolke.

(-5+sqrt(5^2-4*1*4))/(2*1)

Figur 7.2: Skjermbilde fra søkefeltet på Google. Google tolker ikke symbolene.

Uttrykket fra figur 7.2 ville gitt den ene løsningen fra oppgave 3.5.3a (figur 4.4). Slike lange uttrykk kan være vanskelige å kontrollere om er skrevet riktig, nettopp fordi Google ikke eleverer eksponentene eller setter tellerne og nevnerne over og under en ordentlig brøkstrek.

Figur 7.1 viser kalkulator-vinduet som dukker opp når man søker på $2 + 2$ på Google. Kalkulatoren som dukker opp innehar de fleste knappene som en vanlig håndholdt kalkulator har, men elevene velger tilsynelatende aldri å bruke den videre. I stedet søker de opp neste stykke i søkefeltet.

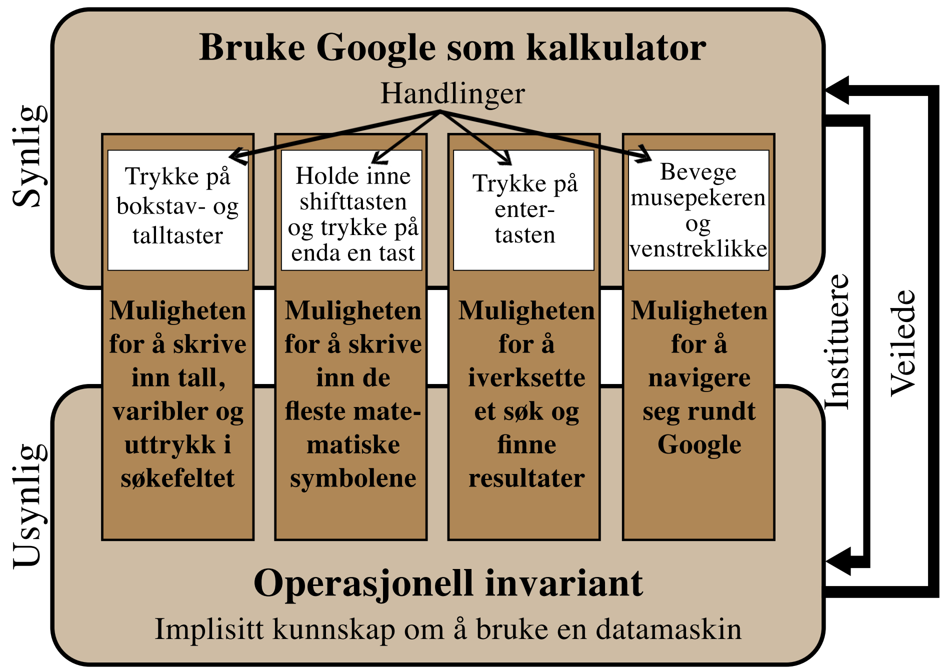
Det virker det som om elevene selv er klare over alle begrensningene ved Google og ikke bruker kalkulatoren til mer enn de selv anser som fornuftig.

7.3.3 Instrumentert teknikk ved Google

Den instrumenterte teknikken som dukker opp (som beskrives av det instrumenterte handlingsskjema i figur 7.3) innebærer å bruke tastaturet og musepekeren på datamaskinen til å gjennomføre et søk på Google. Slike søk som tydelig inneholder matematikk blir tolket og løst før resultatene blir presentert for søkeren. Det instrumenterte handlingsskjema ville sett litt annerledes ut hadde man spesifisert at datamaskinene var smarttelefoner, men prinsippene er de samme.

7.4 Nettbaserte algebrakalkulatorer

Slik som det kom frem fra dialogen i seksjon 6.1.2 ytrer elevene et ønske om løsningsforslag på oppgavene de skal jobbe med. Da det ikke eksisterer en egen funksjon for løsningsforslag på Campus Inkrement, har elevene funnet enge alternativer for å oppfylt dette ønsket. Elevene i 1T-kurset har blitt kjente med en nettside kalt MathPapa (MathPapa, 2022), og elevene i R1-kurset har blitt kjente med en mobilapp kalt Photomath (Photomath, 2022).



Figur 7.3: Instrumentert handlingsskjema for Google. Figuren et tilpasset etter Nygård (2022).

7.4.1 Muligheter ved nettbaserte algebrakalkulatorer

Begge disse kalkulatorene funker på tilsvarende måte. Brukeren har en likning eller et annet regnestykke som de ønsker løst og teknologien bak disse tjenestene returnerer først løsningen/svaret, men kan også generere et løsningsforslag med tilhørende beskrivelser for hvert steg i løsningen. Begge tjenestene er gratis å bruke.

Nettsiden MathPapa blir tatt i bruk på oppgave 4.3.4a (figur 4.6) som inneholdt en ulikhet. Draco og Patrea legger inn ulikheten i algebrakalkulatoren får opp både et maskingenerert løsningsforslag og løsningen $x \leq -10$. De bruker litt tid på å studere selve løsningsforslaget for å få en anelse om hvilke steg man måtte gjøre, men de hadde dessverre ingen egen utregning å sammenlikne med. Dette tilfellet hvor elevene ikke hadde gjort et ærlig forsøk før de oppsøkte løsningsforslaget minsker potensialet for læring, men det er allikevel læring å hente.

Photomath appen blir aldri observert direkte i bruk, men den blir nevnt flere ganger under intervjuet med elevene fra R1-kurset.

INTERVJUER: Har dere funnet noen andre verktøy eller hjelpemidler på egenhånd som ofte hjelper dere i matematikken?

LAVENDEL: Photomath? Det er en sånn app, hvor du tar bilde av .. eehh hva heter det?

HERMINE: Et regnestykke!

LAVENDEL: Ja, et regnestykke. Så kommer opp svaret og hvordan du kommer frem til det. Den forklarer litt hva den gjør og sånt, men ikke alltid den gjør det slik vi har lært.

HARRY: Ofte når jeg ser i løsningsforslaget, innser jeg at det bare er den ene overgangen som jeg bommet på .. Det er liksom et knep som jeg ikke ante man kunne gjøre, men når man først har sett det kan man gjøre det selv.

Måten Photomath fungerer på er at man retter telefonkameraet mot et trykket eller nedskrevet regnestykke/likning og tar et bilde. Appen gjenkjenner tallene og teksten og gjør antakelser om hva som skal løses. Gjør appen en feil antakelse, for eksempel om hvilken variabel som en likning skal løses for, kan brukeren overstyre denne antakelse manuelt.

Mulighetene knyttet til disse kalkulatorene veier tungt. Elevene kan takket være denne artefakten få hjelp i enda større grad når de jobber med oppgaver. I tilfellet hvor de ikke er i stand til å løse en oppgave, kan de oppsøke MathPapa eller Photomath og få et detaljert løsningsforslag. Da avsløres gjerne det ene «knepet» som Harry nevner, og da har elevene det som skal til for å løse en ny oppgavevariant. Ofte er det ikke mer enn en liten forskjell som skiller to påfølgende oppgaver, men den kan være nok til å villede elevene. På denne måten kan løsningsforslagene bli en uvurderlig del av verktøykassen til elevene. Det må riktignok være sagt at disse hjelpemidlene kun er til hjelp i innlærings- og øvingssituasjoner, da man ikke har mulighet til å bruke dem i vurderingssituasjoner, slik som kapittelprøver og eksamener.

7.4.2 Begrensninger ved nettbaserte algebrakalkulatorer

En begrensning er at disse tjenestene bare funker på likninger og regnestykker som er ferdig oppstilt. Det hjelper ikke å ta bilde av hele oppgaveteksten og tro at Photomath-kalkulatoren, ut fra den norske teksten, skal skjønne hva som skal undersøkes. Dette eksemplifiseres godt med oppgave 5.4.3b (figur 4.13) som R1 elevene jobbet med. Her ber oppgaven elevene om å «bestemme t slik at $\vec{u}||\vec{v}$ når»

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 3\left(\vec{a} - t\vec{b}\right) - 5\vec{b} + 3\vec{a} \\ \vec{v} &= t\vec{b} - 3\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Denne oppgaven er et stykke unna å være ferdig oppstilt, i den forstand at informasjonen inneholdt i den må bearbeides før en løsning kan bli funnet. Ingen av tjenestene nevnt i denne seksjonen kan løse oppgaven slik den er oppgitt, og kan heller ikke hjelpe elevene med å sette opp likningen som kan løses. Skal man bruke artefakten må man være klare over denne begrensningen og være forberedt på at man først må koke oppgaven ned til ett enkelt regnestykke eller én enkelt likning.

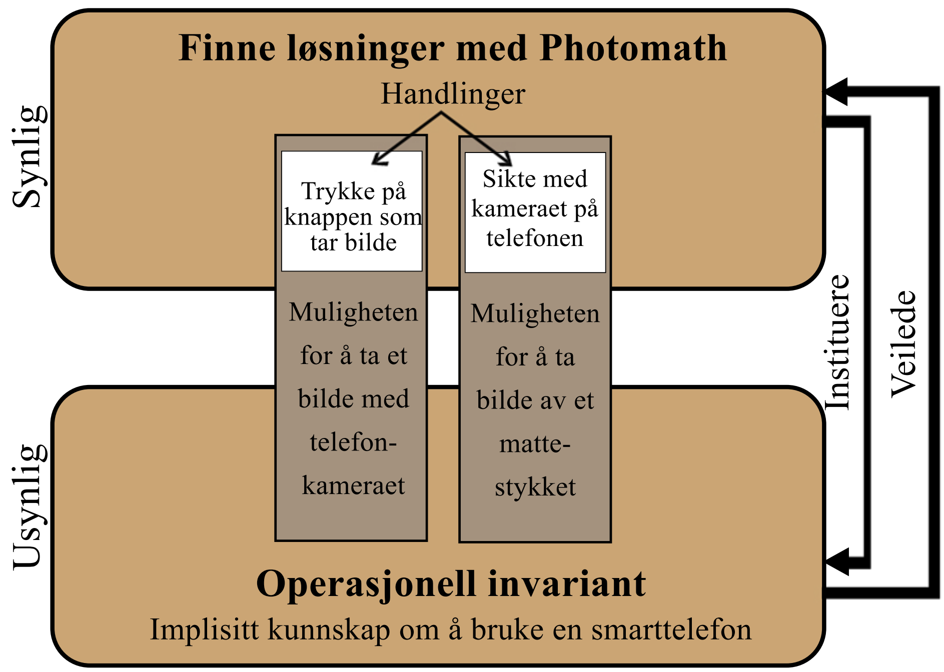
En annen begrensning er at disse tjenestene gjerne bruker ulik notasjon og ulike løsningsmetoder fra de som undervises i den norske skolematten. Det ville vært et problematisk å bruke disse kalkulatorene dersom de for eksempel hadde valgt å løse første ordens differensiallikninger ved hjelp av så avansert matematikk som Laplace-transformasjonen.

Da Lavendel velger å nevne dette med løsningsmetodene under intervjuet, analyserer jeg det som en begrensning som er verdt å nevne. Da elevene har gjort et poeng av at de foretrekker å ha løsningsforslag tilgjengelig og at fasiten ikke er nok, er det tydelig at elevene ønsker å lære seg matematikken. De er ikke bare ute etter svaret for å bli ferdige.

7.4.3 Instrumentert teknikk ved bruk av nettbaserte algebrakalkulatorer

Det virker som at elevene er fullstendig klare over hvilke muligheter og begrensninger som finnes for deres utvalgte algebrakalkulator og at de bevisst har tilpasset teknikkene sine ut fra dem. MathPapa-kalkulatoren bruker flere av de samme bruksskjemaene som Google-kalkulatoren, mens Photomath-kalkulatoren, krever et par egne bruksskjema. Disse to bruksskjemaene kan sees i figur 7.4.

Den instrumenterte teknikken som dukker opp er da knyttet til å skrive inn matematikkstykker/likninger i MathPapa eller ta bilde av dem med Photomath. Dette gjøres som steg i en prosess for å få tilgang til noe som utgangspunktet var utilgjengelig for elevene, et løsningsforslag.



Figur 7.4: Instrumentert handlingsskjema for Photomath. Figuren et tilpasset etter Nygård (2022).

Kapittel 8

Analyse av andregradsformelen

I denne seksjonen vil jeg analysere en av de mest interessante løsningsmetodene elevene brukte under oppgaveløsningsdelen av datainnsamlingen. Jamfør Trouche (2005) er også algoritmer eksempeler på artefakter. Store Norske Leksikon sier følgende: «algoritme er i matematikk og databehandling en fullstendig og nøyaktig beskrivelse av fremgangsmåten for løsning av en beregningsoppgave eller annen oppgave» (Hovde & Grønmo, 2022). Løsningsmetoden jeg har valgt, presenteres i fagstoffet som en fremgangsmåte som skal brukes for å løse spesifikke matematiske oppgaver, og er følgelig algoritmisk.

Ut fra definisjonen ovenfor er andregradsformelen en algoritme og følgelig også en artefakt. Andregradsformelen er et viktig tema som i 1T vies mye oppmerksomhet til. I senere videregående matematikkurs er den et viktig verktøy i andre mer kompliserte prosesser. Algoritmen er relativt enkel å gjennomføre, men krever ofte en del repetisjoner før den er fullstendig institusjonalisert og integrert i elevens repertoar av fremgangsmåter. Gitt et andregradsuttrykk på formen $ax^2 + bx + c$, hvor $a \neq 0$, setter man opp følgende likning for å finne førstegradsfaktorene til uttrykket:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8.1}$$

I telleren befinner det seg et pluss-minus-tegn, som gjerne splitter opp likningen til to likninger når man ikke lengre er i stand til å bearbeide den mer. Dette betyr at likningen slik den opptrer i likning 8.1 kan ha to løsninger.

Antall løsninger på likningen avhenger av verdien til diskriminanten (uttrykket under kvadratroten i løsningen på andregradslikningen). Positive verdier av diskriminanten gir to løsninger og negative verdier for diskriminanten gir ingen løsninger (på den reelle tallinjen). Dersom diskriminanten er lik 0, har likningen én løsning (en dobbeltløsning).

I 1T-kurset, hvor jeg observerte denne algoritmen i bruk, er målet til oppgavene ofte å finne løsningene av likninger på formen $ax^2 + bx + c = 0$. Av og til må man bruke andregradsformelen som en mellomregning. Jeg ser et tilfelle av dette på den siste oppgaven 1T elevene kommer til (oppgave 4.4.6a, figur 4.9). Denne oppgaven inneholdte følgende andregradsulikhet $x^2+2x-3 < 0$.

Det var bare det ene paret som hadde tid nok til å forsøke å løse denne oppgaven. Grylius og Vincent som nettopp hadde gått på et tap på den forrige ulikhetsoppgaven, ble tilsynelatende litt lettet over synet på denne oppgaven. Dette kan trolig skyldes at de ble møtt med et kjent syn, i form av andregradsuttrykket som sto til venstre for ulikhetstegnet. Litt mer oppglødd av dette synet, går de i gang med å faktorisere andregradsuttrykket til sine førstegradsfaktorer ved hjelp av andrgradsformelen.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \\
x &= \frac{-2 \pm 4}{2} \\
x &= -3 \quad \vee \quad x = 1
\end{aligned} \tag{8.2}$$

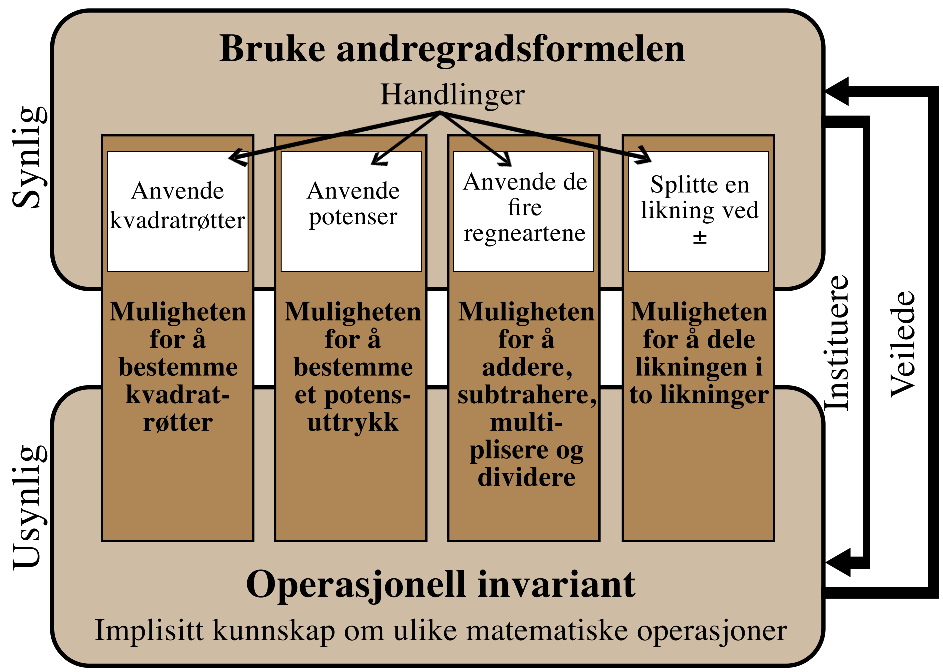
Fra dette kan man konkludere med at $x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$. Resten av løsningen til denne oppgaven, som for dette kapittelet er uviktig, kan studeres i den faglige analysen fra seksjon 4.1. Fra føranalysen om elevenes arbeid i seksjon 4.2, berettes det om at Grylius og Vincent ikke fullfører oppgaven, til tross for en solid start.

Nå har jeg vist at elevene har kunnskapen til å bruke andregradsformelen, også på oppgaver hvor det bare er et steg på veien til svaret. I starten av dette delkapitlet påsto jeg at andregradsformelen var en artefakt, men hvor langt har det kommet i utviklingen til å bli et instrument?

Da elevene Draco og Patrea navigerer seg frem til de to oppgavene på Campus Inkrement som direkte handler om å bruke andregradsformelen observeres det to vidt forskjellige typer sitater:

DRACO: Neeeei! Andregradsformelen, jeg er sååå lei av deg! [Kan du gå å legge deg?!]
PATREA: [Åååå! Jeg elsker den!] Jeg synes den er veldig søt.

Det er tydelig at andregradsformelen har gjort sterke inntrykk på elevene. Det gir meg håp om at det i tillegg har foregått store ting med tanke på instrumentaliserings- og instrumenteringsprosessene. Basert på Draco sitt utsagn er det rimelig å anta at de har holdt på med andregradsformelen i lang tid, slik at artefakten har hatt god tid på å modnes og utvikles. Det virker også å foreligge en meningsfull sammenkobling mellom elevene og metoden, da de for eksempel velger å bruke den heller enn andre metoder for å faktorisere andregradsuttrykket fra oppgave 4.4.6a. Som jeg presenterte i den faglige analysen har elevene lært flere måter for å faktorisere slike uttrykk på. Faktumet at de valgte å bruke andregradsformelen tyder i det minste på at de foretrekker den over andre metoder som heltallsmetoden.



Figur 8.1: Instrumentert handlingsskjema for bruk av andregradsformelen. Figuren et tilpasset etter Nygård (2022).

Ut fra det instrumenterte handlingsskjema (figur 8.1) ser man at det kreves flere grunnleggende bruksskjemaer for å bruke andregradsformelen. Formelen inneholder både potenser, røtter og minst ett tilfelle av hver av de fire regneartene.

Kapittel 9

Diskusjon

I dette kapittelet skal jeg blant annet diskutere mine funn i lyset av tidligere forskning. Jeg skal ta et oppgjør med min egen forskerrefleksivitet og se på prosessens diverse styrker og svakheter.

9.1 Tidligere forskning

9.1.1 En-til-en-klasserommet

Øystein Gilje (2021) sin egen forskning og hans analyse av tidligere forskning avslører at det historisk sett har vært for lite fokus på digitale læremidler og verktøy. Dette var for min del et interessant funn som har motivert meg til å se på, og forsøke å fylle, dette kunnskapshullet. De resultatene jeg har funnet, fyller nok ingen tomrom i samfunnets kollektive kunnskapsbank, men belyser en liten del av dagens læremiddellandskap.

I en-til-en-klasserommet har elevene, etter mine egne observasjoner, blitt sofistikerte borgere av det digitale samfunnet. De behersker mange egenskaper knyttet til prosesser slik som å oppsøke og behandle informasjon. Denne kompetansen kan neppe sies å være en direkte konsekvens av bruken av digitale læreverk i matematikk, men en viss korrelasjon kan trolig oppdages.

9.1.2 Universitet mot videregående

I teorikapittel 2.5.3 presenterte jeg et prosjekt med mål om å forbedre læringsutbytte til studenter ved sivilingeniørstudier gjennom digital innovasjon. Av de ulike faktorene som ble undersøkt i studien var det to som var av interesse for meg. Det ene aspektet var bruken av det digitale øvingssystemet Maple T.A., som på overflaten minnet veldig om systemet videregåendeelevene jobber med matematikk i. Det andre aspektet var videoforelesninger som, forutenom en litt annen hensikt, minnet veldig om videoleksjonene videregåendeelevene ser på i lekse.

Maple T.A. mot Campus Inkrement

Den innovative løsningen som i 2013 og 2014 ble testet ut i to matematikkemner på universitetet, Maple T.A., ble av studentene gitt en lunken mottakelse. Studentene ytret ønsker om å gå over til tradisjonelle øvingssett som løses og leveres fysisk til retting. En av grunnene som ble oppgitt var den tidvis forvirrende og strenge syntaksen som krevdes av Maple T.A.. Disse følelsene deler universitetsstudentene med videregåendeelevene som må hanskes med Campus Inkrement som også er veldig påpasselig med hvilke svar som godkjennes. Det største argumentet for å videreføre Maple T.A. var at det effektiviserte evalueringen av studentene, noe som frigjorde ressurser til å hjelpe studentene som for eksempel dukket opp på oppsatte øvingstimer. Dette minner om situasjonen, slik den fremstår på videregående, hvor den umiddelbare tilbakemeldingen elevene får av systemet gjør at de ikke trenger å tilkalle læreren hver gang de har løst en oppgave. Læreren kan som konsekvens bruke tiden til å drive med mer tilpasset opplæring til elever som trenger ekstra oppfølging eller andre tilsvarende aktiviteter. På dette punktet virker det at den min forskning passer inn med funnene fra KTDiM-prosjektet.

Videoforelesning mot videoleksjon

På universitetet hvor studentene kunne velge om de ville følge undervisningen direkte ved å dra i forelesningen eller i ettertid når den ble lagt ut som video, valgte de fleste det første alternativet. Formålet til forelesningen, uansett format, er å gjennomgå og forklare deler av pensumet i emnet. Det kommer frem at studentene syntes at videoforelesningene var et fint supplement til «live» forelesning. Det viktigste grunnen til at studentene valgte å dra i forelesningene var for å ha muligheten til å stille spørsmål til foreleseren om det som ble gjennomgått.

Videoleksjonene som videregåendeelevene ser på tjener et annet formål. Disse leksjonene er ment som forberedelse til læringsaktiviteten som matematikklæreren har planlagt. Selv om formålene er ulike er det grunnlag for en sammenlikning mellom videoforelesning og videoleksjon. Både studentene og elevene virker å sette pris på muligheten for å stille spørsmål i situasjoner hvor det gjennomgås nytt pensum. Dette er trolig en større prioritet for universitetsstudentene som i høyeste grad er ansvarlig for å lære seg pensum. En videregående elev som ikke får besvart spørsmålene sine umiddelbart får trolig mange muligheter til å gjøre dette ved senere anledninger. Utsagnet til Harry fra seksjon 6.3.1 presenterer et utelukkende negativ syn på faktumet at man ikke kan be læreren om hjelp når man jobber med hjemmeleksen. En lærer ville antakeligvis poengtert at elever som kommer til en mattetime med mange spørsmål, stiller mer forberedt en elever som ikke har forberedt seg i det hele tatt.

Både universitetsstudentene og videregående elevene svarer at de sjeldent ser gjennom en hel video hvis det er noe spesifikt de er ute etter å finne ut. Studentene leter gjerne gjennom et opptak av en forelesning for å finne et spesifikt tidspunkt hvor de etter første gjennomgang opplevde at noe var uklart. Elevene, når de bruker videoene som et hjelpemiddel til oppgaveløsning, hopper gjennom videoen for å komme til det steget i en utregning de er usikre på.

Også i tilfellet «videoforelesning mot videoleksjon» virker det å være stor enighet mellom min forskning og tidligere forskning. Det er verdt å nevne at dette er til tross for at de ulike typene videoer tjener forskjellige formål. Det som ble identifisert som en instrumentert teknikk hos elevene, kan tilsynelatende overføres til studentene.

9.2 Aretfaktene

9.2.1 Campus Inkrement

Det digitale læreverket Campus Inkrement har mye å tilby elevene. I kapittel 6 fikk de tre delene av læreverket som har innvirkning på hvordan elevene jobber med oppgaver hver sin tur under lupen. De tre delene: automatisk tilbakemelding, fasit og videoleksjoner har alle egne muligheter og begrensninger som virker inn på elevenes utvikling av Campus Inkrement fra artefakt mot instrument. Hvorvidt Campus Inkrement blir til et instrument er vanskelig å si helt sikkert, men mine resultater tilsier at dette definitivt er mulig. Begrensninger slik som et veldig begrenset tilbakemeldingssystem, mangelen på hint og mangelen på løsningsforslag gjør at elevene på egenhånd drar på leting etter hjelpemidler som gjøre opp for disse manglene.

Et av de mest interessante funnene mine er nettopp at elevene har oppdaget to nettbaserte algebrakalkulatorer som en direkte respons til mangler i Campus Inkrements systemer. MathPapa og

Photomath fyller elevenes behov for løsningsforslag. I læreverklandskapet anno 2022 er det mange aktører som kjemper om elevenes og skolenes oppmerksomhet. Behovet etter løsningsforslag er ivaretatt av forlagene Aschehoug og Cappelen Damm som har en fot innfor døren til disse elevenes skole og som er med i kampen om oppmerksomheten. Aschehoug har løsningsforslag til sine mattebøker på nettsiden A-Univers, og Cappelen Damm har løsningsforslag på teorioppgavene fra Sinus-bøkene på sine nettsider, avslørte R1 elevene under intervjuet. Skal elevene ha lyst å jobbe med oppgaver digitalt må det foreligge systemer som forbedrer brukeropplevelsen.

9.2.2 De eksterne hjelpemidlene

Fra det andre analysekapitlet (kapittel 7) er det fire hjelpemidler, som eksisterer uavhengig av Campus Inkrement, som blir analysert. Disse er kraftige hjelpemidler som kan være til stor hjelp alene. Det er derimot interessant å se at summen av hjelpemidler kan bli større enn summen av hvert enkelt hjelpemiddel. Det vil si at en kombinasjon av flere hjelpemidler potensielt øker læringsutbyttet og løsningseffektiviten til elevene. Se for eksempel til Grylius og Vincent som på oppgave 3.1.5c (figur 4.3) utelukkende benytter seg av dialog for å prøve å løse likningen. En hvilken som helst kombinasjon bestående av dialog og et annet hjelpemiddel hadde trolig økt sjansen for at løsningen ble oppdaget. Hadde de brukt blyant og papir til å overføre de mentale konstruksjonene fra sinnet ned på det fysiske papiret, ville de trolig endt opp nærmere svaret enn de faktisk gjorde.

Det jeg prøver å si, bunner ut i at hjelpemidler brukt i kombinasjon ofte øker sjansen for å løse en oppgave. Dialog er et hjelpemiddel som, uansett hvilke hjelpemidler du parrer det med, fører til suksess. Ingen prosess er så sær at det ikke hjelper å snakke med noen om den.

De kunne også oppsøkt hjelp fra en av de andre kalkulatorene som har blitt diskutert i denne oppgaven. Å bruke slike kalkulatorer, ville vært å se bort fra anbefalingen gitt av oppgaven. Som man ser i høyre hjørne av hver oppgave er det en liten beige boks som spesifiserer hvilke hjelpemidler som er anbefalte for å løse den. Elevene har uttalt seg om at de foretrekker å løse en oppgave med hjelpemidler som går utover de som er anbefalt heller enn å forlate oppgaven uløst.

VINCENT: Jeg tror definitivt det er bedre å løse oppgaven med et hjelpemiddel som ikke står i den beige boksen, fordi selv om du ikke løste den oppgaven på den rette måten ~viser hermetegn tegn med hendene~ så får du fortsatt gått gjennom hva som skjedde. Spesielt i T-matte, hvor alt er veldig teoretisk, handler det ikke nødvendigvis om hvordan du løste det, men mer at du forstår det nok til at du klarer å løse det .. tenker jeg.

INTERVJUER: Så dere er enige i at det er en viss forståelse å hente uansett hvilke hjelpemidler som brukes?

GRYLIUS: Ja, mye bedre å få den løst.

Til tross for at de påstår at det er bedre å løse en oppgave ved hjelp av hjelpemidler som ikke var tiltenkt av oppgaveskaperne enn å forlate oppgaven uløst, viser de en annen holdning. De gir opp uten å ha prøvd noen hjelpemidler eller å ha oppsøkt teorien. Dette fører til en motsigelse mellom det som ble observert under videoopptaket og det som ble sagt under intervjuet. Årsaken til denne motsigelsen kan være at elevene svarer det de tror jeg som forskeren ville høre. Årsaken kan også være at jeg observerte unntaket som bekrefter regelen og de ville vanligvis gjort en større innsats for å løse oppgaven.

9.2.3 Andregradsformelen

Andregradsformelen er blant de viktigste temaene som undervises i matematikkurset 1T. Dette ble den eneste algoritme-artefakten som fikk sin egen analyse. Fra videoopptakene av 1T elevene kommer det tydelig frem at elevene har et forhold til den. Draco og Patrea, som begge viste sterke følelser, var tilsynelatende ikke enige i om hva de syntes om formelen. Draco sitt utsagn om å være lei av formelen og lei av å bruke formelene, gir mening hvis man antar at elevene har hatt mengdetrening. Det er mange handlingsskjema i sving når man løser andregradslikninger ved hjelp av andregradsformelen, et faktum som kan rettferdiggjøre bruken av mengdetrening. Patrea sitt utsagn om å elske andregradsformelen kan være født av en tanke om at formelen er nyttig og anvendelig i kontekst av faget.

9.3 Et oppgjør med forskerrefleksiviteten

I metodekapitlet presenterte jeg seks punkter hentet fra Nilssen (2012, s. 141). Disse seks punktene finnes i punktlisten i seksjon 3.8.1, og erklærer ulike perspektiver den kvalitative forskeren må gjøre rede for. De tre første punktene blir redegjort for i henholdsvis teorikapitlet, innledningskapitlet og metodekapitlet. De tre neste punktene skal jeg nå redegjøre for å diskutere konsekvensene av.

Det fjerde punktet til Nilssen (2012) handler om problemer underveis i alle deler av prosessen. Prosessen har i de fleste deler gått knirkefritt. Problemene som har oppstått, har oppstått på grunn av en svært svak visjon for prosjektet i oppstarten. Min visjon ble knust av et enkelt spørsmål: «Hva er det du ønsker å finne ut?». Da ingen svar kom til meg, måtte jeg ta et steg tilbake å revaluere prosjektet. Dette er blant flere mindre grunner, årsaken til at innleveringsfristen til denne oppgaven måtte utsettes med to uker. Et annet problem, født av et ønske om å gjøre livet enklere, førte trolig til en merkbar reduksjon i resultatenes kvalitet. Valget innebar hvilket digitalt læreverk som skulle stå i fokus og hvilke skoler som måtte kontaktes. Selv om et annet rikere digitalt læreverk, slik som Cappelen Damms coSinus, hadde gitt et rikere datagrunnlag valgte jeg minste motstands veg og gjenopprettet kontakt med en skole jeg visste brukte Campus Inkrement.

Det femte punktet til Nilssen (2012) handler om hvordan tolkning og forståelse har utviklet seg og endret seg underveis. Dette har uten tvil vært en lærerik prosess. For hvert avsnitt lengre jeg skrev, jo mer ny innsikt oppnådde jeg. Fra jeg startet med pilotprosjektene til jeg skriver på diskusjonen og konklusjonen til masteren, har min forståelse og helhetsinntrykk om digitale læreverk endret seg drastisk. Min personlige oppfatning av digitale læreverk har gått fra å være en helhetlig positivt oppfatning til en mer realistisk en med klarhet over visse begrensninger. Min forståelse av utbredelsen til digitale læreverk i skolen har også endret seg. Utbredelsen av digitale læreverk er langt mindre enn jeg først antok, og de brukes i langt mindre grad i klasserommet enn først antatt.

Som forsker må man alltid være forberedt til å ta et oppgjør med egne forutinntatte meninger og ikke la dem styre forskningen. Tolkningene mine var i starten av prosessen preget av at jeg bare fant det jeg forventet å finne, mens jeg senere i prosessen klarte å se forbi forventningene og tolke det som faktisk skjedde. Dette var et viktig steg, som trolig har reddet oppgaven fra å være et uekte stykke arbeid som forgyller produkter som Campus Inkrement og coSinus.

Det siste punktet jeg inkluderte fra Nilssen (2012) går ut på å reflektere over styrker og svakheter ved forskningsdesignet. En styrke ved forskningsdesignet er at det bygger på flere forskjellige bøker om forskning og analyse av kvalitative studier. Følgende bøker har vært viktig i for- og etterarbeidet med innsamling- og bearbeidelse av datamaterialet Bjørndal (2017), Nilssen (2012), Postholm (2005), Robson og McCartan (2016), Simons (2009) og Tjora (2018). Kvalitativ forskning, og spesielt case-studier, er ofte bygget på flere ulike datainnsamlingsmetoder. Min studie bygger på to metoder; observasjon og intervju. To metoder er akseptabelt, én metode hadde derimot vært en svakhet.

To svakheter ved forskningsdesignet kan oppsummeres i begrepene *teori triangulering* (theory triangulation) og *observatør triangulering* (observer triangulation). Disse begrepene forklares av Robson og McCartan (2016) som inkluderingen av flere teoretiske perspektiver og flere observatører. Ved å inkludere flere teoretiske perspektiver til å belyse samme fenomener blir forskningen oppfattet som enda mer rigorøs. Jeg har to teoretiske hovedperspektiver i form av instrumentell skapelse og tilbakemeldingsteori. Tilbakemeldingsteorien blir kun anvendt på et lite utvalg av de observerte fenomenene, og følgelig tørr jeg ikke påstå at denne oppgaven tilfredsstiller kriteriene for teori triangulering. Den eneste observatøren involvert i denne oppgaven var meg selv slik at alle tolkningene kommer da fra den samme personen. Observatør triangulering er dermed ikke oppnådd. Disse manglene trekker ned påliteligheten til oppgaven.

9.4 Forskningsspørsmålet

Forskningsspørsmålet jeg satte ut for å besvare var: *«Hvilke løsningsmetoder og hjelpemidler bruker videregående elever når de jobber med matematikk i det digitale læreverket Campus Inkrement, og hvordan påvirkes elevene av mulighetene og begrensningene ved de ulike artefaktene?»*

Med videoopptak ble det observert arbeider med 24 ulike oppgaver fordelt på to matematikkurs. I et forsøk på å tilpasse arbeidsmengden min som forsker og lengden til analysene, ble det tidlig i prosessen laget et mindre utvalg av oppgaver som skulle bli analysert.

I forskningsspørsmålet spør jeg om hvilke løsningsmetodene elevene bruker. Alle løsningsmetodene som opptrer i forbindelse med oppgavene fra mitt utvalg blir beskrevet i seksjon 4.2, men kun én løsningsmetode blir gitt en fullstendig analyse og satt inn i det teoretiske rammeverket (se kapittel 8).

Det ble også laget et mindre utvalg av hjelpemidler. Ikke alle hjelpemidlene som ble observert fikk en egen seksjon i analysen. Dette ble gjort for å ikke vanne ut analysen med snakk om hjelpemidler som «moren min som er mattelærer» og linjal. Jeg kunne inkludert hjelpemidlet GeoGebra, men det har vært hovedfokuset i flere tidligere studier, slik som Moe (2019). Jeg valgte da å bytte det ut med hjelpemidlet Google som trolig ikke inkluderes i forskning hvert år.

Gjennom anvendelse av teorien om instrumentell skapelse trekker jeg frem flere av mulighetene og begrensningene som dukker opp fra elevenes handlinger og utsagn. Det viktigste jeg spør om i forskningsspørsmålet er hvordan elevene blir påvirket av disse mulighetene og begrensningene. Påvirkningen observeres hovedsaklig gjennom de instrumenterte teknikkene som kommer til utrykk.

En påvirkning er derimot tydeligere enn de andre. Som jeg presenterte tidligere er det mest interessante funnet, er elevenes oppdagelse av MathPapa og Photomath, en konsekvens av at elevene tok et sett begrensning ved Campus Inkrement, og skapte seg egne nye muligheter. Elevene hadde blitt vant til å jobbe med løsningsforslag gjennom Aschehoug og Cappelen Damm sine oppgaver, og følte det var nødvendig å skaffe det til Campus Inkrements oppgaver.

Det digitale læreverket Campus Inkrement var et av de tidligste produktetene på markedet, men de siste årene har det dukket opp konkurrenter som utfordrer det på de fleste årstrinn. På videregående er den størtes utfordreren Cappelen Damm sitt digitale læreverk coSinus. Dette læreverket inneholder digitale versjoner av all teorien og alle oppgavene fra Sinus lærebøkene. I tillegg tilbyr coSinus egne videoleksjoner samt hint og løsningsforslag på alle oppgavene. coSinus gir tilpassede tilbakemeldinger på svarene som avgis. Det vil si at hvis man for eksempel begår en fortegnsfeil skal coSinus kunne oppdage dette og gi riktig tilbakemelding. Det er dermed klart at elevenes ønske om bedre funksjonalitet er mulig i praksis. I konkurransemarkedet som Campus Inkrement og coSinus befinner seg i, er det de mest tilpassede som triumferer, så her kan trolig ikke Inkrement AS gjøre annet enn å forbedre sitt eget læreverk.

9.5 Fremskritt eller fase?

Tittelen på denne oppgaven er «Digitale læreverk – fremskritt eller fase?». Tittelen stiller altså spørsmålet om digitale læreverk er et ekte fremskritt for matematikkundervisningen eller om det bare er en fase som kommer til å blåse over når elevene og lærerene har blitt lei.

Et av den videregående skolens mandater er å forberede elevene på å ta høyere utdanning. Dermed retter jeg blikket mot universitetet og ser hvilke trender som finnes der. Rønning (2015) og hans kolleger har i form av Maple T.A. og videoforelesninger implementert likende systemer i undervisningen av grunnleggende matematikkemner. Når akademia viser tegn til å utvikle seg denne retningen er det trolig et godt argument for at slike digitale nyvinninger som er å se i digitale læreverk er fremskritt.

Gilje (2021) gjengir tall fra Kopinor sin årsrapport fra 2020. Rapporten viser til store pengesummer som omsettes til digitale læremidler (herunder kommer også læreverk som Campus Inkrement og coSinus). Dette året er første gang omsetningen til digitale læremidler var på høyde med omsetningen til trykte læremidler. EdTech-selskaper (slik som Inkrement AS) melder også inn tall som viser til en betydelig vekst i omsetning. Basert på den økonomiske utviklingen som omringer det digitale vil utviklerne, forlag eller teknologiselskap, trolig fortsette å forbedre læreverkene sine slik at de aldri går av moten, selv om det kommer en ny læreplan og et nytt matematisk paradigme.

Tegnene peker mot at digitale lærverk er et fremskritt som vil bestå i det komplekse landskapet kalt skolematematikken anno 2022. Så fremt at det utdannes lærere som har kunnskapen og kustusen til å benytte seg av dem i riktige mengder.

Kapittel 10

Konklusjon og avslutning

Dette masterprosjektet har hatt som formål å finne ut hvordan videregåendeelever arbeider i det digitale læreverket Campus Inkrement, samt hvordan de har utnyttet mulighetene og begrensningene ved ulike hjelpemidler tilknyttet arbeidet.

I dette kapittelet vil jeg oppsummere noen av de mest sentrale funnene fra studien studien, forslå et par temaer til videre forskning og runde av oppgaven med noen velvalgte ord.

10.1 Sentrale funn

De tre interne hjelpemidlene som finnes i Campus Inkrement brukes aktivt i oppgaveløsningen. Videoleksjonene som var et av de tre interne hjelpemidlene som fikk skinne i analysedelen brukes ikke like ofte som de andre to, men har definitivt sin plass i hjelpemiddelskrinet til elevene. Under arbeid med oppgaver, refererer elevene til videoleksjonene på samme måte som man ville søkt i læreboka etter tips til løsningsstrategier.

Fasiten og de automatiske tilbakemeldingene i Campus Inkrement er i noen få utvalgte situasjoner anvendelige for å finne en løsning. I de fleste situasjoner er de ikke til hjelp med å bygge meningsfull eller ny matematisk innsikt. De fire eksterne hjelpemidlene var alle trolig sterkere artefakter enn de interne hjelpemidlene, basert på elevenes utsagn og observerbare hjelpemiddelbruk.

10.2 Forslag til videre forskning

Det er mange ulike vinklinger man kan velge dersom man ønsker å fortsette og forske. Slik som Moe (2019) tok for seg *CAS* (computer algebra system) i GeoGebra, kan man ta for seg et spesifikt hjelpemiddel og gå i dybden med det. På denne måten kan man utfolde seg og få brukt alle begrepene som er inneholdt i teorien om instrumentell skapelse. Alternativt kunne man gjennomført et liknende prosjekt med et annet digitalt læreverk. Ingen av disse tjenestene er bygget på nøyaktig de samme prinsippene og inneholder ikke nøyaktig de samme hjelpemidler, slik at det hadde blitt en interessant oppgave.

10.3 Avslutning og farvell

Tittelen på denne oppgaven er «Digitale læreverk – fremskritt eller fase?» I diskusjonen kommer jeg med mitt svar på spørsmålet. Jeg tror at digitale læreverk er et fremskritt som kommer til å bestå tidens tann. På grunn av dette ser jeg enda lysere på mitt fremtidige yrke som matematikklærer. De mange mulighetene vil gjøre min egen og elevenes hverdag enklere, og de mange begrensningene vil holde meg på tærne med nye utfordringer som må overkommes i samspill med elevene. Gjennom skriveprosessen har jeg opparbeidet meg et et klarere bilde av hvordan digitale læreverk kan og bør brukes, som hjelper meg ta riktige avgjørelser i situasjonene som fremtiden bringer.

Litteraturliste

Bergmann, J. & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. International society for technology in education.

Bjørndal, C. R. P. (2017). *Det vurderende øyet* (3. utg.). Gyldendal Akademisk.

Campus Inkrement. (2022, 7. juni). *Om Campus Inkrement*. https://campus.inkrement.no/Home/About

Cappelen Damm. (2022, 14. juni). *Digital matematikk fra Cappelen Damm Videregående*. https://cosinusapp.cdu.no/login/

Drijvers, P. & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. I D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Red.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (s. 163–196). Springer.

Du Bois, J. W. (1991). Transcription design principles for spoken discourse research. *Pragmatics*, *1*(1), 71–106.

du Boulay, B. (2019). Escape from the Skinner Box: The case for contemporary intelligent learning environments. *British Journal of Educational Technology*, *50*(6), 2902–2919. https://doi.org/10.1111/bjet.12860

Forskrift til opplæringslova. (2006). *Forskrift til opplæringslova* (FOR-2006-06-23-724). Lovdata. https://lovdata.no/forskrift/2006-06-23-724

Gilje, Ø. (2021). På nye veier: Læremidler og digitale verktøy fra kunnskapsløftet til fagfornyelsen. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *105*(2), 227–241. https://doi.org/10.18261/issn.1504-2987-2021-02-10

Giovanni Bonaiuti. (2011, 20. desember). *B.F Skinner. Teaching machine and programmed learning* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=jTH3ob1IRFo

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research*, *77*(1), 81–112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Hovde, K. & Grønmo, S. (2022, 11. juni). Algoritme. I *Store norkse leksikon*. https://snl.no/algoritme

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (matematikk T).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat09-01

Kunnskapsdepartementet. (2021). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat03-02

MathPapa. (2022, 7. juni). *Algebra calculator*. https://www.mathpapa.com/algebra-calculator.html

Moe, T. I. (2019). *CAS – bruke for å lære, eller lære å bruke?* [Masteroppgave, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet]. NTNU Open. http://hdl.handle.net/11250/2617258

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* (5. utg.). De nasjonale forskningsetiske komiteene.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren*. Universitetsforlaget.

NTNU. (2022, 13. juni). *Kvalitet, tilgjengelighet og differensiering i grunnutdanningen i matematikk (KTDiM)*. https://www.ntnu.no/ktdim

Nygård, S. (2022). *Learning algebra with Minecraft – A comparative case study on the use of artifacts in pattern generalization activities* [Masteroppgave]. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Photomath. (2022, 7. juni). *Photomath*. https://photomath.com/

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Universitetsforlaget.

Robson, C. & McCartan, K. (2016). *Real world research: A resource for users of social research methods in applied settings* (4. utg.). Wiley.

Rønning, F. (2015). Innovativ utdanning i matematikk. *Uniped*, *38*(4), 319–326. https://doi.org/10.18261/ISSN1893-8981-2015-04-08

Rønning, F. (2017). Influence of computer-aided assessment on ways of working with mathematics. *Teaching mathematics and its applications: an international journal of the IMA.*, *36*(2), 94–107. https://doi.org/https://doi.org/10.1093/teamat/hrx001

Sangwin, C. (2013). *Computer aided assessment of mathematics*. OUP Oxford.

Simons, H. (2009). *Case study research in practice*. Sage Publications Ltd.

Tjora, A. (2018). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3. utg.). Gyldendal Akademisk.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. I D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Red.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (s. 137–162). Springer.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes* (M. Cole, V. Jolm-Steiner, S. Scribner & E. Souberman, Red.). Harvard University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvjf9vz4

Vedlegg A

Intervjuguide Utvalg 1

I dette vedlegget finner du intervjuguiden brukt under intervjuet med Reodor, den ene respondenten fra utvalg 1. Intervjuet var semistrukturert, slik at guiden slik den står her er ikke fullstendig representativ for hvordan intervjuet ble gjennomført.

Du kan lese mer om dette intervjuet i seksjon 3.5.1.

Hvilken (hvis noen) didaktisk litteratur/forskning har dere i utviklingsteamet brukt under utviklingen av deres digitale læremiddel?

Hvilket/hvilke begrep bruker dere/ville dere brukt som en fellesbetegnelse for produkter slik som coSinus, Campus Inkrement, Kikora ol.?

Hvordan ønsker du at lærere og elever skal bruke produktet deres?

Hva vet du om hvordan lærere og elever faktisk bruker produktet deres?

Er det noe du/dere ønsker forsket på angående digitale læremiddel?

Bonus: Hvordan tror du matematikklasserommet ser ut om 10 år?

Vedlegg B

Intervjuguide Utvalg 2 - 1T

I dette vedlegget finner du intervjuguiden brukt under gruppeintervjuet med de fire elevene fra 1T-kurset. Dette var et veiledende dokument for intervjuet. Siden det var semistrukturert intervju ble ting som rekkefølgen på spørsmålene ikke respektert. Spørsmålene skrevet med fete typer var ansett å være viktigere enn spørsmålene skrevet i vanlig tykkelse. Under hovedspørsmålene ble det lagt inn potensielle oppfølgningsspørsmål og prober.

Til intervjuet ble det skrevet ut kopier av to oppgaver de jobbet med under den forrige delen av datainnsamling. Disse oppgavene ble diskutert i større deltalj.

Du kan lese mer om gruppeintervjuene i seksjon 3.5.3.

Oppvarmingsspørsmål:
Stemmer det at dere i hovedsak løser oppgaver digitalt som en del av videoleksjoner, gitt i lekse?
Og sjeldent i mattetimene?

Hvilke hjelpemidler/verktøy får dere opplæring i?
Hva med Python?
Har dere funnet andre verktøy/hjelpemidler på egenhånd?

På hver oppgave er det en liten beige boks i høyre hjørne som sier noe om anbefalte hjelpemidler på oppgaven. Legger dere vekt på å følge disse anbefalingene?
Hvorfor? Hvorfor ikke?
Hva er best av en uløst oppgave og en oppgave løst med hjelpemidler som ikke er tiltenkt?
Hvilke hjelpemidler og verktøy får dere opplæring i å bruke?
Ikke-oppvarmingsspørsmål:
Se på oppgave 4.3.4a. Den ga dere alle fire litt problemer. Hvordan løste dere den?
Hvordan kunne dere oppgaven annerledes?
Hvilke hjelpemidler hadde vært brukbare?
Hvordan kunne den blitt løst grafisk?
Hvilken rolle spiller skjæringspunktet?
Hva skjer til høyre og venstre for skjæringspunktet?
Hvordan kunne man funnet ut dette ved algebra?

Ser dere på den automatiske responsen som et hjelpemiddel?

Ser dere på fasit som et hjelpemiddel?
På hvordan måte hjelper den dere? For å forstå? For å komme videre?

Hva er det første dere gjør når dere avgir et svar og får en negativ tilbakemelding?
Hvor mange forsøk går det før dere sjekker fasiten?
Hva gjør dere når fasiten ikke hjelper?

Hva er det første dere gjør når dere avgir et svar og får positiv tilbakemelding?

Før dere begynte ga jeg tre beskjeder. Den ene var at dere skulle jobbe slik som dere ville jobbet til vanlig, en annen var å "ikke være redde for å prøve mange forskjellige svar". Ble dette en motsigelse for dere?

Flere av dere viste til tider en viss tilbakeholdenhet rundt det å avgi et svar som dere ikke var helt sikre på. Er det viktig for dere å få svaret riktig på første forsøk så ofte som mulig?
Er det viktig at det skal lyse grønt når man ser tilbake på oversikten av oppgaver.
Er det fordi læreren kan se hva som er svart, og vurdere dere på det?

Se på oppgaven 3.1.5c.
Hvilke hjelpemidler hadde vært brukbare?

Vedlegg C

Intervjuguide Utvalg 2 - R1

I dette vedlegget finner du intervjuguiden brukt under intervjuet med tre av de fire elevene fra R1-kurset. Dette var et veiledende dokument for intervjuet. Siden det var semistrukturert intervju ble ting som rekkefølgen på spørsmålene ikke respektert. Spørsmålene skrevet med fete typer var ansett å være viktigere enn spørsmålene skrevet i vanlig tykkelse. Under hovedspørsmålene ble det lagt inn potensielle oppfølgningsspørsmål og prober.

Til intervjuet ble det skrevet ut kopier av to oppgaver de jobbet med under den forrige delen av datainnsamling. Disse oppgavene ble diskutert i større deltalj.

Du kan lese mer om intervjuene i seksjon 3.5.3.

Oppvarmingsspørsmål:
Stemmer det at dere i hovedsak løser oppgaver digitalt som en del av videoleksjoner, gitt i lekse?

Og sjeldent i mattetimene?

Hvilke hjelpemiddel/verktøy får dere opplæring i å bruke?

Hva med Python?

Har dere funnet andre verktøy/hjelpemiddel på egenhånd?

Forrige halvår var jeg her på forskningsreise også, da intervjuet jeg deres forrige mattelærer. Vil dere si at hen dere har nå bruker campus likt som hen forrige?

Ikke-oppvarmingsspørsmål:
På hver oppgave er det en liten beige boks i høyre hjørne som sier noe om anbefalte hjelpemidler på oppgaven. Legger dere vekt på å følge disse anbefalingene?

Hvorfor? Hvorfor ikke?

Hva er best av en uløst oppgave og en oppgave løst med hjelpemiddel som ikke Var tiltenkt?

Se på oppgave 5.4.3b). Husker dere hvordan dere løste den?

Hvilke andre måter kunne dere forsøkt å løse den på?

Se på oppgave 5.5.2a) Den var temmelig enkel å gjennomføre, men den tillater alle hjelpemidler. Hvorfor tror dere at noen kunne komme til å trenge det?

Har dere noen annerledes måter å løse en slik oppgave på?

Kunne python vært gjennomførbart her?

Ser dere på den automatiske responsen som et hjelpemiddel/verktøy?
Ser dere på fasiten som et hjelpemiddel/verktøy?

På hvilken måte hjelper den dere? For å forstå? For å komme videre?

Hva er det første dere gjør når dere avgir et svar og får en negativ tilbakemelding?

Hvor mange forsøk går det før dere sjekker fasiten?

Hva gjør dere når fasiten ikke hjelper?

Hva gjør dere når dere avgir et svar og får positiv respons?

Er det forskjell på når svaret er åpenbart og når det vanker litt tvil?

Før dere begynte ga jeg tre beskjeder. Den ene var at dere skulle jobbe slik som dere ville jobbet til vanlig, en annen var å "ikke være redde for å prøve mange forskjellige svar". Ble dette en motsigelse for dere?

Flere av dere viste til tider en viss tilbakeholdenhet rundt det å avgi et svar som dere ikke var helt sikre på. Er det viktig for dere å få svaret riktig på første forsøk så ofte som mulig?

Er det viktig at det skal lyse grønt når man ser tilbake på oversikten av oppgaver.

Er det fordi læreren kan se hva som er svart, og vurdere dere på det?

Hva synes dere om forholdet mellom vanskelighetsgraden på oppgavene i videoleksjonene og oppgavene i oppgavesamlingen?

Vedlegg D

Samtykkeskjema utvalg 1

I dette vedlegget finner du samtykkeskjemaet som den ene respondenten fra utvalg 1 fikk tilsendt.

Vil du delta i forskningsprosjektet

Digitale læremiddel – fremskritt eller bare en fase?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke bruken av digitale læremiddel i den videregående skolen. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med dette prosjektet er å undersøke bruken av digitale læremiddel i den videregående skolen. Disse nye produktene tilbyr såpass mange nye og innoverende måter å bedrive matematikkundervisning på at det er vel verdt å sette av en masteroppgave til å forske på dem. Masteroppgaven har et omfang på 30 studiepoeng og vil skrives i løpet av vårsemesteret 2022.

Forskningsspørsmålet det arbeides ut fra (på dette tidspunktet) er:
«Hvordan brukes digitale læremiddel i matematikkundervisning i den videregående skolen?»

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Instituttet for matematiske fag ved NTNU er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Jeg henvende meg til deg fordi du besitter mye informasjon om det fenomenet jeg ønsker å undersøke. Informasjonen du kan dele er av stor interesse fordi den vil sikre en høyere kvalitet på forskningen som gjøres i fortsettelsen av dette prosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at vi gjennomfører et personlig intervju. Intervjuet vil vare mellom 30-60 minutter. Det vil ikke samles inn noen personlige eller sensitive opplysninger om deg. Det eneste som kan identifisere deg er stemmen din. Lydfilen vil transkriberes og slettes, slik at anonymitet kan opprettholdes.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er bare meg som student og min veileder som vil ha tilgang til opplysningene dine. Som deltaker i dette forskningsprosjektet vil ikke kunne gjenkjennes i oppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 1. juni 2021. Ved prosjektets slutt vil alle filer som inneholder opplysninger om deltakerne slettes.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,

- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Instituttet for matematiske fag ved NTNU* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Faglig ansvarlig ved NTNU er Frode Rønning: tlf.: [redacted]; epost: [redacted]
- NTNUs personvernombud er Thomas Helgesen: tlf. [redacted]; epost [redacted]

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Frode Rønning (Veileder)	Morten Nygård (Masterstudent)
--	--

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Digitale læremiddel*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta på intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg E

Samtykkeskjema utvalg 2

I dette vedlegget finner du samtykkeskjemaet som de åtte elevene fra utvalg 2 fikk utlevert.

Vil du delta i forskningsprosjektet

Digitale læreverk – fremskritt eller bare en fase?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke bruken av digitale læreverk i den videregående skolen. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med dette prosjektet er å undersøke bruken av digitale læreverk i den videregående skolen. Disse nye produktene tilbyr såpass mange nye og innoverende måter å bedrive matematikkundervisning på at det er vel verdt å sette av en masteroppgave til å forske på dem. Masteroppgaven har et omfang på 30 studiepoeng og vil skrives i løpet av vårsemesteret 2022.

Forskningsspørsmålet det arbeides ut fra (på dette tidspunktet) er:
«Hvordan brukes digitale læreverk i matematikkundervisning i den videregående skolen?»

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Instituttet for matematiske fag ved NTNU er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta i dette prosjektet fordi du er student i den videregående skole og har et matematikkfag som kan arbeides med ved hjelp av digitale læreverk. Jeg kommer til din klasse, da jeg kjenner faglæreren deres fra lektorutdanningen og fra tidligere forskningsprosjekter.

Hva innebærer det for deg å delta?
Metoden som blir brukt er videoopptak og lydopptak. Ditt samtykke er nødvendig for å delta, da opptakene inneholder identifiserbare opplysninger om deg, slik som stemme og utseende. Disse opplysningene er uinteressante for forskningen, det er hva du sier og hva du gjør som er viktig. Opptakene lagres digitalt frem til prosjektets slutt.

- Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at det filmes mens du og en medelev jobber med oppgaver i et digitalt læremiddel (Campus Matte eller coSinus). Dette vil ta deg ca. 20-30 minutter å delta. Fokuset for filmingen vil være på hva som skjer på den digitale plattformen, og hva du sier underveis i prosessen.
- Ved et senere tidspunkt vil jeg hente deg og de andre deltakerne ut igjen. På dette tidspunktet vil jeg stille dere oppfølgings- og oppklaringsspørsmål om det jeg dere gjorde i første del. Dette intervjuet skjer i en gruppe.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Forskningen som gjennomføres skjer uavhengig av den ordinære opplæringen i faget. Hvorvidt du velger å delta eller ikke har ingen konsekvenser for vurdering i faget. Studenter som ikke deltar, skal ha vanlig undervisning i klasserommet.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er bare meg som student og

min veileder som vil ha tilgang til opplysningene dine. Som deltaker i dette forskningsprosjektet vil du ikke kunne gjenkjennes i oppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 1. juni 2021. Ved prosjektets slutt vil alle filer som inneholder opplysninger om deltakerne slettes.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Instituttet for matematiske fag ved NTNU* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Faglig ansvarlig ved NTNU er Frode Rønning: tlf.: [redacted]; epost: [redacted]
- NTNUs personvernombud er Thomas Helgesen: tlf. [redacted]; epost [redacted].

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Frode Rønning (Forsker/veileder)	Morten Nygård (Student)
--	--

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *[sett inn tittel]*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i videoopptak
- ☐ å delta i lydopptak

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg F

Oppgaver 1T

I dette vedlegget finner du de 14 oppgavene fra Campus Inkrement sitt 1T-kurs som Vincent, Gry-lius, Patrea og Draco jobbet med under datainnsamlingen. Metoden for denne sesjonen beskrives i seksjon 3.2.

Oppgave 7a)

Anbefalte hjelpemidler: blyant, papir og kalkulator

En bil som kjører med konstant fart v, vil etter t sekunder ha tilbakelagt en strekning s gitt av formelen $s = v \cdot t$.

Hvor lang tid bruker en bil på å kjøre 1,815 kilometer om den kjører med en konstant fart på 15,0 meter per sekund?

Bilen bruker 2 minutt(er) og 1 sekund(er).

Figur F.1: Oppgave 2.2.7a fra 1T-kurset på Campus Matte

Oppgave 7b)

Anbefalte hjelpemidler: blyant, papir og kalkulator

Hvis en hendelse skjer n ganger på t minutter, sier vi at det skjer med frekvens f, som kan beregnes ved hjelp av formelen $f = \frac{n}{t}$.

Hvis en lærer som skriver på krittavle knekker krittet med frekvens 0,6 ganger per minutt, hvor mange ganger knekker da krittet i løpet av en 45 minutters skoletime?

Krittet knekker 27 ganger i løpet av skoletimen.

Figur F.2: Oppgave 2.2.7b fra 1T-kurset på Campus Matte

Oppgave 7c)

Anbefalte hjelpemidler: blyant, papir og kalkulator

Sammenhengen mellom spenningen U i en ledning med motstand R og strømmen I er gitt ved formelen $U = R \cdot I$. Her måles spenningen i volt, motstanden i ohm, og strømmen i ampere.

I stikkontakten i veggen er det 230 volt. Vi plugger i et apparat og måler at det går en strøm på 4,00 ampere gjennom apparatet. Hvor stor er motstanden i apparatet?

Motstanden er 57,5 ohm.

Figur F.3: Oppgave 2.2.7c fra 1T-kurset på Campus Matte

Oppgave 3a)

Anbefalte hjelpemidler: blyant og papir

En rett linje går gjennom origo og punktet $(1,3)$. Finn likningen til linjen.

$y =$ 3x

Figur F.4: Oppgave 2.5.3a fra 1T-kurset på Campus Matte

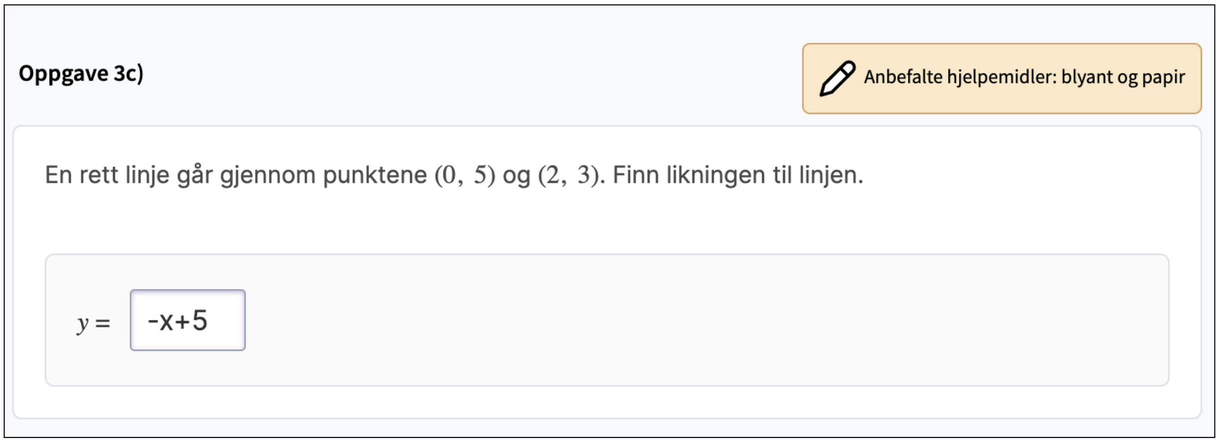
Oppgave 3b)

Anbefalte hjelpemidler: blyant og papir

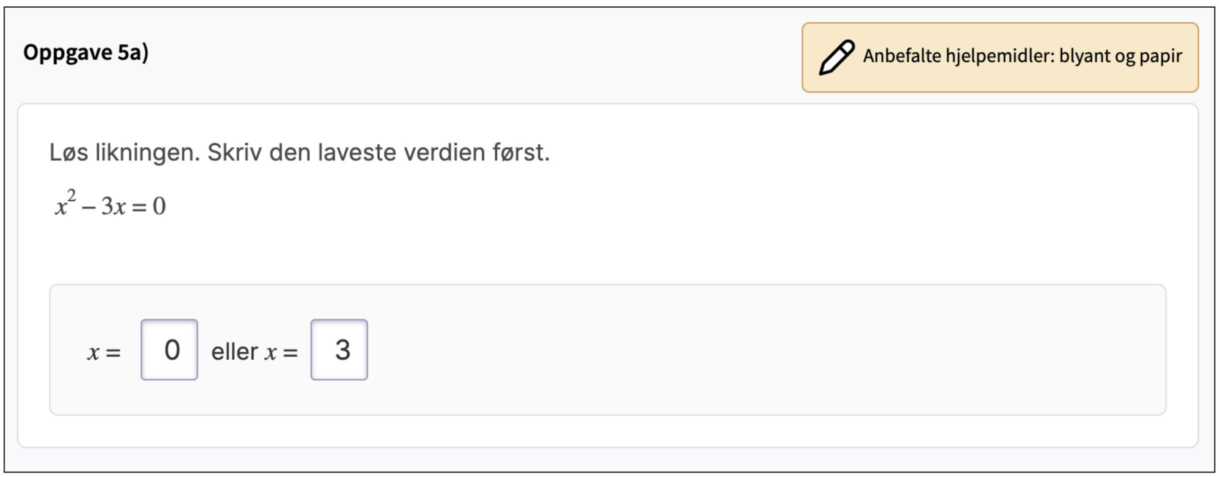
En rett linje går gjennom punktene (1, 3) og (3, 7). Finn likningen til linjen.

$y =$ 2x+1

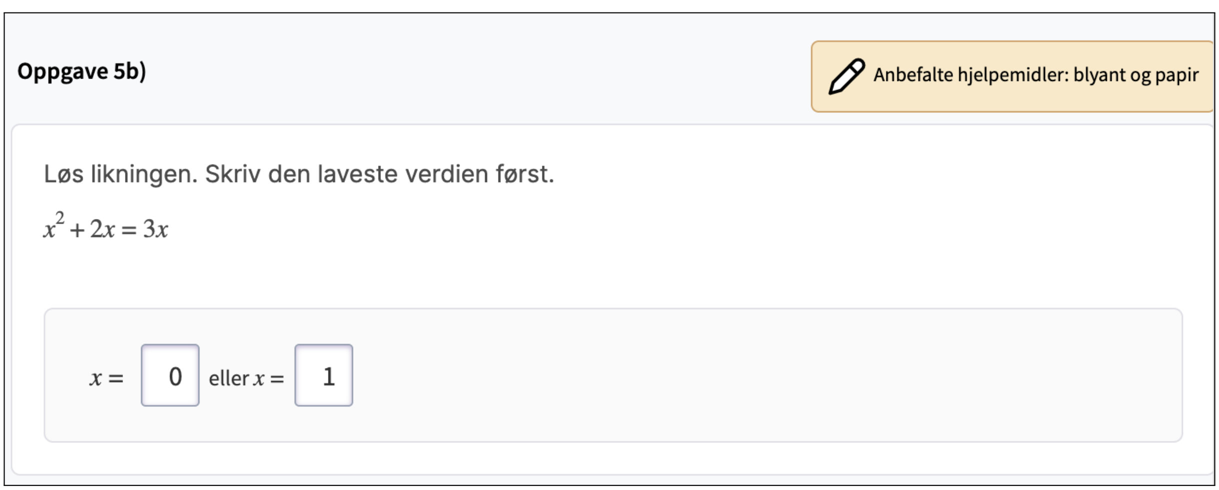
Figur F.5: Oppgave 2.5.3b fra 1T-kurset på Campus Matte



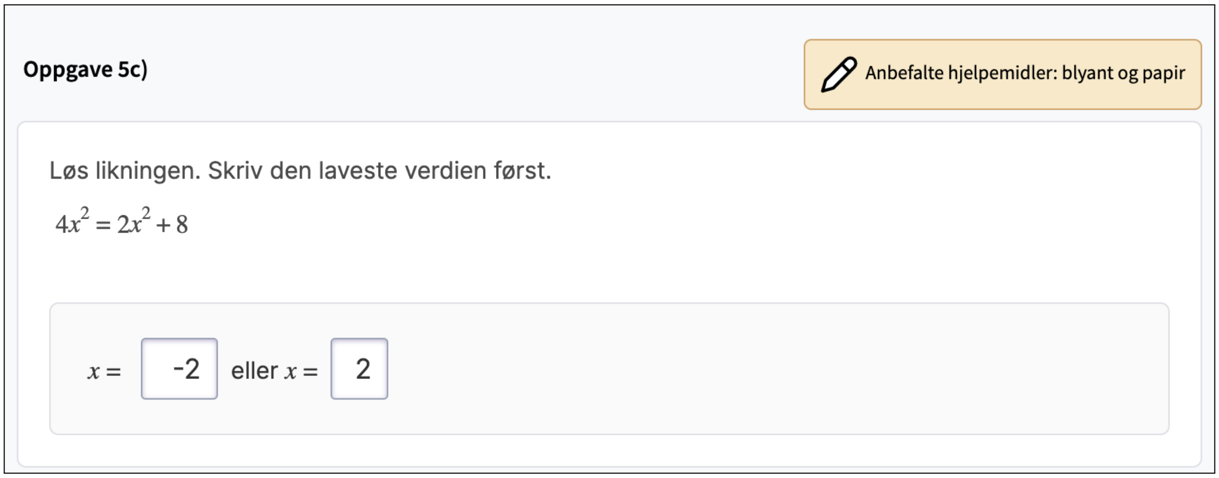
Figur F.6: Oppgave 2.5.3c fra 1T-kurset på Campus Matte



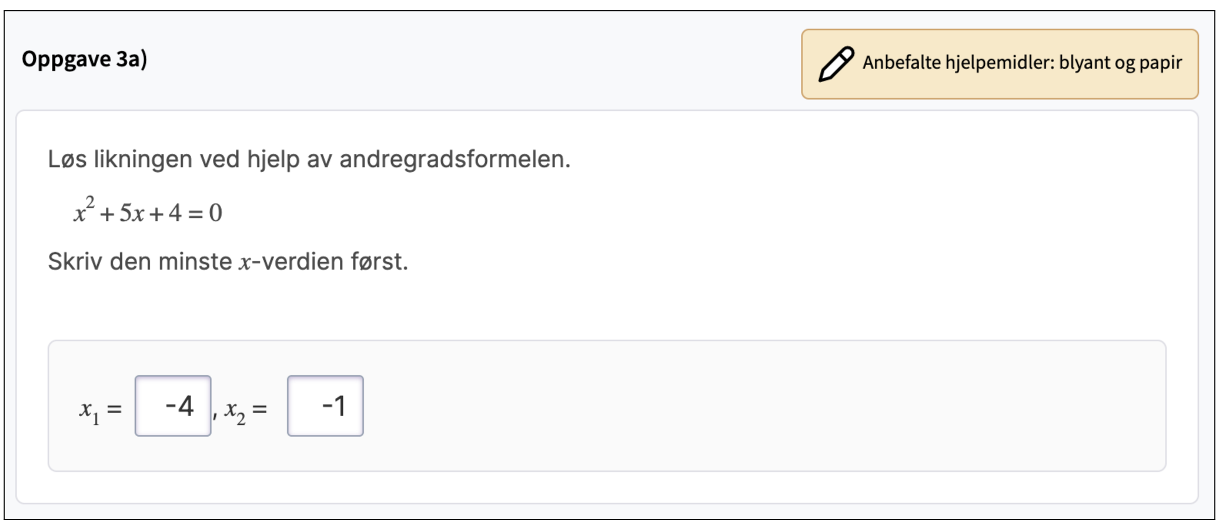
Figur F.7: Oppgave 3.1.5a fra 1T-kurset på Campus Matte



Figur F.8: Oppgave 3.1.5b fra 1T-kurset på Campus Matte



Figur F.9: Oppgave 3.1.5c fra 1T-kurset på Campus Matte



Figur F.10: Oppgave 3.5.3a fra 1T-kurset på Campus Matte

Oppgave 3b)

Anbefalte hjelpemidler: blyant og papir

Løs likningen ved hjelp av andregradsformelen.

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

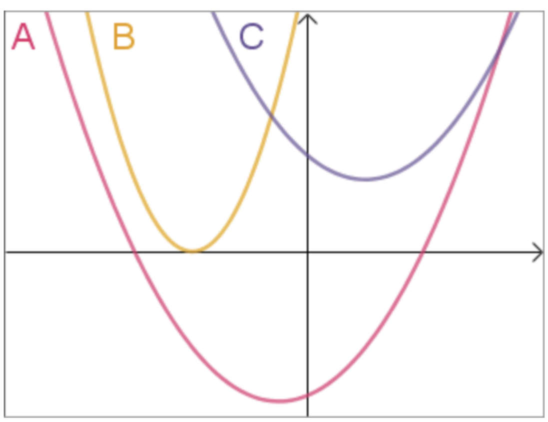
Skriv den minste x-verdien først.

$x_1 =$ -1 , $x_2 =$ 6

Figur F.11: Oppgave 3.5.3b fra 1T-kurset på Campus Matte

Oppgave 6a)

Anbefalte hjelpemidler: blyant og papir



Gitt tre likninger

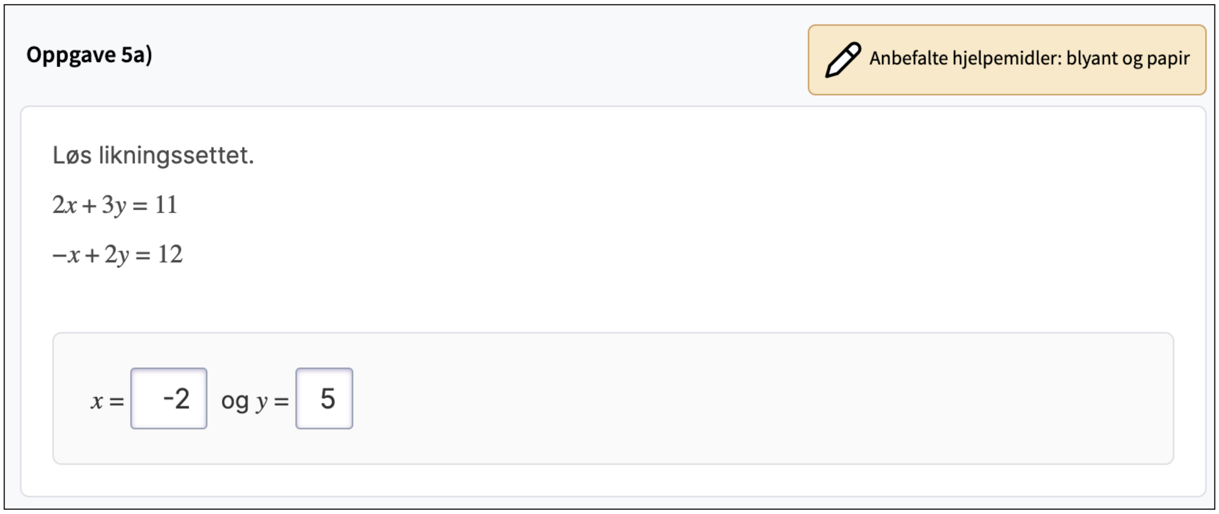
I: $x^2 + x - 6 = 0$

II: $3x^2 + 12x + 12 = 0$

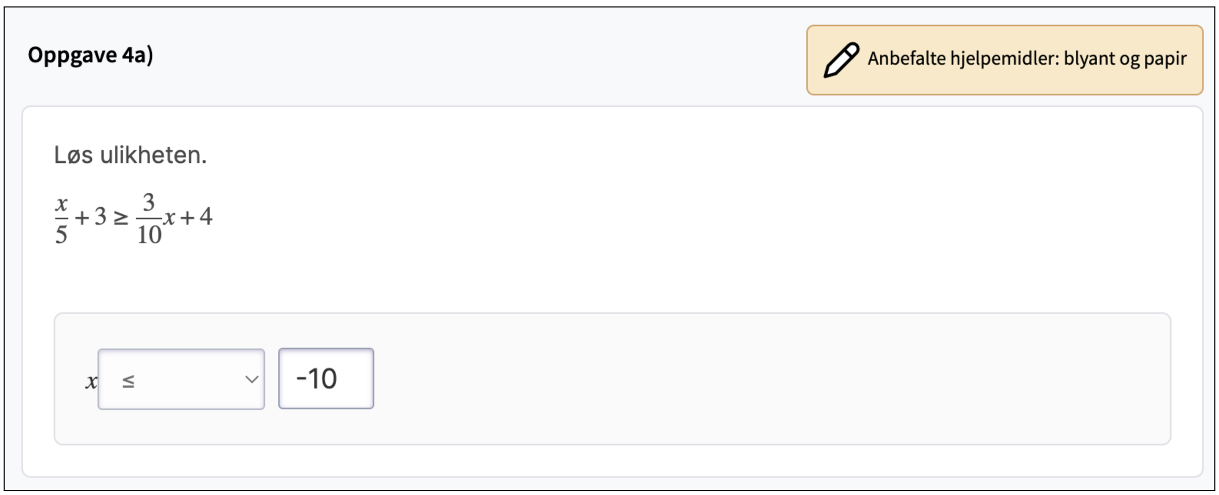
III: $x^2 - 2x + 4 = 0$

Bestem hvilken likning som hører til hvilken graf.

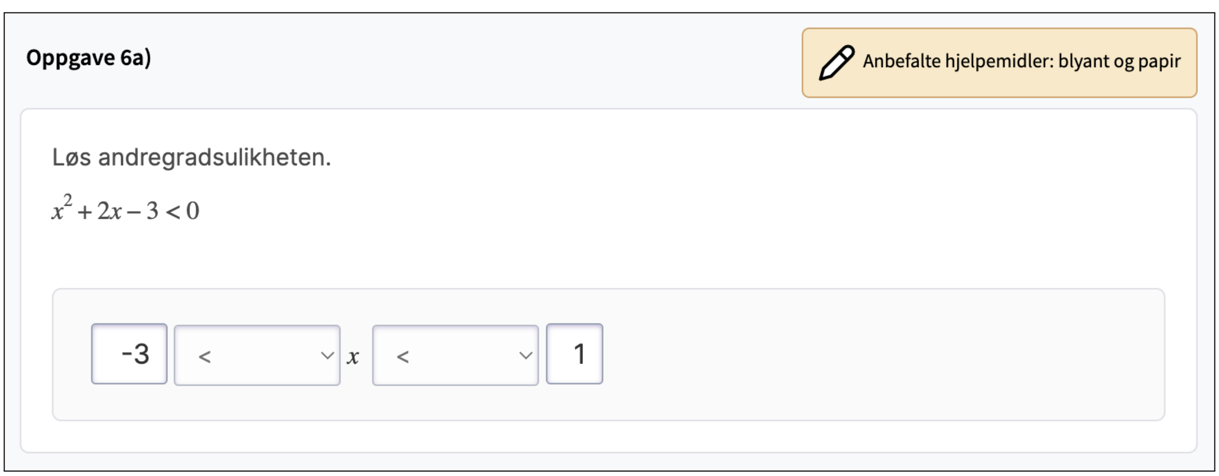
Figur F.12: Oppgave 3.7.6a fra 1T-kurset på Campus Matte



Figur F.13: Oppgave 4.1.5a fra 1T-kurset på Campus Matte



Figur F.14: Oppgave 4.3.4a fra 1T-kurset på Campus Matte

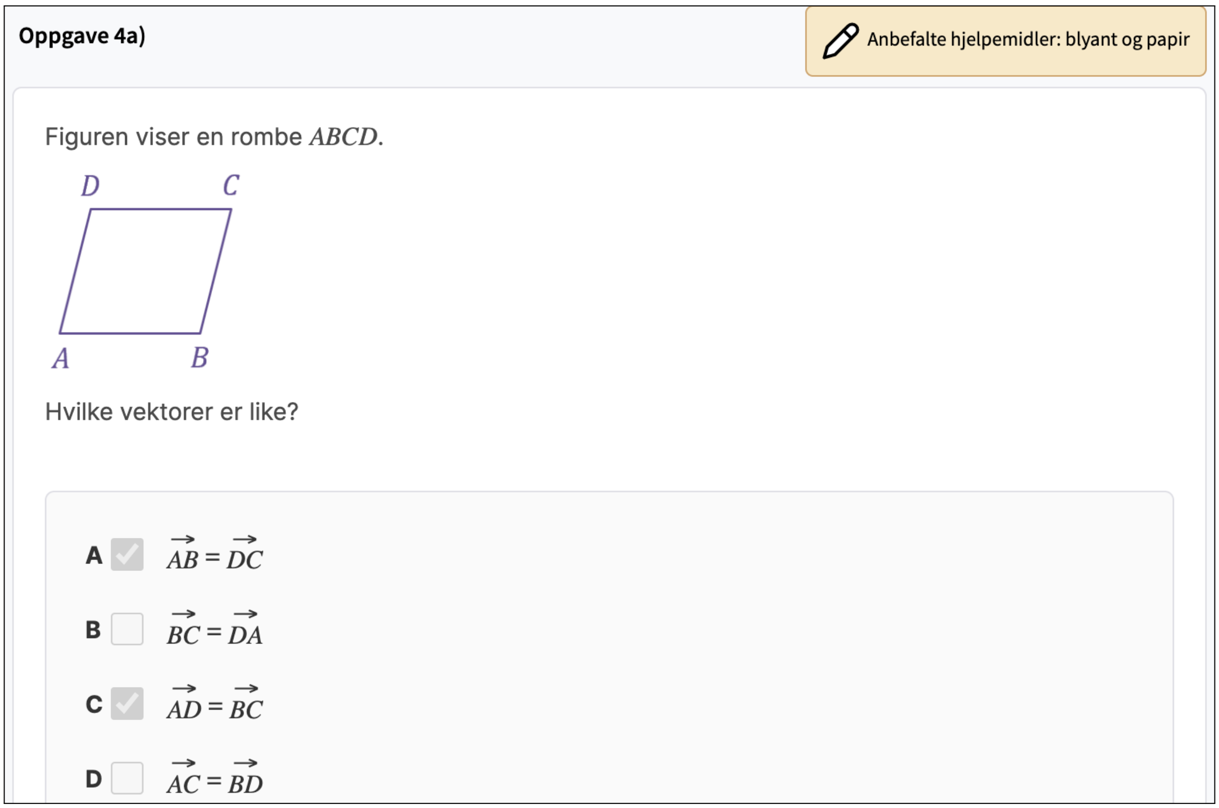


Figur F.15: Oppgave 4.4.6a fra 1T-kurset på Campus Matte

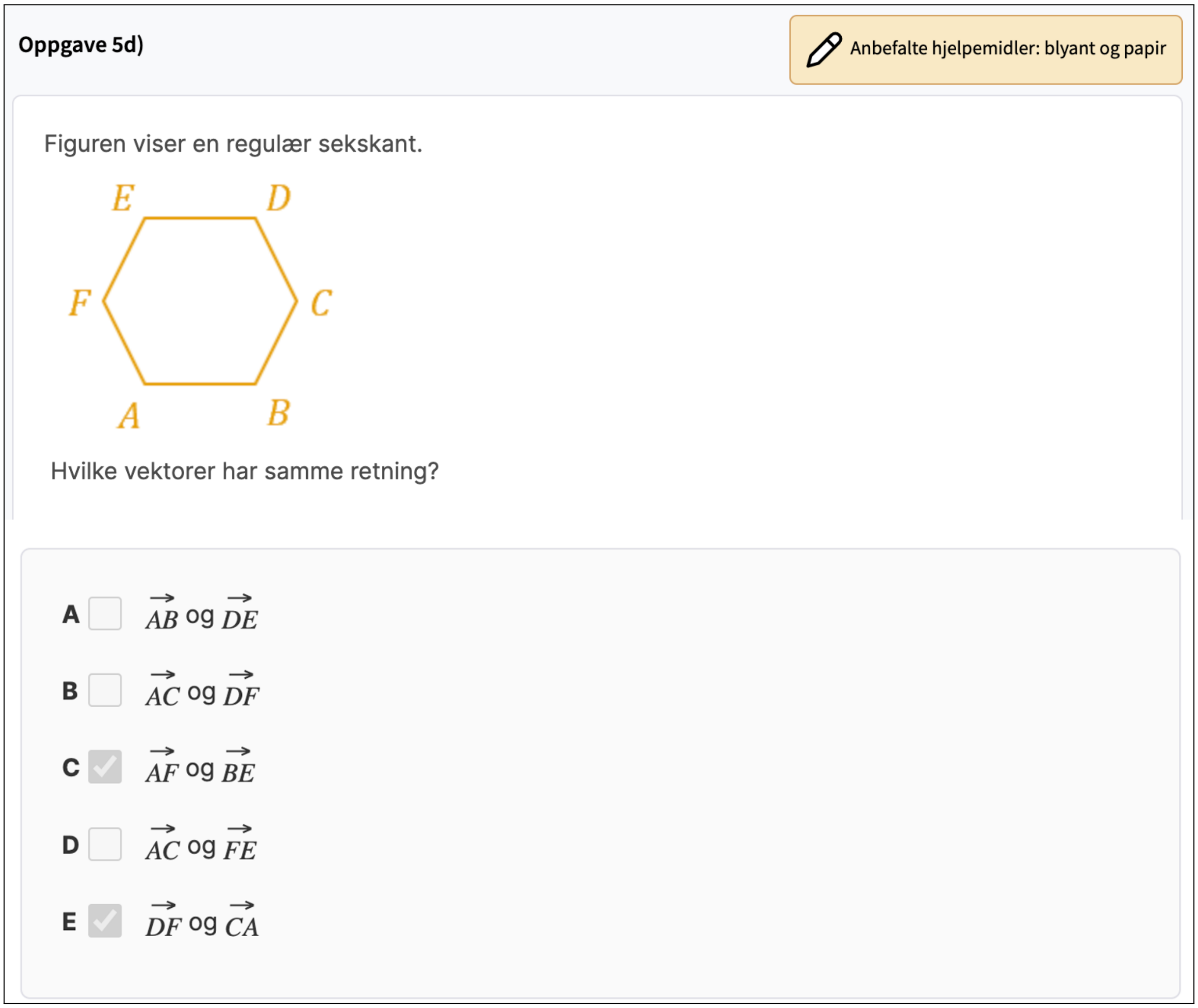
Vedlegg G

Oppgaver R1

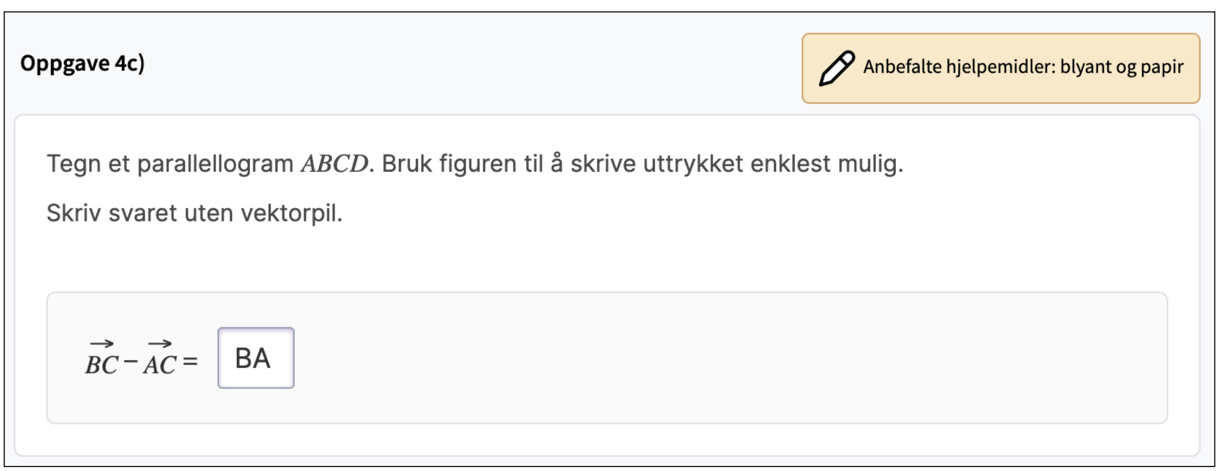
I dette vedlegget finner du de 10 oppgavene fra Campus Inkrement sitt R1-kurs som Hermine, Lavendel, Harry og Ronny jobbet med under datainnsamlingen. Metoden for denne sesjonen beskrives i seksjon 3.2.



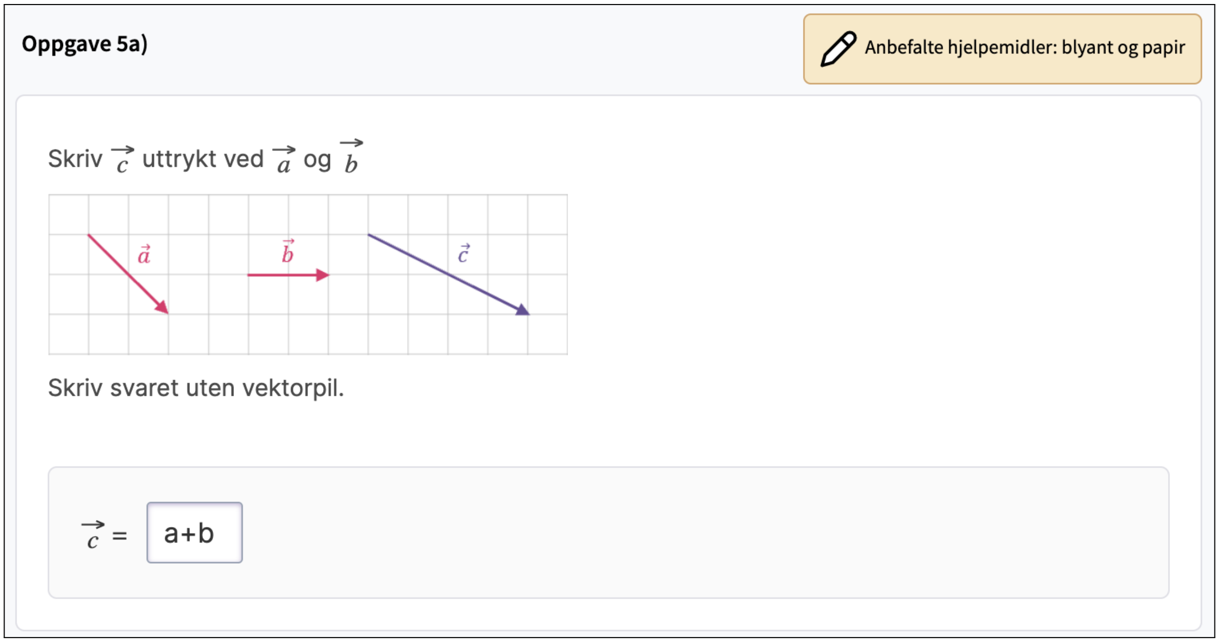
Figur G.1: Oppgave 5.1.4a fra R1-kurset på Campus Matte



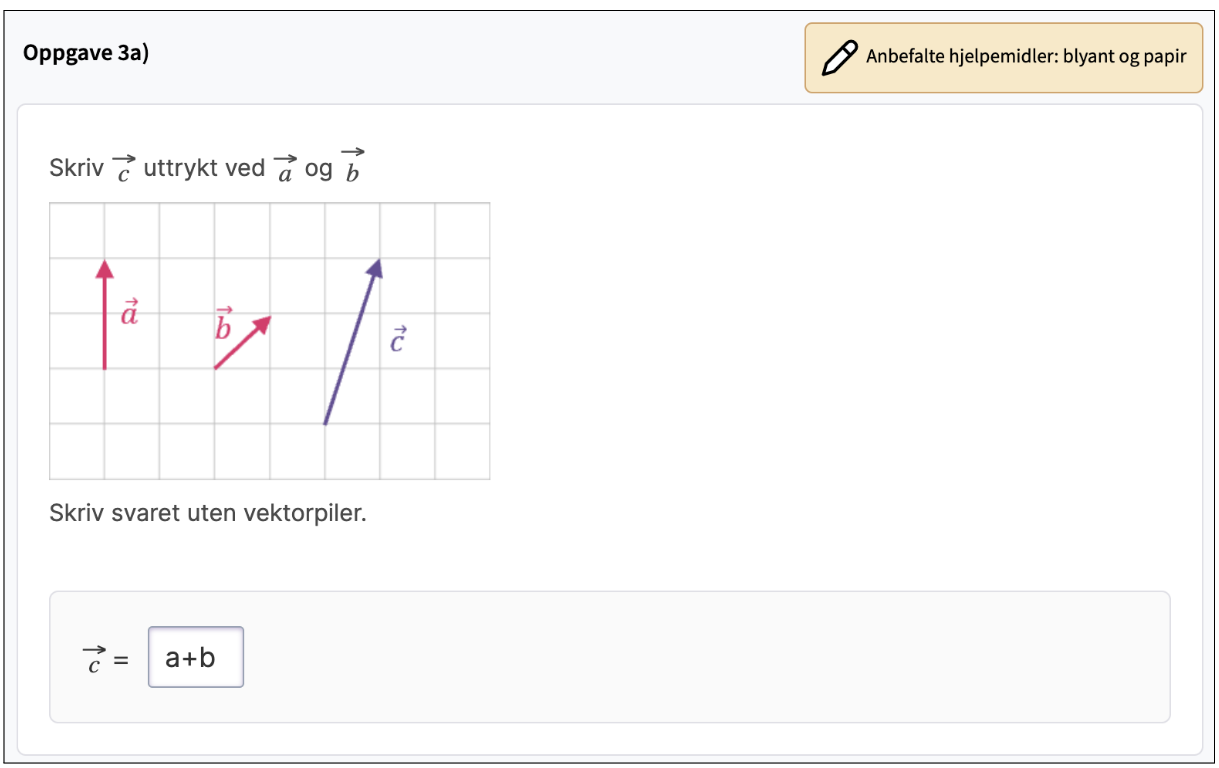
Figur G.2: Oppgave 5.1.5d fra R1-kurset på Campus Matte



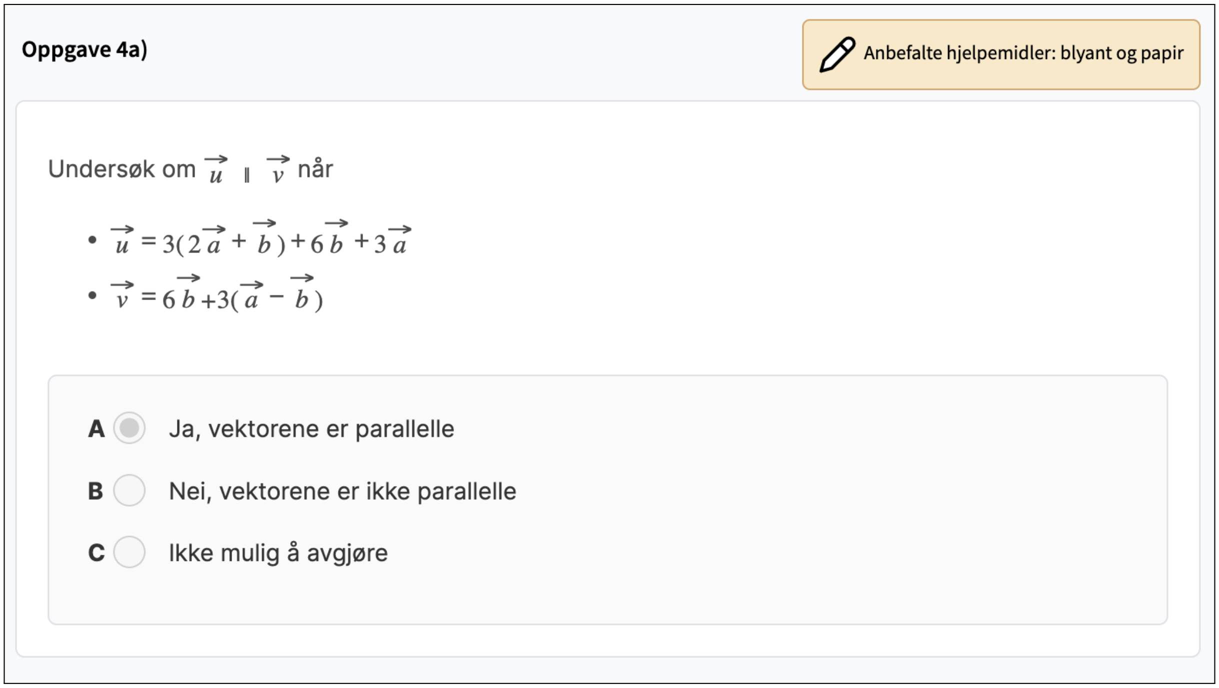
Figur G.3: Oppgave 5.2.4c fra R1-kurset på Campus Matte



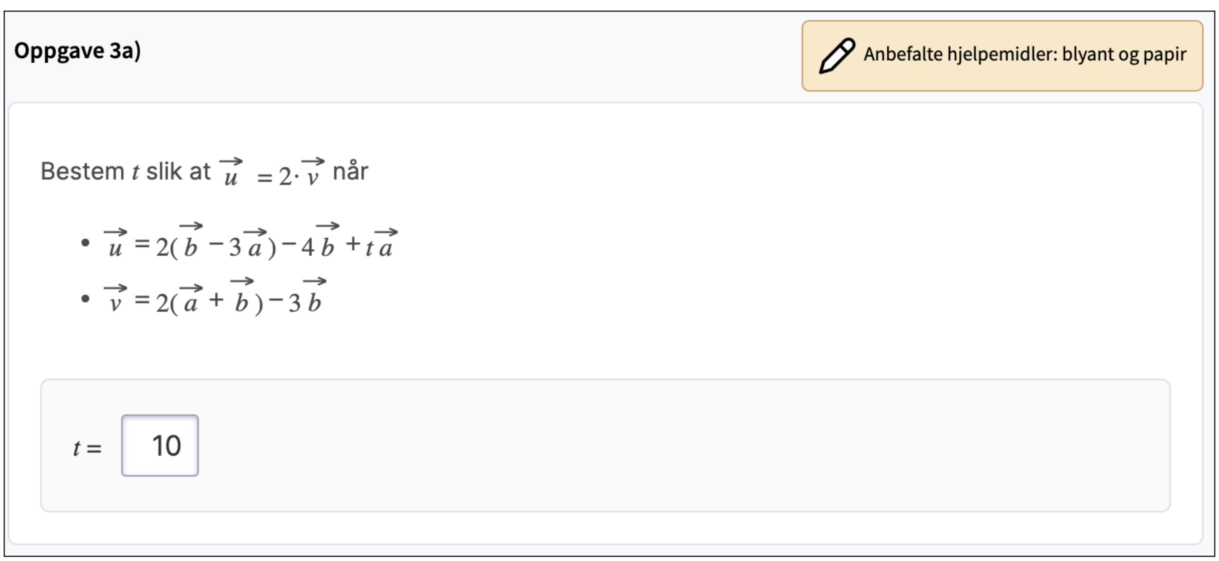
Figur G.4: Oppgave 5.2.5a fra R1-kurset på Campus Matte



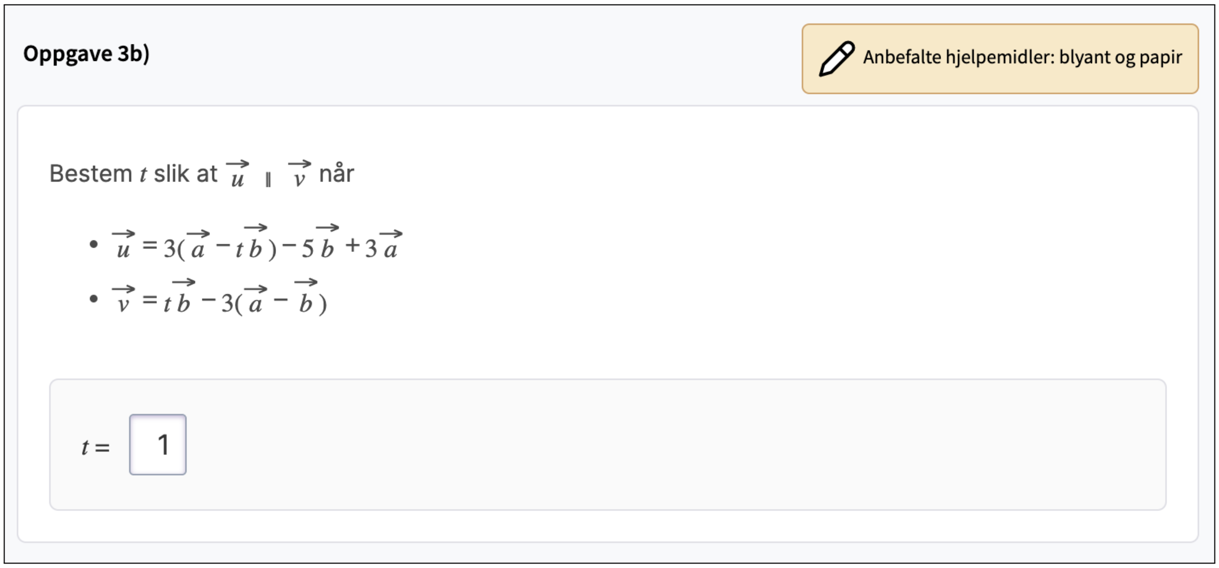
Figur G.5: Oppgave 5.3.3a og b fra R1-kurset på Campus Matte



Figur G.6: Oppgave 5.3.4a fra R1-kurset på Campus Matte



Figur G.7: Oppgave 5.4.3a fra R1-kurset på Campus Matte



Oppgave 3b)

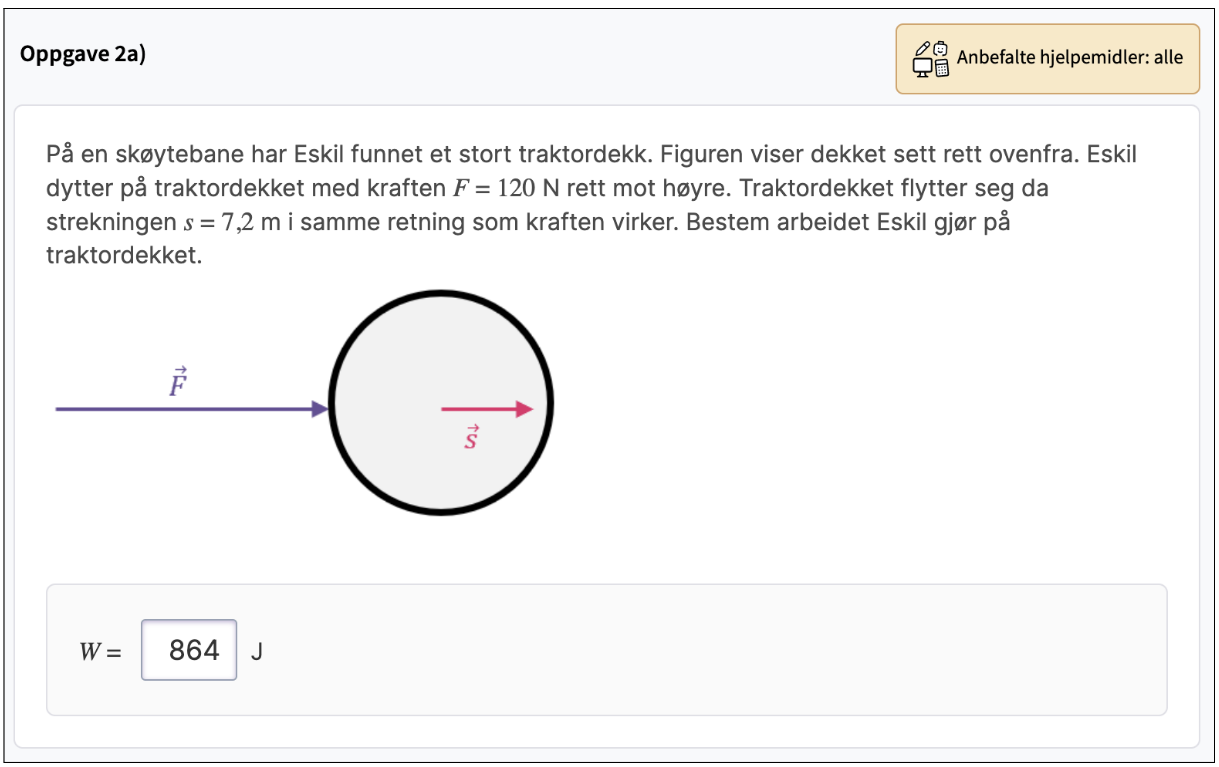
Anbefalte hjelpemidler: blyant og papir

Bestem t slik at $\vec{u} \parallel \vec{v}$ når

- $\vec{u} = 3(\vec{a} - t\vec{b}) - 5\vec{b} + 3\vec{a}$
- $\vec{v} = t\vec{b} - 3(\vec{a} - \vec{b})$

$t =$ 1

Figur G.8: Oppgave 5.4.3b fra R1-kurset på Campus Matte



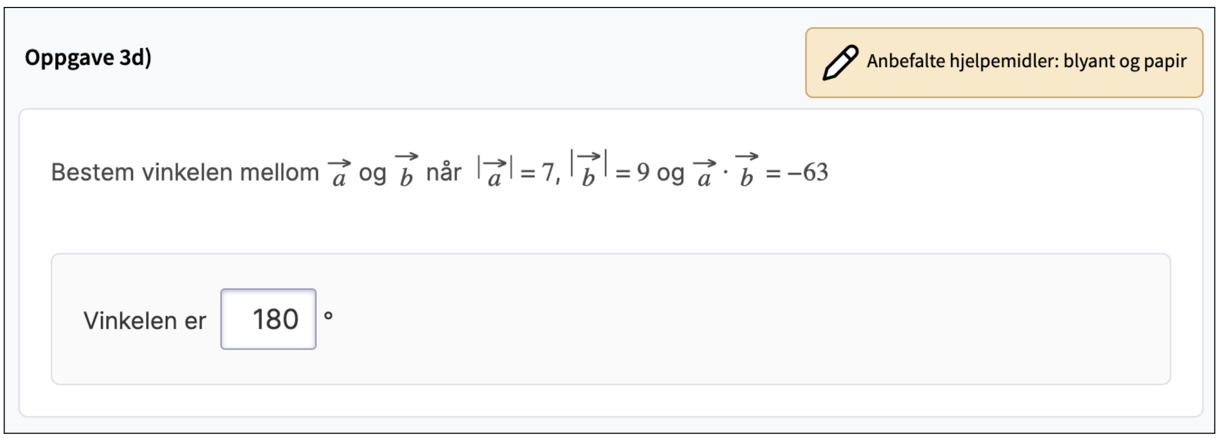
Oppgave 2a)

Anbefalte hjelpemidler: alle

På en skøytebane har Eskil funnet et stort traktordekk. Figuren viser dekket sett rett ovenfra. Eskil dytter på traktordekket med kraften $F = 120$ N rett mot høyre. Traktordekket flytter seg da strekningen $s = 7{,}2$ m i samme retning som kraften virker. Bestem arbeidet Eskil gjør på traktordekket.

$W =$ 864 J

Figur G.9: Oppgave 5.5.2a fra R1-kurset på Campus Matte



Figur G.10: Oppgave 5.5.3d fra R1-kurset på Campus Matte

Morten Nygård

Digitale læreverk — fremskritt eller fase?

NTNU
Kunnskap for en bedre verden