Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Ragnhild Beate Boge

"Jeg har aldri hørt ordet funksjon blitt brukt i den sammenhengen før"

En kvalitativ studie av spillet Slagskip og elever på 9. trinn sine kunnskaper om koordinatsystemet og lineære funksjoner

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Solveig Voktor Svinvik
Mai 2022

NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Ragnhild Beate Boge

"Jeg har aldri hørt ordet funksjon blitt brukt i den sammenhengen før"

En kvalitativ studie av spillet Slagskip og elever på 9. trinn sine kunnskaper om koordinatsystemet og lineære funksjoner

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Solveig Voktor Svinvik
Mai 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Sammendrag

Hensikten med denne oppgaven har vært å bidra med mer forskning innenfor temaet om elevers kunnskaper og tanker rundt koordinatsystemet og lineære funksjoner. I tillegg vil denne studien være med å bidra til mer forskning på spillbasert læring og spesielt på spillet Slagskip. Studiens problemstilling er følgende: *Hvordan kan spillet Slagskip gi innsikt i elever på 9. trinn sin kunnskap om koordinatsystemet og lineære funksjoner?* For å belyse denne problemstillingen var oppgavens fokus å se på elevenes strategier og hva de viste av elevenes kunnskaper og hvilke muligheter for videre arbeid Slagskip kunne skape om temaet koordinatsystemet og lineære funksjoner.

For å belyse problemstillingen har det blitt brukt kvalitativ forskningsmetode i form av en casestudie i en klasse på 9. trinn. Her ble elevene observert mens de spilte Slagskip i tillegg til at noen elever ble intervjuet i etterkant av økten. Under intervjuet fikk elevene spørsmål om strategier og oppgaver med fokus på ulike representasjoner og representasjonsoverganger innenfor funksjoner. I tillegg til observasjon og intervju ble også elevarbeid samlet inn slik at det ble mulighet for triangulering. På den måten kunne en sikre kvaliteten på studien på en best mulig måte. Datamaterialet ble analysert ved bruk av både forhåndsdefinerte kategorier og kategorier utviklet spesielt for denne studien for å kunne besvare problemstillingen.

Studien viser at Slagskip sammen med et godt etterarbeid kan gi innsikt i elevenes kunnskaper om koordinatsystem og lineære funksjoner på flere ulike måter. Elevenes kunnskaper kommer til syne gjennom samtaler og diskusjoner, valg av strategier og i arbeid med oppgaver i etterkant av å ha spilt Slagskip. Resultatene viser også at versjonen av Slagskip som ble brukt i denne studien, kan være et godt verktøy for mengdetrening av identifisering og plotting av punkter i koordinatsystemet. Slagskip kan også gi elevene øvelse i andre ferdigheter enn å bevege seg i koordinatsystemet som for eksempel kommunikasjon, argumentasjon, samarbeid og grunnleggende ferdigheter. Studien viser også at arbeidet læreren legger opp til i etterkant av at elevene har spilt Slagskip, er viktig. Ved å få oppgaver med Slagskip som kontekst klarte elevene å arbeide med flere ulike representasjoner for funksjoner og overganger mellom disse. På den andre siden viste analysen at Slagskip var et begrenset hjelpemiddel ved introduksjon av funksjoner. Under intervjuet kom det til syne noen kritiske punkter hos elevene i arbeid med koordinatsystemet og funksjoner. Blant annet klarte ikke elevene å se sammenhengen mellom konstantleddet i den algebraiske representasjonen og grafens skjæringspunkt med y-aksen i den grafiske representasjonen. Også arbeid med negative tall i forbindelse med grafers plassering i koordinatsystemet viste seg å være en utfordring for enkelte elever i studien.

Abstract

The purpose of this thesis has been to contribute with more research within the subject of students' knowledge and thoughts about the coordinate system and linear functions. In addition, this study will contribute with more research on game-based learning and especially on the game called Battleship. The study's research question was as follows: *How can the game Battleship provide insight into 9th grade students' knowledge of the coordinate system and linear functions?* To shed light on this problem, the focus of this thesis was to look at the students' strategies and what they showed of the students' knowledge, and what opportunities for further work Battleship could create on the topic of the coordinate system and linear functions.

To shed light on the problem, a qualitative research method has been used in the form of a case study in a 9th grade classroom. Here, the students were observed while playing Battleship. In addition to the observation, some students were interviewed after the session. In the interview, the students were asked about their strategies and given tasks with focus on different representations and transformations with representations within the theme of functions. In addition to observation and interviews, student work was also collected so that it became possible to triangulate the material to ensure the quality of the study. The data material was analyzed using both predefined categories and categories developed specifically for this study in order to answer the research question.

The study shows that Battleship, together with assignments after playing can provide insight into the students' knowledge of coordinate systems and linear functions in several different ways. The students' knowledge is observed through conversations and discussions, choice of strategies and in the tasks after they played Battleship. The results also show that the version of Battleship used in this study may be a good tool for mass training of identification and plotting of points in the coordinate system. Battleship can also give the students practice in skills other than moving in the coordinate system such as communication, argumentation, cooperation, and basic skills. The study also shows that the work the teacher prepares for the students to do after they have played Battleship, is important. By giving the students tasks with Battleship as a context after they have played the game, the students were able to work with several of the different representations and transformations of functions. On the other hand, the analysis showed that Battleship is not as appropriate for introducing functions. During the interview, some critical points in the students' work with the coordinate system and linear functions emerged. Among other things, the students were unable to see the connection between the constant in the algebraic representation of a function and the graph's y-intercept in the graphic representation. Working with negative numbers in connection with the placement of the graph in the coordinate system, also proved to be challenging for some students in the study.

Forord

Denne masteroppgaven ble skrevet skoleåret 2021/2022 og markerer både slutten på en toårig master i matematikkdidaktikk og min studietilværelse gjennom seks år ved NTNU i Trondheim. Arbeidet med denne masteroppgaven har vært utfordrende og krevende, men også spennende og lærerikt.

I prosessen har det vært mange som har hjulpet til, støttet og vist interesse for arbeidet mitt, noe jeg setter stor pris på. Først vil jeg takke min veileder, Solveig Voktor Svinvik. Takk for støttende kommentarer, verdifulle diskusjoner, oppmuntrende ord og konstruktive råd. Videre vil jeg takke læreren som viste interesse og stilte klassene sine til disposisjon til både pilotering og datainnsamling. Takk også til elevene som deltok i studien, og spesielt de fire guttene som ble filmet og intervjuet under datainnsamlingen. Jeg vil også sende en stor takk til medstudenter på matematikkdidaktikk og resten av gjengen fra fagdidaktikk. Takk for to fine år med gode diskusjoner, oppmuntrende ord, faste og lange lunsjpauser, ligretto, masse latter og gøye påfunn, både på og utenfor skolen. Disse årene hadde ikke vært det samme uten dere, så tusen takk! Kollektivet og gode venner fortjener også en stor takk. Dere har vært et pusterom og fristed når det har vært behov for en liten pause fra arbeidet med masteren. Til slutt må jeg også gi en stor takk til familien. Takk for all god støtte og veiledning gjennom hele studiet. Tusen takk!

Trondheim, mai 2022

Ragnhild Beate Boge

Innholdsfortegnelse

Figuroversikt XI
1 Innledning 1
1.1 Bakgrunn og formål 1
1.2 Tidligere forskning på spillbasert læring 2
1.3 Forskningsspørsmål og fremgangsmåte 3
1.4 Oppgavens oppbygning 4
2 Teori 5
2.1 Matematikk og algebra 5
2.1.1 Matematisk tenking 5
2.1.2 Algebra 6
2.1.3 Algebraisk resonnering 7
2.2 Koordinatsystem og lineære funksjoner 8
2.3 Representasjoner 10
2.3.1 Matematiske begreper 10
2.3.2 Transformasjoner 11
2.3.3 Representasjoner av funksjoner 12
2.3.4 Vanskelighetsgrader til representasjonsoverganger 13
3 Slagskip 15
3.1 Historisk bakgrunn 15
3.2 Spillets oppbygning 15
3.3 Utvikling og tilpasning av Slagskip 16
4 Metode 19
4.1 Kvalitativ metode 19
4.1.1 Casestudie 19
4.1.2 Triangulering 20
4.1.3 Utvalg 20
4.1.4 Observasjon 21
4.1.5 Intervju 22
4.2 Forberedelser til datainnsamlingen 22
4.2.1 Utarbeiding av undervisningsopplegg og intervjuguide 22
4.2.2 Pilotering 23
4.3 Gjennomføring av datainnsamling 24
4.4 Metode for å analysere datamaterialet 25
4.5 Forskningens kvalitet 27

4.5.1 Pålitelighet (reliabilitet) 27
4.5.2 Gyldighet (validitet) 28
4.6 Forskningsetikk 28
4.7 Metodekritikk 29
5 Analyse 31
5.1 Elevenes strategier i spillet Slagskip 31
5.1.1 Strategier basert på elevenes innsikt 32
5.1.2 Strategier basert på elevenes antakelser 36
5.2 Matematiske kjennetegn 39
5.2.1 Grafisk representasjon 40
5.2.2 Algebraisk representasjon 43
5.2.3 Transformasjoner ved sammenligning av representasjoner 46
6 Diskusjon 51
6.1 Elevenes strategier og kunnskap 51
6.2 Representasjoner og transformasjoner i etterarbeidet 54
6.3 Slagskip sin mulighet til å gi innsikt i elevenes kunnskaper 57
7 Avslutning og perspektivering 60
8 Litteraturliste 63
Vedlegg 67
Vedlegg A: Informasjons- og samtykkeskjema 67
Vedlegg B: Intervjuguide med tilhørende tabeller 69
Vedlegg C: Transkripsjonskoder 72
Vedlegg D: Regelark Slagskip 73
Vedlegg E: Ekstraregler til Slagskip 74
Vedlegg F: Spillebrett Slagskip (-2 til 2) 75
Vedlegg G: Spillebrett Slagskip (-3 til 3) 76
Vedlegg H: Felles koordinatsystem 77

Figuroversikt

Figur 1: Illustrasjon av et punkt i koordinatsystemet 8
Figur 2: Illustrasjon av en funksjons stigningstall og konstantledd 9
Figur 3: Oversikt over representasjonsregistre som kan brukes i matematiske prosesser (Duval, 2006, s. 110) 12
Figur 4: Overgangsprosesser (Janvier, 1987, s. 28-29) 13
Figur 5: Oversikt over elevers evne til å gjennomføre representasjonsoverganger (Bossé et al., 2011, s. 127) 14
Figur 6: Illustrasjon av matematisk (venstre) og kommersiell (høyre) versjon av Slagskip ... 16
Figur 7: Illustrasjon av oppsett av spillet Slagskip under datainnsamlingen 23
Figur 8: Elevenes strategier i spillet Slagskip 25
Figur 9: Kjennetegn og representasjoner i elevenes arbeid i etterkant av spillet Slagskip 26
Figur 10: Illustrasjon av spillsituasjon 1 34
Figur 11: Illustrasjon av spillsituasjon 2 35
Figur 12: Illustrasjon av spillsituasjon 3 36
Figur 13: Illustrasjon av elevens skisse av to linjer med likt stigningstall, men ulikt konstantledd. 48

1 Innledning

1.1 Bakgrunn og formål

Gjennom lærerutdanningen min har jeg fått mulighet til å bruke ulike aktiviteter når jeg har undervist i matematikk, hvor en av disse aktivitetene har vært spillet Slagskip. Slagskip tar utgangspunkt i koordinatsystemet hvor hver spiller plasserer ut skip som motspilleren skal prøve å treffe ved å angi ulike koordinater. Dette spillet tok jeg i bruk i en klasse på 9.trinn hvor elevene skulle begynne med temaet koordinatsystemet og funksjoner. Jeg tenkte derfor at Slagskip kunne være en fin mulighet til å introdusere temaet på en litt gøy måte, og der hadde jeg rett! Jeg observerte underveis mens elevene spilte, at de ble veldig engasjerte og motiverte for å gjøre det godt i spillet. Etter timen satt jeg likevel igjen med noen spørsmål; fikk elevene noe mer ut av Slagskip enn at det var underholdende? Vil det at vi spilte Slagskip i denne timen ha noe å si når elevene skal lære om funksjoner senere?

Som nevnt brukes koordinatsystemet som spillebrett i spillet Slagskip. Å kunne lese av og tolke en graf, i for eksempel et koordinatsystem, kan i dag nesten bli sett på som allemannseie i vårt samfunn. De som ikke er i stand til dette, vil kunne gå glipp av informasjon i for eksempel nyhetene eller i lærebøkene i flere fag. Derfor er det en viktig oppgave å gi elevene solid undervisning i temaet om koordinatsystemet og funksjoner. Likevel viser forskning at elever gjør det dårligere innenfor det matematiske temaet algebra, som ifølge Kaput (2008) inkluderer blant annet funksjoner. TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) er en internasjonal studie med fokus på matematikk og naturfag som har blitt gjennomført på 4. og 8. trinn hvert fjerde år siden 1995 (Bergem et al., 2016). På ungdomstrinnet er matematikk delt inn i fire temaer; tall, algebra, geometri og sannsynlighet. Den siste studien som ble gjennomført i 2019, viser at norske elever på ungdomstrinnet presterer langt svakere innenfor temaet algebra enn de andre temaene i studien (Mullis et al., 2020). En kan se at norske elever har hatt svake resultater i temaet algebra i TIMSS-undersøkelsene helt siden 2007. Ideen til dette masterprosjektet kom blant annet fra resultatene Klegseth (2018) fikk i sin masteroppgave. Han fant ut at elever har for liten kunnskap om koordinatsystemet til å løse oppgaver om lineære funksjoner i programmet GeoGebra. Dette samsvarer dermed med resultatene fra TIMSS-undersøkelsene. Leinhardt et al. (1990) forklarer at å lære algebra og lineære funksjoner kan være vanskelig for elevene, blant annet fordi koordinatsystemets dualitet i form av retningen til positive og negative verdier kan være forvirrende for elevene. Kranz et al. (2013) skriver også at elever kan ha vansker med å forstå koordinatsystemet ettersom de ofte fokuserer på å memorere en operasjon i stedet for å forstå de store ideene rundt dette systemet. For eksempel vil elever uten en dypere forståelse for koordinatsystemet bli forvirret over hvordan et punkt skal skrives. Memorering vil også gjøre at elevene vil ha vanskelig for å forstå begreper som vil bli presentert senere, slik som for eksempel funksjoner. Dette kan være uheldig ettersom at funksjonsbegrepet er et av de mest sentrale temaene i dagens matematikk (Dreyfus & Eisenberg, 1982). Funksjoner og grafer representerer også et av de tidligste stadiene i matematikk hvor elevene bruker symboler for å forstå en annen representasjon som for eksempel en graf (Leinhardt et al., 1990), noe som er med å argumentere for viktigheten av forskning på temaet om koordinatsystem og funksjoner.

Duval (2006) skriver at en representasjon kan brukes for å presentere et matematisk objekt. En representasjon er altså noe vi kan bruke når vi skal arbeide med et matematisk objekt. Et eksempel på dette er å bruke en graf eller et funksjonsuttrykk for å representere en funksjon. Det er viktig at en ikke forveksler hva som er det matematiske objektet og hva som er

representasjonen. Janvier (1987, s. 28) presenterer en tabell med oversikt over fire typer representasjoner innenfor det matematiske temaet funksjoner og overganger mellom disse. De fire representasjonene er verbal forklaring, tabell, graf og formel (likning). Det er representasjonene og overgangene Janvier (1987) presenterer, som Bossé et al. (2011) tar utgangspunkt i, i sin forskning der de ser på vanskelighetsgraden til de ulike overgangene. Her presenteres overganger der en skal ende opp med en tabell som noen av de enkleste overgangene for elevene å få til, mens overganger som skal ende i en verbal forklaring, er de overgangene elevene sliter mest med.

I læreplanen for 8. trinn kan en finne flere kompetansemål som kan knyttes til temaet algebra. Det viser at algebra er et tema som skal være arbeidet med i forkant av TIMSS-undersøkelsen. At elevene skal kunne «representere funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom representasjonene» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 12) er et eksempel på et kompetansemål for 8. trinn som går under temaet algebra. Kompetansemålet sier at elevene skal ha kunnskap om ulike representasjoner for et matematisk objekt og kunne bevege seg mellom disse. Representasjoner har ifølge Dreyfus (2002) en viktig funksjon i matematikken. Det kan en også se i læreplanen der det er et eget kjerneelement som heter «representasjon og kommunikasjon». I læreplanen blir det nevnte kjerneelementet presentert slik:

> ***Representasjon og kommunikasjon***
>
> *Representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske. Kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer. Elevene må få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler. Elevene må få mulighet til å forklare og begrunne valg av representasjonsform. Elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner. (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3)*

Det er som nevnt blitt gjort mye forskning rundt temaet om representasjoner i skolematematikken. Noen har sett på hvilke representasjoner som kan være vanskelige for elever (Bossé et al., 2011), mens andre har sett på vanlige feil som blir gjort i overgangen fra en representasjon til en annen (Adu-Gyamfi et al., 2012). Mye av denne forskningen er blitt gjort i USA, og det finnes lite forskning på dette temaet i en norsk kontekst så vidt jeg er kjent med. Dette er dermed et argument for at det å studere representasjoner av blant annet funksjoner er et aktuelt og nyttig bidrag til forskning på området.

1.2 Tidligere forskning på spillbasert læring

På tross av at store deler av læreplanen for 8. trinn kan knyttes til temaet algebra, gjør norske elever det betydelig dårligere i algebra enn i de andre temaene i TIMSS. Grunnen til at undervisningen innenfor algebra gir dårligere resultat enn i de andre temaene er vanskelig å si. I denne masteroppgaven skal jeg se på om bruk av spill i undervisningen kan være et hjelpemiddel i undervingen om koordinatsystem og lineære funksjoner i den norske skolen. Forskning viser at spill i undervisningssituasjoner har god læringseffekt på elevers kunnskap og forståelse innenfor matematikk (Brezovszky et al., 2019; Elofsson et al., 2016; Pawa et al., 2020; Siegler & Ramani, 2008). Mye av denne forskningen er gjort innenfor det matematiske

temaet om tall og tallforståelse. Så vidt jeg er kjent med, er det blitt gjort litt forskning innenfor temaet om koordinatsystem og funksjoner (Kranz et al., 2013; Stohlmann, 2017), men det er ganske begrenset. I dette prosjektet skal jeg derfor bruke spillet Slagskip, som tar utgangspunkt i koordinatsystemet, for å få innsikt i elevenes kunnskap om temaet. Forskningen som viser at bruk av spill i undervisningssituasjoner har god læringseffekt, er også blitt gjennomført i utlandet. Elofsson et al. (2016) sin forskning på feltet er blitt gjennomført i Sverige og vil så vidt meg bekjent, være noe av den forskningen som vil kunne være nærmest den norske konteksten. De forsket imidlertid ikke på verken Slagskip eller koordinatsystem og funksjoner. Jeg synes derfor det er aktuelt å gjennomføre forskning i Norge ettersom det kan være forskjeller selv mellom naboland. Både Elofsson et al. (2016) og Siegler og Ramani (2008) forsket på elevenes tallforståelse i forbindelse med tallinjen, en representasjon som har noen egenskaper som er overførbare til koordinatsystemet. Som nevnt tidligere, er forståelse av koordinatsystemet viktig for å kunne lære og forstå nye begreper som for eksempel funksjoner. På bakgrunn av den nevnte forskningen vil jeg si at formålet for dette forskningsprosjektet er å se om Slagskip kan gi innsikt i elevers kunnskap om koordinatsystemet og funksjoner og hvilke muligheter Slagskip kan skape for videre arbeid med funksjoner.

1.3 Forskningsspørsmål og fremgangsmåte

Med bakgrunn i hvilken tidligere forskning som er blitt gjort innenfor koordinatsystemet og funksjoner, representasjoner i matematikk og bruk av spill i undervisningssituasjoner har jeg kommet fram til følgende overordnede problemstilling: **Hvordan kan spillet Slagskip gi innsikt i elever på 9. trinn sin kunnskap om koordinatsystemet og lineære funksjoner?** For å kunne belyse denne problemstillingen har jeg valgt å dele den inn i to underordnede forskningsspørsmål:

1. Hvilke strategier bruker elevene når de spiller Slagskip, og hvilke uttrykk for elevenes kunnskaper om koordinatsystemet kan dette vise?
2. Hvilke muligheter for videre arbeid med lineære funksjoner er det spillet Slagskip kan være med å skape?

Grunnen til at fokuset mitt er elever på 9. trinn er fordi lærerplanen for 8. trinn inneholder flere kompetansemål som omhandler algebra, funksjoner og representasjoner. Ved å velge elever på 9. trinn vil jeg da kunne være sikker på at elevene som deltar i prosjektet, vil ha en viss kunnskap om temaet på forhånd. Hvis jeg hadde valgt elever på 8. trinn, ville det vært mer tilfeldig om de valgte elevene hadde gjennomgått temaet før datainnsamlingen og dermed hatt kunnskap om temaet eller ikke.

Det mest fornuftige en kan gjøre for å svare på problemstillingen over, tenker jeg er å ta utgangspunkt i data som er samlet inn gjennom kvalitativ forskningsmetode i form av en case-studie. I dette masterprosjektet ble det gjennomført et undervisningsopplegg i en klasse på 9. trinn hvor elevene skulle spille Slagskip. Datamaterialet består av videobservasjoner fra økten, elevarbeid i form av spillebrett og notater og intervju av de to samme elevparene. Under intervjuet fikk elevene spørsmål om strategier og noen oppgaver med Slagskip som kontekst som hadde fokus på ulike representasjoner av funksjoner og overganger mellom disse. Ved å både ha observasjoner, elevarbeid og intervju blir det mulig å triangulere datamaterialet slik at resultatene kan oppnå høy troverdighet. I etterkant av innsamlingen ble datamaterialet

transkribert før det ble analysert med utgangspunkt i de to underspørsmålene til problemstillingen.

1.4 Oppgavens oppbygning

Denne masteroppgaven er delt inn i seks hovedkapitler med et varierende antall underkapitler. Videre i oppgaven skal jeg først i kapittel 2 presentere relevant teori som blant annet omhandler matematisk tenkning og algebraisk resonnering. I tillegg tar kapittelet for seg temaet koordinatsystem og lineære funksjoner, representasjoner generelt og innenfor temaet funksjoner spesielt. Jeg vil også presentere teori som ser på overganger mellom ulike representasjoner og utfordringer elever kan ha med slike overganger. I kapittel 3 presenterer jeg spillet Slagskip, historisk bakgrunn for spillet, regler og hvordan jeg tilpasset spillet slik at det skulle være mest mulig hensiktsmessig for denne studien. Videre i kapittel 4 presenterer jeg metoden jeg har brukt og hvordan jeg gikk fram i arbeidet med å samle inn og analysere datamateriale til prosjektet. Her vil jeg blant annet si noe om utvalg, pilotering, analysemetode, forskningens validitet og reliabilitet, forskningsetikk og metodekritikk. Kapittel 5 tar for seg analysen av datamaterialet som er blitt samlet inn. I det påfølgende kapittel 6, vil jeg diskutere resultatene fra analysen opp mot relevant teori. På slutten av oppgaven, i kapittel 7, kommer avslutningen som vil inneholde en konklusjon på prosjektet og svar på den overordnede problemstillingen. Her vil jeg også løfte blikket, se fremover og komme med forslag til videre forskning på feltet.

2 Teori

Denne masterstudien skal se på elevers strategier når de spiller Slagskip og hvilke muligheter for etterarbeid med funksjoner spillet kan skape. I dette kapittelet skal jeg presentere det teoretiske grunnlaget som blant annet oppgavens analyse er basert på. Ettersom det matematiske temaet for denne masteroppgaven er koordinatsystem og funksjoner, et tema som går under algebra i matematikken, ser jeg på det som aktuelt å først presentere teori om matematisk tenkning og algebraisk resonnering i kapittel 2.1. Deretter vil jeg i kapittel 2.2 presentere noen sentrale kjennetegn ved koordinatsystemet og lineære funksjoner. Ettersom funksjoner kan representeres på ulike måter vil jeg til slutt i kapittel 2.3 si noe om representasjonssystemer og transformasjoner generelt, før jeg ser på spesielle representasjoner innenfor funksjoner og overganger mellom disse. Jeg vil også se på hva disse representasjonene representerer, nemlig et matematisk begrep. I tillegg vil jeg presentere en oversikt over representasjonsoverganger og deres vanskelighetsgrad basert på i hvor stor grad elevene er i stand til å utføre disse overgangene.

2.1 Matematikk og algebra

Som nevnt i innledningen til denne masteroppgaven inneholder faget matematikk blant annet temaet algebra. Algebra består ifølge Kaput (2008) av flere grener, der den ene inkluderer funksjoner. Jeg ser derfor på det som hensiktsmessig for denne oppgaven å presentere teori om både tenkning generelt innfor matematikk, men også algebra og algebraisk resonnering før jeg går videre på koordinatsystemet og funksjoner.

2.1.1 Matematisk tenking

Tankeprosessene i matematikk er kognitivt komplekse (Duval, 2006, s. 105). Duval (2006) presenterer derfor tre grunner til at matematisk tenking skiller seg fra tenking innen andre fag. Disse tre grunnene er betydningen av semiotiske representasjoner, det kognitive paradokset om tilgang til kunnskapsobjekt og den store variasjonen av semiotiske representasjoner som blir brukt i matematikken.

Ettersom semiotikk beskriver læren om tegn og symboler, handler den første forskjellen mellom matematisk tenking fra andre fag altså om betydningen av symboler og deres rolle i matematikken (Duval, 2006). Hovedrollen til symbolene er ikke å stå for matematiske objekter, men å gi muligheten til å erstatte noen symbol for andre. For eksempel kan x- og y-verdiene i et funksjonsuttrykk erstatte ulike tallverdier. På denne måten er ikke rollen til semiotiske representasjonssystemer bare å betegne matematiske objekter og kommunisere, men også å arbeide på og med dem. I følge Duval (2006) er det ikke mulig å gjennomføre en matematisk prosess uten å bruke semiotiske representasjonssystemer ettersom matematiske prosesser alltid involverer å erstatte semiotiske representasjoner med andre. Rollen til symboler i matematikken er altså ikke å bli erstattet av gjenstander, men å erstatte andre symboler. Det er ikke representasjonene som betyr noe, men transformasjonen som gjøres. I motsetning til i andre kunnskapsområder er altså symboler og semiotisk representasjon kjernen i matematisk aktivitet.

Det andre trekket Duval (2006) peker på som viktig innenfor matematisk tenking, er det kognitive paradokset om tilgang til kunnskapsobjekter. Duval (2006) hevder at matematiske objekter er abstrakte og aldri tilgjengelig gjennom persepsjon eller ved bruk av instrumenter som for eksempel måleinstrumenter, mikroskoper eller lignende. Den eneste måten å få tilgang til de matematiske objektene på er å bruke semiotiske representasjoner. I følge Duval (2006) oppstår problemet med matematikkforståelse hos elever fra den kognitive konflikten mellom to krav som motsetter seg hverandre. Hvordan kan en skille det representerte objektet fra den semiotiske representasjonen som brukes, hvis de ikke får tilgang til det matematiske objektet bortsett fra gjennom bruk av semiotiske representasjoner? Elevenes evne til å skifte fra et representasjonssystem til et annet blir derfor ofte sett på som et kritisk punkt i elevenes læringsprogresjon og problemløsning. Med bakgrunn i dette har jeg derfor valgt å blant annet se på representasjoner og overganger mellom disse i intervjuet i etterkant av at elevene har spilt Slagskip for å kunne svare på det andre forskningsspørsmålet i denne masteroppgaven.

Den tredje og siste grunnen til at matematisk tenking skiller seg fra tenkning i andre fag er ifølge Duval (2006) den store variasjonen av semiotiske representasjoner som blir brukt i matematikken. Utgangspunktet for dette argumentet er at matematisk aktivitet trenger forskjellige semiotiske representasjonssystemer som kan brukes i forbindelse med oppgavene eller spørsmålene som skal løses. Det vil altså si at når du har tilgang til flere ulike representasjonssystemer, kan du bruke det systemet som er mest hensiktsmessig for å løse den aktuelle oppgaven. Hvilke system som er enklest å bruke, vil variere fra oppgave til oppgave, og noen ganger kan det også være aktuelt å bruke flere representasjonssystem. Duval (2006) viser altså at representasjoner er en sentral del innfor den matematiske tenkingen og en faktor til å gjøre de matematiske tankeprosessene kognitivt komplekse.

2.1.2 Algebra

Som nevnt i innledningen til denne oppgaven inngår ifølge Kaput (2008) temaet funksjoner, som er et av fokusområdene for denne studien, under algebra i matematikken. Kaput (2008) presenterer to ulike måter å se matematikk generelt og algebra spesielt på. For det første kan algebra være et artefakt som er en del av vår kulturarv. Begrepet artefakt er et generelt uttrykk som omfatter flere typer gjenstander produsert av mennesker gjennom tidene (Bussi & Mariotti, 2008). Algebra som kulturelt artefakt er innebygd i utdanningssystemer verden rundt, men på veldig ulike måter. Dette gjelder spesielt når algebra skal introduseres og hvor tett algebraen er innlemmet i andre matematiske temaer. I tillegg til å se på algebra som et artefakt kan algebra også være en samling aktiviteter, altså noe vi mennesker gjør. Algebra involverer blant annet å produsere representasjoner som kan uttrykke generaliseringer. Å transformere slike representasjoner er en sentral aktivitet innenfor algebra, i likhet med generelt i matematikken slik Duval (2006) skriver. Disse to måtene å se algebra på skiller altså algebra fra å være en samling av kunnskap, altså et artefakt, og algebraisk resonnering, altså en aktivitet.

Kaput (2008) ser ikke på algebra som en statisk kunnskapsmengde. Algebraen utvikles som et kulturelt artefakt gjennom symbolsystemene som brukes. Samtidig utvikles algebraen som en menneskelig aktivitet gjennom at elever lærer og utvikler sin kunnskap om temaet. Derfor mener Kaput (2008) at algebra burde beskrives både gjennom dets struktur og funksjon i matematikken og gjennom et dynamisk bilde av dens historiske utvikling. I et moderne perspektiv (fra 1700-tallet og senere) refererer algebradefinisjoner til litterære symboler som en sentral del av aktiviteten, som for eksempel at funksjonsuttrykket til en graf kan skrives som

y=2x+1. Bruk av litterære symboler kan ifølge Kaput (2008) også ses på som et definerende trekk ved algebraen.

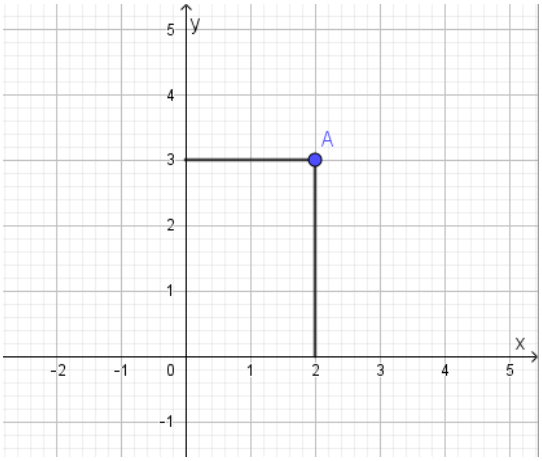
Ifølge Kaput (2008) kan algebra deles inn i tre grener. Den første grenen baserer seg på algebra som en studie av strukturer og systemer hentet fra beregninger, relasjoner og i kvantitative resonnement. Den andre grenen av algebra baserer seg på algebra som en studie av funksjoner, relasjoner og samvariasjon (Kaput, 2008). Det er dermed innenfor denne grenen av algebra at temaet som er fokus for denne masteroppgaven, nemlig koordinatsystemet og lineære funksjoner, ligger. Det er uklare grenser innenfor denne grenen av algebra ettersom ideer knyttet til funksjonsidéen både er svært rike og vidtfavnende (Kaput, 2008). For eksempel inkluderer de ideen om linearitet, hastighet osv. Her blir det brukt et stort spekter av symbolsystemer som går utenfor de vanlige tegnbaserte systemene. Dette inkluderer blant annet tabeller og grafer, som jeg vil komme mer inn på i kapittel 2.3 om representasjoner. Innenfor den andre grenen av algebra kan det altså bli tatt i bruk flere ulike typer representasjoner. Den tredje og siste grenen av algebra som Kaput (2008) skriver om, tar utgangspunkt i algebra som anvendelse av en mengde modelleringsspråk både innenfor og utenfor matematikken. Modellering kan ta i bruk generalisering og uttrykking av mønstre og regelmessigheter i situasjoner og fenomener som kan oppstå utenfor matematikken, men også innenfor matematikken. Her vil generaliseringen være situasjonen som blir modellert. Dette vil ofte bli uttrykt gjennom bruk av en eller flere variabler som kan gi uttrykk for en funksjon. Innenfor denne tredje grenen av algebra blir det, i liket med gren nummer to, brukt flere ulike representasjonstyper.

2.1.3 Algebraisk resonnering

«Hjertet av algebraisk resonnement består av komplekse symboliseringsprosesser som tjener målrettet generalisering og resonnement med generalisering» (Kaput, 2008, s. 9). Algebraisk resonnering kan karakteriseres ved bruk av bokstaver som ukjente, variabler, parametere og lignende, som går under Duval (2006) sine symbolske representasjonssystemer. Kaput (2008) viser til to kjerneaspekter ved algebraisk resonnering. Det første kjerneaspektet går ut på at algebraisk resonnering er å generalisere og uttrykke generaliseringer i stadig mer systematiske og konvensjonelle symbolsystemer. Det andre kjerneaspektet handler om at algebraisk resonnering er en syntaktisk styrt handling på symboler innenfor organiserte symbolsystemer. De to kjerneaspektene er med på å binde sammen de to sidene til algebra (som artefakt og aktivitet). Det andre kjerneaspektet utvikles vanligvis senere enn det første (Kaput, 2008). Det er fordi regelbaserte handlinger på symboler avhenger av at elevene har kunnskap om tillatte kombinasjoner av symboler og hvordan de forholder seg til hverandre, spesielt når det gjelder hvilke kombinasjoner som er likeverdige hverandre. De to nevnte kjerneaspektene til algebra kommer også til syne på en eller annen måte i de tre grenene algebra kan deles inn i (Kaput, 2008), som ble presentert i kapittel 2.1.2.

2.2 Koordinatsystem og lineære funksjoner

Koordinatsystemet består av to tallinjer som skjærer hverandre i en rett vinkel (Earnest, 2015). Skjæringspunktet mellom de to tallinjene kalles *Origo*. Gjennom denne skjæringen av de to tallinjene blir også koordinatsystemet delt i fire områder som kalles kvadranter (Castañeda-Miranda et al., 2021). Disse kvadrantene er nummerert mot klokka, og starter med området oppe til høyre, 1. kvadrant, hvor koordinatene er (+, +). Deretter kommer 2. kvadrant med koordinatene (-, +), 3. kvadrant med koordinatene (-, -) og 4. kvadrant med koordinatene (+, -). Å bruke koordinatsystemet innebærer en koordinering av lineære enheter og numeriske enheter på to uavhengige akser (Earnest, 2015). I motsetning til en enkelt tallinje har koordinatsystemet i tillegg noen trekk som ikke er tilgjengelig med bare en enkelt tallinje. Dette inkluderer egenskapen der et punkt i koordinatsystemet kan representeres av verdien til to størrelser. For eksempel kan et punkt i koordinatsystemet representere avstanden (y-aksen = antall kilometer) som er blitt kjørt etter en bestemt tid (x-aksen = antall timer). Et punkt er navngitt basert på skjæringspunktet mellom to projeksjoner slik Figur 1 viser. Den ene projeksjonen er fra en verdi på den horisontale aksen, *x-aksen*, og den andre fra en verdi på den vertikale aksen, *y-aksen*. Disse verdiene indikerer hvor langt en må bevege seg fra Origo på de to aksene for å komme til punktet. Hver av disse avstandene på de to aksene korresponderer med matematikken til en tallinje. For eksempel vil et punkt som ligger to enheter fra Origo på x-aksen og tre enheter fra Origo på y-aksen få navnet (2, 3) slik Figur 1 viser.

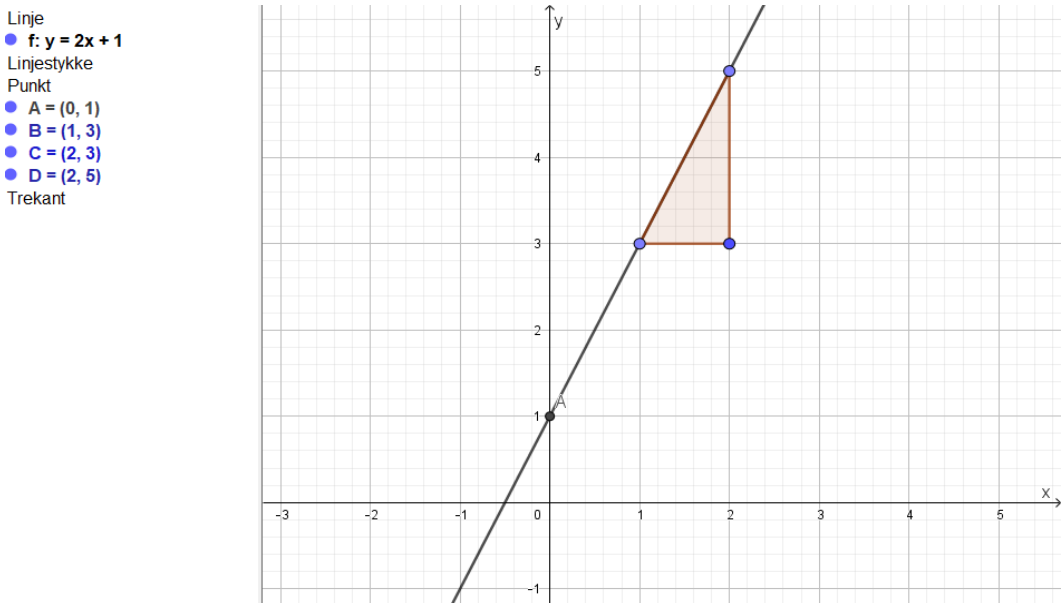


Figur 1: Illustrasjon av et punkt i koordinatsystemet

I tillegg til å finne punkter i koordinatsystemet kan vi også bruke koordinatsystemet til å presentere en funksjon. Funksjonsbegrepet ses på som en kjerneidé innenfor matematikken, men det er også viktig når matematikk blir brukt for å beskrive sammenhenger i verden vi lever i (Schoenfeld et al., 1993). Begrepet funksjoner kan være vanskelig å forstå for elever, men elevene kan være kjent med situasjoner fra dagliglivet som knyttes opp til begrepet. For eksempel er nok en del elever kjent med at hvor mye godteri de kan kjøpe på butikken avhenger av hvor mye penger de har. Slike situasjoner viser sammenhengen mellom to størrelser og består av to verdier som avhenger av hverandre (Earnest, 2015). Her vil for eksempel hvor mye penger eleven har være en variabel som vil være med å bestemme hvor mye godteri eleven kan kjøpe. For å gi en mest mulig presis beskrivelse av hvordan de ulike størrelsene er avhengig av hverandre, kan vi derfor innføre funksjonsbegrepet og studere ulike typer funksjoner i matematikken.

En måte å fremstille en funksjon på er gjennom en graf (Janvier, 1987). Grafen til en funksjon består av et sett med ordnede par som koordineres med verdier langs de to aksene (Kaput, 1987, i Earnest, 2015). Dette gjør dermed grafen til en representasjon av både en kvantitativ sammenheng og variasjonen. Det vil si at grafen viser både sammenhengen mellom to verdier, en på hver av aksene, samtidig som grafen også viser variasjonen fra en verdi til en annen på hver av aksene. I en slik grafisk representasjon referer grafens stigning til både en enhetsendring på x-aksen og det tilsvarende endringsintervallet på y-aksen (Earnest, 2015). Figur 2 viser en illustrasjon av grafens stigningstall der en økning på en enhet på x-aksen tilsvarer en økning på

to enheter på y-aksen, altså er stigningstallet til grafen to. Illustrasjonen viser også at grafen skjærer y-aksen i (0,1), markert som punkt A. Grafiske framstillinger av funksjoner brukes i mange ulike sammenhenger, blant annet i media, for å presentere informasjon på en oversiktlig og lettfattelig måte. For eksempel kan en graf vise hvor mange som har vært smittet av koronaviruset i en gitt befolkning over en tidsperiode.



Figur 2: Illustrasjon av en funksjons stigningstall og konstantledd

Janvier (1987) presenterer også formel som en representasjon som kan brukes for å fremstille en funksjon. Fokuset for denne masteroppgaven er begrenset til koordinatsystemet og lineære funksjoner. Derfor vil jeg eksemplifisere sentrale egenskaper ved den algebraiske representasjonen av en lineær funksjon. En lineær funksjon kan presenteres gjennom formelen $y = ax+b$ (Schoenfeld et al., 1993). Dette stemmer bare hvis a viser til grafens *stigningstall*, og b er grafens krysningspunkt med y-aksen, også kalt *konstantledd*. Grafens krysningspunkt med y-aksen tilsvarer altså punktet (0, b). Dersom $b = 0$ vil dermed grafen krysse y-aksen i Origo, mens hvis $b \neq 0$ vil grafen derimot krysse y-aksen i punktet (0, b). For eksempel vil en graf med funksjonsuttrykket y = 2x+1 øke med 2 for hver x og skjære y-aksen i punktet (0, 1) slik illustrasjonen i Figur 2 viser. I en slik algebraisk fremstilling av en funksjon som er presentert her, vil en verdi av x angi en bestemt verdi for y. Grafens stigning ser derfor på forholdet mellom endring av den avhengige variabelen til en enhetsendring i den uavhengige variabelen (Earnest, 2015). Derfor vil y være en variabel som er avhengig av den uavhengige variabelen x. På den måten vil det også bare være en bestemt verdi av y til hver verdi av x. Ettersom a henviser til grafens stigning, kan verdien til a være med å si noe om den grafiske representasjonen av funksjonen: hvis a er større enn 0, altså positiv, vil grafen stige (Schoenfeld et al., 1993). Da vil grafen bevege seg oppover mot høyre. Derimot hvis a er mindre 0, altså negativ, vil grafen synke ned mot høyre hjørne i koordinatsystemet. Her vil altså grafen synke med a enheter for hver gang x øker med 1. Jo høyere tallverdi a er, uansett om det er positivt eller negativt, jo brattere vil grafen bli (Schoenfeld et al., 1993).

2.3 Representasjoner

Som det ble nevnt i kapittel 2.1.1, er bruken av representasjoner ifølge Duval (2006) en av grunnene til at matematisk tenkning skiller seg fra tenkning i andre fag. I kapittel 2.2 ble det presentert teori og noen kjennetegn ved to typer representasjoner av en funksjon, grafisk og algebraisk representasjon. Duval (2006) skriver at en representasjon kan være noe som står for noe annet (s. 103). Denne definisjonen er vid og innebærer individers tro, forestillinger og misoppfatninger, altså mentale representasjoner, som kommer til uttrykk verbalt. Definisjonen inkluderer også symboler, også kalt semiotiske representasjoner, som lages på bakgrunn av bestemte regler og som kan beskrive systemer, prosesser eller fenomener. Slike semiotiske representasjoner er vanlige verktøy ikke bare for å formidle en mental representasjon, men også for å produsere ny kunnskap. Ifølge Duval (2006) er matematikk det faget der vi finner det største spekteret av semiotiske representasjonssystemer. De representasjonssystemene som Duval (2006) mener kan mobiliseres i en matematisk prosess, er både de representasjonssystemene som er felles for enhver form for tenking, som for eksempel naturlig språk, og de som er spesifikke for matematikk som for eksempel algebraiske og formelle notasjoner. Eksempler på matematiske representasjonssystemer kan være illustrasjoner, regnefortellinger, symboler, konkreter og muntlig og skriftlig språk. Duval (2006) påpeker at ingen matematisk prosess kan utføres uten å bruke et representasjonssystem som er en samling av flere representasjoner, ettersom matematiske prosesser innebærer å erstatte en representasjon med en annen. Når en jobber med representasjoner, er det viktig at en ikke forveksler hva som er det matematiske objektet og hva som er representasjonen. En representasjon kan altså brukes for å presentere et matematisk objekt, eller det som Sfard (1991) henviser til som et matematisk begrep. Eksempler på dette kan være å bruke en tabell for å representere en funksjon eller en bruke en graf for å representere en regnefortelling om forholdet mellom fart og tid. For å unngå forvirring vil jeg videre i oppgaven bruke terminologien *matematisk begrep* når det snakkes om både Duval (2006) sitt begrep *matematiske objekt* og Sfard (1991) sitt *matematiske begrep*.

2.3.1 Matematiske begreper

Som nevnt brukes representasjonene til å representere et matematisk begrep. Matematiske begreper viser til en matematisk ide som en teoretisk konstruksjon og innebærer representasjoner og assosiasjoner som begrepet fremkaller (Sfard, 1991). Avanserte matematiske konstruksjoner er, i motsetning til materielle objekter, totalt utilgjengelige for våre sanser. Slike matematiske konstruksjoner er altså ikke noe konkret vi kan se og ta på, men en abstrakt forestilling om et gitt objekt. Når vi for eksempel tegner en graf, er det viktig å understreke at dette bare er en av mange mulige representasjoner av en abstrakt enhet, som i seg selv verken kan ses eller berøres. Å ha evnen til å «se» disse usynlige objektene nevner Sfard (1991) som en vesentlig del av ens matematiske ferdigheter. Mangel av slik forståelse kan også derfor være en av årsakene til at matematikk kan virke uforståelig for enkelte.

Sfard (1991) presenterer et teoretisk rammeverk som omhandler matematisk forståelse og matematiske begreper. Her blir det lagt fram to ulike måter å oppfatte abstrakte forestillinger på: strukturelt, som i form av objekter, eller operasjonelt, som prosesser. At en har en strukturell tolkning i matematikk vil si at en klarer å referere til objektet som om det var en ekte ting. En strukturell forståelse er derfor mer abstrakt enn den operasjonelle. For eksempel vil en strukturell tolkning av en funksjon se på funksjonen som en samling av punkter som kan bli

framstilt gjennom en graf. I motsetning til den strukturelle oppfatningen tolker den operasjonelle forståelsen begrepet som en enhet som blir til gjennom en rekke dynamiske handlinger eller prosesser. En operasjonell tolkning av en funksjon vil for eksempel kunne være en regneprosess med utgangspunkt i funksjonsuttrykket.

Den strukturelle og operasjonelle tilnærmingen er komplementære ettersom læringsprosesser og problemløsning består av et samspill mellom den operasjonelle og den strukturelle oppfatningen av den samme abstrakte forestillingen. For de fleste er den operasjonelle oppfatningen det første steget i tilegnelsen av et nytt matematisk begrep (Sfard, 1991). Ofte starter en med en operasjonell tolkning av matematikken hvor en baserer seg på prosessene og hvordan de ulike operasjonene skal gjøres. Gjennom arbeid med den operasjonelle tolkningen kan elevene få en forståelse for abstrakte objekter. Begge tolkningene er derfor viktige fordi den strukturelle åpner opp for tenking og generer innsikt, mens den operasjonelle tilnærmingen inviterer til handling og genererer videre til resultat. På den måten vil en gå fra en operasjonell tilnærming, hvor en bruker regler uten begrunnelse, til en strukturell tilnærming med forståelse for hva du gjør og hvorfor du gjør det. Det er altså en form for dualitet mellom de to tolkningene, der begge er nødvendige byggeklosser for en god forståelse. Å ha evnen til å kunne se for eksempel en funksjon som både en prosess og som et objekt, er ifølge Sfard (1991) uunnværlig for en dyp forståelse av matematikk.

2.3.2 Transformasjoner

Ulike semiotiske representasjonssystem har ifølge Duval (2006) ulike funksjoner. Noen systemer kan bare bli brukt til matematiske prosesser som for eksempel å regne ut et funksjonsuttrykk, mens andre kan brukes til flere kognitive funksjoner som for eksempel kommunikasjon, prosessering av informasjon og bevisstgjøring. Disse forskjellene i funksjon hos ulike semiotiske representasjonssystemer er viktig fordi det er forbundet med hvordan matematiske prosesser foregår. På bakgrunn av dette deler Duval (2006) inn i to hovedformer for funksjonelle representasjonssystem: monofunksjonelle semiotiske systemer, der de fleste prosessene tar form som algoritmer, og multifunksjonelle semiotiske systemer, der prosessene sjeldent blir gjort om til algoritmer. Hver av de to hovedformene for funksjonelle representasjonssystem kan igjen deles inn i diskursive og ikke-diskursive operasjoner. Eksempel på monofunksjonelle diskursive operasjoner kan være symbolske systemer som for eksempel et algebraisk bevis, mens monofunksjonelle ikke-diskursive operasjoner kan være grafer eller diagrammer. Multifunksjonelle diskursive operasjoner kan komme til uttrykk gjennom språket, for eksempel gjennom muntlige eller skriftlige forklaringer, mens multifunksjonelle ikke-diskursive operasjoner derimot kan være tegninger, mønstre og geometriske figurer. Figur 3 viser en skjematisk framstilling av ulike semiotiske representasjonssystemer som blir brukt i matematiske prosesser, og hvordan et system kan transformeres til et annet.

En representasjon har muligheten til å bli endret til en annen representasjon uten at det tilføres nye data eller observasjoner (Duval, 2006). «Å transformere representasjoner er også kjernen i matematisk aktivitet» (Duval, 2006, s. 107). Duval (2006) viser til to ulike typer transformasjoner av semiotiske representasjoner: behandlinger (treatments) og omgjøringer (conversions). Figur 3 viser disse to typene transformasjoner i form av bøyde piler (behandlinger) og rette piler (omgjøringer). Ved behandlinger holder en seg innenfor samme representasjonssystem. Et eksempel på slike behandlinger kan være å løse en likning ettersom en da bruker bare en type representasjon, i dette tilfellet symboler, til å utføre en operasjon.

Ved omgjøringer går en derimot fra et representasjonssystem til et annet uten å endre på det matematiske objektet som blir representert. Et eksempel på omgjøring kan være å bruke et funksjonsuttrykk for å kunne lage en graf. Her går en altså fra representasjonssystemet funksjonsuttrykk/formel til representasjonssystemet graf uten å endre på det matematiske objektet ettersom verdiene til en funksjon kan bli representert ved hjelp av begge de nevnte systemene.

	Diskursive operasjoner	**Ikke-diskursive operasjoner**
Multifunksjonelle semiotiske systemer: Prosesser som ikke kan være algoritmer	Naturlig språk • Muntlig: forklaringer • Skriftlig (visuelt): teoremer, bevis ...	Billedlig: tegne, skissere, mønster Ikke billedlig: figurer som kan konstrueres ved hjelp av verktøy
Monofunksjonelle semiotiske systemer: De fleste prosessene er algoritmer	Symbolske systemer • Bare skriftlig (umulig å si uten å stave): formel, beregning, bevis	Figurer: tabell, diagrammer og grafer

Figur 3: Oversikt over representasjonsregistre som kan brukes i matematiske prosesser (Duval, 2006, s. 110)

De to formene for transformasjoner, behandlinger og omgjøringer, ligger til grunn for den kognitive kompleksiteten for tankeprosessene i matematikk som er nevnt tidligere. Fra et matematisk synspunkt får behandlinger mest oppmerksomhet i skolen, mens omgjøringer er det som forårsaker de største vanskelighetene for elevene (Duval, 2006, s. 105). Det skyldes blant annet at omgjøringer krever at elevene kan kjenne igjen det matematiske objektet i ulike representasjonssystem. At omgjøringer er mer krevende ser Duval (2006) på som et problem i skolen fordi konsekvensene blir at lærere fokuserer mest på behandlinger og holder seg innenfor et representasjonssystem. Det er derfor viktig at skolen får et større fokus på omgjøringer og overganger fra ett representasjonssystem til et annet. Omgjøringer henger tett sammen med elevenes matematiske forståelse og fleksibilitet i arbeidet med matematikkoppgaver. På den måten kan elevene bli vist ulike måter å representere det samme matematiske objektet på, noe som kan gi elevene bedre forståelse for representasjonssystemene, gjøre det lettere å se sammenhenger mellom de ulike systemene og bevege seg mellom dem.

2.3.3 Representasjoner av funksjoner

I likhet med Duval (2006) skriver Janiver (1987) at symboler og andre representasjoner er grunnleggende i matematisk tenking, men at overgangen fra en representasjon til en annen likevel blir oversett i undervisningen. Derfor har Janvier (1987) utviklet en tabell som presenterer en oversikt over fire typer representasjoner innenfor det matematiske temaet funksjoner. Figur 4 viser den nevnte tabellen til Janvier (1987) oversatt til norsk. I tillegg til de to representasjonene algebraisk/formel og grafisk som ble brukt for å presentere teori om koordinatsystem og funksjoner, består tabellen i Figur 3 også av representasjonene tabell og situasjon/verbal beskrivelse. De fire representasjonene som blir representert i tabellen, er altså verbal forklaring, tabell, graf og formel (likning). Tabellen viser også overganger mellom de fire

representasjonene, for eksempel overgangen fra tabell til graf som skjer gjennom handlingen å *plotte*. Figur 4 viser at hvilken overgang som skjer avhenger av hvilket representasjonssystem en går fra og hvilket representasjonssystem en vil bevege seg til. De grå feltene i tabellen til Janvier (1987) sikter til transformasjoner der en holder seg innenfor samme representasjonssystem. En slik transformasjon kaller Janvier (1987) for «transpositions» og tilsvarer Duval (2006) sitt begrep behandling.

Fra \ Til	Situasjon, verbal beskrivelse	Tabell	Graf	Formel
Situasjon, verbal beskrivelse		Måle	Tegne	Modellere
Tabell	Lese		Plotte ➡	Tilpasse
Graf	Tolke	Lese av		Tilpasse kurve
Formel	Gjenkjenne parametere	Beregne ➡	Tegne	

Figur 4: Overgangsprosesser (Janvier, 1987, s. 28-29)

Ifølge Janvier (1987) kan overgangene mellom representasjonene være enten direkte eller indirekte. De direkte overgangene skjer når en går direkte fra en representasjon til en annen. De indirekte overgangene krever derimot at en går via en annen representasjon for deretter å ende opp på den ønskede representasjonen. Disse indirekte overgangene er representert med piler i Figur 4. For eksempel vil overgangen fra formel til graf ofte innebære å gå via representasjonen tabell. De overgangene Janvier (1987) fremhever som indirekte overganger er overgangen fra tabell til formel (via graf) og overgangen fra formel til graf (via tabell).

2.3.4 Vanskelighetsgrader til representasjonsoverganger

Elever viser stadig at det er vanskelig å gå mellom de fire representasjonene Janvier (1987) presenterer i sin tabell (Bossé et al., 2011). Det er representasjonene og overgangene Janvier (1987) presenterer som Bossé et al. (2011) tar utgangspunkt i, i sin forskning der de ser på vanskelighetsgraden til de ulike overgangene. Med utgangspunkt i tidligere forskning på blant annet representasjoner, dimensjoner ved matematiske overganger og vanlige feil elever gjør i arbeide med representasjonsoverganger har Bossé et al. (2011) utviklet en oversikt over vanskelighetsgraden til ulike representasjonsoverganger. Figur 5 viser en skjematisk framstilling av Bossé et al. (2011) sin kategorisering av vanskelighetsgrader innenfor representasjonsoverganger hos funksjoner.

I Figur 5 kan en blant annet se at overganger der en skal ende opp med en tabell, er noen av de enkleste overgangene for elevene å få til, mens overganger som skal ende i en verbal forklaring er de overgangene elevene sliter mest med. Tabellen viser også at ved noen

overganger vil det være aktuelt å gå via en annen representasjon før en ender opp med den ønskede representasjonen. Dette kan ses i sammenheng med Janvier (1987) sine indirekte overganger. I Figur 5 kan en se at Bossé et al. (2011) presenterer tre overganger der det er behov for en overgangsrepresentasjon (formel til graf, verbal til graf og verbal til symbol) i motsetning til Janvier (1987) som bare nevner to slike representasjonsoverganger (tabell til formel og formel til graf).

Elevers evne til å utforme ulike overganger	**Overganger**	
Nivå 1: Generelt i stand til å utføre disse	tabell → graf	formel → tabell
	graf → tabell	verbal → tabell
Nivå 2: Generelt i stand til å utføre disse (ved å bruke en overgangsrepresentasjon)	formel → graf ⟺ formel → tabell → graf	
Nivå 3: Mindre i stand til å utføre disse	tabell → formel	graf → formel
Nivå 4: Mindre i stand til å utføre disse (ved å bruke en overgangsrepresentasjon)	verbal → graf ⟺ verbal → tabell → graf	
	verbal → formel ⟺ verbal → tabell → formel	
Nivå 5: Sjeldent i stand til å utføre disse	graf → verbal	formel → verbal
	tabell → verbal	

Figur 5: Oversikt over elevers evne til å gjennomføre representasjonsoverganger (Bossé et al., 2011, s. 127)

I dette teorikapittelet har jeg presentert teori som vil være aktuell i denne masteroppgaven. Teorikapittelet tok først for seg matematisk tenking og algebraisk resonnering. Videre ble det presentert noen sentrale kjennetegn ved koordinatsystemet og lineære funksjoner, både i grafisk og algebraisk representasjon. Her ble det presisert hva representasjonene faktisk representerer, nemlig et matematisk begrep og hva et slikt matematisk begrep egentlig er. Videre ble det gått nærmere inn på hva en representasjon er, hvilke representasjoner og representasjonsoverganger vi har innenfor temaet funksjoner, og det ble presentert en gradering av vanskelighet ved de ulike overgangene.

3 Slagskip

I denne masteroppgaven har spillet Slagskip en sentral rolle i datainnsamlingen. Jeg ser derfor på det som aktuelt med et eget kapittel for å introdusere spillet på en oversiktlig og hensiktsmessig måte. I dette kapittelet skal jeg derfor presentere spillet Slagskip. Her vil jeg ta for meg litt historisk bakgrunn til spillet, hvordan spillet er bygd opp og hvordan jeg har valgt å utvikle og tilpasse spillet i forkant av datainnsamlingen.

3.1 Historisk bakgrunn

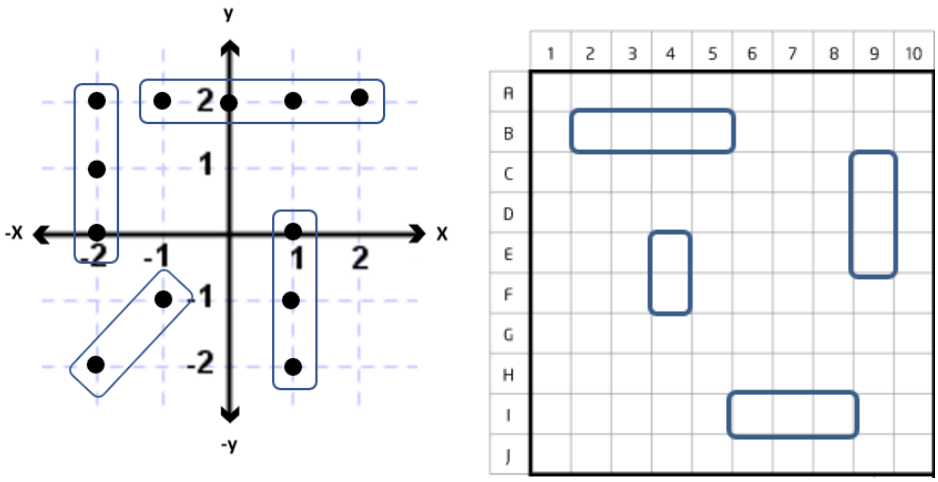
Slagskip er et spill som baserer seg på gjetting, strategi og logisk tenking og kan spores tilbake til starten av 1900-tallet hvor det da ble gjennomført med hjelp av penn og papir (Bridge, 2014; Stohlmann, 2017). Ifølge Bridge (2014) slo spillet først igjennom på slutten av 60-tallet da det ble produsert som et kommersielt brettspill. I de senere årene har teknologien gjort at spillet har blitt utviklet til flere ulike digitale versjoner. Det grunnleggende prinsippet i Slagskip går ut på at spillerne plasserer ut skip i ulike størrelser på et spillebrett som motstanderen ikke kan se. Spillerne gjetter på tur hvor motspilleren har plassert skipene helt til en spiller ikke har flere skip igjen. Slagskip kan brukes til flere formål og har blant annet blitt brukt i undervisningen innenfor flere skolefag. Det er blant annet blitt gjort forskning på bruk av ulike varianter av Slagskip innfor undervisning i blant annet matematikk (Kranz et al., 2013; Stohlmann, 2017), kjemi (Kurushkin & Mikhaylenko, 2016) og samfunnsfag og politikk (Bridge, 2014). Selv om det er blitt gjort forskning på Slagskip i matematikkundervisningen, er denne forskningen begrenset og ikke særlig grundig. Det er derfor fortsatt behov for forskning på området. Ettersom Slagskip er såpass populært og tilgjengelig, kan det fort hende elevene allerede kan de grunnleggende reglene når spillet tas i bruk i undervisningen (Bridge, 2014).

3.2 Spillets oppbygning

Slagskip kan spilles på flere måter, men den matematiske versjonen som er blitt brukt i denne masteroppgaven tar utgangspunkt i et koordinatsystem med x- og y-akse. Bell (1974) ser på Slagskip som mest hensiktsmessig å bruke i undervisningen etter at koordinater er blitt introdusert og som en opptakt til introduksjonen av grafer og funksjoner. Slagskip spilles på et todimensjonalt kartesisk koordinatsystem hvor elevene skal skyte og plassere skip i kryssene i koordinatsystemet, og ikke i rutene. Derfor er det viktig at elevene kan identifisere punkter i koordinatsystemet. I tillegg må elevene vite at et punkt identifiseres som et par av tall på formen (x, y) hvor *x* tilsvarer verdien på den horisontale aksen (x-aksen/førsteaksen) og *y* tilsvarer verdien på den vertikale aksen (y-aksen/andreaksen). Dette skiller den matematiske versjonen fra den kommersielle versjonen av Slagskip, noe Figur 6 viser en illustrasjon av. I den kommersielle versjonen av Slagskip plasseres skipene i rutene i stedet for i kryssene.

Den matematiske versjonen av spillet Slagskip spilles vanligvis i par der de to deltakerne sitter overfor hverandre og gjerne med en liten skillevegg mellom slik at de ikke kan se hverandres spillebrett. Her får hver elev utdelt et spillebrett som består av to koordinatsystem. I det ene koordinatsystemet skal eleven plassere sine egne skip, mens i det andre koordinatsystemet skal elevene registrere skuddene på motstanderens skip. Elevene plasserer så et gitt antall skip, ofte i ulike størrelser, på spillebrettet. Elevene skyter etter tur på motstanderens skip ved å si en koordinat, for eksempel (2, 3). Motstander gir så beskjed om skuddet traff et skip eller ikke. Slik

fortsetter de fram til en av spillerne ikke har flere skip igjen. Målet med spillet er altså å få sunket alle skipene til motstanderen.



Figur 6: Illustrasjon av matematisk (venstre) og kommersiell (høyre) versjon av Slagskip

3.3 Utvikling og tilpasning av Slagskip

Det finnes mange ulike matematiske variasjoner av spillet Slagskip. Spillene Bell (1974), Kongsnes og Wallace (2020) og Stohlmann (2017) presenterer er noen eksempler. Til denne masterstudien har jeg valgt å bruke en versjon av Slagskip med noen egne tilpasninger som jeg så på som hensiktsmessige for forskningen på koordinatsystemet og lineære funksjoner. Videre i dette delkapittelet vil jeg derfor presentere den tilpassede versjonen og hvordan den skiller seg ut fra andre versjoner av Slagskip.

Som nevnt tidligere i kapittelet, kan Slagskip gjennomføres på flere ulike måter, både digitalt og på papir. Jeg har valgt å gjennomføre Slagskip på papir, noe det er flere grunner til. Ved å gjennomføre datainnsamlingen med Slagskip på papir har jeg mulighet til å videreutvikle Slagskip og designe spillebrettet slik jeg ønsker. På den måten får jeg mulighet til å bestemme størrelse på spillebrettet, antall og størrelse på skip og hvilke regler som skal gjelde for spillet. Jeg har ikke kunnet finne en digital versjon som tilbyr de endringene jeg ønsker. Utvikling av et slikt spill selv vil være for tidkrevende for denne masteroppgaven. Gjennom å gjennomføre spillet på papir kan jeg også se for meg at det kan legges til rette for samarbeid og diskusjon mellom elevene i større grad enn med en digital versjon. Ved å spille Slagskip på papir får jeg også mulighet til å utforme spillebrettet slik jeg ønsker for eksempel ved å lage et område på arket der elevene kan notere underveis. På den måten kan jeg også få data som ikke bare er basert på selve spillebrettet, men også notater elevene gjør underveis i spillet. Jeg har også valgt å ta i bruk et felles koordinatsystem som elevene kan bruke for å bekrefte koordinatene de skyter, noe som vil presenteres nærmere senere i dette delkapittelet. Å spille Slagskip på papir vs. digitalt vil bli diskutert nærmere i kapittel 4.7 Metodekritikk.

Når elevene skal spille Slagskip, får de utdelt et spillebrett hver. Spillebrettet har akser som går fra -2 til 2 (vedlegg F). Denne størrelsen på koordinatsystemet er blitt valgt med hjelp fra medstudenter som har testet koordinatsystem i ulike størrelser gjennom å spille Slagskip. Et koordinatsystem med den valgte størrelsen har blitt valgt som spillebrett ettersom det vil gi

elevene 25 mulige steder å skyte på, hvor 12 av disse vil gi treff med det valgte antall skip og størrelse på dem. Dette skal kommenteres nærmere senere i kapittelet. Kombinasjonen av det valgte koordinatsystemet og antall skip og størrelse på dem vil gi omtrent 50% sjanse for å treffe et skip. Et større koordinatsystem vil gi enda flere skuddmuligheter, noe som gjør sannsynligheten for å treffe mindre (med mindre en legger til flere/større skip). Flere skuddmuligheter vil også kunne øke tidsbruken for en runde med Slagskip. Hvor stort koordinatsystemet burde være, vil altså variere ut ifra hvor mange og hvor store skipene som plasseres er og hvor lang tid en ønsker at spillet skal ta.

I tillegg til spillebrettet får elevene også delt ut et regelark (vedlegg D). Regelarket viser en oversikt over reglene som elevene kan bruke når de skal spille Slagskip. I utformingen av spillets regelark har jeg tatt utgangspunkt i versjonene til Bell (1974) og Kongsnes og Wallace (2020). Dette regelarket har blitt utformet slik at elevene kan bruke det som støtte underveis i spillet hvis det er en regel de har glemt eller ikke forstår. På regelarket står det blant annet at elevene kan plassere ut fire skip i det ene koordinatsystemet sitt: et skip med lengde lik to, to skip med lengde lik tre og et skip med lengde lik fire. Antall skip og størrelse på dem vil variere mellom ulike variasjoner av Slagskip. Det nevnte antallet og størrelsene på skipene er valgt med bakgrunn i spillebrettets størrelse. Hvordan skipene skal plasseres kan også variere fra spill til spill. Bell (1974) sin versjon tar utgangspunkt i at skipene kan plasseres både horisontalt, vertikalt og diagonalt. Denne regelen har jeg valgt å ha med i min versjon av Slagskip ettersom diagonale skip forhåpentligvis kan være med å lette overgangen til lineære grafer. I versjonen som blir brukt i dette prosjektet, er det dermed mulig å plassere skipene horisontalt, vertikalt og diagonalt. På regelarket står det at den yngste av spillerne skal begynne. Dette har ikke så mye å si for selve spillet, men blir presisert for at elevene ikke skal bruke for lang tid på å bestemme hvem som skal starte. Reglene sier også at hvis en spiller treffer et skip, kan spilleren skyte på nytt helt til den bommer. I andre versjoner av Slagskip er dette ikke en mulighet, og spillerne skyter i stedet annenhver gang slik at spillerne får skutt omtrent like mange ganger. Jeg har valgt at spilleren kan skyte på nytt hvis han treffer, ettersom dette kan være med å minske tiden som blir brukt på en omgang. Dermed er det større sjanse for at elevene kan spille flere runder. For at et skip skal synke, må elevene i den tilpassede versjonen av Slagskip skyte alle punktene som skipet består av. Et skip med lengde tre må da treffes på tre punkter for å synke. Jeg har valgt å legge inn regelen om at eleven som mister et skip, må gi beskjed om hvilket skip som ble sunket. På den måten får motstanderen muligheten til å ha oversikt over hvilke skip som er igjen i spill.

I arbeidet med spillet Slagskip har jeg også valgt å lage et felles koordinatsystem (vedlegg H) som elevene får utdelt på starten sammen med spillebrettene og regelarket. Dette koordinatsystemet er tenkt som en hjelp for elevene underveis i spillet og skal derfor ligge synlig for begge spillerne. Tanken er at når en elev sier en koordinat skal motstanderen peke på punktet i det felles koordinatsystemet. Spilleren skal deretter bekrefte at det var det punktet spilleren mente å skyte på. Ved å bruke det felles koordinatsystemet vil dermed elevene kunne få tilbakemelding fra motspilleren slik at det er mulig å minske muligheten for feil i overgangen fra koordinat til koordinatsystem. Dette tillegget til Slagskip åpner også opp for samarbeid og diskusjon mellom elevene. Hvis det oppstår uenigheter om hvilket punkt koordinaten tilsvarer, må elevene argumentere og bli enige om hva som er rett. På den måten kan spillerne være med å bekrefte hverandres skudd for å unngå misforståelser, og dermed erstatte den umiddelbare tilbakemeldingen en mister ved å velge analogt spill i stedet for digitalt.

I tillegg til å utvikle et nytt element til Slagskip i form av et felles koordinatsystem, har jeg også valgt å innføre noen nye skyteregler. Vedlegg E viser formuleringen på de nye reglene. Etter planen skal disse nye skytereglene bli introdusert etter elevene har spilt en runde Slagskip med den vanlige skyteregelen der en skyter et punkt. På den måten kan elevene bli trygge på spillet og de grunnleggende reglene før det blir introdusert nye regler. De nye reglene har blitt utformet slik at spillerne får mulighet til å treffe mer enn et punkt på en gang gjennom å skyte linjer i stedet for punkter. Enten kan elevene skyte en linje fra Origo til et valgt punkt eller så kan de skyte en linje ved å si et funksjonsuttrykk. Jeg tror de nye reglene kan ha potensiale til å hjelpe og lette overgangen fra punkter i koordinatsystemet til lineære grafer. Ved å gjøre noen enkle tilpasninger vil det dermed være mulig å få inn linjer i koordinatsystemet i tillegg til punkter.

4 Metode

I dette kapittelet skal jeg gi en beskrivelse av hva slags metode som er blitt brukt for å samle inn og analysere datamaterialet til denne masteroppgaven og hvilke valg jeg har tatt gjennom denne prosessen. Valgene er tatt med bakgrunn i problemstillingen:

Hvordan kan spillet Slagskip gi innsikt i elever på 9. trinn sin kunnskap om koordinatsystemet og lineære funksjoner?

For å kunne belyse denne problemstillingen best mulig, er det viktig å få et datamateriale som kan gi kunnskap om temaet. Jeg så derfor på det som åpenbart å samle inn data i skolen ettersom problemstillingen fokuserer på elever og deres kunnskap om koordinatsystemet og funksjoner.

I dette metodekapittelet skal jeg i kapittel 4.1 ta for meg valg av forskningsmetode. Deretter går jeg inn på selve innsamlingen av datamaterialet og beskriver i kapittel 4.2 planleggingsprosessen og i kapittel 4.3 gjennomføringen av datainnsamlingen. Videre skal jeg i kapittel 4.4 si noe om metoden som er blitt brukt for å analysere datamaterialet i oppgaven. Etter dette vil jeg i kapittel 4.5 ta for meg kvaliteten på forskningen som er blitt gjort og i kapittel 4.6 forskningsetiske perspektiver ved gjennomføring av datainnsamlingen. Til slutt vil jeg i kapittel 4.7 ta opp temaet om metodekritikk og se med et kritisk blikk på gjennomføringen av studien og hvordan ulike valg kan ha påvirket datamaterialet.

4.1 Kvalitativ metode

Jeg har valgt kvalitativ forskningsmetode for å samle inn datamateriale til denne studien. Målet med kvalitativ forskning er å beskrive kompleksiteten av et fenomen knyttet til en bestemt problemstilling (Postholm, 2005). Kvalitativ metode har altså som intensjon å forstå og beskrive hva gitte mennesker gjør i sitt hverdagsliv og hvilken mening disse handlingene har (Postholm & Jacobsen, 2018). Gjennom å bruke kvalitativ metode kan jeg dermed få innsikt i elevenes kunnskaper som kommer til uttrykk i arbeid med Slagskip. Ettersom kvalitativ forskning representerer et ståsted som innebærer at kunnskap og forståelse blir skapt i sosial interaksjon, mener Postholm (2005) at det aller meste av kvalitativ forskning på praksis skjer innenfor det konstruktivistiske paradigmet. Det konstruktivistiske synet favoriserer blant annet design som avgrenser antall deltakere slik at en på den måten kan oppnå en rik og dynamisk forståelse av fenomenet i konteksten (Postholm & Jacobsen, 2018). Casestudie er et slikt eksempel, og det er blant annet derfor jeg har valgt å gjennomføre en casestudie.

4.1.1 Casestudie

En casestudie ser på en spesifikk situasjon som blir utformet på en slik måte at den kan illustrere et generelt prinsipp (Cohen et al., 2018). Casen som studeres består av en avgrenset gruppe som for eksempel en elev, en klasse eller en skole. Målet med en casestudie er å utvikle en teori som kan hjelpe forskere med å forstå lignende caser. Derfor ser jeg på casestudie som hensiktsmessig for min forskning ettersom jeg vil se om spillet Slagskip kan være et hensiktsmessig verktøy å bruke i matematikkundervisningen. Bakgrunnen for valg av casestudie baserer seg også på at casestudier fanger opp handlinger i sin naturlige kontekst (Postholm, 2005). På den måten kan jeg bruke matematikklasserommet til å gi innsikt i hvilke muligheter

spillet Slagskip har i matematikkundervisningen. En casestudie er interessert i en individuell case der vi vil finne ut hva denne enkelte casen kan lære oss (Stake, 2005). Min casestudie vil derfor se på hva slags informasjon spillet Slagskip kan gi oss om elever på 9.trinn sin kunnskap om koordinatsystemet og funksjoner. Ettersom jeg i denne studien ser på en pedagogisk handling, vil det ifølge Sturman (1997) være en pedagogisk casestudie jeg gjennomfører.

4.1.2 Triangulering

Sturman (1997) skriver at casestudier ofte bruker kvalitativ metode for å få fram sammenhenger. Jeg har derfor valgt å ta i bruk observasjon, intervju og innsamling av skriftlig elevarbeid for å samle inn datamaterialet. På den måten kan jeg få triangulert datamaterialet som kan være med å øke troverdigheten til studien (Sturman, 1997). Triangulering innebærer å bruke mange ulike strategier for å samle inn datamateriale (Postholm, 2005). I kvalitative casestudier kan en bruke triangulering for å sikre kvaliteten. På den måten kan de ulike dataene være med å bekrefte og understøtte hverandre, noe som vil være med å styrke studien. I tillegg kan datamaterialet mitt også være med å bidra til å gi detaljerte og fyldige beskrivelser av casen. Intensjonen bak å triangulere er å beskrive virkeligheten fra flere ulike vinkler, noe som vil gi et mer helhetlig bilde av en kompleks og sammensatt situasjon (Postholm & Jacobsen, 2018). Ved å bruke data fra de ulike innsamlingsmetodene kan jeg altså få muligheten til å dokumentere samme handling fra flere ulike kilder. For eksempel kan observasjonen av at elevene spiller Slagskip vise utførelsen av en strategi som eleven forteller om i intervjuet. På den måten kan observasjonene støtte opp om intervjuet, noe som kan styrke troverdigheten til datamaterialet slik at det ikke bare blir en subjektiv tolkning. Styrken med triangulering er at ulikt datamateriale vil være med å gjøre forskeren mindre sårbar for skjevheter som kan oppstå hvis en bare baserer forskningen på ett sett med datamateriale (Postholm & Jacobsen, 2018), noe som igjen vil være med å styrke påliteligheten og gyldigheten til forskningen.

4.1.3 Utvalg

Datainnsamlingen til dette forskningsprosjektet ble gjennomført i en klasse på 9. trinn med ca. 25 elever. Tjora (2017) skriver at en casestudie er en undersøkelse som benytter en allerede eksisterende grense for hvem undersøkelsen inkluderer. I mitt tilfelle vil eksisterende grense være klassen jeg fikk tak i via en medstudent med en kollega som viste interesse for prosjektet. Denne grensen ble satt ettersom jeg ikke hadde tilgang til noen egen klasse å gjennomføre datainnsamlingen i og derfor måtte ta de elevene jeg fikk tak i. Et av kompetansemålene etter 8. trinn sier at elevene skal kunne representere funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom representasjonene (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dette kompetansemålet var derfor en av grunnene til at jeg valgte å fokusere på 9. trinn i denne studien ettersom elevene da burde ha grunnleggende kunnskap om funksjoner og representasjoner. Da intervjuobjektene skulle velges, var klassens matematikklærer behjelpelig med å plukke ut et utvalg. Ønsket mitt var å ha et relativt tilfeldig utvalg. Det viktigste var at de utvalgte elevene var informanter som kunne snakke mye uten at jeg nødvendigvis måtte gripe inn for å hale svarene ut av dem (Ringdal, 2018). På den måten var det et godt grunnlag for å få til diskusjoner samtidig som jeg kunne få mest mulig datamateriale fra intervjuene. På grunn av begrenset tid ble det bestemt at jeg skulle intervjue to elevpar (4 elever). Hvor mange intervjuobjekt som er hensiktsmessig å ha, vil variere fra studie til studie. Kvarv (2014) påpeker at en kan skjære ned på antall

deltakere i dybdeundersøkelser ettersom hensikten er å se på enkeltfenomener og ikke på omfang eller utbredelse. Temaet rundt antall intervjuobjekter og representasjon av kjønn vil bli diskutert nærmere i kapittel 4.7.

Et intervju er ikke et nøytralt medium som gjør det mulig å møte hverandre fritt uten å bli påvirket av konteksten (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 117). Ettersom jeg ikke kjente elevene før prosjektet, ble rollen min som forsker ekstra tydelig. Likevel hadde jeg et ønske om at elevene skulle oppfatte meg som imøtekommende, rolig og trygg. En presentasjon av meg selv og prosjektet mitt kan dermed være med å skape tillit, noe som er viktig ifølge Tjora (2017). På den måten kunne jeg være en person elevene ikke trengte å være redd for å stille spørsmål til under undervisningsøkten eller intervjuet. Dette var også en av grunnene til at jeg valgte å komme på besøk en gang før jeg skulle gjennomføre selve opplegget. På den måten hadde elevene et ansikt på meg, og jeg var ikke helt fremmed for dem når datainnsamlingen skulle gjennomføres. Tjora (2017) påpeker også at det er viktig å presentere seg selv og prosjektet ettersom folk ikke nødvendigvis er vant til å ha noen som går rundt og observerer dem.

4.1.4 Observasjon

For å samle inn datamateriale valgte jeg å gjennomføre observasjoner mens elevene spilte Slagskip. Observasjon kan brukes til å studere selve aktiviteten og det som blir gjort fremfor hvordan deltakerne forteller om aktiviteten, slik de ville gjort i for eksempel et intervju (Tjora, 2017). Ved å observere underveis mens elevene spilte Slagskip, ville jeg derfor kunne få innsyn i hvordan elevene spilte, diskuterte, argumenterte og tilsynelatende tenkte rundt spillet. I forkant av datainnsamlingen hadde jeg bestemt meg for å ta i bruk åpen deltakende observasjon. Åpen observasjon vil si at jeg var åpen med elevene om formålet med undersøkelsen (Kvarv, 2014). Dette viste jeg gjennom informasjonen elevene fikk ved vårt første møte og i informasjonsskrivet. Det var også tydelig underveis i datainnsamlingen at forskningen min innebar å spille Slagskip ettersom det var dette elevene gjorde i undervisningsøkten. Deltakende observasjon vil si at jeg var aktiv i situasjonen og kombinerte observasjonen med andre gjøremål og situasjoner (Germeten & Bakke, 2013). I mitt tilfelle vil det si at jeg observerte samtidig som jeg også skulle ha ansvar for undervisningsøkten og være tilgjengelig for å svare på spørsmål underveis.

Det vi observerer blir alltid filtrert gjennom det vi vet og kjenner til fra før (Germeten & Bakke, 2013). Derfor vil observasjon aldri være en objektiv eller nøytral måte å samle inn informasjon på. I forbindelse med datainnsamlingen hadde jeg noen tanker om hva jeg ville få ut av økten. Dette kan dermed ha vært med å påvirke observasjonene. Hva vi får med oss avhenger av hva som fenger vår oppmerksomhet, og derfor vil noe informasjon kunne gå forbi oss. Får å få med meg mest mulig av inntrykk i løpet av spillsituasjonen, valgte jeg derfor å filme noen av elevene samtidig som jeg observerte kontinuerlig mens elevene spilte Slagskip. Videoopptak er en god måte å plukke opp både det elevene sier og det de gjør (Rautaskoski, 2019). Jeg valgte derfor å bruke videoopptak slik at jeg kunne få med meg det som ble sagt og hvor elevene pekte, markerte og plasserte ut skip på spillebrettene sine. Videoopptak ville også gi meg muligheten til å få nøytrale observasjoner som ikke var blitt filtrert gjennom mine forventninger og tanker rundt prosjektet.

4.1.5 Intervju

I tillegg til observasjon valgte jeg å ta i bruk intervju som metode for å samle inn datamateriale til studien. Intervjuer med åpne spørsmål kan være fine supplement til observasjonene (Ringdal, 2018). Formålet med et slikt intervju er å få tak i informasjon som jeg kan bruke for å belyse problemstillingen min. Ved å intervjue de samme elevparene som ble observert med videokamera, vil datamaterialet fra intervjuet og observasjonene kunne være med å utfylle hverandre. Gjennomføring av intervju i par vil diskuteres nærmere i kapittel 4.7. I likhet med observasjonen valgte jeg også å filme under intervjuet. På den måten kunne jeg være sikker på at relevant informasjon som ble sagt, ikke ville falle ut (Ringdal, 2018). Gjennom å filme intervjuet hadde jeg også muligheten til å få med meg hvor elevene pekte på koordinatsystemet underveis i intervjuet.

I utformingen av intervjuguiden (vedlegg B) tok jeg utgangspunkt i at jeg ville ha et semistrukturert intervju. Et semistrukturert intervju vil si at intervjuet verken er en åpen eller lukket samtale (Kvale & Brinkmann, 2015). Jeg så på et semistrukturert intervju som optimalt for å svare på studiens problemstilling siden jeg da hadde muligheten til å få innsikt i både elevenes tanker og resonnering rundt strategier via åpne spørsmål samtidig som jeg også kunne gi elevene oppgaver om representasjoner og funksjoners kjennetegn. På forhånd hadde jeg laget ferdigformulerte spørsmål og oppgaver. Underveis i intervjuene ble jeg nødt til å omformulere flere av spørsmålene og oppgavene, noe som har ført til at standardiseringen på de to intervjuene nok ble litt lavere enn først planlagt. Dermed har ikke intervjuguiden en høy sammenlignbarhet og reliabilitet (Kvarv, 2014). Jeg ser likevel ikke på dette som et stort problem fordi målet med undersøkelsen ikke hovedsakelig er å sammenligne elevenes svar, men å få innsikt i hva de kan om temaet.

4.2 Forberedelser til datainnsamlingen

I dette delkapittelet vil jeg gå gjennom forberedelsene til datainnsamlingen som ble gjennomført i forbindelse med denne masteroppgaven. Kapittelet vil ta for seg utarbeiding av undervisningsopplegg og intervjuguide og gjennomføring av pilotundersøkelse.

4.2.1 Utarbeiding av undervisningsopplegg og intervjuguide

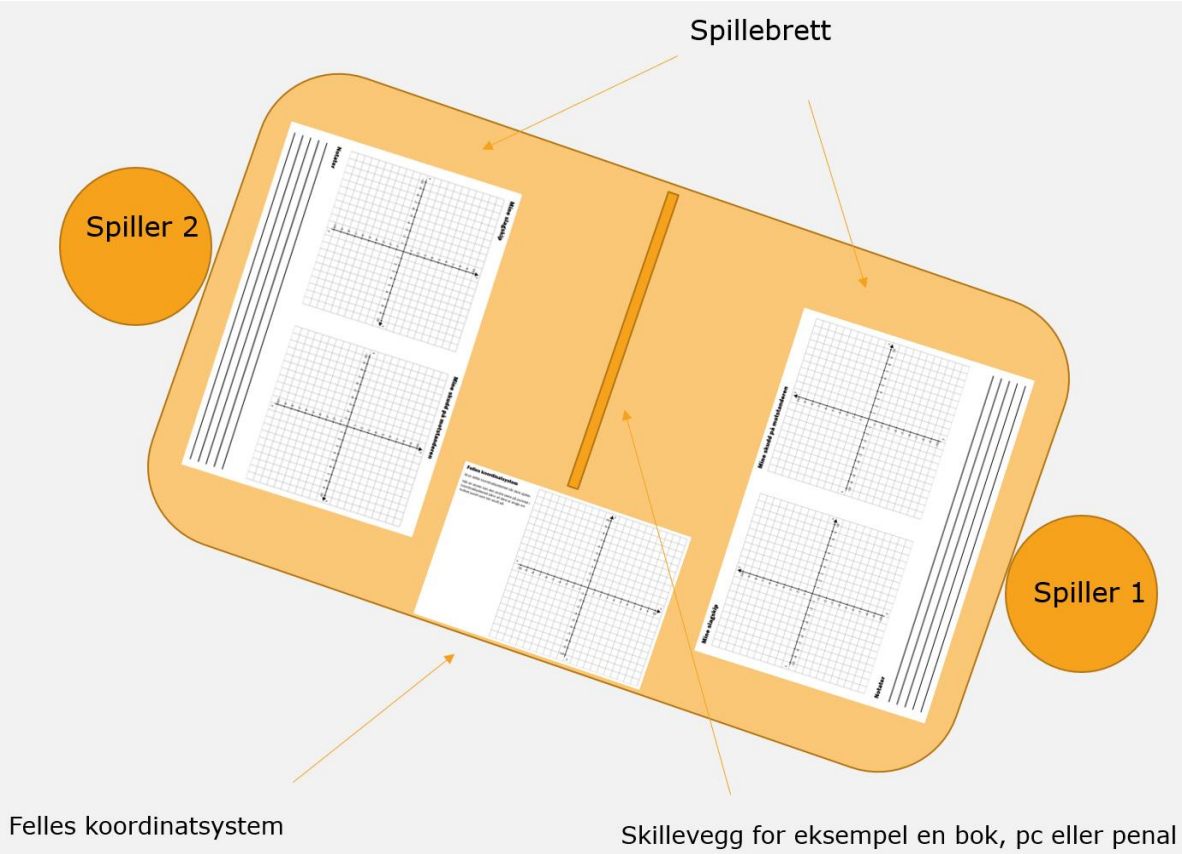
I arbeidet med både undervisningsopplegget og intervjuguiden var det viktig å ta hensyn til tiden jeg hadde fått til rådighet. Jeg hadde fått to skoletimer på 45 minutter til å spille Slagskip og intervjue. Jeg hadde også fått beskjed av læreren om at det kunne være lurt med en oppfriskning av koordinater siden det var gått en god stund siden elevene sist hadde om temaet. Jeg ville at elevene skulle få mest mulig tid til å spille Slagskip fordi intervjuet som skulle gjennomføres etter økten, hadde som forutsetning at elevene hadde spilt Slagskip, gjerne flere runder. Derfor ble introduksjonsdelen laget med utgangspunkt i at den ikke skulle vare mer enn 10 minutter. I introduksjonen skulle jeg gjennomgå sentrale begreper som koordinatsystem og koordinater, samt reglene for spillet Slagskip (se kapittel 3).

Intervjuguiden ble som nevnt i kapittel 4.1.5, utformet med bakgrunn i problemstillingen og hva jeg ønsket å få av data. I utformingen ble jeg inspirert av oppgavene om koordinatsystem og funksjoner i læreboka til Kongsnes og Wallace (2020) for å vite omtrent hvilket nivå jeg skulle legge meg på. For at datamaterialet kunne være med å belyse problemstillingen, så jeg på det

som viktig å lage oppgaver som tok utgangspunkt i ulike representasjoner av funksjoner og overganger mellom disse som tabellen (fFigur 4) til Janvier (1987) viser. Jeg ønsket også at flest mulig av nivåene til Bossé et al. (2011) (Figur 5) skulle være representert i oppgavene slik at jeg kunne se om noen av disse skilte seg ut hos elevene.

4.2.2 Pilotering

Før selve datainnsamlingen ble det gjennomført en pilotundersøkelse. Her fikk jeg testet ut opplegget og intervjuguiden. På den måten kunne jeg få muligheten til å se om opplegget var egnet til å besvare problemstillingen og luke ut eventuelle feil og uklarheter som jeg kunne ha oversett (Postholm & Jacobsen, 2018). Piloten ble gjennomført i parallellklassen til datainnsamlingsklassen. Gjennom pilotintervjuet fikk jeg testet om spørsmålene var forståelige og hvordan nivået på oppgavene var. På grunn av tidsbegrensningen valgte jeg å gjennomføre pilotintervjuet i par.



Figur 7: Illustrasjon av oppsett av spillet Slagskip under datainnsamlingen

Erfaringer fra piloten

Gjennom piloteringen fant jeg ut at det var flere endringer som burde gjøres før datainnsamlingen. Blant annet var koordinatsystemet med akser fra -10 til 10 for stort ettersom det ga elevene 17/121 sjanse for å treffe. Dette ville føre til at en runde med Slagskip ville ta lengre tid og hindre elevene i å få spilt med ekstrareglene. Det felles koordinatsystemet (vedlegg

H) ble ikke brukt som planlagt av elevene. Figur 7 viser oppsett til Slagskip og hvordan det var planlagt at det felles koordinatsystemet skulle ligge. Piloteringen viste at nesten ingen av elevene brukte dette koordinatsystemet, med mindre jeg gikk inn for å forklare dem grundig hvordan de skulle bruke det. Under piloteringen oppdaget jeg også at enkelte elever plasserte skipene i rutene framfor i kryssene, noe som ga dem en utfordring når de skulle begynne å skyte. Under intervjuet erfarte jeg også at elevene ikke hadde så god kontroll på funksjoner som jeg hadde forventet på forhånd. Elevene hadde for eksempel ikke kontroll på hvordan et funksjonsuttrykk skulle skrives.

Endringer av undervisningsopplegg og intervjuguide

Oppstarten av økta ble endret slik at viktigheten av å plassere skipene i kryssene og bruken av det felles koordinatsystemet ble tydelig poengtert. Koordinatsystemet elevene brukte som spillebrett ble også gjort mindre for å senke antall skuddmuligheter og dermed øke sjansen for å treffe et skip. Jeg konkluderte med at det var tilstrekkelig å bruke koordinatsystem med akser fra -2 til 2. Dette førte til at skipet med lengde 5 også ble fjernet fra spillet ettersom det nye brettet ville ha få mulige plasseringer for dette skipet. På den måten ville elevene bruke mindre tid på et spill og dermed øke sjansen for å få tid til å spille med ekstrareglene (Vedlegg E: Ekstraregler til Slagskip). Ekstrareglene ble også endret etter piloten. Jeg gikk fra tre til to ekstraregler fordi jeg så på det som tilstrekkelig for forskningen å bare ha to regler.

Etter piloteringen ble det bare gjort små endringer i intervjuguiden. Det ble bare lagt inn et par ekstra oppgaver. Likevel ga piloten meg et inntrykk av hvor mye tid jeg hadde til disposisjon for intervju. På grunn av dette hadde jeg på forhånd tenkt ut hvilke spørsmål og oppgaver som var viktigst at elevene fikk besvart.

4.3 Gjennomføring av datainnsamling

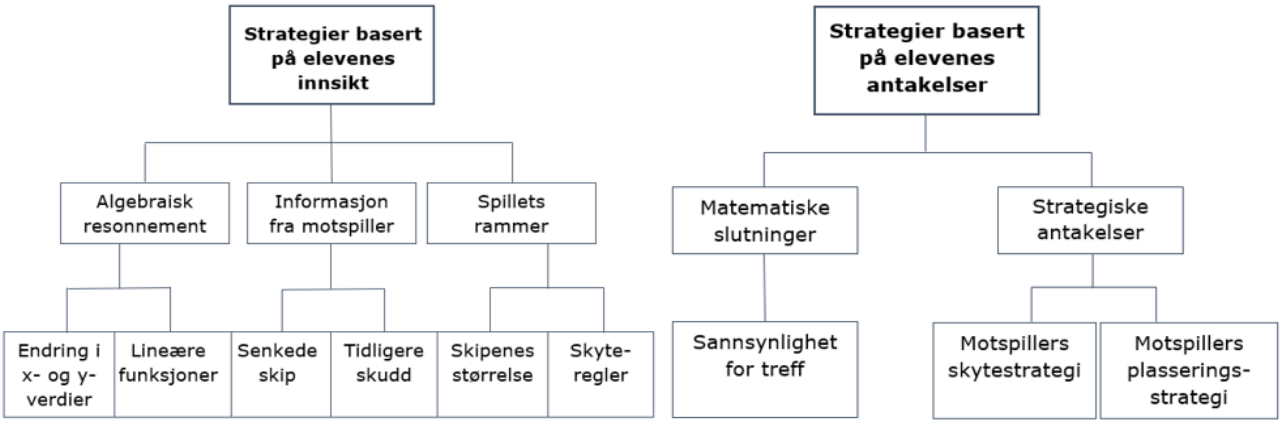
Datainnsamlingen bestod av to deler; en undervisningsøkt og to intervjuer. Etter introduksjonen i starten av økta fikk elevene spille Slagskip. Mens elevene gjorde seg klare til å spille, satte jeg opp kameraene som skulle filme de to utvalgte parene. Kameraene ble satt opp slik at bildet viste de to elevene, deres koordinatsystem og det felles koordinatsystemet. På den måten var det mulig i ettertid å se hvor elevene pekte og markerte i de ulike koordinatsystemene underveis i spillet. Mens elevene spilte, gikk jeg rundt og observerte og svarte på eventuelle spørsmål. Hvis elevene ble ferdig med et spill, fikk de utdelt ekstrareglene jeg hadde laget og et nytt koordinatsystem som denne gangen gikk fra -3 til 3 (vedlegg G). Dette valgte jeg å gjøre fordi et større koordinatsystem ville gi elevene større uttelling hvis de brukte de nye reglene fordi linjene da ville treffe flere punkter. Da økten var over, skulle elevene ha friminutt, men et av parene som ble filmet syntes det var så gøy å spille at de spurte om de kunne fortsette å spille i friminuttet. Dette syntes jeg bare var greit ettersom det kunne gi meg mer datamateriale. Dessuten kunne det gi elevene bedre forutsetninger under intervjuet.

Med bakgrunn i den begrensede tiden jeg hadde til intervjuene var målet mitt å begrense hvert intervju til omtrent 20 min. Noen oppgaver førte til lange diskusjoner. Dette medførte at det første intervjuet endte opp med å bli litt lengre enn planlagt. Selv om dette gjorde at det andre intervjuet ble kortere, mener jeg det var riktig å fortsette diskusjonen ettersom den andre gruppa ikke diskuterte like mye som den første.

4.4 Metode for å analysere datamaterialet

I analyseprosessen av kvalitativt datamateriale gjelder det å få en oversikt over dataene, ettersom det ofte kan være omfattende materiale, slik at det kan presenteres for andre (Postholm & Jacobsen, 2018). Postholm og Jacobsen (2018) skriver at analysen starter med en gang forskeren er på feltet hvor datamaterialet samles inn. Dette stemmer overens med min opplevelse av datainnsamlingen. For eksempel måtte jeg under intervjuene være til stede i situasjonen slik at jeg hadde mulighet til å stille gode oppfølgingsspørsmål.

Etter datainnsamling startet jeg med å transkribere både intervjuene og observasjonene ved hjelp av noen selvlagde transkripsjonskoder (vedlegg C). Jeg gjennomførte transkripsjonene selv, noe Postholm og Jacobsen (2018) anbefaler ettersom forskeren kan gjøre analyser underveis i transkripsjonen. Underveis i transkriberingen noterte jeg ned når jeg kom over situasjoner og kommentarer som kunne være interessante og som kanskje kunne være med å belyse studiens overordnede problemstilling. Da transkripsjonene var unnagjort, skrev jeg ut transkripsjonene og begynte med åpen koding hvor jeg markerte utdrag og noterte ned refleksjoner og tanker rundt disse. Jeg valgte å sortere utdragene i to kategorier basert på de to forskningsspørsmålene; en om strategier og en med etterarbeidet med oppgaver i etterkant av Slagskip. Slik gikk jeg igjennom transkripsjonene og noterte ned hvor de ulike kategoriene kom til syne. Underveis som jeg jobbet med å analysere datamaterialet, oppdaget jeg at noen av kategoriene ikke var de mest hensiktsmessige for å belyse de to forskningsspørsmålene. Jeg gikk derfor flere ganger fram og tilbake mellom datamaterialet og ulike kategorier før jeg endte opp med de nevnte kategoriene. Kategorien strategi delte jeg inn i strategier basert på elevenes innsikt og strategier basert på elevenes antakelser. Etterarbeidet ble delt inn i kjennetegnene stigningstall, konstantledd, negative tall og språkbruk og representasjonene grafisk og algebraisk i tillegg til transformasjoner. Til slutt lagde jeg to figurer for å representere kategoriene mine, en for hver av de to underspørsmålene til problemstillingen. Figur 8 viser kategoriene som omhandler strategier, og Figur 9 presenterer kategorier og eksempler i forbindelse med matematiske kjennetegn som kom til syne i etterarbeidet.



Figur 8: Elevenes strategier i spillet Slagskip

Jeg har valgt å dele strategiene inn i to ulike deler, *strategier basert på elevenes innsikt* og *strategier basert på elevenes antakelser*. Grunnen for dette er at jeg så på det som hensiktsmessig å skille mellom strategier som var basert på kunnskap og informasjon som elevene hadde tilegnet seg, og strategier der de ikke nødvendigvis var sikre på om antakelsen de brukte som begrunnelse stemte. Spesielt strategiene som inngår i elevenes antakelser kan finne på å gå litt over i hverandre ettersom det for eksempel ikke alltid var like lett å skille mellom om elevene snakket om sannsynligheten for å treffe et sted eller muligheten for at motspiller hadde plassert et skip et bestemt sted. For å skille mellom matematiske slutninger og strategiske antakelser, tok jeg utgangspunkt i elevenes påstander om at «det handler om sannsynlighet» og at «det er psykologisk». De fleste kategoriene i Figur 8 er ikke forankret i litteratur ettersom det er blitt gjort lite forskning på området. Unntaket fra dette er kategorien *algebraisk resonnement*. Denne kategorien tar utgangspunkt i Kaput (2008) sin beskrivelse av begrepet som sier at algebraisk resonnering karakteriseres gjennom bruk av bokstaver som ukjente, variabler, parametere o.l.

	Grafisk representasjon	**Algebraisk representasjon**	**Transformasjoner ved sammenligning av representasjoner**
Stigningstall	«Den går to ned og så en til venstre» «Seks er dobbelt så mye som tre, for å komme dit må du øke med to for hver gang i høyden»	«y=2x. Jeg tror jeg skjønner det! For at y=2x, det er fordi at y er x gange 2. så du går to for hver en» «Nei, da hadde det jo blitt y er lik en x da […] fordi den går jo en og en, oppover en og en»	«Det er en skrålløper og det er en hest» (forklarer forskjellen på stigningen til y=x og y=2x) «Mønster: to ganger en rute tre ganger, i stedet for å gå en gange en rute bortover så går den en gange to ruter helt bort
Konstantledd	«Den starter ikke på null. Den starter på en. Altså på (0,1)» «Den går ved siden av origo»	«det vil si at y alltid vil være større enn x. EN større enn x»	«De er like bratte, men denne starter høyere opp» «men det er det samme som det her er det ikke? [peker på y=2x]. Eller ikke nødvendigvis … hvis x=1 så er det det samme som den fordi y = x som er 1 og så + 1.»
Negative tall	«Ja, øke like mye, men tallene går nedover så den blir mindre, hvis du går ut ifra koordinatene»	«Den vil ha det samme fordi linja kan gå uendelig i begge retninger så blir den jo rett og da det samme» «Funksjonsuttrykket kan skifte når det går forbi origo fordi da er du på negative tall» «Du kan ikke kalle det for minus pluss. Her er y negativ så da tenker jeg at her [området nede til høyre] skal det være y=-2x og her [området oppe til venstre] y=2x»	(se eksempler på grafisk og algebraisk representasjon)
Språkbruk	«Den går motsatt vei» «Den går skrått»		«De er like bratte, men denne starter høyere opp» «De er parallelle» «Og streken blir også lik»

Figur 9: Kjennetegn og representasjoner i elevenes arbeid i etterkant av spillet Slagskip

I motsetning til Figur 8 er det derimot flere av kategoriene i Figur 9 som er teoretisk forankret. Kategoriene grafisk og algebraisk representasjon har bakgrunn fra Duval (2006) og Janvier (1987) sine inndelinger av representasjoner. Kategorien *transformasjoner ved sammenligning av representasjoner* tar også utgangspunkt i Duval (2006) sin definisjon av transformasjoner av representasjoner. I tillegg til Duval (2006) og Janvier (1987) inkluderer disse kategoriene også tanker og resonnementer elevene har gjort ved hjelp av representasjonene. Kategoriene *stigningstall*, *konstantledd* og *negative tall* baserer seg på sentrale kjennetegn ved funksjoner og koordinatsystemet (Schoenfeld et al., 1993). Stigningstall og konstantledd henviser til

kjennetegn ved funksjoner, mens negative tall inkluderer både negative stigningstall til funksjoner, men også negative verdier i koordinatsystemet.

Etter at datamaterialet var blitt fordelt i de ulike kategoriene var det nødvendig å finne eksempler til hver av kategoriene. Her gjaldt det å finne gode eksempler som kunne illustrere kategoriene og belyse sentrale punkter som jeg ville ha med i analysen min. Hvilke eksempler jeg ville ha med hadde jeg en liten tanke om fra før fordi jeg som nevnt hadde gått igjennom datamaterialet mange ganger og markert underveis sentrale utsagn og kommentarer. Figur 9 viser korte utsnitt av noen av eksemplene som vil bli presentert nærmere i analysekapittelet.

4.5 Forskningens kvalitet

Samfunns- og adferdsforskning kan i liten grad ha som mål å avdekke fullstendig og universell sannhet (Postholm & Jacobsen, 2018). Med bakgrunn i dette mener Postholm og Jacobsen (2018) at forskningens kvalitet burde bestemmes ut fra hvordan kunnskapen er produsert. I dette delkapittelet skal jeg derfor se nærmere på kvaliteten av forskningen jeg har gjort. Her vil jeg diskutere forskningens pålitelighet, gyldighet og hvordan valg jeg har tatt har påvirket oppgavens kvalitet.

4.5.1 Pålitelighet (reliabilitet)

Møtet mellom forsker, forskningsfelt og deltakerne vil utarte seg ulikt fra studie til studie siden forskere tar med seg sin subjektive, individuelle teori innenfor forskningen (Postholm & Jacobsen, 2018). Alle mennesker er også i konstant utvikling, noe som for eksempel vil gjøre at en deltaker vil kunne oppføre seg og svare ulikt på to ulike tidspunkt. Manglende overensstemmelse trenger derfor ikke skyldes lite pålitelig måling, men at situasjonen er endret (Postholm & Jacobsen, 2018). For å styrke forskningens pålitelighet er det viktig at forskeren er åpen om hvordan relasjonen mellom deltakerne og seg selv er (Postholm & Jacobsen, 2018). Ettersom jeg fikk bruke klassen til en medstudents kollega hadde jeg ikke noe kjennskap til klassen som deltok i studien fra før. Dette var en av grunnene til at jeg valgte å komme på besøk til klassen før selve datainnsamlingen skulle skje. På den måten håpte jeg at elevene skulle være litt mer trygge på meg da jeg kom tilbake til dem neste gang. Ledende spørsmål i intervjuet kan også være med å påvirke påliteligheten (Kvale & Brinkmann, 2015). På bakgrunn av dette hadde jeg valgt å utforme en del spørsmål til intervjuet på forhånd. Dermed fikk jeg mulighet til å tenke godt gjennom formuleringen av spørsmålene slik at de ikke skulle bli ledende for elevenes svar. Det ble likevel behov for å stille noen oppfølgingsspørsmål som ikke var planlagt på forhånd. Jeg prøvde å formulere disse spørsmålene godt underveis i intervjuet, men en skal ikke se bort ifra at noen av spørsmålene kunne oppfattes som litt ledende for elevene.

Forholdet mellom problemstillingen og de utvalgte deltakerne er også sentral i diskusjonen om studiens pålitelighet (Postholm & Jacobsen, 2018). Når det kommer til oppgavens problemstilling, tar den utgangspunkt i elever sin kunnskap om koordinatsystem og funksjoner. Elever på 9. trinn er blitt valgt som fokus ettersom de ifølge Kunnskapsdepartementet (2019) skal ha gått igjennom temaet i løpet av 8. trinn. Ettersom det hadde vært en stund siden klassen hadde hatt om temaet, kan det ha vært med å påvirke resultatene sammenlignet med hvis elevene nettopp hadde hatt om temaet.

4.5.2 Gyldighet (validitet)

En forsknings gyldighet går ut på i hvilken grad, og med hvilken sikkerhet, vi kan påstå at et funn fra en kontekst også er gyldig i en annen kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). Målet er å kunne generalisere ut i fra datamaterialet som er samlet inn slik at det også kan gjelde for andre grupper som ikke deltok i undersøkelsen (Tiller & Brekke, 2013). Min casestudie tar som nevnt tidligere utgangspunkt i en klasse på omtrent 25 elever, hvor fire av dem var hovedfokuset for observasjonen og intervjuene. Fordi antallet intervjuobjekter er såpass lavt vil det være vanskelig å generalisere ut fra datamaterialet. Jeg tror fortsatt det vil være mulighet for å overføre deler av kunnskapen fra denne studien til andre liknende situasjoner i klasserommet. Kunnskapen vi får fra denne casestudien vil kunne gi innsikt og belyse potensialet til Slagskip selv med en liten gruppe.

Valg av metode er viktig for forskningens gyldighet. Dette innebærer også at spørsmål og oppgaver som blir brukt i datainnsamlingen er gyldige indikatorer for de fenomenene en ønsker å forske på (Tiller & Brekke, 2013). I mitt tilfelle vil dette altså gjelde spørsmålene elevene ble stilt og oppgavene de fikk i intervjuet. Under utviklingen av disse tok jeg hovedsakelig utgangspunkt i Slagskip, læreboka Matemagisk 8 (2020), Janvier (1987) og Bossé et al. (2011). På den måten fikk jeg lagd spørsmål og oppgaver som kunne være med å belyse problemstillingen som har fokus på elever på 9. trinn sin kunnskap om koordinatsystem og funksjoner i forbindelse med Slagskip.

4.6 Forskningsetikk

Å opptre etisk forsvarlig i forbindelse med gjennomføring av et forskningsprosjekt er særdeles viktig blant annet fordi en bryter inn på andre folks arenaer og kommer nært inn på den en forsker på (Tjora, 2017). Etiske problemstillinger preger hele forløpet til en undersøkelse (Kvale & Brinkmann, 2015), og det var derfor flere etiske problemstillinger jeg måtte ta hensyn til i løpet av arbeidet med denne masteroppgaven. Som forsker har jeg flere etiske forpliktelser jeg må forholde meg til. Ettersom forskningen min innebærer at det er barn som deltar er disse kravene enda strengere enn hvis deltakerne hadde vært voksne. Jeg var derfor tidlig ute med å sende inn en søknad om prosjektet mitt til NSD (Norsk senter for forskningsdata). På den måten kunne jeg være sikker på at prosjektet ikke ville stride imot forskningsetiske prinsipper. Fordi casestudien involverer personer som kan gjenkjennes er det etiske problemet overordnet (Sturman, 1997). Som forsker har jeg et særlig ansvar for at datamaterialet ikke kommer på avveie, spesielt når det gjelder personopplysninger (Tjora, 2017). Derfor har materialet blitt anonymisert og oppbevart på en sikker måte. På den måten kunne ikke hvem som helst få tilgang til materialet og sensitive opplysninger om deltakerne.

I forkant av datainnsamlingen var det også viktig å informere både elever og foresatte om prosjektet og hvordan dette ville foregå. Jeg lagde derfor et informasjonsskriv og samtykkeskjema (vedlegg A) som ble delt ut til elevene da jeg var på besøk hos dem i forkant av piloteringen. I tillegg ble informasjonen formidlet via skolens kommunikasjonskanal direkte til foresatte. På den måten kunne jeg forsikre meg om at informasjonen kom helt hjem til de foresatte ettersom det var foreldrene som måtte skrive under på samtykkeskjemaet siden elevene var under 16 år. I skjemaet skulle det samtykkes til at det var greit å delta i intervju som ble tatt opp, noe som var påkrevd av NSD. Her var det flere elever som ikke godkjente dette, noe som var med å begrense mulighetene for hvilke elever som kunne intervjues. Dette

var hovedgrunnen til at intervjuobjektene endte opp med å bare være gutter. I informasjonsskrivet ble det tydelig poengtert at deltagelsen var frivillig og at de når som helst kunne trekke seg fra studien. Det var også lagt ved kontaktinformasjon slik at det var mulig å stille spørsmål hvis det var noe som var uklart. Elevene fikk også mulighet til å stille spørsmål da jeg var på besøk for å informere og dele ut skjemaene. Under selve datainnsamlingen fikk elevene som skulle intervjues og observeres med videokamera, i tillegg mulighet til å gi muntlig samtykke om egen deltakelse. På den måten fikk elevene lov til å bestemme selv om de ville delta i studien, og de fikk dermed mulighet til å si nei selv om de foresatte hadde samtykket til deltakelse.

4.7 Metodekritikk

Som nevnt i kapittel 4.2 om utarbeiding av undervisningsopplegget valgte jeg at elevene skulle spille Slagskip på papir. Jeg så på dette som den mest praktiske løsningen av flere grunner. Blant annet valgte jeg å utvikle et felles koordinatsystem som begge spillerne kunne bruke underveis i spillet. Et slikt koordinatsystem hadde ikke vært nødvendig digitalt fordi dataprogrammet ville plottet inn punktet i koordinatsystemet for eleven når det ble skrevet inn en koordinat. Her kunne likevel elevene endt opp med å skyte et annet sted enn planlagt hvis eleven skrev ned en annen koordinat enn egentlig ønsket ved en feil. Et felles koordinatsystem vil dermed kunne være med å rette opp eventuelle feil og misforståelser uten at det ville gått utover spillet. Når ekstrareglene ble tatt i bruk, ser jeg i ettertid at det likevel kunne vært en fordel å gjennomføre spillet digitalt ettersom programmet da ville presentert riktig funksjon når det ble skrevet et funksjonsuttrykk. En slik tilbakemelding var ikke like lett å få med det felles koordinatsystemet ettersom det forutsetter at elevene har kunnskap om funksjoner og funksjonsuttrykk, noe elevene som deltok i denne studien hadde i begrenset grad. Likevel ser jeg på denne løsningen med å spille på papir og ha et felles koordinatsystem som en god løsning. En annen fordel ved å gjennomføre Slagskip på papir var at videoobservasjonen da kunne fange opp hvor elevene pekte på koordinatsystemene mens de snakket underveis i spillet. Dette ville være med å gi mer dybde i datamaterialet.

Ved planlegging av datainnsamlingen måtte jeg også ta stilling til om jeg hadde bruk for lyd- eller videoopptak. Jeg endte opp med å bruke videoopptak både under observasjonen og intervjuene. På den måten kunne videokameraet både fange opp det som ble sagt og det som ble gjort. Hvis jeg skulle observert og notert der det ble tegnet og pekt i koordinatsystemet underveis i intervjuet, kunne dette gjort at jeg hadde gått glipp av andre observasjoner underveis i spillet. Å fokusere på å notere kunne også påvirket intervjuet og min evne til å følge med på svarene og stille gode oppfølgingsspørsmål. Som forsker må en være bevisst på at observasjonsstudier bidrar til en forskningseffekt. Forskningseffekten peker på at deltakerne kan handle annerledes når de blir observert enn det de ville gjort til vanlig, og Tjora (2017) antar at denne forskningseffekten er større ved bruk av videoopptak. En ulempe med video framfor lydopptak er dermed at elevene kan være ukomfortable med å bli filmet. Det kan kanskje også gjøre at fokuset blir rettet mer mot kameraet enn mot oppgaven de skal gjøre. Det er vanskelig for meg å si om elevene i min studie oppførte seg veldig annerledes når kameraet ble tatt frem, ettersom jeg ikke kjente elevene fra før, men fikk ikke inntrykk av at de oppførte seg spesielt rart.

Jeg oppdaget at tiden jeg hadde fått tildelt var litt i minste laget, noe som var med å påvirke flere valg under planleggingen av undervisningsopplegget (kapittel 4.2). Tidsbegrensningen var

også med å forme gjennomføringen av intervjuet. Fordelen med å intervjue elevene individuelt er at de kan snakke fritt uten å bli avbrutt av en medelev. En kan også unngå at noen elever blir passive og lar andre snakke. Likevel kan det å bli intervjuet alene med en voksen en ikke kjenner, være skremmende for noen elever. Derfor kan det være betryggende å ha en medelev til stede i slike situasjoner. Å intervjue flere elever vil også kunne skape mer diskusjon elevene imellom. Jeg endte derfor opp med å intervjue fire elever i to par. Disse intervjuene ga meg en god del datamateriale, men det kan hende at det hadde vært enda bedre hvis jeg hadde kunnet intervjue enda flere elever. Dette var dessverre ikke mulig i mitt tilfelle med den begrensede tiden jeg hadde til rådighet.

Stake (2005) påpeker også at det er viktig å velge et representativt utvalg å forske på. Intervjuobjektene mine var alle gutter. Grunnen til dette var at det var for få jenter som hadde samtykket til å bli intervjuet. Læreren, som hadde god kjennskap til elevene, mente derfor det var lurest å intervjue de to valgte parene ettersom disse elevene samarbeidet godt, var trygge på hverandre og flinke til å ordlegge seg. Jentene er likevel representert i datamaterialet gjennom observasjoner og elevarbeid. Datamaterialet fra intervjuene er derfor ikke nødvendigvis representative, men de kan likevel gi verdifull innsikt og antydninger om hvordan Slagskip kan gi innsikt i elevenes kunnskap om koordinatsystem og funksjoner.

5 Analyse

I innledningen presenterte jeg følgende problemstilling for denne masteroppgaven: *Hvordan kan spillet Slagskip gi innsikt i elever på 9. trinn sin kunnskap om koordinatsystemet og lineære funksjoner?* For å belyse denne problemstillingen valgte jeg å dele den videre opp i to forskningsspørsmål:

1. Hvilke strategier bruker elevene når de spiller Slagskip, og hvilke uttrykk for elevenes kunnskaper om koordinatsystemet kan dette vise?
2. Hvilke muligheter for videre arbeid med lineære funksjoner er det spillet Slagskip kan være med å skape?

I dette kapittelet skal jeg gjøre rede for resultatene av analysen som er blitt gjort av datamaterialet jeg samlet inn i forbindelse med dette masterprosjektet. Denne analysen skal dermed være med å bidra til å gi et svar på den overnevnte problemstillingen. Analysen tar utgangspunkt i de to forskningsspørsmålene, og dermed også kategoriene som ble presentert i Figur 8 og Figur 9, og er derfor todelt; kapittel 5.1 handler om elevenes bruk av strategier når de spiller Slagskip og hva dette kan si om deres kunnskap, og kapittel 5.2 tar for seg det videre arbeidet i etterkant av bruk av spillet Slagskip med fokus på kjennetegn ved koordinatsystemet og funksjoner som kommer til syne. Kapittel 5.1 er videre delt inn i 5.1.1 som ser på *strategier basert på elevens innsikt* og kapittel 5.1.2 som ser på *strategier basert på elevenes antakelser*. Kapittel 5.2 er delt inn i *grafisk representasjon* (5.2.1), *algebraisk representasjon* (5.2.2) og *transformasjoner ved sammenligning av representasjoner* (5.2.3). Under hvert av de tre underkapitlene i 5.2 vil det bli presentert eksempler på kjennetegnene *stigningstall*, *konstantledd*, *negative tall* og *språkbruk*. Målet med dette analysekapittelet der dermed å se hvordan Slagskip kan gi innsikt i elevenes kunnskap om koordinatsystemet og lineære funksjoner.

5.1 Elevenes strategier i spillet Slagskip

I arbeidet med analysen av strategiene elevene brukte i forbindelse med Slagskip ble det tydelig at bakgrunnen for de ulike strategiene kunne deles inn i to kategorier. Den ene kategorien baserte seg på informasjon elevene hadde fått gjennom for eksempel spillets regler, fra motspiller eller gjennom matematisk resonnering. Denne kategorien ble derfor kalt for *strategier basert på elevenes innsikt*. Den andre kategorien baserte seg på slutninger som en ikke nødvendigvis kunne være sikre på at stemte eller kunne bekreftes. Dette kan være antakelser basert på strategi eller matematikk. Denne kategorien ble derfor kalt for *strategier basert på elevenes antakelser*. Figur 8 som ble presentert i kapittel 4.4 viser en oversikt over strategikategoriene med aktuelle underkategorier. Begge de nevnte kategoriene kom til syne hos de to elevparene som ble observert i videoene og intervjuet, men ikke nødvendigvis alle underkategoriene ble identifisert begge steder. Videre i analysen vil det bli presentert eksempler på hver strategi med hjelp av utdrag fra de to intervjuene, samt observasjoner og informasjon fra elevens spillebrett. Ettersom datamaterialet har blitt anonymisert har elevene i transkripsjonene i intervju 1 blitt kalt for Erik og Fredrik, mens deltakerne i intervju 2 har fått navnene Stian og Thomas.

5.1.1 Strategier basert på elevenes innsikt

Som Figur 8 viser, deles kategorien *strategier basert på elevenes innsikt* videre inn i tre underkategorier; algebraisk resonnement, informasjon fra motspiller og spillets rammer. Videre i dette delkapittelet vil jeg presentere de tre underkategoriene med tilhørende eksempler fra datamaterialet.

Algebraisk resonnement

Den første underkategorien, algebraisk resonnement, kommer til syne gjennom at elevene enten *endrer x- eller y-verdiene* til koordinaten eller fant *linjer* som kunne gi flere treffmuligheter. I utdraget under får elevene spørsmål om hvor de ville skutt neste skudd hvis de først hadde fått treff på punktet (2, 3) i et koordinatsystem med akser som går fra -10 til 10:

134. Lærer: Men hvis du har skutt her [peker på punktet (2, 3)] og har fått beskjed om at du har truffet, hvor ville du skutt da?

135. Fredrik: […] Du ville jo skutt rundt det punktet

136. Erik: […] På hele brettet?

137. Lærer: Ja

138. Fredrik: Ja, rundt punktet

139. Erik: Åja, da skyter man rundt her selvsagt [peker på punktene rundt (2, 3)]. Da er det jo en av dem.

[I_G1][1]

Utdraget viser at elevene er enige om at det er lurt å skyte på et av punktene rundt der de har truffet. For å få til dette må elevene endre enten x- eller y-verdien til punktet. Grunnen til at det er lurt å skyte på punktene rundt der en har truffet blir forklart litt senere i intervjuet når Erik sier «at ingen båter er bare en stor, alle har i hvert fall to». Det vil altså si at en må treffe et skip minst to ganger for at skipet skal synke. Også Stian i det andre intervjuet tenker at «hvis du treffer midten [peker midt i 1. kvadrant] så er det rundt punktet» det er lurest å skyte hvis en har fått et treff. Observasjonene som ble gjort mens elevene spilte Slagskip, bekrefter også at elevene bruker strategien der verdiene til koordinaten endres, som går under kategorien algebraisk resonnement. Et eksempel på dette er at Fredrik skyter først på punktet (1, 0) og får beskjed av motspiller at det var treff. Fredrik velger deretter å skyte på punktet (1, -1). Her velger altså Fredrik å endre y-verdien til punktet han har truffet for å skyte på punktet som ligger nedfor i håp om å treffe skipet på nytt. Dette er en strategi som går igjen hos begge elevparene, og blir brukt så å si hver gang elevene får beskjed om at de har truffet et skip som ikke er sunket. De aller fleste gangene har ikke elevene noe problem med å oppgi ønsket koordinat, men det hender et par ganger at noen sier en koordinat, men mente en annen. I slike

[1] [I_G1] viser til intervju med gruppe 1. Tilsvarende vil koden [O_G2] stå for observasjon av gruppe 2.

situasjoner er det felles koordinatsystemet til hjelp slik at feilen kan rettes opp med hjelp fra motspilleren.

Som nevnt kan algebraisk resonnement også komme til syne gjennom bruk av lineære funksjoner. Bruk av linjer og lineære funksjoner i spillet Slagskip presenteres gjennom ekstrareglene som elevene får ta i bruk etter en runde med vanlige regler. Observasjoner som deretter gjøres mens elevene spiller Slagskip, viser at de på dette tidspunktet har for lite kjennskap til å lage funksjonsuttrykk. En oppgave i intervjuet som handler om de nye reglene, viser likevel at elevene har noen strategiske refleksjoner rundt de to reglene og bruk av skuddlinjer i Slagskip. Under presenteres et utdrag fra intervjuet som er en fortsettelse på oppgaven rundt punktet (2, 3). Her arbeider elevene i likhet med utdraget over i et koordinatsystem med akser som går fra -10 til 10. Spørsmålet elevene får, handler om hvilken skyteregel som vil være mest hensiktsmessig å bruke når de vet at de har fått treff i punktet (2, 3):

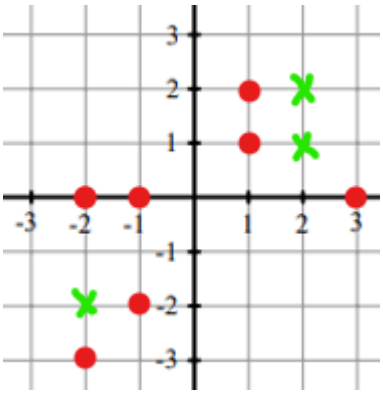
149. Lærer:	Men dere spilte jo med tre forskjellige måter å skyte på; enten skyte et punkt eller skyte fra Origo eller skyte med en funksjon. Hvilken tror dere hadde vært mest effektiv når dere skulle skyte nå neste gang?
[…]	
151. Erik:	Jeg vil kanskje … hvis det gikk an å skyte en funksjon til å gå over her [peker i en linje som tilsvarer x = 1], så ville jeg gjort det, men jeg kan ikke bruke funksjoner ordentlig, så jeg ville sikkert skutt … Kanskje fra midten og så [peker ut linja y = x, der x ∈ [0, 10)]] for da treffer du igjennom de to [peker på (2, 2) og (3, 3)], da tar du to av mulighetene. Så jeg ville skutt fra Origo ut til (10, 10). For da tar du to av ni i stedet for en av ni.
[…]	
158. Fredrik:	Ja, hvis vi utelukker funksjonen.
159. Erik:	Ja, for da kan vi treffe tre stykker.
[I_G1]	

I utdraget sier Erik at han vil skyte en funksjon, men siden han ikke vet hvordan han bruker funksjoner, velger han å skyte fra Origo til (10, 10). Ifølge elevene vil skuddet fra Origo gå igjennom to av punktene rundt treffpunktet, mens funksjonen vil kunne gå igjennom tre punkter. Her viser altså Erik at han er bevisst på at han ikke har nok kunnskap om funksjoner til å bruke de riktig og konkluderer derfor med at han skal bruke skyteregelen som sier at en kan skyte fra Origo til et punkt. Selv om elevene sier at de ikke kan bruke funksjoner ordentlig, klarer de å resonnere seg fram til noen interessante poeng. Erik ser blant annet at det vil være mer hensiktsmessig å skyte med en funksjon ettersom den vil kunne treffe flere punkter rundt forrige treffpunkt enn linja som går fra Origo til (10, 10). Et moment elevene ikke kommenterer, er at skuddlinja fra Origo til (10, 10) er begrenset til 1. kvadrant, mens funksjonen vil kunne gå igjennom flere kvadranter og på den måten kunne treffe andre skip i tillegg til skipet de allerede har truffet. Hvorfor dette ikke blir nevnt er vanskelig å si, men en kan lure på om elevene ikke har tilegnet seg kunnskapen som trengs om funksjoner for å se dette poenget på det gitte

tidspunktet enda. Eller så kan det bare hende at elevene er for opptatt med oppgaven rundt det gitte punktet at de ikke tenker over eventuelle andre skip.

Informasjon fra motspiller

Den andre underkategorien til kategorien strategier basert på elevenes innsikt er informasjon fra motspiller. Her bruker elevene informasjon de får fra sin motspiller for å finne ut hvor det kan være lurte å skyte. Erik sier blant annet i intervjuet at «det er veldig viktig å notere ned hvilke båter som er skutt ned». Eksempel på slik informasjon kan være hvilke *skip motspilleren sier at er sunket* og *hvor motspilleren har skutt tidligere*. I utdraget under presenterer Erik en fiktiv situasjon for å illustrere hvordan en kan bruke informasjon fra motspiller, men også spillets rammer, for å finne ut hvilke punkter som er lurest å skyte på og hvilke punkter en kan utelukke. Figur 10 viser den fiktive spillsituasjonen som eleven tegner opp. Her representerer de røde prikkene hvor en har bommet og de grønne kryssene hvor en har fått treff. Punktet (-2, -2) er det siste punktet som er blitt skutt på. Her har eleven allerede klart å senke toerskipet som lå på (2, 1) og (2, 2), og motspilleren har dermed ikke flere toerskip igjen. I utdraget under forklarer eleven hvordan han kan utnytte informasjon fra motspiller når han skal velge hvor han skal skyte:



Figur 10: Illustrasjon av spillsituasjon 1

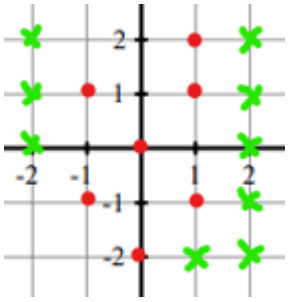
34. Erik: […] og da kan du vite at den går ikke OVER der det er truffet [peker i en loddrett linje gjennom (-2, 0) og oppover] så da er det ikke noe vits å skyte her [peker på (-2, -1)] eller her [peker på (-3, -2)], og du kan i stedet skyte her [peker på (-1, 3)] eller her [peker på (-3, -1)] hvis toerskipet er ute.

[I_G1]

I utdraget forklarer altså Erik at siden toerskipet er senket (punkt (2, 1) og (2, 2)), kan det utelukke noen av mulighetene for neste skudd der det bare er plass til et toerskip, for eksempel punktet (-2, -1). Skipet kan dermed bare ligge på skrå, men hvilken vei det ligger, vet vi ikke. Ved å bruke informasjonen om at toerskipet er sunket, kan eleven da utelukke at skipet kan ligge horisontalt eller vertikalt. På den måten resonnerer eleven seg frem til at skipet må ligge diagonalt i koordinatsystemet. Videre bruker eleven strategien om å endre x- og y-verdiene for å finne ut hvilke punkter som da vil være aktuelle å skyte på. Gjennom å endre x- og y-verdiene foreslår da eleven at det kan være lurt å skyte på (-1, 3) eller (-3, -1).

Eksempelet over viser også at eleven tar i bruk informasjon om tidligere skudd for å resonnere seg fram til hvor det vil være aktuelt å skyte neste gang. Blant annet sier Erik at det ikke er vits å skyte vertikalt fra treffpunktet ettersom det er blitt bommet på begge sider slik at det ikke er

plass til et skip som er større enn to. Figur 11 viser en annen situasjon fra observasjonene av elevene da de spilte Slagskip hvor elevene brukte informasjon om tidligere skudd for å finne ut hvor skipene kunne ligge. Her har eleven senket et toerskip ((1, -2) og (2, -2)), et treerskip ((-2, 0), (-2, 1) og (-2, 2)) og et firerskip ((2, -1), (2, 0), (2 1) og (2, 2)). Han mangler altså bare å finne det siste treerskip for å vinne spillet. Det er denne situasjonen Erik henviser til i utdraget under. I utdraget kommer Fredrik først med en hypotetisk situasjon for å forklare hvordan en kan bruke tidligere skudd for å finne ut hvor skip kan ligge. Deretter kommer Erik med situasjonen fra Figur 11 som eksempel fra da de spilte.



Figur 11: Illustrasjon av spillsituasjon 2

26. Fredrik: […] ved å se der du hadde bommet før kunne du finne ut at der var det ikke skip. Så hvis du sjekket hvor du hadde bommet da, og så traff du en gang, og så hadde du bommet der og der og der [peker over, under og til venstre for der han har truffet] for eksempel. Da kan du på en måte vite at skipet ligger hundre prosent garantert langs den veien [peker til høyre for skipet].

27. Erik: Ja, det var en gang i det første spillet, før vi hadde med ekstrareglene, hvor plutselig så jeg at oi her kan det ligge en båt fordi det var tre plasser åpne.

[I_G1]

I dette utdraget får jeg inntrykk av at elevene er bevisste på hvordan tidligere skudd kan hjelpe dem å utelukke skipenes plassering. Fredrik sier i sitt hypotetiske tilfelle at det er garantert at skipet må ligge horisontalt ut til høyre fra treffpunktet siden det har blitt bommet over, under og til venstre for treffpunktet, men det kan virke som om han har glemt at skipene kan ligge på skrå ut fra forklaringen. En mulig grunn til dette er at begge elevene har spilt Slagskip før, men da med regler om at skipene bare kan ligge vertikalt og horisontalt. Analyser av elevens spillebrett og observasjonene viser at Erik tenkte at det siste treerskipet ville ligge på punktene (-1, -2), (0, -1) og (1, 0). Det er andre mulig plasseringer, men om Erik var bevisst på dette da han spilte, er vanskelig å si. Han velger å skyte på (0, -1) som gir treff, noe som dermed bekrefter hans mistanke. Det viser seg altså gjennom både intervju, observasjon og analyse av spillebrett at elevene tar i bruk informasjon om tidligere skudd for å resonnere seg frem til hvor de skal skyte neste skudd.

Spillets rammer

Den tredje, og siste, kategorien som er blitt brukt for å belyse elevenes strategier basert på innsikt er spillets rammer. Denne kategorien tar for seg informasjon som omhandler både *skipenes størrelse* og *skytereglene* som elevene kan bruke. I tillegg til å vise hvordan elevene tok i bruk informasjon fra medspiller, viser de to siste eksemplene over også hvordan elevene bruker informasjon om spillets rammer når de spiller Slagskip. Her bruker elevene spillets rammer i form av skipenes størrelse for å finne ut hvor det kan være relevant å skyte. På spørsmål om hvor et skip kan ligge i en gitt situasjon, svarer Thomas at «det spørs litt på hvor på skipet du treffer […] og hvor stort skipet er». Dette viser at han er bevisst på at skipets

plassering avhenger av skipets størrelse, noe som vil være med å påvirke hvor en skal skyte neste gang.

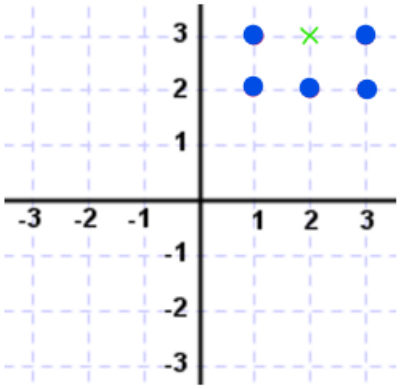
I tillegg til skipenes størrelse består spillets rammer også av ulike skyteregler. I første spillerunde kan elevene bare skyte et punkt om gangen, men i andre runde får de som nevnt utdelt ekstra skyteregler der de kan skyte rette linjer og lineære funksjoner. Under en del av intervjuet der vi diskuterte de nye skytereglene, og i akkurat dette tilfellet regelen der en kan skyte fra Origo til et valgfritt punkt, kommer blant annet Thomas med spørsmålet «men hvorfor skulle man ikke bare tatt (10, -10) da hvis man skyter gjennom hele?». Han ser altså ikke poenget ved å skyte en kort linje fordi en linje til et punkt langt vekke vil kunne gå igjennom flere punkter og derfor har flere muligheter til å treffe et av motstanderens skip. Ved å skyte en slik linje kunne en derfor få bedre uttelling enn hvis en hadde skutt en kortere linje eller et enkelt punkt. Å skyte linjer gir bedre uttelling sammenlignet med å skyte et enkelt punkt kan også ses i observasjonene ettersom elevene valgte å bruke nesten bare de nye reglene når disse ble presentert før den andre spillerunden. Da valgte elevene så å si alltid å skyte linjer som gikk helt ut til kantene, noe som også kan tyde på at elevene så på dette som mer hensiktsmessig enn å skyte kortere linjer.

5.1.2 Strategier basert på elevenes antakelser

I tillegg til strategier basert på elevens innsikt viser Figur 8 at det gjennom å spille Slagskip også blir brukt strategier basert på elevenes antakelser. Disse strategiene kan deles inn i to underkategorier: *matematiske slutninger* eller *strategiske antakelser*.

Matematiske slutninger

Matematiske slutninger kommer til syne gjennom at elevene prøver å finne *sannsynligheten for å treffe* et skip. Sannsynligheten for treff er noe som blir nevnt av elevene i begge intervjuene i samtaler rundt strategier. Utsagn som «noen ganger handler det om sannsynlighet» kom titt og ofte. Et eksempel på dette vises i utdraget under og i Figur 12. Utdraget er fra en oppgave der elevene jobbet i et koordinatsystem som har akser om går fra -3 til 3. Her har elevene fått beskjed om at de har skutt og truffet på punktet (2, 3) og nå skal de da finne ut hvor det kan være lurt å skyte neste skudd. Figur 12 viser punktet som var bekreftet som treff (grønt kryss) og de fem mulige punktene der det kan være aktuelt å skyte for å treffe skipet på nytt (blå prikker). Utdraget under viser elevenes samtale rundt denne situasjonen:



Figur 12: Illustrasjon av spillsituasjon 3

81. Erik: Nei, for at mulighetene er jo da de [peker på (1, 3)], den [peker på (3, 3)], og fordi man spiller med hjørner så blir det også de [peker på (3, 2), (2, 2) og (1, 2)], så en av de her fem.

[…]

83. Fredrik: Mest sannsynlig er det ikke den [peker på (3, 2)], ikke sant?

84. Erik: Den der [peker på (3, 2)]? Da må det være en toerbåt. Det er to treerbåter på brettet, så hvis det er …

85. Fredrik: Men den [peker på (3, 3)] er også ganske usannsynlig for da må båten ligge der [peker i en horisontal linje fra (3, 3) mot y-aksen].

86. Erik: Ja.

87. Fredrik: Men så … jeg vil si enten … enten der eller her eller her [peker på (1, 3), (2, 2) og (1, 2)] da sikkert. Det er jo sikkert de tre …

[…]

90. Erik: Det handler jo om sannsynlighet. Noen ting er mer sannsynlig enn andre.

[I_G1]

Her ser det altså ut som om elevene resonnerer seg frem til hvilke punkter det er lurest å skyte på for å ha størst sannsynlighet for å få treff. Elevene konkluderer med at det er lurest å skyte på et av punktene (1, 3), (2, 2) eller (1, 2). Utdraget avsluttes med at Fredrik henviser til at det handler om sannsynligheten for å få treff. Elevene regner ikke matematisk ut sannsynligheten for å treffe på de ulike punktene, men resonnerer seg fram ved å bruke informasjon om skipenes størrelse. På den måten utelukker elevene de punktene der det bare er plass til et spesifikt skip som må ligge på en bestemt måte. Elevene vil derfor heller skyte på punktene der det er mulig at skipet kan ha flere ulike størrelser og plasseringer, noe jeg ser på som et logisk argument. Disse punktene elevene ser på som mest aktuelle har alle til felles at det er punktene som er nærmest Origo av punktene rundt treffpunktet. På den måten vil de også kunne ha større sannsynlighet for å treffe eventuelle andre skip. Det er fordi de nevnte punktene ikke ligger langs kanten og vil derfor, i likhet med elevenes argument for de valgte punktene, også gi flere muligheter for størrelse og plassering av andre skip enn punkter ute i kantene. Når elevene senere får spørsmål om hvor de ville skutt hvis de hadde truffet på samme punkt (2, 3) i et koordinatsystem med akser fra -10 til 10, mener de at det er like sannsynlig å treffe uansett hvilket av de åtte punktene rundt de skyter på, noe som stemmer.

Strategiske antakelser

Når det kommer til kategorien om strategiske antakelser, er bakgrunnen for denne kategorien utsagnet «det er jo litt psykologisk» som Erik kom med under samtalen om strategier. Denne kategorien kan deles i to; *motspillerens plasseringsstrategi* og *motspillerens skytestrategi*. Blant annet tenker elevene at det kan være lurt å tenke over *motspillerens plasseringsstrategi* ettersom de på den måten tenker at de kanskje i større grad kan klare å treffe et skip når de skyter. På grunn av dette kan noen av eksemplene også delvis passe under kategorien «matematiske slutninger» siden det kan handle om sannsynlighet, men ettersom elevene ikke bruker sannsynlighet som begrunnelse, har jeg valgt å plassere eksemplene under «strategiske antakelser». I utdraget over fra det første intervjuet mener elevene som nevnt at flere av de punktene som er mest sannsynlig å treffe, er punkter som er nærmere Origo. Dette begrunner de med at motspilleren har mulighet til å plassere flere ulike typer skip der enn på punktene nærmere kanten og at det derfor er mer sannsynlig å treffe et skip. Denne strategien med å

skyte på punkter som er nærmere Origo blir også nevnt i det andre intervjuet da de ble spurt om de hadde noen spesielle strategier de brukte når de spilte Slagskip:

26. Thomas:	For meg tror jeg det er lurt da, hvis jeg treffer et sted, ofte ta og gjette det stedet som er nærmere midten fra det stedet da. For eksempel her [peker på (-10, 0)] så ofte mot midten da [peker på (-9, 0)] fordi da kan du kanskje treffe noe annet samtidig.
[I_G2]	

I dette utdraget argumenterer Thomas for at det kan være lurt å skyte på punkter nærmere Origo siden det åpnet muligheten for å også treffe andre skip. Eleven bruker eksempelet med treff på punktet (-10, 0) som er et punkt helt i utkanten av koordinatsystemet, i likhet med utdraget fra intervju nummer en. Thomas sier senere i intervjuet på spørsmål om hvor han ville skutt hvis han hadde truffet på (2, 3) i et koordinatsystem fra -10 til 10, at «jeg ville tatt teorien min og bare skutt på (1, 2) blir det da, for å komme nærmere midten». Dette kan indikere at Thomas ser på strategien om å skyte på punkter nærmere Origo som hensiktsmessig for å kanskje kunne treffe andre skip som motspilleren også har plassert ut.

I tillegg til motspillerens plasseringsstrategi inkluderer kategorien strategiske antakelser også *motspillerens skytestrategier*. Her baserer elevene sine valg på hvor de tenker at motspilleren kommer til å skyte. Denne tankegangen er spesielt sentral i fasen før spillet starter hvor elevene skal plassere ut sine egne skip. Utdraget under presenterer noen tanker elevene i intervju 2 hadde når det kom til å plassere ut skipene:

2. Stian:	Jeg prøvde å plassere de ut over brettet, ikke bare på en plass
3. Lærer:	Ja, litt spredt?
4. Stian:	[nikker bekreftende]
5. Lærer:	Ja
6. Thomas:	Ja, samme her. Litt spredt her og der egentlig, men jeg merket i etterkant at det var litt tabbe å putte dem litt nærme hjørnet for da var det ikke så mange veier å gå fra der man traff.
[I_G2]	

Elevene ser altså på det som en lur strategi å plassere skipene spredt. Denne strategien ser det også ut som Fredrik fra det første intervjuet ser på som hensiktsmessig ettersom han sier at han «ville ikke klumpe opp for mye». Samtidig kan det være smart ifølge Thomas å ikke plassere skipene ut i hjørnene. Dette begrunner han med at hvis motstanderen har truffet et skip, har han færre muligheter å skyte treff neste gang. Et skudd på et punkt i et hjørne vil ha tre punkter rundt seg og et skudd i kanten vil ha fem punkter rundt seg sammenlignet med et punkt som er plassert lengre inn mot midten hvor det vil være åtte punkter rundt som kan være aktuelle skuddmuligheter. Fredrik har også noen tanker om hvor det kan være lurt å plassere skipene med tanke på hvor motspilleren vil skyte: «Jeg prøvde å la en rute [peker på området der *x* og

y er positiv], la en sånn fjerdedel være tom». Eleven ser her på det som smart å la en del av koordinatsystemet, mer spesifikt en kvadrant, være tom for skip. Hvorfor dette er lurt sier han ikke, men det kan hende han tenker at motspilleren vil prøve å skyte litt spredt jevnt over hele spillebrettet. Da vil strategien om å ha et område tomt for skip føre til at motspilleren på et tidspunkt vil ende opp med å bomme. Hvis motspilleren skyter i et av områdene der det er plassert skip, vil det dermed være større tetthet av skip i disse områdene noe som igjen kan gjøre at det blir enklere å treffe. I utdraget under presenterer Erik en annen strategi i forbindelse med å plassere ut skipene, nemlig å plassere skipene sine på aksene:

40. Erik:	Den andre gangen så gjorde jeg sånn at jeg plasserte de langs den her [peker på x- og y-aksen] og bare håpte at liksom […] … ikke vit at jeg er dum nok til å gjøre det
[…]	
44. Lærer:	Så du tror du var dum fordi du plasserte der?
45. Erik:	Etter at jeg fikk vite om de funksjonene og den origoskytinga etterpå; ja, for da er det jo bare liksom å ta en, to, tre, fire [peker ut fra Origo langs de fire aksene] og da er jo hele …
[I_G1]	

I utdraget over mener altså Erik at det ikke er lurt å plassere skipene på aksene ettersom det da er enkelt å skyte dem ned, spesielt med bruk av ekstrareglene som ble introdusert etter elevene hadde spilt en runde med Slagskip. Gjennom å se på observasjonene og spillebrettene elevene brukte ser det ut som det stemmer at Erik brukte denne strategien den andre gangen de spilte, hvor de spilte med de nye skytereglene. Etter at Erik har plassert ut skipene sine på aksene, innser han altså at det kanskje ikke er så lurt hvis det viser seg at motspilleren har som skytestrategi å skyte linjer som er lik aksene. Observasjonene viser derimot ikke at å skyte linjer som går langs aksene er en strategi som blir tatt i bruk av elevene. Derfor kan det diskuteres hvor «dum» denne plasseringsstrategien faktisk er.

5.2 Matematiske kjennetegn

I tillegg til hvilke strategier elevene brukte mens de spilte Slagskip, er også fokuset for problemstillingen for denne oppgaven å se på muligheter for videre arbeid med koordinatsystemet og lineære funksjoner. For å belyse denne delen av problemstillingen har jeg derfor valgte å se hvilke kjennetegn ved koordinatsystemet og lineære funksjoner som kommer til syne i elevenes arbeid med oppgaver gitt i etterkant av å ha spilt Slagskip. Oppgavene elevene fikk, startet med Slagskip som kontekst, men bevegde seg mer vekk fra denne konteksten utover i intervjuet. I arbeidet med disse oppgavene var det fire kjennetegn som skilte seg i ut hos elevene; *stigningstall*, *konstantledd*, *negative tall* og *språkbruken* til elevene. De fire kjennetegnene kom til syne på ulikt vis, enten gjennom *grafisk representasjon*, *algebraisk representasjon* eller gjennom *transformasjoner ved sammenligning av representasjoner*. Figur 9 som ble presentert i kapittel 4.4 viser en systematisk framstilling av forholdet mellom kjennetegnene og uttrykksmåtene som er blitt identifisert i datamaterialet. Figuren viser også

eksempler på de ulike tilfellene. Videre i dette delkapittelet skal jeg presentere disse eksemplene i sin helhet.

5.2.1 Grafisk representasjon

Kategorien *grafisk representasjon* henviser til Duval (2006) sine representasjonssystemer som går under området i Figur 3 som karakteriseres av ikke-diskursive operasjoner og monofunksjonelle systemer. Denne kategorien inkluderer dermed tanker og resonnementer elevene gjorde ved hjelp av grafer, punkter i koordinatsystemet og annen lignende aktivitet i koordinatsystemet.

Stigningstall

Figur 9 viser at den grafiske representasjonen ble brukt av elevene i forbindelse med alle kjennetegnene som ble identifisert i datamaterialet. I eksempelet under får elevene i oppgave å skyte et skip i punktet (3, 6) ved hjelp av skyteregelen der en kan skyte fra Origo til et punkt. Utdraget viser altså elevenes diskusjon i arbeid med oppgaven. Oppgaven legger på den måten opp til at elevene skal arbeide med stigningstallet til en funksjon gjennom en grafisk fremstilling:

238. Lærer: Da tar vi en ny oppgave der dere skal bruke den regelen der dere kunne skyte fra Origo og så skal dere skal treffe et skip som ligger i punktet (3, 6). Hvordan vil skuddlinja se ut da?

[…]

240. Erik: Da går den mellom her. Treffer den her også? Nei … det er ikke bare og liksom [begynner å legge blyanten som en linje på koordinatsystemet].

241. Fredrik: den går to …

242. Erik: Jeg kan ikke bare tegne en så rett som mulig linje over [begynner å tegne linja i koordinatsystemet].

243. Fredrik: La oss si det er et skip her da [markerer (3, 6)]. Da treffer den her, her og her [markerer (2, 4), (1, 2) og (0, 0)].

244. Erik: Altså, så den går sånn her [fortsetter å utvide linja oppover].

245. Fredrik: Den går to ned og så en til venstre.

[…]

247. Erik: Ja, og så treffer den her [peker på (4, 8)], så da skyter du på (5, 10) og så treffer den alle de her, ikke sant? [peker på de nevnte punktene de har markert]

[I_G1]

I dette utdraget får elevene beskjed om at skuddlinja går igjennom to punkter. Ved hjelp av denne informasjonen beveger da elevene seg steg for steg fra det ene til det andre punktet.

Gjennom denne bevegelsen oppdager de at linja beveger seg «to ned og så en til venstre» når de beveger seg fra punktet (3, 6) og ned mot Origo. Denne observasjonen bruker de deretter til å utvide linja videre og finne nye punkter som linja går igjennom. I utdraget oppdager altså elevene, uten å spesifikt nevne det, et forholdstall mellom x- og y-verdien til punktene; y-verdien er dobbelt så stor som x-verdien (bortsett fra i Origo). Elevene ser et mønster, som jeg som lærer vet tilsvarer stigningstallet til grafen, men det er vanskelig å si om elevene ser denne sammenhengen. Et annet eksempel på en grafisk fremstilling av stigningstallet til en linje kommer også til syne i intervju 2 hvor de fikk samme oppgave som i utdraget over:

119. Thomas: Den går to ruter sånn [peker to ruter opp], og så to ruter sånn [flytter fingeren et hakk til høyre der x-verdien er en større enn forrige og flytter så fingeren to ruter oppover].

120. Lærer: Ja, sånn ja.

121. Thomas: Det er jo fordi at seks er dobbelt så mye som tre da, og for å komme opp dit må du øke med to for hver gang i høyden.

[I_G2]

I dette utdraget ser en også at elevene klarer å identifisere stigningstallet til linja ved å finne ut hvor mye den øker for hver gang. I tillegg argumenterer Thomas for stigningstallet ved å se på forholdet mellom x- og y-verdien til treffpunktet de fikk utdelt. Han sier at seks er dobbelt så mye som tre og at derfor øker linja med to. Når han da har funnet dette forholdstallet, som også er stigningstallet til grafen, har han potensielt mulighet til å finne flere punkter som grafen krysser gjennom ved å doble x-verdien for å finne y-verdien.

Konstantledd

Hvis vi videre ser på hvilke grafiske representasjoner elevene bruker i forbindelse med konstantleddet til en linje, kan en også se at elevene resonnerer rundt dette på litt ulike måter. Stian beskriver en linje som krysser y-aksen i (0,1) ved at «den går jo ved siden av Origo». Utdraget under viser noen av betraktningene rundt den samme linja hos det andre elevparet:

210. Fredrik: Den starter ikke på null.

211. Lærer: Den starter ikke på null nei, hvor starter den da?

212. Fredrik: Den starter på en.

213. Erik: Altså på (0, 1).

214. Fredrik: Det vil si at hvis du sender den gjennom hele, vil den treffe i tre av kvadrantene, kan vi kalle det det? [peker på 1., 2. og 3. kvadrant].

[I_G1]

Både det nevnte utsagnet til Stian og utdraget over viser, med bruk av litt ulikt språk, at linja ikke går igjennom Origo slik linjene som var blitt brukt tidligere i samtalene hadde gjort. Denne linja ligger altså litt lenger opp i koordinatsystemet og krysser y-aksen i punktet (0, 1). Fredrik påpeker at en konsekvens av dette er at linja går igjennom tre av kvadrantene i koordinatsystemet. Elevene registrer altså at linja ligger annerledes i koordinatsystemet enn for eksempel skuddlinjene fra Origo.

Negative tall

I denne sammenhengen vil negative tall i forbindelse med grafiske representasjoner komme til syne som koordinater med negative verdier. Eksempelet under er en fortsettelse på oppgaven der det skulle skytes fra Origo til et punkt. Utdraget viser en samtale rundt grafer og koordinater med negative x- og/eller y-verdier i forbindelse med den gitte oppgaven:

145. Thomas: Hvis vi skulle lage den her [peker på en linje som går fra Origo til (3, 6)] andre veien, blir det jo akkurat den samme bare at det er negative tall foran.

146. Lærer: Ja, når du tenker på koordinatene til punktene?

147. Thomas: Ja, og streken blir jo helt lik også.

148. Lærer: Men tenker du at den vil øke på samme måte som den også? [peker på linja fra Origo til (3, 6)].

149. Thomas: Ja, bare at tallene går nedover da, så du kan på en måte si at den blir mindre da på en måte, hvis vi går ut ifra koordinattallene da.

[I_G2]

I dette eksempelet sammenligner Thomas linja på begge sidene av Origo. Han sier at linja vil være helt lik uansett hvilken side av Origo den er på. Den eneste forskjellen vil være koordinatene; der vil x- og y-verdiene gå fra å være positive på oversiden av Origo til og bli negative på undersiden av Origo. Fordi koordinatverdiene blir negative mener Thomas at linja ikke vil øke på samme måte, men den vil minke. Spørsmålet om linja ville øke på samme måte ble stilt med stigningstallet i tankene, men det er vanskelig å si om det er dette Thomas sikter til når han sier at linja vil minke ettersom han bruker negative koordinater som begrunnelse. Thomas sier tidligere i utdraget at linja vil bli lik på begge sider av Origo. Dette tolker jeg som at den visuelt vil se lik ut på begge sider av Origo, altså at den indirekte har likt stigningstall. Det kan kanskje tyde på at han ikke nødvendigvis henviser til stigningstallet på slutten når han snakker om at linja minker, men heller koordinatene.

Språkbruk

Når elevene snakker om de ulike linjene under intervjuene har jeg lagt merke til at de ofte bruker et uformelt språk i beskrivelsen av grafene. Flere av eksemplene under kjennetegnet *språkbruk* kan også passe under stigningstall, konstantledd og negative tall. Jeg har likevel valgt å ha *språkbruk* som et eget kjennetegn ettersom elevenes valg av ord kan være med å si noe om

deres kjennskap og assosiasjoner til koordinatsystemet og lineære funksjoner. Eksempel på språk som ble brukt under intervjuene er «den går motsatt vei» og «den går skrått». Dette er ord som er kjente for alle og blir brukt titt og ofte i hverdagen. Disse ordene gir oss minimalt med informasjon og vil sjeldent være tilstrekkelig nok i en matematisk kontekst ettersom de ikke nødvendigvis gir nok informasjon for å kunne bruke i videre arbeid med grafene. En kan anta at linja på et eller annet punkt krysser y-aksen ettersom linja er skrå og derfor vil ha både et konstantledd og et stigningstall. At linja går skrått i koordinatsystemet sier oss ikke så mye om stigningstallet til linja, men siden den går skrått, er den altså ikke horisontal eller vertikal, noe som tilsier at den skal ha et stigningstall. Å bruke et uformelt språk vil derfor ikke alltid være det mest hensiktsmessige i slike matematiske situasjoner. Spørsmålet om hvorfor elevene bruker et slikt uformelt språk er vanskelig å si. Det kan hende at de ikke har blitt introdusert for begreper som stigningstall og konstantledd, og at det dermed er ordene «skrått» og «motsatt vei» de føler beskriver best den aktuelle linja.

5.2.2 Algebraisk representasjon

I likhet med kategorien grafisk representasjon er også kategorien *algebraisk representasjon* basert på Duval (2006) sitt rammeverk om representasjonssystem. Begge kategoriene går under monofunksjonelle systemer, men i motsetning til grafiske representasjoner som er ikke-diskursive operasjoner, er de algebraiske representasjonene diskursive operasjoner. I denne masteroppgaven vil algebraiske representasjoner komme til syne gjennom forklaringer rundt funksjonsuttrykk i ulike sammenhenger.

Stigningstall

Stigningstall kommer til syne gjennom algebraiske representasjoner ved flere anledninger. Blant annet blir det snakket om stigningstall i forbindelse med at elevene blir presentert for funksjonsuttrykket til skuddlinja (y = 2x) brukt i eksemplene for grafisk representasjon i kapittel 5.2.1. Her får de spørsmål om de kan tenke seg hvorfor linja vil ha det gitte funksjonsuttrykket når de har funnet ut at stigningstallet var to. I utdraget under har elevene dermed både den grafiske og algebraiske representasjonen av funksjonen foran seg når de diskuterer:

296. Erik: y = 2x. Å å, vent jeg tror jeg skjønner det! For at y = 2x, det er fordi at *y* er *x* gange to.

[…]

298. Lærer: Forklar litt mer hva du mener.

[…]

301. Erik: y = 2x, og da er det for at på den linja der går du liksom …

302. Fredrik: Dobbelt så langt som *x*.

[…]

305. Erik: … en til siden så går du liksom en to, så y'en er dobbelt så mye som x'en hver gang du hopper.

[I_G1]

I utdraget over ser det ut som om elevene ser en sammenheng mellom grafen sitt stigningstall, som de hadde funnet tidligere i intervjuet, og funksjonsuttrykket de får presentert. Elevene ser at y = 2x vil si at *y* skal være to ganger x-verdien, altså at y-verdien til et punkt skal være dobbelt så stor som x-verdien. Elevene i det andre intervjuet får et lignende spørsmål om hva funksjonsuttrykket til en graf (y = x+1) som de har fra en tidligere oppgave vil være når de har funnet ut at en linje som øker med to har funksjonsuttrykket y = 2x. Elevenes svar er presentert i utdraget under:

157. Thomas: Da hadde det jo blitt y = 1x da.

158. Lærer: Ja

159. Thomas: Ja, fordi den går jo en og en, oppover en og en.

[I_G2]

Her kan en altså se at Thomas klarer å overføre informasjonen fra en annen situasjon til en ny situasjon slik at han kan klare å finne ut av hva funksjonsuttrykket skal være. Dermed finner han ut at linja har stigningstall lik 1. Det skal sies at den linja som elevene skulle finne funksjonsuttrykket til, egentlig tilsvarte funksjonsuttrykket y = x+1. Det ser dermed ut som om Thomas ikke ser sammenhengen mellom krysning av y-aksen og konstantledd i funksjonsuttrykket. I denne sammenhengen er det viktig å påpeke at elevene ikke var blitt presentert for et funksjonsuttrykk med konstantledd tidligere i intervjuet i motsetning til stigningstall. Dette kan derfor ha vært med å påvirke elevens svar.

Konstantledd

Konstantledd i algebraisk representasjon blir også diskutert i intervju 1 i forbindelse med funksjonsuttrykket y = x+1. I utdraget under får elevene presentert funksjonsuttrykket i forbindelse med at de tidligere har jobbet med den grafiske representasjonen av funksjonen. Etter en relativt lang diskusjon rundt funksjonsuttrykket og hvordan den tilhørende grafen kan se ut ender elevene opp med denne konklusjonen:

428. Fredrik: Altså, *y* vil alltid være en større enn *x*.

429. Erik: For her er den tre, og der er den to [peker i koordinatsystemet].

430. Fredrik: Hvor enn stor *x* er.

431. Lærer: I den funksjonen tenkte du? [peker på y = x+1]

432. Erik: Ja. […] Det vil si at *y* alltid vil være større enn *x*.

[…]

438. Fredrik: EN større enn *x*.

[I_G1]

Her konkluderer altså elevene med at *y* alltid vil være en større enn *x* i funksjonsuttrykket y = x+1. Denne konklusjonen kommer de fram til med utgangspunkt i utregninger av det algebraiske funksjonsuttrykket med ulike verdier for *x* som de deretter diskuterer seg imellom. På den måten ender elevene opp med å komme med en tolkning av funksjonsuttrykket som altså sier at *y* alltid vil være en større enn *x*. Gjennom denne konklusjonen vil elevene dermed kunne klare å finne flere punkter som funksjonen går igjennom. I et slikt videre arbeid kunne det vært hensiktsmessig for elevene å lage en tabell når de skulle finne de ulike verdiene for *x* og *y*, men representasjonen tabell ble ikke brukt verken her eller i andre deler av intervjuet. Grunnen til dette er usikker, men hvis elevene ikke har blitt presentert for denne representasjonen tidligere, er det forståelig at elevene ikke bruker den under intervjuet.

Negative tall

Når det kommer til negative tall innenfor algebraisk representasjon, finnes det eksempler på dette i begge intervjuene som ble gjennomført. Negative tall kommer til syne i datamaterialet gjennom samtaler rundt stigningstallet i funksjonsuttrykkene til tilsvarende grafer. Blant annet får elevene i det første intervjuet spørsmål om hvordan funksjonsuttrykket til en linje som beveger seg fra (-3, -6) til Origo vil være når funksjonsuttrykket til skuddlinjen som går fra Origo til (3, 6) er y = 2x. Eksempelet under viser et utdrag fra elevenes diskusjon rundt dette spørsmålet:

286. Lærer:	Hvis den linja som dere har tegnet her [peker på y = 2x, der x ∈ [0,10]] har et funksjonsuttrykk som er y = 2x, hva tror dere den her linja vil ha da? [peker på y = 2x, der x ∈ [0, -10]]
287. Erik:	y = -2x?
288. Lærer:	Hvorfor det?
[…]	
291. Fredrik:	Fordi den går … den går motsatt vei … Eller vil den ha det samme? Nei, den vil ikke ha det samme.
292. Erik:	Jo, den vil jo ha det samme fordi linja kan gå uendelig i begge retninger. Så blir den rett og da det samme.
[I_G1]	

I utdraget kan en se at elevene er litt usikre på om stigningstallet til grafen er negativt eller positivt når de skal sammenligne linja på begge sider av Origo. Det argumenteres først med at funksjonsuttrykket skal være y = -2x fordi den går «motsatt vei» av linja som har funksjonsuttrykket y = 2x. Det er forståelig at de tenker det ettersom at det motsatte av pluss er minus. Likevel mener Erik at stigningstallet er positivt ettersom «linja kan gå uendelig i begge retninger», noe som stemmer. Her skiller elevene i de to intervjuene seg. I det andre intervjuet konkluderes det annerledes på spørsmålet rundt funksjonsuttrykket y = 2x:

161. Thomas: Ja, da hadde det blitt det samme bare nedover her da sikkert [peker fra Origo langs linja y = 2x, der x ∈ [0, -10]], for da minker den jo med -2x. Eller der og da for da går den nedover sånn [peker fra Origo langs linja y = -2x, der x ∈ [0, 10]].

162. Lærer: så du tenker at funksjonsuttrykket skifter når den går forbi Origo?

163. Stian: Ja.

[…]

168. Thomas: Den kan vel det da fordi da er du jo på negative tall så det hadde jo ikke gitt mening med y = 2x da fordi det er negative tall.

169. Lærer: Men hvis du går fra her, hvor du har både positive og negative tall, til her, hvor det er positive og negative tall da [peker langs linja y = -2x, der x ∈ [-10, 10]], vil funksjonsuttrykket fortsatt være positivt her [peker i 2. kvadrant] og negativ på den sida da [peker i 4. kvadrant] når du har negative tall på begge?

170. Stian: mhm, ja …

171. Thomas: mmm, ja, det blir vel det fordi det må jo være et eller annet. Du kan ikke kalle det for minus pluss, det går ikke an så da må vi jo … for her er jo *y* negativ [peker på 3. kvadrant] så da tenker jeg at her [peker på 4. kvadrant] skal det være y = -2x i eksempelet og her [peker på 2. kvadrant] y = 2x.

[I_G2]

Elevene i det andre intervjuet tenker altså annerledes rundt en grafs stigningstall enn elevene i det første intervjuet. Her sammenligner de linjer på ulike sider av Origo og mener at stigningstallet i et funksjonsuttrykk endrer seg når grafen går igjennom Origo. Altså er stigningstallet negativt når y-verdiene er negative og positivt når y-verdiene er positive. Det ser dermed ut som om elevene nå ser mer på plasseringen til linja i koordinatsystemet heller enn stigningen.

5.2.3 Transformasjoner ved sammenligning av representasjoner

Transformasjoner består som nevnt i teorikapittelet av behandlinger og omgjøringer, hvor behandlinger skjer innenfor samme representasjonssystem, mens omgjøring skjer i overgangen fra et system til et annet (Duval, 2006). Kategorien *transformasjoner ved sammenligning av representasjoner* handler dermed om hvilke transformasjoner som kommer til syne når elevene sammenligner representasjoner i forbindelse med arbeid med koordinatsystem og lineære funksjoner. De aktuelle representasjonene i datamaterialet vil være Janvier (1987) sine fire typer representasjoner; graf, symboler/formel, verbale situasjoner og tabell. Ettersom datamaterialet er basert på et intervju vil den verbale representasjonen være til stede i alle de aktuelle situasjonene som vil bli presentert.

Stigningstall

Når det kommer til sammenligning av stigningstall, kommer dette til syne på flere ulike måter i datamaterialet. Utdraget under er tatt fra det første intervjuet hvor elevene får spørsmål om det er noen forskjeller mellom to linjer (y = 2x og y = x+1):

249. Erik: Den er brattere [peker på y = 2x].

[…]

252. Fredrik: Den er brattere. Den går mer opp for hvert steg enn den går bort. Den går dobbelt så høyt som til siden for hvert steg.

253. Lærer: Ja, hvor mye opp går den da?

254. Erik: To hver …

255. Fredrik: To opp og en til høyre.

[…]

258. Lærer: To og en til høyre. Hvor mye går den da? [peker på y = x+1]

259. Fredrik: En opp og en til høyre.

260. Lærer: Ja.

[…]

262. Erik: Det er en skråløper [peker på y = x+1] og det er en hest [peker på y = 2x].

[…]

265. Fredrik: Åja, ja du kan si det er en hest i sjakk. Det er jo det.

266. Erik: Det er en skråløper og det er en hest.

[I_G1]

I dette eksempelet sammenligner elevene de to linjene og ser at de stiger ulikt. Dette forklarer de med at den ene går «to opp og en til høyre» og den andre går «en opp og en til høyre». Elevene ser altså på stigningstallet som en måte å beskrive hvordan grafene beveger seg i koordinatsystemet. I tillegg til observasjonen rundt hvor mye de to ulike linjene stiger overfører de også denne informasjonen til en annen kontekst. De ser at bevegelsen i koordinatsystemet i forbindelse med stigningstallene til de to ulike linjene tilsvarer bevegelsene til de to sjakkbrikkene skråløper og hest. Her klarer altså elevene å gi grafens bevegelse i koordinatsystemet en ny kontekst. Sammenligning mellom stigningstallene skjer også i det andre intervjuet med to linjer med samme stigningstall som eksemplet over:

112. Lærer: Hvis dere sammenligner de to linjene, ser dere noe som er likt eller ulikt der?

113. Stian: Ja, begge går skrått da.

114. Lærer: Begge er skråe ja.

115. Thomas: Men samtidig så er det et mønster da, for den går gjennom to ganger en rute […], i stedet for å gå en gang en rute bortover så går den en gange to ruter helt bort.

116. Lærer: en gange to, hva mener du da?

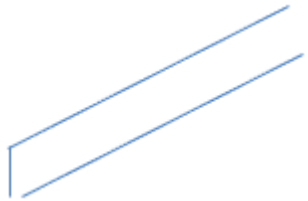
117. Thomas: Her er en og to ruter [flytter fingeren en bort og to opp i koordinatsystemet], altså en ganger to.

[I_G2]

I dette utdraget sammenligner først elevene linjene ved å si at «begge går skrått». Dette stemmer for så vidt, men det sier oss ikke så mye om for eksempel stigningstallene bortsett fra at de indirekte sier at begge linjene har stigningstall. Deretter forklares det at de ser et mønster der den ene linjen beveger seg «en gange to ruter», mens den andre linja beveger seg «en gange en rute» bortover. Elevene i dette intervjuet ser dermed også på grafens bevegelse i koordinatsystemet som en måte å beskrive grafen og dens stigningstall på. Begge elevparene ser altså at de to linjene beveger seg ulikt i koordinatsystemet og at den ene linja stiger mer enn den andre for hver gang en beveger seg bortover x-aksen.

Konstantledd

I tillegg til å sammenligne linjer med ulikt stigningstall, klarte også elevene å se noen forskjeller i sammenligning av to linjer med ulikt konstantledd. I det første intervjuet fikk de i oppgave å sammenligne grafene y = x og y = x+1. Figur 13 viser en illustrasjon som Erik tegnet på et blankt ark samtidig som han forklarte linjenes ulike konstantledd:



Figur 13: Illustrasjon av elevens skisse av to linjer med likt stigningstall, men ulikt konstantledd.

220. Erik: De er like bratte, men denne [peker på y = x+1] starter høyere opp.

221. Lærer: Ja.

222. Fredrik: Altså den her starter på null [peker på y = x].

223. Erik: For den ene går skrå opp. Den andre går liksom sånn skrå opp hvis du skjønner hva jeg mener? [skisserer på blankt ark] Den går liksom opp først.

[I_G1]

Utdraget over og illustrasjonen i Figur 13 viser at elevene sammenligner de to linjene både når det kommer til stigning, men også hvor linjene «starter». Grafen y = x starter på 0, mens y = x+1 «starter høyere». Dette illustrerer også Erik som nevnt på et blant ark slik Figur 13 viser. Den ene linjen «går liksom opp først» forklarer eleven. Disse kommentarene viser at elevene ser en forskjell i de grafiske representasjonene av funksjonene i oppgaven. Eksempelet over

viser forklaring på konstantleddet til to grafer, men elevene hadde også noen refleksjoner rundt konstantledd gjennom bruk av funksjonsuttrykk. Under setter elevene inn ulike verdier for *x* og diskuterer rundt de to funksjonsuttrykkene y = x+1 og y = 2x:

377. Fredrik: men det [refererer til y = x+1] er det samme som her, er det ikke? [peker på y = 2x]

378. Erik: Ja, er det ikke det?

379. Fredrik: Eller ikke nødvendigvis. […] Så da hvis x = 3, da blir y = 3+1, og da blir det der [markerer (3, 4)]. […] Hvis x = 1 i begge de her uttrykkene, blir det det samme, y = 2 og y = 2.

[…]

399. Erik: Vent, for y = 1+1 og y=2x er det samme? Fordi 2 ganger 1 …

400. Fredrik: y = 1+1 er det samme som y = 2*1.

401. Erik: Fordi 2*1 og 1+1 er det samme.

[I_G1]

I dette utdraget sammenligner elevene to funksjonsuttrykk med ulikt konstantledd ved å fylle inn ulike verdier for *x*. Da oppdager de at y-verdien i de to uttrykkene blir like når x = 1, men ikke når de bruker verdier for x som for eksempel x = 3. Her bruker altså elevene både koordinatsystemet for å plotte inn og sammenligne punkter og funksjonsuttrykkene for å regne ut og sammenligne ulike verdier for *x* og *y*. I en slik situasjon kan det være aktuelt å ta i bruk representasjonen tabell når elevene skal finne de ulike verdiene for *x* og y, men som nevnt tidligere i analysen ble ikke tabell brukt som representasjon i verken dette eller det andre intervjuet.

Språkbruk

Når det kommer til språkbruken til elevene bruker de både begreper som er kjente innen matematikken samtidig som de også bruker mer hverdagslig språk. I det første intervjuet sier blant annet elevene i samtale rundt to linjer at «de er like bratte, men denne starter høyere opp». Her sammenligner altså elevene to linjer i koordinatsystemet med bruk av ord som «bratt» og «starter høyere opp» som er ord en fint kan finne på å bruke i hverdagslige situasjoner også. I det andre intervjuet ble det også sagt at «streken blir også lik». Dette blir sagt i en kontekst der eleven skal sammenligne en linje på begge sider av Origo, og det kan virke som at eleven med dette utsagnet mener at linjen vil være lik, selv om koordinatene vil inneholde negative tall. Altså at stigningstallet og konstantleddet vil være det samme som på andre siden av Origo, men det er vanskelig å si sikkert ettersom dette ikke blir spesifisert noe videre. Det finnes også tegn til at elevene bruker begreper som vi kan kjenne igjen fra matematikken som for eksempel når elevene i samtale om de samme linjene sier at «de er parallelle». I denne situasjonen hadde de to linjene likt stigningstall, men vi kan ikke nødvendigvis anta at elevene tar denne koblingen ettersom det ikke blir nevnt mer spesifikt i denne situasjonen.

Dette kapittelet har jeg presentert analysen av datamaterialet som ble samlet inn i forbindelse med denne masteroppgaven. Analysen viser at elevene bruker flere ulike strategier når de spiller Slagskip, men et klart mindretall av disse strategiene inkluderer matematikk. Til gjengjeld brukes ofte de matematiske strategiene i samspill med de ikke-matematiske strategiene når elevene skal finne ut hvor de skal skyte neste gang. På den måten får elevene brukt de matematiske strategiene, og spesielt endring av x- og y-verdier, i stor grad gjennom å spille Slagskip. Når det kommer til arbeidet i etterkant av å ha spilt Slagskip, viser analysen at det hovedsakelig ble brukt grafiske og algebraiske representasjoner og sammenligninger mellom disse. Det som kjennetegner samtalene og arbeidet til elevene i etterarbeidet, er at det ble snakket en god del om funksjonenes stigningstall og konstantledd i tillegg til negative tall, både i form av stigningstall og i koordinatsystemet. Gjennom analysen ble det også sett på hvilket språk elevene brukte da de snakket om disse kjennetegnene og representasjonene i etterkant av å ha spilt Slagskip.

6 Diskusjon

I denne masteroppgaven har jeg valgt å se på spillet Slagskip og om det kan være et nyttig verktøy å bruke i matematikkundervisningen. For å finne ut av dette stilte jeg følgende spørsmål:

Hvordan kan spillet Slagskip gi innsikt i elever på 9. trinn sin kunnskap om koordinatsystemet og lineære funksjoner?

1. *Hvilke strategier bruker elevene når de spiller Slagskip, og hvilke uttrykk for elevenes kunnskaper om koordinatsystemet kan dette vise?*
2. *Hvilke muligheter for videre arbeid med lineære funksjoner er det spillet Slagskip kan være med å skape?*

I dette kapittelet vil jeg diskutere funn fra analysen opp mot teori som ble presentert i teoridelen og tidligere forskning. Ettersom dette diskusjonskapittelet skal prøve å svare på problemstillingen er det delt inn i tre deler, en del for hvert av de to underspørsmålene og en del for den overordnede problemstillingen. Først vil jeg i kapittel 6.1 ta for meg det første underspørsmålet og se på hvilken kunnskap om koordinatsystemet som kommer til syne gjennom elevenes strategier. Deretter i kapittel 6.2 vil jeg se på representasjoner og representasjonsoverganger som kommer til syne gjennom oppgavene i intervjuet for å se hvilke muligheter arbeid i etterkant av å spille Slagskip kan gi. Til slutt skal jeg i kapittel 6.3 løfte oppgaven opp for å besvare hovedproblemstillingen ved å se de to underspørsmålene som en helhet.

6.1 Elevenes strategier og kunnskap

Denne delen av diskusjonskapittelet vil ta utgangspunkt i kategoriene i Figur 8 og de tilhørende analysene i kapittel 5.1. Analysen av elevenes strategier viste at flertallet av elevene sine strategier ikke var basert på matematikk, men på ren strategi med bruk av informasjon de hadde tilegnet seg og antakelser om motspillers valg og spillestrategi. Elevenes kunnskaper om koordinatsystemet kom fram gjennom kategoriene *algebraisk resonnement*. Selv om elevenes kunnskaper ikke ble representert i mange av kategoriene, var til gjengjeld strategien å endre x- og y-verdi en strategi elevene brukte mye, også i kombinasjon med de andre ikke-matematiske strategiene.

Endringen i x- og y-verdier kan knyttes til Kaput (2008) sin definisjon av det andre kjerneelementet i algebraisk resonnering, hvor det henvises til algebraisk resonnering som en syntaktisk styrt handling på symboler. En slik handling på symboler gjør dermed elevene når de øker/senker verdien på tallene for *x* og *y* slik at de kan skyte på et nabopunkt til der de har truffet. Her må elevene ha kunnskap om hvordan de beveger seg i koordinatsystemet og hvordan x- og y-verdiene til koordinatene endrer seg etter hvor de er plassert i koordinatsystemet. Å se på matematikk og algebra som en slik aktivitet kan også knyttes til Sfard (1991) sin strukturelle tolkning av matematiske begreper. Her klarer elevene å se på koordinaten både gjennom representasjonen som punkt i koordinatsystemet, men også i form av symboler ved å sette inn ulike verdier for *x* og *y*. At elevene klarer disse prosessene ved å endre x- og y-verdiene til en koordinat kan altså tyde på at elevene har opparbeidet seg en matematisk forståelse for begrepet koordinat og dets plassering i koordinatsystemet. Selv om observasjonene viste at elevene som oftest hadde god kontroll på koordinatene når de spilte Slagskip, dukket det opp flere situasjoner hos begge elevparene hvor det ble misforståelser og diskusjoner ettersom noen

sa en annen koordinat enn tenkt. Dette viser at handlingen med å endre koordinatens verdier ikke alltid ble riktig utført, men tilpasningen med et felles koordinatsystem viste seg å være til hjelp for å oppklare slike situasjoner.

Strømskag (2020) presenterer blant annet begrepene miljø og feedback for å beskrive en undervisningssituasjon i matematikk. Her beskriver miljø både materielle og intellektuelle elementer som skal brukes i problemløsningen, som i dette tilfellet blant annet inkluderer medelever og det felles koordinatsystemet. Den viktigste egenskapen til miljøet er å gi objektiv feedback (Strømskag, 2020). I Slagskip kan denne feedbacken komme fra for eksempel medelever når de sier hvilket skip som er sunket eller gjennom diskusjon rundt et punkt i det felles koordinatsystemet. Tilpasningen med bruk av et felles koordinatsystem kan altså knyttes til disse to begrepene til Strømskag (2020). Det felles koordinatsystemet fungerte slik at elevene skulle bli enige, altså få umiddelbar feedback fra hverandre om hvorvidt punktet de skøyt på var rett. På den måten kan det se ut til at Slagskip gir elevene muligheten til å øve på å bevege seg i koordinatsystemet ved å endre de ulike verdiene til koordinatene, og elevene vil underveis få feedback på om det blir gjort riktig. I en eventuell digital versjon av Slagskip vil elevene også få en umiddelbar feedback, gjennom at spillet viser hvor punktet er i koordinatsystemet når elevene skriver inn en koordinat. En ulempe med en digital versjon vil være at en ikke har en diskusjonspartner å diskutere med hvis en for eksempel ikke forstår hvorfor koordinaten gir det valgte punktet i koordinatsystemet. Til gjengjeld kan en ikke alltids være sikker på at diskusjonspartneren har den kunnskapen som trengs for å gi riktig feedback. Dette kom blant annet til syne da elevene tok i bruk de nye skytereglene. Her hadde elevene lite kunnskap om spesielt lineære funksjoner, noe som gjorde at elevene ikke klarte å gi korrekt feedback til motspilleren. Elevene endte dermed opp med å ikke bruke funksjonsuttrykkene riktig.

Leinhardt et al. (1990) påpeker blant annet at det at koordinatsystemet har en dual retning hvor de positive verdiene går oppover og til høyre og de negativ nedover og til venstre kan være forvirrende for elever. Jeg ser på denne kunnskapen om å kunne bevege seg i koordinatsystemet som grunnleggende i arbeidet med koordinatsystemet ettersom det for eksempel vil være vanskelig å tolke grafer uten å vite hva aksene i koordinatsystemet sier. Kranz et al. (2013) påpeker også dette når de skriver at det vil være vanskelig å forstå fremtidige funksjonsbegrep hvis elevene ikke har en dypere forståelse for koordinatsystemet. Hvis en ser dette i lys av Sfard (1991) sin teori om matematiske begreper, vil det dermed være hensiktsmessig med en strukturell forståelse av koordinater og bevegelse i koordinatsystemet før elevene kan begynne å lære om funksjoner. Ifølge Sfard (1991) består læringsprosesser av et samspill mellom den strukturelle og operasjonelle tilnærmingen. Dette samspillet rundt begrepet koordinater får jeg inntrykk av at kommer til syne hos elevene når de spiller Slagskip. Her viser de både den operasjonelle oppfatningen gjennom regneprosesser samtidig som de viser den strukturelle oppfatningen gjennom veksling av ulike representasjoner av begrepet. At det å være godt kjent og kunne plassere punkter og bevege seg i koordinatsystemet er grunnleggende for videre arbeid med funksjoner kan også ses i læreplanen. Her blir koordinatsystemet introdusert allerede på 3. trinn, mens funksjoner først blir introdusert på 8. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). Hvis elevene klarer å se på koordinater og bevegelse i koordinatsystemet som både en prosess og et objekt før en skal introdusere et nytt matematisk begrep, som for eksempel lineære funksjoner, tror jeg det vil være en stor fordel. Ved å spille Slagskip får dermed elevene mulighet til å få mengdetrening på å plotte punkter i koordinatsystemet og endre punktenes verdier før et nytt begrep blir introdusert. Om Slagskip er et like godt verktøy i arbeidet med å introdusere lineære funksjoner som det kan se ut som det er med punkter, er derimot mer usikkert. Elevene fikk

etter hvert spille med regler der linjer og funksjoner i koordinatsystemet ble presentert. Fordi elevene ikke hadde tilegnet seg nok kunnskap om linjer i koordinatsystemet, var det vanskelig for spillerne å bruke linjene riktig og gi hensiktsmessig feedback til motspilleren underveis i spillet. Derfor tror jeg Slagskip vil være mest hensiktsmessig å bruke etter at elevene er blitt introdusert for punkter i koordinatsystemet, men før de blir introdusert for grafer og lineære funksjoner, noe Bell (1974) sier seg enig i.

Selv om det kan se ut som om Slagskip i utgangspunktet vil fungere best som mengdetrening på punkter i koordinatsystemet, tror jeg Slagskip også kan bidra til å øve på andre ferdigheter elevene skal lære gjennom skolegangen. For eksempel heter et av kjerneelementene i læreplanen «representasjon og kommunikasjon» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dette går blant annet ut på å kommunisere gjennom og bruke matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnering. At spill kan fremme blant annet sosial interaksjon og dermed også kommunikasjon, påpekes også hos Qian og Clark (2016). Ettersom elevene spiller Slagskip i par, vil de få trening i å kommunisere og ordlegge seg forståelig ved bruk av matematisk språk og begreper. Et annet kjerneelement i læreplanen tar utgangspunkt i argumentasjon og resonnering (Kunnskapsdepartementet, 2019). At argumentasjon og resonnering er viktig i elevenes utvikling påpeker også Carpenter et al. (2003). De skriver blant annet at gjennom å resonnere og begrunne svarene sine utvikler elevene en dyp forståelse som er avgjørende for deres fremtidige suksess innenfor både matematikk og andre felt (Carpenter et al., 2003). Gjennom det felles koordinatsystemet og feedback som blir gitt under Slagskipspilling, får blant annet elevene mulighet til å øve seg på å argumentere for hvorfor et punkt stemmer overens eller ikke med den gitte plasseringen. Analysen viste også at elevene brukte strategiene under kategoriene *spillets rammer* og *informasjon fra motspiller* for å resonnere seg frem til hvilket punkt det var mest aktuelt å skyte på. Gjennom at Slagskip kan legge til rette for diskusjon og resonnering tror jeg at Slagskip kan være med å bidra til å utvikle elevenes matematiske forståelse og kunnskap.

Gjennom spillet Slagskip blir også elevene nødt til å samarbeide med medeleven underveis, selv om de spiller mot hverandre. For eksempel må elevene samarbeide om å bli enige om hvor punktene som blir skutt ligger i det felles koordinatsystemet de har fått utdelt. At spill fremmer samarbeid understøttes også i forskningen til Qian og Clark (2016). Å øve seg på samarbeid er viktig i elevenes skolegang ettersom formålet for opplæringen er at elevene skal utvikle kunnskap, ferdigheter og holdninger for å blant annet kunne delta i arbeid og fellesskap i samfunnet (Kunnskapsdepartementet, 2019). Elevene vil oppleve samarbeid på flere ulike arenaer i løpet av livet, og jeg ser derfor på det som viktig at skolen er med på å utruste elevene og gi dem muligheter til å utvikle samarbeidsevnene sine. Jeg ser i tillegg på Slagskip som en arena der elevene kan få mulighet til å øve seg på de grunnleggende ferdighetene som skal inkluderes i alle fag i skolen; lesing, skriving, regning, muntlige ferdigheter og digitale ferdigheter (Kunnskapsdepartementet, 2019). Disse grunnleggende ferdighetene er ifølge Øzerk (2006) forutsetninger for elevenes videre utvikling og læring. Den eneste grunnleggende ferdigheten som ikke kom til syne i studien, var den digitale ferdigheten. Dette er det derimot mulig å få til gjennom å spille Slagskip digitalt, for eksempel gjennom et ferdig utviklet spill eller ved å bruke programmer som GeoGebra eller Desmos (Stohlmann, 2017) som spillebrett. Men som diskutert tidligere, har også de digitale versjonene noen ulemper en må ta hensyn til hvis en velger å spille Slagskip digitalt.

Over har jeg argumentert for at elevene får mulighet til å arbeide med ulike ferdigheter og kunnskaper når de spiller Slagskip. Men kan vi vite om elevene spiller spillet for å forstå

koordinatsystemet, eller spiller de det mer for gøy? Det vil være vanskelig for meg å si hva elevene tenker rundt dette, men strategiene som er basert på elevene sine antakelser, er ikke grunnet i kunnskap eller informasjon de har tilegnet seg. Dette kan kanskje tyde på at disse strategiene hovedsakelig ble brukt for å vinne spillet og ikke for å få et faglig utbytte. Forskning viser at spillbasert læring engasjerer og motiverer elevene (Brezovszky et al., 2019; Pawa et al., 2020; Qian & Clark, 2016). I likhet med denne forskningen observerte jeg underveis at elevene virket engasjerte når de spilte Slagskip, blant annet ettersom en gruppe ønsket å fortsette å spille Slagskip inn i friminuttet. Jeg tenker derfor at det godt kan hende at elevene sitt fokus hovedsakelig ikke var på det faglige, men mer på selve spillet. Alle de fire elevene som ble intervjuet, hadde også spilt Slagskip før, noe som kan tyde på at de synes det er et underholdende spill. Men selv om elevenes fokus kanskje var mest på selve spillet, tror jeg ikke det nødvendigvis utelukker det faglige aspektet ved Slagskip.

Etter at elevene hadde spilt en runde med Slagskip, ble de som nevnt introdusert for noen nye regler som inkluder linjer og funksjoner i koordinatsystemet. Dette er representasjoner som elevene hadde minimalt av kunnskap om fra før. Likevel var det disse reglene elevene valgte å bruke i neste runde av spillet i stedet for å skyte på et enkelt punkt. I analysen kom det fram at elevene så på å skyte med en funksjon som mer hensiktsmessig ettersom den ville gi flere mulige treff rundt et punkt, men det blir også påpekt at de ikke hadde mye kunnskap om funksjoner, og det gjorde det derfor vanskelig å gi feedback på om skuddlinjene ble riktig. Her ville en digital versjon kunne hjulpet elevene å få riktig feedback når det kom til linjer i koordinatsystemet. Det kan dermed se ut som ekstrareglene ga elevene en utfordring på grunn av deres begrensede kunnskaper om dette begrepet. Et slikt intellektuelt behov for et spesifikt matematisk begrep kan gi en indre drivkraft for å løse et problem (Lim, 2009). På den måten kan det se ut som Slagskip kan engasjere elevene og gi dem et ønske om å lære et nytt matematisk begrep for å kunne gjøre det bedre i spillet. Jeg tenker derfor at arbeidet i etterkant av spillet er viktig for å eventuelt kunne utnytte dette engasjementet i videre læring og samtidig være sikker på at det faglige aspektet i økten blir dekket, noe jeg vil se på videre i drøftingen.

6.2 Representasjoner og transformasjoner i etterarbeidet

I denne andre delen av diskusjonskapittelet vil jeg ta utgangspunkt i kategoriene i Figur 9 og de tilhørende analysene i kapittel 5.2. Analysen av elevenes arbeid i etterkant av å ha spilt Slagskip viste at elevene endte opp med å bruke alle de fire formene for representasjonssystemer som Duval (2006) presenterer. Likevel var det de grafiske og algebraiske representasjonene fra Janvier (1987) sin tabell, som er presentert i Figur 4, som var hovedfokuset i arbeidet i etterkant av Slagskip. Ettersom datamaterialet blant annet er basert på intervjuer der jeg snakket med elevene, ble også naturlig språk brukt som representasjonssystem. Naturlig språk kan blant annet komme til uttrykk gjennom Janvier (1987) sin representasjon av funksjon som er kalt «verbal beskrivelse». Den eneste representasjonen til Janvier (1987) som ikke ble representert i datamaterialet var tabell. En grunn til dette er at det ser ut som elevene ikke tar i bruk denne representasjonen når de ikke blir oppfordret til det. Dette kan kanskje forklares med at elevene ikke har oppnådd en strukturell forståelse av funksjonsbegrepet som Sfard (1991) skriver om. På den måten kan det hende at elevene ikke har god nok forståelse av begrepet funksjon til å kunne bevege seg mellom hensiktsmessige representasjoner for den gitte oppgaven. Forskning viser derimot at elever med lav forståelse foretrekker tabell framfor graf som representasjon (Dreyfus & Eisenberg, 1982). Det kan derfor virke som om det er en annen faktor som spiller

inn på at elevene ikke brukte tabell i arbeidet. Oppgavene elevene ble gitt, ga dem ikke direkte i oppgave å lage tabell, men som analysen viste, fikk elevene oppgaver der det kunne være hensiktsmessig å bruke denne representasjonen. Hvor mye kjennskap elevene hadde til representasjonen tabell fra før er usikkert. Basert på den informasjonen jeg fikk av læreren om hvor mye de hadde jobbet med koordinatsystemet og funksjoner tidligere, er det rimelig å tro at elevene ikke hadde særlig mye kunnskap om tabell som representasjon av funksjoner. Hvis tabell er en framstilling som elevene ikke har jobbet med tidligere, er det forståelig at elevene ikke tok i bruk denne representasjonen. Det kan derfor godt hende at det var elevenes manglende kunnskap om representasjonen tabell som er grunnen for dens manglende fremtreden i datamaterialet. Tabell er også den eneste av Janvier (1987) sine representasjoner som ikke ble brukt mens elevene spilte Slagskip. Både den grafiske og algebraiske representasjonen ble presentert i de nyutviklede reglene de fikk utdelt etter hvert, og den verbale representasjon var til stede under hele økten. Tabell var da den eneste representasjonen elevene ikke ble introdusert til under spilleøkten. Det var laget oppgaver som handlet om representasjonen tabell i intervjuet, men ettersom tiden var begrenset ble disse oppgavene ikke gjort. Dermed ble tabell heller ikke presentert i intervjuet. Det kan derfor diskuteres om denne mangel på bruk av tabell både under spilleøkten og i intervjuet kan ha påvirket representasjonsvalget hos elevene i etterarbeidet.

Gjennom elevenes bruk av de tre funksjonsrepresentasjonene som har blitt identifisert, kan en også identifisere noen transformasjoner som ble gjort i arbeidet etter at elevene spilte Slagskip. I datamaterialet kan vi finne eksempler på begge de typene transformasjoner til Duval (2006); behandlinger og omgjøringer. Eksempler på behandlinger elevene gjør i intervjuet, er når de setter inn en x-verdi i et funksjonsuttrykk og regner ut eller sammenligner to linjer i koordinatsystemet. Når elevene jobber med et funksjonsuttrykk og setter inn en valgt x-verdi og regner, holder de seg innenfor den algebraiske representasjonen som Janvier (1987) kaller for formel. Når elevene sammenligner grafer, holder de seg derimot innenfor den grafiske representasjonen mens de forklarer at linjene er parallelle og at den ene starter høyere opp enn den andre. Duval (2006) påpeker at behandlingene er enklere for elevene å få til enn omgjøringene siden de ikke krever at elevene kan identifisere det matematiske objektet. Jeg vil likevel si at en sammenligning mellom to like representasjoner, slik som eksempelet med de to grafene, vil kreve mer av elevene enn en behandling der de bare forholder seg til en enkelt representasjon, som eksempelet med behandling av funksjonsuttrykk. Hvis en knytter en slik behandling av en enkelt representasjon til Sfard (1991) sine to måter å oppfatte et matematisk begrep på, vil jeg tenke at en slik behandling går under den operasjonelle tolkningen. Når elevene sammenligner to like representasjoner, krever det at elevene kan se noen kjennetegn som er like/ulike hos representasjonene. Eksempel på slike kjennetegn kan være stigningstall og konstantledd som eksempelet med sammenligning av grafiske representasjoner viser. Dette er kjennetegn som det matematiske objektet besitter. Etter mitt syn vil arbeid med sammenligninger av to like representasjoner i større grad kreve en strukturell forståelse enn eksempelet med funksjonsuttrykket over som gikk under en operasjonell forståelse.

I tillegg til behandlinger kommer det også til syne flere omdanninger i elevenes arbeid med koordinatsystemet og lineære funksjoner. Gjennom analysen kom det fram omdanninger innenfor fire av de fem nivåene til Bossé et al. (2011). Det eneste nivået som ikke ble representert i datamaterialet, var det første nivået som inneholder de enkleste overgangene i forbindelse med Janvier (1987) sine representasjoner av funksjoner. Grunnen til at det første nivået ikke ble representert er fordi alle overgangene innebærer tabell som enten start- eller

sluttrepresentasjon. Ettersom elevene samlet sett klarte overganger innenfor alle de andre nivåene som ifølge Bosse et al. (2011) skal være mer krevende for elevene å mestre, kan det diskuteres om elevene ville fått til det første nivået også hvis tabell hadde blitt brukt i etterarbeidet. Som Dreyfus og Eisenberg (1982) påpeker er tabell foretrukket blant elever med begrenset forståelse, noe som kan stemme overens med Bossé et al. (2011) sin gradering av overganger. Det kan dermed være med å underbygge argumentet om at det godt kunne hende at elevene i denne studien hadde mestret tabell som representasjon og overganger i forbindelse med representasjonen hvis elevene hadde blitt presentert for tabellrepresentasjonen og det hadde blitt lagt til rette for arbeid med tabell i etterkant av Slagskip. I Figur 5 står det at overgangen fra verbal til graf skjer ved å bruke en overgangsrepresentasjon i form av en tabell. Som nevnt ble ikke representasjonen tabell brukt i intervjuet, men elevene klarte likevel denne overgangen uten hjelp fra en overgangsrepresentasjon. Elevene gikk rett fra den verbale situasjonen til å plotte inn aktuelle punkter og tegne grafen. At elevene ikke brukte tabell, men gikk rett til graf, kan begrunnes med Dreyfus og Eisenberg (1982) sitt poeng om at elever med en viss forståelse foretrekker graf framfor tabell som representasjon. Det kan også diskuteres om grunnen til at elevene ikke brukte tabell som representasjon kanskje kan være at Slagskip er brukt som kontekst i oppgavene, men det er vanskelig å si helt sikkert. For eksempel fikk elevene under spilling av Slagskip nye skyteregler der de kunne skyte en linje fra Origo, en regel de både ga uttrykk for verbalt, men også viste gjennom spillet at de mestret. Det kan hende at elevene overførte konteksten med denne skyteregelen til oppgaven i intervjuet og at de på den måten klarte overgangen uten å bruke tabell som overgangsrepresentasjon. Å knytte en oppgave til en kontekst elevene kjenner til, i dette tilfelle Slagskip, kan ses i sammenheng med teorien om RME (Realistic Mathematics Education). RME baserer seg på at situasjoner som er realistiske for elevene er en god pådriver til utviklingen av nye matematiske begreper, verktøy og prosedyrer (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Gjennom intervjuet ble elevene introdusert for oppgaver med Slagskip som kontekst. Ifølge Van den Heuvel-Pranhuizen og Drijvers (2020) kan en kjent og realistisk situasjon bidra til at elevene på et senere tidspunkt kan anvende sin matematiske kunnskap, som gradvis har blitt mer formell og generell og mindre kontekstspesifikk. Ved å starte med å gi elevene oppgaver med Slagskip som kjent og realistisk kontekst, kan dette ha lettet overgangen til oppgaver uten en spesifikk kontekst som elevene fikk senere i intervjuet.

At Heuvel-Pranhuizen og Drijvers (2020) sin teori om RME kan hjelpe utviklingen av nye matematiske begreper, kan også være en mulig forklaring på utviklingen elevene har i løpet av etterarbeidet i intervjuet. På starten av det ene intervjuet sier elevene at de ikke har lært om funksjoner før. Likevel viser analysen at elevene klarer å arbeide med flere ulike representasjoner for begrepet funksjoner. I arbeidet startet elevene med oppgaver som hadde Slagskip som kontekst, men etter hvert bevegde oppgavene seg bort fra denne konteksten. På den måten viser elevene i intervjuet at de klarer å anvende den matematiske kunnskapen de har tilegnet seg ved hjelp av Slagskip, også i oppgaver som er mer generelle og ikke kontekstspesifikke. Selv om RME kan ha hatt en betydning for elevenes utvikling i arbeidet med funksjoner, er det også mulig at det at læreren hadde tid til å ta en lengre prat med to og to elever kan ha noe å si for utviklingen. Det er ikke sikkert at elevene ville hatt samme utbytte hvis diskusjonen og arbeidet etter Slagskip hadde blitt gjennomført i full klasse. Stein et al. (2008) skriver at lærere synes det kan være krevende å få til gode diskusjoner i hel klasse som fremmer den matematiske læringen til alle elevene. Grunnen til dette er blant annet at en møter et bredt spekter av elevrespons på oppgaver som er kognitivt krevende. Læreren må derfor finne måter å ta i bruk denne responsen for å veilede klassen mot dypere forståelse av

matematikk (Stein et al., 2008). Dette kan peke mot at det kanskje kan være mer krevende for læreren å få en diskusjon som fører til like god utvikling i full klasse som det elevene i denne studien viste. I pararbeid som ble gjennomført i intervjuet var det færre elever læreren måtte ta hensyn til, og dermed også et mindre spekter av elevrespons. På den måten kan det kanskje gjøre det enklere for læreren å ta i bruk denne elevresponsen for å veilede elevene til en dypere forståelse av det matematiske begrepet.

Når det kommer til negative tall, viser analysen at de to elevparene hadde ulik forståelse av funksjonens stigningstall når den krysset Origo. Blant annet ble det sagt at stigningstallet er negativt hvis y-verdien var negativ. Ifølge eleven påvirkes altså stigningstallet av koordinatenes verdier. Det er vanskelig å si hvorfor eleven hadde dette synet på stigningstallet ettersom han hadde vist at han kunne finne og plotte punkter, både under intervjuet og i observasjonene fra da elevene spilte Slagskip, og identifisere positive stigningstall til lineære funksjoner. Det at koordinatsystemet har en dual natur, hvor de negative verdiene går til venstre og nedover, mens de positive går til høyre og oppover, ser Leinhardt et al. (1990) på som et begrep som kan være forvirrende for elevene. Selv om eleven i intervjuet snakker om stigningstallet, kan det virke som at denne duale naturen til koordinatsystemet kanskje kan ha påvirket eleven sitt syn på funksjonens stigningstall. Den andre gruppa hadde derimot oppfattelsen av at stigningstallet ikke endret seg når grafen går igjennom Origo, noe som stemmer. Denne ulikheten i oppfatning er interessant ettersom elevene har gjennomgått det samme opplegget med Slagskip i forkant av intervjuet. Det er derimot ikke sagt at konteksten med Slagskip er en grunn til denne ulikheten hos elevene. Elevparet som mente at stigningstallet ikke endret seg, argumenterte for dette med at linja kan gå uendelig i begge retninger og er derfor det samme. Det kan dermed se ut som om kanskje dette elevparet er kommet lengre i prosessen med å forstå det matematiske begrepet stigningstall enn eleven i det andre paret.

Når det kommer til konstantledd og krysning av y-aksen, viser analysen at elevene klarte å se på den grafiske representasjonen at grafen ikke gikk gjennom Origo. Elevene fikk også til å regne ut funksjonsuttrykk med konstantledd og plotte inn punktene. Selv om de klarte dette, kom elevene aldri så lagt at de klarte å se sammenhengen mellom funksjonsuttrykket og grafens plassering i koordinatsystemet. Det kan dermed se ut som om elevene har det Sfard (1991) kaller en operasjonell forståelse av konstantleddet. Elevene klarer regneprosessen i det algebraiske uttrykket, men klarer ikke å se det matematiske begrepet som et abstrakt objekt og på den måten overføre det til den grafiske representasjonen. At elevene hadde større vanskeligheter med den grafiske representasjonen av konstantleddet enn stigningstallet samsvarer med Hattikudur et al. (2012) sin forskning. Hattikudur et al. (2012) sin forskning på den grafiske representasjonen av stigningstall og konstantledd viser at elever har større utfordringer med å tegne grafers krysningspunkt med y-aksen enn grafens stigningstall. Grunnen til at elevene i denne masterstudien hadde større problemer med konstantleddet enn stigningstallet til en graf kan være at den ene ekstraregelen i Slagskip tok utgangspunkt i rette linjer fra Origo. Denne regelen viste seg å være den eneste av de to ekstrareglene elevene sa de hadde forstått og kunne bruke riktig. Dette kan derfor ha vært med på å gi elevene et inntrykk av at funksjoner ofte går igjennom Origo.

6.3 Slagskip sin mulighet til å gi innsikt i elevenes kunnskaper

I denne siste delen av diskusjonen skal jeg se hvordan det jeg har diskutert til nå vil kunne være med å besvare den overordnede problemstillingen for denne masteroppgaven som er: *Hvordan*

kan spillet Slagskip gi innsikt i elever på 9. trinn sin kunnskap om koordinatsystemet og lineære funksjoner? I innledningen til denne oppgaven stilte jeg blant annet spørsmål om Slagskip bare er en gøy variasjon eller om det er læring i spillet. Videre skal jeg diskutere om spillets utforming kanskje har noe å si for det faglige utbytte, hvilke muligheter spillet gir læreren i undervisningen og om Slagskip kan brukes på en slik måte at det er nyttig fra et matematikkdidaktisk perspektiv.

Gjennom analysen og den første delen av diskusjonen har jeg vist at elevene ved flere anledninger blir engasjert og underholdt av å bruke spill, og i dette tilfellet Slagskip, i undervisningen. Dette var blant annet tydelig ettersom noen elever valgte å sitte igjen å spille i friminuttet. Det er altså tydelig at elevene synes det er gøy med spill. Om denne underholdningsverdien overkjører det faglige utbyttet av å bruke spill i undervisning, er ikke nødvendigvis så lett å svare på. Analysen av elevenes strategier viste at de fleste strategiene ikke var basert på faglig kunnskap. Dette kan tyde på at Slagskip i seg selv kanskje er litt begrenset når det kommer til det faglige utbyttet hos elevene. Likevel har jeg argumentert for at Slagskip kan legge til rette for tilegnelse av andre ferdigheter og kunnskaper enn bare de faglige, som for eksempel samarbeid og kommunikasjon. Dette resultatet skiller seg fra Qian og Clark (2016) sin artikkel som gjennomgår forskning på spillbasert læring og noen utvalgte ferdigheter (21st century skills). Her konkluderes det blant annet med at det er et fåtall av studiene som finner et læringsutbytte i forbindelse med ferdighetene kreativitet, kommunikasjon og samarbeid (Qian & Clark, 2016). Det kan dermed se ut som om Slagskip vil være et aktuelt spill å bruke i arbeid med slike ferdigheter, men ettersom dette er en masteroppgave i matematikkdidaktikk er hovedfokuset i utgangspunktet på det matematiske utbyttet. Selv om mindretallet av strategiene elevene bruker baserer seg på matematikk, er til gjengjeld disse strategiene de som kommer til syne flest ganger i løpet av spillet. Dette kan vise at Slagskip kan gi en god mengde trening på et mindre utvalg av matematiske handlinger i form av for eksempel endring av x- og y-verdier. Jeg kan på den måten se for meg at Slagskip som nevnt kan fungere som mengdetrening på dette området, men at det vil begrense muligheten for øvelse på andre områder.

Analysen viser at elevene har en utvikling innenfor temaet om koordinatsystemet og lineære funksjoner i løpet av arbeidet med oppgavene i intervjuet. Fra å si at de ikke har hørt ordet funksjon bli brukt i sammenhengen med grafer og funksjonsuttrykk før, ender elevene på slutten av intervjuet med å kunne tegne grafer, lage enkle funksjonsuttrykk og identifisere stigningstallet til funksjoner. Jeg tror arbeidet som det ble lagt opp til etter at elevene hadde spilt Slagskip er viktig for denne utviklingen, men det er mer usikkert om utviklingen ville vært den samme uten at elevene hadde spilt Slagskip først. Qian og Clark (2016) skriver blant annet at spill som inneholder en blanding av læring og elementer fra kommersielle spill i større grad vil kunne føre til effektiv læring. Jeg ser på Slagskip som et slikt spill som består av både faglige og kommersielle elementer. Det begrunner jeg med at det som nevnt finnes kommersielle versjoner av Slagskip som har gitt inspirasjon til den matematiske versjonen som har blitt brukt i studien, samtidig som spillet også tar utgangspunkt i koordinatsystemet som blir brukt i matematikken. Derfor kan jeg tenke meg at utviklingen av elevenes kunnskap blant annet er begrunnet i bruk av spillet Slagskip, men at også arbeidet som ble gjort i etterkant er viktig for elevenes utvikling av nye matematiske begreper. En annen fordel med å bruke Slagskip, og muligens også andre spill, i undervisningen er at elevene blir selvgående når de spiller så lenge ikke spillet blir for avansert. Dette kan frikjøpe tid for læreren som kan brukes til å veilede, lytte og diskutere med elevene underveis. Kazemi og Hintz (2014) skriver blant annet at gjennom å lytte til diskusjoner kan læreren overvåke hva elevene gjør og hva de forstår. Gjennom å lytte

til diskusjoner i forbindelse med Slagskip tror jeg læreren dermed kan få mulighet til å få innsikt i blant annet elevenes kunnskaper om koordinatsystemet, hvordan elevene resonnerer og argumenterer og hvilket språk elevene bruker i samtalene. Informasjonen som læreren fanger opp i løpet av en diskusjon kan læreren bruke videre for å bygge elevenes forståelse (Kazemi & Hintz, 2014). Her kan dermed læreren bruke det som er blitt observert under Slagskipspillingen som grunnlag for planlegging av etterarbeid. På den måten kan læreren legge opp til videre arbeid som kan være med å øke elevenes kunnskaper og forståelse om koordinatsystemet og funksjoner.

Selv om det kan se ut som om det finnes positive sider ved bruk av Slagskip i undervisningen, er det også viktig å være bevisst på de negative sidene med spill i undervisningen generelt, og Slagskip spesielt. Ettersom flesteparten av strategiene elevene brukte ikke var matematiske, kan det tyde på at elevene sitt fokus ikke hovedsakelig var på det faglige, men heller å vinne spillet. Hvis en som lærer tar i bruk Slagskip i matematikkundervisningen, ser jeg på det som viktig at læreren er seg dette bevisst. Jeg tror også at det derfor er ekstra viktig å legge opp til et godt etterarbeid i etterkant av spilleøkten som bygger videre på Slagskip. På den måten kan læreren jobbe videre i klassen med de matematiske aspektene ved Slagskip som kanskje ikke elevene har hatt like stort fokus på underveis i spillet. I tillegg tror jeg det er viktig at en som lærer bruker tid på å forbedre, utvikle og tilpasse spillet til elevgruppa og målet for undervisningen. I denne studien valgte jeg for eksempel å utvikle noen nye skyteregler i håp om at disse reglene skulle lette overgangen til arbeid med lineære funksjoner. Det viste seg derimot at disse reglene kanskje ikke ga det resultatet som var ønskelig ettersom elevene hadde mindre kunnskap om temaet enn forventet. Hvis en kjenner elevgruppen godt, tror jeg tilpassingene vil kunne fungere enda bedre enn det de gjorde i denne studien. Studien som er blitt gjort viser blant annet at det er noen matematiske begreper som er mer krevende enn andre for elevene i arbeid med Slagskip. Dette inkluderer blant annet negative tall og en graf sitt krysningspunkt med y-aksen. For å dekke disse begrepene kan det derfor være nødvendig å forsøke å utvikle spillet for å ivareta dette. Når en tilpasser og utvikler spillet videre, er det viktig å være bevisst på at det er begrenset hvor mange regler og tilpasninger som er hensiktsmessig. For mange regler vil kunne gjøre spillet for komplisert og vanskelig for elevene slik at de ender opp med å bruke så lang tid på å forstå spillet at de oppnår lite utbytte av økten.

7 Avslutning og perspektivering

Hensikten med denne masteroppgaven har vært å se hvordan Slagskip kan gi innsikt i elevers kunnskaper om koordinatsystemet og lineære funksjoner. For å finne ut av dette har fokuset vært på hvilke strategier elevene bruker når de spiller Slagskip og hva dette kan si om deres kunnskaper. I tillegg har jeg sett på hvilke muligheter for etterarbeid med funksjoner spillet Slagskip kan gi. For at Slagskip skulle ha best mulig forutsetninger for å kunne gi innsikt i elevenes kunnskaper, valgte jeg å utvikle spillet videre ved å legge til noen ekstra elementer og regler. Jeg så på det som mest hensiktsmessig å gjennomføre en casestudie hvor elevene først fikk spille Slagskip og deretter intervjue noen av elevene for å besvare oppgavens problemstilling. Under intervjuet fikk elevene spørsmål om strategier og oppgaver om koordinatsystemet og lineære funksjoner i en Slagskipkontekst. Denne studien har sine begrensninger ettersom den bare er blitt gjennomført i en klasse på 9. trinn, men studien kan likevel gi en indikasjon på hvordan bruk av spillet Slagskip kan gi innsikt i elevenes kunnskaper om koordinatsystemet og lineære funksjoner.

Analysen av datamaterialet viste blant annet at flesteparten av elevenes strategier i forbindelse med Slagskip ikke var matematiske. Hovedsakelig var det strategien med endring av x- og y-verdier for å skyte på nærliggende punkter til forrige treffpunkt som var basert på matematikk. Denne strategien brukte elevene til gjengjeld ofte, både alene og i kombinasjon med noen av de andre ikke-matematiske strategiene. På den måten fikk elevene god øvelse i å endre verdiene i en koordinat. I drøftingen ble det dermed konkludert med at Slagskip kan være en fin måte å få mengdetrening på å finne, plotte og endre verdier til punkter. Utover dette er det begrenset med matematiske muligheter i Slagskip med mindre en velger å komme med nye tillegg og utvikle Slagskip videre. Da det ble introdusert regler som innebar linjer og funksjoner i koordinatsystemet, kan en argumentere for at det også ble tatt i bruk nye matematiske strategier i spillet, men ettersom elevene hadde begrenset med kunnskap om disse begrepene, ble ikke disse strategiene brukt i stor grad. Det kan derimot spekuleres i om disse nye reglene ville kunne fungert bedre i en senere økt hvor elevene da hadde fått muligheten til å tilegne seg mer kunnskap om begrepet funksjoner. Selv om mangfoldet av matematiske strategier var begrenset, og det derfor kan diskuteres hvor stort faglig utbytte Slagskip gir i undervisningen, kan det se ut som Slagskip kan bidra til øvelse i andre ferdigheter elevene skal lære gjennom opplæringen i skolen. For eksempel får elevene øvelse i å kommunisere, argumentere, resonnere og samarbeide. I tillegg legger Slagskip til rette for å inkludere mange av de grunnleggende ferdighetene som skal inkluderes i alle fag i den norske skolen.

Når det kommer til arbeidet i etterkant av Slagskip viste analysen at elevene klarte å snakke om kjennetegn ved koordinatsystemet og funksjoner, som for eksempel stigningstall og konstantledd, i arbeid med oppgaver som hadde Slagskip som kontekst. Utover i intervjuene klarte også elevene å bevege seg vekk fra Slagskipkonteksten i arbeidet med funksjoner. Hovedsakelig kom funksjonene til syne gjennom grafisk og algebraisk representasjon, i tillegg til muntlig språk. I forbindelse med disse representasjonene ble det identifisert transformasjoner av representasjonene i form av både behandlinger og omdanninger av ulik vanskelighetsgrad. Det viste seg derimot at det var vanskelig for elevene å se sammenhengen mellom den algebraiske og grafiske framstillingen av krysning av y-aksen/konstantleddet. Analysen viste også at negative tall i forbindelse med koordinatsystem og funksjoner kan være et utfordrende begrep for elevene. Denne innsikten om utfordrende begreper i forbindelse med koordinatsystemet og lineære funksjoner er blant annet noe læreren kan ta med videre i planlegging av nye økter i forbindelse med temaet.

Studien viser dermed at Slagskip sammen med et godt etterarbeid kan gi innsikt i elevenes kunnskaper om koordinatsystem og lineære funksjoner på flere ulike måter. Elevenes kunnskaper kommer til syne gjennom samtaler og diskusjoner, valg av strategier og i arbeid med oppgaver i etterkant av å ha spilt Slagskip. Når elevene spiller Slagskip, får læreren frigitt tid og får dermed mulighet til å observere elevene og på den måten kunne få innsikt i elevenes kunnskaper. For at elevene skal bli selvgående slik at læreren kan gå rundt å observere, er det også viktig at spillet er forståelig og ikke komplisert med for mange regler. For at læreren skal kunne få innsikt i elevenes kunnskap slik at en kan legge opp til videre arbeid om temaet for å øke elevenes kunnskap og forståelse, er det også viktig at spillet er tilpasset det ønskelige formålet og elevenes nivå. I diskusjonen ble det blant annet konkludert med at det kunne være lurt at læreren legger opp til oppgaver i etterkant av Slagskipspillingen som kan bygge videre på Slagskipkonteksten. På den måten kan elevene starte med en kjent kontekst før de beveger seg videre til ikke-kontekstuelle oppgaver når deres forståelse av det matematiske begrepet har forbedret seg. Hvilken versjon av spillet Slagskip som blir brukt i undervisningen vil også ha en innvirkning, og det er derfor viktig at læreren vurderer de positive og negative sidene med og for eksempel gjennomføre Slagskip på papir sammenlignet med digitalt. Ut fra denne studien kan det se ut som om Slagskip ikke nødvendigvis fungerer like godt i arbeid med blant annet negative tall grafers krysningspunkt med y-aksen. Dette er noe lærere må være bevisste på hvis de velger å bruke Slagskip i undervisningen.

Hvis jeg skal se fremover med tanke på videre forskning, tror jeg det ville vært interessant å se på bruk av Slagskip over en lengre tidsperiode og på den måten se om spillet kan fungere som mengdetrening først med punkter i koordinatsystemet og senere med linjer og funksjoner. Den videre forskningen kunne også vært rettet mot bruk av representasjonen tabell i forbindelse med Slagskip. For eksempel kunne elevene fått i oppgave å føre skuddene sine opp i en tabell underveis i spillet. Hvor mye kan en utvikle spillet for å muligens øke det faglige utbyttet av Slagskip uten at elevene synes det blir for mye? Å forske på Slagskip med GeoGebra som spillebrett kunne også vært aktuelt å se nærmere på. I GeoGebra ville elevene kunne fått kontinuerlig feedback på punkter og funksjonsuttrykk, men en ville kanskje også mistet noe av argumentasjonen og kommunikasjonen en ville fått med motspilleren? Det kunne også vært interessant og gjort mer forskning på det matematiske temaet om negative tall i forbindelse med koordinatsystemet ettersom analysen viste at negative tall i forbindelse med koordinatsystem og funksjoner var noe som var utfordrende for enkelte elever. Det viste seg også at sammenhengen mellom algebraisk og grafisk framstilling av krysning av y-aksen kunne være utfordrende for noen av elevene. Det kan derfor også være interessant å se nærmere på hvorfor disse begrepene kan være krevende og hvordan en kan legge opp undervisning som kan være med å øke elevenes forståelse for disse matematiske begrepene.

Gjennom arbeid med denne masteroppgaven har jeg lært mye både som forsker og lærer. Jeg har fått innsikt i hvor mye arbeid som ligger bak et forskningsprosjekt og hvor mange ulike faktorer en må ta hensyn til gjennom en slik prosess. I tillegg har jeg fått innblikk i spillbasert undervisning og elevers kunnskaper og ideer rundt koordinatsystemet og lineære funksjoner. Oppgaven har også vist meg hvor mye arbeidet i etterkant av en aktivitet kan ha å si for elevenes forståelse og kunnskap om matematiske begreper. All kunnskapen som jeg har fått gjennom arbeidet med denne masteroppgaven, kommer jeg til å ta med meg videre inn i mitt fremtidige arbeid som lærer.

8 Litteraturliste

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V., & Bossé, M. J. (2012). Lost in Translation: Examining Translation Errors Associated with Mathematical Representations: Lost in Translation. *School Science and Mathematics*, *112*(3), 159–170. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00129.x

Bell, W. R. (1974). Cartesian coordinates and battleship. *The Arithmetic teacher*, *21*(5), 421–422.

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (Red.). (2016). *Vi kan lykkes i realfag*. Universitetsforlaget.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *6*(3), 113–133.

Brezovszky, B., McMullen, J., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M. M., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Laakkonen, E., & Lehtinen, E. (2019). Effects of a mathematics game-based learning environment on primary school students' adaptive number knowledge. *Computers & Education*, *128*, 63–74. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.09.011

Bridge, D. (2014). You Sunk My Constitution: Using a Popular Off-the-Shelf Board Game to Simulate Political Concepts. *Journal of Political Science Education*, *10*(2), 186–203. https://doi.org/10.1080/15512169.2014.894363

Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspektive. I L. D. English (Red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2. utg., s. 746–783).

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Castañeda-Miranda, V. H., Luque-Vega, L. F., Lopez-Neri, E., Nava-Pintor, J. A., Guerrero-Osuna, H. A., & Ornelas-Vargas, G. (2021). Two-Dimensional Cartesian Coordinate System Educational Toolkit: 2D-CACSET. *Sensors*, *21*(18), 6304. https://doi.org/10.3390/s21186304

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). Routledge.

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. I D. Tall (Red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 25–41). Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions. *Journal for research in mathematics education*, *13*(5), 360–380.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Earnest, D. (2015). From Number Lines to Graphs in the Coordinate Plane: Investigating Problem Solving Across Mathematical Representations. *Cognition and Instruction*, *33*(1), 46–87. https://doi.org/10.1080/07370008.2014.994634

Elofsson, J., Gustafson, S., Samuelsson, J., & Träff, U. (2016). Playing number board games supports 5-year-old children's early mathematical development. *The Journal of Mathematical Behavior*, *43*, 134–147. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.07.003

Germeten, S., & Bakke, J. (2013). Observasjon: Å innta klasserommet med egne sanser. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker: Innføring i forskningsarbeid i skolen* (s. 109–123). Universitetsforlaget.

Hattikudur, S., Prather, R. W., Asquith, P., Alibali, M. W., Knuth, E. J., & Nathan, M. (2012). Constructing Graphical Representations: Middle Schoolers' Intuitions and Developing Knowledge About Slope and Y-intercept: Constructing Graphs. *School Science and Mathematics*, *112*(4), 230–240. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00138.x

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (s. 27–31). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 5–17). Routledge.

Kazemi, E., & Hintz, A. (2014). *Intentional talk how to structure and lead mathematical discussions*. Stenhouse.

Klegseth, M. R. (2018). *En vurdering av vurdering—Emneprøver som måleinstrument for matematisk kompetanse*. [Masteroppgave]. NTNU.

Kongsnes, A. L., & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 8: Lærebok*. Aschehoug undervisning.

Kranz, S. R., Amato, C. A., & Freudenthal, E. A. (2013). Coordinate an Attack Using the Calculator. *Mathematics teaching in the middle school*, *18*(6), 356–361.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. Trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Kurushkin, M., & Mikhaylenko, M. (2016). Orbital Battleship: A Guessing Game to Reinforce Atomic Structure. *Journal of Chemical Education*, *93*(9), 1595–1598. https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.6b00136

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. M. Anderssen & J. Rygge, Overs.). Gyldendal akademisk.

Kvarv, S. (2014). *Vitenskapsteori: Tradisjoner, posisjoner og diskusjoner*. Novus.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1–64. https://doi.org/10.3102/00346543060001001

Lim, K. H. (2009). Provoking Intellectual Need. *Mathematics teaching in the middle school*, *15*(2), 92–99.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results on Mathematics and Science*. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: https://timss2019.org/reports

Pawa, S., Parames, L., Nokkaew, A., & Wongkia, W. (2020). Students' conception of set theory through a board game and an active-learning unit. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, *28*(1), 1–15.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Universitetsforlaget.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Qian, M., & Clark, K. R. (2016). Game-based Learning and 21st century skills: A review of recent research. *Computers in Human Behavior*, *63*, 50–58. https://doi.org/10.1016/j.chb.2016.05.023

Rautaskoski, P. (2019). Observasjonsmetoder. I S. Brinkmann & L. Tanggaard (Red.), *Kvalitative metoder: Empiri og teoriutvikling* (s. 81–99). Gyldendal akademisk.

Ringdal, K. (2018). *Enhet og mangfold: Samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (4. utg.). Fagbokforl.

Schoenfeld, A. H., Smith III, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The Microgenetic Analysis of one Student's Evolving Understanding of a Complex Subject Matter Domain. I R. Glaser (Red.), *Advances in Instructional Psychology* (Bd. 4, s. 55–175).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental Science*, *11*(5), 655–661. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00714.x

Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (3. utg., s. 443–466). Sage Publications.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stohlmann, M. (2017). *Desmos Battleship*. *73*(2), 7–11.

Strømskag, H. (2020). Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk: Et systematisk rammeverk for å utvikle og studere matematikkundervisning. I V. L. Nilssen & S.-M. Høynes (Red.), *Samtaleorientert matematikk: Et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner*.

Sturman, A. (1997). Case Study Methods. I J. P. Keeves (Red.), *Educational Research, Methodology, and Measurement: An International Handbook* (2. utg., s. 61–66). Pergamon.

Tiller, T., & Brekke, M. (2013). *Læreren som forsker: Innføring i forskningsarbeid i skolen*. Universitetsforl.

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3. utg.). Gyldendal akademisk.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 713–717). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Øzerk, K. Z. (2006). *Opplæringsteori og læreplanforståelse: En lærebok med vekt på Kunnskapsløftet, Rammeplan for barnehager og aktuelle kunnskaper for pedagoger*. Oplandske Bokforl.

Vedlegg

Vedlegg A: Informasjons- og samtykkeskjema

Kan barnet ditt delta i et forskningsprosjekt i forbindelse med masteroppgaven:

«Slagskip: Matematiske spill for koordinatsystemer og funksjoner»?

Dette er et spørsmål til deg, som foreldre/foresatt, om barnet ditt kan delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å er å se på spillet «Slagskip» og elevers bruk av overganger mellom ulike representasjoner i forbindelse med det matematiske temaet om koordinatsystem og funksjoner. Dette er et prosjekt som Institutt for lærerutdanning ved NTNU Trondheim er ansvarlig for. I dette skrivet gir vi deg informasjon om prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål
Dette forskningsprosjektet er en del av en masteroppgave som etter planen skal fullføres i løpet av våren 2022. Oppgaven omhandler temaet koordinatsystemer og funksjoner og skal se på spillet «Slagskip» og elevers bruk av overganger mellom ulike representasjoner innenfor det matematiske temaet funksjoner. Jeg ser på dette temaet som svært dagsaktuelt og viktig av flere grunner. Blant annet fant en tidligere masteroppgave ut at elever hadde manglende kunnskap om koordinatsystemet, og at dette var en av grunnene til at de ikke fikk til å løse oppgaver om lineære funksjoner i dataprogrammet GeoGebra. Jeg vil derfor se om bruk av spill kan hjelpe elver med sentrale overganger mellom representasjoner innenfor temaet om koordinatsystemer og funksjoner. I den nye læreplanen står det også at elevene skal kunne «representere funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom representasjonene» (Udir, 2020). Jeg håper derfor at mitt prosjekt kan være et bidrag inn mot undervisningen for å nå dette læreplanmålet.

Hvorfor får du spørsmål om barnet ditt kan delta?
Du får spørsmål om barnet ditt kan delta ettersom barnet er elev på 9. trinn på en skole i Trondheim.

Hva innebærer det for barnet ditt å delta?
Å delta i dette masterprosjektet vil innebære at ditt barn er til stede i en undervisningstime som vil bli observert og filmet der elevene skal spille spillet Slagskip. Det vil også bli gjennomført intervju av et utvalg elever i samråd med lærer for å få bedre innsikt i elevenes tankemåter. Disse intervjuene vil det bli tatt opptak av. Video- og lydmaterialet vil bli anonymisert og lagret på en sikker måte. Hvis du som forelder/foresatt har behov for det, kan dere få se intervjuguide på forhånd ved å ta kontakt med meg.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å la barnet ditt delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger om barnet ditt vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for dere hvis du ikke vil at barnet skal delta eller senere velger å trekke barnet ut av prosjektet.

Personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker opplysningene
Vi vil bare bruke opplysningene om barnet ditt til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. De som velger å delta vil ikke kunne gjenkjennes i den ferdige oppgaven. Jeg (Ragnhild, masterstudent) og min veileder ved NTU vil ha tilgang til disse opplysningene. Materialet som vil bli brukt i oppgaven eller presentert for andre vil bli anonymisert slik at deltakerne ikke skal kunne bli gjenkjent.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen skal skje innen 1. september 2022.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om barnet ditt?
På oppdrag fra NTNU (Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet) har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om barnet ditt, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om barnet ditt som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om barnet ditt
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Har du spørsmål om prosjektet er det bare å ta kontakt.

Jeg håper du synes dette prosjektet virker interessant og samfunnsnyttig og vil la ditt barn delta i forskningsprosjektet. På forhånd takk!

Med vennlig hilsen

Ragnhild Beate Boge (masterstudent)
Tlf: +47 46943939
E-post: ragnhbb@stud.ntnu.no

Solveig Voktor Svinvik (veileder)
Tlf: +47 73559706
E-post: solveig.v.svinvik@ntnu.no

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjonen om masterprosjektet *Slagskip: matematiske spill for koordinatsystemer og funksjoner*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at prosjektet kan samle inn datamateriale om _____ (navn på elev) gjennom (kryss av der det passer):

- ☐ Observasjon av undervisningsopplegg
- ☐ Intervju
- ☐ Innsamling av elevarbeid

_____
(signert av foreldre/foresatt, dato)

Vedlegg B: Intervjuguide med tilhørende tabeller

Intervjuguide – slagskip (intervju 1)

Gruppe:

Om slagskip (oppvarmingsspørsmål)

1. Kan du fortelle meg om spillet? Hva gikk det ut på? Fikk dere spilt med noen av de ekstra reglene?
2. Har du spilt «Slagskip» eller et spill som ligner tidligere? Hvilke?
    - Hvis ja: hadde du noen tanker før du begynte å spille om hva som kunne være lurt å gjøre når du spilte slagskip?
3. (Skiller denne aktiviteten med Slagskip seg fra hvordan matematikkundervisningen pleier å være? I så fall hvordan?)
4. (Hvordan synes du det var å jobbe med slagskip i mattetimen? Kunne du tenke deg å gjøre det igjen?)
5. Var det noe du synes var vanskelig med spillet? Hvis ja, hva?

Strategi

6. Hvordan tenkte du når du skulle plassere ut skipene dine i koordinatsystemet? Hadde du noen strategi?
    - Mest mulig spredt? Negative tall (vanskelig for motstander)? Hvorfor?
    - Mest strategisk å plassere skipene horisontalt, vertikalt eller diagonalt? Hvorfor?
7. Hvilke strategier bruker du underveis i spillet for å vinne?
8. (Hvordan gikk du fram når du skulle gjette koordinater for å skyte ned skipene til motstanderen?)
9. Hva tenkte du da du traff et punkt? Påvirket det hvor du skulle skyte neste gang? Hvis ja, hvordan endret det strategien din?
10. Hvis du fikk spilt med ekstrareglene:
    - Hvilken strategi hadde du når du skulle skyte med et linjestykke/en funksjon?
    - Var det noen punkter å skyte til/funksjoner å skyte du fant ut at var lurere enn andre for å få flere treff?

Oppgaver med utgangspunkt i slagskip

11. Hvis du skyter koordinatet (2,3) og får treff, hvor tror du det kan ligge slagskip?
    - Lag en tabell over de punktene der skipet kan ligge
    - Hvilken skyteregel ville du brukt nå for å prøve å treffe skipet på nytt? Hvorfor?
    - Hvis svaret er en av ekstrareglene: Tegn linja/grafen du ville skutt. Hva kan du si om denne linja? Kan du lage et funksjonsuttrykk?
12. Hvis skipet har koordinatene (0,1), (1,2) og (2,3), hva heter linja (funksjonen) som skipet ligger på? (se tabell under for evt hjelp) (svar: y=x+1)
    - Få elevene til å plotte inn punkt og tegne linja
    - Hva kan elevene fortelle ut fra denne linja? (prøve å få de inn på stigningstall og krysningspunkt). Kan de få til et funksjonsuttrykk?
    - Kan denne sammenlignes med linja i oppgaven før?
13. Se for deg at vi står i origo og skal prøve å skyte på et skip i en rett linje (ekstraregel 1). Hvordan må funksjonen til grafen se ut hvis vi skal treffe et skip som ligger i punkt (3,6)?
    - kan være til hjelp for eleven å lage tabell
    - sammenlign med linja i oppgaven før
14. Et skudd fra origo har funksjonen y = -2x. Hvordan vil denne grafen (skuddlinjen) se ut? (her kan også tabell hjelpe)
    - Hvilke likheter og forskjeller er det mellom denne linja og linja fra forrige oppgave?
15. (Per har spilt slagskip tidligere, og påstår at han har vunnet. Anna er uenig og mener det ikke er mulig at Per kan ha vunnet. Per har notert ned sine skudd (tabell). Hvor ville du ha plassert disse punktene? Samsvarer det hvis vi spiller med en ubåt (2), et slagskip (3) og en krysser (4) som kan plasseres horisontalt, vertikalt og diagonalt?)
16. (Anna har skutt disse punktene (tabell), kan du finne ut hvilke skip Anna har klart å synke? Har hun vunnet eller må Anna og Per fortsette å spille litt til?)

Punkt	x-koordinat	y-koordinat	Koordinat
A	0	1	(0, 1)
B	1	2	(1, 2)
C	2	3	(2, 3)

Oppgave 15

Punkt	x-koordinat	y-koordinat	Koordinat
A	0	-3	(0, -3)
B	5	6	(5, 6)
C	-7	4	(-7, 4)
D	0	0	(0, 0)
E	1	-2	(1, -2)
F	6	-8	(6, -8)
G	-2	0	(-2, 0)
H	6	8	(6, 8)
I	3	0	(3, 0)
J	-7	-4	(-7, -4)
K	-1	0	(-1, 0)
L	2	-1	(2, -1)

Oppgave 16

Punkt	x-koordinat	y-koordinat	Koordinat
A	7	8	(7, 8)
B	0	-2	(0, -2)
C	9	-1	(9, -1)
D	-7	8	(-7, 8)
E	-2	0	(-2, 0)
F	-8	6	(-8, 6)
G	-3	1	(-3, 1)
H	9	-2	(9, -2)
I	-1	2	(-1, 2)
J	8	8	(8, 8)
K	9	0	(9, 0)
L	-1	-1	(-1, -1)

Vedlegg C: Transkripsjonskoder

Forklaringer:

[ ] = handlinger eleven gjør

[…] = innhold som ikke var nødvendig for sammenhengen for eksempel kremting, ufullstendige setninger uten nytt innhold, gjentakelser e.l.

(…) = sier noe uforståelig

(…=…) =sier noe utydelig, men kan høres ut som det som står etter «=»

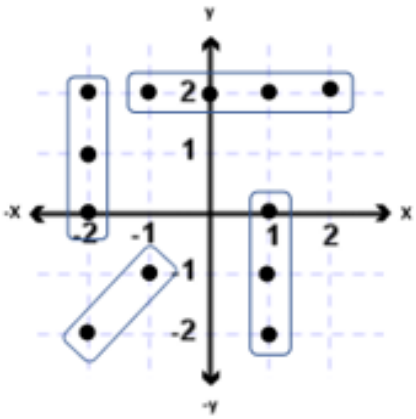
… = stopper midt i en setning eller fortsetter på en setning

To «replikker» av samme person under hverandre = mer enn 5 sekunder pause mellom det som ble sagt

Vedlegg D: Regelark Slagskip

Regler for spillet Slagskip

- Hver spiller får et ark med to koordinatsystem:
  - I koordinatsystemet til venstre (mine slagskip) skal du plassere ut dine skip.
  - I koordinatsystemet til høyre (mine skudd på motstanderen) skal du krysse av koordinatet du sier hver gang du skyter på motstanderen.
  - Det er viktig at dere ikke ser hverandres koordinatsystem! Sitt ovenfor hverandre på hver deres side av pulten og bruk for eksempel en bok/pc som skillevegg for å skjule deres egne koordinatsystemer.
- I tillegg har dere et felles koordinatsystem som skal ligge mellom dere. Pass på at begge kan se det felles koordinatsystemet!
- Hver spiller plasserer ut totalt fire skip i koordinatsystemet til venstre:
  - En ubåt med lengde 2
  - To slagskip med lengde 3
  - En krysser med lengde 4
- Skipene kan plasseres horisontalt, vertikalt eller diagonalt. Bildet viser et eksempel på hvordan skipene kan plasseres. Husk at skipene skal plasseres i kryssene i koordinatsystemet, IKKE i rutene!



- Den yngste i paret begynner å skyte.
- Når du skyter, sier du et koordinat, for eksempel (1, 2). Motstanderen peker på koordinatsystemet som er felles slik at den som skyter kan bekrefte at det er riktig sted. Den som skyter markerer skuddet i sitt høyre koordinatsystem og den som blir skutt på markerer skuddet i sitt venstre koordinatsystem. Deretter sier den som ble skutt på om skuddet traff et skip eller ikke.
- Hvis du treffer, kan du skyte på nytt helt til du bommer. Bommer du er det motstanderen sin tur.
- Skyter du et sted du har skutt tidligere er det det samme som bom.
- For at et skip skal synke må det ha blitt truffet like mange ganger som det er stort. For eksempel må ubåten med lengde 2 bli skutt på i både punkt (-1, -1) og (-2, -2) før det synker.
- Når et skip blir senket må du si ifra til motstanderen hva slags skip det var.
- TIPS! Det er lurt å notere ned når et av motstanderens skip synker. Da kan du vite hvor mange og hvilke skip som er igjen.
- Når en av spillerne ikke har flere skip igjen er spillet ferdig.

Når dere har spilt ferdig gir dere beskjed til Ragnhild. Dere skal nå spille spillet på nytt med nye regler dere får utdelt.

Vedlegg E: Ekstraregler til Slagskip

Ekstraregel 1

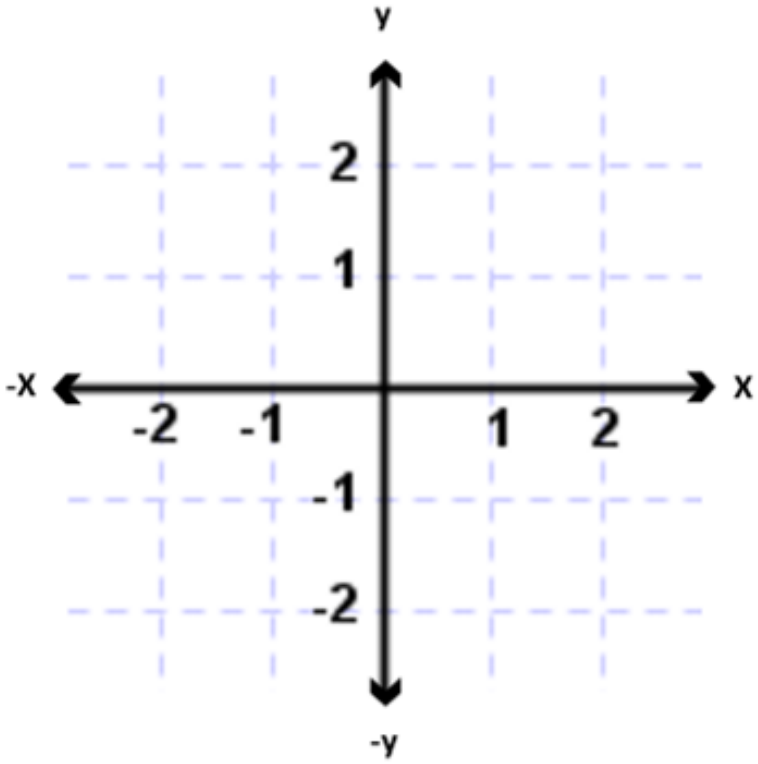
Nå kan dere også **skyte i et rett linjestykke fra origo (0, 0) til et punkt**. På koordinatsystemet på regelarket vil du for eksempel få to treff hvis du skyter fra origo til punkt (-2, -2).

Ekstraregel 2

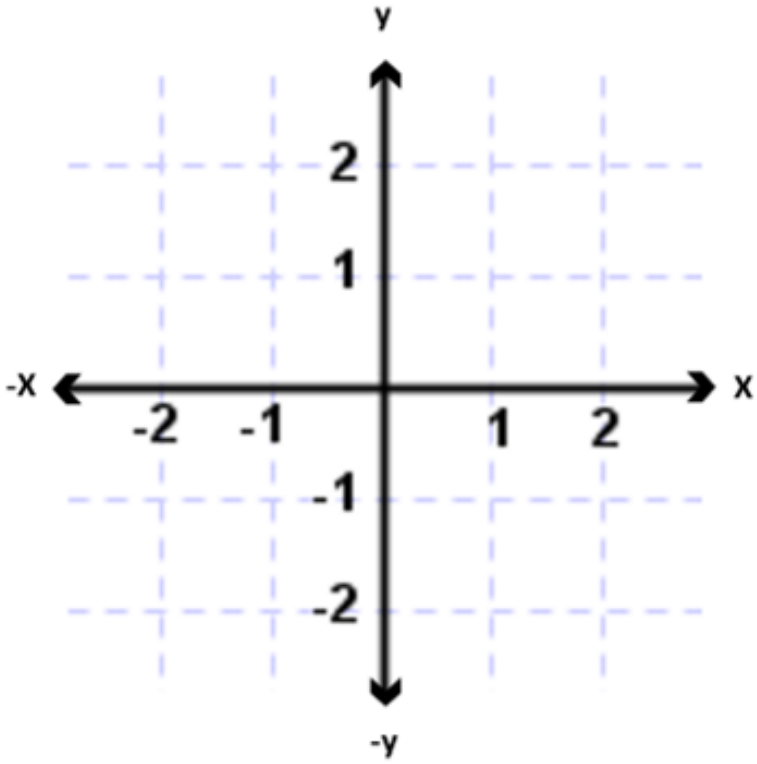
Nå kan dere også **skyte med en lineær funksjon**. For eksempel kan funksjonen $y = 2x - 2$ få to treff i koordinatsystemet på regelarket, både i punkt (1, 0) og (2, 2).

Vedlegg F: Spillebrett Slagskip (-2 til 2)

Mine slagskip



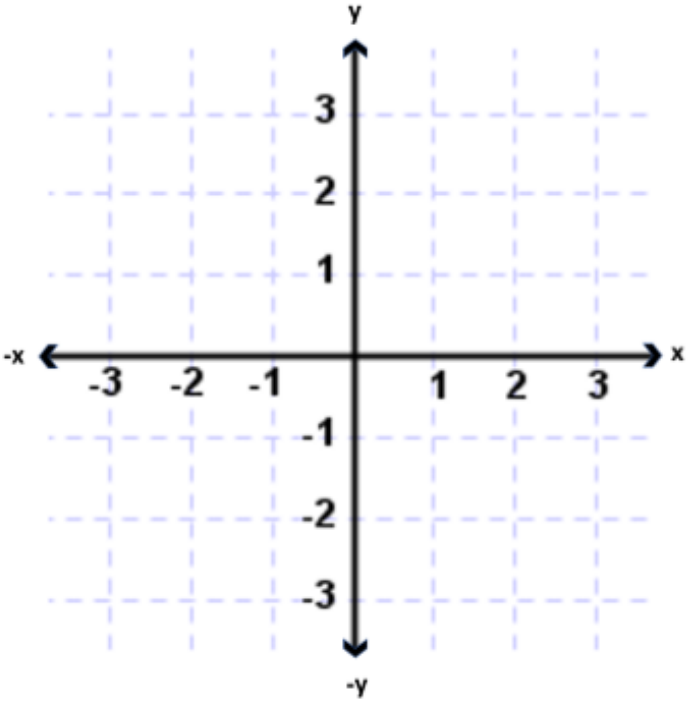
Mine skudd på motstanderen



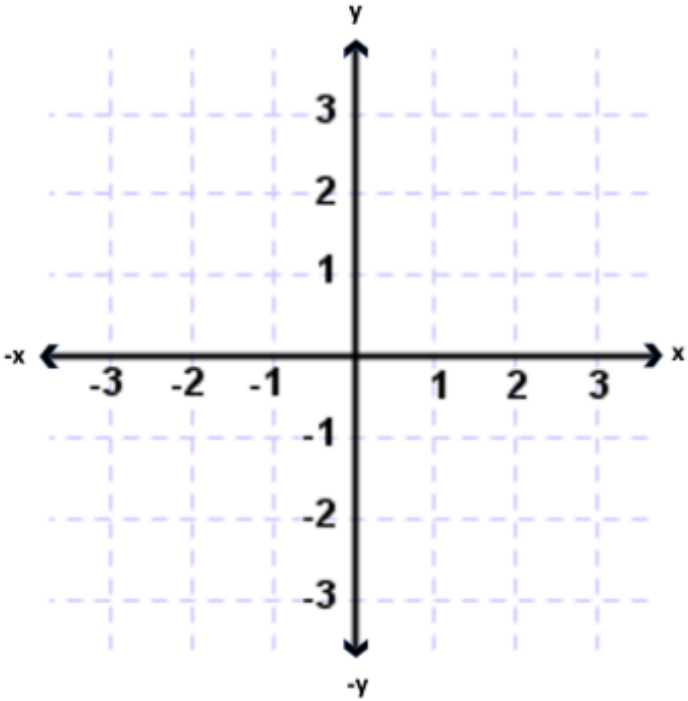
Notater

Vedlegg G: Spillebrett Slagskip (-3 til 3)

Mine slagskip



Mine skudd på motstanderen



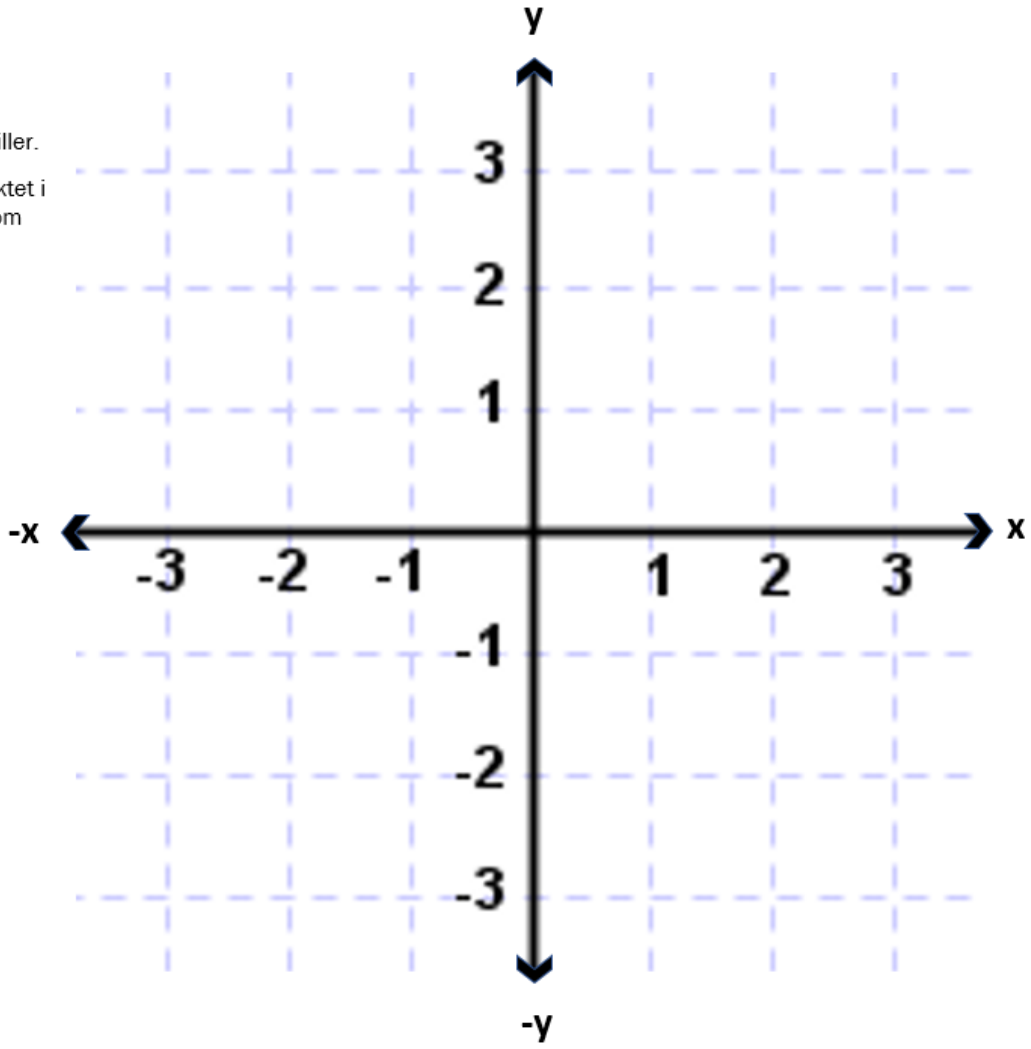
Notater

Vedlegg H: Felles koordinatsystem

Felles koordinatsystem

Bruk dette koordinatsystemet når dere spiller.

Når en skyter kan den andre peke på punktet i koordinatsystemet sånn at dere er enige om hvilket punkt som blir skutt på.



NTNU

Kunnskap for en bedre verden