Ragnhild Førrisdahl

Elevers arbeid med resonnering og bevis på barnetrinnet

En kvalitativ studie av elevers arbeid med matematisk resonnering og bevis knyttet til "endelig antall"-oppgaver

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 1.-7. trinn
Veileder: Anita Valenta
Mai 2022

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Ragnhild Førrisdahl

Elevers arbeid med resonnering og bevis på barnetrinnet

En kvalitativ studie av elevers arbeid med matematisk resonnering og bevis knyttet til "endelig antall"-oppgaver

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 1.-7. trinn
Veileder: Anita Valenta
Mai 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne studien har undersøkt hvordan elever resonnerer og argumenterer i arbeid med problemløsingsoppgaver i matematikk. Hensikten med studien har vært å bidra til mer innsikt i hvordan elever, gjennom samarbeid og selvstendig resonnering, kan komme fram til argumenter og gyldige bevis, og hvordan deres argumenter utvikler seg. Studiens forskningsspørsmål er «Hvordan resonnerer elever på 5. trinn i arbeid med «endelig antall»-oppgaver og hvordan argumenterer de for at svarene er riktige?». Videre er neste spørsmål «Hvordan utvikler argumentene til elevene seg fra en deloppgave til en andre?».

I studien benyttes det kvalitative forskningsmetoder, hvor det ble gjennomført deltagende observasjon av seks elever, fordelt på to grupper. Begge gruppene fikk utdelt to hovedoppgaver, inndelt i tre deloppgaver hver, som de skulle løse. Deloppgavene, innenfor en hovedoppgave, var formulert på tilnærmet lik måte, men besto av høyere og høyere tall for hver deloppgave. Det ble samlet inn data ved hjelp av video- og lydopptak, i tillegg til at elevenes notater også ble samlet inn. Videre ble opptakene transkribert, og datamaterialet ble analysert ved hjelp av egendefinerte kategorier og koder. Videre ble dette koblet opp mot begreper knyttet til matematisk resonnering.

Studien viser at under argumentasjonen for svarene sine på denne typen oppgaver, benyttet elevene oppramsing, empiriske og generiske argumenter, hypotesesetting og begynnende matematisk generalisering. Avhengig av oppgavetekstene, fantes det variasjoner i hvordan elevenes argumentasjon utviklet seg mellom deloppgavene. På oppgavene, hvor det var naturlig å benytte tallsymboler for å ramse opp de ulike løsningene, valgte elevene å benytte denne muligheten til å bekrefte andre framgangsmåter de kom fram til, på alle deloppgavene. På oppgavene hvor det var mer naturlig å benytte ord eller navn for å ramse opp de ulike løsningene, holdt elevene seg i større grad til å benytte en annen framgangsmåte eller regnestykke for å komme fram til svarene sine. Dette gjaldt i størst grad på deloppgave 2 og 3, hvor tallene var større.

Abstract

This study has looked at how students reason and argue in the work with problem-solving tasks in mathematics. The purpose of this study has been to contribute to more insight into how students, through collaboration and independent reasoning, can arrive at arguments and valid evidence, and how their arguments develop. This study's research question is "How do students in 5th grade reason in work with "finitely many"-tasks and how do they argue that the answers are correct?". Furthermore, the next question is "How does the arguments of the students develop from one sub-task to another?".

In this study I use qualitative research methods, where an observation was made up of six students, divided into two groups. Both groups were assigned two main tasks, divided into three sub-tasks each, which they had to solve. The subtasks, within a main task, were formulated in almost the same way, but consisted of higher and higher numbers for each subtask. Data were collected using video and audio recordings, in addition to the students' notes also being collected. Furthermore, the recordings were transcribed, and the data material analysed, using custom categories and codes. Furthermore, this was linked to concepts based on mathematical reasoning.

This study shows that during the argumentation of their answers to this type of problem, the students listed the solutions, used empirical and generic arguments, conjecturing, and started mathematical generalization. Depending on the tasks, there were variations in how the students' argumentations developed between the sub-tasks. In the task, where it was natural to use number symbols to list the various solutions, the students chose to use this opportunity to confirm other procedures they came up with, on all the sub-tasks. In the tasks where it was more natural to use words or names to list the different solutions, the students were more likely to use a different procedure or calculation to arrive at their answers. This applied mostly on subtask 2 and 3, where the numbers were higher.

Forord

Denne studien er gjennomført i løpet av studieåret 2021/2022, og markerer avslutningen på mine 5 år som lærerstudent ved NTNU i Trondheim. Masterprogrammet i matematikk-didaktikk har bidratt til å gi meg inngående kunnskap om elevers arbeid med matematikk generelt, og resonnering og bevis spesielt. Jeg ønsker å takke de som på hver sin måte har bidratt og inspirert, slik at denne masteroppgaven har kommet i havn.

Først vil jeg takke min veileder, Anita Valenta, som fra start til slutt har gitt gode, grundige og konstruktive tilbakemeldinger. Det har vært til stor hjelp i arbeidet med denne masteroppgaven.

Jeg vil også rette en takk til lærerne på 5. trinn, som la til rette for at jeg kunne samle inn data hos dem, og en stor takk til elevene som stilte opp og lot seg observere, i arbeidet med problemløsingsoppgavene. Oppgaven min hadde ikke blitt den samme uten dere.

Til slutt vil jeg takke mine nærmeste medstudenter, som under hele semesteret har bidratt med gode tilbakemeldinger, inspirasjon og støtte.

Trondheim, mai 2022

Ragnhild Førrisdahl

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser

LK20	Læreplanverket Kunnskapsløftet 2020
NSD	Norsk senter for forskningsdata
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
NESH	Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora

1. Innledning

1.1 Tema og bakgrunn for studien

Temaet for denne masteroppgaven er resonnering og bevis på barnetrinnet. Fokuset vil ligge på elevers resonnering og evne til å komme med argumenter for at deres svar er rett. Denne masteroppgaven er skrevet innen prosjektet ProPrimEd, som er et prosjekt på NTNU, som arbeider med dette temaet. Matematisk resonnering på barnetrinnet handler om «å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Det finnes ulike definisjoner av «bevis», noe jeg skal komme tilbake til senere, men arbeid med bevis på barneskolen handler i hovedsak om å fremme matematisk forståelse hos elevene, og å formidle resultater, som de har kommet fram til. Det vil altså si at elevene, på en overbevisende måte, kan argumentere for svarene sine, slik at det viser forståelse (Hanna, 2000; Hersh, 1993; Stylianides, 2016). «Resonnering og argumentasjon» er ett av de seks kjerneelementene i matematikk i den nye læreplanen, som trådte i kraft fra 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette sender derfor et signal om at matematisk resonnering er et tema det skal legges vekt på framover, også på barneskolen. Videre er også «bevis» knyttet til dette kjerneelementet, med tanke på at det står i utdypingen av kjerneelementet, at «Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og *beviser* at disse er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Under «Fagets relevans og sentrale verdier» i læreplanen, står det at «Matematikk skal bidra til at elevene utvikler et presist språk for resonnering, kritisk tenkning og kommunikasjon» gjennom blant annet generalisering (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). På denne måten kan begrepet «generalisering» knyttes til arbeid med resonnering og bevis. Generalisering er også nevnt i et eget kjerneelement «Abstraksjon og generalisering», hvor begrepet forklares med at «Generalisering i matematikk handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer […]» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). I tillegg nevnes begrepet flere ganger i læreplanen generelt (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Stylianides (2016) hevder at man vil kunne oppnå to viktige mål, med fokus på at bevis skal ha en mer sentral rolle i barneskolen. Elevene vil kunne få en dypere forståelse innen matematikk, i tillegg til at oppgavene i seg selv vil kunne gi mening i den situasjonen elevene arbeider i. Videre, når elevene begynner på ungdomsskolen, vil arbeidet med bevis der, være en naturlig utvikling fra det de arbeidet med på barne-skolen, i stedet for at dette er helt nytt for dem. Det vil også kunne bidra til at elevene i større grad vil beherske å resonnere matematisk, noe som er en viktig kompetanse når de videre skal arbeide med matematikk generelt (Stylianides, 2016, s. 10). Det viser seg, ifølge flere studier, at ungdomsskoleelever har problemer med å forstå hva et generalisert argument, som dekker alle mulige tilfeller, faktisk innebærer, og hva som formelt utgjør et bevis. Dette viser også viktigheten av å starte arbeidet med resonnering og bevis tidligere, på barnetrinnet (Stylianou et al., 2009).

For å arbeide med elevers forståelse av bevis, kan man benytte ulike aktiviteter eller prosesser (Stylianides, 2016, s. 11). Eksempler på slike aktiviteter kan være å komme med hypoteser basert på identifisering av mønstre eller generaliseringer, eller å arbeide med spesifikke tilfeller av en påstand for å få en forståelse av hvordan hypotesen kan bevises eller motbevises. Man kan også arbeide med kommunikasjon og hvordan det kan brukes til å overbevise andre om at en påstand er sann eller ikke. Dette knyttes ofte til argumentasjon (Stylianides, 2016, s. 12). Det å kunne argumentere for eller motbevise en påstand, er kjernen i forskning innen matematikkundervisning. Dette er ikke minst fordi man kan se på det som «kjernen i matematikk som meningsskapende aktivitet» (Stylianides, 2016, s. 12).

Det vil være forskjell på hvilken hensikt «bevis» har i matematisk forskning og i matematikk-klasserommet. Når det kommer til forskning, er hensikten med bevis, å overbevise, og dermed også å kunne overbevise «kvalifiserte dommere». I klasserommet, på den andre siden, vil det være uproblematisk å klare å overbevise elevene (Hersh, 1993, s. 396). Elever kan ofte bli overbevist om at en definisjon eller en påstand er rett, fordi det står at «det er slik» i en lærebok eller fordi at læreren sier det, uten at påstanden faktisk blir bevist. I klasserommet er hensikten med bevis, å forklare og på den måten stimulere forståelsen til elevene om hvorfor påstanden eller definisjonen er rett (Hersh, 1993, s. 396). Den viktigste rollen til bevis i matematikk-klasserommet er altså å fremme matematisk forståelse (Hanna, 2000, s. 5; Hersh, 1993, s. 398). Likevel kan det se ut til at elevene, i stedet for å se bevis som en vei til forståelse, heller ser på det som en hindring, og noe som er et ork å arbeide med (Hanna, 2000, s. 9). I tillegg til at bevis i klasserommet har til hensikt å bygge forståelse, kan en annen hensikt være kommunikasjon, altså å formidle resultatene man har kommet fram til (Stylianides, 2016, s. 12). Ved å ta hensyn til hva som kan øke elevenes forståelse av begreper og metoder, kan man ta et valg om å utdype, forkorte eller presentere et bevis «som det er» (Hersh, 1993, s. 398). Samtidig som at det er viktig at elevene forstår, er det likevel viktig at beviset fortsatt er «rett», i den forstand at det også vil gjelde for undervisning eller matematikk på høyere nivåer. Også når det kommer til praktiserende matematikere, vil forståelse komme i første rekke, når det gjelder strenge bevis. Det er først når det fører til reell matematisk forståelse, at bevis blir overbevisende og gyldige for en matematiker (Hanna, 2000, s. 6-7). Selv om det er forskjell på hensikten, betyr det ikke at bevisene i klasserommet er mindre riktige. Disse formene for bevis er tilpasset nivået, men er likefullt godkjente bevis. Som nevnt i definisjonen til Stylianides (2007) skal de formene for resonnering, argumentasjon og uttrykksformer som benyttes, være kjent for eller innenfor konseptuell rekkevidde for elevene.

1.2 Studiens formål

Selv om det er anerkjent at arbeid med bevis bør ha en viktig plass i elevers matematikkundervisning allerede fra starten av skolegangen deres, viser det seg at dette ikke er realiteten i dag. Det viser seg at arbeid med bevis ikke har noen tydelig plass i det typiske matematikklasserommet og dette gjelder spesielt på barneskolen (Stylianides, 2016, s. 7). Når elevene begynner på ungdomsskolen, er det i større grad forventet at elevene skal kunne forstå og konstruere bevis. Dette gjelder som oftest innen geometri (Stylianides, 2016, s. 10). Hvis dette blir elevenes første møte med arbeid med bevis, vil det kunne føles unaturlig og ukjent, i stedet for å være en naturlig utvikling fra erfaringer knyttet til dette temaet på barneskolen. Det viser seg også at elever på videregående skole har vanskeligheter knyttet til arbeid med bevis, og det diskuteres om en av årsakene kan være den brå overgangen til arbeid med bevis på ungdomsskolen (Stylianides, 2016, s. 10). De siste årene har det blitt gitt et signal om at bevis skal spille en viktig rolle i skolematematikken, også på barneskolen (Stylianides, 2016, s. 4). Likevel viser det seg at bevis har en forholdsvis liten plass i barneskole-elevers arbeid innen matematikk. Det finnes også få studier som har sett på resonnering og bevis på barnetrinnet, og hvordan man kan se på mulige løsninger på problemet knyttet til manglende arbeid med dette på barneskolen (Stylianides, 2016, s. 4). Vi trenger å vite mer om hvordan elever på barnetrinnet resonnerer og argumenterer for at påstander er riktige eller ikke, for å kunne forsterke arbeid med resonnering og bevis på dette området.

Jeg skal se nærmere på hvordan elever arbeider med «endelig antall»-oppgaver. Det vil si oppgaver hvor det finnes flere, men et endelig antall løsninger. Her ligger fokuset på at elevene skal finne alle mulige løsninger, og kunne argumentere for, og bevise at alle løsninger faktisk er funnet (Stylianides, 2016, s. 91). Årsaken til at jeg har valgt nettopp denne typen oppgaver, er at de er passende for elever på barnetrinnet og de legger til rette for at elevene kan se etter mønster. Videre kan oppgavene legge opp til at elevene må resonnere rundt og argumentere for svarene sine, og gi bevis for at de har funnet alle mulige løsninger. Oppgavene jeg har gitt til elevene er lagt opp slik at jeg først ga dem en oppgave som inneholdt relativt lave tall. Videre fikk elevene utdelt samme type oppgave, men med høyere tall, og på denne måten, ville det kunne føre til at elevene startet en form for gradvis generalisering. Elevene fikk utdelt to hovedoppgaver, som var delt inn i tre deloppgaver hver, hvor hver deloppgave bygget på den forrige. Deloppgavene hadde samme type formuleringer og oppbygging, men for hver deloppgave de fikk utdelt, ble tallene i oppgavene høyere. På første deloppgave var hypotesen min at elevene kom til å telle opp alle løsningene ved hjelp av systematisk eller usystematisk oppramsing. Ettersom tallene i de neste deloppgavene ble høyere og høyere, så jeg for meg at elevene etter hvert ville se etter andre framgangsmåter for å finne alle mulige løsninger. Dette var med tanke på at det ville ta lenger og lenger tid å ramse opp alle løsningene. Her ville jeg altså se om økningen av antall løsninger førte til at elevene begynte å se etter andre måter å løse oppgavene på og om de startet å arbeide med en form for generalisering. Videre ville jeg også se på hvordan argumentasjonen deres endret seg ettersom tallene i oppgavene ble høyere og høyere. Under arbeidet hadde jeg fokus på den muntlige forklaringen deres, i tillegg til at det ble supplert med tegninger og skriftlig arbeid fra elevene.

For å bidra med mer kunnskap om elevers arbeid med resonnering og bevis på barnetrinnet, ser jeg nærmere på hvordan elevene resonnerer rundt og argumenterer for at svarene og løsningene de kommer fram til, er riktige. Jeg skal derfor undersøke forskningsspørsmålet «Hvordan resonnerer elever på 5. trinn i arbeid med «endelig antall»-oppgaver og hvordan argumenterer de for at svarene er riktige?». Videre er neste spørsmål «Hvordan utvikler argumentene til elevene seg fra en deloppgave til en annen?».

1.3 Oppgavens oppbygging

I teorikapittelet begynner jeg med å definere de begrepene som er sentrale i denne studien. Jeg starter med det overordnede begrepet matematisk resonnering, hvor jeg presenterer en oversikt, basert på Stylianides (2008) rammeverk knyttet til resonnering og bevis. Videre forsøker jeg å avklare begrepene argumentasjon, empirisk og generisk argument, redegjørelse, generell logisk slutning, bevis og matematisk generalisering. Deretter ser jeg på tidligere forskning, og trekker fram funn som vil være relevant for resultatene i denne studien. Jeg kommer også til å presentere teori om oppgavene som ble gitt til elevene, og til slutt presenterer jeg rammeverket jeg brukte i arbeidet med å analysere og diskutere resultatene i denne studien. Rammeverket er basert på Stylianides (2008) analytiske rammeverk knyttet til resonnering og bevis, presentert i tabell 2.1.

I metodekapittelet utdyper jeg hvordan observasjonen av elevene og innsamlingen av data ble gjennomført, samt hvordan de etiske retningslinjene ble ivaretatt. I arbeidet med å finne svar på problemstillingen min, valgte jeg å gjennomføre en deltakende observasjon av to grupper, på tre elever hver, som løste oppgaver individuelt og i fellesskap. Ved å være en deltakende observatør fikk jeg muligheten til å stille spørsmål til elevene underveis, for å få elevene til å argumentere for hvorfor de svarte som de gjorde, og hvordan de visste at svarene de kom fram til var riktige. Om jeg kun hadde observert, og ikke deltatt i diskusjonene selv, tenker jeg at det kunne påvirket resultatene i negativ retning, med tanke på at elevene trolig ikke like tydelig hadde fått fram hvordan de tenkte, og tatt seg tid til å formulere argumenter, før de gikk videre til neste oppgave.

I analysedelen har jeg analysert elevenes arbeid med oppgaver av typen «endelig antall», og blant annet sett på om og hvordan de brukte de ulike deloppgavene til hjelp for å arbeide med og argumentere for svarene sine videre. Et av målene var å se om elevene etter hvert som de arbeidet, ville komme fram til en form for generalisering. Jeg har kategorisert funnene etter fire kategorier: oppramsing, uttrykker en sammenheng mellom tallene i oppgave, refererer til tidligere deloppgaver og begynnende generalisering (se tabell 3.1). Hvordan jeg kom fram til disse kategoriene, utdypes i kapittel 3.4 Metode for analyse.

I diskusjonskapittelet diskuterer jeg hvordan mine funn samsvarer med tidligere forskning, knyttet til elevers resonnering og argumentasjon rundt «endelig antall»-oppgaver. Det viser seg at elevene benytter seg av oppramsing, empiriske og generiske argumenter, hypotesesetting og begynnende matematisk generalisering, for å argumentere for svarene sine på denne typen oppgaver. Avhengig av oppgavetekstene, fantes det variasjoner i hvordan elevenes argumentasjon utviklet seg mellom deloppgavene. På oppgavene, hvor det var naturlig å benytte tallsymboler for å ramse opp de ulike løsningene, valgte elevene å benytte denne muligheten til å bekrefte andre framgangsmåter de kom fram til, på alle deloppgavene. På oppgavene hvor det var mer naturlig å benytte ord eller navn for å ramse opp de ulike løsningene, holdt elevene seg i større grad til å benytte en annen framgangsmåte eller regnestykke for å komme fram til svarene sine. Dette gjaldt i størst grad på deloppgave 2 og 3, hvor tallene var større.

Til slutt, i avslutningskapittelet, gir jeg en kort oppsummering av oppgaven sett opp mot forskningsspørsmålene mine. I tillegg ser jeg på hva denne studien kan bidra med innenfor dette forskningsfeltet, og hvilke forskningsspørsmål som kan være interessante å arbeide videre med, knyttet til dette temaet.

2. Teori

I denne studien skal jeg undersøke hvordan en gruppe elever på 5. trinn arbeider med «endelig antall»-oppgaver og hvordan de argumenterer for hvordan svarene deres er riktige. Videre ser jeg på utviklingen i argumentasjonen mellom deloppgavene de arbeider med. Et overordnet begrep i denne sammenheng er matematisk resonnering. Videre er argumentasjon, empirisk og generisk argument, redegjørelse, generell logisk slutning, bevis, generalisering og «endelig antall»-oppgaver sentrale begreper. Jeg tar for meg hvert av disse begrepene, og avklarer dem i kapittel 2.1 Begrepsavklaringer og kapittel 2.3 «Endelig antall»-oppgaver. Videre, i kapittel 2.2, ser jeg på tidligere forskning knyttet til resonnering og bevis på barnetrinnet, med fokus på elevers forutsetninger knyttet til arbeid med bevis og argumentasjon. I tillegg ser jeg på hvilke former for argumenter elever ser på som gyldige eller mest overbevisende.

I kapittel 2.3 tar jeg, som nevnt, for meg teori om «endelig antall»-oppgaver, som er den oppgavetypen elevene i denne studien arbeidet med. Kort fortalt, er denne typen oppgaver laget slik at det finnes flere, men et endelig antall mulige løsninger. Målet er at elevene skal finne alle løsninger på en oppgave og videre argumentere for eller bevise at de faktisk har funnet alle mulige løsninger (Stylianides, 2016, s. 91). Dette utdyper jeg videre i kapittel 2.3 «Endelig antall»-oppgaver.

I kapittel 2.4 presenterer jeg et rammeverk for resonnering og bevis, som er basert på Stylianides (2008) sitt analytiske rammeverk knyttet til resonnering og bevis (se tabell 2.1 og 2.2). Årsaken til at jeg valgte å bruke dette rammeverket, er at jeg i diskusjonen knytter disse begrepene til resultatene i analysen, og diskuterer hvordan mine funn samsvarer eller skiller seg fra tidligere forskning knyttet til disse begrepene. Matematisk resonnering kan ses som et overordnet begrep i min studie, med tanke på at jeg knytter de andre begrepene jeg benytter, til nettopp dette begrepet, ved hjelp av Stylianides (2008) sitt analytiske rammeverk. Jeg utdyper dette videre i kapittel 2.1 Begrepsavklaringer.

2.1 Begrepsavklaringer

2.1.1 Matematisk resonnering

Stylianides (2008) presenterer en tabell med et analytisk rammeverk knyttet til «resonnering og bevis». Denne tabellen kan ses på som en overordnet oversikt over matematisk resonnering og hva det innebærer. Tabellen deles først inn i to kategorier: «Lage matematiske generaliseringer» og «Argumentere for matematiske påstander», og deretter i flere underkategorier, som vist i tabell 2.1 (Stylianides, 2008, s. 10). (Min oversettelse).

Resonnering og bevis			
Lage matematiske generaliseringer		Argumentere for matematiske påstander	
Identifisering av mønstre	Formulere en hypotese (eng.: conjecture)	Gi et bevis	Gi et argument som ikke er et bevis
Plausibelt mønster Bestemt mønster	Hypotese (eng.: conjecture)	Generisk eksempel Generell logisk slutning (eng.: demonstration)	Empirisk argument Redegjørelse (eng.: rationale)

Tabell 2.1: Analytisk rammeverk knyttet til resonnering og bevis (Stylianides, 2008)

I denne studien tar jeg utgangspunkt i flere av begrepene i rammeverket til Stylianides (2008), og bruker denne oversikten til å vise til sammenhengen mellom de begrepene jeg benytter i min studie. Stylianides (2008) poengterer at dette rammeverket ikke inkluderer alle former for aktiviteter knyttet til resonnering og bevis. Likevel gir det en oversikt og en form for kategorisering av begreper, som er sentrale for å svare på mine forskningsspørsmål, med tanke på at jeg er ute etter svar på hvordan elever resonnerer og argumenterer i arbeid med matematikkoppgaver.

Matematisk resonnering handler, ifølge Stylianides (2008), om å lage matematiske generaliseringer, identifisere mønstre, formulere hypoteser og å argumentere for matematiske påstander, både med gyldige bevis og argumenter som ikke er gyldige bevis. Med tanke på at begrepet «resonnering» er mye brukt i flere situasjoner, og at det dermed implisitt finnes en universell enighet om hva begrepet innebærer, poengterer Yackel og Hanna (2003) at det er komplisert å skrive om matematisk resonnering. Antagelsen om at det er en enighet om hva begrepet innebærer, holder i praksis ikke (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 2). Jeannotte og Kieran (2017) definerer matematisk resonnering som «en kommunikasjonsprosess med andre eller en selv, som gjør det mulig å utlede matematiske ytringer fra andre matematiske ytringer» (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 7). Jeg tolker det dit hen at matematisk resonnering er en prosess, som inkluderer en form for kommunikasjon, hvor man benytter kjent matematisk kunnskap for å komme fram til ny kunnskap. Man kan for eksempel resonnere seg fram til argumenter for at et svar er riktig, basert på hva man har av tidligere matematisk kunnskap og kunnskap om den aktuelle oppgaven.

Carpenter et al. (2003) presenterer en oppgave, lignende hamsteroppgaven i min studie, som handler om syv mus som skal fordeles på to bur. Her kommer det fram at det mest grunnleggende nivået, gikk ut på at elevene listet opp kombinasjoner etter hvert som de kom på dem. Et mer avansert nivå, gikk ut på at elevene forsto at deler av oppgaven var å finne en måte å organisere svarene sine på, for å vise at de hadde inkludert alle mulige kombinasjoner (Carpenter et al., 2003, s. 66). Denne måten å resonnere på, representerer en del av «argumentasjon» innen matematikk. I oppgaven brukte elevene strategier for å omgruppere og omorganisere tallene, og på den måten kom de fram til prosedyrer som de mente var gyldige og ville bli akseptert av de andre i klasserommet (Carpenter et al., 2003, s. 86).

2.1.2 Argumentasjon

Den ene hovedkategorien innen matematisk resonnering er, ifølge Stylianides (2008), «Å argumentere for matematiske påstander». Det er en av grunnene til at argumentasjon er et sentralt begrep i arbeidet med resonnering og bevis. I denne studien oversetter jeg «argumentation» og «justification» til argumentasjon. Argumentasjon kan brukes om «et bredere spekter av argumenter, som barn bruker for å vise at en påstand er sann» (Carpenter et al., 2003, s. 85). Det å arbeide med argumentasjon, er viktig for at elever skal få en god forståelse innen matematikk. Elevene vil kunne gi mening til og begrunne begreper og framgangsmåter, både for seg selv og andre i klasserommet. Dette ved hjelp av å bruke overbevisende argumenter om at en framgangsmåte de har brukt, er gyldig (Carpenter et al., 2003, s. 85). Yackel og Hanna (2003) nevner at man kan se på argumentasjon som en sosial prosess, med tanke på at det er basert på offentlig kunnskap, og at det ofte er mer enn ett individ inkludert i arbeidet.

Stylianides (2008) refererer til et argument som påstander i en sammenhengende sekvens. Jeannotte og Kieran (2017) definerer argumentasjon som en matematisk resonneringsprosess, hvor man ved å finne støtte og bekreftelse, kan endre den epistemiske verdien til en påstand. Den epistemiske verdien vil altså si sannheten til en påstand. Argumentasjonsprosessen er, ifølge Jeannotte og Kieran (2017) assosiert med to typer «overganger». Den første kan relateres til argumentasjonen for en påstand, som kommer fra prosessen rundt hypotesesetting. Under denne prosessen kan den epistemiske verdien endres fra sannsynlig til mer sannsynlig. Dette kan knyttes til Stylianides (2008). Ved den andre typen overgang, endres den epistemiske verdien fra sannsynlig til sant eller usant. Den er altså relatert til en validering, uten å nødvendigvis utgjøre en del av bevisprosessen (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12). Dette kan knyttes til Stylianides (2008) som deler argumentasjon inn i argumenter som ikke er gyldige bevis, altså empirisk argument eller redegjørelse, og argumenter som er gyldige bevis, altså generisk argument eller generell logisk slutning. Hanna (2000) viser til at flere forskere fokuserer på argumentasjon, i tillegg til resonnering, for å skape matematisk innsikt. Her legger de blant annet fokus på at utforsking og uformell argumentasjon kan ha en betydningsfull pedagogisk rolle, i tillegg til å være mer intuitivt, enn det arbeid med formelle bevis er (Hanna, 2000, s. 9-10).

2.1.3 Empirisk argument og redegjørelse

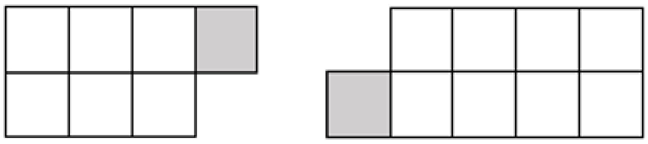
Empiriske argumenter er et eksempel på argumenter som ikke kan defineres som «godkjente» bevis (Stylianides, 2008, s. 10). I kapittel 2.1.5 Bevis, kommer jeg nærmere inn på hvilke egenskaper eller kvalifikasjoner et argument må ha for å kunne defineres som et gyldig bevis, ifølge Stylianides (2007). I denne studien er det denne definisjonen jeg tar utgangspunkt i. Empiriske argumenter går ut på at man begrunner at en påstand alltid stemmer, med at påstanden stemmer for noen få tilfeller. Det vil derfor ofte virke sannsynlig at påstanden stemmer i alle tilfeller (Krogh Arnesen, 2022, s. 4). Ved at elever kun sjekker en delmengde av alle mulige tilfeller eller vurderer alle mulige tilfeller uten å faktisk vise at de gjør det, vil elever kunne konkludere med at en påstand stemmer (Stylianides, 2008, s. 12). Et eksempel på et empirisk argument er at en elev argumenterer for at summen av to oddetall alltid vil bli et partall, ved å vise til at det gjelder for summen av 7 og 9, som er 16. Det samme gjelder summen av 11 og 13, som blir 24, og summen av 15 og 17, som blir 32. På grunn av at det stemmer for alle disse tre eksemplene vil en elev kunne mene at det vil gjelde for alle andre oddetall også. Dette argumentet er likevel ikke nok til å bevise at det alltid vil stemme. Balacheff (1988) er en av flere studier som viser til at mange elever ikke ser behovet for å resonnere videre, fordi de er overbevist om at empiriske argumenter er gyldige former for argumentasjon. Med tanke på at empiriske argumenter benytter ugyldige argumentasjonsformer, kan de ikke defineres som gyldige bevis i undervisningen, heller ikke på barneskolen. På tross av dette, har eksempler likevel en viktig rolle i aktiviteter som har med bevis å gjøre. Det å kunne «se det generelle i eksemplene, er grunnleggende i å få fram underliggende matematiske strukturer, utforske definerende grenser for generaliseringer og lage avgrensede påstander» (Stylianides, 2016, s. 18). Med utgangspunkt i de «endelig antall»-oppgavene, som ble gitt til elevene i denne studien (se kapittel 3.2 for presentasjon av de aktuelle oppgavene), vil et typisk svar ved bruk av et empirisk argument være «Vi må ta 7 gange 7, for å komme fram til riktig antall løsninger, fordi det funket da vi gjorde det på den forrige oppgaven, og siden denne oppgaven nesten er lik, blir det riktig her også».

Stylianides (2008) presenterer, i tillegg til empirisk argumentasjon, begrepet redegjørelse (eng.: rationale) under argumenter som ikke er bevis. Dette begrepet har til hensikt å inkludere de argumentene som verken er bevis eller empiriske argumenter. Redegjørelser kan enten ta utgangpunkt i eksempler eller en generell formulering, det er ikke det som er avgjørende. Et argument kan telle som en redegjørelse, framfor et bevis, for eksempel ved at det ikke benyttes argumenter som inkluderer «aksepterte sannheter» i det fellesskapet, for eksempel klasserommet, man befinner seg i (Stylianides, 2008, s. 12). Et eksempel kan være at en elev argumenterer for at summen av to oddetall alltid blir et partall, ved å vise til at summen av 7 og 9 er 16, og dermed mene at summen av to oddetall alltid blir et partall. Man argumenterer altså ikke med hvorfor eller hvordan det er en relasjon mellom tallene. Et eksempel knyttet til oppgavene, som ble gitt til elevene i denne studien (se kapittel 3.2 for presentasjon av de aktuelle oppgavene), vil kunne være at en elev svarer at «Vi må ta 7 gange 7, for å komme fram til riktig antall løsninger, fordi da vi skrev ned alle løsningene, kom vi fram til 49 stykker, og 7 gange 7 er 49». I dette tilfellet utdypes det altså ikke hvorfor man kan ta 7 gange 7 for å finne riktig antall løsninger, men det begrunnes heller med at det samsvarer med en annen løsning man har kommet fram til. Det kunne også vært en tilfeldighet at både 7 gange 7 blir 49 og svaret etter oppramsingen blir 49. Likevel betyr det ikke nødvendigvis at denne framgangsmåten vil gjelde for alle tilfeller.

2.1.4 Generisk argument og generell logisk slutning

Videre i denne oppgaven vil jeg henvise til generisk eksempel som generisk argument. Ved bruk av et generisk argument tar man utgangspunkt i et eksempel på den påstanden som skal bevises. Deretter resonnerer man matematisk rundt hvorfor påstanden holder for dette eksempelet, og videre ser man på hvordan det matematiske resonnementet kan gjelde som en generell påstand (Rø & Arnesen, 2020, s. 13). Selv om et generisk argument er et konkret og faktisk eksempel, presenteres det på en slik måte at det får fram det generelle i den gitte situasjonen (Rowland, 1998, s. 67). Det vil si at selv om argumentet blir uttrykt i form av et bestemt tall, vil det ikke være avhengig av noen av egenskapene ved det tallet, for å kunne bekrefte påstanden (Mason & Pimm, 1984, s.

284). I tillegg til å bekrefte et spesifikt eksempel, gir et generisk argument en innsikt i *hvorfor* det faktisk stemmer for det enkelte tilfellet. På denne måten vil det være mulig å se hvorfor det vil stemme for alle andre tilfeller også (Rowland, 1998, s. 68). Rowland (1998) hevder at generiske argumenter kan brukes på alle nivåer i utdanningen, både for å overbevise og til å forklare. Et eksempel på et generisk argument, kan være at en elev argumenterer for at summen av to oddetall blir et partall, ved å vise til et eksempel med 7 og 9 og vise at både 7 og 9 får en mengde «til overs» dersom man tegner det opp som figurer samlet i par, for eksempel som vist i figur 2.1. På den måten vil de delene som er til overs i de to oddetallene, til sammen kunne danne et nytt par. Dette vil gjelde for summen av hvilke som helst to andre oddetall også. Summen blir alltid et partall.



Figur 2.1: Eksempel knyttet til summen av oddetall og generisk argument

Når det kommer til oppgavene, elevene arbeidet med i denne studien (se kapittel 3.2 for presentasjon av de aktuelle oppgavene), kunne et svar med generisk argument for eksempel vært at «Vi må ta 7 gange 7 for å komme fram til svaret. Hver smak kan lage 7 ulike kombinasjoner med is. Dette inkluderer at man lager én kombinasjon med 2 kuler av samme smak, i dette tilfellet sjokolade. Deretter kan man lage seks kombinasjoner med 2 kuler av ulike smak, altså sjokolade + én og én av de seks andre smakene (se figur 2.2). Siden man kan lage 7 ulike kombinasjoner med sjokolade, kan man også lage 7 kombinasjoner med hver av de andre smakene. Dermed kan man multiplisere 7 med 7, for å komme fram til antallet ulike kombinasjoner med is det er mulig å lage med de 7 smakene».

7 ulike smaker:

sjokolade (S), jordbær (J), vanilje (V), oreo (O), karamell (K), friskis (F), pistasj (P)

Kombinasjoner med sjokolade:

SS SJ SV SO SK SF SP

Figur 2.2: Eksempel knyttet til kuleisoppgaven og generisk argument

Ved bruk av generell logisk slutning benytter man ikke eksempler, men kun et generelt språk, for å argumentere for at en påstand er sann eller usann (Krogh Arnesen, 2022, s. 4). Argumenter som inneholder generell logisk slutning baseres altså ikke på spesifikke eksempler, men ser heller på det generelle i situasjonen eller tilfellet (Stylianides, 2008, s. 11). Hvis en elev skulle argumentert for at summen av to oddetall blir et partall, kunne hun for eksempel forklart det ved å si at når man har et oddetall, kan man sette sammen par innad i oddetallet og få én del av et par til overs. Hvis man da legger sammen to oddetall, vil man få to «deler» til overs, og de to delene kan danne et nytt par, slik at det ikke lenger blir noen deler til overs. På den måten ser man at summen av to oddetall alltid blir et partall. Man kan også benytte en lignende modell som i figur 2.1, men se bort fra det spesifikke antallet med bokser, og heller fokusere på at det blir én boks «til overs» i begge oddetallene, og at de to kan danne et par. Når det kommer til oppgavene som elevene fikk utdelt i denne studien (se kapittel 3.2 for presentasjon av de aktuelle oppgavene), vil et typisk svar kunne være «Hvis det er x antall smaker, så vil hver smak kunne kombineres enten med seg selv eller hver av de andre smakene. Én smak kan altså kombineres med x antall smaker. Siden det er x antall smaker, og hver smak skal kombineres med alle smaker, for å komme fram til antall ulike kombinasjoner som er mulig å lage, vil man kunne multiplisere x antall smaker med x antall smaker, og komme fram til hvor mange ulike kuleis-kombinasjoner det er mulig å lage med x antall smaker» (se figur 2.3).

x antall ulike smaker:

$X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_n$

Kombinasjoner med én av smakene:

$X_1 X_1 \quad X_1 X_2 \quad X_1 X_3 \quad X_1 X_4 \quad \ldots \quad X_1 X_n$

Figur 2.3: Eksempel knyttet til kuleisoppgaven og generell logisk slutning

Stylianides (2016) legger fram at ikke-empiriske argumentasjonsmåter, altså argumenter på høyere nivå, som generisk argument og generell logisk slutning, er innenfor den konseptuelle rekkevidden til elever på barneskolen. Det at elevene allerede på barneskolen lærer at empiriske argumenter ikke er gyldige bevis, vil kunne føre til en mer naturlig utvikling i læringen senere i skolegangen. I tillegg vil ikke elevene trenge å lære definisjonen av bevis på nytt på ungdomsskolen, men heller bygge videre på den de allerede har lært, som også fortsatt er riktig, når de arbeider med matematikk på et høyere nivå (Stylianides, 2016, s. 19). Jeg kommer nærmere inn på hva som skal til for at et argument skal kunne kvalifiseres som et bevis, i kapittel 2.1.5 Bevis. I matematikk begynner man gjerne å utforske eksempler, for så å bruke dette til å argumentere for en generell påstand. Hvis man ikke allerede har en viss kjennskap til en påstand, er det få, uavhengig av nivå, som går rett på å formulere et formelt bevis. Et formelt bevis vil si en generell logisk slutning, skrevet med et algebraisk språk (Krogh Arnesen, 2022, s. 4). Balacheff (1988) poengterer at uformelle bevis er en type forklaring, som blir sosialt akseptert, mens formelle bevis, på den andre siden, er begrenset av en streng struktur.

2.1.5 Bevis

Stylianides (2008) viser til argumenter som kan og ikke kan defineres som bevis (se oversikt i tabell 2.1). I dette delkapittelet presenterer jeg Stylianides (2007) sin definisjon av bevis. Det er denne definisjonen Stylianides (2008) referer til i sin studie, når han skriver om bevis, og det er denne jeg bruker i min studie. Det er viktig at blant annet lærere, forskere og de som skriver pensumbøker er tydelige på hva de mener med «bevis» i skolen, og spesielt i barneskolen (Stylianides, 2016, s. 10). Hvis ikke, vil det være vanskelig å kunne undervise om det, og senere evaluere om elevene faktisk har lært det som var ment at de skulle lære. Det er derfor viktig at man har en form for enighet om hva som telles som et bevis i matematikken, også på barneskolen (Stylianides, 2016, s. 10). Det er slik at ulike mål med forskningen vil kunne kreve ulike definisjoner av bevis og det å bevise. Det er ikke nødvendigvis slik at alle bør adoptere den samme måten å definere på, men det vil likevel være nødvendig å poengtere hvilken definisjon som brukes i den enkelte forskningen, eller i dette tilfellet skolematematikken

(Stylianides, 2016, s. 11). I denne studien benytter jeg, som nevnt, Stylianides (2007) sin definisjon. Han understreker at dette kun er én av mange definisjoner av bevis (min oversettelse):

> Et bevis er et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av påstander for eller mot en matematisk påstand, med tre følgende egenskaper:
> 1) Det benyttes påstander som er aksepterte av personene i klasserommet, som er sanne og tilgjengelige uten ytterligere begrunnelse.
> 2) Det benyttes former for resonnering og argumentasjon, som er gyldige og kjent, eller innen konseptuell rekkevidde, for elevene.
> 3) Det kommuniseres med uttrykksformer eller representasjonsformer som er passende og kjent for, eller innenfor konseptuell rekkevidde for elevene. (Stylianides, 2007, s. 291)

Når jeg videre benytter begrepet «bevis» i denne studien, er det gyldig bevis, som tilfredsstiller kravene i definisjonen til Stylianides (2007), jeg refererer til. Beviset det refereres til, må altså både være akseptert av elevene i denne studien, være sanne og tilgjengelige uten ytterligere begrunnelse. Videre må det brukes resonnering og argumentasjon, som er gyldig og kjent for, eller innen konseptuell rekkevidde for, elevene i denne studien. I tillegg kommuniseres det med uttrykksformer eller representasjonsformer som er passende og kjent for, eller innenfor konseptuell rekkevidde for elevene i denne studien (Stylianides, 2007, s. 291).

Simpson (1995) skiller mellom «bevis gjennom logikk» og «bevis gjennom resonnement». Den første legger vekt på det formelle, og han mener dette vil være ukjent for elever, med tanke på at det ikke er noen «sammenheng med deres eksisterende mentale struktur», og at det dermed er få elever som mestrer dette. «Bevis gjennom resonnement» inkluderer utforsking, og appellerer, ifølge Simpson (1995), mer til den naturlige utviklingen til eleven. Utforskning, og argumentasjonen knyttet til dette, utgjør ikke bevis, til tross for at det kan være svært nyttig for å formulere og teste hypoteser (Hanna, 2000, s. 14). Jeg kommer nærmere inn på hypotesesetting under kapittel 2.1.6 Matematisk generalisering. Selv om utforsking og bevis er separate aktiviteter, er de likevel komplementære og forsterker hverandre. Mens bevis utgjør en bekreftelse, fører utforsking til oppdagelse. Begge disse er likevel nødvendige for å lykkes innen matematikk (Hanna, 2000, s. 14).

2.1.6 Matematisk generalisering

En av de to hovedkategoriene i det analytiske rammeverket til Stylianides (2008) (se tabell 2.1), er å «lage matematiske generaliseringer». Matematisk generalisering knyttes på denne måten til matematisk resonnering og bevis. I følge Stylianides (2008) er generalisering en prosess hvor man bruker det man vet om matematiske relasjoner i én situasjon eller en oppgave, videre i arbeid med nye situasjoner eller oppgaver. Den opprinnelige situasjonen eller oppgaven fungerer som en undergruppe av den nye (Stylianides, 2008, s. 9). Jeannotte og Kieran (2017) legger også til at det er en prosess, hvor det utledes en struktur rundt et sett med matematiske objekter eller en relasjon mellom settet og undergrupper av settet. Det er altså en overgang fra et gitt sett til et større (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 9). Et eksempel kan være at elever bruker tallene og framgangsmåtene som de benyttet på en oppgave med lave tall, og overfører de samme metodene til samme type oppgave, som har høyere tall, hvor det for eksempel er vanskelig å telle seg fram til svaret eller alle tilfeller av svar. Jeg kommer nærmere inn på dette under kapittel 2.3 «Endelig antall»-oppgaver. Ellis et al. (2022) definerer generalisering som (min oversettelse):

> En aktivitet der elever i spesifikke sosiokulturelle og instruksjonsmessige kontekster enten (a) identifiserer fellesskap på tvers av tilfeller, (b) utvider resonnementet sitt utover omfanget det oppsto i, eller (c) utleder bredere resultater ut fra spesielle tilfeller. (Ellis et al., 2022, s. 3)

Jeg forstår definisjonen til Ellis et al. (2022), som at man i arbeid med matematikk-oppgaver, kan oppdage sammenhenger mellom oppgaver med samme struktur. Eller at man kan bruke informasjonen man kommer fram til i arbeid med en oppgave, til å løse en annen oppgave, med like egenskaper. Og så at man kan se at måten man løser en oppgave på, kan gjelde i andre tilfeller, enn kun den spesifikke oppgaven man har løst.

Under «lage matematiske generaliseringer» i tabell 2.1, finner vi kategorien «formulere en hypotese». Hypotesesetting (eng.: conjecturing) kan defineres som en matematisk resonneringsprosess, hvor det settes fokus på en form for regelmessig sannsynlig epistemisk verdi, ved å se etter likheter og forskjeller, og på denne måten ha potensiale for matematisk teoretisering (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). I rammeverket til Stylianides (2008) defineres en hypotese (eng.: conjecture) som en begrunnet påstand, som er knyttet til en «generell matematisk relasjon basert på ufullstendige bevis». Her er ytterligere handling nødvendig, for å akseptere eller avvise påstanden, med tanke på at begrepet «hypotese» viser til et nivå av usikkerhet om sannheten til påstanden. Derfor vil det være nødvendig med andre matematiske resonnerings-prosesser for å avgjøre om hypotesen er sann eller usann (Stylianides, 2008, s. 11). Selv i de tilfellene hvor elever ikke klarer å bevise hypoteser på en generell måte, vil det være produktivt for elevene å produsere hypoteser. Det å spørre elevene «om hypotesene deres alltid er sanne og hvordan de vet at de alltid er sanne for alle tall», kan føre til en interessant diskusjon og det kan gi innsikt i hvordan elevene tenker. Denne typen spørsmål kan være med å legge et grunnlag for arbeid med argumentasjon på et dypere nivå, også på høyere klassetrinn enn barneskolen (Carpenter et al., 2003, s. 102).

Under å «lage matematiske generaliseringer» i tabell 2.1, finner vi også «identifisering av mønstre». Det å kunne identifisere mønstre i matematikk, handler om å finne matematiske relasjoner, som er generelle og som passer til et gitt mønster eller en oppgave (Stylianides, 2008, s. 10). For å kunne gjøre dette, er det viktig at elever har en evne til å lage generaliseringer basert på matematiske strukturer, heller enn å kun se på sammenhenger mellom noen få eksempler (Stylianides, 2008, s. 10). Selv om det finnes likheter mellom det å produsere hypoteser og det å identifisere mønster, med tanke på at de begge knyttes til det å lage matematiske generaliseringer, er det et par forskjeller. Når man identifiserer mønstre, er det ikke nødvendigvis et spørsmål om det er en sannhet i resultatet eller ikke, i motsetning til hypotesesetting, hvor det åpnes for at hypotesen kan testes (Stylianides, 2008, s. 11). For det andre er det ikke nødvendigvis slik i arbeid med identifisering av mønstre, at man kommer fram til en generalisering utover den gitte situasjonen eller oppgaven man arbeider med. I hypotesesetting derimot, skal man gjerne komme med noe som gjelder utover den gitte situasjonen som ga utgangspunkt for den aktuelle generaliseringen (Reid, 2002).

2.2 Tidligere forskning

Når elever begynner på skolen, har de ifølge Mason (2008) allerede naturlige forutsetninger for å kunne bevise, overbevise og å bli overbevist. Videre er det opp til den formelle skolegangen å bygge videre på dette grunnlaget, slik at elevene kan utvikle disse evnene videre og bruke det i arbeid med bevis i matematikk (Mason, 2008). I følge Carpenter et al. (2003) vil elever på barneskolen både kunne forstå og klare å bruke mer generelle argumentasjonsformer, selv om elever i denne alderen ikke nødvendigvis er i stand til å produsere dem selv. Likevel er det noen elever som viser at de nettopp har evnen til å presentere argumentasjonen deres, på en generell måte.

Stylianides (2007) argumenterer for at det bør være en sammenhengende utvikling i hvordan bevis defineres og presenteres på de ulike klassetrinnene. På denne måten vil tidligere erfaringer med bevis kunne forberede elevene på mer formelle former og anvendelser av bevis, når elevene kommer lenger ut i skoleløpet. Stylianou et al. (2009) viser til at arbeidet med bevis på barneskolen, ikke nødvendigvis legger fokus på bruk av symbolbruk, som det ofte legges vekt på i arbeid med bevis i videregående skole. Fokuset på barneskolen ligger heller på å utvikle fornuftige og logiske argumenter, ved hjelp av «matematiske verktøy» som er innenfor elevenes rekkevidde, i den gitte alderen (Stylianou et al., 2009, s. 8). Mer uformelt blir bevis i grunnskolen, sett på som resonnement og argumentasjon (Stylianou et al., 2009, s. 7).

I Stylianou et al. (2009) bekreftes det at elever, både når de skal overbevise seg selv og når de presenterer resonnementet sitt for lærere og medelever, bruker empiriske argumenter for å bevise hypotesene sine. Selv om elever likevel skulle uttrykke at de er enige i et generalisert argument, fant Fischbein og Kedem (1982) at elevene fortsatt sjekket enkelttilfeller for å verifisere hypotesen. Videre viser Porteous (1986) til at elevene ofte heller brukte empiriske argumenter, enn å vise til, allerede etablerte, generelle argumenter. Dette støttes også opp under av Healy og Hoyles (2000) sin studie, hvor det viste seg at elever i størst grad stolte på empiriske argumenter. Dermed kan det se ut til at elever synes at den mest overbevisende argumentasjonsformen, er å «bevise» ved å sjekke noen få tilfeller (Bell, 1976, s. 34). Dette stammer ifølge Williams (1980) mer sannsynlig fra at elevene mangler en forståelse av hva generalitet faktisk går ut på, framfor at elevene har et behov for å prøve seg fram i spesifikke tilfeller, for å forstå ideer.

I situasjoner der elevene kom fram til og telte opp et antall mulige løsninger, fant Bell (1976) i sin studie at elevene ikke forsøkte å bevise at det ikke fantes flere løsninger, enn det som først ble telt opp. Dette gjaldt for eksempel oppgaver med flere, men et endelig antall løsninger, hvor elevene skulle finne alle mulige løsninger på en oppgave. Jeg kommer videre inn på denne typen oppgaver under kapittel 2.3 «Endelig antall»-oppgaver.

2.3 «Endelig antall»-oppgaver

For å kunne få en dyp og bred forståelse av bevis, må elever arbeide med ulike typer bevis-oppgaver. På denne måten kan de ulike oppgavene komplimentere hverandre, og fører til bredere læringsmuligheter (Stylianides, 2016, s. 27). Det finnes ulike måter man kan kategorisere bevis-oppgaver på. Stylianides (2016) kategoriserer dem etter to matematiske kriterier. Det første består av antall tilfeller eller utfall som er med i oppgaven: «et enkelt tilfelle» (eng.: single case), «flere, men endelig antall tilfeller» eller «uendelig antall tilfeller». Det andre kriteriet består av det spesifikke formålet med å bevise, presentert i oppgaven: å bevise eller motbevise et utsagn. Det er naturlig at ulike argumentasjonsmåter blir brukt under arbeid med de tre ulike kategoriene av «antall tilfeller». På grunn av oppgavenes ulike egenskaper, blir noen mer relevante enn andre. For eksempel vil det å vurdere alle mulige tilfeller involvert i en oppgave, være mer relevant når det kommer til endelig antall tilfeller, enn uendelig antall (Stylianides, 2016, s. 33).

Det første forskningsspørsmålet mitt i denne studien er «Hvordan resonnerer elever på 5. trinn i arbeid med «endelig antall»-oppgaver og hvordan argumenterer de for at svarene er riktige?». Hamsteroppgaven og kuleisoppgaven (se kapittel 3.2 Oppgavene som ble gitt til elevene), som ble presentert for elevene i denne studien, kan i utgangspunktet kategoriseres under «flere, men endelig antall tilfeller». Dette med tanke på at elevene får i oppgave å finne alle mulige løsninger eller kombinasjoner på oppgavene. I arbeidet med «endelig antall»-oppgaver, er målet å få elevene til å finne alle mulige løsninger knyttet til en oppgave og videre at de argumenterer for eller beviser at alle mulige løsninger faktisk er funnet (Stylianides, 2016, s. 91). For å argumentere for at de har funnet alle, kan de for eksempel ramse opp løsningene usystematisk, noe som kan kategoriseres som et ugyldig bevis. De kan også ramse opp løsningene systematisk, og vise til at de ved hjelp av systematikken, vet at det ikke finnes flere løsninger. Dette vil kunne utgjøre en gyldig form for bevis.

I arbeidet med en oppgave som hamsteroppgaven vil elevene kunne bruke enkle representasjoner direkte, som tall for antall hamstere, for å liste opp ulike løsninger. I en oppgave som kuleis-oppgaven, kan elevene bli fristet eller tvunget til å bruke mer komplekse representasjoner, som for eksempel mer realistiske tegninger, noe som kan hindre elevenes innsats i å liste opp alle løsningene (Stylianides, 2016, s. 120). Målet med oppgavene i denne studien, med tanke på hvordan de ble presentert og hvordan de utviklet seg med høyere og høyere tall, var at elevene etter hvert som tallene økte, skulle se at de kunne komme fram til en form for generalisering. Etter hvert som tallene i oppgavene ble høyere, kan man også si at elevene arbeidet med en «uendelig antall»-oppgave, hvor elevene var nødt til å utarbeide en framgangsmåte eller en formel, framfor å ramse opp alle mulige løsninger.

2.4 Rammeverk for resonnering og bevis

Forskningsspørsmålene mine i denne studien er «Hvordan resonnerer elever på 5. trinn i arbeid med «endelig antall»-oppgaver og hvordan argumenterer de for at svarene er riktige?» og «Hvordan utvikler argumentene til elevene seg fra en deloppgave til en annen?». Som rammeverk tok jeg utgangspunkt i Stylianides (2008) sitt analytiske rammeverk knyttet til resonnering og bevis (se tabell 2.1). Videre endret jeg plausibelt og bestemt mønster til kun «mønster», med tanke på at jeg ikke skiller på dette i denne studien. I tillegg la jeg til systematisk og usystematisk oppramsing under henholdsvis «Gi et bevis» og «Gi et argument som ikke er et bevis», fordi disse begrepene er sentrale i arbeidet for å finne svar på forskningsspørsmålene mine.

Resonnering og bevis			
Lage matematiske generaliseringer		Argumentere for matematiske påstander	
Identifisering av mønstre	Formulere en hypotese	Gi et bevis	Gi et argument som ikke er et bevis
Mønster	Hypotese	Systematisk oppramsing Generisk argument Generell logisk slutning	Usystematisk oppramsing Empirisk argument Redegjørelse

Tabell 2.2: Rammeverk knyttet til resonnering og bevis

Jeg brukte begrepene i tabellen som et utgangspunkt for å vurdere hvordan elevene løste de ulike deloppgavene, i diskusjonskapittelet. Videre så jeg på hvordan dette endret seg ettersom elevene fikk utdelt oppgaver med samme struktur, som den eller dem de allerede hadde jobbet med. Fokuset mitt lå på om elevene brukte tidligere erfaringer til å løse de nye, men liknende oppgavene (bare med høyere tall). Min hypotese var at den eller de første oppgaven(e) ville kunne støtte elevene videre i oppgaveløsingen, men spørsmålet var eventuelt «hvordan». Jeg kommer nærmere inn på hvordan jeg lagde en oversikt for å analysere datamaterialet, i kapittel 3.4 Metode for analyse.

3. Metode

I denne studien har jeg undersøkt hvordan en gruppe elever på 5. trinn resonnerer og argumenterer knyttet til arbeid med «endelig antall»-oppgaver. Fokuset ligger på deres muntlige svar på oppgavene som ble gitt, og deres samarbeid for å resonnere seg fram til svarene på disse oppgavene. Videre har jeg sett på hvordan elevenes argumentasjon utvikler seg fra en deloppgave, til en annen. Jeg har benyttet en kvalitativ tilnærming og har gjennomført deltakende observasjon av to grupper med elever, med tre elever i hver. Jeg har transkribert opptakene fra begge gruppene, med varighet på litt over en time hver. Jeg utdyper dette i kapittel 3.3 Datainnsamlingsprosessen. I kapittel 3.4 Metode for analyse går jeg nøyere inn på hvordan jeg gikk fram for å analysere de innsamlede dataene. Til slutt i kapittelet kommer jeg inn på studiens troverdighet (kapittel 3.5) og forskningsetikken knyttet til denne studien (kapittel 3.6).

3.1 Kvalitativ forskningsmetode

I denne studien har jeg valgt en kvalitativ tilnærming. I kvalitativ forskning går man i dybden og analyserer et lite materiale (Rienecker et al., 2013, s. 168). Utvalget mitt besto av totalt seks elever, fordelt på to grupper. De viktigste forskningsmetodene knyttet til kvalitativ forskning, er blant annet deltagende observasjon, som jeg har valgt å bruke, i tillegg til kvalitative intervjuer og innsamling og kvalitativ analyse av tekster og dokumenter (Bryman, 2012, s. 383). En grunn til at kvalitative studier kan være spesielt nyttige, er at man som forsker får mulighet til å forstå deltakernes meninger i situasjonen de befinner seg i, og man kan undersøke hvilken påvirkning konteksten de befinner seg i, har på hvordan de handler eller reagerer (Maxwell, 2009, s. 221). Videre gjør forskeren tolkninger av de innsamlede dataenes betydning (Creswell, 2014, s. 4).

I kvalitativ forskning bruker man ord, framfor tall, for å presentere en analyse av samfunnet. Det er deltagernes perspektiver som blir fokuset i studien. Man har mulighet til å bli nært involvert i deltagerne, og på denne måten kan man også forstå deres synspunkt og se deres side av situasjonen (Bryman, 2012, s. 408). I kvalitativ forskning kan man ofte ha en ustrukturert tilnærming, og på denne måten får man muligheten til å ta tak i eventuelle meninger, situasjoner eller uventede handlinger som oppstår under datainnsamlingen (Bryman, 2012, s. 408; Maxwell, 2009, s. 221). I kvalitativ forskning har man ofte et induktivt syn på forholdet mellom empiri og teori (Bryman, 2012, s. 380; Creswell, 2014, s. 4). Her kommer altså teorien ofte som et resultat av forskningen. Man samler inn og analyserer data først, og deretter kategoriserer man og finner ut hvilken teori som passer til dataene (Bryman, 2012, s. 384). Jeg utdyper hvordan jeg har gjort dette, i min studie, i kapittel 3.4 Metode for analyse.

Selv om kvalitativ forskning ofte er godt egnet til mange studier, er det noen ting man bør være oppmerksom på i forskningsprosessen. Ved bruk av en kvalitativ tilnærming kan resultatene bli for subjektive, med tanke på at forskerens syn på hva som er viktig og ikke, påvirker funnene (Bryman, 2012, s. 405). Et annet aspekt ved kvalitativ forskning, det er viktig å være bevisst på, er at det er vanskelig for andre forskere å kopiere en kvalitativ studie hundre prosent. En av grunnene til det, er at man ikke følger noen standardprosedyre under arbeidet. I tillegg vil svarene til deltagerne ofte kunne påvirkes av forskerens egenskaper, som for eksempel personlighet, alder, kjønn og så videre (Bryman, 2012, s. 405). For å gjennomføre en tilnærmet lik studie som en annen har gjort, kan det ofte være fordelaktig å innta en så lik rolle som mulig, som den andre forskeren gjorde. Nettopp på grunn av dette er det viktig å være så transparent og åpen som mulig om analysemetoden, og beskrive hva man ser etter i data, hvordan man går fram i analysen og hvordan man kom fram til svar på forskningsspørsmålet sitt (Bryman, 2012). I kapittel 3.4 Metode for analyse, beskriver og utdyper jeg hvordan jeg har gått fram, hvilke valg jeg har tatt underveis, og hvorfor, og hva jeg har fokusert på i arbeidet med denne studien.

Et tredje aspekt ved kvalitativ forskning, som er viktig å være bevisst på, er at det ofte kan være problematisk å generalisere resultatene fra studien til å også gjelde for en annen gruppe. Deltageres svar på intervjuer i kvalitative studier, er ikke representative for en hel populasjon. Likevel vil man kunne sammenligne resultatene, i kvalitativ forskning, med resultater som er knyttet til grupper som kan sammenlignes med den opprinnelige deltagergruppen. Det vil fortsatt være noe begrenset, men man kan likevel dra sammenligninger og koblinger til lignende grupper (Bryman, 2012, s. 406).

3.1.1 Konstruktivisme

Innen kvalitativ forskning kan forskeren ofte ha et konstruktivistisk perspektiv på kunnskap og virkelighet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113). Dette gjelder også i min studie. Her forsøker forskeren å se et fenomen fra deltagerens perspektiv, og deretter gi mening til det. Nettopp det å observere deltagernes atferd eller væremåte, mens de arbeider med oppgaver eller gjennomfører andre aktiviteter, er et av de viktigste elementene ved denne måten å samle inn data på (Creswell, 2014, s. 19). Dette har jeg gjort i min studie, ved hjelp av deltagende observasjon, hvor elevene arbeidet med «endelig antall»-oppgaver, og innsamling av elevenes skriftlige arbeid. Jeg kommer nærmere inn på dette i kapittel 3.1.2 Deltagende observasjon og 3.3 Datainnsamlings-prosessen. Innen et konstruktivistisk perspektiv ses verden som noe vi mennesker «mer eller mindre konstruerer». Verden er med andre ord ikke objektiv (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 51). Det eneste vi mennesker har mulighet til å si noe om, er «hvordan vi oppfatter fenomenet». Dette betyr at man ikke nødvendigvis ser virkeligheten som den faktisk er, men at vi heller lager oss en representasjon eller egen versjon av virkeligheten (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 49). Hensikten til forskeren er å tolke andres oppfatninger om verden, og gi mening til den (Creswell, 2014, s. 8). Forskere kan likevel oppfatte data ulikt eller vektlegge ulike aspekter ved virkeligheten. Selv om flere mennesker, eller i dette tilfellet forskere, er enige om at resultatene gir en god beskrivelse av virkeligheten, er det fortsatt ingen garanti for at det faktisk stemmer (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 51). Videre vil oppfatningen vår kunne endres, dersom ny kunnskap blir presentert for oss, med tanke på at oppfatningen vår ikke faktisk er virkeligheten (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 49). Videre, i neste delkapittel, skal jeg se nærmere på deltagende observasjon som metode, for innsamling av data til denne studien, og hvordan det førte meg fram til dataene jeg videre har analysert og knyttet opp mot teori, i diskusjonskapittelet.

3.1.2 Deltagende observasjon

For å samle inn data til denne studien, valgte jeg å benytte meg av deltagende observasjon, hvor jeg observerte to grupper med elever. Jeg observerte dem under arbeidet deres med oppgaver (se kapittel 3.2 Oppgavene som ble gitt til elevene), samtidig som jeg stilte dem spørsmål underveis. Spørsmålene kunne potensielt få elevene til å resonnere videre eller argumentere for svarene sine (se vedlegg 3: Intervjuguide). Under deltagende observasjon, lytter observatøren til det som sies i samtaler mellom deltagerne, i dette tilfellet elevene, og med feltarbeideren, i dette tilfellet meg. Observatøren observerer i tillegg atferd og stiller spørsmål til deltagerne. Han eller hun kan også samle inn skriftlig arbeid, for ytterligere informasjon og data (Bryman, 2012, s. 432). Knyttet til observasjon finnes det ulike observatørroller, som kan defineres ut fra i hvilken grad forskeren er en del av det som observeres eller tar avstand til det som observeres (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 115-117). Under observasjonen av elevene, tok jeg på meg en aktiv-medlemskapsrolle, som ifølge Adler og Adler (1994) går ut på at man som observatør tar del i oppgavene som gjennomføres av deltagerne. Gjennom denne observatørrollen kan forskeren også komme med bidrag, som kan utvikle deltakernes arbeid (Adler & Adler, 1994). I denne studiens tilfelle vil det kunne overføres til at jeg som forsker og observatør også stilte oppfølgingsspørsmål til elevene, slik at de fortsatte resonnementene sine og argumenterte videre, eller mer utfyllende, for påstander de kom med. Under observasjonen, tok jeg video- og lydopptak. I tillegg fikk elevene mulighet til å notere og tegne på egne ark, som jeg samlet inn etter observasjonen var gjennomført. Jeg utdyper dette i kapittel 3.3 Datainnsamlings-prosessen.

Elevene fikk i alt seks deloppgaver de skulle arbeide med, både individuelt og i fellesskap med de andre på gruppa. Fokuset lå på samarbeidet og hvordan de resonnerte seg fram til, og argumenterte for, svarene på de ulike oppgavene, i fellesskap. De seks oppgavene elevene fikk, kan deles inn i to hovedoppgaver, hvor de tre deloppgavene er av samme type. De bygger på hverandre, men vanskelighetsgraden blir høyere for hver enkelt deloppgave. Likevel er de såpass lik i oppbyggingen, at det forventes at elevene bruker kunnskapen de har opparbeidet seg fra de tidligere oppgavene, i neste oppgave.

3.1.3 Utvalg

I forkant av mitt valg av deltagere til denne studien, tenkte jeg det ville være interessant å samle inn data på mellomtrinnet. Jeg valgte dermed å gjennomføre innsamlings-prosessen på 5. trinn, på en skole jeg allerede hadde kjennskap til. Jeg har vært i praksis på dette trinnet tidligere, og jeg hadde derfor kjennskap til skolen, lærerne på dette trinnet og elevene, fra tidligere. Hele trinnet, bestående av omtrent 70 elever, fikk med seg informasjonsskriv og samtykkeerklæring hjem (fysiske ark), slik at foreldre og foresatte ble informert om hva studien min ville gå ut på og hvilke rettigheter elevene og de foresatte hadde om de valgte å takke ja til å bli med i prosjektet. Samtykke-erklæringen inneholdt spørsmål om de samtykket til at elevene kunne delta på studien, om det kunne tas video- og lydopptak av dem under innsamlingen, i tillegg til om jeg kunne samle inn skriftlig elevarbeid, som en del av prosjektet (se vedlegg 1). Da det hadde gått to uker siden informasjonsskrivet og samtykkeerklæringen ble sendt ut, hadde jeg fått tilbake mellom 30 og 40 samtykkeerklæringer, med underskrifter. Videre la jeg disse fram for elevenes faste matematikklærer, og sammen med han laget vi grupper på tre og tre elever, som vi så for oss kunne samarbeide godt og vise interesse for oppgavene, som skulle arbeides med. Til slutt endte jeg opp med to grupper, med tre elever i hver. Gruppe 1 besto av én gutt og to jenter, fra samme elevgruppe på trinnet. Gruppe 2 besto av tre gutter, fra samme elevgruppe. Siden hver av de tre og tre elevene gikk i samme klasse til vanlig, tenkte jeg det ville være en god mulighet for at de kjente hverandre godt og at de hadde samarbeidet faglig tidligere, noe jeg tenkte kunne være gunstig for denne innsamlingen.

Denne måten å gjøre et utvalg på, går under kategorien ikke-sannsynlighetsutvalg, som er et overordnet begrep knyttet til utvalg, som ikke er gjort med bakgrunn i sannsynlighet eller tilfeldig utvalg (Bryman, 2012, s. 201). Mer spesifikt har jeg gjennomført et bekvemmelighetsutvalg, som er en av flere typer ikke-sannsynlighets-utvalg (Bryman, 2012, s. 201). Under et bekvemmelighetsutvalg baseres utvalget på hva eller hvem som er tilgjengelig for forskeren. En negativ side ved denne typen utvalg er at resultatene ikke kan generaliseres og overføres til en hel populasjon. Likevel kan denne måten å gjøre utvalg på, føre til at man kan koble resultatene til allerede eksisterende funn, i tillegg til å kunne være et utgangpunkt for videre forskning innen feltet (Bryman, 2012, s. 201-202). Videre, i neste delkapittel, vil jeg presentere oppgavene elevene arbeidet med under innsamlingen av data til denne studien.

3.2 Oppgavene som ble gitt til elevene

Under innsamlingen av data til denne studien, fikk elevene utdelt hamsteroppgaven og kuleis-oppgaven. Jeg fikk inspirasjon fra veiledere, og oppgaver de hadde prøvd med elever tidligere, og så at disse to oppgavene kunne være relevante for å bidra til finne svar på problemstillingen min. Jeg tok utgangspunkt i disse oppgavene, men utviklet deloppgave 2 og 3, i hver av de to hovedoppgavene, selv. Disse bygger videre på, og er en utvidelse av deloppgave 1, slik at vanskelighetsgraden blir noe høyere, og det ble lagt opp til at elevene kunne begynne å generalisere. Disse oppgavene kan betegnes som «endelig antall»-oppgaver, med tanke på at det finnes flere, men et endelig antall løsninger på oppgavene (Stylianides, 2016).

Del 1 av hamsteroppgaven ble presentert, som vist i figur 3.1. Oppgaven ble gitt på et A4-ark, med plass til å notere og tegne under oppgaveteksten (se vedlegg 4: Oppgavene som ble gitt til elevene).

Oppgave 1

Hamsteroppgaven

I en dyrebutikk har de 8 hamstere og 2 bur å ha dem i.

På hvor mange forskjellige måter kan de 8 hamstrene være fordelt i de 2 burene?
Forklar hvorfor dere er sikre på det.

Figur 3.1: Oppgaveark 1 – hamsteroppgaven

Jeg la ved bilder til oppgaveteksten for å gjøre oppgaven mer visuell for elevene. Dette bidro til at elevene hadde noe konkret å knytte oppgaveteksten til, og det kunne være et hjelpemiddel underveis i resonneringen deres. Jeg valgte bevisst å bruke bilder av to ulike bur fordi jeg tenkte dette kunne bidra til at elevene ville komme fram til flere løsninger, med tanke på at det ville være forskjell på om det var 3 hamstere i det ene og 5 i det andre buret, eller omvendt.

Oppgaveteksten til del 2 av hamsteroppgaven, var som følgende: «Dyrebutikken får inn 6 hamstere til, slik at det nå er 14 hamstere til sammen. Butikken har fortsatt bare 2 bur å ha dem i. På hvor mange forskjellige måter kan de 14 hamstrene være fordelt i de 2 burene? Forklar hvorfor dere er sikre på det.» Her hadde jeg også med bilde av de to samme burene, som i deloppgave 1, og i tillegg var det bilde av 14 hamstere utenfor burene. Burene og hamstrene var altså kjent for dem fra før, og det ble på denne måten tydeligere at oppgavene hadde en sammenheng.

Del 3 av hamsteroppgaven gikk som følgende: «Det viser seg at det har blitt gjort en feil under en levering til dyrebutikken, slik at butikken plutselig mottar 16 hamstere til. Nå er det totalt 30 hamstere i butikken og fortsatt kun 2 bur. Fram til hamstrene kan leveres tilbake og sendes til riktig butikk, må de plasseres i de 2 burene i butikken. På hvor mange forskjellige måter kan de 30 hamstrene fordeles i de 2 burene? Forklar hvorfor dere er sikre på det.» Her hadde jeg kun med bilde av de samme to burene, som i deloppgave 1 og 2, men ingen bilder av hamstere. Ordlyden i oppgaveteksten og bildene av de samme burene, viste elevene at det fortsatt var en sammenheng mellom deloppgavene, men i denne oppgaven fikk de ikke hjelp av bildene av antall hamstere.

Dette kunne være en faktor for at elevene ble påvirket til å tenke litt annerledes og muligens gå over til en form for generalisering, hvis de ikke allerede hadde gjort det i de forrige deloppgavene.

Del 1 av kuleisoppgaven ble presentert, som vist i figur 3.2. Oppgaven ble gitt på et A4-ark, med plass til å notere og tegne under oppgaveteksten, slik som på hamsteroppgavene. (se vedlegg 4: Oppgavene som ble gitt til elevene).

Oppgave 2

Kuleisoppgaven

5. trinn er på skoletur i byen. Der ser de en is-bod, som selger kuleis med ulike smaker.
De ulike smakene er sjokolade, jordbær, vanilje og oreo.

Elevene får velge seg 2 kuler hver.
Hvor mange ulike kuleis, med 2 kuler i, kan de lage ved hjelp av disse 4 smakene?

Forklar hvorfor dere er sikre på det.

Figur 3.2: Oppgaveark 2 – kuleisoppgaven

Årsaken til at kuleisen i kjeksen var uten farger, var at elevene kunne bruke denne som en slags mal, hvor de kunne legge til ulike smaker. I likhet med i hamsteroppgaven, var dette for å gjøre det mer visuelt for elevene, slik at de hadde noe konkret å knytte oppgaveteksten til. Jeg valgte bevisst å velge smaker med ulike forbokstaver, slik at det ville være enklere for elevene å bruke bokstaver i stedet for hele navnet eller fargene på isen, hvis de ville ramse dem opp eller sette opp ulike kombinasjoner. Jeg nevnte ikke dette for elevene under arbeidet med oppgavene.

Oppgaveteksten til del 2 av kuleisoppgaven, var som følgende: «Det viser seg at mannen som jobber i is-boden finner 3 nye smaker på bakrommet: karamell, friskis og pistasj. Til sammen er det nå altså 7 forskjellige smaker å velge mellom. Elevene kan fortsatt velge seg 2 kuler hver. Hvor mange ulike kuleis, med 2 kuler i, kan de lage ved hjelp av disse 7 smakene? Forklar hvorfor dere er sikre på det.» Her brukte jeg de samme bildene som i deloppgave 1, i tillegg til bilder av de 3 nye smakene. Kulene med is og kuleisen i kjeks var altså kjent for dem fra før, og det ble på denne måten tydeligere at oppgavene hadde en sammenheng.

Del 3 av kuleisoppgaven gikk som følgende: «Da jeg var i USA besøkte jeg en is-butikk, som hadde 20 ulike smaker! Jeg fikk velge meg 2 kuler med is. Hvor mange ulike kuleis, med 2 kuler i, kunne jeg laget ved hjelp av disse 20 smakene? Forklar hvorfor dere er sikre på det.» Her hadde jeg kun med bilde av kuleisen i kjeks uten farger, og ikke kulene med ulike smaker. Ordlyden i oppgaveteksten og bildet av den samme kuleisen i kjeks, viste fortsatt at det var en sammenheng mellom deloppgavene, men i denne oppgaven fikk de ikke hjelp av bildene av antall smaker. Dette kunne være, i likhet med i hamsteroppgaven, en faktor for at elevene ble påvirket til å tenke litt annerledes og muligens gå over til en form for generalisering, hvis de ikke allerede hadde gjort det i de forrige deloppgavene.

3.3 Datainnsamlingsprosessen

Gjennomføringen av selve datainnsamlingen ble gjort i løpet av én skoledag. Hver gruppe brukte mellom 1 og 1,5 time på hele gjennomføringen. Under gjennomføringen satt jeg og 3 elever rundt et bord på et grupperom, med kamera og lydopptaker, som tok opptak av oss.

3.3.1 Forarbeid

Det først jeg gjorde var å utarbeide et foreløpig forskningsspørsmål. Jeg bestemte meg for at fokuset i studien skulle ligge på elevers arbeid med resonnering og argumentasjon, knyttet til oppgaver med flere, men et endelig antall løsninger. Dermed forsøkte jeg å finne oppgaver, som kunne passe til dette formålet. Etter jeg hadde valgt hvilke oppgaver jeg ville ta utgangspunkt i, utarbeidet jeg disse, slik at de ville passe til å svare på forskningsspørsmålet mitt. Videre skrev jeg ned deloppgavene på ett A4-ark hver og la inn tilhørende bilder. På denne måten ville elevene kunne konsentrere seg om en og en deloppgave av gangen. Videre ville de kunne bruke informasjonen og måten de arbeidet med de forrige deloppgavene, til å løse de neste.

Jeg skrev også ned oppgavetekstene og notater til meg selv, på et eget ark, som jeg tok med meg under gjennomføringen av innsamlingen. Her hadde jeg blant annet eksempler på spørsmål jeg kunne stille elevene underveis, og ting jeg burde huske å fortelle eller poengtere for elevene underveis. På denne måten kunne jeg i større grad sikre meg at jeg fikk mest mulig og relevant informasjon ut av observasjonen.

3.3.2 Innsamling

Før elevene kom, satt jeg opp kamera og lydopptaker, slik at alt skulle være klart. Jeg hadde oppgavearkene i en bunke hos meg, slik at elevene ikke kunne se hva som sto på dem, og delte de først ut etter hvert som vi arbeidet med de ulike oppgavene. Blanke ark lå midt på bordet, slik at elevene hadde tilgang til dem og kunne skrive og tegne på disse underveis i arbeidet med oppgavene. I tillegg var det plass nederst på oppgavearkene, til å skrive og tegne. De fikk en blyant hver, i tillegg til et viskelær.

Jeg informerte om at vi skulle arbeide med matematikkoppgaver, og at det viktigste var at de skulle prøve å samarbeide, for å komme fram til svarene. Jeg informerte ikke på forhånd om hvor mange oppgaver de skulle arbeide med. Jeg tok for meg en og en deloppgave av gangen. Elevene fikk beskjed om at det ikke var det de skrev som var det viktigste, men det de sa muntlig. Arkene var bare til hjelp for dem i prosessen med å finne svaret. Likevel oppmuntret jeg dem til å bruke arket for å få ut tankene, og bruke dem i selve prosessen med å regne ut. Jeg sa også i fra om at fokuset under arbeidet med oppgavene, var samarbeid. Elevene skulle ikke være redde for å svare feil. Det var viktigere for meg at de sa det de tenkte, enn at de tenkte på at det nødvendigvis måtte være rett.

Elevene fikk utdelt ark med den første oppgaveteksten og tilhørende bilder. Jeg leste oppgaveteksten høyt for dem, samtidig som de hadde det skriftlig foran seg. Etter oppgaven ble presentert for elevene, fikk de mulighet til å tenke og resonnere individuelt først. Etter elevene hadde tenkt og notert individuelt, ble de bedt om å dele det de hadde kommet fram til eller tenkt på, med de andre elevene. Videre stilte jeg spørsmål underveis, som for eksempel «Hva tenker du om det svaret han kom med?», «Hvordan kom du fram til det svaret?» eller «Hvordan tenkte du da?» (se vedlegg 3). Jeg bekreftet aldri om svarene deres var rette eller gale. Jeg forsøkte kun å stille spørsmål tilbake, slik at de kunne resonnere seg fram til det selv. Når elevene kom fram til et svar de alle var enige om og hadde forklart hvordan de hadde tenkt for å komme fram til svarene, delte jeg ut neste oppgave på ark til dem og leste den opp for dem. Denne prosessen gjentok jeg for alle de seks deloppgavene. Etter vi hadde jobbet oss gjennom de tre deloppgavene til hamsteroppgaven, presiserte jeg at vi gikk over på en annen oppgave. Likevel skulle vi fortsette å arbeide på samme måte, med fokus på den verbale kommunikasjonen og samarbeid, for å resonnere seg fram til svar på oppgavene.

3.3.3 Etterarbeid

Etter jeg hadde gjennomført observasjonene, overførte jeg videoene og lydopptakene til en kryptert mappe på et passordbeskyttet område. Jeg slettet deretter alle opptak fra kamera og lydopptaker. Da jeg begynte å transkribere, bestemte jeg meg for nye egenvalgte navn på elevene, slik at de ikke skulle kunne kjennes igjen i transkripsjonen min. Jeg transkriberte begge de to gruppenes lydopptak. Deretter, der det var usikkert hva elevene pekte på, viste med hendene eller hvem som så på hva, sjekket jeg med videoene, og la dette inn som beskrivelser i transkripsjonene. Under transkripsjonen benyttet jeg visse tegn, som vist under, for å gjøre transkripsjonen så presis som nødvendig for å samle den informasjonen som er relevant for denne studien.

(Tekst i parentes)	Informasjon om situasjonen/ikke verbal handling
[…]	Hopper over situasjoner som ikke er relevant for studien
…	Pause på mellom 1-10 sekunder
F.eks. jaa..	Trekker/drar litt på ordene (like bokstaver etterfulgt av «..»)

Etter jeg hadde transkribert alt av materiale, begynte jeg å analysere transkripsjonen og se etter uttalelser og svar som kunne være interessante for studien. Dette utdyper jeg under kapittel 3.4 Metode for analyse.

3.4 Metode for analyse

I arbeidet med analysen av innsamlet data, valgte jeg en induktiv tilnærming. Jeg har altså «gått fra empiri til teori», og derfor startet med å samle inn relevant data, systematisert denne og videre knyttet dette opp mot teori (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 101). Selv om det i stor grad er umulig å ikke bli påvirket av det man allerede vet om temaet, og derfor ikke er helt upåvirket av teori, vil det være viktig for en induktiv forsker å se på data med et åpent sinn (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 101). Etter å ha samlet inn data og transkribert video- og lydopptakene, laget jeg meg noen foreløpige kategorier, som jeg tok utgangspunkt i da jeg begynte å analysere dataene. Jeg ga hver kategori en fargekode, og farget deretter alle utdrag i transkripsjonene, som gikk under disse kategoriene (figur 3.3).

- Elevene ramser opp løsningene systematisk eller usystematisk.
- Elevene føyer seg etter medelever. «Høres riktig ut». «Alle kom fram til samme svar». Elevene bruker dette som argument for at svaret er rett.
- Elevene refererer til tidligere oppgaver. «Svaret er slik fordi vi gjorde det samme på forrige oppgave».
- Elevene referer til tidligere oppgaver, i tillegg til å bruke oppgaveteksten til hjelp under argumentasjonen. «Svaret er slik fordi vi gjorde det samme på forrige oppgave», i tillegg til argumentasjon for at det stemmer, basert på oppgaveteksten.
- Elevene lager en regel eller form for generalisering.

Figur 3.3: Kategorier med tilhørende fargekoder

Videre så jeg på hvilke uttalelser i transkripsjonene som var interessante, med tanke på å finne svar på forskningsspørsmålene mine «Hvordan resonnerer elever på 5. trinn i arbeid med «endelig antall»-oppgaver og hvordan argumenterer de for at svarene er riktige?» og «Hvordan utvikler argumentene til elevene seg fra en deloppgave til en annen?». Det jeg lette etter i dataene var alle framgangsmåter, resonnementer og hvordan elevene argumenterte for svarene sine. Etter jeg hadde gjort dette, sorterte og endret jeg kategoriene noe, med et mål om å gjøre dem mer tydelige og oversiktlige. De nye, og endelige, kategoriene ble «oppramsing», «uttrykker en sammenheng mellom tallene i oppgaven», «refererer til tidligere deloppgaver» og «begynnende generalisering». Videre delte jeg hovedkategoriene inn i to underkategorier hver (se tabell 3.1).

Oppramsing	Systematisk	
	Usystematisk	
Uttrykker en sammenheng mellom tallene i oppgaven	Implisitt • Uttrykker at det er en sammenheng mellom tallene i oppgaven, men sier det ikke eksplisitt	
	Eksplisitt • Utrykker det generelt, som for eksempel «det blir én mer enn antall hamstere» • Uttrykker det med konkrete tall, som for eksempel «det ble 9, én mer enn 8»	
Referer til tidligere deloppgave	Implisitt • Bruker samme framgangsmåte, men sier det ikke eksplisitt	
	Eksplisitt • Bruker et argument som for eksempel «Det funket på forrige, så da funker det nå og»	
Begynnende generalisering	Bruker tallene i oppgaven til å argumentere for en generell situasjon	
	Argumenterer ved hjelp av et generelt språk	

Tabell 3.1: Kategorier til analyse av datamateriale

Disse kategoriene, og funnene i data knyttet til dem, koblet jeg videre opp mot rammeverket for resonnering og bevis, som jeg presenterte i kapittel 2.4. Dette gjør jeg både når jeg beskriver utdragene i analysen og i diskusjonskapittelet (se kapittel 4. Analyse og kapittel 5. Diskusjon). For å svare på mitt andre forskningsspørsmål, forsøkte jeg å lage en oversikt over hvordan argumentene knyttet til en og en hovedoppgave, utviklet seg mellom deloppgavene. Jeg gikk dermed gjennom alle funnene på nytt og noterte hvordan de argumentere for svarene sine på de ulike oppgavene. Jeg så på de to gruppene hver for seg. Her laget jeg meg en tabelloversikt (se tabell 3.2), og fylte ut med beskrivelser på hvordan elevene argumenterte på hver deloppgave, og jeg så dermed hvordan argumentene deres utviklet seg, fra deloppgave 1 til 3. (Se ferdig utfylt tabell under kapittel 4.5 Overganger mellom deloppgavene).

	Del 1	Del 2	Del 3
Hamsteroppgave Gruppe 1			
Hamsteroppgave Gruppe 2			
Kuleisoppgave Gruppe 1			
Kuleisoppgave Gruppe 2			

Tabell 3.2: Mal for oversikt over overganger mellom de ulike deloppgavene

Denne måten å analysere datamateriale på, kan knyttes til tematisk analyse. Der fokuserer forskeren på innholdet i de innsamlede dataene, altså det som er skrevet eller sagt (Riessman, 2008). Tematisk analyse brukes for å «identifisere, analysere og se etter mønstre eller temaer i data» (Braun & Clarke, 2006, s. 79). Braun og Clarke (2006) presenterer en tabell med oversikt over de 6 fasene i en tematisk analyse-prosess, og beskrivelser av disse (se min oversettelse i tabell 3.3). Som Braun og Clarke (2006) poengterer, er analyseprosessen en prosess hvor man beveger seg fram og tilbake mellom fasene, heller enn at det er en helt lineær prosess.

Faser i tematisk analyse	
Fase	**Beskrivelse av prosessen**
1. Gjøre seg kjent med datamaterialet	Transkribere data, lese gjennom data flere ganger, notere ideer fortløpende.
2. Generere koder	Kode interessante trekk i datamaterialet på en systematisk måte. Samle data som er relevant for hver kode.
3. Lete etter kategorier (eng.: themes)	Sortere kodene i potensielle kategorier, samle all data som er relevant til hver kategori.
4. Revurderer kategoriene	Undersøke om kategoriene passer i relasjon til de kodede utdragene og til hele datasettet. Generere et kategorisert kart over analysen.
5. Definere og navngi kategoriene	Pågående analyse for å avgrense detaljene i hver kategori, og generere klare definisjoner og navn for hver kategori.
6. Skrive en rapport	Lage en vitenskapelig rapport av analysen, med utvalg av eksempler fra datamaterialet, som viser en sammenheng knyttet til forskningsspørsmål og teori.

Tabell 3.3: Faser i tematisk analyse (Braun & Clarke, 2006)

I likhet med stegene i den tematiske analyseprosessen, samlet jeg også først inn data og gjorde meg kjent med den gjennom transkripsjon og gjennomlesing. Videre lagde jeg meg foreløpige koder og kategorier, som jeg kategoriserte dataene inn i, som vist tidligere. Deretter forsøkte jeg å definere kategoriene mer tydelig, og gi endelige navn på dem (se tabell 3.1). Til slutt bruker jeg kategoriseringene og funnene i analysen, og knytter dette opp mot teori og forskningsspørsmålene mine, i diskusjonskapittelet.

3.5 Studiens troverdighet

I en studies troverdighet, inngår kriteriene validitet (gyldighet) og reliabilitet (pålitelighet) (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 223). Reliabilitet og validitet er begreper knyttet til kvaliteten innenfor kvantitativ forskning. Likevel kan de overføres til å gjelde kvalitativ forskning også, men med noe endring av betydningen av begrepene. Postholm og Jacobsen (2018) bruker begrepet gyldighet framfor validitet. Indre gyldighet går på om det forskeren har samlet inn samsvarer med de teoretiske ideene som utvikles (LeCompte & Goetz, 1982). Dette baseres blant annet på om man gjennom datainnsamlingsprosessen faktisk har målt det man har til hensikt å måle (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222). I min studie har jeg forsøkt å fokusere på å «måle» eller undersøke og diskutere det jeg faktisk har hatt til hensikt å undersøke, som er forsøket på å svare på forskningsspørsmålene mine.

Ytre validitet kan også kalles overførbarhet, og det dreier seg om i hvilken grad det er mulig å overføre resultatene fra studien til andre kontekster (LeCompte & Goetz, 1982; Postholm & Jacobsen, 2018). I dette tilfellet kan det være et spørsmål om resultatene kan overføres til å gjelde andre elevgrupper eller skoler i landet. Med tanke på at jeg har forsøkt å være så transparent som mulig når det kommer til metodene jeg har brukt og hvordan jeg har lagt fram forskningsprosessen min i denne oppgaven, tenker jeg at det vil være mulig å overføre resultatene til andre elever i samme aldersgruppe andre steder i landet. Denne tanken forsterkes av at tidligere forskning underbygger flere av resultatene i min studie. Dette utdyper jeg i kapittel 5. Diskusjon.

Reliabilitet kan i kvalitativ forskning oversettes til pålitelighet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 224). Pålitelighet kan knyttes til «refleksjon over hvordan undersøkelsen og forskeren kan ha påvirket resultatet». For at dette skal innfris, er det viktig at forskeren reflekterer over hvordan han eller hun kan ha påvirket resultatene, og at forskeren presenterer forskningsprosessen slik at det er mulig for andre å reflektere rundt den (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 224). I kapittel 5.2 Metodekritikk, tar jeg opp svakheter ved studien min og knytter det til svakheter ved kvalitativ forskning generelt. Her viser jeg altså til hvordan jeg som forsker kan ha påvirket deltakerne direkte eller indirekte, og hva dette kan ha å si for resultatene i denne studien. Videre har jeg, som nevnt tidligere, presentert hele forskningsprosessen min, og forsøkt å være så transparent som mulig med alle vurderinger og valg jeg har tatt underveis.

3.6 Forskningsetikk

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) viser til at forskere skal «innhente et forskningsetisk samtykke til deltagelse i forskning». Videre skal dette samtykket være «frivillig og det bør være dokumenterbart». Forskeren skal også ha gitt «tilstrekkelig og forståelig informasjon om hva det innebærer å delta i forskning» (NESH, 2021). Alle rettighetene til deltakerne og informasjon til deltakerne i denne studien, ble sendt ut i form av et skriftlig informasjonsskriv og en samtykke-erklæring (vedlegg 1). Informasjonsskriv og samtykkeerklæring ble sendt med elevene hjem fra skolen, for å få underskrift fra foresatte. Kun elever med godkjennelse fra foresatte, ble vurdert til å være med i prosjektet. NESH (2021) poengterer også at «barn som deltar i forskning, har særlig krav på beskyttelse. Forskere må som hovedregel innhente samtykke både fra foresatte og fra barn selv». De elevene som hadde fått skriftlig godkjennelse fra foreldrene, ble spurt muntlig av meg om de kunne tenke seg å være med. Kun elever med godkjennelse fra foresatte og som samtykket muntlig selv, ble vurdert til å være med.

Jeg sendte søknad til NSD (Norsk senter for forskningsdata) for å få godkjennelse (vedlegg 2) til å gjennomføre denne studien. Med tanke på at jeg i studien behandler personopplysninger, som navn, i tillegg til bilder og lyd av elevene gjennom video- og lydopptak. Deltakerne i denne studien er lovet anonymitet, og det er dermed et løfte om at ingen av elevene i studien eller skolen de går på skal identifiseres i denne studien (NESH, 2021). Jeg har også vært nøye på at materiale hvor elevene kan bli gjenkjent (video- og lydopptak) er lagret på et forsvarlig og passordbeskyttet område, som kun jeg har tilgang til. Innsamlet materiale vil bli slettet når arbeidet med denne studien er avsluttet.

4. Analyse

I denne studien skal jeg forsøke å besvare forskningsspørsmålene «Hvordan resonnerer elever på 5. trinn i arbeid med «endelig antall»-oppgaver og hvordan argumenterer de for at svarene er riktige?» og «Hvordan utvikler argumentene til elevene seg fra en deloppgave til en annen?». I prosessen for å kunne svare på dette, har jeg analysert den transkriberte dataen, som forklart i kapittel 3.4 Metode for analyse. I dette kapittelet presenterer jeg utdrag fra datamaterialet jeg har analysert, og kategoriserer dem i kategoriene som ble presentert i kapittel 3.4. Angående første forskningsspørsmål, har jeg gjennom analysen, kommet fram til fire ulike måter elevene argumenterer på, for å vise at svarene deres er riktige. Disse er: oppramsing, uttrykker en sammenheng mellom tallene i oppgaven, refererer til tidligere deloppgaver og begynnende generalisering. I kapittel 4.1 til 4.4 skal jeg presentere utdrag av data og min analyse, som henholdsvis svarer til hver av dem. Når det kommer til det andre forskningsspørsmålet mitt, har jeg identifisert ulike måter elevene utvikler argumentene sine fra en deloppgave til en annen på. I kapittel 4.5 Overganger mellom deloppgavene, presenterer jeg en oversikt over hvordan elevenes argumenter utvikler seg fra en deloppgave til en annen.

Gruppe 1 består av Ebba, Julie og Birk. Gruppe 2 består av Ola, Oskar og Vetle. Underveis i arbeidet kom elevene fram til noen premisser som ble lagt til grunn under oppgaveløsingen. På hamsteroppgaven oppsto det en diskusjon på gruppe 2 om det måtte være hamstere i begge burene til enhver tid eller om ett av burene kunne være tomme. Gruppe 2 kom med løsninger både for om det var hamstere i begge burene til enhver tid og om det ikke trengte å være det. Dette gjorde de på alle de tre deloppgavene. Gruppe 1 hadde ikke denne diskusjonen, og kom kun med løsninger, hvor det ikke nødvendigvis måtte være hamstere i begge burene til enhver tid. På kuleisoppgaven oppsto det en diskusjon på begge grupper rundt om plasseringen av kulene og de ulike smakene hadde noe å si, altså om sjokolade og jordbær er det samme som jordbær og sjokolade. Elevene kom fram til at plasseringen hadde noe å si, og at sjokolade og jordbær dermed er ulikt fra jordbær og sjokolade.

4.1 Oppramsing

4.1.1 Usystematisk

På deloppgave 1, på både hamster- og kuleisoppgaven, på begge grupper, benyttet elevene seg av oppramsing, for å finne alle løsningene.

0	8
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2
7	1
8	0

Det er noen likheter mellom gruppene når det kommer til del 1 av hamster-oppgaven. På hamsteroppgaven, som de fikk tildelt først, forsto de ganske fort at de kunne finne flere mulige løsninger, ikke kun for eksempel løsningen med 4 hamstere i hvert bur, som flere av de kom opp med først. De startet med ett forslag til hvor mange hamstere som kunne være i hvert bur, deretter begynte de å ramse opp flere løsninger. Flere av elevene skrev opp flere løsninger noe tilfeldig først, men deretter begynte de å se et mønster, og ramset videre opp mer systematisk. Deretter begynte de å se at de kunne følge et mønster med én opp og én ned, slik som vist her på høyre side. I den ene kolonnen øker det med én for hver rad, og på den andre minker det med én for hver rad. Videre herfra ramset gruppe 1 opp systematisk, på hamsteroppgaven (på alle de tre deloppgavene), mens gruppe 2 ramset opp noe usystematisk på del 2 også. Elevene på begge gruppene så også at de kunne snu om på en løsning, og få en løsning til, slik at de kunne arbeide med en form for dobling av de løsningene de fant. For eksempel så de at 1 og 7, og 7 og 1 kunne være to ulike løsninger. Det var kun på deloppgave 1 at gruppe 1 ramset opp usystematisk. Gruppe 2 ramset opp usystematisk på del 2 også. Noe som gikk igjen de gangene elevene brukte former for usystematisk oppramsing, var at de oftere kom fram til feil svar.

Det er også noen likheter mellom gruppene når det kommer til del 1 av kuleisoppgaven. Her hadde elevene mer fokus på at de ville finne et regnestykke som kunne gi dem svaret på antall mulige løsninger. Det var likevel kun gruppe 1 som fikk til dette på del 1, gruppe 2 gjorde det først på del 2 av oppgaven. Elevene på gruppe 2 benyttet seg både av usystematisk og systematisk oppramsing på del 1. Hos gruppe 2 ser man hint av usystematisk oppramsing også på del 2 av oppgaven, noe som ikke gjelder gruppe 1.

På del 1 av kuleisoppgaven ramset Oskar opp noen kombinasjoner ved hjelp av forbokstavene, som vist her:

S	J	O	V	J	O	O	J
J	S	V	O	O	J	S	V

10.	Oskar:	Åh, jeg gidder ikke. Det er altfor mange.
11.	Student:	Okay, hvor mange har du nå da, Oskar?
12.	Oskar:	Jeg vet at det er mye, men akkurat nå har jeg sånn 1, 2, 3, 4, 5.. (Peker på kombinasjonene han har tegnet opp på oppgavearket)
13.	Student:	Så du begynte å tegne opp ulike måter.
14.	Oskar:	Ja, og så skrev jeg sånn o liksom for oreo, og så v for vanilje, s for sjokolade og j for jordbær.
15.	Student:	Okay, så du begynte å tegne opp ulike kombinasjoner, men du sier at det er mange flere?
16.	Oskar:	Ja.

Oskar begynte å skrive opp forbokstavene noe systematisk, men etter hvert gikk det over til å bli mer usystematisk og så stoppet han å skrive opp. Ut ifra hva han sa under arbeidet, virket det som at han syns det ble for mange kombinasjoner å skrive opp, også med tanke på at han stoppet å skrive, etter han hadde skrevet ned 8 kombinasjoner.

Ingen av de andre elevene skrev ned noe på kuleis-oppgavene, men ramset kun opp muntlig i stedet. Her viste det seg at det var fort gjort å dette ut av tellingen eller hoppe over noen kombinasjoner, når de ramset opp muntlig og ikke konsekvent ramset opp systematisk. Gruppe 2, med Ola, Oskar og Vetle, ramset i større grad opp på kuleis-oppgaven, enn det gruppe 1 gjorde. Gruppe 1 hadde mer fokus på et regnestykke, helt fra starten. Jeg kommer tilbake med eksempler på dette under kapittel 4.2.2.

4.1.2 Systematisk

Selv om flere av elevene, særlig etter hvert, kom fram til måter å finne antall løsninger på uten å systematisk ramse opp alle, ville flere av elevene fortsatt ramse opp alle mulige løsninger, for å sjekke om det faktisk stemte. Dette gjaldt likevel kun på hamsteroppgaven. Spesielt Ebba på gruppe 1 gjorde det på alle de tre hamster-deloppgavene. Også elever på gruppe 2, gjorde det på alle de tre deloppgavene.

På del 1 av hamsteroppgaven skrev Ebba opp 5 løsninger. Først skrev hun to løsninger, uten at det så ut som hun hadde noe system på dem (5 + 3, 4 + 4). Deretter skrev hun ned tre løsninger til, og her kan man se en form for systematikk (6 + 2, 7 + 1, 8 + 0). På venstre side av plusstegnet går hun ett og ett tall høyere, og på høyre side går hun ett og ett tall lavere. Hun stilte også spørsmål ved om man bare kunne skrive «omvendt» etter løsningene, og på den måten vise at hamstrene også kunne bytte bur, og at det utgjorde enda flere løsninger. Julie, på samme gruppe, skrev også opp de samme fem løsningene, i samme rekkefølge som Ebba. Hun kommenterte at man bare kan doble dette antallet, og dermed få antall løsninger. Videre spurte jeg elevene om hvordan de kunne vite at de hadde funnet alle løsningene. Det viste seg altså at de mente de hadde funnet alle løsningene da de hadde skrevet dem ned (systematisk).

66.	Student:	Hvordan kan dere vite at dere har funnet alle løsningene?
67.	Ebba:	Når vi har..
68.	Julie:	..skrevet de ned!

På denne oppgaven var to av elevene enige om at man kunne finne løsningen på oppgaven ved å skrive ned alle mulige tilfeller. Videre kom de fram til at svaret var 9, og poengterte videre at de kunne vite at det stemte fordi de hadde prøvd seg fram.

81.	Student:	Okay, 9 løsninger? Så 9 forskjellige måter å fordele dem på?
82.	Julie:	Eeh, ja, tror det.
83.	Student:	Og det vet dere fordi?
84.	Julie:	Fordi vi har prøvd oss fram.

På del 2 av hamsteroppgaven, skrev Julie opp halvparten løsningene systematisk, slik som hun gjorde på del 1. Hun doblet dette og kom fram til 15 som svar. Ebba ramset også opp systematisk, men hun skrev opp absolutt alle løsningene, og benyttet seg ikke av doblingsmetoden, slik Julie gjorde. Begge kommenterte at de fikk veldig mange løsninger. Julie sin oppramsing er vist til venstre og Ebba sin er vist til høyre:

7 7	14 og 0, 0 og 14
8 6	13 og 1, 1 og 13
9 5	12 og 2, 2 og 12
10 4	11 og 3, 3 og 11
11 3	10 og 4, 4 og 10
12 2	9 og 5, 5 og 9
13 1	8 og 6, 6 og 8
14 0	7 og 7

Julie og Ebba skrev også opp alle løsningene på denne måten på del 3 av hamster-oppgaven. Dette gjorde de etter de hadde kommet fram til at svaret enten var 29, 30 eller 31, ved hjelp av ulike metoder, hvor de hadde kommet fram til de ulike svarene. Ett forslag var fra Birk, som mente at svaret var én mer enn antall hamstere i oppgaven, altså 31. Jeg kommer tilbake med et eksempel på dette under kapittel 4.3.2. Både Birk og Julie kom også fram til ulike svar, ved å benytte doblingsmetoden til Julie, fra del 2 av oppgaven, men de var uenige om hvilket tall de måtte doble denne gangen. Etter diskusjon rundt svaret, var de fortsatt ikke helt overbevist om hvilken løsning som var rett og de endte dermed opp med å skrive ned alle løsningene systematisk, på lik måte som de gjorde på del 2 (hver sin måte). Alle kom til slutt fram til at det var 31 løsninger.

Ola på gruppe 2, skrev også opp alle mulige løsninger på del 1 av hamsteroppgaven. Han sa videre at «Det er 0 og 8 på et bur, og så er 1 og 7, så 2 og 6, 3 og 5, 4 og 4, 5 og 3, 6 og 2, 7 og 1, og 8 og 0 igjen». De andre elevene sa seg enige med Ola, og Ola poengterte deretter at «Det er alle måtene det går». Elevene argumenterte ikke mer for det, men det kunne virke som det han mente var at de visste at svaret var slik fordi han hadde skrevet ned alle kombinasjoner med tall fra 0 til 8, systematisk.

Da det kom til del 1 av kuleisoppgaven kom Ola, ved hjelp av å ramse opp alle mulige kombinasjoner, fram til 16 som svar. Han startet med en systematisk oppramsing, hvor han først sa at det kunne være 2 kuler av hver smak, som tilsvarte 4 ulike is-kombinasjoner. Deretter begynte han med sjokolade og kombinerte den med hver av de andre smakene, så gjorde han det samme med jordbær. Videre gikk han over til en mer usystematisk oppramsing og kom litt ut av tellingen, men endte likevel opp med 16 som svar. Dette var altså riktig antall mulige kombinasjoner.

4.2 Uttrykker en sammenheng mellom tallene i oppgaven

4.2.1 Implisitt

På del 2 av kuleisoppgaven begynte gruppe 2 å se på 7 gange 7, som en måte å komme fram til antall kombinasjoner på. De forklarte at hver smak hadde 7 ulike kombinasjoner. Siden det var 7 ulike smaker, ville stykket bli 7 gange 7. Oskar brukte en liknende framgangsmåte som gruppe 1 brukte, da de løste del 1 og 2 av kuleisoppgaven.

154.	Oskar:	Okay, så jeg tok 1, 2, 3, 4, 5, 6, og så ja.. […] 7, hvis du tar jordbær, vanilje, oreo, karamell og sånn der friskis-ting og sånn der […] pistasj. Da blir det sjokolade 7, jordbær 14, eeh sånn der vanilje 21, oreo 28, eeh sånn der karamell 35, eeh friskis 42 og så pistasj 49.
155.	Student:	Okay. Så du tok 7-gangen? Rett og slett.
156.	Ola:	Det er egentlig ganske smart.
157.	Student:	Ja. Så du tok, så du fant ut at «okay».. (avbrutt)
158.	Oskar:	7 forskjellige komboer, og så tok jeg det.
159.	Student:	Så du sjekka først med sjokolade?
160.	Oskar:	Og det er 7 forskjellige her, så da tok jeg bare 7 gange 7.

4.2.2 Eksplisitt

På del 1 av kuleisoppgaven, kom Julie på gruppe 1 fram til et regnestykke, som ga svar på antall ulike is-kombinasjoner. Først kom hun med stykket 4 gange 4, og senere i diskusjonen rundt oppgaven kom hun med forklaringen på hvorfor hun kunne regne det ut på denne måten. Videre argumenterte hun for framgangsmåten ved å knytte det til antall smaker med is. Det var 4 ulike smaker med is, hver smak kunne kombineres med 4 smaker, altså enten to av samme smak (1 kombinasjon), eller to med ulike smaker (3 kombinasjoner). Her så hun altså at hun kunne multiplisere «antall ulike smaker» med «antall ulike smaker» (hun uttrykte det ikke på den måten selv) og få antall ulike kombinasjoner.

43.	Julie:	16 hvis vi teller med at alt er likt. Da blir det 16.
	[…]	
46.	Julie:	Det er 4 gange 4 da. På en måte. Hvis vi sier 4 gange 4.
47.	Student:	[…] Du sier 4 gange 4? (ser på Julie)
48.	Julie:	Ja.
	[…]	
93.	Student:	Okay. Og Julie, du tenkte 4 gange 4?
94.	Birk:	Hvor fikk du det fra?
95.	Ebba:	Du tok bare et regnestykke, sånn at det ble 16?
	[…]	
102.	Julie:	Fordi at vi tar 4 gange 4, fordi vi har 4 smaker.
103.	Student:	Okay?
	[…]	
107.	Julie:	Fordi … jeg tok … jeg tok 4, man har 4 smaker på den, 4 smaker på den, 4 smaker på den, 4 smaker på den (Peker på hver av de 4 ulike smakene med is). Så tok jeg 4, 8, 12, 16.

4.3 Refererer til tidligere deloppgaver

4.3.1 Implisitt

På del 3 av hamsteroppgaven brukte Ola, på gruppe 2, samme framgangsmåte som tidligere, men han uttrykte det ikke eksplisitt. Forskjellen var at på del 1 og 2, så skrev de opp alle løsningene. Også denne gangen forklarte han at det høyeste antall hamstere som kunne være i ett bur, hvis det til enhver tid må være minst én hamster i begge burene, var 29. Da kunne han telle seg fra 1 og opp til 29 for å finne antall mulige løsninger. Han knyttet på en måte antall løsninger til antall hamstere. Han argumenterte for at det ble rett denne gangen også, selv om han også argumenterte for dette på tidligere deloppgaver.

146.	Ola:	Ja, forklaringen er at hvis det må være i begge burene, da er det 29 som er det høyeste. Da teller man fra 1 opp til 29. Det blir 29.
147.	Student:	Hvorfor skal man telle opp til 29?
148.	Ola:	Fordi at da er det 1 i det andre buret og 29. Så da er det uansett 1 i hvert bur.

149.	Student:	Ja, da er det uansett.. Da er det ingen tomme bur.
150.	Ola:	Ja.
	[…]	
160.	Ola:	Det er egentlig ganske enkelt. Man må bare regne ut én gang, så forstår man det.

Ola sin kommentar på linje 160, viser at han mest sannsynlig har sett en sammenheng mellom deloppgavene, og at han mener at når man har regnet ut én gang, så vil det hjelpe til å løse andre oppgaver, med lik oppbygging. Videre diskuterte elevene seg fram til at svaret var 31 ulike løsninger, hvis det ikke trengte å være hamstere i begge burene. Elevene kom raskt med et svar. Det er en mulighet for at de visste fra tidligere at det skulle være 2 mer, hvis man vil ha hamstere i begge burene. De begrunnet det med at de da telte med fra 0 og 30, og så opp til 30 og 0. Dette var samme framgangsmåte som de brukte da de kom fram til 29, som svar på at det skulle være hamstere i begge burene til enhver tid. De forklarte hvorfor det ble slik, denne gangen også.

På del 3 av kuleisoppgaven, kom Vetle raskt med en måte han ville løse oppgaven:

232.	Vetle:	Jeg driver og tenker på 20 gange 20, jeg.
	[…]	
234.	Oskar:	20 gange 20 er 400.
235.	Vetle:	400. (lattermild)
236.	Ola:	400. (lattermild)
237.	Student:	400 ulike typer is?
238.	Ola:	Ja. Det kom vi fram til hvis det ikke er samme.
239.	Student:	Okay. Men hvorfor 20 gange 20?
240.	Ola:	Fordi at, fordi den ene kula har 20 ulike løsninger. Det er 20 kuler, så da blir det 20 gange 20.
241.	Student:	Og hvordan kom du fram til at hver kule har 20 ulike løsninger da?
242.	Oskar:	På grunn av min strategi.
243.	Ola:	På grunn av 1.. (avbrutt)
244.	Student:	Hvilken strategi var det da, Oskar?
245.	Oskar:	[…] Jeg tok sånn 1, nei 1, 2, det er 7 kuler her. Det betyr at den her, den har 1, 2, 3, 4, 5, 6, å ja 7. Så 1 har 7 forskjellige løsninger.

Vetle kom med kommentaren «Jeg driver og tenker på 20 gange 20, jeg» med en gang del 3 av kuleisoppgaven ble lest opp. Alle så ut til å være enige om framgangsmåten med en gang. Her hadde de fokus på framgangsmåte og ikke like mye på selve svaret. Videre argumenterte han med lik framgangsmåte som tidligere. Hver kule hadde 20 mulige kombinasjoner eller løsninger. Og siden det var 20 ulike kuler, ville det bli 20 gange 20. Han argumenterte altså for at de samme premissene som på deloppgave 2, fortsatt lå til grunn, og han kunne derfor bruke samme framgangsmåte. Oskar viste til forrige oppgave, hvor de begrunnet at de kunne bruke 7 gange 7, og viste at det samme gjaldt denne gangen også. Han sa det dog ikke eksplisitt, men det kom likevel tydelig fram implisitt.

4.3.2 Eksplisitt

På del 2 av hamsteroppgaven mente Birk, på gruppe 1, at svaret ble 15 til sammen hvis de løste det på samme måte som i del 1 av hamsteroppgaven. Han forklarte det videre med at «Vi har 1 og 13, det er 1. 2, 3, 4, 5, 6, 7. Så tar vi dobbelt, som er 14. Det blir 14, og så alle, 15». Flere av elevene kom fram til at de kunne skrive opp halvparten av løsningene og deretter doble antallet og ta bort den ene løsningen, som viste til samme antall hamstere i begge bur. Julie refererte også til at det var det samme de gjorde i den første deloppgaven, og dermed mente hun at det samme også gjaldt denne gangen.

152.	Julie:	Jeg har skrevet opp 8 her. Og hvis jeg snur dem, så blir det 8 + 8. Hva er det igjen? … (Gjør utregningen i hodet). Det blir 15!
153.	Student:	Okay, da har vi to som er enige her nå?
154.	Julie:	Fordi at 8 + 8 er 16, og den der er lik (peker på 7 og 7-løsningen), og da telles ikke den, for den gjorde vi ikke på den forrige, og da blir det 15!

Julie forklarte altså framgangsmåten med at «det fungerte på forrige oppgave og da må det fungere på denne oppgaven også». Hun forklarte hvorfor de «fjernet» en løsning etter doblingen tidligere, og det kan derfor hende hun tenkte at hun ikke trengte å argumentere hvorfor, en gang til.

På del 3 av hamsteroppgaven, kom Birk på gruppe 1 tidlig med et forslag om at det kunne være 31, som var svaret, uten at han hadde regnet på det. Også i denne deloppgaven brukte Birk de tidligere deloppgavene til å finne et forslag til løsning. I likhet med i del 2, knyttet han også her svaret til oppgaveteksten. Svaret var 1 mer enn antall hamstere. Han knyttet det også til at det på del 2 av oppgaven var 14 hamstere og 15 løsninger.

184.	Birk:	Jeg sier 31, uten å ha gjort.. (uhørlig)
	[…]	
187.	Ebba:	Ja, det er 31. Jeg tror det jeg og.
188.	Student:	Hvorfor kastet du ut 31, Birk? Var det helt tilfeldig?
189.	Birk:	Nei.
190.	Student:	Hvorfor?
191.	Birk:	1 mer. (Peker på antall hamstere)
192.	Student:	1 mer enn antall hamstere?
193.	Ebba:	Ja.
194.	Julie:	Det var det jo ikke.. Var det det på den forrige?
	[…]	
198.	Birk:	Det er 14 hamstere og 15 måter å ha dem.
199.	Julie:	Ja, det er 31.
200.	Ebba:	Ja, det tror jeg og. Jeg gidder ikke å telle.

På del 2 av kuleisoppgaven, foreslo Julie 7 gange 7, som framgangsmåte for å finne antall ulike kombinasjoner med kuleis, med en gang oppgaveteksten ble lest opp.

134.	Julie:	7 gange 7!
	[…]	
138.	Julie:	Det er 7 gange 7. Men jeg vet ikke hva, jeg kan ikke 7-

gangen.

139. Student: Nei okay, men hvorfor hiver du ut 7 gange 7?

140. Birk: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. (Peker på kulene på arket og teller hvor mange kombinasjoner han kan lage med sjokoladekulen)

141. Ebba: 7, 14, 21, 28, 35.. (avbrutt)

142. Birk: Du kan lage 7 forskjellige kombinasjoner med bare sjokolade.

143. Julie: Ja, men det er 7 gange 7.

144. Ebba: 7 gange 7. Det er 49.

[…]

151. Student: Og hvorfor ble det 49?

152. Ebba: Fordi..

153. Julie: Det er 7 gange 7 er 49.

154. Student: Hvorfor 7 gange 7?

155. Julie: Fordi på forrige oppgave, så hadde vi 4 gange 4, for vi hadde 4 smaker. Her har vi 7 smaker. Og da blir det jo 7 gange 7.

Her kom Julie med 7 gange 7 som en framgangsmåte for å finne alle mulige is-kombinasjoner i denne oppgaven. Da hun argumenterte for denne måten å løse det på, virket hun sikker på at det måtte bli 7 gange 7 som var framgangsmåten, men hun visste ikke hva svaret på dette stykket var. Hun trengte hjelp med å komme fram til 49. På grunn av dette kan det virke som at hun hadde mer fokus på framgangsmåten enn selve svaret eller antall kombinasjoner. Senere i transkripsjonen forklarte hun det med at de på forrige deloppgave tok 4 gange 4 fordi det var 4 ulike smaker, og dermed måtte det bli 7 gange 7 på denne fordi vi denne gangen hadde 7 ulike smaker. Hun virket også veldig sikker på at det måtte være rett denne gangen. Videre forklarte Birk hvorfor de kunne ta 7 gange 7 denne gangen også. Her brukte han samme forklaring som for 4 smaker.

På del 3 av kuleisoppgaven, fortsatte gruppe 1 å bruke samme framgangsmåte som på deloppgave 1 og 2. Også her valgte Julie å stole på framgangsmåten sin, da hun hadde argumentert for hvorfor det måtte være slik tidligere.

307. Student: Hvordan er det, hvis det er 20 smaker å velge i, og jeg skal ha 2 kuler. Hvor mange ulike is kan jeg lage?
[…]

308. Julie: 20 gange 20!

309. Student: Okay?

310. Ebba: Nei. Du kan ikke ta det! Fordi da, det er ikke riktig.
[…]

311. Student: Hvorfor 20 gange 20, Julie?

312. Julie: Fordi det er det vi har tatt på alle andre.

[…]

314. Birk: Da blir det jo 400.

315. Student: Okay?

316. Birk: Ja, 400 forskjellige is-smaker. (Lattermild)

[…]

340. Student: Okay? Så 400, hvis dere løser på samme måte, så får dere 400 som svar.

341. Julie: Ja. Det er riktig.

[…]
Det høres veldig mye ut, det er jeg enig med, men det.. det er riktig. Syns jeg.

Selv om Julie syns det hørtes mye ut med 400 ulike kombinasjoner, sto hun på svaret sitt, og den framgangsmåten de hadde brukt på de tidligere oppgavene. Det kan virke som at hun så at argumentasjonen de brukte i del 1 og 2 kunne gjelde fortsatt, og at hun dermed kunne bruke samme framgangsmåte denne gangen.

4.4 Begynnende generalisering

4.4.1 Bruker tallene i oppgaven til å argumentere for en generell situasjon

På del 2 av hamsteroppgaven kom Birk, på gruppe 1, først fram til at han mente svaret var 15 og ga en forklaring på det. Videre så han en sammenheng med forrige deloppgave, og knyttet svaret sitt til antall hamstere i oppgaven. Det gjorde han også da de arbeidet med å finne løsningene i deloppgave 2.

141.	Birk:	9 er 1 mer enn 8, som er antall hamstere. 15 er 1 mer enn 14.
142.	Ebba:	Å, det er sant det.
143.	Julie:	Hæ?
144.	Student:	Har vi funnet et system?
145.	Julie:	Hva da?
146.	Student:	Birk sa at på den forrige oppgaven så var det.. svaret var 9, og det er 1 mer enn 8, som er antall hamstere. Og sier han da at, okay kanskje det skal være 15 da, siden det er 1 mer enn antall hamstere her.
147.	Julie:	Okay, vi sier at Birk har riktig.

På del 2 av kuleisoppgaven virket det som at Ola, på gruppe 2, så en sammenheng mellom antall smaker og hvordan man kommer fram til antall kombinasjoner.

169.	Ola:	Ja ja, det er en sammenheng ja.
170.	Student:	Okay?
171.	Ola:	Da er det 4 gange 4 fordi at det er 4 på hver.
172.	Student:	Okay. Så hver farge.. i stad hadde hver farge 4 ulike muligheter?
173.	Ola:	Ja.
174.	Student:	Og nå har hver farge 7?
175.	Ola:	Ja. Det betyr at hvis du legger på 1 der (peker på smakene med is), så blir det 8 gange 8, 64.

Her viser Ola til sammenhengen mellom antall smaker med is og framgangsmåten for å komme fram til antall ulike kombinasjoner med is. Han viste også konkret til at man kan finne antall kombinasjoner når det er 8 smaker, ved å ta 8 gange 8, som er 64. Dette viser til en begynnende form for generalisering, med tanke på at Ola har oppdaget et mønster i tallene, og bruker det videre til å finne flere kombinasjoner.

4.4.2 Argumenterer ved hjelp av et generelt språk

Her vil jeg trekke inn to eksempler, som allerede er nevnt tidligere i analysen. I arbeidet med å finne svar på hvor mange måter det gikk an å plassere de 30 hamstrene i to bur på deloppgave 3 av hamsteroppgaven, kom Ola med en kommentar:

160.	Ola:	Det er egentlig ganske enkelt. Man må bare regne ut én gang, så forstår man det.

Denne kommentaren vitner om at Ola ser en sammenheng mellom oppgavene, og at han ser at han kan bruke tidligere framgangsmåter, for å løse andre oppgaver av samme type. Han mangler selve formuleringen av et argument ved hjelp av et generelt språk, men han viser til tankegangen som må til i forkant av formuleringen av et slik argument. Jeg vil også trekke fram Birk sine uttalelser om at svaret er én mer enn antall hamstere i oppgaven.

184.	Birk:	Jeg sier 31, uten å ha gjort.. (uhørlig)
	[…]	
187.	Ebba:	Ja, det er 31. Jeg tror det jeg og.
188.	Student:	Hvorfor kastet du ut 31, Birk? Var det helt tilfeldig?
189.	Birk:	Nei.
190.	Student:	Hvorfor?
191.	Birk:	1 mer. (Peker på antall hamstere)
192.	Student:	1 mer enn antall hamstere?
193.	Ebba:	Ja.

Dette viser også til en begynnelse på en form for generalisering, med tanke på at han ser at det er en sammenheng mellom antall hamstere og antall løsninger. Han underbygger også dette senere, med at de var slik på de forrige deloppgavene også.

4.5 Overganger mellom deloppgavene

For å viser en oversikt over funnene mine knyttet til mitt andre forskningsspørsmål, altså «Hvordan utvikler argumentene til elevene seg fra en deloppgave til en annen?», valgte jeg å lage en oversikt i form av en tabell (se tabell 4.1), slik at endringene i argumentene til elevene, mellom deloppgavene, kommer tydeligere fram. Tabellen inneholder en oversikt over hvilke framgangsmåter de ulike gruppene brukte på de ulike deloppgavene, og hvordan det endret seg ettersom de arbeidet med oppgavene. Framgangsmåtene i hver rute er skrevet opp i den rekkefølgen elevene gjorde det i, fra øverst til nederst. For eksempel argumenterte gruppe 1 på del 1 av kuleisoppgaven først med systematisk oppramsing og deretter ved hjelp av et regnestykke.

	Del 1	Del 2	Del 3
Hamsteroppgave Gruppe 1	Usystematisk og systematisk oppramsing. Argumentasjon: vet de har funnet alle løsningen når de har skrevet dem ned og prøvd seg fram.	Systematisk oppramsing. Referer til tidligere framgangsmåte («telle halvparten og doble»). Knytter løsning til antall hamstere, «én mer», viser til at det samme gjelder på del 1. Bekrefter med systematisk oppramsing.	Knytter løsning til antall hamstere, «én mer», viser til at det samme gjaldt på del 2. Referer til tidligere framgangsmåte («telle halvparten og doble»). Bekrefter med systematisk oppramsing.
Hamsteroppgave Gruppe 2	Usystematisk og systematisk oppramsing. Argumentasjon (implisitt): vet de har funnet alle løsningene når de har skrevet dem ned.	Usystematisk og systematisk oppramsing. Teller opp én mer og én mindre enn antall hamstere (sier det ikke eksplisitt). Bekrefter med systematisk oppramsing også.	Systematisk oppramsing. Teller opp én mer og én mindre enn antall hamstere (sier det ikke eksplisitt). Bekrefter med systematisk oppramsing også.
Kuleisoppgave Gruppe 1	Systematisk oppramsing. Regnestykke (4 x 4) + argumenterte for framgangsmåten.	Regnestykke (7 x 7) + argumenterte for framgangsmåten + knyttet det til forrige deloppgave.	Regnestykke (20 x 20) + knyttet det til forrige deloppgave.
Kuleisoppgave Gruppe 2	Usystematisk og systematisk oppramsing.	Usystematisk og systematisk oppramsing. Regnestykke (7 x 7) + argumenterte for framgangsmåten + ser at det ville fungert på del 1 og (4 x 4). Kommentar: legge til en smak til = 8 x 8.	Regnestykke (20 x 20) + argumenterte for framgangsmåten + knyttet det til forrige deloppgave (implisitt).

Tabell 4.1: Overganger mellom de ulike deloppgavene

I tabelloversikten kan vi se at elevenes framgangsmåter og måter å argumentere på endrer seg mellom deloppgavene. Videre kan man også se at det benyttes ulike argumenter avhengig av oppgavetype. I argumentasjonen for svarene på hamsteroppgaven, kom gruppe 1 fram til at antall løsninger tilsvarte én mer enn antall hamstere, og at dette så ut til å gjelde både i del 1 og 2 av oppgaven. Selv om elevene uttrykte en sammenheng mellom antall hamstere og antall mulige løsninger, i deloppgave 2, valgte de fortsatt å skrive ned alle mulige løsninger for å «bekrefte» svaret sitt. Dette gjaldt også da de kom til deloppgave 3. Selv om de hadde kommet fram til en hypotese og et argument for at det stemte i del 2, og de virket enige om at det kunne stemme også i del 3, valgte de å systematisk skrive ned alle løsningene også denne gangen. Først da svaret etter oppramsingen stemte overens med svaret de kom fram til ved hjelp av hypotesen om «én mer enn antall hamstere», sa de seg fornøyd med svaret.

Det er en del likheter mellom de to gruppene i hvordan de argumenterer for svarene sine. Samtidig er det også noen ulikheter i når i «løpet» de kommer fram til en framgangsmåte som vil fungere hver gang, og argumentasjonsmåter som faktisk kan kategoriseres som gyldige bevis. På deloppgave 2 og 3 på kuleisoppgaven, viste for eksempel elevene på gruppe 1 at de benyttet den samme argumentasjonen, med tanke på at de samme premissene var lagt til grunn også på del 2 og 3. På del 2 argumenterte de for framgangsmåten, i tillegg til å knytte den til forrige deloppgave. På del 3 argumenterte de ikke lenger for framgangsmåten, men viste heller til at det gjaldt det samme som på forrige deloppgave. Det er mulig at de så at det ikke var nødvendig å argumentere en gang til, med tanke på at de samme premissene var lagt til grunn. Gruppe 2 hadde også i hovedsak en liknende utvikling på kuleisoppgaven, men man kan på en måte si at de hele tiden lå ett hakk bak gruppe 1. Det var først på del 2 at de kom fram til argumentasjonen for at svaret på antall kombinasjoner måtte bli 7 gange 7 i dette tilfellet, og de så også da at de kunne gjort det samme på del 1, med 4 gange 4. Videre på del 3 kom de også fram til at de kunne ta 20 gange 20, argumenterte for at framgangsmåten også kunne gjelde på denne deloppgaven og knyttet det også til del 2. Så er spørsmålet om elevene på gruppe 2 også hadde kommet til det stadiet i argumentasjonen, som gruppe 1 kom til på del 3 av oppgaven, dersom de hadde fått utdelt en «deloppgave 4» med enda høyere tall. Jeg knytter disse funnene, i tillegg til de som er nevnt tidligere i analysen, opp mot tidligere forskning, i diskusjonskapittelet.

5. Diskusjon

I denne studien er forskningsspørsmålene, som skal besvares «Hvordan resonnerer elever på 5. trinn i arbeid med «endelig antall»-oppgaver og hvordan argumenterer de for at svarene er riktige?» og «Hvordan utvikler argumentene til elevene seg fra en deloppgave til en annen?». I elevenes arbeid med oppgavene de fikk utdelt, resonnerte de matematisk både individuelt og i samarbeid med de andre på gruppa. De benyttet ulike argumentasjonsformer, noen som går under kategorien gyldige bevis, og andre ikke. Det kom også fram av analysen at elevenes måte å argumentere på endret seg ettersom de arbeidet med de ulike deloppgavene, hvor tallene stadig ble høyere. De resonnerte seg fram på ulike måter, avhengig av oppgavetype og hva de hadde gjort på de tidligere deloppgavene. Fokuset, under innsamlingen av data, lå på det muntlige og at elevene skulle kunne forklare hvordan de hadde tenkt for å komme fram til svarene og argumentere for at det var rett. Ved hjelp av at elevene bruker overbevisende argumenter om at en framgangsmåte de har brukt er gyldig, vil de ifølge Carpenter et al. (2003) kunne gi mening til og begrunne framgangsmåtene for seg selv og de andre elevene på gruppa.

5.1 Elevenes resonnering og argumentasjon knyttet til oppgavene

Både når det kommer til hamsteroppgaven og kuleisoppgaven, ramset elevene opp alle de ulike løsningene på del 1, og «sa seg fornøyd med det». På hamsteroppgaven, brukte de også som argument at de visste at de hadde funnet alle løsningene fordi de hadde «skrevet de ned» og «prøvd seg fram». Her kan vi trekke linjer til Bell (1976) sin studie, hvor elever som arbeidet med «endelig antall»-oppgaver, ikke gjorde noe reelt forsøk på å bevise at det ikke fantes flere løsninger, etter de hadde «funnet og telt opp et bestemt antall mulige løsninger». Selv om det virket som dette var tilfellet hos de fleste på deloppgave 1 i min studie også, fant gruppe 1 likevel en annen framgangsmåte på kuleis-oppgaven, og argumenterte for at det måtte være rett. Med tanke på at elevene her argumenterte for svaret med at hver av de 4 smakene kunne kombineres med 4 smaker, og at antall mulige løsninger dermed måtte være 16, vil jeg tenke at dette kan kategoriseres som et generisk argument. Dette underbygges av at de senere også gjentok egenskapene ved denne framgangsmåten, som førte til at den ville fungere for andre tall også. Generiske argumenter er altså konkrete eksempler, som presenteres slik at de får fram det generelle i den gitte situasjonen (Rowland, 1998, s. 67). Det spesifikke eksempelet i et generisk argument vil få fram *hvorfor* det faktisk stemmer for det enkelte tilfellet, og det vil derfor være mulig å se hvorfor det vil stemme for andre tilfeller (Rowland, 1998, s. 68).

Fischbein og Kedem (1982) viste til at elevene fortsatte å sjekke enkelttilfeller for å verifisere en hypotese. Dette skjedde selv om de sa seg enige i et generalisert argument. Dette viser seg også å gjelde hos elevene i min studie. Spesielt kommer dette til uttrykk i arbeidet med hamsteroppgaven, hvor elevene uttrykker en sammenheng mellom antall hamstere og antall mulige løsninger i deloppgave 2. Selv om de kommer fram til at antall løsninger tilsvarer én mer enn antall hamstere, og at dette ser ut til å gjelde både i del 1 og 2 av oppgaven, velger de fortsatt å skrive ned alle mulige løsninger for å «bekrefte» svaret sitt. Dette gjelder også når de kommer til deloppgave 3. Selv om de har kommet fram til en hypotese og et argument for at det stemmer i del 2, og de virker enige om at det kan stemme også i del 3, velger de å systematisk skrive ned alle løsningene også denne gangen. Først da svaret etter oppramsingen stemte overens med svaret de kom fram til ved hjelp av hypotesen om «én mer enn antall hamstere», sa de seg fornøyd med svaret. Dette støtter opp under Bell (1976) sine antagelser om at elever mener at den mest overbevisende formen for argumentasjon, er «bevis» basert på å sjekke noen enkelte tilfeller. Dette stammer ifølge Williams (1980) mer sannsynlig fra at elevene mangler en forståelse av hva generalitet faktisk går ut på, framfor at elevene har et behov for å prøve seg fram i spesifikke tilfeller for å forstå ideer. Dette viser til en tendens om at de ikke helt stoler på andre framgangsmåter enn oppramsing. Det føles kanskje mer «håndfast» og trygt for dem. Det samme gjelder til dels gruppe 2, som også knytter antall løsninger til antall hamstere, men på en litt annen måte. I motsetning stoler elevene i gruppe 1 på at argumentene deres gjelder i del 3 av kuleisoppgaven, fordi det gjorde det på del 1 og 2. Her poengterer til og med den ene eleven at hun synes svaret ble veldig høyt, men at hun er sikker på at det er rett, fordi det var slik de gjorde det på de andre deloppgavene, og det er fortsatt de samme premissene som er lagt til grunn. Dette vitner om at hun stoler på det generiske argumentet hun kom med tidligere i oppgaveløsingen.

Som man kan se av oversiktstabellen over overgangene mellom de ulike deloppgavene, i tabell 4.1, er det en forskjell i hvordan elevene løser hamsteroppgaven (og hvordan utviklingen mellom de ulike deloppgavene er), og hvordan de løser kuleisoppgaven. Selv om begge oppgavene er laget slik at elevene skal finne flere, men et endelig antall løsninger, og argumentere for at de har funnet alle, tenker jeg at innholdet i oppgavene påvirker hvordan elevene velger å løse dem. I arbeidet med hamsteroppgaven kunne elevene bruke tall som representasjon for antall hamstere, for å liste opp ulike løsninger. På kuleisoppgaven derimot, var det ikke like rett fram. Her var det snakk om navn på smaker, ikke kun tallsymboler. Dette gjorde at elevene på hamsteroppgaven i større grad ramset opp alle løsningene skriftlig, mens de på kuleisoppgaven i større grad ramset opp muntlig. Flere av elevene forsøkte å bruke varianter med forbokstaver eller liknende, men «ga opp» etter å kun ha skrevet opp noen få kombinasjoner. Dette samsvarer med Stylianides (2016) sin studie, som viser til at elevenes bruk av mer komplekse former for representasjoner, kan hindre elevenes innsats i å liste opp alle løsninger.

En ting som skilte deloppgave 1 og 2 fra 3, var at jeg på deloppgave 3 ikke hadde med bilder av antall hamstere eller de ulike smakene med is. Jeg tenker at dette kan ha vært med å bidra til at elevene ble «tvunget» til å gå bort fra oppramsing og heller stole mer på de andre framgangsmåtene de kom fram til. Likevel var det noen av elevene som, særlig på hamsteroppgaven, tegnet opp prikker, som skulle representere hamstrene. Dette kan vitne om at elevene syns oppgavene var enklere å løse når de hadde bilder å bruke til hjelp i resonneringen.

Som Carpenter et al. (2003) viser til, vil elever på barneskolen både kunne forstå og klare å bruke mer generelle argumentasjonsformer, selv om elever i denne alderen ikke nødvendigvis er i stand til å produsere dem selv. Likevel er det noen elever som viser at de nettopp har evnen til å presentere argumentasjonen deres på en generell måte. Elevene i min studie viser også i flere tilfeller at de behersker dette med tanke på at de benytter seg av generiske argumenter flere ganger. Dette gjelder blant annet når de viser til at de kan multiplisere 7 smaker med 7 smaker, for å komme fram til antall mulige kombinasjoner med kuleis. De argumenterer ved å vise til at hver smak må kombineres med alle smakene. Dette er også årsaken til at de med en gang de får utdelt del 3 av kuleisoppgaven, vet at de kan multiplisere 20 med 20, fordi de samme premissene er lagt til grunn. Dette underbygges av Stylianides (2016). Han legger fram at ikke-empiriske argumentasjonsmåter, altså argumenter på høyere nivå, som generisk argument og generell logisk slutning, er innenfor den konseptuelle rekkevidden for elever på barneskolen. Det får vi bekreftet også i denne studien. I hvert fall når det gjelder generiske argumenter. Når det kommer til generell logisk slutning derimot, kommer ikke elevene i denne studien med helt generelle formler, som ikke er knyttet til spesifikke eksempler (Krogh Arnesen, 2022, s. 4).

Som Krogh Arnesen (2022) viser til, er det vanlig i matematikk å begynne med å utforske eksempler, for så å bruke dem til å argumentere for en generell påstand. Dette gjelder på alle nivåer. Elevene i denne studien bruker også eksempler for å komme fram til løsningene på de fleste av oppgavene. En elev på gruppe 1 nevner blant annet i en situasjon at det på den forrige oppgaven var 9 løsninger, og det er én mer enn 8, som var antall hamstere. Dermed kunne svaret på den oppgaven de løste nå være 15, siden det var én mer enn antall hamstere, som denne gagen var 14. Her så eleven en sammenheng, og så for seg at den samme «regelen» kunne gjelde denne gangen også, uten at han faktisk visste om den sammenhengen var tilfeldig eller ikke. Hvis denne eleven ikke hadde forklart framgangsmåten eller argumentert videre for denne påstanden, ville dette kunne kategoriseres som et empirisk argument. Empiriske argumenter går ut på at man begrunner at en påstand alltid stemmer, med at påstanden stemmer for noen få tilfeller (Krogh Arnesen, 2022, s. 4). Selv om empiriske argumenter ikke kan defineres som gyldige bevis, poengterer Stylianides (2016) at eksempler likevel har en viktig rolle, når det kommer til aktiviteter som har med bevis å gjøre.

Hvis vi tar utgangspunkt i Stylianides (2007) sin definisjon av bevis, er det i hovedsak i arbeidet med deloppgave 2, at elevene begynner å argumentere på måter som kan kategoriseres som gyldige bevis (sett bort fra gruppe 1, på kuleisoppgaven, som bruker det allerede i del 1). Det er først i deloppgave 3 at begge gruppene faktisk benytter gyldige bevis. Selv om det kommer fram av tabell 4.1 at gruppene som helhet kom med en felles argumentasjon og svar, men i flere tilfeller sa noen av elevene sa seg enige i det en eller begge de andre på gruppa sa, uten å egentlig sette seg inn i resonnementet til de andre elevene. Flere ganger sa de seg altså enige, selv om de ikke ga uttrykk for at de forsto eller hvorfor de var enige i resonnementet eller argumentasjonen. De baserte heller bekreftelsen sin på at det hørtes rett ut eller «jeg vet at han er smart, så det stemmer sikkert». Elever kan ofte bli overbevist om at en definisjon eller en påstand er rett, fordi det står at «det er slik» i en lærebok eller fordi at læreren sier det, uten at påstanden faktisk blir bevist (Hersh, 1993, s. 396). I flere tilfeller under data-innsamlingen, kom en av elevene med en påstand og argumenterte for at den var rett. Flere av de andre sa seg enige i påstanden, både om det var et gyldig argument eller ikke. Med tanke på at elever, både for å overbevise seg selv og når de presenterer resonnementet sitt for lærere og medelever, bruker empiriske argumenter for å bevise hypotesene sine, vil det ikke være gunstig for elever å henge seg på svarene til de andre, uten å egentlig vite om det ligger et godt argument til grunn (Stylianou et al., 2009).

Spesielt på deloppgave 3, men også for noen på deloppgave 2, brukte elevene tidligere erfaringer fra samme oppgavetype til å se sammenhenger, og dermed løse oppgaven på andre måter enn ved oppramsing. Tanken med at elevene fikk arbeide med samme typer oppgave, men med høyere og høyere tall, var at dette kunne føre elevene til å lage seg noen hypoteser eller formler, som kunne generaliseres, slik at de kunne brukes på oppgaver med enda høyere tall. Dette kunne være fordi elevene ikke lenger så det hensiktsmessig å ramse opp alle mulige løsninger, for å komme fram til svaret. Det at elevene lager seg hypoteser, rundt framgangsmåten og hvordan den kan generaliseres, vil være produktivt for elevene, selv om de ikke klarer å bevise hypotesene på en generell måte (Carpenter et al., 2003, s. 102).

5.2 Metodekritikk

Med tanke på at jeg i denne studien har benyttet en kvalitativ forskningsmetode, vil naturligvis kritikken rundt subjektivitet også gjelde i mitt tilfelle (Bryman, 2012, s. 405). I denne studien har jeg tatt valg, som mer eller mindre bevisst eller ubevisst er påvirket av mitt syn på hva som er viktig eller kan være interessant å undersøke. Dette kan dermed påvirke hvilke funn jeg har fokusert på, og hvilke jeg har sett på som interessante og relevante for å kunne svare på forskningsspørsmålene i denne studien. Likevel mener jeg at jeg i stor grad har forsøkt å være transparent med metodene som er benyttet til innsamling og analyse av data. Med tanke på at framgangsmåter og metode brukt i denne studien, er presentert i metodekapittelet, vil det i stor grad være mulig for andre å gjennomføre samme undersøkelser, selv om det i kvalitativ forskning er vanskelig å gjennomføre en helt identisk studie (Bryman, 2012, s. 405).

En av begrensningene ved denne studien, er at det forholdsvis er få deltakere med. Det er en mulighet for at jeg hadde kommet fram til enda flere og sikrere funn, dersom jeg hadde hatt med flere deltagere. Selv om mange av funnene i denne studien gjenspeiler funn i tidligere studier, ville det vært interessant å kunne sette enda mer fokus på selve overgangene mellom denne typen deloppgaver. Videre kunne man sett på hvordan flere grupper med elever argumenterte for svarene sine og hvordan det utviklet seg etter hvert som oppgavene utviklet seg med høyere tall. Et grep jeg kunne gjort for å få til det i denne studien, ville vært å kun fokusert på én oppgave, altså enten hamsteroppgaven eller kuleisoppgaven, og sett på hvordan flere elever arbeidet med denne typen oppgave. Likevel synes jeg at det var interessant å kunne se på forskjeller og likheter mellom disse to oppgavene, med tanke på at de krever at man argumenterer og arbeider på ulike måter. Da fikk jeg også fram noe om hvordan oppgavetypen, og hvordan den blir presentert, har noe å si for hvordan argumentasjonen til elevene utviklet seg. Jeg vil påstå at flere av funnene i denne studien, vil kunne gjelde for andre grupper av 5. klassinger i landet, i og med at flere av mine funn støttes opp av tidligere forskning på elever i samme alder. Det er ikke sikkert det vil kunne gjelde for andre elever på andre trinn, eller ved andre skoler, men jeg tror likevel man vil kunne se likhetstrekk hos elever på mange andre 5. trinn i landet.

6. Avslutning

I denne studien har jeg undersøkt hvordan en gruppe med elever på 5. trinn arbeider med «endelig antall»-oppgaver og hvordan de argumenterer for at svarene, de har kommet fram til, er riktige. Videre lå fokuset mitt på hvordan elevenes argumenter utviklet seg fra en deloppgave til en annen. Her kom jeg fram til at det noe avhengig av oppgaveteksten, fantes variasjoner i hvordan argumentasjonen utviklet seg. På den ene oppgaven hvor det var forholdsvis enkelt å skrive ned alle løsninger, med tanke på at man kunne bruke tallsymboler, valgte elevene å bekrefte andre argumenter og framgangsmåter ved hjelp av oppramsing, i alle tilfeller. Dette samsvarte også med tidligere forskning. Videre var det noe variasjon i hvordan argumentene utviklet seg på kuleisoppgaven, men når elevene først fant et argument, som de mente kunne stemme i alle tilfeller, holdt de seg til dette argumentet og framgangsmåten, også videre på de neste deloppgavene. På kuleisoppgaven var det ikke like enkelt å skrive ned alle mulige løsninger, med tanke på at hver kombinasjon besto av ord, og ikke kun tall. Det kan ha vært med på å påvirke hvordan elevene valgte å løse oppgaven, og hvordan de stolte på argumentet sitt.

Jeg tenker at mine funn i denne studien kan være med å bidra til å vise at man bør være bevisst på at hvordan oppgavetypen eller oppgaveteksten presenteres og formuleres kan påvirke hvordan elevene argumenterer for svarene sine. Jeg tenker også at det kan være viktig å se hvordan forskjellene i hvordan argumentasjonsmåtene utviklet seg varierte mellom de to ulike hovedoppgavene. Det varierte altså mer mellom de ulike oppgavene, enn det gjorde mellom de to ulike gruppene med elever. Jeg tenker at arbeidet med denne oppgaven har gjort meg mer oppmerksom på hvordan små grep i oppgave-formulering, kan påvirke hvordan elevene argumenterer og løser oppgaver. Jeg har også sett hvordan elevene faktisk klarer å formulere gyldige bevis, og hvordan de bruker disse til å overbevise medelever på en god måte. Dette er noe jeg skal ta med meg inn i min egen matematikkundervisning, på tvers av temaer, når jeg nå skal ut i jobben som lærer.

Når det kommer til videre forskning, tenker jeg det vil være interessant å undersøke mer inngående hvordan elever arbeider med matematisk resonnering og argumentasjon generelt, og spesielt hvordan elever utvikler sine argumenter over lengre tid, for eksempel over flere år. Det vil også kunne være interessant å se på hvordan elever som har arbeidet mye med ulike argumentasjonsformer og hva som er gyldige bevis, bruker tidligere erfaringer til å løse nye oppgaver. Videre kunne man sammenlignet resultatene med argumentene til elever som ikke har jobbet like inngående med disse temaene tidligere, og sett på likheter og forskjeller i argumentasjonen deres.

Referanser

Adler, P. A. & Adler, P. (1994). Observational Techniques. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *Handbook of Qualitative Research* (s. 377-392). Sage Publications, Inc.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235).

Bell, A. W. (1976). A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational studies in mathematics*, *7*(1/2), 23-40. https://doi.org/10.1007/BF00144356

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th. utg.). Oxford University Press.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4. utg.). SAGE.

Ellis, A., Lockwood, E. & Ozaltun-Celik, A. (2022). Empirical re-conceptualization: From empirical generalizations to insight and understanding. *The Journal of mathematical behavior*, *65*, 1-16. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100928

Fischbein, E. & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. I A. Vermandel (Red.), *Proceedings of the 6th International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (s. 128-131).

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1/2), 5-23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for research in mathematics education*, *31*(4), 396-428. https://doi.org/10.2307/749651

Hersh, R. (1993). Proving Is Convincing and Explaining. *Educational studies in mathematics*, *24*(4), 389-399. https://doi.org/10.1007/BF01273372

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational studies in mathematics*, *96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Krogh Arnesen, K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten - tidsskrift for matematikkundervisning*, *33*(1), 2-8.

LeCompte, M. D. & Goetz, J. P. (1982). Problems of Reliability and Validity in Ethnographic Research. *Review of educational research*, *52*(1), 31-60. https://doi.org/10.3102/00346543052001031

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. I J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades*.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic Examples: Seeing the General in the Particular. *Educational studies in mathematics*, *15*(3), 277-289. https://doi.org/10.1007/BF00312078

Maxwell, J. A. (2009). Designing a Qualitative Study. I L. Bickman & D. J. Rog (Red.), *The SAGE Handbook of Applied Social Research Methods* (2. utg., s. 214-253). SAGE Publications, Inc. https://doi.org/https://doi.org/10.4135/9781483348858.n7

NESH. (2021, 16. desember). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. Forskningsetikk. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Porteous, K. (1986). Children's appreciation of the significance of proof. *Proceedings of the10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 392-397.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *33*(1), 5-29. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/749867

Rienecker, L., Stray Jørgensen, P. & Skov, S. (2013). *Den gode oppgaven: Håndbok i oppgaveskriving på universitet og høyskole* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Riessman, C. K. (2008). *Narrative methods for the human sciences*. Sage Publications.

Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. I A. Olivier & K. Newstead (Red.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 65-72). University of Stellenbosch.

Rø, K. & Arnesen, K. K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers' arguments in multiplicative reasoning. *The Journal of mathematical behavior*, *58*, 1-15. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100755

Simpson, A. (1995). Developing a proving attitude. *Conference Proceedings: Justifying and Proving in School Mathematics*, 39-46.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *38*(3), 289-321. https://doi.org/10.2307/30034869

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.

Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9-16. http://www.jstor.org/stable/40248592

Stylianou, D. A., Blanton, M. L. & Knuth, E. J. (Red.). (2009). *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective*. London: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203882009.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn* (MAT01-05). https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Williams, E. (1980). An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof. *Journal for research in mathematics education*, *11*, 165-166.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Red.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s. 227–236).

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vedlegg 2: Godkjennelse fra NSD

Vedlegg 3: Intervjuguide

Vedlegg 4: Oppgavene som ble gitt til elevene

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vil du delta i forskningsprosjektet *«Hvordan resonnerer og argumenterer elever i arbeid med matematikk»?*

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever resonnerer og argumenterer i arbeid med matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg og ditt barn.

Formål
Formålet med dette prosjektet er å observere og undersøke hvordan elever på mellomtrinnet resonnerer og argumenterer når det kommer til oppgaver i matematikk. I prosjektet kommer jeg til å ha fokus på arbeid med oppgaver som kan gi flere svar, og som åpner for mulighet for argumentasjon og begrunnelse av tankegang. Denne studien er en del av en masteroppgave i matematikkdidaktikk, hvor jeg skal skrive en oppgave innenfor temaet «resonnering og bevis på barnetrinnet».
Foreløpig problemstilling for prosjektet er «Hvordan resonnerer elever i arbeid med matematikkoppgaver og hvordan argumenterer de for at svarene er rett?»

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
De som er ansvarlige for forskningsprosjektet er jeg; Ragnhild Førrisdahl, min veileder; Anita Valenta og NTNU – institutt for lærerutdanning.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Elevene på 5. trinn er valgt ut til å delta i prosjektet fordi de er i en passende aldersgruppe knyttet til innholdet i prosjektet. I tillegg har jeg tidligere arbeidet på skolen og trinnet, og jeg har dermed kjennskap til elevene fra før.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du godkjenner at eleven deltar i prosjektet, innebærer det at eleven skal delta i arbeid med matematikkoppgaver, som er utviklet spesielt for dette prosjektet, i grupper på ca. 3-4 elever. Under arbeidet med oppgavene, vil elevene få mulighet til å komme med egne løsninger, samarbeide med medelevene og svare på spørsmål knyttet til oppgavene, fra meg (masterstudent). Samtalen og arbeidet med oppgavene vil bli tatt lydopptak av og filmet. I tillegg vil elevenes notater og/eller tegninger bli samlet inn. Prosjektet vil bli gjennomført i elevenes skoletid, i løpet av januar/februar 2022. Hvis ønskelig kan foresatte få se oppgavene på forhånd, ved å ta kontakt med meg, Ragnhild Førrisdahl.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine barns personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller barnet hvis du ikke vil delta, eller senere velger å trekke deg.

De som ikke deltar i prosjektet, vil følge vanlig undervisning, parallelt med at prosjektet gjennomføres. Elevene som deltar i prosjektet, vil få mulighet til å ta igjen arbeid, som blir gjennomført i ordinær undervisning, på et senere tidspunkt.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- De eneste som vil ha tilgang til personvernopplysningene er meg; Ragnhild Førrisdahl, som skal gjennomføre prosjektet og skrive masteroppgaven, og min veileder; Anita Valenta.
- Navnet og kontaktopplysningene til eleven vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Datamaterialet som blir samlet inn (video- og lydopptak) vil tas opp på en enhet godkjent og lånt av NTNU, og videre bli lagret i en kryptert mappe bak et passordbeskyttet område.

Deltakerne i dette prosjektet vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen av masteroppgaven. Det vil kun være deltakernes svar på oppgaver, uten tilknyttede navn eller andre opplysninger som kan gjøre at deltakeren gjenkjennes, som vil publiseres.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er i begynnelsen av juni 2022. Ved prosjektslutt slettes video-, lydopptak og annet innsamlet personidentifiserende materiale.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt/barnets samtykke og i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge barnet ditt kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om ditt barn, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om barnet som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om barnet
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av barnets personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU ved Ragnhild Førrisdahl, ragnhfor@stud.ntnu.no eller Anita Valenta, anita.valenta@ntnu.no
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen, thomas.helgesen@ntnu.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Ragnhild Førrisdahl Epost: ragnhfor@stud.ntnu.no Telefon: 48123180 (Masterstudent)	Anita Valenta Epost: anita.valenta@ntnu.no (Veileder)

Samtykkeerklæring

Barnets navn og klasse: ___________________________________

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «*Hvordan resonnerer og argumenterer elever i arbeid med matematikk?*» og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at (kryss av der det passer):

- ☐ det tas videoopptak av barnet, som en del av prosjektet.
- ☐ det tas lydopptak av barnet, som en del av prosjektet.
- ☐ det samles inn skriftlige elevarbeider fra barnet, som en del av prosjektet.

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av prosjektdeltakers foresatt(e), dato)

Leveres tilbake på skolen, med underskrift, **innen fredag 14. januar 2022**.

Vedlegg 2: Godkjennelse fra NSD

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Vurdering

Referansenummer

176867

Prosjekttittel

Hvordan resonnerer og argumenterer elever i arbeid med matematikk?

Behandlingsansvarlig institusjon

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Anita Valenta, anita.valenta@ntnu.no, tlf: 97737661

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Ragnhild Førrisdahl, ragnhfor@stud.ntnu.no, tlf: 48123180

Prosjektperiode

03.01.2022 - 15.06.2022

Vurdering (1)

17.01.2022 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 17.01.2022 med vedlegg. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.06.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

• lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
• formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
• dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
• lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Olav Rosness, rådgiver.

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 3: Intervjuguide

Intervjuguide

til forskningsprosjektet

«Hvordan resonnerer og argumenterer elever i arbeid med matematikk?»

Typisk oppgave gitt til elevene: «På hvor mange forskjellige måter kan 8 forskjellige hamstere fordeles på to bur?»

Elevene blir først bedt om å løse oppgavene individuelt, deretter diskutere sammen

→ Nye tanker og løsninger?

→ Høyere nivå av resonnering og argumentasjon?

Typiske spørsmål som kan stilles elevene underveis i oppgaveløsningen/gruppeintervjuet:

- Hvordan kom dere fram til det svaret?
- Hvordan kan dere vite at dere har funnet alle mulige løsninger?
- Hvordan blir svaret hvis vi har 14 hamstere i stedet for 8?
- Kan vi finne ut hvor mange mulige løsninger vi har hvis vi bruker et enda større tall, som for eksempel 30?
- Kan vi lage/finne en regel som hjelper oss å finne ut hvor mange løsninger det er når tallet er stort/større?
- Kan du tegne/skrive opp hvordan du har tenkt?

Vedlegg 4: Oppgavene som ble gitt til elevene

Oppgave 1

Hamsteroppgaven

I en dyrebutikk har de 8 hamstere og 2 bur å ha dem i.

På hvor mange forskjellige måter kan de 8 hamstrene være fordelt i de 2 burene?
Forklar hvorfor dere er sikre på det.

Dyrebutikken får inn 6 hamstere til, slik at det nå er 14 hamstere til sammen.

Butikken har fortsatt bare 2 bur å ha dem i.

På hvor mange forskjellige måter kan de 14 hamstrene være fordelt i de 2 burene?
Forklar hvorfor dere er sikre på det.

Det viser seg at det har blitt gjort en feil under en levering til dyrebutikken, slik at butikken plutselig mottar 16 hamstere til. Nå er det totalt 30 hamstere i butikken og fortsatt kun 2 bur.

Fram til hamstrene kan leveres tilbake og sendes til riktig butikk, må de plasseres i de 2 burene i butikken.

På hvor mange forskjellige måter kan de 30 hamstrene fordeles i de 2 burene? Forklar hvorfor dere er sikre på det.

Oppgave 2

Kuleisoppgaven

5. trinn er på skoletur i byen. Der ser de en is-bod, som selger kuleis med ulike smaker.
De ulike smakene er sjokolade, jordbær, vanilje og oreo.

Elevene får velge seg 2 kuler hver.
Hvor mange ulike kuleis, med 2 kuler i, kan de lage ved hjelp av disse 4 smakene?

Forklar hvorfor dere er sikre på det.

Det viser seg at mannen som jobber i is-boden finner 3 nye smaker på bakrommet: karamell, friskis og pistasj.

Til sammen er det nå altså 7 forskjellige smaker å velge mellom.

Elevene kan fortsatt velge seg 2 kuler hver.

Hvor mange ulike kuleis, med 2 kuler i, kan de lage ved hjelp av disse 7 smakene?

Forklar hvorfor dere er sikre på det.

Da jeg var i USA besøkte jeg en is-butikk, som hadde 20 ulike smaker!

Jeg fikk velge meg 2 kuler med is.

Hvor mange ulike kuleis, med 2 kuler i, kunne jeg laget ved hjelp av disse 20 smakene?

Forklar hvorfor dere er sikre på det.

NTNU

Kunnskap for en bedre verden