Amdal, Sanne, Våge

Tyrannen – et eventyr

Utgangspunktet for denne teksten er et manuskript som vi, Anders og Arne, fikk av vår gode kollega Jostein Våge da han ryddet seg ut av kontoret på NTNU for noen år siden. Jostein døde i januar 2021 i en alder av 85 år. Han var en varm forkjemper for induktiv tenkning, altså det å komme til erkjennelser gjennom å studere eksempler og se etter mønstre. Trofaste lesere av Tangenten vil huske noen av tekstene Jostein (1998, 1999, 2009, 2010, 2011, 2012) har skrevet i bladet. I de fleste tekstene er induktiv tenkning sentralt. Manuskriptet vi fikk av Jostein, er et matematikkeventyr. Vi har bearbeidet historien og sier noe om hvordan den kan brukes i matematikkundervisninga.

I undervisninga vil det ofte være hensiktsmessig å framheve matematiske arbeidsrutiner eller problemløsingsstrategier når de tas i bruk. Det kan være regler som mange lærere synes er helt selvfølgelige, men som kanskje ikke er like selvfølgelige for elevene. I det følgende tar vi for oss noen slike. Som et utgangspunkt ser vi på en oppgave som egner seg som underholdning samtidig som den belyser viktige matematiske sammenhenger. Vi kaller det en eventyrtime, og historien er:

Det var en gang en tyrann som styrte med hard hånd i et fjernt land. Som tyranner flest skapte han seg mange uvenner. For at de skulle stelle til minst mulig problemer for ham, gjorde han det til en vane å kaste dem i fengsel. Etter hvert ble han nødt til stadig å utvide fengslene og bygge nye. For å gjøre fangene vennligsinnede la han seg til den vanen at han en gang i året, på sin fødselsdag, ga amnesti til en del av fangene. Merkelig nok var han også bitt av matematikkbasillen, og da fødselsdagen nærmet seg, fant han ut at han ville velge de fangene som skulle få amnesti, ved å bruke en matematisk regel. Ved hvert fengsel var det like mange fangevoktere som det var fanger. Det gjorde fengslene sikre og, siden det var stor arbeidsløshet i landet, skaffet han på det viset arbeid til mange.

Fødselsdagen nærmet seg, og det gikk rykter om at alle de som hadde akkurat to krittstreker på celledøra, ville få amnesti. Krittstrekene ble tegnet av fangevokterne etter følgende regel: Fangevokter nummer 1 satte først en krittstrek

Anders Sanne
NTNU
anders.sanne@ntnu.no

Arne Kristian Amdal
NTNU
arne.amdal@ntnu.no

Jostein Våge
Tidligere ved NTNU

på celledør nummer 1, og siden på hver celle. Han startet i første etasje i den ene av fløyene i fengslet og fortsatte systematisk videre. Fangevokter nummer 2 satte først en strek på celledør 2 og siden på hver andre celledør i hele det store fengslet. Fangevokter nummer 3 satte først en strek på celledør 3, og siden på hver tredje celledør. En kunne tydelig høre hvordan han mumlet 1, 2, 3, 1, 2, 3, … på ferden gjennom fengslet. De neste fangevokterne fulgte de samme rutinene, slik at fangevokter nummer 4 først satte en strek på celledør 4 og siden på hver fjerde celledør videre, og slik fortsatte de til alle fangevokterne hadde gjort jobben sin.

Læreren kan nå velge å si til klassen: Siden dere alle blir kastet i fengsel like før tyrannens fødselsdag og dere alle har hørt ryktet om at alle som har akkurat to streker på celledøra, får amnesti, har dere store sjanser for å slippe ut av fengslet ganske snart. Dere får nemlig selv bestemme hvilke celler dere vil sitte på. Det er bare én begrensning, og det er at alle cellene opp til celle nummer 100 allerede er fullsatt. Dere får bare én sjanse, og her gjelder regelen Den som kommer først til mølla …

I fengslet har de også en regel om at dersom en fange gir andre fanger tips om hvordan de skal beregne et godt cellenummer, vil vedkommende bli kastet på en celle som i alle fall vil være stengt i minst ett år. Det eneste en fange har lov til å si, er det cellenummeret han eller hun velger. Det kan derfor være nærliggende å tenke at man legger opp til en konkurranse i klasserommet der elevene jobber individuelt. Analogt til det «kappløpet» fangene i fengslet må gjennom. Men læreplanen slår fast at «matematikk skal bidra til at elevane utviklar eit presist språk for resonnering, kritisk tenking og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Derfor er det neppe lurt å legge opp til et individuelt kappløp i klasserommet. Vi foreslår at man heller deler elevene inn i små grupper, og lar dem samarbeide om å løse oppgavene. Man kan for eksempel følge Peter Liljedahls (2018) råd om å dele elevene inn i tilfeldige grupper som jobber på vertikale tavler langs veggene i klasserommet. En slik organisering kan bidra til god kunnskapsflyt mellom gruppene, og det blir lettere å lykkes med å få til en god faglig samtale der hele klassen deltar.

Det er naturlig å forsøke en induktiv tilnærming, og her fins noen enkle strategier som med fordel kan framheves i klasserommet. En av disse er: Forsøk først systematisk med små tall. For oss lærere vil dette kanskje være så selvfølgelig at vi glemmer å nevne det, men erfaring viser at mange elever prøver usystematisk og hopper fra ett tall til et annet. En annen nyttig regel er: Samle alle tallene som oppfyller kravet, på ett sted. Da er det lettere å se hvilke hypoteser du kan formulere.

Advarsel til leseren: Dersom du selv vil forsøke å finne ut hvilke tall som er «lykketall», må du vente med å lese videre.

Med en oppgave som denne kan en få praktisert nyttige problemløsningsstrategier i matematikk. For å få en oversikt er det viktig å samle data. Hvilke celledører har akkurat to krittstreker? Det er fornuftig å starte med små tall, og gjerne stille dem opp i rekkefølge. En mulighet til å komme godt i gang kan være å tegne de første 20 dørene, for deretter å utføre oppgavene til de 20 første fangevokterne. Da viser det seg at antallet streker på celledørene vil være som i figur 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6

Figur 1

Stiller vi de dørnumrene hvor antall streker er 2, opp i rekkefølge, får vi et bedre overblikk: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Vi antar at flere elever på ungdomstrinnet eller vg1 vil kjenne igjen disse tallene og kunne formulere en hypotese. Da vil de også kunne velge fornuftige celler å sitte på slik at de slipper ut på tyrannens fødselsdag. Det har betydning at cellenummer 1 ikke er med. Det fins nok mange grunner til at 1 ikke regnes som primtall. Én kan være at det blir upraktisk stadig å måtte føye til «unntatt 1» i mange tallteoretiske setninger, som for eksempel aritmetikkens fundamentalsetning, som sier at alle naturlige tall kan faktoriseres på en entydig måte. Nå er den vanligste definisjonen av et primtall de tall som har nøyaktig to divisorer. Det er nettopp dette denne historien illustrerer. Caldwell et al. (2012) gir en historisk oversikt over tenkningen rundt dette spørsmålet.

Det følgende året gjentar historien seg. Like før tyrannens fødselsdag blir hele klassen kastet i fengsel. Igjen hadde det ryktes at tyrannen ville gi amnesti til noen av fangene. Han tenkte at denne gangen ville han lure fangene ved å bruke en annen regel. Likevel hadde noen fått nyss om hva som kom til å skje. Det gikk rykter om at han dette året ville gi amnesti til de fangene som satt bak celledører med et odde antall streker. Metoden til å sette strekene på celledørene var likevel den samme som året før. Igjen var de første 100 cellene opptatt. Hvilke celler ville elevene nå velge den dagen de ble tatt til fange?

Elevene får igjen muligheten til å praktisere en god strategi: Finn små tall som tilfredsstiller kravet, og skriv dem i rekkefølge. I den første korridoren vil tallene være: 1, 4, 9, 16, ...

Mange vil være i stand til å formulere en hypotese, men hvordan kan en vise at den er riktig?

En god måte å se sammenhengen på kan være å se på mengden av divisorer til noen tall som er kvadrattall, og noen som ikke er det. Vi bruker 36 som eksempel. Divisorene kommer gjerne i par der produktet er 36. For eksempel er $3 \cdot 12 = 36$. Derfor er både 3 og 12 divisorer til 36. Hvis man så lister opp alle divisorene til 36, legger man merke til at tallet 6 er det eneste tallet som ikke er en del av et par. Slik vil det være for alle kvadrattall n^2. Alle divisorene kommer i par unntatt n. Det er nettopp dette som er nøkkelen til løsningen av dette siste fengselsproblemet.

Begge problemene kan gi en økt innsikt i tallsystemet vårt som kan være nyttig også i andre sammenhenger. I tillegg får en illustrert gode arbeidsrutiner som kan være nyttige ved undersøkelser og problemløsning.

Mulige variasjoner av oppgaven

Problemet kan ytterligere varieres. Vil man for eksempel kunne finne igjen alle naturlige tall på minst én celledør? Utfordre elevene med tall som 7 eller 10. Litt leting gir at det vil stå 7 streker på dør nummer 64 og 10 streker på dør nummer 48. Hva kjennetegner disse tallene? Vi har $48 = 2^4 \cdot 3$. Kanskje kan noen elever til og med komme så langt som til å si at 10 streker på en dør svarer til cellenummer av en viss form, nemlig produktet av ett primtall og en fjerdepotens av et annet primtall?

Antall streker på celledørene er tett knyttet til antall divisorer i cellenummeret. I GeoGebra finnes det en kommando som gir antall divisorer til et gitt tall. Divisorer[48] gir for eksempel 10 til svar. Med denne kommandoen blir en oversikt som tabellen i figur 1 lett å lage, og en slik tabell kan brukes som utgangspunkt for å oppdage nye sammenhenger. Lesere som har lest tallteori, vil gjenkjenne antall divisorer til et tall n som verdien av den tallteoretiske funksjonen τ. For eksempel er $\tau(48) = 10$. Et kjent teorem sier at hvis $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdots p_r^{k_r}$, der p_1, p_2, p_3, ..., p_r er ulike primtall, så er $\tau(n) = \Pi_{i=1}^{r}(k_i + 1)$. Dermed blir $\tau(48) = 5 \cdot 2 = 10$. Målet trenger selvsagt slett ikke å være at elevene skal innse dette teoremet og formulere det i en slik språkdrakt, men elevene vil ha kommet svært langt om de innser at problemet med antall divisorer i virkeligheten er et kombinatorisk problem.

```
antallDivisorer = 0
tall = int(input('Skriv inn et heltall: '))

# Gå gjennom alle tall fra 1 til og med tall
for i in range(1, tall+1):
    # Hvis vi får null til rest, er tall delelig med i
    if tall % i == 0:
        antallDivisorer += 1

print(f'Tallet {tall} har {antallDivisorer} divisorer.')
```

Figur 2

Tallteoretiske problem som dette er velegnet til å øve algoritmisk tenkning (Gjøvik & Torkildsen, 2019) og programmering i matematikkfaget. Det gjelder alle problemstillingene som det er vist til i denne artikkelen. Den korte koden på figur 2 viser for eksempel hvordan man til et naturlig tall n kan få ut antall divisorer, $\tau(n)$.

Utforsking og problemløsning er et av kjerneelementene i den nye læreplanen, og i denne artikkelen har vi gjennom Våges matematikkeventyr ønsket å minne om kjente problemløsningsstrategier som å se etter mønster i en systematisk oversikt og å samle alle tallene som oppfyller kravet, på ett sted.

Referanser

Caldwell, C. K., Reddick, A., Xiong, Y. & Keller, W. (2012). The history of the primality of one: A selection of sources. *Journal of Integer Sequences, 15*(9).

Gjøvik, Ø. & Torkildsen, H. A. (2019). Algoritmisk tenkning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(3), 31–37.

Liljedahl, P. (2018). Building thinking classrooms – Teaching and learning secondary school mathematics: Canadian perspectives in an international context. I A. Kajander, J. Holm & E. J. Chernoff (red.), *Teaching and learning secondary school mathematics. Advances in mathematics education* (s. 307–316). Springer International Publishing.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn.* Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier

Våge, J. (1998). Bare en liten brøk. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 9*(4), 2–5.

Våge, J. (1999). Om å forstå og å forklare. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 10*(2), 11–14.

Våge, J. (2009). Apollonius' sirkler. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 20*(3), 25–27.

Våge, J. (2010). Konstruksjon av kvadratrotstørrelser. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 21*(3), 46–47.

Våge, J. (2011). Omforming av arealer. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 22*(3), 37–39.

Våge, J. (2012). Suksessive tall – en undersøkelse. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 23*(1), 24–26.