Hege Elisabeth Bakke

Hvordan kan du ikke tro på det?!

En kvalitativ studie med eksplorerende design av elevers argumentasjon i bevissituasjonen singel-case.

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk
Veileder: Heidi Dahl

Juni 2022

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Hege Elisabeth Bakke

Hvordan kan du ikke tro på det?!

En kvalitativ studie med eksplorerende design av elevers argumentasjon i bevissituasjonen singel-case.

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk
Veileder: Heidi Dahl
Juni 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Sammendrag

Min forskning handler om matematisk resonnering og argumentasjon, og utvikling av hensiktsmessige læringsressurser innenfor dette området. Formålet med studien har vært å identifisere faktorer som påvirker elevers argumentasjon i arbeid med å løse en oppgave og så bevise at svaret er korrekt, for slik å få innsikt i elevers argumentasjon i bevissituasjonen singel-case. Det overordnede forskningsspørsmålet har vært: *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?* For å besvare dette spørsmålet, har studien rettet søkelyset mot 1) hvordan elevene argumenterer for å bevise at de har funnet korrekt svar, og 2) hvilke faktorer som bidrar til utvikling av elevenes argumentasjon.

Forskningen har et sosiokulturelt perspektiv, og datainnsamling, analyse og resultater må ses i lys av det. Deltakere i prosjektet var seks elever fra åttende trinn fordelt på to grupper, og forsker var selv lærer i aktiviteten som besto av fire oppdrag knyttet til problemoppgaven «Hvor mye saft?». Studien har benyttet kvalitative metoder og forskningsdesignet har vært eksplorerende. Observasjon var viktigste metode for datagenerering, og induktiv metode ble brukt i analysen. Forskningsprosessen som helhet har vært inspirert av stegvis-deduktiv induktiv metode, noe som har krevd metodisk strenghet og ført til høy gjennomsiktighet i forskningen.

Til bruk i første del av forskningen, utviklet jeg et analyseverktøy for elevers argumentasjon i bevissituasjonen singel-case. Stylianides' (2007) definisjon av bevis i skolematematikken var fundamentet i verktøyet og hovedstrategien for analysen ble lånt fra hans rammeverk for å identifisere lærers grep knyttet til bevis. Toulmins modell for argumentasjon (2003) ble innpasset i verktøyet og brukt for å registrere elevenes argumentasjon. Analysen av påvirkende faktorer, i forskningens andre del, ble gjennomført etter inspirasjon fra stegvis-deduktiv induktiv metode.

Funn fra studien tyder på at oppgaven, med sin utforming og sitt design, har potensiale til å lære elever resonnering og argumentasjon. Elevenes personlige engasjement i fellesskapet og lærers medierende rolle har betydning for læringspotensialet, og utviklingen av elevenes argumentasjon påvirkes også av instrukser, oppfordringer, protester og skepsis. Tilgang til varierte argumentasjonsmåter og representasjonsmåter gir elevene anledning til å lykkes med muntlig og skriftlig utforming av argumentasjonen, samt klare å koble relevante aksepterte sannheter til påstandene sine.

Nøkkelord: Sosiokulturell teori, matematisk resonnering, argumentasjon, bevis, bevissituasjoner, singel-case, Toulmins modell, stegvis-deduktiv induktiv metode

Abstract

My research is about mathematical reasoning and argumentation, and the development of appropriate learning resources. The purpose of the study has been to identify factors that influence students' argumentation in solving a task and then prove that the answer is correct, in order to gain insight into the students' argumentation in the proof situation "a single case". The overall research question has been: What is the learning potential of the task *How Much Juice?* with regard to students' reasoning and argumentation? To answer this question, the study has focused on 1) how students argue to prove that they have found the correct answer, and 2) what factors contribute to the development of the students' argument.

The research has a sociocultural perspective, and data collection, analysis and results must be viewed in light of this. Participants in the project were six students from the eighth grade, divided into two groups. The researcher took the role of the teacher in all four different activities related to the task *How Much Juice?* The study has used qualitative methods and the research design has been explorative. Observation was the most important method for data generation, and induction was used for analysis. The research process as a whole has been inspired by stepwise-deductive induction approach and has required qualitative rigor and research transparency.

For the first part of this research, I developed an analysis tool for students' argumentation in the proof situation "a single case". A. J. Stylianides' definition for proof in school mathematics formed the foundation of this tool. The main strategy for analysis was borrowed from his framework for identifying the teacher's actions in proof activity. Toulmin's model of argumentation was used to plot and analyse the students' argumentation. The analysis of influencing factors in the second part of my study followed stepwise-deductive induction approach encoding the results and then dividing them into categories and concepts.

Findings suggest that the task, in the way it's designed, has learning potential for students' reasoning and argumentation. A student's personal involvement and teacher scaffolding play important roles in the improvement of argumentation. The level of learning potential is also affected by instruction, encouragement, and challenges by others in the form of protests and scepticism. Access to varied modes of argumentation and modes of representation allow students to succeed in oral and written design of the argumentation and help them to use relevant, accepted statements in support of their claims.

Keywords: Sociocultural theory, mathematical reasoning, argumentation, proof, proof situations, a single case, Toulmin's model, stepwise-deductive induction approach

Forord

Masteroppgaven er ferdig. Nå som den er en realitet, puster jeg lettet ut og tar meg tid til å tenke tilbake. Et helt liv som glødende interessert i matematikk, et voksenliv som dedikert matematikklærer og de senere år en ganske frustrert matematikklærer på søken etter «noe» som kunne bidra til at mine elever i større grad ville finne mening og glede i matematikken. «Hvilke grep bør jeg gjøre i undervisningen min slik at elevene både liker og lærer faget?», var spørsmålet jeg stilte meg. Letingen etter svar på det, har vært min drivkraft og min motivasjon gjennom flere perioder med videreutdanning. Jeg har fortsatt ikke noe klart svar, men med økt innsikt i matematikken og dens historie, har jeg en tro på at i alle fall deler av svaret, vil være å gjøre matematikkens natur og fagets logiske sammenhenger synlig og tilgjengelig for elevene. I de kommende år vil nok denne overbevisningen prege min undervisning.

Det er virkelig på sin plass med en takk til kolleger og ledelse ved skolen jeg jobber på, og til arbeidsgiver som ga meg muligheten til å ta masterutdannelsen gjennom økonomiske og praktiske tilrettelegginger i forbindelse med samlinger, eksamener og oppgaveskriving. Jeg vil også takke mine lærere og medstudenter ved NTNU som bidro til å opprettholde motivasjonen min, og ga inspirasjon og god hjelp i arbeidet med faget generelt og med masteroppgaven spesielt. En stor takk går også til elevene som deltok i prosjektet mitt, og til familie og venner som har bidratt slik at jeg kunne fullføre studier og masteroppgave. En minst like stor takk til min veileder Heidi Dahl som med forståelse, tålmodighet, fleksibilitet, innsikt og kompetanse har vært en uvurderlig støtte både personlig og faglig. Takk for at du minnet meg om å puste - og alltid uttrykte tro på at jeg ville komme i mål!

Innhold

Figurer

Forkortelser/symboler

LK20	Gjeldende læreplan for grunnskolen
NSD	Norsk senter for forskningsdata
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
ProPrimEd	Reasoning and proving in primary education
SDI	Stegvis-deduktiv induktiv metode

1 Innledning

Overgripende tema for masteroppgaven *Hvordan kan du <u>ikke</u> tro på det?!* er matematisk resonnering. Formålet med studien er å identifisere trekk ved en konkret oppgave (*Hvor mye saft?*) som innvirker på elevenes argumentasjon, for slik å kunne uttale meg om læringspotensialet til oppgaven med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon. Problemstillinger jeg søker svar på, er hvordan elevene argumenterer for at svaret er korrekt og hva som bidrar til at de utvikler argumentasjonen i retning av et gyldig matematisk bevis. Tittelen er valgt for å sette søkelyset på ett av funnene; elever er ikke alltid klar over at en påstand trenger ytterligere forklaring, noe som gjør at argumentasjonen blir mangelfull og dermed ikke kvalifiserer som bevis. En annen assosiasjon, er at matematisk resonnering og argumentasjon handler om at man må være så overbevisende at all tvil om resultatet forsvinner. Et tredje aspekt ved tittelen, er at den indikerer at matematisk argumentasjon involverer mer enn en person, noe som peker i retning av hvilket læringssyn og teoretisk forankring denne oppgaven har.

1.1 Bakgrunn for studien

Resonnering og argumentasjon i matematikkfaget har fått økt oppmerksomhet ved at det framheves som et eget kjerneelement i den nye rammeplanen for grunnskolen LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2020). I kompetansemålene kommer kjerneelementet til syne gjennom at elever på alle trinn blant annet skal utforske, argumentere og uttrykke sine resonnement på ulike måter (Valenta & Enge, 2020). Elever skal altså møte bevis i matematikkfaget - som resonnement, forklaringer, begrunnelser og argumentasjon - tidligere enn før, hvilket betyr at flere lærere nå må undervise bevis og støtte elever i arbeid med resonnering og argumentasjon. Ut fra det springer det et behov for undervisningsmateriell og læremidler som gir veiledning og råd om hvordan man kan lykkes med å lære elever resonnering, argumentasjon og bevis. Dette har feltet imidlertid lite forskningsbasert kunnskap om, og spesielt har det vært begrenset forskning med yngre elever som deltakere (G. J. Stylianides & Stylianides, 2017). Det etterspørres altså forskning på, og kunnskap om, hvilke aktiviteter, grep og endringer som kan gjøres i klasserommet med tanke på at elever skal lære å bevise.

Forskning på elevers resonnering, argumentasjon og bevis har foregått over lang tid, og mange ulike forskningsresultater foreligger. Begrepene resonnering, argumentasjon og bevis blir ofte brukt som om det er enighet om definisjonen av disse (Balacheff, 2008), men realiteten er at begrepene ikke er tilstrekkelig definert og avklart i forhold til hverandre (Hanna, 2020). Forskning på området bruker dessuten ulike vitenskapsteoretiske perspektiver og benytter både kvantitative og kvalitative metoder, og det viser seg at de funn man gjør, avhenger av hvilken tilnærming man gjør teoretisk og metodisk (A. J. Stylianides, 2019). Mye forskning har konkludert med at elever oftest bruker empirisk argumentasjon som ikke kan godkjennes som bevis (A. J. Stylianides, 2011), mens andre hevder at elever utformer gyldig argumentasjon om vi bare lar dem anvende flere måter å uttrykke seg på enn det skriftlige språket (A. J. Stylianides, 2019). Mangfoldet i tolkning og bruk av begreper sammen med variasjonen i forskningspraksis og tilhørende resultater gjør det utfordrende å si noe om hvilken kunnskap vi egentlig har om elevers resonnement, argumentasjon og bevis (Balacheff, 2008). Fra dette kommer det et behov for en mer felles anvendelse og tolkning av begrepene. Et ganske nylig bidrag til forskningsfeltet, er en modell hvor begreper knyttet til matematisk resonnering blir kartlagt, definert og kategorisert etter en litteraturgjennomgang av tidligere forskning på feltet (Jeannotte & Kieran, 2017). Ved at jeg benytter begreper som samsvarer med denne modellen, og er tydelig på eventuelle alternative tolkninger, kan det være mulig å se mine resultater i sammenheng med tidligere resultater.

Det finnes lite forskning som ser på hva som kjennetegner oppgaver som egner seg til å undervise bevis, og hvordan disse kan iverksettes og gjennomføres i praksis i et klasserom (A. J. Stylianides & Stylianides, 2013). Selv om noe har blitt gjort for å møte dette behovet, varierer både kvaliteten på forskningen og nytteverdien av de funn som er gjort både i forhold til om ressursene fungerer og om lærere har mulighet til å benytte seg av dem (Nardi & Knuth, 2017). Bevisaktivitetene må ledes, og det at mange lærere har begrenset kunnskap om bevis og bevissituasjoner (A. J. Stylianides & Ball, 2008), forsterker utfordringen, noe også Nardi & Knuth (2017) uttrykker. Med gode undervisningsressurser og støttemateriell kan denne situasjonen avhjelpes, og et formål med denne masteroppgaven er å kunne bidra inn mot dette. En konkret måte det kan skje på, er at mine funn kan være interessante for ProPrimEd, et pågående 4-årig forskningsprosjekt. Den bevisoppgaven jeg har sentralt i mitt prosjekt, er inspirert av en av oppgavene som ProPrimEd vurderer å bruke som en del læringsløypa som de har under utvikling. Min forskning gir økt erfaring med oppgavetypen, noe som kan bli nyttig i fortsettelsen av prosjektet, ettersom et av målene er å finne fram til undervisningsressurser som er effektive med hensyn til elevers læring av matematisk resonnering (Valenta, u.å.).

Det finnes ulike bevissituasjoner, og en av disse er når man har ett spesifikt svar som man vil validere (A. J. Stylianides & Ball, 2008). At en ordinær matematikkoppgave med ett korrekt svar, kan være en egnet situasjon for å lære elever resonnering og argumentasjon, trenger ikke være innlysende. En svært stor del av forskningen på feltet retter seg mot situasjoner som involverer uendelig mange tilfeller og ikke bare ett. For å støtte elever i sitt arbeid med bevis, er det imidlertid viktig at lærere har kunnskap om flere ulike bevissituasjoner, hva som skiller dem fra hverandre og også vite hva som kan godkjennes som bevis i hver av bevissituasjonene (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Bevis er svært sentralt i matematikken, og Stylianides (2007) har illustrert hvordan man med utgangspunkt i en definisjon av bevis til bruk i skolematematikken kan støtte elever i å utvikle en argumentasjon i retning av et gyldig bevis. Det har imidlertid vært vanskelig å finne eksempler på hvordan rammeverket kan anvendes på bevissituasjoner som omfatter å bevise ett spesifikt svar, selv om det finnes unntak (Nordin & Björklund Boistrup, 2018; Rasch, 2018; A. J. Stylianides, 2016). Dette er nærmest et paradoks, ettersom mye av aktiviteten i matematikkfaget i norsk skole, nettopp handler om å løse oppgaver som har ett korrekt svar. Dette har jeg selv erfart i over 20 år som lærer, og også lærebøkenes fasit som lister opp korrekte oppgavesvar, vitner om det samme. Hvis elever skal lære hva et matematisk bevis er, kan forestillingen om at sjekk av fasit er tilstrekkelig, være uheldig ettersom det fortsatt ikke er sikkert at svaret er korrekt; det kan være feil i fasiten eller elever kan se på feil oppgave. Å få mer kunnskap om hvordan oppgaver som etterspør ett bestemt svar, kan utnyttes som bevisoppgaver, blir dermed viktig av to grunner. For det første, kan det å fjerne seg fra å stole blindt på en fasit, gjøre at elevene får innsikt i hva som kreves av et bevis. For det andre kan det å bruke eksisterende oppgaver som bevisoppgaver, lette tilgangen på læremidler nå som resonnering og argumentasjon har fått større betydning i skolematematikken.

1.2 Forskningsspørsmål

Bakgrunnen for mitt valg av forskningsprosjekt er altså at ny rammeplan i grunnskolen har aktualisert elevers arbeid med resonnering, argumentasjon og bevis, og med det skapt et behov for å utvikle læringsressurser knyttet til temaet. Forskningsfeltet etterlyser imidlertid forskning på hvilke oppgaver som egner seg til å undervise bevis, og spesielt er det behov for kunnskap tilknyttet en bevissituasjon hvor ett konkret svar skal bevises. Med dette som utgangspunkt, har jeg valgt matematisk resonnering som overgripende tema for masteroppgaven, og mitt primære formål er å bidra til utvikling av egnede læringsressurser. Jeg velger å se på elevers bevisarbeid knyttet til en oppgave med ett korrekt svar, ettersom det er denne bevissituasjonen som fra før er minst belyst.

Jeg tar utgangspunkt i en konkret problemoppgave som er identisk med den som ProPrimEd har i sitt forskningsprosjekt. Jeg har imidlertid gjort noen endringer med hensyn til hvilke oppdrag elevene får. Problemoppgaven «Hvor mye saft?» informerer om at 3 barn fyller 7 hele og 7 halve flasker hver, og etterspør hvor mye saft som ble laget til sammen. Det vil normalt ikke være vanskelig for elever i 8. klasse å finne svaret, så eventuelle utfordringer vil knytte seg til å argumentere for at svaret de har funnet, er riktig, og det er dette deloppgavene går ut på: Gruppene skal først løse oppgaven og overbevise om at de har korrekt svar, så skal de vurdere en annen gruppes løsning og deretter rekonstruere en argumentasjon bestående av biter. Til slutt svarer elevene individuelt på samme oppgave. Jeg observerer to grupper med elever fra 8. klasse som arbeider med oppgaven, og analyserer datamaterialet for å få informasjon om hvordan elevene argumenterer og hvordan endringer i argumentasjonen oppstår.

Mitt forskningsspørsmål er: *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?* For å kunne si noe om det, vil jeg besvare følgende to analytiske spørsmål:

1) *Hvordan argumenterer elevene for å bevise at løsningen er riktig?*

2) *Hvilke faktorer bidrar til utvikling av elevenes argumentasjon?*

For å svare på det første analytiske spørsmålet studerer jeg oppgaven «Hvor mye saft?» for å avdekke hvilke matematiske resonnementer som kan konstrueres fra oppgavens opplysninger og lede fram til et endelig svar, og jeg definerer hva som må til for å argumentere på en gyldig måte. Dette arbeidet gir meg et utgangspunkt for å analysere det elevene sier og gjør. Analysen av elevenes argumentasjon er todelt. Først identifiserer jeg hvilke elementer elevene har i argumentasjonen sin og hvordan de ulike delene kobles til hverandre. Deretter vurderer jeg hvilket nivå argumentasjonen har, og om elevene klarer å bevise at de har funnet korrekt svar. For å svare ut det andre analytiske spørsmålet, ser jeg nærmere på utvalgte situasjoner og identifiserer hva som skjer, og hvem og hva som er involvert, når argumentasjonen utvikles og endres. Med mine funn som grunnlag, uttaler jeg meg om hvilket læringspotensial oppgaven har for elevers resonnering og argumentasjon.

1.3 Oppgavens avgrensning, innhold og struktur

Matematisk resonnering er et overordnet begrep og omhandler det som skjer fra man blir presentert for et problem eller en problemstilling til man har nådd en konklusjon (Jeannotte & Kieran, 2017). I denne oppgaven vil jeg se spesielt på hvordan elevene prøver å bevise at de har riktig svar, hvilket innebærer at jeg konsentrerer meg om den hoveddelen av matematisk resonnering som handler om argumentasjon.

Situasjoner for å bevise kan kategoriseres etter om hensikten er å bevise eller motbevise, samt etter hvor mange caser/tilfeller som er involvert i bevisoppgaven (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Bevissituasjonen jeg studerer i denne oppgaven, er bevis som omfatter ett tilfelle, og begrepet jeg har valgt å bruke er *singel-case*. Avgrensningen har konsekvenser for hva jeg trekker inn av litteratur, samt hvilke eksempler jeg bruker for å illustrere teorien.

I teoridelen vil jeg først klargjøre hvilket paradigme jeg skriver innenfor og antyde hvilke konsekvenser mitt teoretiske perspektiv har, spesielt for forståelsen av læring. Deretter definerer og avklarer jeg begreper knyttet til matematisk resonnering, før jeg presenterer en inndeling av situasjoner for bevis og spesielt setter søkelyset på hva som kjennetegner bevissituasjonen singel-case. Deretter vil jeg definere hva som kreves av et matematisk bevis i klasserommet, og her fortolker jeg også hvordan definisjonen kan forstås i bevissituasjonen singel-case. Videre avklarer jeg begrepet argumentasjon og definerer tre nivåer for å angi argumentasjonens kvalitet, også i bevissituasjonen singel-case. Til slutt i teoridelen forklarer jeg Toulmins modell og viser hvordan den kan brukes til å analysere matematisk argumentasjon, og her vil en analyse av oppgaven *Hvor mye saft?*, fungere som eksempel.

Metodedelen inneholder beskrivelser av hvordan jeg har gjennomført forskningsprosjektet, og begrunnelser for de valg jeg har tatt med hensyn til metode og organisering. Her viser jeg også hvordan både teorien og empirien har gitt innspill til det analyseverktøyet jeg anvender i prosjektet, og i tillegg til å skildre utviklingsprosessen, forklarer jeg hva verktøyet består av og hvordan jeg gjør bruk av det. Jeg avrunder metodedelen med vurderinger og betraktninger knyttet til reliabilitet, validitet og etikk.

Analysekapittelet er todelt, og de to delene relaterer seg til hvert av de analytiske spørsmålene, henholdsvis elevenes argumentasjon og påvirkende faktorer. Jeg presenterer resultater og analysene som ligger bak, og illustrerer dette ved bruk av eksempler fra datamaterialet mitt. En sammenfatning fra begge analysene, bidrar til å indikere svar på det overordnede forskningsspørsmålet *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?*

I drøftingskapittelet bruker jeg tidligere forskning og annen relevant litteratur for å utdype og belyse de funnene jeg gjorde, for slik å argumentere for min konklusjon angående oppgavens læringspotensial. Som en del av drøftingen, lar jeg mine funn inspirere til endringsforslag for oppgaven «Hvor mye saft?», med tro på at en revidert utgave kan gi enda større læringspotensial med tanke på elevers læring av resonnering og argumentasjon. Jeg retter så et kritisk blikk mot forskningsdesign og forskningsprosess for å synliggjøre mulige mangler og feilkilder. Som avrunding av oppgaven, antyder jeg hvilken betydning mine resultater kan ha, hvordan man kan bygge videre på mine resultater og hvilke relaterte problemstillinger jeg mener er av nytte og interesse framover.

2 Teori

2.1 Teoretisk forankring

2.1.1 Sosialkonstruktivistisk vitenskapsteoretisk perspektiv

I en masteroppgave i matematikkdidaktikk, er det nødvendig med en klargjøring av hvilket teoretisk ståsted man har, ettersom begrep som læring og kunnskap får noe ulik betydning ut fra det perspektivet man inntar. En av retningene innenfor sosialkonstruktivismen, hevder at «vår kunnskap om virkeligheten, er sosialt konstruert», noe som betyr at det er språket som bygger og strukturerer kunnskapen (Kleven & Hjardemaal, 2018). Denne beskrivelsen mener jeg har store likheter med matematikkens natur og dens aksiomatiske oppbygging. Opprinnelsen til matematikk var et behov for å holde orden på mengder, noe som utviklet seg fra steiner, pinner og tellestreker til mer kompliserte tallsystemer. Mennesker forhandlet om hvilke symboler som skulle brukes og hvordan man skulle behandle disse symbolene, og gjennom enighet ble en bit av matematikkens struktur «skapt» og brukt som grunnlag – en sannhet - for å utvikle nye biter og ny kunnskap. Et sosialkonstruktivistisk perspektiv gir altså bruk av representasjoner og symboler stor betydning, noe som får konsekvenser for betraktninger av læring og kunnskap i matematikk (Skott et al., 2014). Gjennom språk (formelt, uformelt, verbalt, symbolsk, muntlig, skriftlig, fysisk og figurativt) anvendt i et fellesskap, kommer kunnskap og oppfatninger til syne, og på denne måten er språket en meningsbærer. Språk og symboler gir rom for tolkninger, og med sosialkonstruktivistisk ståsted, vil diskusjoner av ulike oppfatninger være et viktig aspekt av læring.

Det mest sentrale jeg tar med meg fra sosialkonstruktivismen og inn i min forskning, er vektleggingen av mangfold i språklige uttrykksformer og representasjoner da dette gir metodiske konsekvenser og inviterer til kvalitativ forskning. Fellesskapets betydning for muligheten til kommunikasjon gir dessuten praktiske anbefalinger som organisering i grupper og helklassesamtale, og mellommenneskelig enighet som rettesnor for kunnskap og sannhet peker mot relevante analytiske verktøy.

2.1.2 Sosiokulturell læringsteori

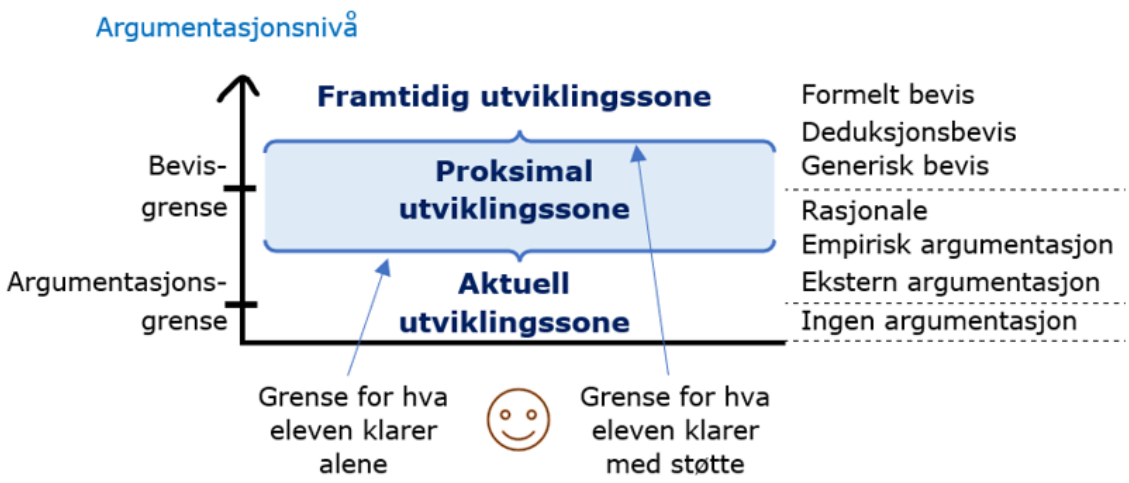
Mitt overordnede forskningsspørsmål etterspør læringspotensialet til en oppgave, og for å svare på det, blir en avklaring av hva læring er og hvordan den kan identifiseres svært sentral. *Ettersom læring er usynlig, må vi trekke konklusjoner om hvordan læringen skjer ut fra observasjoner av hva mennesker gjør eller sier* (Säljö, 2016, s. 33). Fra sosialkonstruktivisme som vitenskapsteoretisk overbygning, vil den sosiokulturelle retningen være rammen for meningsinnholdet jeg gir til læring og kunnskap. Jeg vil nå trekke fram sentrale momenter som er relevant for min forskning med hensyn til organisering og metodevalg samt som verktøy i analysen og grunnlag for konklusjoner.

Ifølge sosiokulturell læringsteori, er det mest betydningsfulle i læringsprosessen den sosiale samhandlingen og bruk av språket, og det at utviklingen foregår fra det kollektive til det individuelle, er spesielt for den sosiokulturelle forståelsen av læring; Kunnskap og erfaringer får eksistens i kommunikasjonen mellom mennesker, og først når kunnskapen er gjort synlig på denne måten, kan en gradvis individualisering starte (Säljö, 2016).

Læringsprosessen kjennetegnes altså av at eleven i starten blir påvirket utenfra ved at initiativet til å utføre en operasjon er eksternt. Om påvirkningen befinner seg nær nok det eleven allerede kan, vil den kunne sette i gang ulike indre utviklingsprosesser (Vygotskij & Cole, 1981). Utførelsen av prosessene er noe som til å begynne med gjøres på et sosialt nivå, og er avhengig av mediering (støtte). Læringsprosessens langsiktige mål, er at eleven selv initierer bruk av operasjonen, og at utførelsen er selvstendig, individuell og i liten grad avhenger av ekstern mediering (Vygotskij & Cole, 1981). Prosessen med å lære, kjennetegnes altså av et sosialt samspill hvor språket, i alle former og varianter, har stor betydning som et medierende hjelpemiddel.

Den sosiokulturelle læringsteorien har flere praktiske implikasjoner for hvordan vi vurderer elevenes kompetanse og hvilke valg vi tar med hensyn til undervisning. Læring i et sosiokulturelt fellesskap bygger på en grunnleggende ubalanse, og mediering gjort av erfarne medlemmer i kulturen er et viktig moment (Säljö, 2016). Den erfarne, som ofte er læreren, bidrar til læringen både ved å initiere ny kunnskap og ved å være en støtte til eleven i læringsprosessen. Appropriasjon er et annet begrep som brukes for å forklare hva læring betyr, og meningsinnholdet er *å ta til seg, å låne eller å ta over og gjøre til sitt eget* (Säljö, 2016). Når noe har blitt til ens eget, vil det befinne seg i den aktuelle utviklingssonen, mens prosessen med mål om å overføre det dit, skjer i den proksimale utviklingssonen. Når kunnskap utenfor den aktuelle utviklingssonen gjøres synlig for eleven, tilrettelegges det for at læring kan skje (Säljö, 2016). Lærers ansvar er å identifisere grensene for hva eleven kan klare, alene og med støtte, for hvis ny kunnskap kan kobles til det eleven allerede har individualisert, skapes et potensiale for læring – en proksimal utviklingssone. Lærer har en viktig rolle som ekstern initiativtaker og mediator, men læring avhenger også av eleven selv, ettersom læring *krever en eller annen form for personlig engasjement i situasjonen* (Säljö, 2016).

I forhold til forskningsspørsmålet *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?*, vil definisjonen av læring ha mye å si for hvordan jeg velger å gå fram for å finne ut av problemstillingen, og hva jeg konkluderer med som svar. For å forstå hva læring i et sosiokulturelt perspektiv er, og dermed klargjøre hva som kan identifisere et læringspotensial, blir begrepet *den proksimale utviklingssone* sentralt. Figur 2.1 og tilhørende forklaring, redegjør for dette begrepet, eksemplifisert ved hjelp av det matematiske begrepet argumentasjon som jeg kommer tilbake til i kapittel 2.5.



Figur 2.1 Den proksimale utviklingssone og læring av argumentasjon, egen figur

Fellesskapets kunnskap om et gitt tema, for eksempel matematisk argumentasjon, omfatter det som elevene allerede kan, det som er innenfor rekkevidde og det som er utenfor rekkevidde. Den kompetansen eleven har individualisert, befinner seg i området helt tett på eleven; den aktuelle utviklingssone. Det kan for eksempel være å bruke samsvar med fasit som argumentasjon. Eleven kan imidlertid klare å argumentere bedre med støtte i form av mediering, noe som det blå området indikerer. Det er i denne proksimale utviklingssonen at potensialet for læring er, og et mulig moment her, er kunnskap om at argumentasjon må kobles til aksiomer i matematikken. Det som havner utenfor den proksimale utviklingssonen, er også noe som er verdt å vite, men disse elementene er kunnskap som eleven ennå ikke kan mestre, selv med mediering. Å utforme et matematisk formelt bevis, er et eksempel på innhold i dette området.

Som jeg vil vise videre i teoridelen, kan matematisk resonnering betraktes som et overordnet begrep og tegner slik et bilde på den kunnskap som finnes i den matematiske diskursen, altså den ytre rammen for hva som er å lære. Valg av bevissituasjonen singel-case trekker en snevrere ramme som omfatter særlig det som handler om argumentasjon, og bevisdefinisjonen til bruk i skolematematikken utelukker formelle matematiske bevis og avgrenser området for den nærmeste utviklingssone ytterligere. Den proksimale utviklingssonen inneholder med andre ord kunnskap innenfor området matematisk resonnering som gjør at elevene kan klare å lage et bevis for svaret sitt, og hva dette konkret er, vil avklares i metodedelen. Om denne kunnskapen er noe som elevene allerede har individualisert, vil den aktuelle utviklingssonen samsvare med den proksimale, og det vil ikke skapes noe potensiale, men i motsatt fall vil et læringspotensial være til stede i spenningsfeltet mellom disse to grensene. Analysen av «*Hvordan argumenterer elevene for å bevise at løsningen er riktig?*», viser at oppgaven har et læringspotensial og analysen av «*Hvilke faktorer bidrar til utvikling av elevenes argumentasjon?*», viser hvordan og hvorfor potensialet benyttes og utnyttes. Analysedelen har som mål å dokumentere disse påstandene.

2.2 Modell for matematisk resonnering

Min forskning går ut på å identifisere elevers argumentasjon og påvirkende faktorer til at denne utvikles. Dette gjør jeg for å kunne uttale meg om læringspotensialet til oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon. Oppgavedesignet plasserer oppgaven innenfor bevissituasjonen singel-case, og svaret på forskningsspørsmålet mitt kan gi indikasjoner på hvordan den spesielle oppgavetypen kan utvikle elevers kompetanse i resonnering og argumentasjon. Hva som menes med matematisk resonnering, trenger å avklares, og det samme gjelder begrepene argumentasjon og bevis. En nylig studie av hvordan begrepet matematisk resonnering brukes, viser at nesten 20% av artikler som omhandler temaet, ikke engang avklarer hva de mener med matematisk resonnering (Hjelte et al., 2020).

For å bidra til klargjøring av begrepet, har Jeanotte & Kieran (2017) gjennomført en analyse av tidligere forskning på resonnering i matematikk, og resultatet var en modell for matematisk resonnering. Funn viste at matematisk resonnering er et overordnet begrep som kan betraktes som både som et produkt og en prosess (Jeannotte & Kieran, 2017). Som produkt, forklares matematisk resonnering som en måte å strukturere og systematisere elementer i forhold til hverandre på, og deduksjon er en slik form for logisk oppbygging (Jeannotte & Kieran, 2017). Med dette forstår jeg det som at produktaspektet ved et matematisk resonnement handler om hvordan data og påstander blir presentert og på hvilken måte sammenhengen mellom disse klargjøres. Jeg vil senere vise at Toulmins modell (Toulmin, 2003), er et godt verktøy for å studere dette.

Ut fra mangfoldet av begreper knyttet til prosessaspektet, ble det gjort en kategorisering, og de ni hovedbegrepene ble avklart i forhold til hverandre og definert på en måte som er forenlig med et sosiokulturelt syn på læring (Jeannotte & Kieran, 2017). Begrepshierarkiet, slik jeg tolker og oversetter det, er illustrert i figur 2.2. De skraverte feltene viser hvilke deler min forskning vil konsentrere seg om.

<table>
<tr><td rowspan="8">Matematisk resonnering</td><td rowspan="5">Lete etter likheter og forskjeller (search for similarities and differences)</td><td>Generalisere (generalizing)</td><td rowspan="8">Eksemplifisere (exemplifying)</td></tr>
<tr><td>Lage hypotese (conjecturing)</td></tr>
<tr><td>Identifisere mønster (identityting a pattern)</td></tr>
<tr><td>Sammenligne (comparing)</td></tr>
<tr><td>Klassifisere (classifying)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Argumentere (Validating)</td><td>Redegjøre (justifying)</td></tr>
<tr><td>Bevise (proving)</td></tr>
<tr><td>Formelt bevise (formal proving)</td></tr>
</table>

Figur 2.2 Begreper knyttet til matematisk resonnering (Jeannotte & Kieran, 2017)

Prosessaspektet ved begrepet matematisk resonnering kan deles i to; prosesser som handler om å komme fram til en hypotese og prosesser som handler om å bli sikker på at hypotesen stemmer. I tillegg er eksemplifisering en støtte for alle de andre prosessene. Selv om denne inndelingen er gjort, vil kategoriene til en viss grad inneholde elementer fra hverandre og gli over i hverandre (Jeannotte & Kieran, 2017).

Å argumentere handler om å endre «epistemic value», en verdi som sier noe om i hvilken grad vi er sikre på at påstanden er korrekt (Jeannotte & Kieran, 2017). Jeg velger å oversette begrepet «epistemic value» med sannhetsgrad, noe jeg mener ivaretar betydningen. Sannhetsgraden kan variere fra «ikke mulig å vurdere», via «muligens», «sannsynligvis» og til «sann». Å argumentere for en påstand går ut på å øke sannsynligheten for at den er korrekt, og kan gjøres gjennom redegjørelse, bevis eller formelt bevis (Jeannotte & Kieran, 2017).

En redegjørelse er en begrunnelse for hvordan man har oppnådd et svar, og defineres som en type argumentasjon som ikke kvalifiserer som bevis (G. J. Stylianides, 2008). Det betyr at en redegjørelse ikke vil kunne endre sannhetsgraden av påstanden til sann, men en redegjørelse for hva som førte fram til påstanden, kan gjøre at den oppfattes som sannsynlig. Å redegjøre for en påstand innebærer å vise opplysninger, utregninger eller matematiske sannheter med mål om å overbevise (Jeannotte & Kieran, 2017). En redegjørelse, har med andre ord en sosial dimensjon, noe som også gjelder for bevis.

Bevis er en argumentasjon som oppfyller visse krav, og kort fortalt (jeg redegjør grundig for begrepet i kapittel 2.4), innebærer det at argumentasjonen må bygge på aksepterte sannheter, ha en logisk struktur og bruke et språk som er hensiktsmessig (A. J. Stylianides, 2007). Formålet med bevis er å fjerne all tvil i forhold til om en påstand stemmer eller ikke, noe som innebærer at sannhetsgraden endres fra «sannsynlig» til «sann» (Jeannotte & Kieran, 2017). Et formelt bevis, som er den siste prosessen knyttet til argumentasjon, stiller enda strengere krav. Her er det nødvendig med kobling til aksiomer eller teoremer, deduktiv argumentasjonsmåte og formell matematisk notasjon (Hanna, 2020). Ettersom slik bevisføring vil være lite aktuelt i skolematematikken, ser jeg i fortsettelsen bort fra denne argumentasjonsmåten.

2.3 Ulike typer bevissituasjoner

Det er viktig å finne gode situasjoner for å arbeide med bevis i klasserommet, og valg av oppgaver er ett hensyn å ta. Man må vurdere hvilke oppgaver man bruker som utgangspunkt for å arbeide med resonnering og argumentasjon, for det er ikke alle oppgaver som egner seg til bevisaktivitet. Selv om de fleste svar *kan* bevises, vil noen oppgaver kreve for vanskelige og utilgjengelige begrunnelser, mens andre innebærer bevis av selvfølgeligheter. Her må anføres at enkle oppgaver for noen kan være vanskelige for andre. For at en oppgave skal være en god anledning for å jobbe med bevis av ett enkelt tilfelle, må den være kognitivt krevende (A. J. Stylianides, 2016). Det betyr at det må være innenfor elevenes rekkevidde å finne svaret, men at svaret likevel ikke må være innlysende og kun bero på å utføre selvfølgelige algoritmer.

Oppgaver som brukes til bevisaktiviteter, kan klassifiseres med hensyn til antall tilfeller som er involvert og om hensikten er å bevise eller motbevise. De to kriteriene gir opphav til seks ulike bevissituasjoner som vist i figur 2.3. For bevissituasjonen singel-case har jeg brukt eksempler fra datamaterialet, mens de andre eksemplene ikke er koblet til empirien min.

Hva som kreves av argumentasjon i hver av bevissituasjonene er forskjellig, og kunnskap om dette er nødvendig for å vite om en argumentasjon kan godkjennes som bevis eller ikke (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Som jeg synliggjorde i innledningen, omhandler forskning på bevis i stor grad bevissituasjonen uendelig mange tilfeller. Rammeverk og analysemodeller har sin opprinnelse i slike situasjoner, og bevis opptrer oftere enn motbevis, noe som gjør verktøyene mest egnet til å analysere argumentasjon knyttet til å bevise at noe stemmer uavhengig av hvilke utgangsverdier vi har (A. J. Stylianides & Ball, 2008).

	Ett enkelt tilfelle Singel-case	Flere, men endelig antall tilfeller	Uendelig antall tilfeller
Bevis	Bevis at 7 halve er 3,5 hele	Bevis at det er akkurat fire primtall som er mindre enn 8	Bevis at summen av to partall alltid blir et partall.
Motbevis	Motbevis at 3·(7+3,5) er 24,5	Motbevis at summen av to ensifrede hele tall blir et tosifret tall.	Motbevis at summen av to oddetall alltid blir et oddetall.

Figur 2.3 Seks bevissituasjoner (A. J. Stylianides & Ball, 2008), mine eksempler

Hvordan bevis kan se ut i de ulike situasjoner vil jeg vise i kapittel 2.5.1, og som eksempel på en oppgave som tilhører bevissituasjonen singel-case, vil jeg i kapittel 2.5.3, presentere oppgaven «Hvor mye saft?». Oppgaven er sentral ettersom det overordnede forskningsspørsmål er: *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?* En analyse av oppgaven, gir opphav ulike argumentasjonsrekker som kan godkjennes som bevis for at svaret man ender opp med, må være sant. Oppgaveanalysen gir meg et sammenligningsgrunnlag for elevenes argumentasjon, og dermed et utgangspunkt for å uttale meg om hvordan elevene argumenterer for å bevise at løsningen er riktig (analytisk spørsmål 1). I neste omgang er det disse resultatene som informerer om hva jeg skal konsentrere meg om for å svare på hvilke faktorer som påvirker elevenes argumentasjon (analytiske spørsmål 2). Disse svarene vil i sin tur informere om oppgavens og oppgavetypens læringspotensial.

2.4 Matematisk bevis

Et sosiokulturelt perspektiv peker mot en definisjon av bevis i skolematematikken som blant annet inkluderer hensynet til det fellesskapet det fremmes i og at språket framheves som essensielt.

> To justify an assertion is the role of a proof. In the purest sense, a mathematical proof is a logical derivation of a given statement from axioms through an explicit chain of inferences obeying accepted rules of deduction. (Hanna, 2020).

Både Hanna (2020) sin karakteristikk og Stylianides (2007) sin definisjon av bevis, framhever at et bevis er dynamisk, og at gyldigheten av det må bestemmes i hver enkelt situasjon og i de ulike fellesskapene hvor beviset settes fram. Her ser jeg paralleller til sosialkonstruktivismen hvor avklaring av hva som er sant, er et resultat av forhandlinger mennesker imellom (Nyeng, 2012). Sannhet er ikke bestemt en gang for alle, akkurat som en argumentasjon som er bevis i en diskurs, ikke trenger å være det i en annen.

Som nevnt i 2.2, har en argumentasjon som formål å fjerne tvil om en påstand, og ut fra argumentasjonens kvalitet tilordner vi en sannhetsgrad til denne påstanden. Å bevise noe, innebærer at argumentasjonen er på et så høyt nivå at vi kan stole på at påstanden er sann. Det som er bestemmende for hvilket nivå en argumentasjon befinner seg på, er en vurdering av i hvilken grad argumentasjonen oppfyller kravene for et matematisk bevis. Bevis i skolematematikken er argumentasjon som framstår som en sammenhengende rekke av påstander, og for at argumentasjonen skal kvalifisere som bevis, må visse krav være oppfylt (A. J. Stylianides, 2007, s. 291). Disse kravene som bevisdefinisjonen uttrykker, er (min oversettelse):

1) Argumentasjonen må bygge på det som er aksepterte sannheter i diskursen (elevgruppa eller klassen)
2) Argumentasjonen må fremstilles på en måte som er logisk og sammenhengende og som elevene har mulighet til å forstå
3) Argumentasjonen må kommuniseres gjennom uttrykksmåter og språk som egner seg i forhold til både matematikken og elevene

Et viktig poeng i forhold til en definisjon til bruk i skolen, er at den ikke kan inngå kompromiss i forhold til det som kjennetegner bevis i en formell matematisk diskurs. Dette betyr at selv om kravene til bevis må tilpasses elevene, skal man likevel ikke kalle noe for et bevis som ikke er det (A. J. Stylianides, 2016). Stylianides (2007) mener at dette er sikret gjennom de tre kriteriene ovenfor; Et bevis må bygge på aksepterte sannheter, og ha egnede og gyldige argumentasjonsmåter og uttrykksmåter. Dette gjelder uansett om diskursen er skolebarn eller matematikere. Tilpasningen for å anvende definisjonen i skolen, gjøres gjennom tilføyelsen «som er kjent eller innen rekkevidde for fellesskapet» (A. J. Stylianides, 2007). Tilpasningen åpner for å ta utgangspunkt i den kunnskapen elevene har, og selv om språk, notasjon og byggesteiner kan være andre enn hva en matematiker ville brukt, er man fortsatt tro mot matematikkens og bevisets natur.

2.4.1 Aksepterte sannheter, argumentasjonsmåter og uttrykksform

Det som brukes som grunnsteiner i argumentasjonen må være sant i den forstand at disse utsagnene ikke må ha behov for ytterligere forklaring for at felleskapet skal forstå dem og ha tillit til dem. Aksepterte sannheter kan være definisjoner, aksiomer, lokale aksiomer, teoremer og etablerte prosedyrer eller regler (A. J. Stylianides, 2016). Bruk av lokale aksiomer, innebærer at om noe tidligere er bevist i fellesskapet, kan man bygge videre på det på samme måte som man kan anvende etablerte algoritmer som addisjon uten å forklare hvordan addisjon utføres (A. J. Stylianides, 2016). Det er imidlertid viktig at både lokale aksiomer og algoritmer som brukes på denne måten virkelig oppleves som sannheter av fellesskapet, og å vite dette sikkert i et klassefellesskap, er vanskeligere enn i en formell matematisk diskurs med veletablerte system som dokumenterer teoremenes sammenheng med aksiomene (A. J. Stylianides, 2007).

I en argumentasjon som skal kvalifisere som bevis, må også den logiske strukturen kunne forstås. I sin endelige form, må beviset ha en deduktiv struktur (Jeannotte & Kieran, 2017), noe som innebærer at man tar utgangspunkt i faktiske og matematiske sannheter og viser hvordan en påstand logisk må følge av operasjoner på disse sannhetene. Argumentasjonsmåten må dessuten være gyldig med hensyn til hva som kreves i den spesielle bevissituasjonen. Systematisk behandling og vurdering av alle tilfeller er en gyldig måte å argumentere på om man har et endelig antall tilfeller å undersøke, men hvis bevisoppgaven derimot dreier seg om uendelig antall tilfeller, vil denne måten å argumentere på ikke lede fram til et gyldig bevis (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Generiske bevis og deduksjoner er godkjente argumentasjonsmåter for alle bevissituasjoner (A. J. Stylianides, 2016).

Språket som brukes i en argumentasjon må være hensiktsmessig. Hva det innebærer, avhenger av hvordan språket brukes og av bevissituasjonen det brukes i. Ulike uttrykksformer kan være verbalt, fysisk, figurativt (tegninger, diagrammer, tabeller) og symbolsk, og det er ingen av disse som er å foretrekke foran andre – alt avhenger av måten de brukes på (A. J. Stylianides, 2016).

Tredelingen av kravene til et matematiske bevis, gir et utgangspunkt for å identifisere elevers argumentasjon og sammenligne den med hva som vil være et godkjent bevis i den aktuelle situasjonen og fellesskapet (A. J. Stylianides, 2007). Sammenligningen kan klassifisere argumentasjonen som bevis eller ikke-bevis, og en slik analyse kan være nyttig i både undervisnings- og forskningssammenheng (A. J. Stylianides, 2007). En analyse av elevens opprinnelige argumentasjon (*base argument*) gir informasjon om hva som eventuelt kan forbedres. Etter påvirkning (fra lærer eller andre/annet), kan elevenes utviklede argumentasjon (*ensuing argument*) analyseres, og på den måten kan endringer registreres og man får også en indikasjon på hva som bidrar til endringene (A. J. Stylianides, 2007). Rammeverket, som her er skildret, kan benyttes i alle bevissituasjoner (se kapittel 2.3), og i metodedelen vil jeg vise hvordan jeg har gjort bruk av elementer herfra, i samspill med definisjonen av bevis og Toulmins modell for argumentasjon (Toulmin, 2003), for å lage et analyseverktøy tilpasset mitt prosjekt.

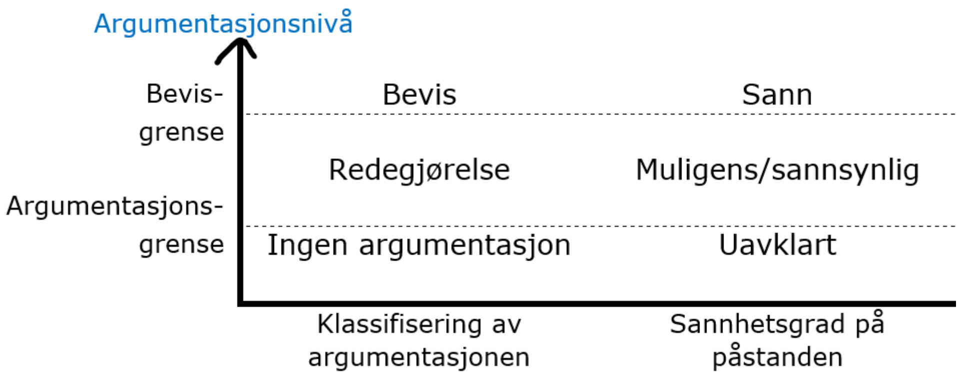
Min fortolkning av bevis i situasjonen singel-case blir, med utgangspunkt i kjennetegn på bevissituasjonen (kapittel 2.3) samt definisjonen av bevis i skolematematikken, følgende: For å bevise at et svar helt sikkert er sant, kan man ut fra faktaopplysningene i oppgaven trinnvis dedusere seg fram til svaret. Det som bevises først, fungerer som et lokalt aksiom og kan benyttes som en sannhet videre i argumentasjonen. For å vurdere den endelige konklusjonen som sann, og med det klassifisere argumentasjonen som et bevis for svaret, må hver av overgangene kobles til aksepterte sannheter slik at alle påstander er velbegrunnet og sikret. I tillegg må språket som brukes for å kommunisere argumentasjonen, egne seg i situasjonen og være mulig å forstå for de som beviset presenteres for. Flere eksempler på argumentasjon som kan godkjennes som bevis i situasjonen singel-case presenteres i kapittel 2.5, noe som konkretiserer fortolkningen ytterligere.

2.5 Argumentasjon i matematikk

Argumentasjon omfatter alt det som har til hensikt å overbevise andre om at noe, for eksempel en påstand, er korrekt (Hanna, 2020). Å argumentere handler altså om å svare på spørsmålet «hvordan kan du vite det sikkert?». Jeg vil nå avklare begreper knyttet til argumentasjonsnivå, før jeg i 2.5.2 illustrerer hvordan Toulmins modell kan brukes for å komme fram til sannhetsgrad og slik bidra til å bestemme argumentasjonsnivå.

2.5.1 Ulike former for redegjørelse og bevis

Det er flere kvalitetsnivåer på argumentasjon, og man kan skille mellom om argumentasjon er til stede eller manglende (Lannin, 2005), og et nytt hovedskille kan trekkes mellom argumentasjon som kvalifiserer som bevis og den som ikke gjør det , altså redegjørelser (G. J. Stylianides, 2008). Nivåene, som vist i figur 2.4, avgrenses i forhold til hverandre av det jeg har valgt å kalle en argumentasjonsgrense, og en bevisgrense (proof treshold) (A. J. Stylianides, 2007). I kapittel 2.1 antydet jeg imidlertid, i eksemplifiseringen av den proksimale utviklingssone, en mer fininndelt skala, og jeg vil nå klargjøre hvilke typer argumentasjon som omfattes av de ulike nivåene. Jeg benytter oppgaven *Bevis at summen av to partall alltid blir et partall*, for å vise hvordan argumentasjonen kan se ut i bevissituasjonen uendelig antall tilfeller. For eksemplifisering av singel-case, bruker jeg en forenklet problemstilling fra datamaterialet mitt: *Bevis at om tre barn får 7 hele flasker hver, så får de 21 flasker til sammen*. Noen av eksemplene for singel-case belyses også i forbindelse med redegjørelsen for Toulmins modell i kapittel 2.5.2.



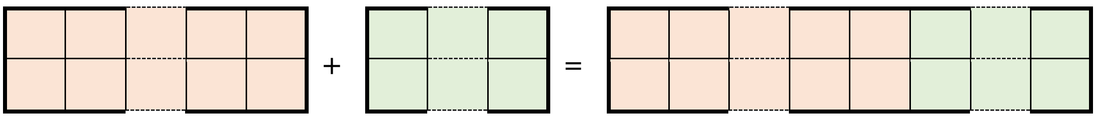
Figur 2.4 Argumentasjonsgrense, argumentasjonsnivå og sannhetsgrad

Ingen argumentasjon innebærer at det som eventuelt uttrykkes, har liten eller ingen relevans for den matematiske påstanden og begrunnelsen av den. Lannin (2005) plasserer denne typen argumentasjon på nivå 0. Ekstern argumentasjon, som er å henvise til at samme svar finnes hos andre eller andre steder, er på hans nivå 1 (Lannin, 2005). Det at argumentasjon finnes, løfter argumentasjonen over grensa til redegjørelse.

Redegjørelse, slik jeg bruker begrepet, omfatter argumentasjon som har en eller flere essensielle mangler. En redegjørelse har altså en argumentasjon, noe som gjør at argumentasjonsgrensen passeres, men argumentasjonen innfrir ikke alle krav til et bevis, som gjør at den befinner seg under bevisgrensen. Både ekstern argumentasjon, empirisk argumentasjon og rasjonale (*rationale*) (G. J. Stylianides, 2008), omfavnes dermed av begrepet redegjørelse. I en bevissituasjon med uendelig mange tilfeller, vil ekstern argumentasjon kunne være: *Summen blir også et partall, for det sto det i fasiten*. Et rasjonale er et forsøk på en generell forklaring ved å frigjøre seg fra det konkrete, men argumentasjonen mangler kobling til aksepterte sannheter eller henger ikke helt sammen. Et eksempel kan være: *Hvis vi legger sammen to partall, vil summen være delelig på to og da får vi et nytt partall*. Her mangler argumentasjonen en definisjon på partall, og påstanden om delelighet er heller ikke begrunnet. Empirisk argumentasjon uttrykker kun hva som skjer i et aktuelt tilfelle. Den generelle påstanden begrunnes med et (eller flere) eksempler, for eksempel: *Hvis vi legger partallet 10 sammen med partallet 6, får vi 16 som er et partall, og derfor vil summen av to partall alltid være partall*. Det essensielle som mangler her, er forklaring på hvorfor det samme vil skje i alle andre tilfeller også.

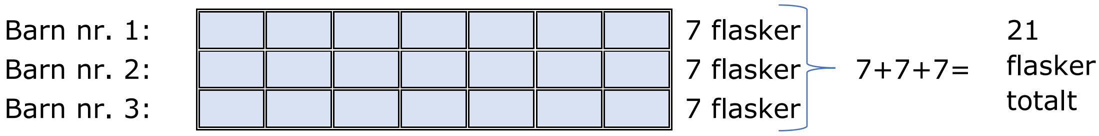
Redegjørelse i bevissituasjonen singel-case vil på samme måte være mangelfull på en eller annen måte. Eksempler kan være: *7+7+7=21*. Regnestykket er korrekt, men kobling til situasjonen (og andre lignende situasjoner) mangler. Et annet eksempel kan være: *Hvis vi har 3 barn og 7 flasker så legger vi dem sammen og da blir det 21*. Mangelen her er en avklaring på hva som skal legges sammen.

Bevis er, som forklart i kapittel 2.4, argumentasjon som oppfyller alle kriterier i bevisdefinisjonen, noe som gjør at argumentasjonen passerer bevisgrensen. I bevissituasjonen uendelig mange tilfeller, vil deduktivt bevis og generisk bevis være gyldige bevis. Et deduktivt bevis («*demonstration*») er en forklaring som ikke kobles til spesifikke tall, mens et generisk bevis er å bruke et spesifikt eksempel for å forklare hva som vil skje i også alle andre tilfeller (G. J. Stylianides, 2008). Følgende argumentasjon for påstanden *summen av to partall vil alltid bli et partall* kan være eksempel på deduktivt bevis i bevissituasjonen uendelig mange tilfeller: *Partall defineres som tall som er delelig med to* $\rightarrow$ $p_1=2\cdot a$, $p_2=2\cdot b$, *der a og b er vilkårlige hele tall* $\rightarrow$ *summen av to partall* = $p_1+p_2 = 2\cdot a + 2\cdot b = 2(a+b)$ *pga distributive lov* $\rightarrow$ *(a+b) blir et vilkårlig heltall c, så summen kan uttrykkes* $2\cdot c$ $\rightarrow$ *ettersom* $2\cdot c$ *er delelig med 2, vil summen være partall.* Et generisk bevis for samme påstand, med støtte i framstillingen i figur 2.5, kan være: *10 og 6 er partall ettersom de kan deles i to like deler, og vi kan tegne hvert av tallene som 2 like lange rekker. Vi ser at om vi legger dem sammen, får vi 16, som også er et partall. Om vi velger andre partall, er det kun lengden på rekkene som endrer seg og det samme gjelder for summen. I figuren framkommer dette ved de stiplede linjene som antyder at figuren kan utvides eller krympes.*



Figur 2.5 Generisk bevis i bevissituasjonen uendelig mange tilfeller

I 2.4 fortolket jeg et bevis i bevissituasjonen singel-case, som en argumentasjon, som med utgangspunkt i opplysningene, på en systematisk og velbegrunnet måte viser at svaret er korrekt. Svaret følger altså logisk av operasjoner på tallene og objektene som er involvert. Påstanden kan sies å være velbegrunnet, om vi fra utregning og forklaring av den konkrete oppgaven, også får vite hvordan det blir om utgangspunktet skulle endre seg. Eksempelet i figur 2.6, viser hva bevis av påstanden *Når tre barn får 7 flasker hver, vil det blir 21 flasker til sammen* kan være.



Figur 2.6 Bevis i bevissituasjonen singel-case – eller redegjørelse?

Argumentasjonen *kan* betegnes som et bevis ettersom argumentasjonen tydelig viser hvordan man skal gå fram for å finne svaret når et visst antall barn skal få et visst antall flasker. Imidlertid bør denne generaliseringen gjøres eksplisitt, og tilhørende forklaring (skriftlig eller muntlig) kunne vært: *Hver rute symboliserer en flaske. For hvert barn, blir det en rekke med sju flasker, så det blir like mange rekker som det er barn. Hvis antall flasker forandres, endrer du antall ruter i rekka..* Hvis argumentasjonen anses som for lite forklarende, vil redegjørelse være en mer korrekt klassifisering, ettersom utregningen da vil mangle noe essensielt og i dette tilfellet en forklaring.

Som jeg har vist over, kan de ulike formene for redegjørelse og bevis framstå forskjellig ut fra hvilken bevissituasjon de utformes i, og spesielt kravene til deduksjonsbevis virker vanskelig å oppfylle i bevissituasjonen singel-case. Bevis for *flere og uendelig antall tilfeller* vil jeg beskrive som en systematisk og logisk <u>generalisering</u> som bygger på definisjoner og andre sannheter. I bevissituasjonen *flere, men endelig antall tilfeller* vil en systematisk og velbegrunnet <u>opplisting</u> være en argumentasjonsmåte som godkjennes som bevis (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Tilsvarende vil vi i bevissituasjonen *singel-case*, ha at en systematisk og logisk <u>utregning</u> som bygger på definisjoner og andre sannheter, gjør at argumentasjonen kvalifiserer som bevis. Min fortolkning trekker altså fram graden av abstrahering som en forskjell på kravene til argumentasjon, mens det som er likt, er en tydelig forankring og en systematikk. Hva som menes med forankring og systematikk, spesielt i singel-case, blir avklart ved hjelp av definisjonen av bevis (A. J. Stylianides, 2007) samt krav til elementer i en godkjent argumentasjon (Toulmin, 2003).

2.5.2 Toulmins modell for å analysere argumentasjon

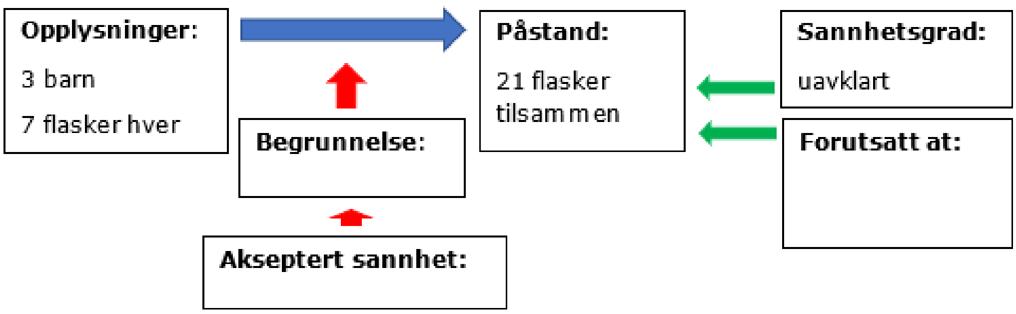
Toulmins modell, første gang presentert i 1958, er ofte anvendt for å analysere argumentasjon innenfor mange fag og områder (Toulmin, 2003). Selv om modellen ikke ble laget spesielt for matematisk argumentasjon, betegnes den nå som den mest brukte argumentasjonsmodellen innen matematikkdidaktisk forskning (Hanna, 2020).

> Clearly, Toulmin's model reflects practical and plausible reasoning. It includes several types of inferences, admits of both inductive and deductive reasoning, and makes explicit both the premises and the conclusion, as well as the support that led from premises to conclusion. (Hanna, 2020)

Av andre som bruker Toulmins modell for å analysere elevers argumentasjon, vil jeg nevne to som spesielt har bidratt til innsikt i modellen slik jeg bruker den. Nordin & Björklund Boistrup (2018) benytter modellen i sin forskning på samme bevissituasjon som jeg studerer (singel-case), og Arnesen & Rø (2020) viser varianter av den originale modellen, og blant dem en sekvensiell modell hvor flere argumenter henger sammen.

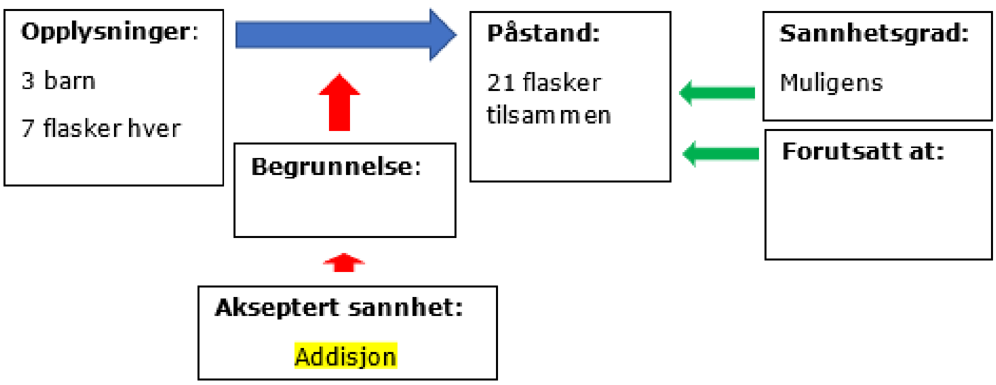
Toulmins modell tar hensyn til at praktisk argumentasjon ofte handler om å rettferdiggjøre sine påstander heller enn å trekke slutninger ut fra det som er kjent (Pease & Aberdein, 2013), noe som gjør den egnet til analyse av all argumentasjon, både den som er deduktiv og den som ikke er det (Hanna, 2020). I sin enkleste form, består Toulmins modell av fire elementer som til sammen utgjør et argument. Overgangen fra opplysninger (*data*) til påstand (*claim*) må støttes av en begrunnelse (*warrant*). Om begrunnelsen selv ikke er en akseptert sannhet; aksiom, teorem eller lokalt aksiom, trenger den en underbygging (*backing*). Det går an å bruke kun disse fire elementene (Nordin & Björklund Boistrup, 2018), og man kan også lage en kjede av slike argumenter om argumentasjonen for en påstand innebærer mer enn en overgang (Rø & Arnesen, 2020). Man bruker da den påstanden man kommer fram til i første argument som opplysninger i det andre og slik fortsetter man til endelig svar er på plass. Modellen viser da all argumentasjon som går inn som en del av det matematiske resonnementet, og i min analyse av oppgaven (kapittel 2.5.3), er det denne varianten jeg har brukt. De siste to elementene i Toulmins originale modell kobles opp mot påstanden; sannhetsgrad (*qualifier*), som er en vurdering av påstandens troverdighet, og forbehold (*rebuttal*), som uttrykker forutsetninger for sannhetsgradens verdi. Hvilken sannhetsgrad påstanden får, gir signal om hvilken kvalitet argumentasjonen har, som vist i figur 2.4.

Gjennom eksempler på tre ulike argumentasjonsnivåer i bevissituasjonen singel-case, viser jeg nå hvordan Toulmins modell kan brukes. Å bestemme sannhetsgraden og dermed også argumentasjonsnivået, gjøres på grunnlag av en vurdering av om, og på hvilken måte, koblinger til aksepterte sannheter gjøres, om strukturen er deduktiv og om språket som brukes egner seg og kan forstås (A. J. Stylianides, 2007). Problemstillingen som eksemplene handler om, er: *Det er tre barn som har 7 hele flasker hver. Hvor mange flasker har barna til sammen?* På spørsmålet kan man svare *21 flasker* og si seg fornøyd. Ved å bruke Toulmins modell, får vi da (figur 2.7):



Figur 2.7 Toulmins modell, ingen argumentasjon

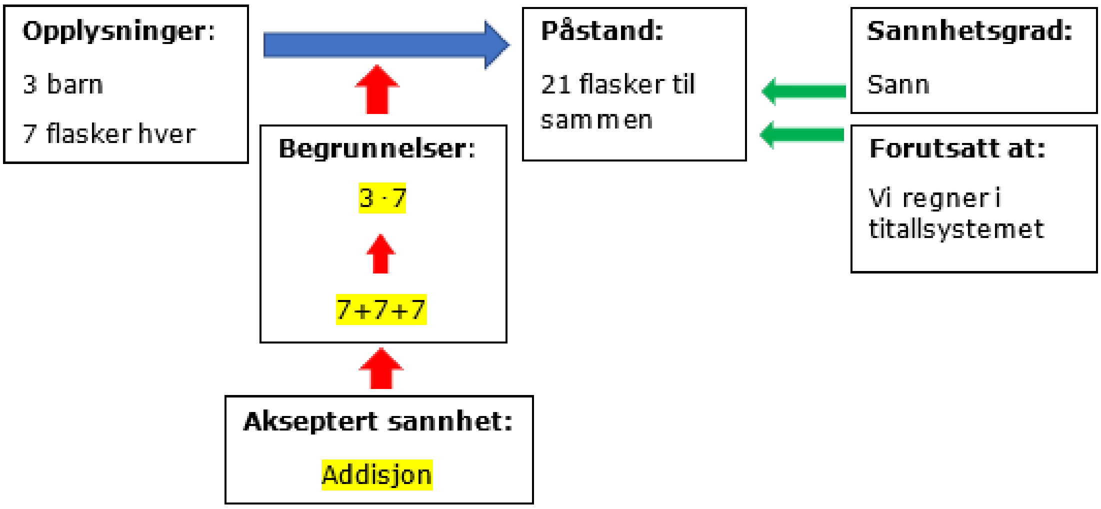
Ettersom det ikke er noen argumentasjon for svaret; verken begrunnelse eller akseptert sannhet er uttrykt, kan vi ikke si sikkert at det stemmer, ei heller påstå at det er feil. Dette gjør det ikke mulig å koble en sannhetsgrad til påstanden. For å få fram en argumentasjon, kan man spørre «hvordan kan du vite det?» (Toulmin, 2003), og et tenkt svar kan være: *Jeg bare legger sammen og da blir det 21*. Denne argumentasjonen gir opphav til en mer utfylt modell (figur 2.8).



Figur 2.8 Toulmins modell, redegjørelse

Toulmins modell uttrykker nå at om vi bruker addisjon på 3 barn og 7 flasker så fører det til at det blir 21 flasker. Det er en argumentasjon, men det er uklart hva som skal adderes med hva, så det er fortsatt usikkert om svaret stemmer. Sannhetsgrad «muligens», gjør at argumentasjonen kan sies å være en redegjørelse.

Et mer utfyllende svar kunne være: *21 kommer fra 3 multiplisert med 7. Multiplikasjon defineres som gjentatt addisjon og dermed er det 7 + 7 + 7 som er forklaringen på at multiplikasjon er et korrekt valg. Addisjon er å telle opp mengder; 7 flasker fra det første barnet, 7 flasker fra det andre barnet og 7 flasker fra det tredje barnet. Forutsatt at vi benytter titallsystemet, vil resultatet bli 2 hele tiere og 1 ener og tallet 21*. Når alle opplysninger, begrunnelser, sannheter og påstander plasseres i modellen, blir den seende ut som i figur 2.9. Om man nå leser fra venstre mot høyre, vil argumentasjonen ha deduktiv struktur, selv om samme rekkefølge ikke ble uttrykt muntlig.



Figur 2.9 Toulmins modell, argumentasjon som kvalifiserer som bevis

Nå har påstanden fått en argumentasjon bestående av to begrunnelser som igjen er koblet til den aksepterte sannheten addisjon. Sannhetsgraden kan endres til *sann*, og vi kan hevde at påstanden *21 flasker til sammen*, helt sikkert er sann – forutsatt at vi regner i titallsystemet.

2.5.3 Bevis for svaret på oppgaven «Hvor mye saft?»

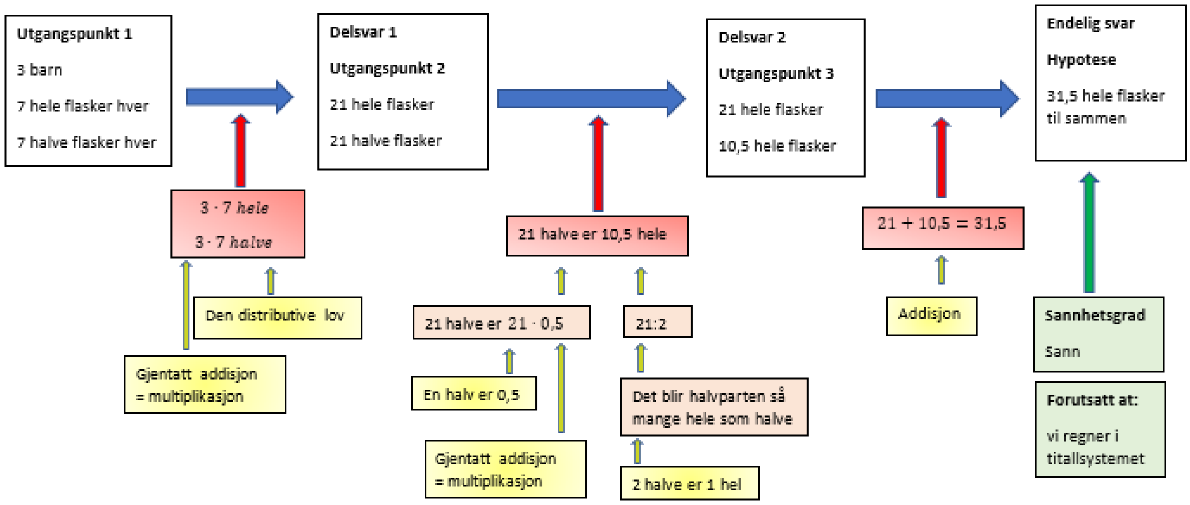
Mitt forskningsspørsmål er *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?* Oppgaven har et design som gir elevene ulike oppdrag og utfordringer, og dette vil jeg gjøre rede for i metodedelen. Den konkrete problemoppgaven som elevene løser som en del av bevisaktiviteten, er likevel relevant å presentere nå, som en del av teorien, av to grunner. For det første fungerer den som et eksempel på en mulig inngang til bevissituasjonen singel-case, og for det andre vil en analyse av oppgavens matematiske innhold, begrunne det jeg vektlegger i analysen. Følgende problemstilling fremmes i oppgaven *Hvor mye saft?*:

> Mormor og morfar har ripsbusker i hagen. Hvert år plukker de masse rips som de blant annet lager saft av. De har tre barnebarn som hjelper til med å fylle safta i flasker. Når de er ferdige, har hvert barn fylt sju hele flasker og sju halve flasker. Hvor mye saft ble det laget i år?

Jeg analyserte selve problemoppgaven «Hvor mye saft?» for å definere hvilke momenter som må være med i argumentasjonsrekka for at den skal kunne godkjennes som bevis. Kjente opplysninger er et startpunkt for selve argumentasjonen. Fra det springer det påstander som begrunnes og kobles til aksepterte sannheter og med det blir til fornyet fakta. Uttrykksmåter kan være både muntlig og skriftlig, og bruk av representasjoner omfatter det verbale, det symbolske, det figurative og det kroppslige.

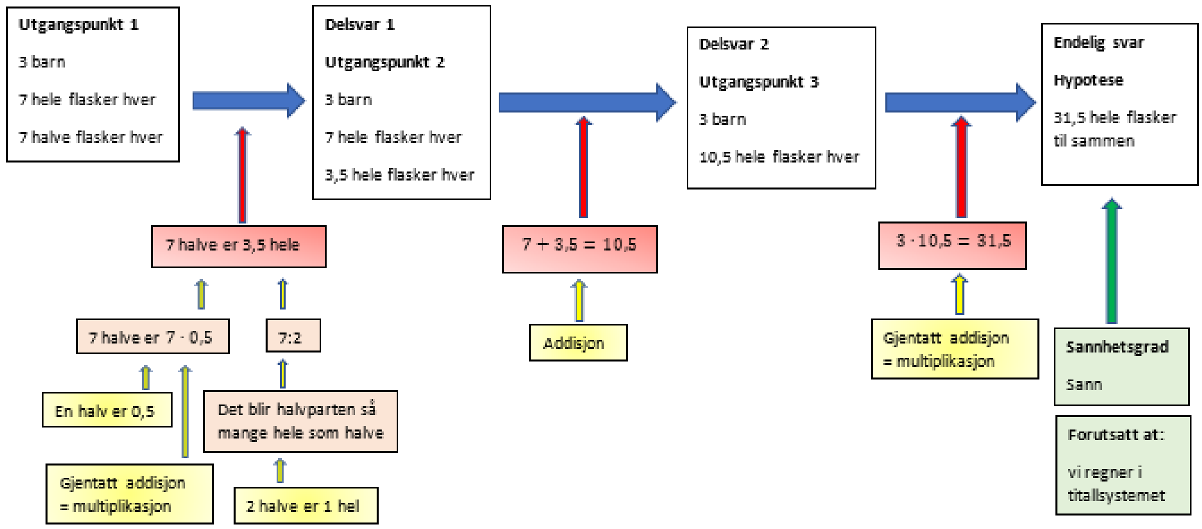
Uansett hvilken strategi man velger for det matematiske resonnementet, er det tre overganger som trenger argumentasjon; omgjøring fra halve til hele (definisjon av «halv»), legge sammen mengder (addisjon) og triple mengder (multiplikasjon som gjentatt addisjon). De aksepterte sannhetene som begrunnelsene hviler på, er anført i parentes. I tillegg vil den distributive lov spille en rolle, spesielt i løsningsstrategi 1. Ut fra min analyse av «Hvor mye saft?», har jeg funnet tre sannsynlige og mulige løsningsstrategier som vil gi korrekt svar, og som har potensial til å godkjennes som bevis for løsningen. Kategoriseringen og navngivingen kommer fra hvordan man velger å angripe oppgaven, i hvilken rekkefølge de ulike overgangene gjennomføres og hva som er fundamentet og de aksepterte sannhetene som argumentasjonen hviler på. Jeg velger å presentere strategiene ved hjelp av Toulmins modell samt verbalt språk.

1. Distributiv strategi (figur 2.10):
Finne antall hele flasker og halve flasker for alle barna, deretter finne hvor mange helflasker det blir fra de halve og til slutt summere de hele flaskene.



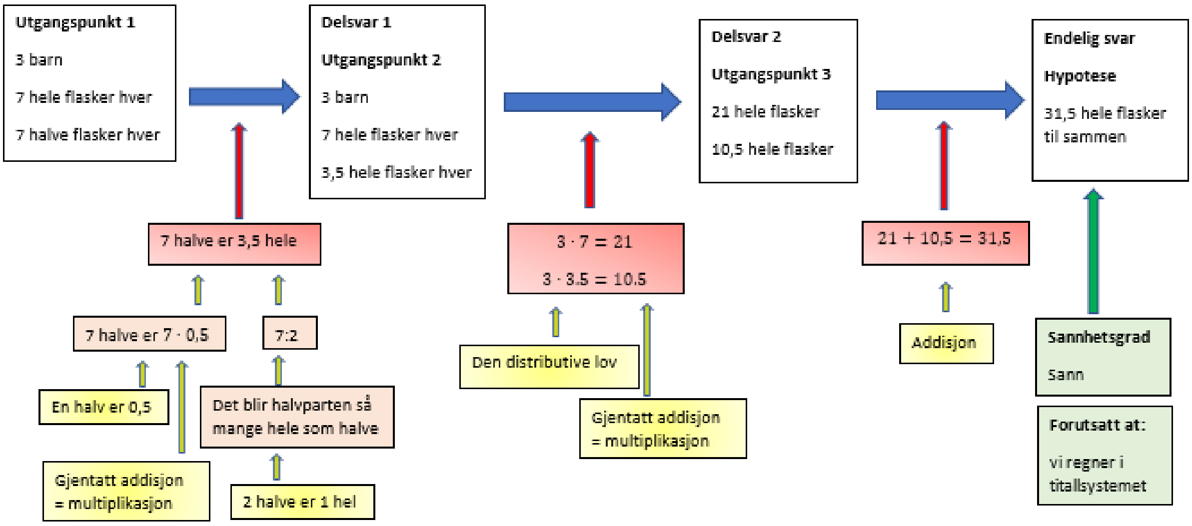
Figur 2.10 Distributiv løsningsstrategi for oppgaven "Hvor mye saft?"

2. Additiv strategi (figur 2.11):
Finne hvor mange helflasker det blir fra de halve per barn, deretter finne hvor mange hele flasker hvert av barna har og til slutt finne totalt antall helflasker som barna har.



Figur 2.11 Additiv løsningsstrategi for oppgaven "Hvor mye saft?"

3. Multiplikativ strategi (figur 2.12):
Finne hvor mange helflasker det blir fra de halve per barn, deretter finne hvor mange originale og rekonstruerte helflasker barna har totalt og til slutt summere disse.



Figur 2.12 Multiplikativ løsningsstrategi for oppgaven "Hvor mye saft?"

I kapittel 3.3.2 i metodekapittelet forklarer jeg hvordan modellen ble omformet til den matrisen jeg i praksis benyttet i mitt arbeid med å identifisere, registrere og klassifisere elevenes argumentasjon.

3 Metode

Valg av forskningsmetode kommer som et resultat av hvilken karakter forskningsspørsmålet har og hva formålet med studien er, og metodevalget har stor betydning for de funn forskningen kommer fram til (Kvarv, 2014). Det finnes et mangfold av metoder for datainnsamling og analyse, men de fleste kan sies å være enten kvalitativ eller kvantitativ (Tjora, 2017). Min forskning har vært kvalitativ, og jeg har benyttet induktiv metode for å finne svar på mitt forskningsspørsmål: *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?*

3.1 Kvalitativ metode med eksplorerende design

Kvalitative metoder har som formål å karakterisere og oppnå helhetlig forståelse for fenomener og sammenhengen mellom fenomener (Kvarv, 2014). For å besvare forskningsspørsmålet mitt, trenger jeg datamateriale som informerer om elevenes argumentasjon, og som i tillegg synliggjør hva som bidrar til utvikling av disse. Jeg er med andre ord ute etter å forstå fenomenet elevers argumentasjon i bevissituasjonen singel-case, og til å undersøke hvordan noe foregår, vil en kvalitativ forskningsmetode egne seg (Brinkmann & Tanggaard, 2012). Å finne oppgavens læringspotensial, skaper dessuten et behov for å vurdere om læring skjer eller kan skje. Læring, ifølge sosiokulturell læringsteori, er å få tilgang til og ta i bruk kunnskap som befinner seg i et sosialt og kulturelt fellesskap. Fenomenet er i utgangspunktet usynlig (Säljö, 2016), men kan la seg identifisere ved hjelp av metoder innenfor kvalitativ forskning.

Kvalitativ forskning karakteriseres ofte ved at den er induktiv, noe som betyr at framgangsmåten er eksplorerende og empiridrevet (Tjora, 2017). Jeg gjør erfaringer med en lite utprøvd oppgave innenfor en bevissituasjon som det finnes begrenset med forskning på fra før, noe som gjorde det naturlig, og nødvendig, å ha et eksplorerende design på både datainnsamling og analyse. At forskningen har vært empiridrevet, er en sannhet med modifikasjoner; i realiteten vil kvalitativ forskning drives fram av samspillet mellom empiri og teori (Tjora, 2017). Forskingsspørsmålet jeg formulerte, ble inspirert og initiert av teori og tidligere forskning. Den videre gangen i forskningen, vekslet mellom en åpen tilnærming til datamaterialet som ga antydninger om hvilken teori dataen kunne ses i lys av, og litteraturens innspill til verktøy som kunne bidra til mer strukturert blikk på datamaterialet. Teori har en nødvendig plass i forskning, også den som er empirisk, men hovedintensjonen med et eksplorerende design, og induktiv forskning generelt, er at teorien ikke skal være styrende (Tjora, 2017). Den åpne tilnærmingen kan imidlertid gi utfordringer med hensyn til å være systematisk og strukturert, noe som er viktig for å skape troverdighet til resultatene. Som overordnet metode for datagenerering har jeg benyttet observasjon, og i analysen har jeg latt meg veilede av stegvis-deduktiv induktiv metode. Jeg vil nå redegjøre for disse metodene og begrunne valget av dem. Deretter vil jeg beskrive mer i detalj hvordan jeg gjennomførte prosessene med datainnsamling (kapittel 3.2) og analyse (kapittel 3.3).

3.1.1 Observasjon som metode for datainnsamling

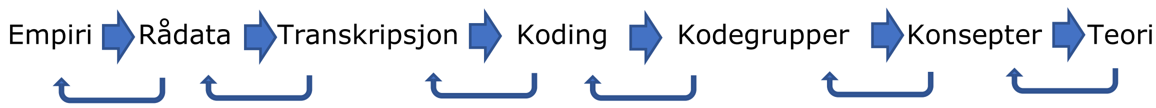
Observasjon er en måte å få informasjon på som omfatter andre aspekter ved språket enn verbal kommunikasjon (Kvarv, 2014). Et sosialkulturelt perspektiv gjør derfor at observasjon som metode for å generere data, blir et naturlig valg, ettersom kunnskap kommer til syne når språket anvendes i et sosialt og kulturelt fellesskap (Säljö, 2016). For å finne ut om elevene lærer resonnering og argumentasjon i den aktiviteten de gjennomfører, må jeg studere det de sier og gjør, for det er på den måten læring kan identifiseres.

Videoobservasjon er en ofte anvendt metode for blant annet å studere mennesker og praksiser (Brinkmann & Tanggaard, 2012), og jeg valgte denne observasjonsmåten for å ha en ikke-tolket gjengivelse av det som skjedde. Lydopptakene jeg gjorde parallelt, tjente samme hensikt, men disse kunne ikke på samme måte registrere ikke-språklige aktiviteter og interaksjoner. En annen grunn til at jeg anså bruk av video som nødvendig, var at jeg valgte å delta i aktiviteten som lærer og slik tok rollen som observerende deltaker (Tjora, 2017). Dette førte til at jeg fikk liten anledning til å ta observasjonsnotater underveis og opptakene var derfor essensielle for i det hele tatt å få samlet datamateriale. En annen fordel med videoopptakene, var at jeg da kunne studere hvordan jeg, i dobbeltrollen som lærer og forsker, påvirket elevene og det de gjorde.

Fokusgruppe er et gruppeintervju som konsentrerer seg om et eller flere tema, og en fordel ved denne metoden er at man kommer tett på deltakerne og får innblikk i ikke-språklig kommunikasjon (Tjora, 2017). Selv om jeg gjennom observasjonen fikk samme type informasjon, gjennomførte jeg en samtale med trekk fra metoden fokusgruppe som et supplement til observasjonen. Jeg utarbeidet en kort intervjuguide med spørsmål om aktiviteten og elevenes opplevelse av den, og jeg sørget for en uformell ramme samt at alle fikk slippe til med svar og andre betraktninger.

3.1.2 Stegvis-deduktiv induktiv metode (SDI) som metode for analyse

Stegvis-deduktiv induktiv metode (SDI) er en metode som lar empirien definere hva som er interessant, og hvor man gradvis trekker inn mer teori med generalisering og teoriutvikling som mål (Tjora, 2017). Metoden har tydelig inndeling i faser og hver overgang innebærer et tilbakeblikk til forrige fase en eller flere ganger. Figur 3.1 viser en forenklet skisse av prosessen, hvor begrepene samsvarer med de jeg har valgt å bruke.



Figur 3.1 Stegvis-Deduktiv Induktiv metode, forenklet versjon (Tjora, 2017, s.19)

I tilknytning til problemstillingen *Hvordan argumenterer elevene for å bevise at løsningen er riktig?,* benyttet jeg empirinær koding for å redusere at mine forventninger til funn, skulle prege resultatene (Tjora, 2017). Neste steg i prosessen var å utvikle et analyseverktøy, i nær dialog med litteraturen og forskningsfeltet. Denne fasen må betegnes som teoridrevet, og avstanden til SDI er større, selv om det var empirien som bestemte hvilken teori jeg gjorde bruk av. I forbindelse med mitt andre analytiske spørsmål: *Hvilke faktorer bidrar til utvikling av elevenes argumentasjon?,* har analyseprosessen et visst samsvar med stegvis-deduktiv induktiv metode fra start til slutt. Mine funn angående elevers argumentasjon, avgrenset datamaterialet til særlig interessante sekvenser med hensyn til å finne påvirkende faktorer, noe som er anbefalt å gjøre for å få en håndterbar mengde empiri til analysen (Tjora, 2017). De sentrale sekvensene ble analysert ved først å gjennomføre en ny koding og samle koder i kodegrupper og til slutt samle kodegruppene i kategorier, noe som i stor grad samsvarer med SDI. Jeg hadde da noen få kategorier, og til hver av dem, en liste med henvisninger til ulike steder i datamaterialet som inneholdt episoder som tilhørte kategorien. Ved å se episodene i sammenheng, utviklet jeg konsepter som antydet hvilke faktorer som kunne ha betydning for endringer i elevenes argumentasjon. Bruk av SDI innebærer en streng systematikk og at hvert av trinnene kvalitetssikres før man går videre i prosessen (Tjora, 2017), og i kapittel 3.2 og 3.3 vil jeg gjøre rede for hvordan jeg forholdt meg til disse forventningene. Før jeg mer detaljert beskriver analyseprosessen og de analyse- og systematiseringsverktøy jeg utviklet for å gjennomføre analysen, vil jeg skildre og gjøre rede for detaljene i prosessen med å samle inn data.

3.2 Datainnsamlingsprosessen

3.2.1 Planleggingsfase

Forskningsprosjektet ProPrimEd (Valenta, u.å.) hadde stor innvirkning på at jeg valgte problemstillingen *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon*? Oppgaven i sin originale form (vedlegg 2) ble designet av denne forskergruppa, og med utgangspunkt i den, og en beskrivelse av tilhørende undervisningssekvens, planla jeg et pilotprosjekt.

Pilotprosjektet hadde flere formål. Først og fremst ønsket jeg å få erfaring med selve oppgaven og undervisningsplanen slik at jeg fikk et bedre grunnlag for å planlegge selve masterprosjektet. Jeg ønsket også å skaffe et utvalg av elevsvar, både muntlige og skriftlige, da dette kunne si noe om hva jeg kunne forvente. Et tredje formål var å sjekke om planlagte muntlige innspill og skriftlige instrukser i oppgaven var tilstrekkelig.

Deltakere i pilotprosjektet var en klasse på 10. trinn med 40 elever. Jeg ledet selv undervisningen og gjennomførte klassesamtaler, men jeg involverte meg ikke i gruppearbeid eller de individuelle løsningene av oppgaven. Elevene ble delt i tre hovedgrupper, hver med 4 grupper bestående av 2-4 elever, og en observatør (lærerstudent) ble koblet til hver av gruppene. Observatørenes oppgave var å registrere hva som skjedde uten at gruppa fikk hjelp, og notere hvilke innspill de eventuelt måtte gi og hva disse førte til. Datamaterialet fra pilotprosjektet var altså et observasjonsnotat fra hver av gruppene, i tillegg til skriftlige svar fra gruppene og enkeltelever.

Jeg laget fire versjoner av oppgaven som varierte med hensyn til hvor grundig den skriftlige instruksen var (vedlegg 3), og for å få et inntrykk av om oppgaven «Hvor mye saft?» kunne gjennomføres som en isolert aktivitet eller ikke, lot jeg de tre hovedgruppene få ulik tid med forberedende aktiviteter. Observasjonsnotater og skriftlige svar ble sammenholdt med variablene oppgaveformulering og forberedelser, og på bakgrunn av disse erfaringene, tok jeg følgende valg:

- Arbeidet med oppgaven trenger ikke nødvendigvis undervisning i forkant
- Den mest detaljerte oppgaveinstruksen brukes (versjon 4)
- Hver deloppgave presenteres på eget ark, med plass nok til elevenes løsninger
- Elevene bør arbeide i grupper på 3 eller 4
- Tidsramme: 60 minutter
- Lærer må være forberedt på å gi oppfordringer om skriftliggjøring
- For å hjelpe elever med utvikling av argumentasjon, kan lærer spørre «hvorfor?»

Med gjennomført pilotprosjekt, hadde jeg nok informasjon om det forestående prosjektet til å sende søknad til NSD (Norsk Senter for Forskningsdata), og i den forbindelse utformet jeg et samtykkeskjema (vedlegg 1). Dette arbeidet krevde konkret beskrivelse av alle deler av forskningen i tillegg til en argumentasjon for behovet for forskningen og viktigheten av å benytte ønsket forskningsmetode. Søknaden ble godkjent og jeg kunne da starte det praktiske arbeidet med datainnsamlingen.

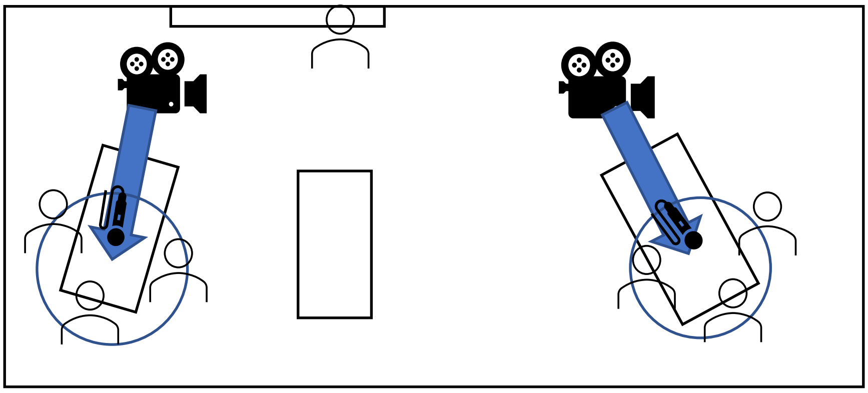
Deltakere til prosjektet ble rekruttert fra 8. klasse ved skolen hvor jeg er ansatt. Hele klassen ble informert om prosjektet og fikk med seg samtykkeskjema hjem. Det var kun sju elever som ønsket å delta, og jeg benyttet meg av seks av disse (en elev var syk den dagen oppgavearbeidet ble gjort). Utvalget kan sies å være pragmatisk med hensyn til skole ettersom praktiske hensyn var førende, og strategisk med hensyn til klasse grunnet at jeg ønsket elever i en bestemt alder (Tjora, 2017). Innenfor klassen var utvalget tilfeldig.

3.2.2 Gjennomføringsfase

Jeg gjennomførte datainnsamlingen på to påfølgende dager, og alt materiale som ikke var anonymisert ble lagret sikkert. Rådatamaterialet mitt besto av følgende:

- To grupper på tre elever som arbeider med «Hvor mye saft?». Lyd- og videoopptak for hver av gruppene (50 min)
- Gruppeintervju med alle elever. Lyd- og videoopptak (70 min)
- Skriftlige besvarelser av alle deloppgaver

Til observasjonen benyttet jeg to videokamera med minnebrikker og to lydopptakere, alt sammen utlånt fra NTNU i tråd med deres retningslinjer for studentprosjekter (NTNU, u.å.). Jeg testet utstyret på forhånd og planla hvor det var mest hensiktsmessig å plassere elever, kamera og lydopptakere. Vi brukte et stort grupperom beregnet på 20 elever. Jeg ønsket noe avstand mellom elevgruppene for at det skulle bli minst mulig forstyrrelser på lydopptak og video. Av hensyn til at økta også inneholdt felles klassesamtale, måtte jeg samtidig ha elevene så nær hverandre at den kunne gjennomføres. Dette løste jeg ved at den ene gruppa forflyttet seg mellom to pulter. Figur 3.2 viser hvordan klasserommet ble organisert.



Figur 3.2 Prinsippskisse av klasserommet datainnsamlingen

Jeg startet opptak på alle enheter før jeg introduserte for elevene hva vi skulle gjøre, og opptak ble gjort kontinuerlig gjennom hele økta. Da klassesamtalen ble gjennomført, tok elevene som byttet pult også med seg lydopptakeren. Det ene kameraet ble da flyttet så det filmet mot tavla og lærer, mens det andre filmet alle elevene. Rammen for intervjuet var uformell; vi satt rundt et felles bord, og det ble servert pizza og brus. Hensikten var å skape en avslappet atmosfære slik at elevene ville prate fritt og ikke tenke så mye på om det de sa, var rett eller ikke, noe som anbefales i fokusgrupper (Tjora, 2017). Den løse formen på intervjuet, førte til at deler av samtalen ikke relaterer seg til elevenes arbeid med «Hvor mye saft?», og en første empirinær koding reduserte derfor dataen betraktelig; Elevene uttrykker sin mening om oppgavene, de kommenterer rekkefølgen på deloppgavene og reflekterer over uttrykksform. I tillegg framkommer interaksjoner ved at elevene kommenterer hverandres utsagn, diskuterer og sier seg enig eller uenig.

Oppgaven «Hvor mye saft?» har fire deloppgaver med ulike oppdrag; de tre første skal besvares av gruppa og den siste er individuell. Elevene hadde tilgang på fargeblyanter og tegneark i tillegg til oppgavearkene som de også skrev svar på. Jeg samlet inn elevenes skriftlige besvarelse på alle oppgavene. Figur 3.3 gjengir selve problemoppgaven samt instruksene på de fire deloppgavene (de originale oppgavearkene er vedlegg 4 og 5). Oppgavene vil bli forklart ytterligere i forbindelse med analysen i kapittel 4.1.

<table>
<tr><td colspan="3">Hvor mye saft?
Mormor og morfar har ripsbusker i hagen. Hvert år plukker de masse rips som de blant annet lager saft av. De har tre barnebarn som hjelper til med å fylle safta i flasker. Når de er ferdig, har hvert barn fylt sju hele flasker og sju halve flasker. Hvor mye saft ble det laget i år?</td></tr>
<tr><td>A) Løs oppgaven
Presenter løsningen så detaljert at det vil overbevise alle andre om at løsningen din er riktig. Dere kan både skrive, regne, tegne, forklare og vise.</td><td colspan="2">B) Se på løsningen til en annen gruppe
Er noe forskjellig fra din egen løsning? Hva gjør at den er overbevisende, eller hva gjør at den ikke er det? Kan denne løsningen kombineres med din egen slik at resultatet blir en enda bedre løsning?</td></tr>
<tr><td>C) Sett bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening
Prøv å se om det er noe som mangler for at det skal bli en overbevisende forklaring. Ville dere skrevet noe mer? Lag lapper med det dere mener mangler og plasser dem sammen med de andre. Dere kan både skrive, regne og tegne. For å forklare noe ekstra godt kan det være lurt å ha både regnestykker, tekst og figurer (som viser det samme).</td><td>3 · 7 = 21
7 halve flasker er 3,5
3,5 + 3,5 + 3,5 = 10,5
21 + 10,5 = 31,5
Det ble laget 31,5 flasker saft</td><td>D) Individuelt svar på oppgaven
Løs oppgaven uten å samarbeide med andre.
Presenter løsningen din så detaljert at du overbeviser alle de andre om at løsningen din er riktig. Du kan både skrive, regne, tegne, forklare og vise.</td></tr>
</table>

Figur 3.3 Fullstendig oppgavedesign av "Hvor mye saft?"

3.3 Analyseprosessen

Forskningsspørsmålene mine ledet meg mot valg av en kvalitativ metode med eksplorerende design, og metodevalg hadde innvirkning på hvordan jeg gjennomførte analysen av datamaterialet. Jeg lot meg inspirere av hvordan stegvis-deduktiv induktiv metode (Tjora, 2017), er strukturert for å gjøre en systematisk analyse av datamaterialet. Datamateriale i form av lyd- og videoopptak må aller først transkriberes, og ettersom en transkribering kan betraktes som en oversettelse ved at man overfører muntlig tale, gestikulasjoner og interaksjoner til skriftspråket (Brinkmann & Tanggaard, 2012), velger jeg å la dette innlede min redegjørelse for analyseprosessen.

3.3.1 Transkribering

Jeg startet med å transkribere ut fra en av lydopptakerne. Det første jeg konsentrerte meg om, i tillegg til å gjengi det som ble sagt, var måten det ble sagt på (tonefall og sinnsstemning), og deretter registrerte jeg hva som praktisk foregikk parallelt med uttalelsene. Først gjorde jeg disse nedtegnelsene ut fra lydopptakene og da transkripsjonene av det verbale var gjort, sammenholdt jeg disse med videoopptakene, og de satte meg i stand til å få med flere detaljer på hva som foregikk. Noen ganger skrev jeg det med ord, mens standard tegnsetting med *!* og *?* fungerte greit for ekstra tydelige utsagn og spørrende kommentarer. Jeg benyttet *…* for mindre pauser, mens de lengre pausene ble kommentert verbalt. Noen ganger henvendte elever seg til hverandre på tvers av gruppene. De gangene dette ikke var en planlagt fellesaktivitet, har jeg merket meg hvor og når dette skjer.

For å holde kontroll på hvem som sa hva, anonymiserte jeg ikke transkripsjonene til å begynne med. De ble imidlertid arbeidet med, og lagret, i samme mappe som filene med lyd- og videoopptak og derfor uten risiko for innsyn fra noen. Før jeg delte transkripsjonene med veileder (via e-post), anonymiserte jeg en kopi slik at jeg kunne overføre trygt, men fortsatt ha muligheten til å arbeide med analysen i et dokument uten fiktive navn. Anonymiseringen ble til slutt gjort ved at elevene ble tilordnet bokstavene A, B, C, D, E, F, G og bokstavene ble pseudonymenes initialer. Jeg valgte å beholde betegnelsen ABD-gruppa (Anders, Bjørn og Dina) og CFG-gruppa (Carl, Frida og Gunn) da bokstavene viser hvilke elever som var på hvilken gruppe.

Etter den første transkriberingen, overførte jeg materialet til flere matriser. Jeg laget en matrise for hver deloppgave, hver overgang, for hver av gruppene og for gruppeintervjuet. Transkripsjonen fra gruppeintervjuet er ytterligere inndelt ut fra tema, og matrisene ble systematisert kronologisk (se vedlegg 6).

Parallelt med at jeg førte inn i matrisen, opprettet jeg et dokument for å samle bilder fra videoene. Jeg konsentrerte meg om bilder som kunne illustrere det jeg kommenterte i matrisen, og jeg lagret disse med bildetekst som anga hvilken matrise bildet tilhørte og tidspunktet i videoen da utklippet ble gjort. Til noen av bildene kommenterte jeg i tillegg hva det var som var interessant. Utklippene hadde også en annen hensikt, og det var å få oversikt over hvordan de skriftlige løsningene utviklet seg. Ved å anføre tidspunkt for de ulike endringene, kunne jeg sammenholde med transkripsjonen og slik få god oversikt over hva foranledningen til endringene var. Et eksempel er ABD-gruppa hvor løsningen trinnvis kommer på plass: De kom fram til svaret uten å skrive noe (1). Etter at de leste oppgaveteksten igjen, fant de ut at de måtte ta med detaljer for å overbevise. De var selv godt fornøyde med to regnestykker og tegning av to flasker for å illustrere det endelige svaret (2). Etter innspill fra lærer; *tror dere jeg lar meg overbevise av dette svaret?*, og en klargjøring av at de ikke kunne stole på å forklare muntlig i tillegg, utviklet de løsningen sin videre til sitt endelige svar (3). Ved å ta bilde av arket (slik det framstår på videoopptaket) på ulike tidspunkt, blir denne utviklingen dokumentert.

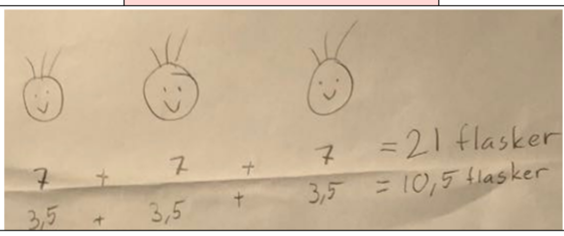
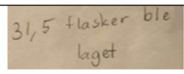
I tillegg til transkripsjoner og tilhørende bildemateriale, er også elevenes skriftlige svar en del av datamaterialet. Jeg har digitalisert alle besvarelser ved å ta bilder av elevenes svarark. Dette materialet organiserte jeg ved å anføre hvilken deloppgave som ble besvart og hvilken gruppe eller hvilken elev som sto bak løsningen. Også her er materialet anonymisert.

3.3.2 Utvikling av analyseverktøy

Etter transkripsjonen, gjorde jeg en empirinær koding av transkripsjonene med den hensikt å skille bort det i transkripsjonene som var irrelevant (f.eks: Er du forkjølet?). Jeg sto da igjen med et fokusert datamateriale (Tjora, 2017). I fortsettelsen vekslet jeg mellom å være empiristyrt og teoristyrt, noe som kan være vanlig i kvalitativ forskning (Tjora, 2017). Jeg nærmet meg først datamaterialet på en åpen måte, noe som bidro til valg av analysemodell; Datamaterialet viste at begge gruppene ganske raskt kom fram til et svar de sa seg fornøyd med, noe jeg assosierte med begrepet «base argument» som Stylianides (2007) bruker om den opprinnelige argumentasjonen som elevene uttrykker. Veiledet av teorien, utviklet jeg mitt eget analyseverktøy som jeg koblet til min empiri og mitt forskningsprosjekt. De observasjoner og erfaringer jeg hadde gjort meg gjennom den åpne tilnærmingen, var slik styrende for valg av hvilke rammeverk jeg gjorde bruk av; Toulmins modell for argumentasjon (Toulmin, 2003), samt Stylianides sin definisjon av bevis og hans rammeverk for å analysere lærers grep (A. J. Stylianides, 2007). Teorien og rammeverket forventet en sammenligning av argumentasjoner, og empirien informerte om når elevene kunne sies å være «ferdig» med en argumentasjon, noe som ga følgende fire vurderingstidspunkt:

1) *Opprinnelig argumentasjon*: Den argumentasjonen som gjør at elevene finner fram til svaret og uttrykker at de har klart å løse oppgaven.
2) *Utviklet argumentasjon*: Den argumentasjonen som elevene har videreutviklet og leverer fra seg til en annen gruppe.
3) *Rekonstruert argumentasjon*: Argumentasjonsrekka som kommer til syne gjennom å sette sammen lapper i en rekkefølge som gir mening og eventuelt lage egne lapper for å få argumentasjonen fullstendig.
4) *Individuell, skriftlig argumentasjon*: De skriftlige besvarelsene av oppgaven som hver av elevene lager i etterkant av de andre (samarbeids)oppgavene.

I kapittel 2.5.2 viste jeg ved hjelp av Toulmins modell, hvilke elementer som må være til stede for at en argumentasjon skal godkjennes som bevis. I det praktiske arbeidet med å analysere elevenes argumentasjon og sammenligne dem med mine forslag til bevis, hadde jeg behov for å justere modellen av hensyn til oversiktlighet og plass. Figur 3.4 viser et eksempel på en slik matrise for identifisering av elevenes argumentasjon. Etter en forklaring, presenterer jeg også matrisen for bevisene (figur 3.5).

<table>
<tr><td rowspan="2">Utgangspunkt
Tre barn (L10)
Sju hele flasker (L15)
Sju halve flasker (L25)</td><td>Akseptert sannhet</td><td rowspan="2">Delsvar
Tre barn
Sju hele
Tre og en halv (L5)</td><td>Akseptert sannhet
Den distributive lov
Gjentatt addisjon = multiplikasjon</td><td rowspan="2">Delsvar
21 (L21)
10,5 (L29)</td><td>Akseptert sannhet
Addisjon</td><td rowspan="2">Løsning
31,5 (L32)</td></tr>
<tr><td>Begrunnelse
Halvparten av sju (L4)</td><td>Begrunnelse
7+7+7 (L16) = 3 · 7 (L11)
3,5+3,5+3,5 (L27) = 3, 6, 9 (L28)</td><td>Begrunnelse
21+10,5 (L31)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">
</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

Figur 3.4 Eksempel på utfylt analysematrise for elevers argumentasjon

Når det gjelder matrisen for elevenes argumentasjon, har muntlige utsagn henvisning til transkripsjon i parentes, mens det som er representert skriftlig, er tatt med som bilder for å skille de to uttrykksformene. Bildene viser også om den skriftlige argumentasjonen er verbal, symbolsk og/eller figurativ. Matrisene har fargekoder for å framheve likheten med Toulmins originale modell, og begge eksemplene viser kjedet argumentasjon; en sammenhengende rekke av argumenter hvor delsvar brukes som opplysninger i neste argument. Både modellene og matrisene informerer om hvilke opplysninger argumentasjonen tar utgangspunkt i, hvilken strategi som velges, hvilke påstander som blir framsatt, hvordan disse er begrunnet og hvilket fundament begrunnelsen bygger på. I matrisen for bevisene, som grunnet lesbarheten også ligger som vedlegg 7, har jeg samlet strategiene i tre parallelle kjeder. Som nevnt i kapittel 2.5 2, er hensikten med å inkludere mange detaljer og vise flere varianter, at det da lettere lar seg gjøre å sammenligne elevenes argumentasjon med denne matrisen.

Løsningsstrategi og argumentasjonsrekke 1										
Utgangs-punkt 3 barn 7 hele flasker 7 halve flasker	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Delsvar** 3(7 hele + 7 halve)	**Akseptert sannhet** Den distributive lov	**Delsvar** 3·7 hele + 3·7 halve	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Delsvar** 21 hele og 21 halve	**Akseptert sannhet** 1 halv er 1:2 hele	**Delsvar** 21 hele 10,5 hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Løsning** 31,5 hele flasker til sammen
	Begrunnelse 7 hele og 7 halve + 7 hele og 7 halve + 7 hele og 7 halve = 3(7 hele + 7 halve)		**Begrunnelse** 3(7 hele + 7 halve) = 3·7 hele + 3·7 halve		**Begrunnelse** 3 · 7 = 21		**Begrunnelse** 21 halve er 21:2 hele = 10,5 hele		**Begrunnelse** 21 + 10.5 = 31,5	
Løsningsstrategi og argumentasjonsrekke 2										
Utgangs-punkt 3 barn 7 hele flasker 7 halve flasker	**Akseptert sannhet** 2 halve er 1 hel	**Delsvar** 3 barn 7 hele 3 og en halv hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Delsvar** 10 og en halv flaske hver	**Akseptert sannhet** 1 halv er 1:2 hele	**Delsvar** 10 hele og 0,5 hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Løsning** 10,5 hele flasker hver	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Løsning** 31,5 hele flasker til sammen
	Begrunnelse 4 halve = 2 hele 6 halve = 3 hele 7 halve = 3 hele og en halv		**Begrunnelse** 7 + 3 og en halv		En halv er 1:2=0,5		10 + 0,5 = 10,5		**Begrunnelse** 10,5 + 10,5 + 10,5 = 3 · 10,5	
Løsningsstrategi og argumentasjonsrekke 3										
Utgangs-punkt 3 barn 7 hele flasker 7 halve flasker	**Akseptert sannhet** 1 halv er 1:2 hele	**Delsvar** En halv er 0,5	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Delsvar** 7 halve = 3,5 hele	**Akseptert sannhet** Den distributive lov	**Delsvar** 3·7 hele + 3· 3,5 hele	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Delsvar** 21 hele 10,5 hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Løsning** 31,5 hele flasker til sammen
	Begrunnelse 1:2 = 0,5		**Begrunnelse** 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 0,5 · 7 = 3,5		**Begrunnelse** 3(7 hele + 3,5 hele) = 3·7 hele + 3· 3,5 hele		**Begrunnelse** 3 · 7 = 21 3 · 3,5 = 10,5		**Begrunnelse** 21 + 10.5 = 31,5	

Figur 3.5 Bevis: Matrise som viser distributiv, additiv og multiplikativ strategi

Jeg fant det nyttig å registrere, visualisere og analysere elevenes argumentasjon ved hjelp av Toulmins modell, mens det er framgangsmåten som Stylianides presenterer i sitt rammeverk som er opphav til strukturen i analyseprosessen, noe jeg nå vil gjøre rede for.

3.3.3 Analysens to hoveddeler

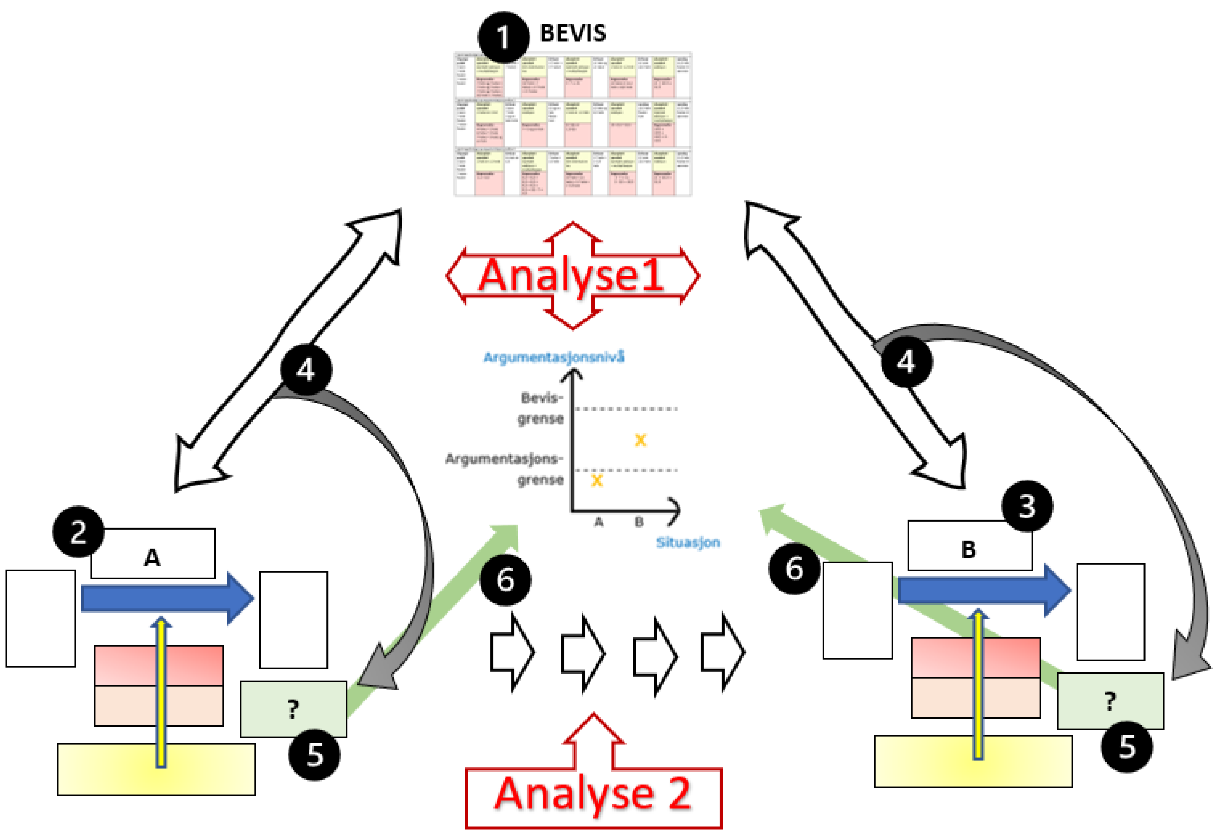
Mitt forskningsspørsmål er *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?* Som jeg vil argumentere for i kapittel 5, mener jeg at dette kan besvares ved hjelp av funn relatert til de to analytiske spørsmålene:

1) *Hvordan argumenterer elevene for å bevise at løsningen er riktig?*

2) *Hvilke faktorer bidrar til utvikling av elevenes argumentasjon?*

Jeg vil nå beskrive litt mer utdypende hvordan jeg benyttet analyseverktøyene for å 1) undersøke hvordan elevene argumenterer i bevissituasjonen singel-case og 2) identifisere hvilke faktorer som påvirker elevenes argumentasjon.

For å besvare det første analytiske spørsmålet, identifiserte jeg hvordan elevene argumenterte da de på ulike måter arbeidet med problemoppgaven «Hvor mye saft?». Hvordan denne første analysen foregikk, kan forklares ved hjelp av figur 3.6, som er en skjematisk framstilling av de ulike fasene i analysen. Fasene er samsvarende med dem som rammeverket til Stylianides (2007) antyder. Figuren illustrerer i tillegg hvordan min analyses to hoveddeler er knyttet til hverandre. Tallene i teksten samsvarer med tallene på figuren, som hjelp til å følge forklaringen.



Figur 3.6 Analyseprosessen steg for steg – og sammenheng mellom de to analysene

Min analyse av oppgaven (kapittel 2.5.2), resulterte i tre bevis (1) som her er illustrert ved hjelp av den utviklede analysematrisen. Deretter identifiserte jeg elevenes argumentasjon på ulike tidspunkt og registrerte disse i hver sin modell; eksempelvis opprinnelig argumentasjon(2) og utviklet argumentasjon (3). Hver av argumentasjonsrekkene ble så evaluert gjennom sammenligning med bevisene, og her fungerte definisjonen på bevis som vurderingskriterier (4). Evalueringen tilordnet argumentasjonen en sannhetsgrad (5) som i sin tur var bestemmende for hvilket nivå argumentasjonen kunne plasseres på. Argumentasjonsnivået ble uttrykt ved hjelp av et diagram (6) som skiller mellom ingen argumentasjon, redegjørelse og bevis.

Svarene fra analysens første del, bidro til å lokalisere interessante sekvenser i datamaterialet for å besvare det andre analytiske spørsmålet. Denne analysen gikk ut på å studere situasjoner hvor elevenes argumentasjon utviklet seg, for å identifisere hvilke påvirkende faktorer som kunne tenkes å bidra til endring og forbedring i argumentasjonen. Faktorene jeg identifiserte, ble kodet, samlet i kodegrupper og deretter kategorisert, noe som er i tråd med en stegvis-deduktiv induktiv metode (Tjora, 2017).

En første empirinær koding var allerede gjennomført, og det fokuserte datamaterialet kunne nå reduseres ytterligere ettersom sentrale sekvenser var identifisert. Målet mitt var å registrere hva som ble sagt og gjort i perioden mellom to ulike utgaver av elevargumentasjon, og slik ble analysen styrt av empirien. Oppmerksomheten min var rettet mot steder i datamaterialet hvor argumentasjonen fikk flere momenter, endret struktur eller skiftet uttrykksform, og jeg gikk inn i materialet der slike endringer skjedde. Jeg identifiserte så hva som skjedde i forkant av endringen, og tilordnet koder som favnet hva som ble omtalt, uttrykt eller henvist til. I tillegg ivaretok kodingen måten kommunikasjonen foregikk på og hvilket sosialt samspill som foregikk. For å ta vare på arbeidet, opprettet jeg en matrise som lot meg sortere og omorganisere uten å miste koblingen til den empirinære kodingen. I tillegg til ulike nivåer av koding, inneholdt matrisen en beskrivelse av påvirkningen som kom til syne. Et utsnitt fra denne typen matrise vises i vedlegg 8.

Kodene var fortsatt knyttet til empirien, men jeg fjernet meg fra ordrett gjengivelse. Som eksempel kan nevnes Frida sin kommentar som empirinært ble kodet: *Det tar kanskje litt tid, da, eller?* Påfølgende koding ivaretar essensen: *Det tar tid*, og uttalelsen endte opp som en del av kodegruppen *tidkrevende* og kategorien *Krever arbeid og tid*.

Hvis det var situasjoner som lignet hverandre, satte jeg dem i samme kodegruppe med en gang; etter at jeg hadde bestemt kodingen *forslag som ignoreres* på at en elev på den ene gruppa ikke ble lyttet til, var det naturlig å gi samme kode til en tilsvarende situasjon på den andre gruppa. Etter denne prosessen hadde jeg 20 kodegrupper som vist i figur 3.7.

Kodegrupper	Kategori	Innhold
Ord: overbevis, detaljert Krever arbeid og tid Forarbeid Problemoppgaven	Oppgaven	Oppgavens formuleringer og tilrettelegging av bevisaktiviteten
Samhandling Uttrykke uenighet Skepsis Stille spørsmål Bytte mottaker Overbærende og vennlig	Sosialt	Medhjelpere til, og mottakere av, argumentasjonen
Forslag om forbedringer Forslag som blir ignorert Gjenkjenne svar Ideer fra andre Motstridende svar Sammenligne Vurdere andres løsning	Ulike argumentasjoner	Tilgang til og bruk av andre argumentasjoner enn sin egen
Begrense uttrykksform Tegning Tillate flere uttrykksformer	Uttrykksform	Krav om og muligheter til å bruke ulike representasjoner og uttrykksformer

Figur 3.7 Kodegrupper og kategorier

Ved å se etter likheter mellom kodegruppene, gjorde jeg en første kategorisering, organiserte matrisen ut fra disse kategorien og inspiserte så hver av kategoriene for å sikre at det som var plassert sammen, virkelig hørte sammen. Som SDI krever, gikk jeg altså et trinn tilbake i metoden for å kvalitetssikre. Blant endringene som ble gjort i denne prosessen kan jeg nevne to. *Forslag som ignoreres* ble flyttet fra temaet *sosialt* til temaet *ulike argumentasjoner*. Det kunne passe inn begge steder; det sosiale aspektet handler om å lytte til hverandre på gruppa og ha et samspill som fungerer. I dette tilfellet handlet forslagene om hvordan man skulle argumentere og hvilke representasjoner som kunne brukes og derfor ble det flyttet. En annen ting som jeg endret, var ordlyden i noen av kodene. En av de jeg hadde kalt *vurdere andres løsning*, ble heller betegnet *ideer fra andre* for i enda større grad antyde hva det handlet om.

3.4 Forskningens kvalitet

Kvaliteten av kvalitativ forskning kan vurderes med utgangspunkt i kriteriene reliabilitet (pålitelighet), validitet (gyldighet) og generaliserbarhet, og Tjora (2017, s. 239) skiller mellom tre former for generalisering; naturalistisk, moderat og konseptuell. Naturalistisk generalisering har man om detaljene i forskningen formidles så detaljert at leseren selv kan vurdere om funnene har gyldighet, moderat generalisering innebærer at forskeren beskriver hvilke situasjoner resultatene kan tenkes å være gyldige i, og konseptuell generalisering er at de konsepter og teorier som er utviklet i forskningsprosjektet vil ha relevans også for andre situasjoner enn de som er undersøkt.

3.4.1 Reliabilitet

Begrepet reliabilitet er samsvarende med pålitelighet og dreier seg om den interne logikken gjennom forskningsprosessen (Tjora, 2017). Med det forstår jeg at de valg som er gjort med hensyn til både teori, metode og analyse, skal synliggjøres og begrunnes. Gjennom å være tydelig på hvordan og hvorfor de ulike delene er koblet til hverandre, har jeg forsøkt å gjøre dette. For å gjøre forskningsprosessen så gjennomsiktig som mulig, har jeg valgt å gi rike og illustrerte beskrivelser av datainnsamlingen, og i analysen har jeg lagt vekt på å underbygge mine påstander med både bildemateriale og gjengivelse av dialoger. Min metodiske tilnærming har dessuten vært inspirert av SDI, som nettopp har som formål å sikre påliteligheten gjennom systematikk og begrunnede valg (Tjora, 2017).

Sentrale kilder i oppgaven min er Balacheff (2008), A.J. Stylianides (2007; 2016), G. J. Stylianides (2008), Stylianides & Ball (2008), Jeanotte & Kieran (2017) og Toulmin (2003). Denne litteraturen har vært til stor inspirasjon i utviklingen av analyseverktøyet og er blant de jeg diskuterer forskningsresultatene mine i lys av. Flere av kildene fant jeg gjennom overordnet litteratursøk i databaser, der «mathematical reasoning» var grunnstammen i søket. Underveis i prosjektet, søkte jeg også gjentatte ganger etter litteratur, men disse søkene var mer spesifikke ettersom jeg da ønsket oversikt over litteratur knyttet til detaljer ved oppgaven og problemstillingen min, og en av kildene jeg fant på denne måten, er Nordin & Boistrup (2018). Mitt prosjekt handler om bevissituasjonen singel-case («a single case»). Her foretok jeg mange søk med varianter av søkeord, kombinasjoner av søkeord og ulike søkemetoder, men litteratur på dette området var vanskelig å finne. Selv om jeg har prøvd å skaffe meg oversikt over forskningsfronten, er det mulig at jeg har gått glipp av relevant litteratur og forskningsresultater, noe som kan svekke forskningens reliabilitet.

Et viktig moment med tanke på påliteligheten, er å redegjøre for egen posisjon og engasjement, og reflektere over om, og hvordan, dette kan ha betydning for valg og resultater (Ringdal, 2018). Jeg er en erfaren lærer og har undervist i matematikk i mange år. Dette preget nok valget av deltakere og metode for datainnsamling, for å forske på egne elever og selv være lærer i aktiviteten virket naturlig å gjøre. Å være deltakende observatør og ha en rolle som lærer, betyr at jeg selv ble en del av det datamaterialet som jeg analyserer, og følgelig vil virke inn på forskningsresultatet. Denne forskningseffekten vil diskuteres som en del av metodekritikken i kapittel 5.3.

3.4.2 Validitet

Begrepet validitet samsvarer med gyldighet, og er et mål på om forskningens resultat virkelig svarer på forskningsspørsmålet (Tjora, 2017). Med andre ord, dreier det som om hvorvidt forskningen min har satt meg i stand til å si noe om det jeg lurte på, altså om jeg får målt det jeg vil måle ved å bruke de metodene jeg har valgt. For å finne svar på forskningsspørsmålet mitt; *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?*, har jeg arbeidet med de to analytiske spørsmålene 1) *Hvordan argumenterer elevene for å bevise at løsningen er riktig?*, og 2) *Hvilke faktorer bidrar til utvikling av elevenes argumentasjon?* Det er disse spørsmålene som har drevet forskningen, og jeg har prøvd å klargjøre hvordan de forholder seg til hverandre og gjort tydelig hva svarene på spørsmålene kan informere om.

Begrepsvaliditet handler om graden av samsvar mellom den teoretiske definisjonen av et begrep, og den aktuelle operasjonaliseringen av det, og om man lykkes med det eller ikke, vil ha betydning for forskningens validitet (Kleven & Hjardemaal, 2018). Ettersom et av de uttrykte behov på forskningsfeltet er klargjøring og avgrensning av begreper som resonnering, argumentasjon og bevis (Balacheff, 2008), er det stor sannsynlighet for at min operasjonalisering ikke korresponderer med alle de varianter av definisjoner som finnes. Valg av hvilke kilder jeg har støttet meg på og hvordan jeg har fortolket, vil kunne skape usikkerhet rundt mine funn. Jeg har imidlertid prøvd å være eksplisitt i begrepsoperasjonaliseringen ved å forklare hvordan jeg tolker og bruker begrepene i min forskning, i tillegg til å henvise til kilder, og dette kan bidra til at grunnlaget for avklaringer og operasjonaliseringer kommer bedre fram.

3.4.3 Generaliserbarhet

I kvalitativ forskning er det, av hensyn til muligheten for til en viss grad å generalisere, viktig at alle avgrensninger er godt begrunnet (Tjora, 2017). Dette har jeg forsøkt å gjøre i alle deler av forskningsprosessen, noe jeg formidler gjennom beskrivelser og refleksjoner. Jeg mener derfor at leseren har mulighet til selv å vurdere om mine funn vil ha gyldighet, noe som betegnes naturalistisk generalisering. Jeg mener i tillegg at mine funn ikke bare er gyldige for de elevene og den skolen jeg har forsket på, men at lignende resultater kan forventes ved andre skoler og med andre elever som deltakere. En viktig forutsetning for påstanden er at utvalg er tilfeldige, og selv om jeg av hensyn til det praktiske, forsket på egne elever, var det vilkårlig hvem av klassen som ønsket å delta. Et annet moment, er at jeg etterspør et potensiale i forskningsspørsmålet mitt, og mine funn viser hva som er mulig å få til med utgangspunkt i en bestemt aktivitet. Jeg påstår ikke at det samme alltid vil skje, men jeg mener jeg ved bruk av empirien, har argumentert for at lignende læringspotensial vil være til stede selv om deltakerne er andre elever ved andre skoler. Dette avhenger selvsagt av at oppgaven tas i bruk på samme måte som jeg gjorde, med hensyn til rammer og mediering fra lærer.

3.5 Etiske betraktinger

Forskning på og med personer, spesielt med lyd- og videoopptak må meldes til NSD, og jeg startet ikke datainnsamling før jeg hadde godkjenning av prosjektet. Svaret på søknaden bekreftet at plan for innsamling, behandling og oppbevaring av datamaterialet var forsvarlig, og i tillegg fulgte jeg retningslinjene som NTNU har på dette området (NTNU, u.å.). Både ikke-anonymiserte transkripsjoner, lydopptak og videoopptak ble lagret bak tofaktorautentisering, uten mulighet for innsyn fra andre.

Det er viktig at elever som deltar i forskning ikke må forsake noe for å være med (NSD, u.å.), og derfor ble undervisningsplanen for klassen laget med hensyn til at alle skulle arbeide med det samme. Ettersom resonnering og argumentasjon er et av kjerneelementene i faget (Kunnskapsdepartementet, 2020), anså mine kolleger og jeg at oppgaven var relevant for alle elevene. Vi organiserte det slik at jeg var sammen med deltakerne i prosjektet på et eget rom som var rigget med opptaksutstyr, mens resten av klassen arbeidet på to tilstøtende rom. Den eneste forskjellen som ble gjort på elevene, var altså at det ble gjort opptak av deltakerne i prosjektet.

Å bruke egne elever i forskning er en spesiell situasjon og krever at man reflekterer grundig over de mulige etiske problemene knyttet til dette (NSD, u.å.). Det var ikke så mange som samtykket til å delta, noe som indikerer at elevene ikke følte seg presset til å delta selv om det var en lærer de kjente som inviterte dem med. Det ble opplyst om at deltakelse var frivillig og at alle som ønsket, kunne være med, før samtykkeskjema ble delt ut (vedlegg 1), noe som innfridde kravet om *informert og fritt samtykke* (Ringdal, 2018, s. 61). Som elevene også fikk beskjed om, ble datamaterialet anonymisert, så også på denne måten ble hensynet til individet ivaretatt.

4 Analyse

Mitt forskningsspørsmål er: *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?* For å svare på det har jeg analysert datamaterialet ut fra mine to analytiske spørsmål:

1) *Hvordan argumenterer elevene for å bevise at løsningen er riktig?*

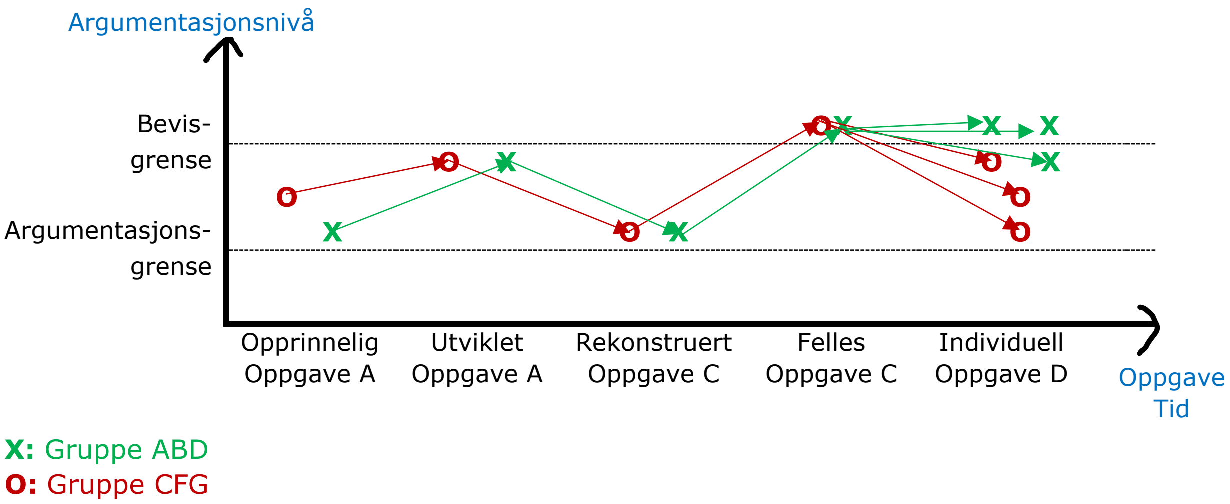
2) *Hvilke faktorer bidrar til utvikling av elevenes argumentasjon?*

Mine resultater bygger på analyse av datamateriale fra observasjon og intervju med seks elever fordelt på to grupper. I kapittel 4.1 presenterer jeg funn og redegjør for analysen knyttet til elevenes argumentasjon, og denne delen er systematisert ut fra de ulike oppdragene som oppgaven «Hvor mye saft?» besto av. Analysen som identifiserer hva som bidrar til endringer av elevenes argumentasjon, følger så i kapittel 4.2 og her er det analysens funn som skaper strukturen.

4.1 Elevenes argumentasjon i bevissituasjonen singel-case

Hovedessensen av mine funn knyttet til elevenes argumentasjon, kan illustreres med figur 4.1. Den viser hvilket nivå jeg vurderte elevenes argumentasjon til å ha på fem sentrale tidspunkt. I delkapitlene som nå følger, vil jeg redegjøre for analysen som ligger til grunn for mine funn, og framstillingen vil være kronologisk og til dels samsvarende med de ulike oppdragene i oppgaven, som forklart i kapittel 3.3.2:

1) Opprinnelig argumentasjon
2) Utviklet argumentasjon
3) Rekonstruert og felles argumentasjon
4) Individuell argumentasjon



Figur 4.1 Illustrasjon av funn; elevers argumentasjon i bevissituasjonen singel-case

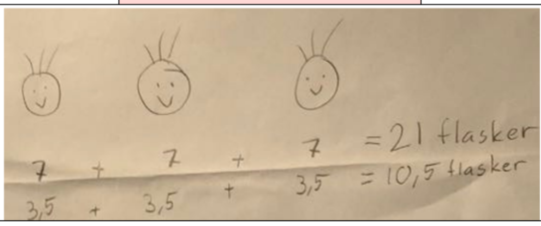
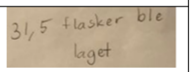
4.1.1 Elevenes opprinnelige argumentasjon

Begge gruppene fant korrekt svar på oppgaven og hadde argumentasjon for hvorfor svaret var riktig. Som analysen vil vise, var det imidlertid mangler knyttet til alle de tre kriteriene for bevis; aksepterte sannheter, argumentasjonsmåte og uttrykksform.

Det første oppdraget som elevene fikk, var å finne løsningen på problemoppgaven «Hvor mye saft?» og deretter bevise at de hadde funnet korrekt svar. Oppgaven ble lest høyt av lærer, men ikke kommentert på annen måte.

Lærer: *Og så vil jeg nå at dere på gruppa leser selve instruksen – det som står på A; løs oppgaven og så videre, og så får dere et kvarter på å finne fram til en løsning.*

Argumentasjonen til CFG-gruppa er en redegjørelse som har likhetstrekk med løsningsstrategi 3, multiplikativ strategi. Argumentasjonen har flere essensielle mangler, noe som både analysematrisen og påfølgende analyse viser.

Utgangspunkt	**Akseptert sannhet**	**Delsvar**	**Akseptert sannhet**	**Delsvar**	**Akseptert sannhet**	**Løsning**
Tre barn (L10) Sju hele flasker (L15) Sju halve flasker (L25)		Tre barn Sju hele Tre og en halv (L5)	Den distributive lov Gjentatt addisjon = multiplikasjon	21 (L21) 10,5 (L29)	Addisjon	31,5 (L32)
	Begrunnelse Halvparten av sju (L4)		**Begrunnelse** 7+7+7 (L16) = 3 · 7 (L11) 3,5+3,5+3,5 (L27) = 3, 6, 9 (L28)		**Begrunnelse** 21+10,5 (L31)	
						

Figur 4.2 Gruppe CFG sin opprinnelige argumentasjon

Den første påstanden i argumentasjonen, at sju halve er tre og en halv, er forklart som halvparten av sju. Imidlertid mangler en forklaring på hvorfor det er korrekt, og de viser heller ikke hvordan det gir resultatet 3,5. I den videre argumentasjonen, anser de verdien 3,5 for å være sann. Elevene benytter så den distributive lov og regner ut hvor mange opprinnelige hele flasker barna har til sammen og så hvor mange konstruerte hele flasker (fra de halve) de har til sammen. Til dette bruker de gjentatt addisjon selv om Frida uttrykker muntlig hun vet at multiplikasjon ville gitt samme resultat: *Det blir tre ganger sju, da.* For å konkludere med det endelige svaret, bruker elevene addisjon og finner summen av de to mengdene 21 og 10,5.

Framstillingen av argumentasjonen er logisk og ryddig bortsett fra at de fakta som oppgaven inneholder, blir presentert til ulike tidspunkt (L10, L15 og L25).

I argumentasjonen bruker elevene representasjoner som er mulig å forstå for de andre: Det verbale uttrykkes både muntlig og skriftlig, og tallsymboler og regneoperatorer som benyttes er kjent. Tegningen av de tre hodene med tilhørende tallsymboler bidrar til å informere om hva den praktiske situasjonen er, og viser også at de anvender den distributive lov. Flere av tallsymbolene som er skrevet mangler imidlertid benevning eller forklarende tekst, noe som svekker argumentasjonen.

Argumentasjonen ligger tett opp til et bevis, men det trengs en tydeligere kobling til definisjonen av en halv og hvordan den benyttes for å få resultatet 3,5 hele flasker av de 7 halve. Det er også ønskelig med mer tekst slik at tallene ikke kan mistolkes. En ytterligere forbedring ville være å uttrykke enda tydeligere hvilke faktaopplysninger som danner utgangspunktet for argumentasjonen.

Argumentasjonen til ABD-gruppa er også en redegjørelse, og deres argumentasjon har elementer fra både distributiv og additiv strategi (se vedlegg 7). Hva som er mangelfullt, går fram av analysen.

Det første ABD-gruppa gjør, er å tolke informasjonen i oppgaveteksten og framstille opplysningene kortfattet og presist. Elevene gjør altså en forenkling av den praktiske situasjonen og står igjen med det som er relevant for den matematiske beregningen: *Det er tre barnebarn som har sju hele flasker hver og sju halve* (L10-13). Dette er påstander som helt sikkert er sanne gitt den spesifikke oppgaven. Før elevene kommer fram til svaret, er de innom to ulike framgangsmåter, noe som går fram av analysemodellen (figur 4.3) og samtalen på gruppa.

Den første benytter den distributive lov i starten for å finne hvor mange hele og halve flasker de tre barna har til sammen (løsningsstrategi 1):

L14: Bjørn: *Det blir 21 hele flasker og 21 halve flasker*

L15: Anders: *Det vil si at vi bare halverer 21?*

L16: Anders: *Hvordan skal det gå opp da? Det blir en til overs*

Forslaget om å halvere 21 blir ikke benyttet, og de forlater denne strategien og starter opp på nytt. Denne gangen utformer de en argumentasjon som samsvarer med løsningsstrategi 2.

L17, Dina: *Det blir tre fulle flasker og en halv – så det blir tre og en halv flaske*

L18, Dina: *Hvis vi legger på tre* [her sier de tre, men bruker sju]*, blir det 10 og en halv flaske på hvert barnebarn*

L22, Dina: *Vi har funnet ut at ett barnebarn fyller 10,5 hele flasker. Hvis vi dobler det, blir det 21 og så blir det 31,5*

L25, Anders: *10,5 ganger 3*

L28, Dina: *Det blir 31,5*

Utgangspunkt Det er tre barnebarn som har sju hele flasker hver, og sju halve (L10-13)	**Akseptert sannhet**	**Delsvar** Det blir 21 hele og 21 halve (L14)	**Akseptert sannhet**	**Delsvar**	**Akseptert sannhet**	**Løsning**
	Begrunnelse		**Begrunnelse** Halverer 21 (L15)		**Begrunnelse**	
Utgangspunkt Det er tre barnebarn som har sju hele flasker hver, og sju halve (L10-13)	**Akseptert sannhet**	**Delsvar** 3 barn 7 hele 3 og en halv hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Delsvar** 3 barn 10 og en halv flaske på hvert barnebarn	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon (L22)	**Løsning** 31,5 hele flasker til sammen
	Begrunnelse 7 halve blir 3 fulle og 1 halv (L17)		**Begrunnelse** Legger sju til 3 og en halv (L18)		**Begrunnelse** $3 \cdot 10,5 = 31,5$ (L25)	

Figur 4.3 Gruppe ABD sin opprinnelige argumentasjon

Elevene kommer med en påstand om at 7 halve er 3,5 hele og i fortsettelsen stoler de på at dette er korrekt selv om den eneste uttalte forklaringen nesten er identisk med påstanden: *Det blir tre fulle flasker og en halv* (L17). Elevene finner først hvor mange hele flasker hvert barn har ved å summere opprinnelige helflasker og konstruerte helflasker (fra de halve) for hvert barn. Deretter regner de ut det totale antall hele flasker ved gjentatt addisjon som de så uttrykker som multiplikasjon. Prosessen fram til 31,5 som hypotese for svaret, går ganske raskt, noe elevene er fornøyde med:

L33, Dina: *Hehe, da har vi funnet svaret da*.

L34, Anders: *Og uten å ha skrevet en skit*

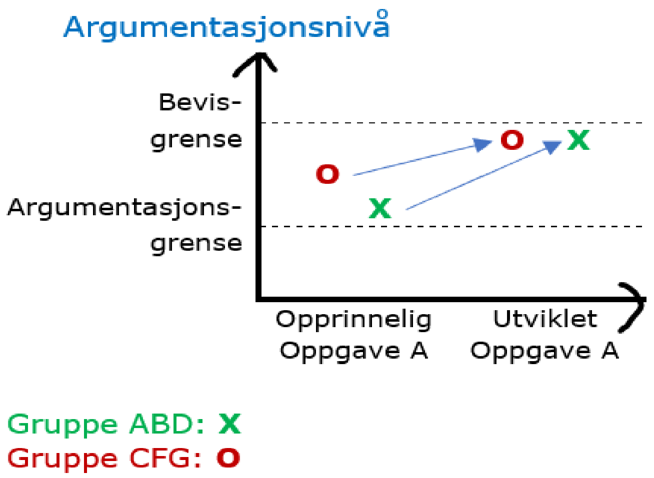
Som dialogen tydelig vitner om, foregår all argumentasjon muntlig. Elevene diskuterer mens de ved å peke på detaljer i oppgaveteksten, viser hvilke opplysninger de snakker om. Argumentasjonen har en deduktiv utforming, og nye påstander kobles til regneoperasjonene addisjon og gjentatt addisjon.

Elevenes opprinnelige argumentasjon mangler forklaring på overgangen fra 7 halve til 3,5 hele. Elevene bruker kun muntlig språk som uttrykksform, så argumentasjonen kan forbedres også på det området.

Oppsummert kan vi se at både gruppe CFG og gruppe ABD hadde argumentasjon for hvorfor svaret ble 31,5, og de fleste påstandene hadde forklaringer som ble koblet til det vi kan anse som aksepterte matematiske sannheter; addisjon og multiplikasjon. Imidlertid hadde ingen av gruppene god nok argumentasjon for at 7 halve er 3,5 hele og på grunn av dette, kan ikke argumentasjonsrekka godkjennes som et bevis for svaret. Begge gruppene var systematiske og utledet nye svar fra tidligere sannheter, så måten de argumenterer på er god nok til å kvalifisere som bevis, kanskje med unntak av CFG-gruppas manglende presentasjon av oppgavens fakta. Når det gjelder representasjoner, er det rom for utvikling og forbedring hos begge gruppene. Gruppe CFG bruker tall uten benevning og ettersom 7 kan stå for både antall hele flasker og antall halve flasker, blir argumentasjonen svekket ved at dette ikke gjøres mer tydelig. Gruppe ABD sin utfordring, er at all argumentasjon er muntlig. Dette innebærer at når argumentasjonen er fullført, er det ingenting man står igjen med for å eventuelt bygge videre på.

4.1.2 Elevenes utviklede argumentasjon

Det jeg betegner som elevenes utviklede argumentasjon, er den løsningen de har på det tidspunktet de skal bytte ark med den andre gruppa. Begge gruppene hever nivået på argumentasjonen sin, som nå ligger rett under bevisgrensen. Som figur 4.4 viser, er både opprinnelig og utviklet argumentasjon en redegjørelse, men det har tydelig skjedd en forbedring. Hva forbedringen består i, vil jeg vise gjennom analysen som nå følger.



Figur 4.4 Forbedring av elevenes argumentasjon

Elevene på gruppe CFG har laget en ny figur og likheten med den de hadde fra før, gjør at jeg ser på den nye som en videreutvikling (figur 4.5). Det er fortsatt tre hoder som viser antall barn, men istedenfor å skrive tallsymbolene 7 og 3,5 under hvert av barna, tegner de nå 7 flasker der 7-tallet sto og 7 halvfulle flasker der det sto 3,5. Den detaljerte tegningen bidrar til å øke sannsynligheten for at det er sant at 7 halve er 3,5.

Fakta:

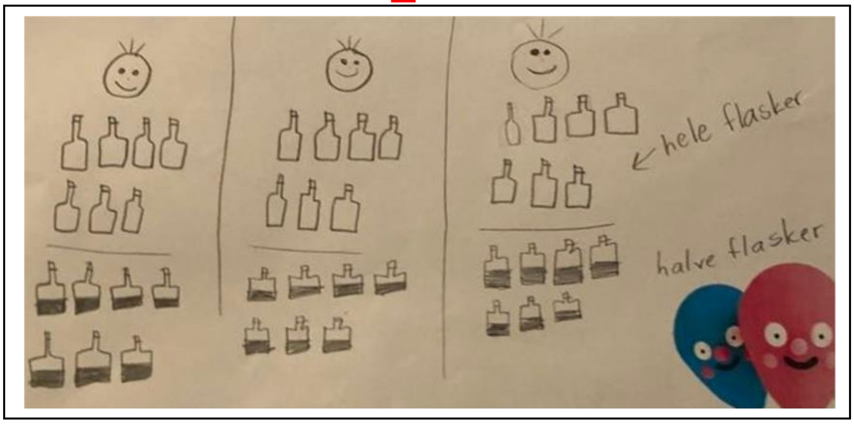
7 halve flasker

Påstand:

3,5 hele flasker

Begrunnelse:

Halvparten av 7

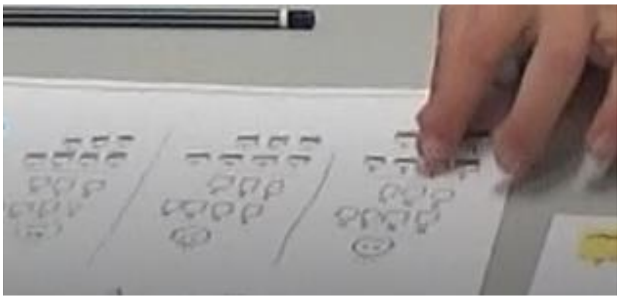


Figur 4.5 Gruppe CFG: Forbedret argumentasjon for påstanden 7 halve er 3,5 hele

På tegningen er halvflaskene plassert slik at det kan virke naturlig å koble sammen to og to, noe som indikerer at det er den matematiske sannheten «to halve er en hel» som ligger til grunn for argumentasjonen. Når den andre gruppa skal forstå denne løsningen (oppgave B), er det nettopp slik de tolker figuren (figur 4.6).

Anders: *Her har du jo 1 hel, 2 hele, 3 … 3 og en halv*

Anders plasserer to fingre på to halvflasker og teller 1, hopper videre til neste par av halvflasker og teller videre. Dette viser at figuren kan tolkes som en visualisering av at to halve blir en hel.



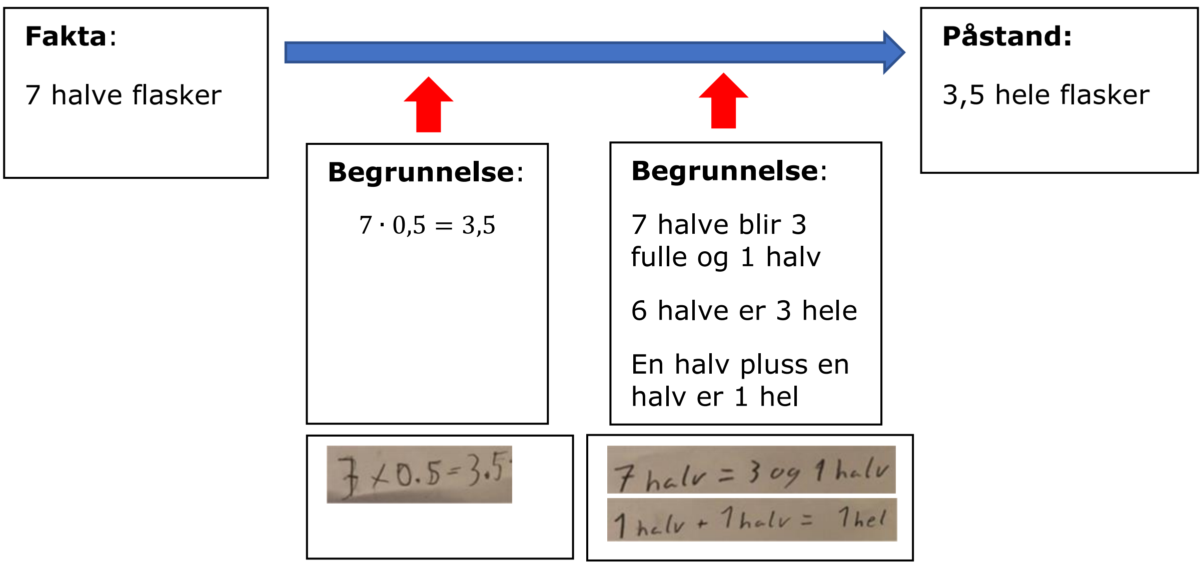
Figur 4.6 ABD-gruppas tolkning av figur

Figuren som tegnes for å lage en mer detaljert løsning, forbedrer i tillegg argumentasjonsmåten ved at den illustrerer utgangspunktet slik at det går klart fram at det er tre barn og at hver av disse fyller 7 hele og 7 halve flasker hver. I elevenes opprinnelige argument ble disse opplysningene uttrykt til ulike tidspunkt og det at det var 7 halve flasker ble kommunisert sent og kun muntlig. Elevenes utviklede argumentasjon er klart forbedret med hensyn til dette; fakta presenteres ryddig og i tillegg til det visuelle uttrykket, brukes tekst og piler for å unngå sammenblanding av de hele og de halve flaskene. Argumentasjonens struktur uttrykkes dessuten med støtte i den nye figuren, og ettersom Frida her frigjør seg fra det faktum at det er tre barn, foretar hun en generalisering, noe som er et steg på veien til et generisk bevis.

Frida:	*Så det vi egentlig gjorde, det var at vi satte sju flasker på hvert barn og så regnet vi ut hvor mye sju halve flasker ble. På hvert barn, på en måte. Og så plusset vi sammen.*

Forbedringene i CFG-gruppa sin utviklede argumentasjon, kan knyttes til alle tre aspekter i bevisdefinisjonen. De får på plass en klarere kobling til aksepterte sannheter, forbedrer argumentasjonsmåten ved å tydelig vise hvilket utgangspunkt de har og de nyttiggjør seg figurer som representasjonsmåte på en måte som også gir mening for andre.

Elevene på gruppe ABD gjør i sin utviklede versjon av argumentasjonen bruk av skriftlig språk i tillegg til det muntlige (figur 4.7). Når de skal gjøre forbedringene, forlater de den løsningsstrategien de hadde valgt i starten, og konstruerer hele argumentasjonsrekka på nytt. Istedenfor å finne ut hvor mange hele flasker hvert barnebarn får, for deretter å multiplisere for å finne det totale antall hele flasker, regner de ut de hele for seg, de halve gjøres om til hele og legges sammen og til slutt summeres resultatene. Denne framgangsmåten samsvarer med løsningsstrategi 3.



Figur 4.7 Gruppe ABD: Forbedret argumentasjon for påstanden 7 halve er 3,5 hele

Når elevene skal skrive ned argumentasjonen, blir de oppmerksomme på at overgangen fra halve til hele trenger en utregning. De kommer med en argumentasjon om at 6 halve er 3 hele, men det fører ikke til at de får skrevet den utregningen de etterlyser. Først når de bytter representasjon på «en halv» – fra tekst til tallsymbol – blir de enige om hva de skal skrive:

L64, Anders:	*Sju ganger en halv er jo fire og en halv – nei – fire og en halv sier jeg*
L65, Dina:	*Hvordan fikk du til det? Du må ha sju – nei, vi må ha…*
L66, Anders:	*Vi må viske ut*
L67, Dina:	*Hæ!?? Hvordan skal vi skrive regnestykket til tre og en halv flaske?*
L68, Anders:	*Vi må – skal vi se…*
L69, Dina:	*Det blir jo 3,5, da*
L70, Anders:	*Ja, det blir jo tre og en halv det for seks er jo tre hele*
L71, Dina:	*For det går jo*

L72, Bjørn: *Se her. Sju ganger 0,5*

L73, Dina: *Det ble mer rett*

L74, Anders: *Ja, der var Bjørn smart.*

Den utviklede argumentasjonen som ABD-gruppa presenterer, er svært nær et gyldig bevis, og det kommer i hovedsak fra at påstanden 7 halve er 3,5 har fått forbedret argumentasjon og at argumentasjonen i stor grad er skriftlig. Aksepterte sannheter som brukes er addisjon, multiplikasjon og den distributive lov. I tillegg benytter de tallsymbolet 0,5 som representasjon for halv når de uttrykker seg skriftlig. Det eneste som nå mangler for å få argumentasjonen til å bli et bevis, er å tydelig uttrykke at en halv er det samme som 0,5. Elevene argumenterer også bedre (muntlig) for samme påstand ved å bygge på at en halv + en halv = en hel. Med en påfølgende påstand om at 6 halve da blir 3 hele, følger det logisk at 7 halve blir de 3 hele og den siste halve, altså 3 hele og en halv. Ettersom det ikke er selvforklarende at 2 halve = 1 hel gir at 6 halve blir 3 hele, burde denne overgangen forklares. En måte å gjøre det på ville være å ta med at 4 halve blir 2 hele for slik å vise at det man gjør er å telle to og to.

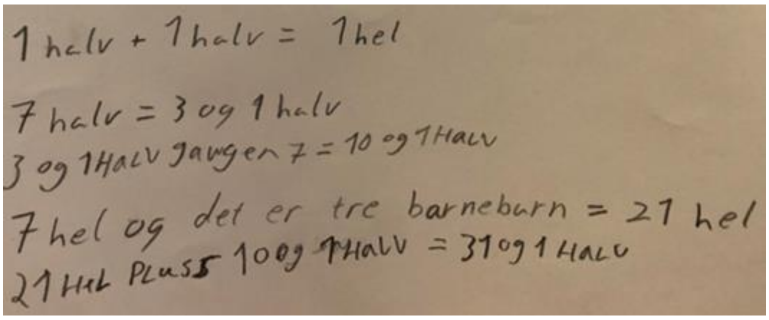
ABD-gruppas opprinnelige argumentasjon var i sin helhet muntlig. I den utviklede versjonen har de skriftlige representasjoner som figurer og tekst i tillegg til tallsymboler og regneoperatorer. Det er en svakhet ved argumentasjonen at det mangler tekst som forklarer hva tallene står for, og elevene bruker heller ikke «flasker» eller «barn» muntlig. Dette tyder på at de har forlatt den praktiske situasjonen og gått over til ren matematikk. Dette kan være effektivt, men det kan også føre til at man mister kontroll på det man holder på med. Det vitner denne gruppas arbeid om, for da de utformet den skriftlige argumentasjonen, kom de først fram til 24,5 som svar. Det viste seg at de hadde glemt å utføre 3,5 X 3, og denne feilen retter de opp ved å koble matematikken til den praktiske situasjonen igjen:

L93, Bjørn: *Nei! Åh – vi glemte å gange dette med tre*

L94, Dina: *Ja, for vi må gange det med tre, ja, for vi har bare funnet til en person her nå*

L95, Bjørn: *Mens det* (peker på 21) *er tre personer og det* (peker på 3,5) *er èn*

Elevene gjør noen tilføyelser etter at de har fullført utregningen. I tillegg til en figur som illusterer det endelige svaret, skriftliggjøres argumenter og forklaringer som de allerede har gjort muntlig. Viktige momenter som kommer med, er sammenhengen mellom halve og hele og at det kobles tekst til tallene, som vist i figur 4.8.



Figur 4.8 ABD-gruppas tilføyelser til sin skriftlige argumentasjon

Som en konklusjon i forhold til ABD-gruppas utviklede argumentasjon, vil jeg påstå at elevene nå presenterer en langt bedre argumentasjon enn den de opprinnelig hadde. På to ulike måter har de argumentert for at 7 halve er 3,5 og det er lite som mangler for at sammenhengen kan sies å være bevist. Selv om noen argumenter kommer som en opplisting til slutt, har argumentasjonen en tydelig deduktiv struktur hvor hver ny påstand bygger på noe som er vist tidligere. Noe manglende tekst gjør imidlertid at det er rom for misforståelser. Med hensyn til representasjonsmåten, har de gjort en overgang fra muntlig til skriftlig argumentasjon (med støtte fra det muntlige). Min totale vurdering er at også ABD-gruppa har en argumentasjon som grenser til å være et bevis. På grunn av manglende avklaring av at en halv er 0,5, er påstanden 7 halve er 3,5 fortsatt ikke bevist, selv om den utviklede argumentasjonen øker sannsynligheten for at påstanden stemmer.

4.1.3 Elevenes rekonstruerte argumentasjon

Til tross for at byggeoppgaven med rekonstruksjon tidsmessig kommer senere enn det jeg betegner som elevenes utviklede argumentasjon, plasserer den rekonstruerte argumentasjonen seg på et lavere argumentasjonsnivå. Når samme oppdrag utføres i fellesskap, ender imidlertid argumentasjonen på et nivå over bevisgrensen. Jeg vil nå vise eksempler fra datamaterialet som støtter denne påstanden.

C) Sett bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening.

Prøv å se om det er noe som mangler for at det skal bli en overbevisende forklaring. Ville dere skrevet noe mer? Lag lapper med det dere mener mangler og plasser dem sammen med de andre. Dere kan både skrive, regne og tegne. For å forklare noe ekstra godt kan det være lurt å ha både regnestykker, tekst og figurer (som viser det samme).

Figur 4.9 Skriftlig instruks på oppgave C

Det tredje oppdraget som elevene får, er oppgave C som går ut på å plassere lapper i rekkefølge for å lage en argumentasjon (se figur 4.9). Elevene jobber først i gruppene, og deretter oppsummeres arbeidet gjennom en klassesamtale hvor en felles argumentasjon bygges. Elevene får både muntlig og skriftlig beskjed om hva som skal gjøres og hva som er forventet av dem.

Elevene er tydelig spente på hva som står på lappene, noe som viser seg ved at de flytter på seg for å se bedre og alle gjerne vil lese lappene først. Begge gruppene leter først fram svaret og fastslår at det må være nederst i argumentasjonsrekka.

L11, Frida: *Dette er sist i alle fall, for det er jo svaret*

L5, Dina: *Det her er svaret, så den kan vi ha nederst*

Etter at alle lapper er plassert, blir det visuelle resultatet deduktivt, men selve plasseringen foregikk ikke helt på samme måte, noe som illustreres av figur 4.10. CFG-gruppa prøver å legge lappene i rekkefølge, så når de identifiserer svaret først, legger de denne lappen til side. De blir enige om hva som skal være øverst og starter med å legge denne. Så plasserer de det de mener er det neste i rekka, men finner senere en lapp som må foran denne. De to siste ferdigskrevne lappene plasseres i samme rekkefølge som de blir liggende. Først på dette tidspunktet, forholder elevene seg til de blanke lappene, og de er usikre på hva de skal bruke dem til, for Gunn vifter litt med lappene, ser tvilende ut og spør den andre gruppa: Brukte dere de blanke? På lappene blir det til slutt stående fakta fra oppgaveteksten, noe elevene grunngir: Ja, sånn at det skulle bli litt mer forklarende.

Produktet	Prosessen
Det var tre barn	7
Hvert barn lagde 7 hele flasker med saft og 7 halve	6
3X7=21	1
7 halve flasker er 3,5	3
3,5+3,5+3,5=10,5	2
21+10,5=31,5	4
Det ble laget 31,5 flasker saft	5

Figur 4.10 CFG-gruppa: Argumentasjonen som produkt og prosess i oppgave C

Også ABD-gruppa venter med de blanke lappene (figur 4.10). De legger lappene med tekst/symboler slik at alle kan se og lese, mens de blanke legges til side. Elevene plasserer svaret først og deretter regnestykket som gir svaret. Deretter følger utregningen med hele flasker, påstanden om halve flasker og utregningen med disse flaskene. Denne rekkefølgen består, men etter at en blank lapp legges øverst (forklaring på hva tallet 7 står for i det påfølgende regnestykket), plasseres en annen blank lapp under regnestykket med forklaring på hva 3-tallet i det samme regnestykket er. Elevene gjør (små) tilføyelser på alle lappene; på de tre første tegnes en pil med retning nedover, mens det på de to siste settes to streker under tallet 31,5.

Produktet	Prosessen
Hele flasker (pil til 7-tallet)	6
3X7=21	3
3-tallet i 3X7 er hvor mange barn det er	7
7 halve flasker er 3,5	4
3,5+3,5+3,5=10,5	5
21+10,5=31,5	2
Det ble laget 31,5 flasker saft	1

Figur 4.11 ABD-gruppa: Argumentasjonen som produkt og prosess i oppgave C

Begge gruppene kom fram til samme rekkefølge på lappene og de gjorde også de samme tilføyelsene (forklaring av hva tallene 3 og 7 står for) ved bruk av de blanke lappene. Den rekonstruerte argumentasjonen samsvarer med løsningsstrategi 3 (se vedlegg 7). Uttrykksmåten er skriftlig, og både det verbale og symbolske er forståelig og hensiktsmessig. Argumentasjonen har i tillegg tydelig deduktiv struktur, så beviskriteriene 2) argumentasjonsmåte og 3) representasjonsmåte, er oppfylt. Imidlertid ser vi at det er ingen argumentasjon med forankring i aksepterte sannheter for påstanden 7 halve flasker er 3,5. Dette gjør at argumentasjonen ikke kan godkjennes som bevis og må dermed betegnes som en redegjørelse, som vist i figur 4.12 (rekonstruert, oppgave C).

Figur 4.12 Nivå for argumentasjon på oppgave C

Analysen av elevenes opprinnelige og utviklede argumentasjon viste at begge gruppene kunne forbedre den skriftlige uttrykksmåten (se kapittel 2.1.2). I byggeoppgaven, er det heller den muntlige argumentasjonen som trenger utvikling. Når elevene plasserer lappene, bruker de *den* og *dette* for å omtale de ulike påstandene, noe som gjør at den muntlige argumentasjonen alene, må kategoriseres som ingen argumentasjon. Som de to utdragene fra transkripsjonene viser, er det helt umulig å følge tankerekka kun ut fra den muntlige kommunikasjonen (se figur 4.13). Elevene supplerte riktignok utsagnene sine med å holde fram lappene for hverandre og peke på påstanden de omtalte, men likevel ville det styrket argumentasjonen om de hadde uttalt det som sto på lappene de skulle plassere. En annet moment som blir tydelig gjennom dialogene, er bruken av begrepene og så, først, sist, nedenfor, ovenfor. Dette vitner om at elevene er konsentrert om rekkefølgen.

Muntlig argumentasjon hos gruppe CFG		Muntlig argumentasjon hos gruppe ABD	
Frida:	*Der er jo det regnestykket vi akkurat gjorde*	Dina:	*Det her er svaret, så den kan vi ha nederst*
Frida:	*Dette er sist i alle fall, for det er jo svaret*	Anders:	*Kommer denne oppå?*
Gunn:	*Ja*	Dina:	*Nei, den der må jo være rett ovenfor svaret.*
Frida:	*Og den der er kanskje aller først, eller sånn – sju halve flasker*	Dina:	*Den du tok nettopp nå, det regnestykket som skal rett ovenfor svaret.*
Gunn:	*Ja*	Anders:	*Den skal vi ha der, det var den de hadde de også, he-he*
Frida:	*Eller kanskje den der er først?*		
Frida:	*Og så er det den*	Dina:	*Og så den der*
Gunn:	*Nei! Først må vi få svar på den*	Anders:	*Ja*
Frida:	*Ja, jeg mener den*	Bjørn:	*Bør ikke den være over sånn fordi den viser hvor mange flasker?*
Frida:	*og så*		
Gunn:	*Den kanskje? Nei. Jo, den*		
Frida:	*Sju halve flasker… Nei, den må før for sju halve flasker er 3,5*	Dina:	*Ja, men det bør stå at det er sju hele flasker*
Gunn:	*Ja*	Bjørn:	*Ja*
Frida:	*Og så den*	Dina:	*Vi må skrive på det*
Gunn:	*Og så den*	Anders:	*Sju halve flasker er lik tre og en halv*
		Bjørn:	*Hva om jeg legger denne slik?*

Figur 4.13 Utdrag fra elevenes samtale i byggeoppgaven

Oppsummeringa foregikk både skriftlig og muntlig, og matrisen i figur 4.14, viser den felles argumentasjonen som klassen og lærer sa seg fornøyd med. En illustrasjon ble laget for å støtte forklaringen om at når to halve slås sammen, blir det en hel og om vi gjør det tre ganger har vi fått tre hele og brukt 6 halve. Det er da bare en halv igjen.

Argumentasjonen kvalifiserer som bevis, for ved hjelp av figuren lages det et generisk bevis for påstanden 7 halve flasker er 3,5 hele. De andre påstandene bygges også på aksepterte sannheter som addisjon og multiplikasjon. Argumentasjonen er deduktiv, og uttrykksformen er hensiktsmessig; figuren fungerer for å vise situasjonen og forklare hvorfor påstanden er sann. Den får dessuten støtte av muntlig språk i form av en dialog mellom lærer og Dina.

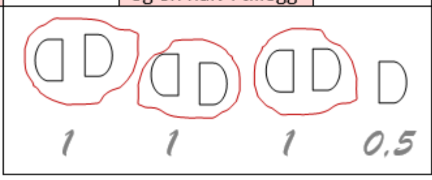
L66, Dina: *Jo, men en halv pluss en halv er en hel. Og hvis du legger sammen – sånn at du – hvis du prøver å legge sammen så mange av flaskene som går sammen, så får du til at du har tre hele flasker og en halv flaske.*

L67, Lærer: *Så hvis du legger sammen de halvflaskene her …?* (tegner sju halvsirkler på en blank lapp)

L68, Dina: *Du legger sammen seks av flaskene og lar den siste være, for den kan du ikke legge sammen med noe.*

L69, Lærer: *Ok, så dette blir en hel flaske og så gjør du det samme igjen og får til to flasker og tre flasker og så blir det en halv til overs* (fullfører skissen ved å ringe rundt to og to halvsirkler).

Utgangs-punkt	**Akseptert sannhet**	**Delsvar**	**Akseptert sannhet**	**Delsvar**	**Akseptert sannhet**	**Delsvar**	**Akseptert sannhet**	**Løsning**
3 barn 7 hele flasker 7 halve flasker	Gjentatt addisjon = multiplikasjon	21 hele flasker	Halv + halv = hel	7 halve flasker er 3,5 hele	Addisjon	10,5 hele	Addisjon	31,5 hele flasker til sammen
	Begrunnelse $3 \cdot 7 = 21$	**Nytt utgangs-punkt** 3 barn 7 halve flasker (21 hele)	**Begrunnelse 1** Halv+halv=1 hel Halv+halv=1 hel Halv+halv=1 hel 1 halv til overs **Begrunnelse 2** 3 hele av 6 halve og en halv i tillegg	**Nytt utgangs-punkt** 3 barn 3,5 hele (21 hele)	**Begrunnelse** $3{,}5 + 3{,}5 + 3{,}5 = 10{,}5$	**Nytt utgangs-punkt** 21 hele 10,5 hele	**Begrunnelse** $21 + 10.5 = 31{,}5$	



Figur 4.14 Gruppenes felles argumentasjon med utgangspunkt i byggeoppgaven

4.1.4 Elevenes individuelle argumentasjon

Analyse av elevbesvarelsene viser at fire av elevene fortsatt har mangelfull argumentasjon for at 7 halve blir 3,5 hele, men Bjørn og Dina klarer å forankre også denne påstanden i aksepterte sannheter. Etter en kort redegjørelse for aktiviteten, vil jeg vise at disse elevene klarte å lage en argumentasjon som kan klassifiseres som bevis.

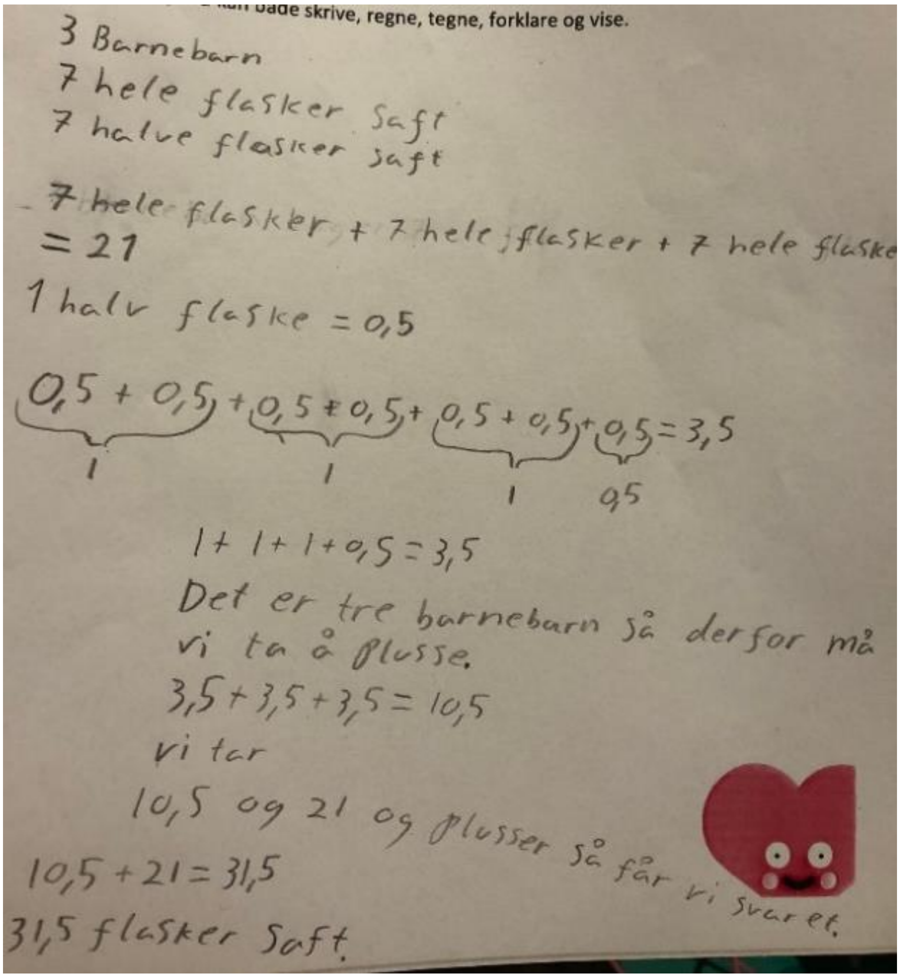
Elevene besvarte problemoppgaven «Hvor mye saft?» individuelt etter at de i grupper hadde samarbeidet om å løse oppgaven og argumentere for at svaret var riktig (A), vurdere svaret fra en annen gruppe (B) og bygge argumentasjonsrekka ved hjelp av lapper med og uten informasjon på (C). Elevene ble forberedt på at all argumentasjon måtte skrives ned på svararket og at de ikke kunne samarbeide. De fikk heller ikke anledning til å se på sine tidligere løsninger. Igjen ble de minnet på at det var viktig å ta med detaljer og gå grundig til verks for å lage en best mulig argumentasjon, og det blir enighet om at argumentasjonen må kunne overbevise også yngre elever.

L6, Lærer:	*Og da står det også: Vær så detaljert at du overbeviser alle de andre om at løsningen din er rett.*
L7, Gunn:	*Skal du liksom overbevise en 9-åring da?*
L8, Lærer:	*Ja! Kanskje det, kanskje vi kan tenke det. Ja – overbevis en 9-åring. Ikke ta så mye som selvsagtheter.*

I de individuelle løsningene bruker alle elevene løsningsstrategi 3, selv om flere av elevene velger å uttrykke multiplikasjonen som gjentatt addisjon:

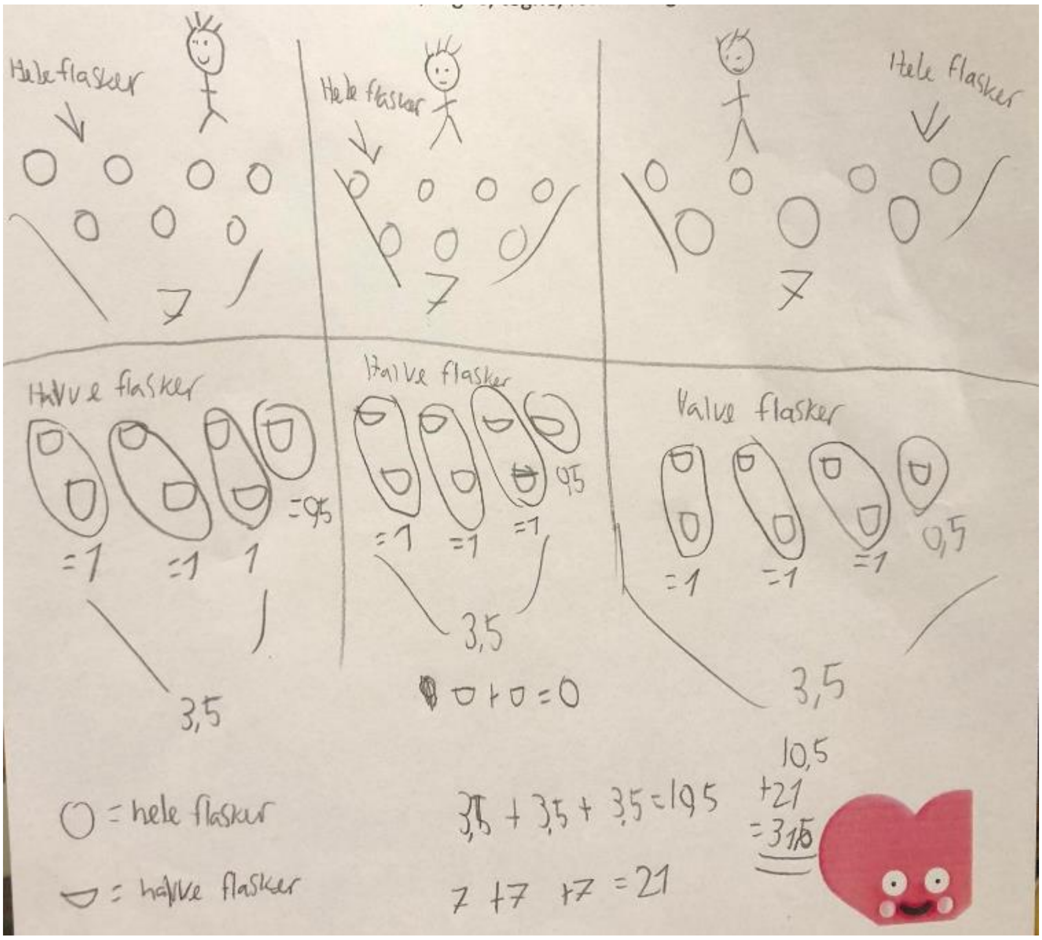
$$3(7hele + 7halve) = 3(7 \cdot 1 + 7 \cdot 0{,}5) = 3(7 + 3{,}5) = \underbrace{3 \cdot 7}_{(7+7+7)} + \underbrace{3 \cdot 3{,}5}_{(3{,}5+3{,}5+3{,}5)} = 21 + 10{,}5 = 31{,}5\ hele\ flasker$$

Ettersom forskningsspørsmålet mitt går ut på å finne aktivitetens læringspotensial, velger jeg å trekke fram de individuelle besvarelsene som viste en argumentasjon som passerte bevisgrensen. Bjørn lager et bevis med deduktiv struktur, hvor et avgjørende moment er at en halv defineres som 0,5, mens Dina lager et generisk bevis som består av en kombinasjon av figurer, tekst og symboler. Jeg presenterer først Bjørns besvarelse (figur 4.15), og deretter Dinas (figur 4.16).



Figur 4.15 Bjørns deduksjonsbevis

Bjørn definerer en halv som desimaltallet 0,5 og det leder til at sju halve blir 7 · 0,5 (eller 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 som Bjørn uttrykker det). De øvrige påstandene sikres gjennom kobling til addisjon og gjentatt addisjon. Hva som er utgangspunktet og de kjente opplysningene presenteres tydelig i starten, og videre har argumentasjonen en trinnvis oppbygging og hver ny påstand springer ut fra noe som er en sannhet eller som er vist før. Kommentarene «så derfor» og «så får vi» tyder også på at det er et utgangspunkt som styrer hva som følger etterpå, noe som gjør den deduktive strukturen tydelig. Bjørn uttrykker seg i hovedsak verbalt og symbolsk, men bruken av klammer, bidrar til å kommunisere tenkemåten. Ettersom kravene til både aksepterte sannheter, argumentasjonsmåte og uttrykksform er oppfylt, vil argumentasjonen kvalifisere som et bevis. Det samme gjelder Dinas besvarelse, selv om hun lager et generisk bevis.



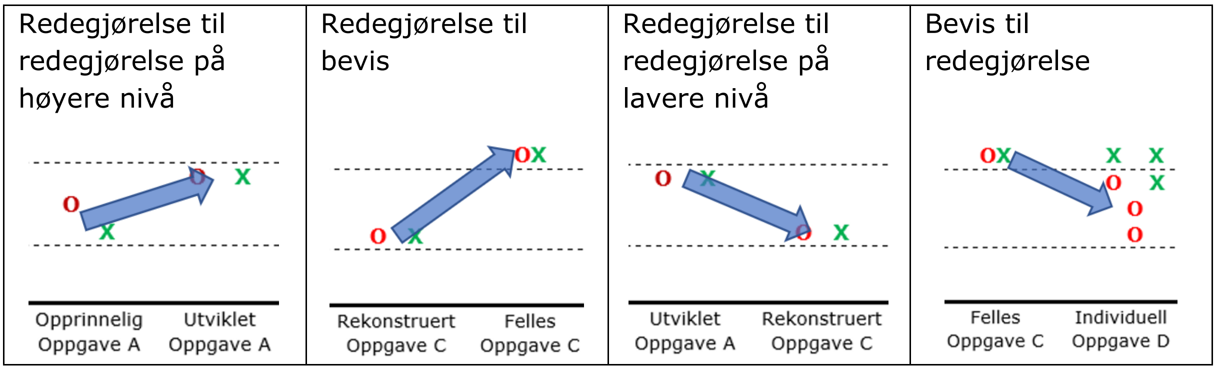
Figur 4.16 Dinas generiske bevis

Dinas argumentasjon bygger på at to halve er en hel, og dette viser figuren hennes godt. At en halv defineres som 0,5, markeres også i løsningen. Andre aksepterte sannheter som benyttes, er addisjon og gjentatt addisjon. Argumentasjonen har en ryddighet og kommuniserer situasjonen og utregninger godt. Utgangspunktet tegnes, og opptelling/addisjon indikeres ved hjelp av streker/klammer. Først viser figuren hvor mange hele og halve hvert av barna har, og på samme nivå gjøres de halve om til hele. Deretter legges disse antallene sammen hver for seg og til slutt viser en addisjon hvor mye det blir totalt. Figurene som brukes er generelle (sirkler istedenfor flasker), og de fungerer forklarende og er en viktig del av argumentasjonen. Tegningene kombineres med både verbalt og symbolsk språk. Noen av tallsymbolene mangler benevning, men den oversiktlige føringen gjør det mulig å likevel forstå hva som beregnes.

Ut fra analysen av Bjørns og Dinas individuelle argumentasjon, konkluderer jeg med at begge løsninger inneholder det som må være til stede for at en argumentasjon skal kvalifisere som bevis. For det første, blir aksepterte sannheter og opplysninger definert eller tydeliggjort på annen måte, og det går klart fram hvordan disse er koblet til påstandene. For det andre, er argumentasjonsmåten deduktiv, både med hensyn til hvordan argumentet for hver enkelt påstand bygges, men også med hensyn til det totale matematiske resonnementet. For det tredje, er uttrykksformen hensiktsmessig og forståelig, og overganger mellom representasjoner gjøres tydelig. Med utgangspunkt i en konkret oppgave med ett bestemt svar, bevissituasjonen singel-case, har elevene utformet gyldige matematiske bevis.

4.1.5 Oppsummering av funn: Elevenes argumentasjon

Analysen hadde som formål å identifisere elevenes argumentasjon i bevissituasjonen singel-case, og resultatet ble presentert i figur 4.1. Analysen viser, og vi ser av diagrammene, at det skjer endringer i elevenes argumentasjon. Endringene er av fire varianter med hensyn til argumentasjonsnivå, slik som figur 4.17 viser.



Figur 4.17 Endringer i elevenes argumentasjon i bevissituasjonen singel-case

Andre funn fra analysen er at argumentasjon over bevisgrensen kunne identifiseres i felles løsning av rekonstruksjonen og i to av de individuelle besvarelsene, mens et lavere argumentasjonsnivå kunne identifiseres etter overgangen fra deloppgave A til C og fra C til D. Analysen viste også at argumentasjon for påstanden *7 halve er 3,5*, var manglende eller mangelfull i elevenes redegjørelser, mens andre påstander var tilfredsstillende koblet til aksepterte sannheter. I drøftingsdelen vil jeg diskutere disse funnene, selv om noen av dem vil få noe forklaring gjennom analysens andre del, som jeg nå presenterer.

4.2 Faktorer som bidrar til endringer i argumentasjonen

For å få innblikk i hva som kan påvirke utviklingen av elevenes argumentasjon, har jeg analysert datamaterialet med en induktiv tilnærming. Funn fra forrige analyse (kapittel 4.1.5), informerte om hvilke endringer som skjer og når de skjer, og det er disse sekvensene av datamaterialet som jeg har studert for å identifisere hva som kan tenkes å være påvirkende faktorer til endringer i elevenes argumentasjon.

En identifikasjon av faktorer som bidrar til endringer i argumentasjonen, vil samtidig gi en indikasjon på oppgavens læringspotensial med hensyn til kompetanse i resonnering og argumentasjon. En forbedring tyder på at elevene har tatt i bruk «noe» de i utgangspunktet ikke benyttet selvstendig. Fra et sosiokulturelt perspektiv, kan vi forstå det som at elevene har beveget seg inn i den proksimale utviklingssonen hvor de anvender fellesskapets kunnskap, både med og uten støtte, noe som er tegn på læring. Hvilken kunnskap det er, hva som bidrar til at den blir gjort synlig for elevene, hva som gjør at elevene velger å ta denne kunnskapen i bruk og hva som gjør at de klarer å ta del i den nye kunnskapen, blir da høyst interessant ettersom det vil informere om læringen som skjer aktiviteten, og dermed kan svare på hvilket læringspotensial oppgaven «Hvor mye saft?» har med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon.

Mine funn knytter seg til kategoriene *oppgaven*, *sosialt*, *ulike argumentasjoner* og *uttrykksform* (se kapittel 3.3.3), og jeg fant følgende faktorer av betydning for elevenes argumentasjon:

1) Oppgavens formuleringer og tilrettelegging av bevisaktiviteten
2) Medhjelpere til, og mottakere av, argumentasjonen
3) Tilgang til og bruk av andre argumentasjoner enn sin egen
4) Krav om og muligheter til å bruke ulike representasjoner uttrykksformer

Jeg vil nå redegjøre for disse resultatene med eksempler fra datamaterialet mitt. Først viser jeg eksempler på hvordan skriftlige og muntlige instrukser og krav spiller en rolle for hvordan elevene utvikler argumentasjonen sin. Så går jeg nærmere inn på de sosiale aspektene ved aktiviteten, og viser betydningen av hvem argumentasjonen rettes mot og hvilken innstilling mottakerne av argumentasjonen har. At samhandling kan gagne argumentasjonen, men ikke trenger å gjøre det, illustreres også. Deretter presenterer jeg funn som tyder på at elevenes argumentasjon blir påvirket av å få innblikk i andre måter å argumentere på. Jeg viser til slutt hvordan nivået på elevenes argumentasjon kan avhenge av de representasjoner de velger og har mulighet til å benytte.

4.2.1 Oppgaven

Ordlyden i oppgaveinstruksen har stor påvirkning på elevenes argumentasjon. Et eksempel på hvordan oppgaveteksten brukes aktivt finner vi etter at elevene på ABD-gruppa hadde diskutert seg fram til svaret uten å trenge å skrive noe.

A) Løs oppgaven.

Presenter løsningen så detaljert at det vil overbevise alle andre om at løsningen din er riktig. Dere kan både skrive, regne, tegne, forklare og vise.

Figur 4.18 Skriftlig instruks på oppgave A

Da elevene gikk tilbake til oppgavens instruks, og repeterte hva som sto der, jobbet de imidlertid videre. Ordvalget til Dina: *Vi må huske å presentere løsningen med detaljer, for vi vil overbevise*, er nesten en kopi av det som står i oppgaven (figur 4.18), noe som gjør det sannsynlig at instruksen bidrar til at elevene gjør argumentasjonen mer detaljert og skriftlig. Instruksen kan også gjøre at elevene inspiserer og vurderer svaret sitt, for da Gunn leste gjennom den etter at gruppa hadde funnet svaret, ble følgende spørsmål stilt: *Eh, tenker vi at vi har gjort det sånn?*

Å lage en fullstendig argumentasjon kan ta tid og innebære en god del arbeid. Dette kan være grunner til at elever har mangler ved argumentasjonen sin. Som følgende dialog viser, kan en forsikring om at elevene kan bruke den tiden de trenger, være nok til at argumentasjonen videreutvikles:

L44, Gunn:	*Men jeg hadde lyst til å tegne sju flasker, men hun orket ikke å tegne det.*
L45, Frida:	*Det tar kanskje litt tid, da, eller?*
L46, Gunn:	*Vi skjønner det sånn også.*

L47, Lærer:	*Ok, men du tenker at en forbedring av dette* [argumentasjonen] *ville vært å tegne sju flasker?*
L48, Gunn:	*Ja*
L49, Lærer:	*Ok. Nå har dere tid, da. Så hvis det er noen forbedringer – dere har tid til å gjøre noen forbedringer. Hvis det er noe dere vil forandre eller ta med i tillegg, så har dere tid til å gjøre det.*

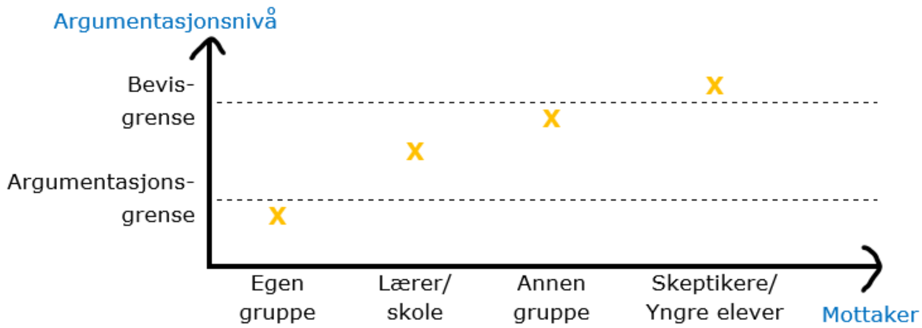
Innspillet fra lærer ser ut til å påvirke elevene slik at de lager en ny og mer detaljert tegning enn den de hadde i utgangspunktet, og tegningen er hovedgrunnen til at de hever nivået på sin utviklede argumentasjon (se analyse i kapittel 4.1.2). I tillegg til å få tid til å gjøre argumentasjonen bedre, må også elevene være villige til å gjøre det. I L44 i transkripsjonen over, antyder Gunn at grunnen til at de ikke hadde tegnet allerede, var at Frida ikke orket det. Også ABD-gruppa er litt motvillige til å bruke mye tid og krefter på arbeidet. Utdraget nedenfor viser eksempler på responsen lærer fikk etter antydning om at elevene burde forbedre argumentasjonen sin:

Dina:	*Vi kunne gjort det mer detaljert, men hvis vi forklarer [muntlig] detaljert, så blir det på en måte bra detaljert.*
Anders:	*Vi <u>har</u> tegnet!*
Dina:	*Skriv … skriv! – hehe – det er sikkert en hel bok med det som vi har sagt*

Det er ikke før lærer er konkret på hva de må gjøre for å få en bedre argumentasjon; *Hva er det av det dere har sagt nå som dere gjerne ville fått skrevet også?*, at elevene jobber videre. Analysen av ABD-gruppas opprinnelige argumentasjon viste at påstanden *7 halve er 3,5 hele* ble tatt for å være en sannhet, men når de nå skal ha på plass flere detaljer, er det første de tar med: *…siden en halv pluss en halv blir jo en hel…*. Uten krav fra oppgavetekst og/eller lærer om skriftlige detaljer og overbevisende argumentasjon, samt tid nok til å videreutvikle argumentasjonen, ville nivået på det endelige resultatet blitt lavere ettersom sammenhengen mellom hele og halve da ville manglet.

4.2.2 Medspillere og mottakere, venner og skeptikere

Elevenes behov for å argumentere, og dermed argumentasjonens kvalitet, varierer ut fra hvem de anser som mottakere for argumentasjonen. Som jeg viste i kapittel 4.2.1, forbedret elevene argumentasjonen for å møte kravene i oppgaven, og ytterligere endringer kom etter oppfordringer fra lærer. Jeg har identifisert sammenhenger mellom argumentasjonsnivå og mottakere i mitt datamateriale, og disse går fram av figur 4.19. Jeg finner det viktig å påpeke at selv om jeg trekker fram disse sammenhengene, er det ikke alltid slik som figuren viser, og også mitt datamateriale inneholder eksempler på avvik. Redegjørelsen og analysen som følger, vil likevel vise at det er et grunnlag for inndelingen.



Figur 4.19 Sammenheng mellom argumentasjonens mottaker og nivå.

Det laveste nivået er argumentasjon som rettes mot medlemmene på egen gruppe og hvor formålet er å finne fram til en løsning. En stor del av argumentasjonen er muntlig, og påstander begrunnes sjelden med mindre det er behov for en utregning for å komme videre, eller at det er uenighet om påstanden. Den første ordvekslingen som foregikk på CFG-gruppa viser at påstander anses som sannheter:

L4, Frida: *Hva er halvparten av sju?*

L5, Gunn: *Tre og en halv*

L6, Frida: *ok*

Gunn lurer ikke på hvorfor Frida vil vite hva halvparten av sju er, og Frida ber ikke om forklaring på hvordan Gunn kan vite at det er 3,5. I resten av argumentasjonen brukes 3,5 som et resultat de er sikre på.

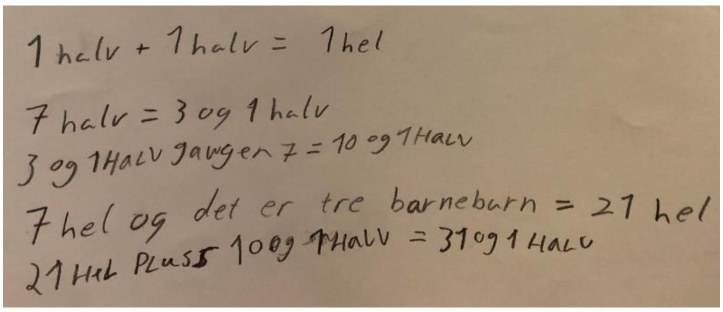
I sin opprinnelige argumentasjon har ABD-gruppas svar (*31 flasker og en halv*) ingen argumentasjon som er tilgjengelig for andre enn dem selv. Det kommer av at kun muntlig språk ble benyttet, noe de selv virker ganske stolt over å ha fått til:

L33, Dina: *Hehe, da har vi funnet ut svaret da!*

L34, Anders: *Uten å ha skrevet en skit*

Det neste nivået har lærer eller skolen som mottaker, og formålet er å gjøre det som oppgaven og lærer forventer. Skriftlige og muntlige instrukser stiller litt høyere krav til argumentasjonen enn det elevene trengte for å stole på at svaret de kom fram til var riktig. Elevene er opptatt av å gjøre det de må for å få gjennomføringen godkjent. Selv om ABD-gruppa var fornøyd med å finne svaret uten å skrive, er skrift likevel et naturlig valg når de skal presentere løsningen med detaljer for å overbevise. Begge gruppene forbedrer argumentasjonen sin (som vist i kapittel 4.1), men det er tydelig at elevene er klar over at det finnes forbedringspotensial. Et eksempel er når Gunn uttaler: *Vi skjønner det sånn også* (situasjonen er analysert i 4.2.1), noe som indikerer at det finnes andre og kanskje bedre måter å argumentere på. En tilsvarende kommentar fra ABD-gruppa er: *Ja, det får funke*.

Et tredje nivå kommer til syne når elevene skal bytte løsning; nå skal argumentasjonen være gjenstand for en kritisk gjennomgang og styrker og svakheter skal kommenteres, og formålet blir å forklare på en forståelig måte. Elevenes reaksjon når de får vite at de skal gi fra seg løsningsarket til den andre gruppa, gir signal om at de ikke anser det de har av argumentasjon på dette tidspunktet til å være det beste de kan få til: Dina utbryter *Oi, da!* og følger opp med å instruere den andre gruppa om rekkefølgen i argumentasjonen. I tillegg lager gruppa en liste med forklaringer til den argumentasjonen som allerede er skrevet ned (figur 4.20).



Figur 4.20 Tilføyelser i argumentasjonen (ABD-gruppa)

Elevene på CFG-gruppa, utbryter ganske misfornøyd til lærer: *Det … kunne du sagt før*. Elevene går umiddelbart i gang med å justere figurer og løsninger. Etter en stund godkjenner de svaret, og det er tydelig at de har mottakerne for argumentasjonen i tankene: *Jo, de skjønner det*.

Det siste nivået innebærer å løfte argumentasjonen til over bevisgrensen, og det ser ut til at å møte en skeptiker eller ha en autentisk spørrende mottaker kan være nyttig for å få dette til. Argumentasjonen har nå som formål å gjøre at alle påstander får en systematisk og velbegrunnet forankring og utregning, altså at det finnes svar på alle tenkelige spørsmål. Et eksempel på dette er når mottakeren er en ekte skeptiker lik Dina som ikke skjønner det som blir gjort, og et annet eksempel er når mottakeren er en agert skeptiker lik lærer som stiller seg uforstående til at 7 halve er 3,5 hele.

Dina blir en ekte skeptiker i arbeidet med oppgave A: Dina ser på at Bjørn tegner, og prøver å henge med på det som gjøres. Tegningen er av en hel flaske og en halv flaske. Bjørn skriver 31 på den hele, og da foreslår Dina at det skal stå 21 på den halve (som kan bety antall halve flasker til alle barna). Bjørn sier og skriver imidlertid 1 (antall halve flasker i tillegg til de hele når alt er summert). Figuren relaterer seg åpenbart til ulikt sted i argumentasjonen for de to elevene, og Dina utbryter *Hæ!?.* Bjørn gir da med en gang respons ved å forklare at tegningen er en illustrasjon av hva det endelige svaret er og peker på figuren for å forklare. Etter en liten stund svarer Dina: *Åja, nå skjønte jeg det*. Uten avbrytelsen fra Dina, ville nok tegningen stått uforklart og den kunne svekket argumentasjonen mer enn styrket den.

Lærer agerer skeptiker i klassesamtalen: Felles bygging av argumentasjon (oppgave C) foregikk gjennom en klassesamtale. Frida foreslår at neste lapp skal være *7 halve er 3,5*, og de andre er enige. For å kunne påstå dette, er det imidlertid nødvendig å vise overgangen fra halve til hele. Følgende utdrag fra klassesamtalen viser at læreren (som godt vet at påstanden stemmer), tar rollen som skeptiker og ikke gir seg før elevene har argumentert så godt for overgangen at argumentasjonen kan kvalifisere som et bevis.

L59, Frida: *Den lappen der det står at sju halve flasker er lik 3,5*

L60: Anders: *Hvis du finner den lappen da !*

L61, Lærer: *Sju halve flasker er lik 3,5? OK. Har dere også den som neste lapp?* (henvender seg til ABD-gruppa)

L62, Anders: *Ja, den passet bra der den*

L63, Lærer: *Men … – det tror jeg ikke noe på* (etterfølges av en litt lengre pause)

L64, Anders: *Hvordan kan du ikke gjøre det?* (tydelig overrasket og undrende)

L65, Lærer: *Nei, jeg tror jo ikke det! Sju halve flasker er 3 og en halv ??? … vi kan jo si at 79 flasker er 2,7 !!!* (engasjert og utfordrende)

L66, Dina: *Jo, men en halv pluss en halv er en hel. Og hvis du legger sammen – sånn at du - hvis du prøver å legge sammen så mange av flaskene som går sammen, så får du til at du har tre hele flasker og en halv flaske*

L67, Lærer: *Så hvis du legger sammen de halvflaskene her…* (tegner sju halvsirkler på en av de blanke lappene)

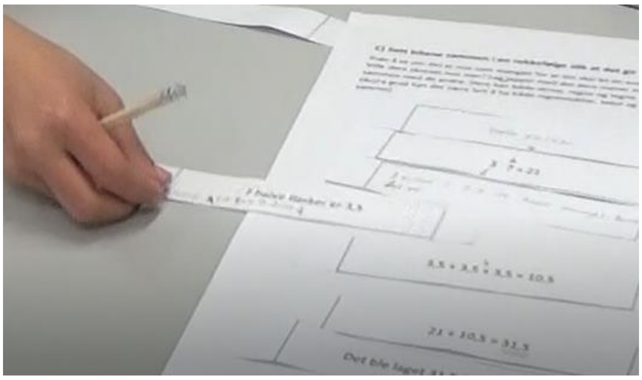
L68, Dina: *Du legger sammen seks av flaskene og lar den siste være – for den kan du ikke legge sammen med noe*

L69, Lærer: *Ok, så dette blir en hel flaske og så gjør du det samme igjen og får til to flasker og tre flasker og så blir det en halv til overs* (fullfører skissen ved å ringe rundt to og to halvsirkler).

L70, Lærer: *Hvis dere skulle hatt denne oppgaven her og vist det til en 9-åring kanskje? Tror dere denne* (peker på lappen med tegningen) *ville vært viktig å ha med da?*

L71, Flere: *Ja*

Lærer nekter å godta påstanden, og Anders sin respons på det – *Hvordan kan du IKKE tro det?* – viser at eleven fant det overraskende at det skulle være nødvendig med en forklaring av sammenhengen mellom de hele og de halve flaskene. Etter at lærer lager en lignende, men åpenbar usann påstand (*79 flasker er 2,7*), kommer en argumentasjon på plass. Mot slutten, antyder lærer at samme argumentasjon som nå ble avkrevd dem, må til for at den skal overbevise, noe som kan ses på som metakunnskap om bevis.



Figur 4.21 A tilføyer "fordi 2 halve = 1 hel" etter påstanden 7 halve flasker er 3,5

Parallelt med at dialogen mellom lærer og Dina finner sted, velger Anders å gjøre en tilføyelse på den ferdigbygde argumentasjonen. Han henter rolig en lapp, gjør noen endringer og sniker den tilbake på plass (figur 4.21). Tilføyelsen på lappen er: *Fordi 2 halve = 1 hel*. Handlingen tyder på at lærers skeptiske holdning og påfølgende klargjøring av at argumentasjon var nødvendig, førte til en forbedring av ABD-gruppas egen argumentasjon også.

Å etterspørre forklaringer eller spørre om andre ting, uansett om man er åpenbart skeptisk eller ikke, kan medføre at argumentasjon kommer på plass eller forbedres. Dina spør ved en anledning: *Hvordan skal vi skrive regnestykket til tre og en halv flaske?* Svaret som Bjørn gir; *7X0,5*, innebærer bytte til en representasjon av «en halv» som viser seg å egne seg bedre. Ved å stille spørsmålet, samlet hele gruppa seg om den nye representasjonen og fikk på plass en argumentasjon som nesten kunne kvalifisere som bevis (se analyse i 4.1.2). Ettersom det å peke på mangler kan bidra til forbedret argumentasjon, kan vi anta at å unnlate å gjøre det, fratar elevene muligheten til å løfte argumentasjonen til et høyere nivå. Kommentarene under, fra hver av gruppene, indikerer at «å legge godviljen til», altså å opptre som venn istedenfor skeptiker, er noe som forekommer.

Frida: *Eller jeg vet ikke jeg. De hadde jo forklart det under der.*

Anders: *Kunne vel kanskje hatt en liten skriveforklaring på den nedpå der, da? Eller, vi skjønte det da.*

4.2.3 Mangfold av argumentasjon

Når elevene møter en variasjon av måter å argumentere på både med hensyn til strategier og uttrykksform, bidrar dette til at egen argumentasjon utvikles. Mangfoldet legger til rette for sammenligninger, evalueringer og valg. Jeg vil først vise at det å speile sine egne svar og påstander mot noe/noen, har innvirkning på elevenes argumentasjon. Deretter presenterer og analyserer jeg en situasjon som vitner om at elevene benytter seg av ideer fra andre og at dette har positiv effekt på elevens egen argumentasjon.

Analysen av ABD-gruppas opprinnelige og utviklede argumentasjon viste stor variasjon (se kapittel 4.1.1 og 4.1.2); elevene var innom tre ulike løsningsstrategier, de gjorde bruk av ulike representasjoner og de benyttet ulike måter å uttrykke seg på. Mangfoldet gir muligheter til å etterprøve løsningen ved at de møter samsvarende eller motstridende svar, noe som ser ut til å ha forskjellig effekt på elevenes videre argumentasjon. Elevene arbeider med den skriftlige løsningen, og forventer nok å få 31,5 ettersom det var det svaret de fikk første gang de løste oppgaven. Både utsagn og kroppsspråk viser at elevene blir overrasket og at de tviler på svaret når resultatet ikke blir det samme, noe som dialogen nedenfor viser.

L85, Dina:	*Og det blir da 31…*
L86, Dina:	*Nei, det ble det ikke ! ?*
L87, Anders:	*Det ble 34 og en halv*
L88, Bjørn:	*Det er 21*
L89, Dina:	*21* (uttales nølende)
L90, Anders:	*24 og en halv*
L91, Dina:	24 og en halv, ja (etterfulgt av pause)
L92, Anders:	*sånn?* (pause, elevene stirrer på det som er skrevet)
L93, Bjørn:	*Nei! Åh! Vi glemte å gange dette (peker på 3,5) med tre*
L94, Dina:	*Ja, for vi må gange det med tre, ja, for vi har bare funnet ut til en person her nå* (peker på 3,5)
L95, Bjørn:	*Mens det* (peker på 21) *er tre personer og det* (peker på 3,5) *er én*

De motstridende svarene gjør at de ser nøye på det de har gjort, noe som kommer til syne gjennom de spørrende utsagnene, pausene og nølingen underveis. Elevene identifiserer hva som er feil, og gjennom en ivrig dialog presenterer de en forbedret argumentasjon (L93-95). Elevene generaliserer til en viss grad og det kommer bedre fram hva tallene står for og hvor de kommer fra.

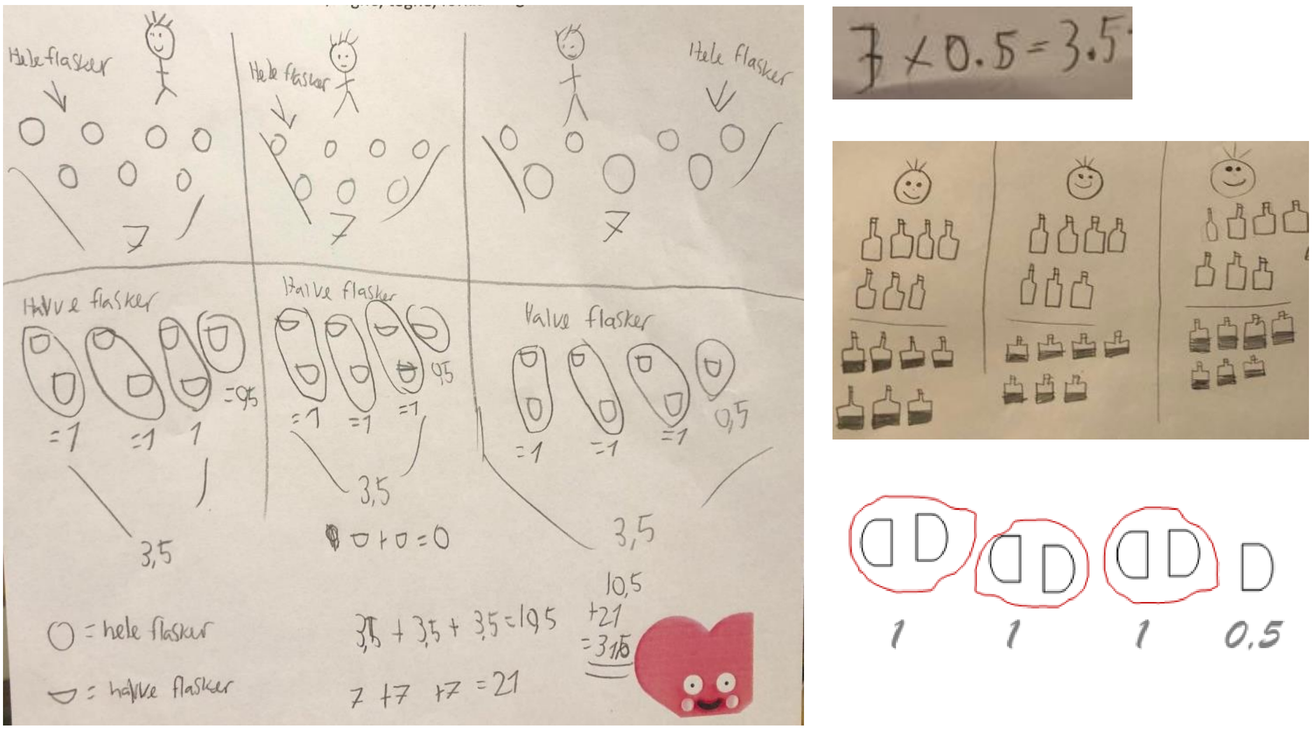
Ved at flere ulike argumentasjoner er tilgjengelig for elevene, vil de også ha muligheten til å møte kjente svar, påstander og resultater og dette benytter de for å validere løsningen sin. Da elevene på ABD-gruppa fant ut av feilen de hadde gjort, måtte de multiplisere 3,5 med tre (som omtalt i forrige avsnitt). Når elevene får 10,5 til svar, gjenkjenner de dette som et resultat fra sin opprinnelige argumentasjon og blir med det sikre på svaret sitt.

L100, Bjørn:	*ti og en halv*
L101, Anders:	*hehe, ti og en halv*
L102, Dina:	*hehe, ja, ti og en halv*
L103, Bjørn:	*Ja, det fant vi jo ut tidligere*

Elevene benytter altså opplysninger fra en annen argumentasjonsrekke for å validere den nye løsningen. En slik type argumentasjon vil imidlertid være ekstern argumentasjon og fører ikke til at det er sikkert at svaret er sant. I den aktuelle situasjonen, er det bare tilfeldigheter som gjør at 10,5 samsvarer. Da de løste oppgaven første gang (se analysen i 4.1.1), fulgte de en annen løsningsstrategi og 10,5 anga hvor mange hele flasker hvert av barna fikk, altså resultatet av 7 hele + 3,5 hele. Den utregningen de gjør nå, er imidlertid en annen; 10,5 er hvor mange helflasker alle barna får fra de halve, noe de finner ved å ta 3,5 hele · 3 (barn). Hvis antall halve flasker hadde vært 5, ville de to svarene vært henholdsvis 7+2,5=9,5 og 2,5·3=7,5.

En annen situasjon som viser effekten av å gjenkjenne svar, er når elevene arbeider med oppgave C der de skal rekonstruere en argumentasjon ved hjelp av lapper (med og uten innhold). De oppklipte bitene er en ny variasjon i måten å argumentere på, og det er tydelig at elevene sammenholder svarelementene med sine egne løsninger: Begge gruppene gjenkjenner svaret og plasserer det til slutt (se analyse av rekonstruert argumentasjon 4.1.3), og de kommer med uttrykk som *Der er jo det regnestykket vi akkurat gjorde* (Frida, L10). Det eneste elevene ser ut til å savne, er at det ikke går tydelig fram hvilke opplysninger argumentasjonen tar utgangspunkt i. Selv om påstanden 7 halve = 3,5 mangler forklaring, ser ikke elevene ut til å registrere det. Det som står på lappene er kjent for dem, og tall og uttalelser samsvarer med de løsningene de selv utarbeidet. Som i episoden med ABD-gruppa i forrige avsnitt, ser det ut til at elevene tar det de gjenkjenner for å være sant og som noe som ikke trenger videre argumentasjon.

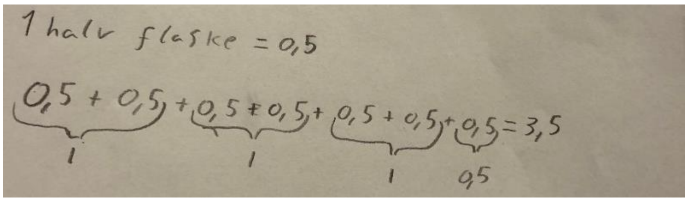
Det er ikke bare sammenligninger med egne alternative løsninger som kan påvirke argumentasjonen. At elevene ser hvordan de andre løser og forklarer oppgaven, kan bidra positivt til utvikling og forbedring av argumentasjonen. Innsikt i andres besvarelser, både gjennom diskusjoner og skriftlige svar, kan gi ideer som lar seg benytte inn i egen argumentasjon. I sin individuelle besvarelse, anvender Dina både aksepterte sannheter, argumentasjonsmåter og uttrykksmåter som kan tyde på at ideer fra de andre og fra aktivitetene i timen er brukt. Analysen (se kapittel 4.1.4) konkluderte med at argumentasjonen kvalifiserte som bevis og jeg trekker nå fram tre momenter som jeg mener det er sannsynlig at kom på plass etter inspirasjon fra andre. Figur 4.22 viser Dina sin individuelle argumentasjon (til venstre) og mulige inspirasjonskilder (til høyre). Øverst er Bjørn sitt regnestykke for 7 halve, så følger CFG-gruppa sin presentasjon av fakta og nederst er en gjengivelse av hvordan overgang fra halve til hele ble uttrykt i den felles løsningen av den rekonstruerte argumentasjonen.



Figur 4.22 Eksempel på bruk av andres ideer i egen argumentasjon

Kobling til aksepterte sannheter gjøres ved å framheve at en halv er det samme som 0,5 og at dette kan symboliseres ved hjelp av en halvsirkel. Datamaterialet viser at Dina ikke vet hvordan regnestykket til 7 halve kan uttrykkes skriftlig, noe som Bjørn oppklarer: 7 X 0,5. Argumentasjonsmåten har likhetstrekk med både CFG-gruppa sin utviklede argumentasjon og det felles resultatet av byggeoppgaven. At Dina vurderte CFG-gruppas besvarelse som ryddig og hensiktsmessig, kommer også fram gjennom det hun sier: *Det er ganske oversiktlig. Det viser jo hvilken unge – den har så mye, den har så mye og den har så mye*. Dina hadde tidlig et forslag til sin egen gruppe: *Vi kan tegne flaskene og så tegner vi de halve, og så legger vi dem – nei…* Uttalelsen tyder på en usikkerhet om hvorvidt dette kan fungere, og det kommer ingen respons, verken protester eller bekreftelser, fra Bjørn og Anders. I klassesamtalen formidler Dina imidlertid det samme, og med hjelp fra lærer får argumentasjonen en skriftlig utforming med bruk av tekst og figurer (se dialog gjengitt i 4.1.3). Her får Dina tilgang til hensiktsmessige måter å uttrykke argumentasjonen på. Som den individuelle besvarelsen vitner om, har innspill i aktiviteten bekreftet for Dina at den første planen for løsning vil fungere. At Dina i etterkant uttaler at *…det er sånn jeg ville regnet ut svaret hvis jeg ikke hadde visst det på forhånd…*, gjør det sannsynlig at besvarelsen ikke er en direkte kopi av noe, men en selvstendig utformet argumentasjon, inspirert av muntlige og skriftlige innspill fra andre.

Datamaterialet gir også andre indikasjoner på at elevene gjør bruk av andres ideer, og jeg vil trekke fram Bjørns individuelle løsning (figur 4.23) fordi den viser en utvikling i form av å gi figurativ og verbal støtte til den symbolske uttrykksmåten gruppa hadde i starten (7X0,5=3,5).



Figur 4.23 Utsnitt av Bjørns individuelle løsning

Som analysen i 4.1.2 viser, var Bjørn den som foreslo at antall hele flasker kunne finnes ved multiplikasjon og regnestykket 7X0,5. De andre syntes det var et godt forslag og ingen ytterligere begrunnelse ble gitt før de etter oppfordring fra lærer inkluderer litt mer detaljer. De ekstra forklaringene blir skrevet opp litt nedenfor det andre, og det er Bjørn som skriver disse. Alt dette antyder at Bjørn anser multiplikasjon som en akseptert sannhet, en veletablert algoritme som ikke trenger mer forklaring for å forstås. Den individuelle besvarelsen viser tydelig endringer i forhold til dette. Nå er det en definisjon av en halv som er den aksepterte sannheten, og gjentatt addisjon har overtatt for multiplikasjonsstykket. At klammer blir brukt for å vise en systematisk opptelling og omgjøring fra halve til hele, indikerer at Bjørn har endret noe i synet på hva som er viktig å ta med for å argumentere for at svaret helt sikkert stemmer.

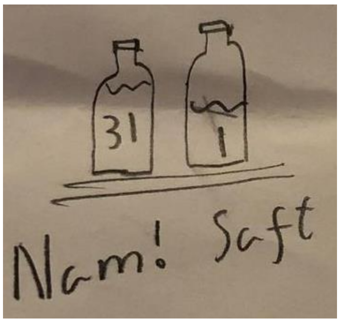
4.2.4 Varierte uttrykksformer

Hvilke uttrykksformer og representasjonsmuligheter som elevene har tilgang til og mestrer å bruke, har innvirkning på hvilket nivå argumentasjonen har. Jeg vil vise eksempler på at å tillate bruk av tegning og figurer, har positiv effekt på elevenes argumentasjon. Til slutt viser jeg at å ensrette representasjonsmåten, ser ut til å hindre elevene å vise sin kompetanse fullt ut.

Spesielt figurer og tegninger viste seg å ha et lite utnyttet potensiale i elevgruppa. Da elevene var ferdige med sine individuelle besvarelser (oppgave D), fikk de spørsmålet: *Tror dere det er sånn dere ville besvart oppgaven om dere skulle svart individuelt i starten av timen?* Svarene uttrykker at elevene mener den største forskjellen ville vært bruk av figurer:

Frida:	*Jeg tror ikke jeg ville tegnet så mye*
Dina:	*Jeg hadde tegnet mesteparten og skrevet bare litt stykke*
Anders:	*Jeg hadde ikke kommet til å tegne de flaskene da*
Bjørn:	*Jeg hadde sikkert kommet til å bruke hele tiden – med liksom – skrevet hele regnestykket*

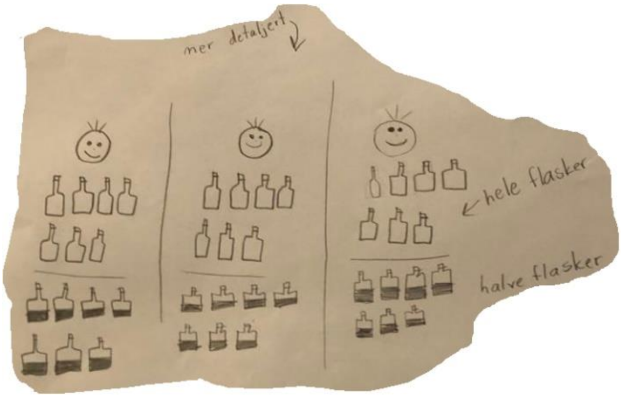
Analysen av elevenes opprinnelige og utviklede argumentasjoner viser variasjon i hvor nyttige tegningene er for elevene, altså i hvilken grad de påvirker argumentasjonens nivå. ABD-gruppa bruker figurer kun som en illustrasjon og elevene tegnet ikke før de repeterte at oppgaven uttrykte at de gjerne kunne gjøre det.



Figur 4.24 viser tegningen av en full flaske med tallet 31 på og en halvfull flaske med tallet 1 på, og intensjonen er å formidle svaret på oppgaven; 31 fulle flasker og 1 halvfull flaske. Imidlertid kan figuren antyde at det er 2 flasker. At illustrasjonen kan være misvisende, er tydelig ut fra diskusjonen på gruppa når Bjørn tegner i vei uten at de andre vet hva som skal tegnes. Som tidligere omtalt, foreslår Dina noe ved å relatere tegningen til noe av utregningen, men Bjørn svarer ikke på forslaget, men forklarer tegningen for de andre.

Figur 4.24 Del av ABD-gruppa sin utviklede argumentasjon

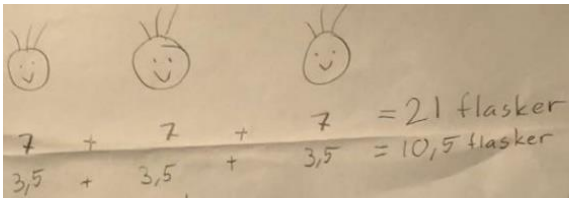
En annen måte som figurene brukes på, er for å skape oversikt over informasjonen som er relevant for å løse oppgaven. CFG-gruppa lager en detaljert tegning (figur 4.25) og begrunner det med at de gjorde det for å forklare bedre. At tegningen faktisk har den effekten, viser følgende utdrag fra samtalen på ABD-gruppa da de fikk se besvarelsen.



Figur 4.25 Utsnitt av CFG-gruppa sin utviklede argumentasjon

L5, Dina:	*Deres var veldig oversiktlig, da*
L6, Bjørn:	*Ja*
L7, A ders:	*I forhold til vår*
L8, Bjørn:	*Så var det litt mer sånn – ja, det viser at det er tre barnebarn liksom*
L16, Dina:	*Det er ganske oversiktlig. Det viser jo hvilken unge – den har så mye, den har så mye og den har så mye.*
L31, Anders:	*Her har du jo 1 hel, 2 hele, 3 … 3,5*

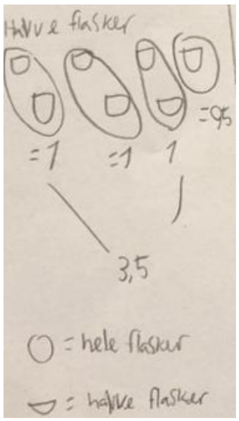
Parallelt med de to siste utsagnene, peker elevene på flaskene som er tegnet. Selv om figuren ikke direkte viser at de to halve flaskene blir en hel, er det slik det blir oppfattet av A, som peker på to og to av flaskene mens de telles opp (se figur 4.5, kapittel 4.1.2).



Figur 4.26 Utsnitt fra CFG-gruppa sin opprinnelige argumentasjon

Ved ett tilfelle førte tegning av figurer til at elevene valgte en ny måte å regne ut svaret på. Muntlig hadde elevene sagt at antall hele flasker for de tre barna ble tre ganger sju, men etter at de tegnet tre hoder og skrev 7 ved hvert hode, valgte de å sette pluss mellom tallene for å finne ut hvor mange hele flasker det ble til sammen (figur 4.26).

De fleste tegningene fungerte som støtte til argumentasjonen, men en av de individuelle besvarelsene viser at figurer også kan være en selvstendig del av argumentasjonen (figur 4.27). Eleven definerer hva symbolene betyr, og derfor kan figuren leses som en argumentasjon for hvor mange hele flasker det blir av de halve. Tegningen og bruken av den, gjør at argumentasjonen passerer bevisgrensen og framstår som et generisk bevis; hvis det hadde vært et annet antall halve flasker, kunne man fortsatt ringet rundt to og to og telt opp og slik funnet fram til svaret. Figuren illustrerer dessuten divisjon (deler 7 i grupper på 2), og gir derfor et godt utgangspunkt for å lage en argumentasjon ved bruk av tallsymboler – noe som kan ses på som et første steg på veien til et formelt matematisk bevis.

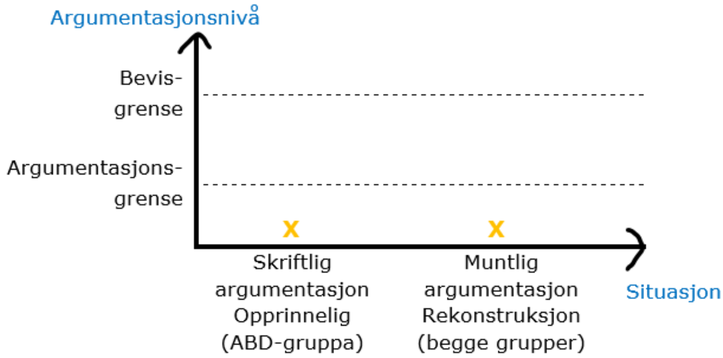


Figur 4.27 Dinas individuelle løsning

Flere av elevene uttrykker at de mener at den beste måten å argumentere for løsningen sin på, er ved å kombinere det figurative, det muntlige og det skriftlige. Nedenfor er noen eksempler på elevutsagn som indikerer dette:

Gunn:	*Jeg ville sagt det muntlig, men at jeg på en måte, med tavle da, så jeg kunne tegnet litt så de kunne forstått det*
Anders:	*Jeg tenker at det kan være lett hvis det er noen som ikke forstår noen ting av skrift – det skriftlige – så kan man forklare det muntlig i tillegg, da. Altså at de får skjønne litt mer.*
Frida:	*Kanskje tegne litt mer mens jeg regner ut så jeg skjønner litt mer det jeg regner på.*
Dina:	*Måten man regner ut og at man tegner på en måte slik at man skjønner hvor det er tallene kommer fra.*

Som jeg har vist flere steder i analysen, er det dette elevene gjør i praksis også; de kombinerer ulike representasjoner og former å uttrykke seg på for å lage en argumentasjon. Alle uttrykksmåtene bidrar til argumentasjonen; noe skrives med tall, noe forklares verbalt og noe tegnes. Det er imidlertid to situasjoner som skiller seg ut. Den første er når ABD-gruppa spontant løser oppgaven (opprinnelig argumentasjon), og den andre er når elevene skal rekonstruere argumentasjonen ved hjelp av biter. Begge situasjonene kan tolkes slik at argumentasjonsnivået blir «ingen argumentasjon» (figur 4.28).



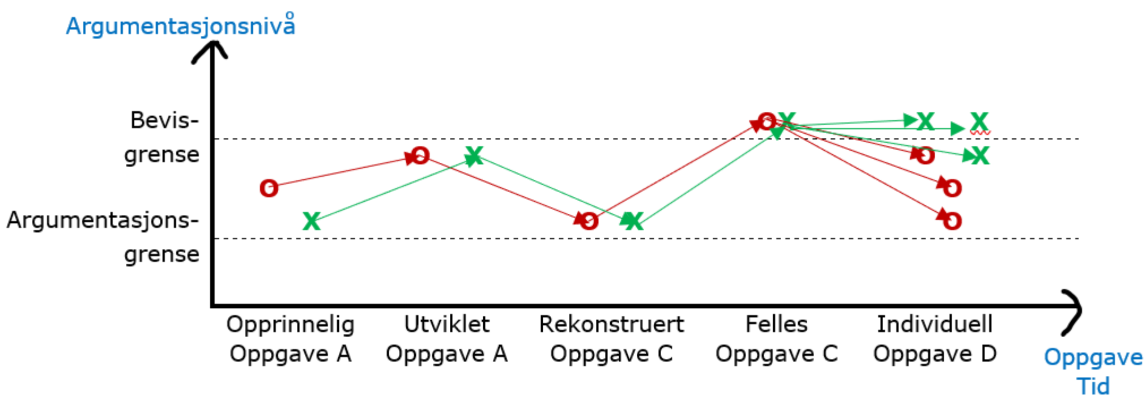
Figur 4.28 Eksempel på laveste nivå for skriftlig og muntlig argumentasjon

ABD-gruppas spontane svar, gjør kun bruk av det muntlige språket (i tillegg til å peke på det de omtaler). Hvis man her ønsker å vurdere kun den skriftlige versjonen av argumentasjonen, vil den vise seg fraværende og følgelig havne under argumentasjonsgrensen og på nivå 0 (ingen argumentasjon). Som vist i kapittel 4.2.1, bidrar oppgaveteksten til at argumentasjonen utvikles, men i tillegg kommer lærer med en begrensning som gjør at enda mer av argumentasjonen gjøres skriftlig: *Men hvis dere blir nektet å si noe etterpå?* Å frata elevene en mulig uttrykksmåte, kan på denne måten bidra til at man i større grad klarer å ta i bruk andre måter å kommunisere argumentasjonen på.

I byggeoppgaven viste analysen (se kapittel 4.1.3) at den muntlige kommunikasjonen inneholdt praktisk talt ingen momenter til argumentasjon. Tilsvarende som for forrige situasjon, ville en vurdering av kun den muntlige argumentasjonen her, gitt nivå 0. Elevene valgte å peke på lappene eller henvise til dem på andre måter, istedenfor å uttrykke det som sto på dem, og på denne måten ble den muntlige argumentasjonen (alene), intetsigende og usammenhengende.

4.2.5 Oppsummering av funn: Påvirkende faktorer

Analysen av «*Hvordan argumenterer elevene for å bevise at løsningen er riktig?*» (kapittel 4.1), antydet at «*Hvor mye saft?*» og oppgavetypen singel-case har et læringspotensial med hensyn til resonnering og argumentasjon. Som illustrert i figur 4.29, klarte elevene å forbedre argumentasjonen. Ved å gjøre endringer og tilføre nye momenter utviklet de argumentasjonen med hensyn til både aksepterte sannheter, argumentasjonsmåte og representasjonsmåte. De fikk tilgang til fellesskapets kunnskap, og tok denne i bruk, noe som er tegn på læring.



Figur 4.29 Funn fra analyse 1: elevers argumentasjon i bevissituasjonen singel-case

For å besvare mitt overordnede forskningsspørsmål, holder det imidlertid ikke å vite *at* læringspotensialet er der, jeg trenger å vite hvordan elevene fikk tilgang til ny kunnskap, og hvordan og hvorfor de valgte å ta den i bruk. Analysen av «*Hvilke faktorer bidrar til utvikling av elevenes argumentasjon?*», har gitt funn som informerer om dette. Som analysen har vist, fant jeg at noen trekk ved oppgaven og aktiviteten førte til forbedringer, mens andre så ut til å virke begrensende på argumentasjonen, og av den grunn, oppsummerer jeg mine funn gjennom en todeling; læringspotensial og utviklingspotensial (figur 4.30).

	Funn fra analyse 2	**Læringspotensial** Trekk som forbedrer elevenes argumentasjon	**Utviklingspotensial** Trekk som begrenser elevenes argumentasjon
Metanivå	Oppgavens formuleringer og tilrettelegging av bevisaktiviteten	Fokusert på framgangsmåte (*detaljert*, *overbevis*) Bruke tid Lærer som mediator Anse oppdraget som nyttig	Fokusert på svar (*løs*), Følge minste motstands vei Anse oppdraget som unyttig
	Hvem man lager argumentasjonen med og hvem man lager argumentasjonen for	Personlig engasjement Autentiske og skeptiske mottakere Spørrende holdning	Manglende personlig engasjement Godtroende mottakere Legge godviljen til
Objektnivå	Tilgang til og bruk av andre argumentasjoner enn sin egen	Møte motstridende svar Ideer fra andre	Gjenkjenne svar
	Krav om og muligheter til å bruke ulike representasjoner og uttrykksformer	Tegning med nytteverdi	Tegning uten hensikt

Figur 4.30 Funn fra analyse 2: påvirkende faktorer til elevers argumentasjon

Oppgaven «Hvor mye saft?» med sine fire deloppgaver, ser ut til å ha et læringspotensial i resonnering og argumentasjon både på metanivå og objektnivå. Med det menes at elevene får tilgang til kunnskap om hva som kreves for at en argumentasjon kvalifiserer som bevis, og tilgang på verktøy som setter dem i stand til å bevise.

En oppsummering av analysene, og svar på forskningsspørsmålet *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?*, er: Under forutsetning av elevenes personlige engasjement samt lærers mediering, fører instrukser, oppfordringer, protester og skepsis til at elevenes argumentasjon forbedres. Elevene får innsikt i bevisets natur og mulighet til å lære hva som kreves for at argumentasjonen skal bli et bevis. Tilgang til varierte argumentasjonsmåter og representasjonsmåter gir dessuten elevene anledning til å lykkes med muntlig og skriftlig utforming av argumentasjonen, samt klare å koble relevante aksepterte sannheter til påstandene sine. Også dette under forutsetning av at kunnskap blir gjort tilgjengelig i fellesskapet, og at elevene er villige til å ta kunnskapen i bruk.

5 Drøfting

Mitt forskningsspørsmål har stått sentralt i både planlegging og gjennomføring av prosjektet og har vært styrende for valg knyttet til innsamling, bearbeiding og analyse av datamateriale. På samme måte vil det, sammen med de tilhørende analytiske spørsmålene, være kjernen i dette drøftingskapittelet. Forskningsspørsmålet mitt er:

Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?

Først vil jeg utdype og diskutere funn knyttet til det første analytiske spørsmålet; *Hvordan argumenterer elevene for å bevise at løsningen er riktig?* Her fant jeg at elevene lyktes med å forbedre argumentasjonen, men at ett av argumentene bød på utfordringer. I dialog med tidligere forskning og forskningsresultater, ser jeg på hva denne utfordringen kan skyldes, og hvorfor den egnet seg som en problemoppgave i bevissituasjonen singel-case. Et annet funn av interesse, er at løsning av denne konkrete oppgaven med kun ett korrekt svar, kunne lede fram til et generisk bevis. Motivert av det, inspiserer jeg min fortolkning av bevis i bevissituasjonen singel-case; en systematisk og velbegrunnet utregning, for å diskutere koblingene mellom denne fortolkningen og kravene til et generisk bevis.

Andre del av drøftingen vil knytte seg til det jeg fant som svar på det andre analytiske spørsmålet; *Hvilke faktorer bidrar til utvikling av elevenes argumentasjon?* Jeg bruker funn knyttet til *oppgavens læringspotensial*, for å argumentere for at oppgaven «Hvor mye saft?» bidrar til elevers læring av resonnering og argumentasjon. Læringspotensialet diskuteres også med hensyn til funn knyttet til *oppgavens utviklingspotensial*, noe som dessuten gir opphav til endringsforslag for oppgavedesignet for «Hvor mye saft?».

Tredje del av drøftinga er viet et kritisk blikk på forskningsdesign og forskningsprosess. Her reflekterer jeg over prosessen og diskuterer blant annet hvilken betydning valg av metodisk kilde kan ha hatt. Jeg diskuterer også hvordan min dobbeltrolle som forsker og lærer kan ha preget forskningen og dens resultater. Deretter kommer jeg med betraktninger som gjelder utvalg av data, begrepsoperasjonalisering og forskningens rammeverk, før jeg avrunder med refleksjoner knyttet til valg av metode.

I kapittelets og oppgavens siste del, oppsummerer jeg, og i lys av forskningsprosjektets bakgrunn og motivasjon, ser jeg på hva min forskning har bidratt med. Jeg retter samtidig blikket framover og antyder hvordan det kan være mulig å bygge videre på min forskning, samt formidler hvilke spørsmål og tanker jeg sitter med nå som masterprosjektet er avsluttet.

5.1 Diskusjon av elevers argumentasjon i singel-case

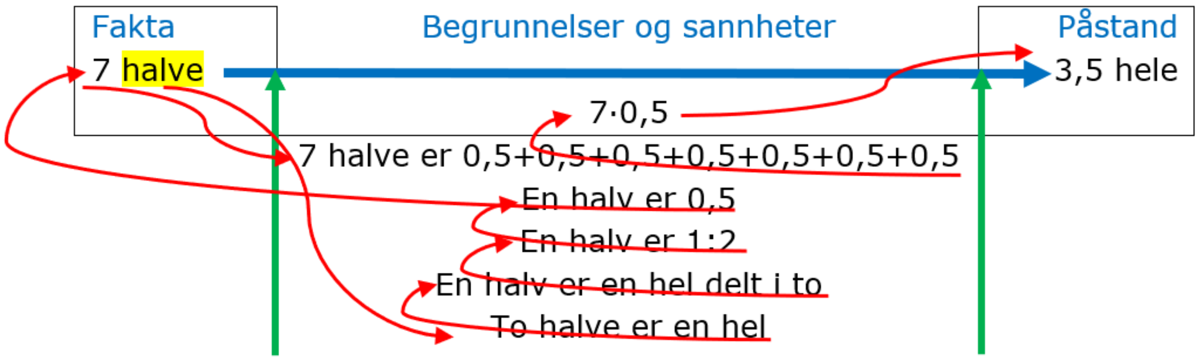
5.1.1 *Sju halve blir tre og en halv fordi det blir tre hele og en halv* - Manglende argumentasjon for at 7 halve er 3,5

Utfordringen med å finne ut hvor mange flasker saft de tre barna fyller, når de fyller sju hele og sju halve hver, er i utgangspunktet ikke veldig stor. Det som viser seg vanskelig, er å bevise påstanden *7 halve er 3,5*. Elevene uttrykker at to halve er en hel, teller opp to og to, deler på to, finner halvparten av 7 og sier at 6 halve er 3 hele. De har de fleste bitene som trengs, men får likevel ikke til å uttrykke forklaringen på en måte som gjør at argumentasjonen kan klassifiseres som bevis. En ting som viste seg å hjelpe, var å bruke tegninger for å symbolisere flaskene for så å utnytte tegningen som et verktøy i forklaringen ved å peke på den og tegne piler eller sirkle rundt noe. Dette samsvarer med hva Nordin & Björklund Boistrup (2018) uttrykker med grunnlag i sin forskning på elever fra blant annet 5. klasse. Undersøkelsen gjorde bruk av oppgaver i bevissituasjonen singel-case, og de fant at det å bruke andre representasjoner enn verbalt språk er av stor betydning for at elevene skal klare å argumentere (Nordin & Björklund Boistrup, 2018). At elevers kompetanse i argumentasjon ikke fullstendig kommer til syne gjennom det verbale, er noe som også støttes av Stylianides (2019) Han mener at å kun vurdere elevenes skriftlige løsninger, ikke vil måle elevenes kompetanse i resonnering og argumentasjon. Han fant at alle deltakere i sin studie forbedret argumentasjonen når de fikk støtte det skriftlige med kommunikasjon på andre måter.

Selv om tegninger og en variert uttrykksform bidro til utvikling av argumentasjonen, var det fortsatt utfordrende for elevene å få argumentasjonen til å henge sammen. Vender vi oss til Sfard (1991), kan vi få en mulig forklaring på hvorfor denne overgangen ble så utfordrende for elevene: Matematikken har blitt til ved at vi, og med «vi» menes den matematiske kulturen, har tatt det vi oppfatter som objekter og utført matematiske operasjoner på disse. I starten var det konkrete enheter som vi telte, og fra det oppsto de naturlige tallene. Så begynte vi å utføre operasjoner på de naturlige tallene. Vi adderte (7+7+7) og fikk et nytt naturlig tall, vi multipliserte (3·7) og fikk et nytt naturlig tall, men da vi dividerte (7:2) dukket det opp «noe» som ikke var et naturlig tall. Til å begynne med ble slike utregninger ignorert og betraktet som noe som ikke var tillatt, men etter hvert kom behovet for å innlemme det nye fenomenet i matematikken. I tilfellet 7:2=3,5 ble de nye objektene kalt rasjonale tall. I starten var de altså resultatet av en prosess i de naturlige tallenes verden, men etter lang tid kunne de rasjonale tallene også selv betraktes som et objekt. Sfard (1991) deler prosessen inn i tre faser, hvor den siste betegnes som reifikasjon og markerer at fra å være resultatet av en operasjon, har fenomenet blitt til et nytt, selvbærende objekt som man kan utføre operasjoner på. Prosessen er langvarig og krevende og innebærer et ontologisk skifte (Sfard, 1991, s. 19), altså at man må forlate en verden som består av naturlige tall og tre inn i en verden som også omfatter rasjonale tall. Sfard (1991, s. 16) hevder at eksemplene fra matematikkens historie og dens kriser, kan brukes for å beskrive læringsprosesser. I lys av dette, kan vi forstå at overgangen fra 7 halve til 3,5 er mer krevende for elevene enn de andre overgangene. Elevene har kjennskap til rasjonale tall, og utfører både addisjon og multiplikasjon på desimaltallene, men å forklare hvordan det rasjonale tallet oppsto, er noe helt annet. Sfard (1991) framhever at slike ontologiske skifter er krevende, og poengterer at elever må være forberedt på å streve for å gi mening til den nye verdenen. Dette belyser mine funn, da «å streve for å gi mening» indikerer at en argumentasjon som avhenger av overgangen mellom to verdener vil være kognitivt krevende. Selv om saftoppgaven var grei å løse (for 8. klassinger), bød det på en ekte utfordring å bevise at svaret var korrekt, noe som skriver seg fra at argumentasjonen må koble sammen to verdener.

Oppgaven «Hvor mye saft?» ga elevene en ekte utfordring gjennom kravet om å bevise overgangen fra halve til hele. En genuin utfordring indikerer at oppgaven er kognitivt krevende (Wæge & Nosrati, 2018), og Stylianides (2016) understreker at det er denne type oppgave som er egnet til bruk i bevissituasjonen singel-case, noe som støttes også av det jeg fant i mitt datamateriale. Bjørn var en av elevene som klarte å lage et bevis, og det gjorde han ved å definere en halv som 0,5. Ved å gjøre det, og uten at en begrunnelse ble etterspurt, endret oppgaven karakter og kan ikke lenger sies å være kognitivt krevende, ettersom det er overgangen til 0,5 som gjør oppgaven til en utfordring. Å unngå å omforme oppgaven på denne måten, vil derfor være et viktig poeng med tanke på læring i resonnering og argumentasjon, og lærer må være bevisst på at de kognitive kravene til oppgaven ikke reduseres selv om elevene får hjelp og støtte (Wæge & Nosrati, 2018).

Toulmins modell gir opphav til en annen mulig forklaring på utfordringen med påstanden *7 halve = 3,5*. Figur 5.1 viser at begrunnelsen for påstanden, består av flere ledd hvorav den nederste byggesteinen er en definisjon eller avklaring på hva vi mener med en halv, for eksempel at to halve er en hel. Fra der følger det logisk at en halv blir en hel delt på to som igjen kan uttrykkes som divisjonen 1:2. Her skjer det ontologiske skiftet og resultatet blir at en halv er 0,5. Først når vi har kommet dit, kan vi ta utgangspunkt i faktaopplysningen igjen og konkludere med at vi finner 7 halve ved å ta 7·0,5 som gir oss 3,5 hele.



Figur 5.1 Hvordan lese argumentasjonen i Toulmins modell?

Toulmins modell viser at en argumentasjon har to hovedretninger, og når begrunnelsen vi trenger for å komme oss fra fakta til påstand blir komplisert som her, kommer de to retningene i argumentasjonen ekstra tydelig fram. Den horisontale argumentasjonen alene, samsvarer godt med at et bevis skal være en sammenhengende kjede med argumenter (A. J. Stylianides, 2007), og det samme gjør den vertikale, om vi kun betrakter den. Når vi skal kombinere de to retningene og lese argumentasjonen, virker det imidlertid ikke som det er en logisk og sammenhengende kjede lenger, noe jeg har synliggjort ved rød markering. Funn fra datamaterialet mitt indikerer også at den vertikale retningen unngås, og at det er den horisontale som betyr mest. Et eksempel er når ABD-gruppa skriver det som ikke hører med i den horisontale argumentasjonen (definisjoner, mellomregninger og begrunnelser), i ei ramme litt nedenfor løsningen sin, noe som signaliserer en underordnet betydning.

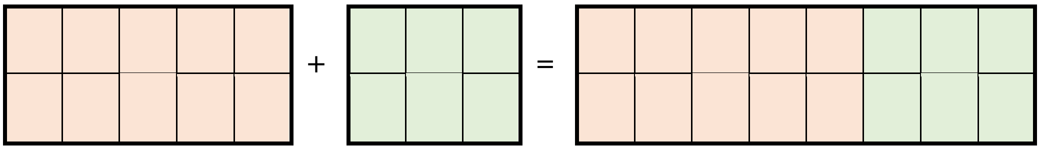
Jeg har nå belyst hvorfor det var vanskelig for elevene å komme i havn med et bevis for *7 halve er 3,5*. En ting er det ontologiske skiftet som argumentasjonen er avhengig av, og noe annet er den relativt lange og kronglete veien fra fakta til påstand. Hvis vi i tillegg tar med at elevene ofte ikke starter med starten og jobber seg stegvis framover, slik både Toulmin (2003) hevder og datamaterialet mitt viste, kan elevene trenge hjelp om de skal løfte argumentasjonen sin til et bevis. Her kan Toulmins modell være et godt verktøy, ifølge Nordin & Björklund Boistrup (2018). De fant ut at modellen egnet seg godt til å analysere elevenes argumentasjon selv ved bruk av alle varianter av språket. En viktig påfølgende oppgave for lærer ble å fortolke den utfylte modellen for å gi elevene verktøy til å framstille argumentasjonen mer hensiktsmessig. Mine erfaringer med Toulmins modell, gjør at jeg tror at den også kan hjelpe lærere gjennom å være et vurderingsverktøy for resonnering og argumentasjon i matematikk i skolen. Lærere trenger et verktøy som lar dem vurdere kompetansen i dette nye kjerneelementet, og som nevnt tidligere, vil det ikke være tilstrekkelig med skriftlige prøver fordi vi da ikke får tak i all kompetansen som elevene innehar (A. J. Stylianides, 2019). Om Toulmins modell egner seg til å analysere argumentasjon bestående av et multimodalt språk i matematikklasserommet, slik det hevdes (Nordin & Björklund Boistrup, 2018), og som jeg har erfart i min forskning, vil det være av betydning både med tanke på elevers læring, og lærers vurdering, av resonnering og argumentasjon.

5.1.2 *Så det vi <u>egentlig</u> gjorde, var å sette sju flasker på hvert barn* - Fra systematisk utregning til generisk bevis

Et annet funn fra første analyse, er at elevene lager generisk bevis med utgangspunkt i en helt ordinær problemoppgave. Argumentasjon som kvalifiserer som bevis er deduksjonsbevis og generisk bevis, men i tillegg vil en systematisk og velbegrunnet utregning, altså en argumentasjon som bygger på etablerte prosedyrer eller regler, være godkjent bevis i bevissituasjonen singel-case (A. J. Stylianides, 2016). Jeg fant at i møte med mindre krevende overganger, som at summen av de hele flaskene blir 21, laget elevene bevis med støtte i kjente algoritmer, altså en gyldig argumentasjonsmåte som er særegen for singel-case. Da elevene fikk et mer kognitivt krevende oppdrag gjennom å skulle bevise at 7 halve ble 3,5 hele, var imidlertid denne bevisformen ikke tilstrekkelig (noe jeg diskuterte i 5.1.1), og utfordringen førte til utvikling av et generisk bevis.

Å arbeide med singel-case kan se ut til å være aktivitet i overgangen mellom empirisk og generisk, noe som i så fall gir den spesielle bevissituasjonen stor betydning. Rasch (2018) brukte singel-case som forløper til flere, endelige tilfeller, men uten å se på en direkte overgang til generisk bevis. Stylianides (2016) sine eksempler på singel-case dreier seg om å finne manglende siffer i tall som legges sammen og gir en bestemt sum, og heller ikke han gjør direkte koblinger til hvorfor det alltid må bli slik. Rø og Arnesen (2020) viser at når den empiriske argumentasjonen er på plass, er det «bare» en forklaring som mangler for å løfte det til et generisk bevis. Tilsvarende forklaring vil i et singel-case-bevis komme om vi besvarer *hvorfor?* Det som da mangler, er å eksplisitt uttrykke hvordan det vil være det samme uansett hvilke tall man starter med.

Om vi betrakter bevis i bevissituasjonen singel-case som å ta tak i et empirisk bevis og løfte det til å bli et generisk, innebærer prosessen en overgang mellom ulike bevissituasjoner med hensyn til antall tilfeller som er involvert. Påstanden *summen av to partall vil alltid bli et partall*, plasserer oss i *uendelig antall tilfeller*. Om *singel-case* skal brukes som «brobygger», må vi endre situasjon og se på et enkeltstående tilfelle som 10+6=16, noe som jo samtidig er (deler av) et empirisk bevis for påstanden. Singel-case-oppgavene som da kan bidra, er å bevise at hvert av disse tallene er partall, noe som kan gjøres ved å endre skrivemåte til 2·5, 2·3 og 2·8. For å komme videre fra der, må den distributive lov brukes, slik at man kan få 2(3+5), altså noe i to-gangen og følgelig et partall. Som Nordin & Björklund Boistrup (2018) hevder, er kanskje bruk av andre uttrykksformer nødvendig, ettersom dette ikke trenger å være tilgjengelig kunnskap for yngre skoleelever. Singel-case-oppgavene kunne da heller vært: bevis *ved tegning* at 10, 6 og summen 16 er partall, og svaret kan tenkes å bli som i figur 5.2. Tegningen viser regnestykket, men i tillegg kommer partallsstrukturen godt fram gjennom at hvert av tallen er gjengitt som rekker av par («tårn» med to klosser).



Figur 5.2 Figurativ løsning av at *partallet 10 + partallet 6 blir til partallet 16*

Herfra er veien til generisk bevis overkommelig, noe jeg viste i kapittel 2.5.1. At det faktisk kan foregå på denne måten, vitner datamaterialet mitt om (se figur 4.16). Et generisk bevis tok utgangspunkt i et konkret eksempel og kunne fullføres etter at eleven fikk tilgang til, og klarte å gjøre bruk av, en hensiktsmessig representasjon.

5.2 Diskusjon av aktivitetens læringspotensial

5.2.1 *Sånn burde kanskje vi også gjort* - Læring i fellesskap

Mine funn viser at personlig engasjement hos elevene og en aktiv, medierende lærer har betydning for utvikling av elevenes argumentasjon og dermed læring i resonnering og argumentasjon. Nødvendigheten av aktivitet, samsvarer med sosiokulturell læringsteori (Vygotskij & Cole, 1981) som beskriver at læringsprosessen initieres eksternt ved at kunnskap gjøres synlig for elevene. I klasserommet vil denne synliggjøringen ofte være lærers ansvar, og den muliggjør aktivitet i elevens proksimale sone (se kapittel 2.1.2). Etter denne fasen, hvor eleven med mer eller mindre støtte anvender kunnskapen, kan en individualisering skje og eleven innlemmer den nye kunnskapen i sin aktuelle sone. Mine resultater illustrerer på en måte denne teorien i praksis. Det var i klassesamtalen at argumentasjonen for første gang kunne godkjennes som bevis, og lærer er en aktiv deltaker i dialogen som fører fram til resultatet. I samtalen synliggjør lærer kunnskap både på metanivå og objektnivå. Metakunnskap om bevis er noe som elevene selv ikke kan forventes å etterspørre (Sfard, 2007), så det at påstanden 7 halve er 3,5 trengte mer argumentasjon for at den skulle være bevist, avhenger av en aktiv lærer med nødvendig kunnskap om bevis. Hvordan argumentasjonen skal utføres, er kunnskap om bevis som objekt og lærer gir elevene tilgang til en hensiktsmessig representasjon, noe som senere blir et nyttig verktøy. Selv om kunnskap på objektnivå kan komme til syne på andre måter enn gjennom lærers mediering, er det ifølge Barlow & Barlow (2020) nødvendig at lærer gir tilgang til varierte strategier om det ikke oppstår naturlig i fellesskapet, slik som i min undersøkelse. Det virker som at konstruksjonen av bevis for påstanden *7 halve er 3,5*, avhenger av at lærer bidrar til dette gjennom klassesamtalen. Imidlertid kunne kanskje samme resultat vist seg om Dina hadde fått mer støtte på ideen hun hadde om å tegne for å forklare overgangen fra 7 halve flasker til 3,5 hele.

For et lærende fellesskap er det sentralt med deltakere som har ulik kunnskap , og mediering fra de med mest erfaring, er en viktig forutsetning for læring (Säljö, 2016). Stylianides og Ball (2008) poengterer at lærers kunnskap må omfatte hvordan argumentasjon bygges opp og bevis lages, men at en lærer også må vite hvilke situasjoner som egner seg for å bevise, hvilken bevisaktivitet som knytter seg til situasjonen og hva som kreves av et bevis i den enkelte situasjon. I min undersøkelse har jeg sett på bevissituasjonen singel-case. En oppgave løses, og svaret skal bevises, noe som er en kjent aktivitet i matematikktimene; løs oppgaven og vis utregning. Kunnskap om bevissituasjonen singel-case og at et gyldig bevis kan være en systematisk og godt forankret utregning, vil være en forutsetning for og en mulighet til å utnytte ofte brukte oppgaver til bevisaktivitet.

Det er ikke bare lærer som er en viktig deltaker i et lærende fellesskap, og ved å gi elevene mulighet til å vise egen kunnskap og få innblikk i andres, skjer en utveksling av måter å argumentere på. Allern og Drageset (2017) anbefaler en kommunikasjon i klasserommet som gir elevene denne muligheten, da de mener det å vurdere argumentasjon har betydning for elevenes læring i matematisk resonnering. Både innad på gruppene og da gruppene så på hverandres løsning, fant jeg at elevene fikk tilgang til ny kunnskap som de kunne ta i bruk. Når ideer til strategier og representasjoner blir gjort tilgjengelig, må elevene sammenligne og vurdere ulike varianter av argumentasjon. Å få innblikk i flere måter å argumentere på og vurdere disse opp mot hverandre, vil ifølge Lannin (2005) bidra til å gjøre matematikkens og bevisets natur synlig for elevene, noe som er viktig med tanke på læring i resonnering og argumentasjon. Som jeg fant, og som Lannin (2005) støtter, bidro ideer fra andre til å øke kvaliteten på elevenes argumentasjon, og Dinas generiske bevis er et godt eksempel (se figur 4.22).

5.2.2 *Overbevis en 9-åring* - Betydningen av mottakerne

Mine funn tyder på at det har stor betydning hvem argumentasjonen er ment å fungere for. Det trengs *litt* argumentasjon for å finne fram til et svar og for å bli enige på gruppa, og kanskje litt mer for å innfri oppgavens krav til forklaring og skriftliggjøring. Et skifte i engasjement er tydelig når mottaker for argumentasjonen skal være noen «virkelige andre». Bytteoppgaven kommer brått på elevene, og elevene blir litt irritert for at de ikke hadde fått vite dette tidligere. I forsknings- og undervisningsøyemed kan vi diskutere om dette er et godt grep å gjøre eller ikke. Allern og Drageset (2017) rapporterer om at det skapes et annet behov for argumentasjon når situasjonen blir mer realistisk, og uten at elevene visste at løsningen deres skulle vurderes av noen andre, holdt argumentasjonen et nivå illustrert av utsagnet: *Det får funke*. Sett i forhold til min forskning, hvor jeg var interessert i hvordan elevenes argumentasjon ble utviklet og hva som påvirket utviklingen, ga løsningen som *funket*, et godt startpunkt for analysen. I en undervisningssituasjon hvor vi vil vurdere elevenes kompetanse i resonnering og argumentasjon, kunne nok tilnærmingen gjort elevene urett i og med at den opprinnelige argumentasjonen ikke får fram alt som elevene kan. Som min erfaring med bytteoppgaven antyder, kunne en tydelig definert mottaker utløst et større behov for argumentasjon og følgelig en argumentasjon som viste mer av elevenes kompetanse. En annen betraktning er imidlertid at en argumentasjon som skal leses av andre, nødvendiggjør en skriftlig uttrykksform. Både Stylianides (2019) og Nordin og Björklund Boistrup (2018) fant at elevenes argumentasjon ikke viste samme nivå i sin skriftlige utgave som når den ble støttet av andre uttrykksformer. Samlet indikerer dette at den beste versjonen av elevenes argumentasjon kan vi forvente når elevene kan bruke et multimodalt språk og at argumentasjonen har en tydelig mottaker.

En argumentasjon har til hensikt å overbevise andre om at noe er sant (Hanna, 2020), noe som tydelig involverer en mottaker. At hensikten er å overbevise, impliserer at denne mottakeren må være en mottaker som trenger å bli overbevist om elevene skal få vist sin kompetanse i resonnering og argumentasjon. Mottakeren kan være en tenkt 9-åring, som Gunn foreslår før den individuelle oppgaven skal løses, eller det kan kanskje være andre som kan tenkes å vite litt mindre, eller kreve litt mer, enn hva elevene selv gjør. I mangel på autentiske skeptiske mottakere, kan roller og rollespill benyttes (Allern & Drageset, 2017). Etter et samfunnsfaglig rollespill, merket de effekten av en mistenksom og skeptisk rolle også i matematikktimen. Elevene stilte spørsmål, forklarte og argumenterte, og de klarte å betrakte matematikken fra ulike perspektiv (Allern & Drageset, 2017). Med tanke på læring i resonnering og argumentasjon, virker det altså som definerte roller kan være et hensiktsmessig grep å ta.

Mine funn viser at lærer i rollen som skeptiker også har konsekvenser for elevenes argumentasjon. Når lærer uttrykker *Men – det tror jeg ikke på!*, stopper elevene opp og responsen *Hvordan kan du <u>ikke</u> tro på det?!* antyder en konflikt knyttet til hva som skal til for å betrakte påstanden som sann. Ved å fortsette rollespillet, skaper lærer et behov for en argumentasjon som er overbevisende. Toulmin (2003) sier at argumentasjon handler om å svare på spørsmålet *Hvordan kan du vite det sikkert?*, som er en av formuleringene en skeptiker kan gjøre bruk av. Om vi lar oss inspirere av Stylianides' (2007) definisjon av bevis i skolematematikken, kan den matematiske skeptikeren stille følgende krav til argumentasjonen: 1) Argumentasjonen må knyttes til noe som helt sikkert er sant. 2) Alle overganger og påstander må gjøres rede for på en logisk og sammenhengende måte. 3) Argumentasjonen må kommuniseres ved hjelp av uttrykksformer som er hensiktsmessige og gir mening.

5.2.3 *Den er sist i alle fall, for det er svaret* - Å bygge en argumentasjon

Det som var framtredende i datamaterialet fra byggeoppgaven (oppgave C), var at elevene helt tydelig var opptatt av at lappene skulle få en logisk rekkefølge. Et gyldig bevis må ha en deduktiv struktur (Jeannotte & Kieran, 2017), og gjennom arbeid med denne oppgaven, fikk elevene kunnskap om gyldige argumentasjonsmåter. Elevene kom fram til en godkjent struktur til slutt, men måten de bygget argumentasjonen på var ikke deduktiv. Om vi bruker byggeprosessen som endelig argumentasjon, vil eksempelvis ABD-gruppas argumentasjon (se kapittel 4.1.3, figur 4.11) bli: *Det ble laget 31,5 flasker saft fordi 21 + 10,5 = 31,5, og 3 X 7 = 21. Ettersom 7 halve flasker er 3,5, blir det 3,5 + 3,5 + 3,5 = 10,5. Det var 7 hele flasker og 3-tallet er hvor mange barn det er*. Dette resultatet illustrerer Toulmins påstand om at måten vi praktisk argumenterer på, ikke nødvendigvis starter med fakta og ender med konklusjonen, men at det ofte er slik at det man påstår, i etterkant blir begrunnet og rettferdiggjort (Toulmin, 2003). Også Nordin & Björklund Boistrup (2018) antyder at elevens argumentasjon i utgangspunktet har en ikke-deduktiv struktur gjennom sitt begrep «supported claims».

Selv om den rekonstruerte argumentasjonen innfridde kravene til argumentasjonsmåte, kunne den ikke plasseres over bevisgrensen med tanke på bevisdefinisjonens kriterier knyttet til aksepterte sannheter og representasjonsmåter. Som vist i analysen, argumenterte elevene i liten grad eksplisitt, og kommenterte bare lappene med informasjon og sa *den* og *dette*. De gjenkjente svarene og utregningene, og dermed forsvant noe av behovet for å argumentere, og blant annet argumentasjon for påstanden 7 halve er 3,5 mangler i sin helhet.

Jeg mener at en videreutvikling av lappene som elevene bygger med (se vedlegg 4), kan føre til økt læringspotensial med tanke på læring i resonnering og argumentasjon. Med utgangspunkt i mine funn, har jeg derfor revidert instruksen til oppgave C (figur 5.1) og laget et forslag til nye lapper (figur 5.2). En utgave som inkluderer de nødvendige blanke lappene, ligger som vedlegg 11.

OPPGAVE C: Sett bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening
Dere skal nå lage en overbevisende forklaring ved hjelp av lappene.
Om det er lapper som ikke hører til, legger dere dem til side.
Om det er noe som mangler, bruker dere de blanke lappene.
Det kan være lurt å ha både tekst, regnestykker og figurer som viser det samme.
Alle lappene skal klippes ut, og til slutt skal dere lage en plakat hvor dere plasserer lappene i den rekkefølgen dere kom fram til. Dere skal presentere resultatet for de andre gruppene.

Figur 5.3 Revidert oppgave C, skriftlig instruks

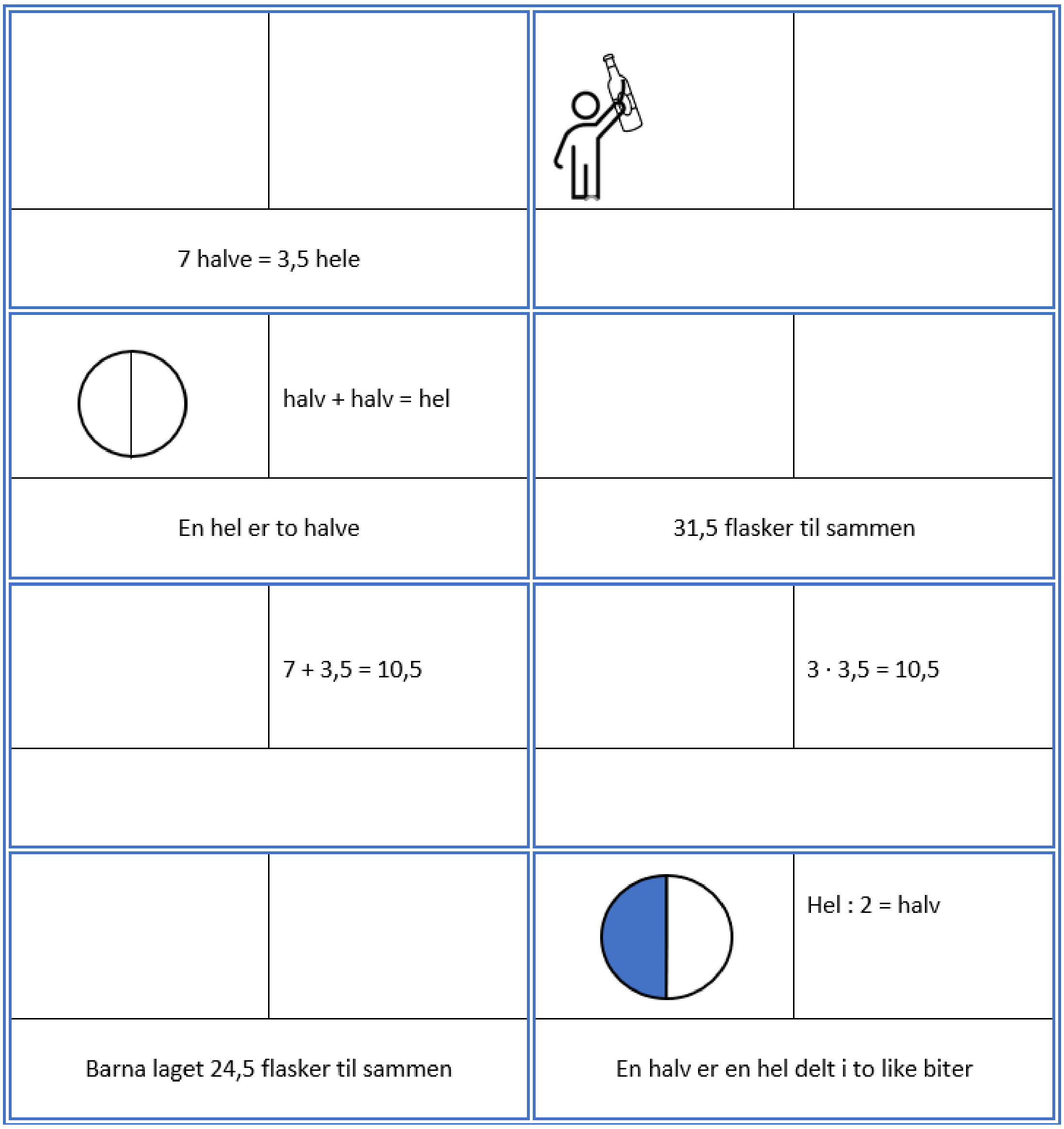
Jeg tar hensyn til at elevene bør få tilgang til og gjøre bruk av ulike representasjoner for å få vist sin kompetanse samt klare å koble aksepterte sannheter til argumentasjonen. Dette gir opphav til en tredeling av lappene som jeg antar vil invitere til variert bruk av uttrykksformer. Variasjon i språk, understrekes dessuten av at de ferdiglagde lappene viser eksempler på både tekst, tegninger og utregninger.

Jeg legger også til grunn at et mangfold av argumentasjon og motstridende svar, vil sette elevene i valgsituasjoner og slik skape et behov for å argumentere. Utregninger fra ulike strategier (distributiv, additiv og multiplikativ) er derfor med på lappene, og inspirert av datamaterialet mitt har jeg inkludert det uriktige svaret 24,5. Dette innebærer imidlertid at elevene må få anledning til å velge ut de lappene de trenger, og la noen være ubrukt.

At mottakeren har betydning for elevenes argumentasjon, tar jeg også på alvor. Jeg definerer mottakeren til å være resten av klassen og at resultatet av byggeoppgaven skal vises fram. Dette innebærer samtidig at elevene får tilgang til enda flere måter å argumentere for svaret på.

Elevene trenger å få vite hva som skal til for at noe skal være et bevis, og overgangen mellom halve og hele, var en overgang elevene ikke argumenterte godt nok for. Dette har jeg tatt hensyn til ved å lage to ferdigutfylte lapper med definisjoner av «halv». Disse ligner hverandre, men hvilken de velger, har betydning for videre argumentasjon.

En viktig del av oppgave C, er klassesamtalen, og min empiri forteller at det var her elevene først klarte å utvikle et bevis for svaret sitt. Jeg kan anbefale at lærer går inn i skeptikerrollen, og muligens kan også elever ta denne rollen, slik Allern & Drageset (2017) har hatt positive erfaringer med. I tillegg trenger lærer å synliggjøre nødvendig kunnskap for elevene om denne ikke kommer fram på andre måter, og det er da av stor betydning at lærer vet hva som kreves av bevis i bevissituasjonen singel-case slik at strategiske spørsmål kan stilles og hensiktsmessige innspill gis. Læringspotensialet til oppgaven henger på denne måten sammen med hvor kunnskapsrik lærer er, alternativt hvor detaljert, innholdsrik og forståelig en tilhørende lærerressurs kan utformes. Før jeg går mer i detalj på mulige veier videre i kapittel 5.4, som også vil avrunde denne masteroppgaven, retter jeg et kritisk blikk mot forskningsprosessens kvalitet.



Figur 5.4 Revidert oppgave C, lapper med innhold til bygging av argumentasjon

5.3 Metodekritikk

Jeg har tilstrebet at forskningsprosjektet mitt skal ha en logisk sammenheng fra inspirasjonskilde og forskningsbehov, via ulike valg og handlinger fram til svar på forskningsspørsmålet. Forskningsprosessen har vært spørsmålsdrevet, og jeg har prøvd å la det sosiokulturelle perspektivet farge alle faser. En konsekvens av det, er blant annet at Tjora (2017) ble min hovedkilde til det metodiske ettersom han tydelig gjør rede for et perspektiv som er forenelig med mitt. Han hevder imidlertid at målet med også kvalitativ forskning må være å generalisere og utvikle konsepter, noe han selv antyder at det ikke er enighet om (Tjora, 2017), og mange innen kvalitativ forskning velger å heller bruke begrepet overførbarhet. Som Nyeng (2020, s. 71) uttrykker det, er målet med kvalitativ forskning sjelden å bygge allmenngyldig teori, noe som ofte er tilfelle når man bruker kvantitative metoder. Jeg valgte å benytte generaliserbarhet som mål på studiens kvalitet, for jeg er enig med Tjora (2017) i at metodisk strenghet gjennom SDI *kan* gi konseptuelt generaliserbare resultater. Imidlertid anser jeg min forskning til kun å være inspirert av metoden, noe som gjør at mine funn ikke trenger å være like kraftfulle.

At forsker har en nær relasjon til informantene slik som jeg hadde, har både fordeler og ulemper. Elevene vil være trygg i situasjonen, noe som kan gjøre at de er mer aktive både muntlig og skriftlig, og gi et rikt datamateriale. På den andre siden, kan en nær relasjon gjøre at både informanter og forsker tar en del ting for gitt. Det kan føre til at forklaringer og begrunnelser ikke sies eksplisitt eller at instrukser henviser til det som gjøres til vanlig. Begge deler kan gi et mindre fullstendig datamateriale. Også i prosessen med transkripsjoner og analyse, er det mulig at kjennskap til elevene har preget resultatet. Dobbeltrollen som forsker og lærer, betegnes deltakende observatør og er en synlig observatørrolle. At forsker deltar indikerer at observasjonen er interaktiv (Tjora, 2017), noe som den var i min forskning ettersom jeg som lærer hadde aktivt samspill med elevene. En observatør vil alltid skape en forskningseffekt, men denne blir mindre om man er deltakende, og det at jeg til vanlig underviser elevene gjorde også sitt til at situasjonen ble mest mulig lik «virkeligheten». Valget av observatørrolle var også koblet til nødvendigheten av en aktiv lærer når elever arbeider med resonnering og bevis (A. J. Stylianides, 2007). Alternativet ville vært å la en annen lærer lede økta og selv innta en rolle som ikke-deltakende observatør. Om jeg hadde gjort det slik, kunne jeg unngått å påvirke datamaterialet selv, men da ville det vært en annen lærer som gjorde det. Som pilotprosjektet ga signaler om, krevde oppgaven at lærer stilte seg tvilende til ufullstendige svar og minnet elevene om behovet for skriftliggjøring. Ved at jeg selv tok denne rollen i klasserommet, kunne jeg planlegge når jeg skulle gi eventuelle innspill. Jeg var nøye på å ikke blande meg inn i gruppearbeidet, men besvarte likevel spørsmål fra elevene. Intensjonen med svarene mine var å få elevene til å jobbe videre med argumentasjonen sin, så jeg henviste til oppgaveteksten, spilte en rolle som skeptiker eller jeg bare konstaterte at jeg hadde oppfattet det de hadde sagt. Både metodedel og analysedel har vist eksempler på lærers rolle i fellesskapet.

De fleste valg og avgrensninger jeg har gjort, er uttrykt og begrunnet, men det finnes unntak. Jeg valgte blant annet å ikke ta med alle individuelle besvarelser, selv om jeg gjorde en analyse av alle. Grunnen er at forskningsspørsmålet etterspør et potensiale, og da er det kanskje hva mulighetene er som er viktigst og ikke bredden, noe som førte til valget om å løfte fram de to bevisene. Deltakelsen til Carl, eller mangelen på den, er et annet eksempel. Å delta eller ikke delta, er jo et fenomen som relaterer seg til læring, og studien min kunne belyst dette i større grad enn hva jeg har gjort. Men av hensyn til forskningsspørsmålet og vektlegging av potensiale, valgte jeg å ikke framheve Carl spesielt.

En strengere begrepsavklaring og begrepsoperasjonalisering kunne gitt meg et bedre språk å formidle forskningen og resultatene mine på. Et eksempel her er mitt valg om å dele argumentasjonen i tre deler; ingen argumentasjon, redegjørelse og bevis. Mitt begrep redegjørelse er nok ikke heldig valgt, da det sammenfaller med en vanlig oversettelse av «rationale» (G. J. Stylianides, 2008). «Min» redegjørelse omfatter <u>blant annet</u> «rationale», men inkluderer også empirisk og ekstern argumentasjon. Jeg velger altså å samle argumentasjon som ikke er god nok til å kvalifisere som bevis i en kategori, og i etterpåklokskapens lys, tenker jeg at begrepene «ikke-bevis» eller «nesten-bevis» nok kunne fungert like godt, om ikke bedre.

Analyseverktøyet jeg utviklet, erfarte jeg som nyttig, men jeg ser at det er rom for å konkretisere og operasjonalisere det enda bedre. Dette er imidlertid en utfordring, ettersom det allerede er ganske stort av hensyn til omfang i og med at jeg kobler Toulmins modell sammen med Stylianides (2007) sitt rammeverk knyttet til lærers grep, samt den tredelte definisjonen av bevis i skolematematikken (A. J. Stylianides, 2007). En refleksjon er at jeg muligens ville fått mer pålitelige konklusjoner på analysen av elevenes argumentasjon om jeg hadde gått enda mer systematisk inn på de tre momentene i bevisdefinisjonen, da en bedre begrepsavklaring muligens ville sikret den indre logikken i analysemodellen i enda større grad.

Min overordnede forskningsmetode har vært kvalitativ, og mitt datamateriale omfatter både skriftlige svar, muntlige utsagn, tegninger og gester. Dette er uttrykksmåtene for elevenes argumentasjon, og ifølge definisjonen av bevis, må også disse representasjonsformene kunne forstås av klassefellesskapet for at resonnementet skal kunne godkjennes som bevis (A. J. Stylianides, 2007). Det har altså vært viktig for påliteligheten til mine analyser, at datamaterialet har tatt hensyn til mangfoldet av språklige uttrykksformer. En kvantitativ undersøkelse i større skala kunne muligens gitt mer generaliserbare resultat, men en slik tilnærming ville gitt utfordringer med hensyn til å analysere noe annet enn elevenes skriftlige arbeid. All informasjon som jeg nå har fått gjennom elevenes muntlige kommunikasjon og samhandlingen elevene imellom, ville da mest sannsynlig gått tapt. Det ville også vært vanskelig å si noe om hvilke trekk ved aktiviteten og/eller hvilke innspill fra lærer som bidro til at elevene utviklet sine argumenter. Jeg mener derfor at en kvalitativ tilnærming med observasjon, ga meg variert og bred informasjon om den aktuelle situasjonen som jeg analyserte, og med det som grunnlag, ble jeg i stand til å si noe om hvordan elevene argumenterte og videreutviklet argumentasjonen sin og hvilken betydning oppgave, interaksjoner og omgivelser hadde på dette arbeidet.

5.4 Avslutning og perspektivering

Hvordan kan du ikke tro på det?! har vært en kvalitativ undersøkelse innenfor feltet matematisk resonnering og rettet mot bevissituasjonen singel-case. Studiens forskningsspørsmål har vært: *Hvilket læringspotensial har oppgaven «Hvor mye saft?» med hensyn til elevers resonnering og argumentasjon?* Jeg oppsummerer nå de behov som motiverte for undersøkelsen og hvordan min forskning har svart på disse behovene. Som en del av refleksjonene, uttrykker jeg også hva jeg mener vil være en naturlig videreføring av forskningen.

Matematikkfagets nye kjerneelement skaper behov for undervisningsmateriell som bidrar til elevers læring av resonnering og argumentasjon. Jeg har gjort erfaringer med *Hvor mye saft?*, og mine funn antyder styrker og svakheter ved denne bestemte oppgaven. Mine resultater, deriblant mitt forslag til revidering, kan være nyttig for ProPrimEd når de gjør videre vurderinger i sitt forskningsprosjekt. Forskningens funn kan ut over dette antyde hva en oppgave og et oppgavedesign bør inneholde for å egne seg til undervisning av resonnering og argumentasjon ved hjelp av bevissituasjonen singel-case. Sett i lys av feltets begrensede kunnskap knyttet til denne spesielle bevissituasjonen, vil det imidlertid være behov for flere prosjekter lignende det jeg har gjennomført. En mulighet er da å undersøke hvordan elevene argumenterer i arbeid med den reviderte utgaven av *Hvor mye saft?*

Det nye kjerneelement skaper også behov for støttemateriell til lærere. Jeg har anvendt Toulmins modell til analyse av elevers multimodale argumentasjon i bevissituasjonen singel-case, og i kombinasjon med Stylianides' (2007) rammeverk og bevisdefinisjon ser jeg konturene av et mulig vurderingsverktøy for lærere i undervisning knyttet til resonnering og argumentasjon. Hvordan verktøyet vil fungere i en mer realistisk klasseromssituasjon, ville derfor vært nyttig å få kunnskap om.

Mangel på læremidler knyttet til bevis gjør det relevant å finne ut hvordan oppgaver med ett korrekt svar, som allerede benyttes i stor grad i skolens matematikkundervisning, kan benyttes som bevisoppgaver. Min forskning på bevissituasjonen singel-case har gitt noen interessante funn som gir indikasjoner på hvilke oppgaver som kan egne seg og hva som kreves av undervisningens tilrettelegging og organisering. Jeg mener det vil være nyttig å identifisere et utvalg av aktuelle oppgaver som kan passe i samme undervisningsdesign som *Hvor mye saft?*, for da kan designet utnyttes for å vise hvordan elever og lærere kan jobbe med bevissituasjonen singel-case i klasserommet.

Resultatene fra min forskning, reiser spørsmål om hvordan et gyldig bevis i singel-case kan tenkes å være en brobygger mellom empirisk argumentasjon og generisk bevis – en overgang som forskning har viet stor oppmerksomhet til uten helt å finne gode svar. Videre forskning på bevissituasjonen singel-case, kan derfor kunne vise seg nyttig med tanke på å bistå elevers argumentasjon i overgangen fra empirisk til generisk.

En grunn for at bevissituasjonen singel-case er aktuell for videre forskning, kan symboliseres av den sammensatte kommentaren: *Hvordan kan du IKKE tro på det?!* Utropet signaliserer at eleven mener at en forklaring virkelig må være unødvendig, mens spørsmålet antyder en innsikt i at egen oppfatning kanskje ikke stemmer og at det er mer som skal til for å si at påstanden er sann. Å godta svar uten begrunnelse, eller å sjekke med fasit, er vel den enkleste måten å komme seg videre på, og i skolen er dette kanskje hovedregelen og ikke unntaket. Selv om ekstern argumentasjon nok vil fortsette å være en naturlig arbeidsform i matematikklasserommet, mener jeg at bevissituasjonen singel-case kan bidra med viktig metakunnskap om bevis til både elever og lærere. Ved å la elevene lage bevis for i alle fall noen av svarene sine, rettes søkelyset mot hva som *egentlig* må til for å stole på at resultatet er sant.

Referanser

Allern, T.-H., & Drageset, O. G. (2017). Out of Syria: A process drama in mathematics with change of roles and perspectives. *Applied Theatre Research*, *5*(2), 113–127. https://doi.org/10.1386/atr.5.2.113_1

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: An essay on the case of proof. *ZDM*, *40*(3), 501–512. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0103-2

Brinkmann, S., & Tanggaard, L. (2012). *Kvalitative metoder empiri og teoriutvikling*. Gyldendal akademisk.

Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 561–566). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_102

Hjelte, A., Schindler, M., & Nilsson, P. (2020). Kinds of Mathematical Reasoning Addressed in Empirical Research in Mathematics Education: A Systematic Review. *Education Sciences*, *10*(10), 289. https://doi.org/10.3390/educsci10100289

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kleven, T. A., & Hjardemaal, F. (2018). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode en hjelp til kritisk tolking og vurdering*. Fagbokforl.

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. Trinn (MAT01-05)*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Kvarv, S. (2014). *Vitenskapsteori tradisjoner, posisjoner og diskusjoner*. Novus.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Nardi, E., & Knuth, E. (2017). Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: How amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions? *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 267–274. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9785-0

Nordin, A.-K., & Björklund Boistrup, L. (2018). A framework for identifying mathematical arguments as supported claims created in day-to-day classroom interactions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *51*, 15–27. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.005

NSD. (u.å.). *Barnehage- og skoleforskning*. NSD. Hentet 12. mars 2022, fra https://nsd.no/personverntjenester/oppslagsverk-for-personvern-i-forskning/barnehage-og-skoleforskning

NTNU. (u.å.). *Behandle personopplysninger i student- og forskningsprosjekt*. https://i.ntnu.no/wiki/-/wiki/Norsk/Behandle+personopplysninger+i+student-+og+forskningsprosjekt

Nyeng, F. (2012). *Nøkkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori*. Fagbokforl.

Pease, A., & Aberdein, A. (2013). Five theories of reasoning: Interconnections and applications to mathematics. *Logic and Logical Philosophy*, *20*(1–2), 7–57. https://doi.org/10.12775/LLP.2011.002

Rasch, I. B. (2018). *Elevers arbeid med resonnering og bevis—En kvalitativ studie av hva som kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinn sitt arbeid med resonnering og bevis*. NTNU. https://hdl.handle.net/11250/2719394

Ringdal, K. (2018). *Enhet og mangfold samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode*. Fagbokforl.

Rø, K., & Arnesen, K. K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers’ arguments in multiplicative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *58*, 100755. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100755

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (2007). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 565–613. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Skott, J., Jess, K., & Hansen, H. C. (2014). *Delta fagdidaktik*. Samfundslitteratur.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321. JSTOR. https://doi.org/10.2307/30034869

Stylianides, A. J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras*, *32*(1), 10 pages. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.14

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom* (First edition). Oxford University Press.

Stylianides, A. J. (2019). Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. *Review of Education*, *7*(1), 156–182. https://doi.org/10.1002/rev3.3157

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(4), 307–332. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: Classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM*, *45*(3), 333–341. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0501-y

Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9–16. JSTOR.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119–127. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3

Säljö, Roger. (2016). *Læring—En introduksjon til perspektiver og metaforer*. Cappelen Damm Akademisk.

Tjora, A. H. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Gyldendal Akademisk.

Toulmin, S. E. (2003). *The Uses of Argument: Bd. Updated ed*. Cambridge University Press; eBook Collection (EBSCOhost). https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=nlebk&AN=120780&site=ehost-live

Valenta, A. (u.å.). *Reasoning and proving in primary education (ProPrimEd)*. 10.

Valenta, A., & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden*, *14*(3), 18 sider. https://doi.org/10.5617/adno.8195

Vygotskij, L. S., & Cole, M. (1981). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (Nachdr.). Harvard Univ. Press.

Wæge, K., & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Universitetsforlaget.

Vedlegg

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Vedlegg 2: Undervisningsplan ProPrimEd

Vedlegg 3: Oppgavedesign brukt i pilotprosjektet, 4 versjoner

Vedlegg 4: Lapper med deler av argumentasjon

Vedlegg 5: Oppgavedesignet i sin endelige form

Vedlegg 6: Kronologisk systematisering av transkripsjonsmatrisene

Vedlegg 7: Detaljert analyseverktøy

Vedlegg 8: Del av utviklet transkripsjonsmatrise til bruk i analyse 2

Vedlegg 9: CFG-gruppas utviklede argumentasjon

Vedlegg 10: ABD-gruppas utviklede argumentasjon

Vedlegg 11: Revidert oppgave C

Vedlegg 1: Samtykkeskjema (2 sider)

Vil du delta i forskningsprosjektet?

Matematisk resonnement i klasserommet

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å få kunnskap om hvordan elever kan lære matematisk resonnering. I dette skrivet gir vi deg og dine foresatte informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Prosjektet er del av en masteroppgave og gjennomføres i løpet av skoleåret 2021/2022. Hensikten med forskningen er å få innsikt i hvordan elever tenker når de løser en problemoppgave og hvordan de kommuniserer løsningen til andre. Det vil også være et mål å identifisere trekk ved oppgaven og aktiviteten som bidrar til at elever utvikler sine matematiske resonnementer.

Problemstillinger det vil være interessant å søke svar på er:

- Hva mener elevene det betyr å løse en oppgave i matematikk?
- Hvordan kan arbeid med en problemoppgave bidra til at elever resonnerer matematisk?
- Hvilke trekk ved oppgaven gjør at elever kan utvikle gode matematiske resonnementer?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Forsker og masterstudent Hege Elisabeth Bakke jobber som lærer på Åsly skole. Du som er elev i 8. klasse, inviteres til å delta i prosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?

- Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du blir med på 1-2 matematikkøkter som blir videofilmet og det blir tatt lydopptak av gruppediskusjoner og klassesamtale. Skriftlige besvarelser blir samlet inn. Øktene blir gjennomført i de vanlige matematikktimene i løpet av høsten 2021. Hele klassen vil arbeide med de samme problemoppgavene (aktiviteten er altså en del av det ordinære opplegget), men de som sier ja til å delta på prosjektet vil være på et rom som er rigget for lyd- og videoopptak.
- Etter opplegget i klasserommet, vil noen grupper av elever bli bedt om å delta på et mindre intervju. Spørsmålene vil dreie seg om det som ble tenkt, sagt og gjort i løpet av arbeidet med problemoppgaven. Elevene vil også få spørsmål som handler om selve oppgaven/oppgaveteksten. Det blir tatt video- og lydopptak også fra disse gruppeintervjuene.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke påvirke ditt forhold til skolen/lærer hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- I tillegg til masterstudent, vil kun veileder ved NTNU ha tilgang til opplysninger og opptak.
- Navnet ditt blir erstattet med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data.
- Opptak gjøres med godkjent utstyr fra NTNU og filer blir kryptert for å sikre at ingen uvedkommende får adgang.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes og masteroppgaven er levert, noe som etter planen er 25. mai 2022. Dette betyr at lista med navn og koder samt alt lyd- og videomateriale blir slettet.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med NTNU ved:
- Masterstudent: Hege Elisabeth Bakke (99435910)
- Veileder: Heidi Dahl (91695300)
- Personvernombud: Thomas Helgesen (93079038)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen Hege Elisabeth Bakke (forsker/masterstudent) og Heidi Dahl (veileder v/NTNU)

Samtykkeerklæring **LEVERES SENEST TORSDAG 21. OKTOBER**

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet ***Matematisk resonnering i klasserommet***, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i klasseromsaktivitet med lyd- og videoopptak.

☐ å delta i gruppeintervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker (elev), dato)

(Signert av foresatt, dato)

Vedlegg 2: Undervisningsplan ProPrimEd

Del C – Oppgave i par/grupper (10 min.)

Løs oppgaven og skriv løsningen så tydelig at alle kan bli overbevist om at løsninga er riktig.

Mormor og morfar har ripsbusker i hagen. Hvert år plukker de mange liter med rips som de blant annet lager saft av. De har tre barnebarn som hjelper til med å fylle safta i flasker. Når de er ferdig, har hvert barn fylt sju hele flasker og sju halve flasker. Hvor mye saft ble det laget i år?

Ingen oppsummering av oppgaven, går rett på neste.

Del D – Se på noen annens løsning (5-10 min.)

Dele ut et argument som er klippet opp i biter. Sette bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening. Prøv å se om det er noe som mangler for at det skal bli en overbevisende forklaring. Ville dere skrevet noe mer?

Del E – Felles oppsummering (15 min.)

Foreslå rekkefølge på lappene. Skrive ned på tavla. Se på overgangen fra «lapp til lapp». Fyll ut detaljer som mangler.

Oppsummere med å få frem noen ord/rutiner:

- Når vi har en hypotese (her er hypotesen løsningen på oppgaven), prøver vi å argumentere for at den er riktig. Da prøver vi å overbevise om at fremgangsmåten er riktig.
- Når man argumenterer for framgangsmåten, må man ta med nok detaljer til at det gir mening, og lage en logisk rekkefølge.

Vedlegg 3: Oppgaver brukt i pilotprosjektet, 4 versjoner (4 sider)

Hvor mye saft?

Navn: ________________

VERSJON 1

Mormor og morfar har ripsbusker i hagen. Hvert år plukker de masse rips som de blant annet lager saft av. De har tre barnebarn som hjelper til med å fylle safta i flasker. Når de er ferdig, har hvert barn fylt sju hele flasker og sju halve flasker. Hvor mye saft ble det laget i år?

A)

Løs oppgaven.

B)

Se på noen annens løsning.

C)

Sett bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening. Prøv å se om det er noe som mangler for at det skal bli en overbevisende forklaring. Ville dere skrevet noe mer?

Hvor mye saft?

Navn: _______________

VERSJON 2

Mormor og morfar har ripsbusker i hagen. Hvert år plukker de masse rips som de blant annet lager saft av. De har tre barnebarn som hjelper til med å fylle safta i flasker. Når de er ferdig, har hvert barn fylt sju hele flasker og sju halve flasker. Hvor mye saft ble det laget i år?

A)

Løs oppgaven. Husk å vise framgangsmåte.

B)

Se på noen annens løsning. Er noe forskjellig fra din egen løsning?

C)

Sett bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening. Prøv å se om det er noe som mangler for at det skal bli en overbevisende forklaring. Ville dere skrevet noe mer? Lag lapper med det dere mener mangler og plasser dem sammen med de andre.

Hvor mye saft?

Navn: _______________

VERSJON 3

Mormor og morfar har ripsbusker i hagen. Hvert år plukker de masse rips som de blant annet lager saft av. De har tre barnebarn som hjelper til med å fylle safta i flasker. Når de er ferdig, har hvert barn fylt sju hele flasker og sju halve flasker. Hvor mye saft ble det laget i år?

A)

Løs oppgaven og skriv løsningen så tydelig at alle kan bli overbevist om at løsninga er riktig.

B)

Se på noen annens løsning. Er noe forskjellig fra din egen løsning? Hva gjør at den er overbevisende, eller hva gjør at den ikke er det?

C)

Sett bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening. Prøv å se om det er noe som mangler for at det skal bli en overbevisende forklaring. Ville dere skrevet noe mer? Lag lapper med det dere mener mangler og plasser dem sammen med de andre. Dere kan både skrive, regne og tegne.

Hvor mye saft?

Navn: ________________

VERSJON 4

Mormor og morfar har ripsbusker i hagen. Hvert år plukker de masse rips som de blant annet lager saft av. De har tre barnebarn som hjelper til med å fylle safta i flasker. Når de er ferdig, har hvert barn fylt sju hele flasker og sju halve flasker. Hvor mye saft ble det laget i år?

A)

Løs oppgaven. Presenter løsningen din så detaljert at du overbeviser alle de andre om at løsningen din er riktig. Du kan både skrive, regne, tegne, forklare og vise.

B)

Se på noen annens løsning. Er noe forskjellig fra din egen løsning? Hva gjør at den er overbevisende, eller hva gjør at den ikke er det? Kan denne løsningen kombineres med din egen slik at resultatet blir en enda bedre løsning?

C)

Sett bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening. Prøv å se om det er noe som mangler for at det skal bli en overbevisende forklaring. Ville dere skrevet noe mer? Lag lapper med det dere mener mangler og plasser dem sammen med de andre. Dere kan både skrive, regne og tegne. For å forklare noe ekstra godt kan det være lurt å ha både regnestykker, tekst og figurer (som viser det samme).

D)

Individuelt

Vedlegg 4: Lapper med deler av argumentasjon

Et tillegg til oppgave *C* på alle versjoner av oppgaven, også den som ble brukt i undersøkelsen.

$3 \cdot 7 = 21$
7 halve flasker er 3,5
$3{,}5 + 3{,}5 + 3{,}5 = 10{,}5$
$21 + 10{,}5 = 31{,}5$
Det ble laget 31,5 flasker saft

Vedlegg 5: Oppgaven i sin endelige form (4 sider)

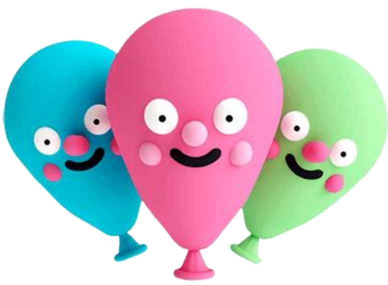
Hvor mye saft?

Navn: ______________________________

Mormor og morfar har ripsbusker i hagen. Hvert år plukker de masse rips som de blant annet lager saft av. De har tre barnebarn som hjelper til med å fylle safta i flasker. Når de er ferdig, har hvert barn fylt sju hele flasker og sju halve flasker. Hvor mye saft ble det laget i år?

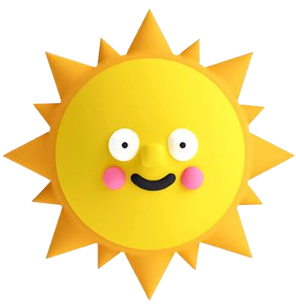
A) Løs oppgaven.

Presenter løsningen så detaljert at det vil overbevise alle andre om at løsningen din er riktig. Dere kan både skrive, regne, tegne, forklare og vise.



B) Se på løsningen til en annen gruppe.

Er noe forskjellig fra din egen løsning? Hva gjør at den er overbevisende, eller hva gjør at den ikke er det? Kan denne løsningen kombineres med din egen slik at resultatet blir en enda bedre løsning?



C) Sett bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening.

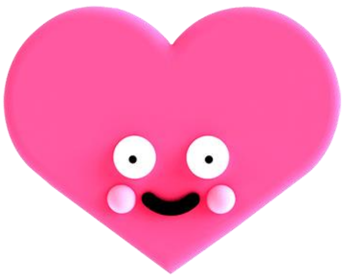
Prøv å se om det er noe som mangler for at det skal bli en overbevisende forklaring. Ville dere skrevet noe mer? Lag lapper med det dere mener mangler og plasser dem sammen med de andre. Dere kan både skrive, regne og tegne. For å forklare noe ekstra godt kan det være lurt å ha både regnestykker, tekst og figurer (som viser det samme).

D) Individuelt svar på oppgaven:

Mormor og morfar har ripsbusker i hagen. Hvert år plukker de masse rips som de blant annet lager saft av. De har tre barnebarn som hjelper til med å fylle safta i flasker. Når de er ferdig, har hvert barn fylt sju hele flasker og sju halve flasker. Hvor mye saft ble det laget i år?

Løs oppgaven uten å samarbeide med andre.

Presenter løsningen din så detaljert at du overbeviser alle de andre om at løsningen din er riktig. Du kan både skrive, regne, tegne, forklare og vise.



Vedlegg 6: Kronologisk systematisering av transkripsjonsmatrisene

<table>
<tr><td colspan="2">T1: Introduksjon av timen med saftoppgaven og selve opplegget</td></tr>
<tr><td>T2a: Arbeid med løsning av saftoppgaven
Gruppe CFG</td><td>T2b: Arbeid med løsning av saftoppgaven
Gruppe ABD</td></tr>
<tr><td>T3a: Overgang fra løsning til vurdering
Gruppe CFG</td><td>T3b: Overgang fra løsning til vurdering
Gruppe ABD</td></tr>
<tr><td>T4a: Vurdering av annen gruppes løsning
Gruppe CFG</td><td>T4b: Vurdering av annen gruppes løsning
Gruppe ABD</td></tr>
<tr><td colspan="2">T5: Overgang fra vurdering til bygging av resonnement</td></tr>
<tr><td>T6a: Bygging av resonnement
Gruppe CFG</td><td>T6b: Bygging av resonnement
Gruppe ABD</td></tr>
<tr><td colspan="2">T7: Oppsummering av byggeoppgaven</td></tr>
<tr><td colspan="2">T8: Individuelle svar på saftoppgaven og avslutning av timen</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="9">T9: Gruppeintervju</td></tr>
<tr><td>T9a</td><td>T9b</td><td>T9c</td><td>T9d</td><td>T9e</td><td>T9f</td><td>T9g</td><td>T9h</td><td>T9i</td></tr>
</table>

Vedlegg 7: Detaljert analyseverktøy

1) Distributiv strategi 2) Additiv strategi 3) Multiplikativ strategi

Løsningsstrategi og argumentasjonsrekke 1

Utgangs-punkt 3 barn 7 hele flasker 7 halve flasker	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Delsvar** 3(7 hele + 7 halve)	**Akseptert sannhet** Den distributive lov	**Delsvar** 3·7 hele + 3·7 halve	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Delsvar** 21 hele og 21 halve	**Akseptert sannhet** 1 halv er 1:2 hele	**Delsvar** 21 hele 10,5 hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Løsning** 31,5 hele flasker til sammen
	Begrunnelse 7 hele og 7 halve + 7 hele og 7 halve + 7 hele og 7 halve = 3(7 hele + 7 halve)		**Begrunnelse** 3(7 hele + 7 halve) = 3·7 hele + 3·7 halve		**Begrunnelse** $3 \cdot 7 = 21$		**Begrunnelse** 21 halve er 21:2 hele = 10,5 hele		**Begrunnelse** $21 + 10.5 = 31{,}5$	

Løsningsstrategi og argumentasjonsrekke 2

Utgangs-punkt 3 barn 7 hele flasker 7 halve flasker	**Akseptert sannhet** 2 halve er 1 hel	**Delsvar** 3 barn 7 hele 3 og en halv hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Delsvar** 10 og en halv flaske hver	**Akseptert sannhet** 1 halv er 1:2 hele	**Delsvar** 10 hele og 0,5 hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Løsning** 10,5 hele flasker hver	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Løsning** 31,5 hele flasker til sammen
	Begrunnelse 4 halve = 2 hele 6 halve = 3 hele 7 halve = 3 hele og en halv		**Begrunnelse** 7 + 3 og en halv		En halv er 1:2=0,5		10 + 0,5 = 10,5		**Begrunnelse** $10{,}5 + 10{,}5 + 10{,}5 = 3 \cdot 10{,}5$	

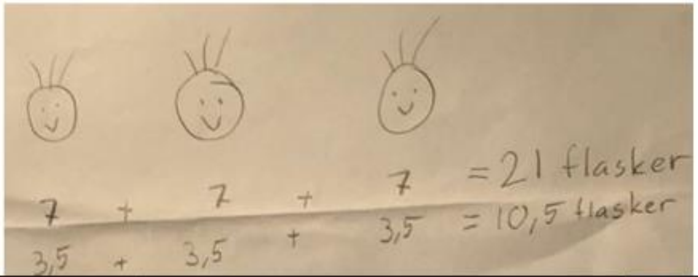
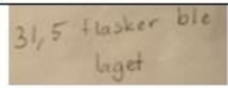
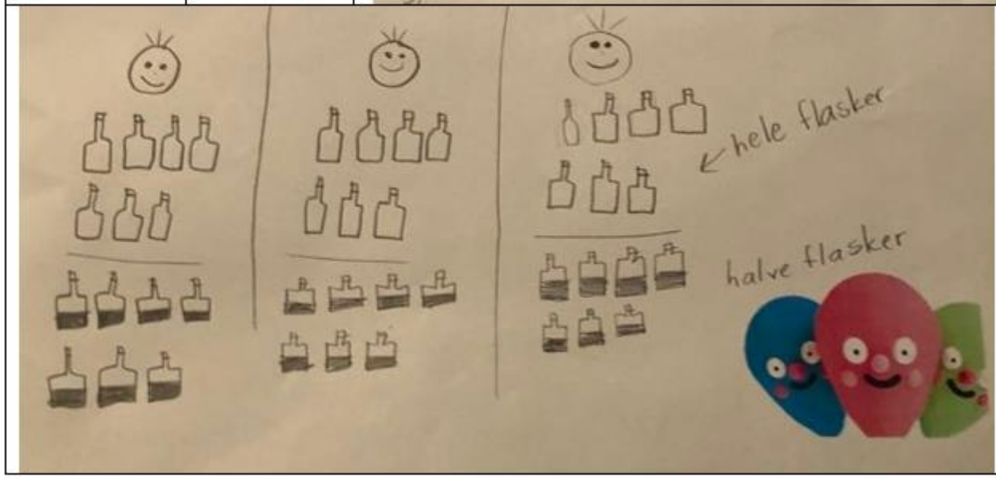
Løsningsstrategi og argumentasjonsrekke 3

Utgangs-punkt 3 barn 7 hele flasker 7 halve flasker	**Akseptert sannhet** 1 halv er 1:2 hele	**Delsvar** En halv er 0,5	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Delsvar** 7 halve = 3,5 hele	**Akseptert sannhet** Den distributive lov	**Delsvar** 3·7 hele + 3· 3,5 hele	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Delsvar** 21 hele 10,5 hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Løsning** 31,5 hele flasker til sammen
	Begrunnelse 1:2 = 0,5		**Begrunnelse** $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 0{,}5 \cdot 7 = 3{,}5$		**Begrunnelse** 3(7 hele + 3,5 hele) = 3·7 hele + 3· 3,5 hele		**Begrunnelse** $3 \cdot 7 = 21$ $3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$		**Begrunnelse** $21 + 10.5 = 31{,}5$	

Vedlegg 8: Del av utviklet transkripsjonsmatrise til bruk i analyse 2

Kodegruppe SOSIALT	Henvisning	Sitat/utdrag	Beskrivelse av påvirkningen Hvordan det som skjer bidrar til å utvikle argumentasjonen	Kobling til annen data, analyse eller teori
Forslag som blir ignorert	T2a.L17: G:	Vi tegner!	Forslaget blir ignorert, men senere viser det seg at det er nettopp en detaljert tegning som gjør at argumentasjonen forbedres med hensyn til å presentere hvilke fakta løsningen deres tar utgangspunkt i	analyse av utviklet argumentasjon for CFG-gruppa
Forslag som blir ignorert	T2b.L50: D	Vi kan tegne flaskene og så tegner vi de halve, og så legger vi dem – nei…	Hvis de andre på gruppa hadde lyttet til forslaget og at de hadde valgt D sin måte å løse problemet på, ville de muligens fått et bevis med en gang	D sin individuelle løsning T8.L.39: Jeg bare fant ut svaret – det er sånn jeg ville regnet ut svaret hvis jeg ikke hadde visst det på forhånd, da
Samhandling	T2b.L23: A:	Det blir ti og en halv…	A godtar ikke uten videre at 31,5 stemmer ut fra D sin utregning med addisjon. A tenker videre selv og er fornøyd når hans utregning 10,5X3 gir samme svar. At begge kommer fram til samme svar, er en validering av svaret som øker sannsynligheten for at det stemmer selv om det ikke beviser at det er sant.	T2b.L22: D: (…) det blir 31,5 da
Uttrykke uenighet	T2b.L61 D:	Nei, det blir jo	Utbruddet gjør at A ser på det som er gjort og samtykker i at det er feil.	
Uttrykke uenighet	T2b.L65 D:	Hvordan fikk du til det?	A visker ut det som er skrevet	
Uttrykke uenighet	T2b.L67: D:	Hæ? Hvordan skal vi skrive regnestykket til sju og en halv flaske?	Utbruddet etterfølges av et spørsmål, og de to andre på gruppa konsentrerer seg om det D spør om. Å uttrykke at man ikke forstår eller er uenig i det som skjer, kan få også de som leder an i diskusjonen til å sikre at argumentasjonen holder mål.	
Skepsis	T2b.L138 L:	Hvis dere tror at dere overbeviser meg med det svaret der?	Elevene er enige i at sånn som det står, er det ikke veldig overbevisende. Det kritiske spørsmålet gjør altså at de vurderer løsningen sin.	
Skepsis	T7.L63 L:	Men… Det tror jeg ikke på	Eleven som får dette svaret, blir nærmest sjokkert og utbryter «hvordan kan du ikke gjøre det?» Protesten fra lærer gjør nok at alle	

Vedlegg 9: CFG-gruppas utviklede argumentasjon (oppgave A)

Utgangspunkt	**Akseptert sannhet**	**Delsvar**	**Akseptert sannhet**	**Delsvar**	**Akseptert sannhet**	**Løsning**	**Argumentasjonsnivå**
Tre barn (L10) Sju hele flasker (L15) Sju halve flasker (L25)		Tre barn Sju hele Tre og en halv (L5)	Den distributive lov Gjentatt addisjon = multiplikasjon	21 (L21) 10,5 (L29)	Addisjon	31,5 (L32)	Redegjørelse
	Begrunnelse Halvparten av sju (L4)		**Begrunnelse** 7+7+7 (L16) = 3 · 7 (L11) 3,5+3,5+3,5 (L27) = 3, 6, 9 (L28)		**Begrunnelse** 21+10,5 (L31)		**Mangler** Forklarer ikke hvorfor halvparten av sju gir antall hele flasker
							
							

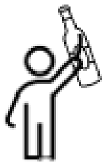
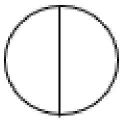
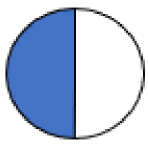
Vedlegg 10: ABD-gruppas utviklede argumentasjon (oppgave A)

Utgangspunkt Det er tre barnebarn som har sju hele flasker hver, og sju halve (L10-13)	**Akseptert sannhet**	**Delsvar** Det blir 21 hele og 21 halve (L14)	**Akseptert sannhet** 2 halve er 1 hel	**Delsvar**	**Akseptert sannhet**	**Løsning**	**Argumentasjonsnivå** Redegjørelse
	Begrunnelse 7 · 3 (L98)		**Begrunnelse** Halverer 21 (L15) **Begrunnelse** 21· 0,5 (L98)		**Begrunnelse**		**Mangler** Ufullstendig resonnement Hypotese mangler
Utgangspunkt Det er tre barnebarn som har sju hele flasker hver, og sju halve (L10-13)	**Akseptert sannhet** En halv pluss en halv er 1 hel (L157)	**Delsvar** 3 barn 7 hele 3 og en halv hele	**Akseptert sannhet** Addisjon	**Delsvar** 3 barn 10 og en halv flaske på hvert barnebarn	**Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon (L22)	**Løsning** 31,5 hele flasker til sammen	**Argumentasjonsnivå** Redegjørelse
	Begrunnelse 6 halve er 3 hele (L70) **Begrunnelse** 7 halve blir 3 fulle og 1 halv (L17)		**Begrunnelse** Legger sju til 3 og en halv (L18)		**Begrunnelse** 3 · 10,5 = 31,5 (L25)		**Mangler** *6 halve er 3 hele* må kobles sammen med akseptert sannhet
	1 halv + 1 halv = 1 hel 7 halv = 3 og 1 halv						
Utgangspunkt Det er tre barnebarn som har sju hele flasker hver, og sju halve (L10-13)	**Akseptert sannhet**	**Delsvar** 3 barn 7 hele 3 og en halv hele	**Akseptert sannhet** Den distributive lov **Akseptert sannhet** Gjentatt addisjon = multiplikasjon	**Delsvar** 21 hele 10,5 hele	**Akseptert sannhet** Addisjon (L81)	**Løsning** 31,5 hele flasker til sammen	**Argumentasjonsnivå** Redegjørelse
	Begrunnelse 7 · 0,5 = 3,5 (L74)		**Begrunnelse** 3 · 7 = 21 (L78) 3 · 3,5 = 10,5 (L94)		**Begrunnelse** 21 + 10.5 = 31,5 (L108)		**Mangler** Begrunnelse for at 0,5 er det samme som en halv
	7 × 0.5 = 3.5		3 × 7 = 21 3.5 × 3 = 10.5 3 og 1 halv ganger 7 = 10 og 1 halv 7 hel og det er tre barneburn = 21 hel		21 / 10.5 = 31.5 21 hel pluss 10 og 1 halv = 31 og 1 halv		

Vedlegg 11 : Revidert oppgave C (2 sider)

Instruks og lapper til bygging av argumentasjon

OPPGAVE C: Sett bitene sammen i en rekkefølge slik at det gir mening
Dere skal nå lage en overbevisende forklaring ved hjelp av lappene.
Om det er lapper som ikke hører til, legger dere dem til side.
Om det er noe som mangler, bruker dere de blanke lappene.
Det kan være lurt å ha både tekst, regnestykker og figurer som viser det samme.
Alle lappene skal klippes ut, og til slutt skal dere lage en plakat hvor dere plasserer lappene i den rekkefølgen dere kom fram til. Dere skal presentere resultatet for de andre gruppene.

			
7 halve = 3,5 hele			
	halv + halv = hel		
En hel er to halve		31,5 flasker til sammen	
	7 + 3,5 = 10,5		3 · 3,5 = 10,5
Barna laget 24,5 flasker til sammen			
			Hel : 2 = halv
		En halv er en hel delt i to like biter	

Ekstra blanke lapper til bygging av argumentasjon

Hege Elisabeth Bakke

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

NTNU
Kunnskap for en bedre verden