Johanna Halsne

Matematisk resonnering i lærerveiledninger

En analyse av hva som kjennetegner muligheter for matematisk resonnering i lærerveiledningers innhold

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Kristin Krogh Arnesen
Mai 2022

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Johanna Halsne

Matematisk resonnering i lærerveiledninger

En analyse av hva som kjennetegner muligheter for matematisk resonnering i lærerveiledningers innhold

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Kristin Krogh Arnesen
Mai 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på mine fem fantastiske år i Trondheim. Fem år fylt med nye vennskap, stemningsfulle DDE-konserter, snørike vintermåneder og snørike vårmåneder, en-meters-regel og dansende nordlys og (litt for mange) Viking FK – tap på Lerkendal.

Denne masteroppgaven markerer også slutten på mine fem år på lærerutdanningen ved NTNU. Fem år fylt med ny kunnskap, givende praksisperioder, engasjerte forelesere og engasjerte medstudenter, zoom-undervisning og sensurregistreringer og (litt for mange) fristende tilbud i kantina.

Jeg har i arbeid med denne oppgaven tilegnet meg nyttig og dagsaktuell kunnskap kring det som de neste årene trolig vil bli min følgesvenn: lærerveiledningen. Forhåpentligvis vil kunnskapen jeg deler være til inspirasjon og nytte også for den som leser.

Tusen takk til veileder Kristin Krogh Arnesen for konkrete tilbakemeldinger og informative samtaler i arbeidet. At du delte av din kunnskap, har vært gull verdt.

God lesing!

Trondheim, mai 2022

Johanna Halsne

Sammendrag

Jeg har i denne studien skrevet en matematikkdidaktisk masteroppgave, hvor jeg har analysert innhold i tre forskjellige lærerveiledninger tilhørende 2. trinn. Oppgaven er begrenset til å undersøke hva som kjennetegner muligheter for resonnering. Grunnen til det er at det de siste årene har vært et økende fokus på resonnering i barneskolen, resonnering og bevis er blant annet nå å regne som ett av seks kjerneelement i den nye læreplanen, LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2019). Videre viser det seg at elever har vansker knyttet til resonnering i matematikken (Stylianides, 2009), og at læreboka, som i stor grad påvirker undervisningen (Valverde et al., 2002), kan være skyld i det (Stylianides et al., 2013). Dette dannet bakgrunnen for at jeg ønsket å undersøke problemstillingen:

Hva kjennetegner muligheter for resonnering i arbeid med tall i innhold presentert i lærerveiledninger?

I det teoretiske grunnlaget er matematisk resonnering presentert som begrep forankret i Jeannotte & Kieran (2017) sitt rammeverk. Rammeverket til Charalambous et al. (2010) var utgangspunkt for innsamlingen av data, og dataen ble videre behandlet gjennom åpen koding. Studien har en kvalitativ tilnærming med dokumentanalyse som metode.

Fremtredende i datamaterialet var at muligheter for resonnering kjennetegnet arbeid med partall og oddetall, arbeid med større, mindre, flere eller færre enn, arbeid med tallinja, arbeid med enere og tiere og arbeid med dobling og halvering.

Gjennom drøfting fremkom positive virkninger av å arbeide resonnerende i matematikk. For eksempel at det å arbeide resonnerende kan bidra til økt motivasjon og utforskertrang i faget. En bemerkning er likevel at jeg i denne studien kun har analysert innhold i lærerveiledninger. Jeg kan derfor ikke uttale meg om hva som kjennetegner muligheter for resonnering elever blir gitt, kun hva som kjennetegner muligheter innhold i lærerveiledninger gir for det.

Abstract

This is a mathematics didactic master's thesis that analyzes the content of three different teacher guides belonging to the 2nd grade. The thesis is limited to examining what characterizes possibilities for reasoning. The reason for this is that in recent years there has been an increasing focus on reasoning in primary school, reasoning and evidence are now considered as one of six core elements in the new curriculum, LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2019). Furthermore, it turns out that students have difficulties related to reasoning in mathematics (Stylianides, 2009), and that the textbook, which greatly affects the teaching (Valverde et al., 2002), may be to blame (Stylianides et al., 2013). This formed the background for me wanting to investigate the issue:

What characterizes the possibilities for reasoning in work with figures in content presented in teacher guides?

In the theoretical basis, mathematical reasoning is presented as a concept anchored in Jeannotte & Kieran's (2017) framework. The framework of Charalambous et al. (2010) was the starting point for the collection of data, and the data was further processed through open coding. The study is based on a qualitative approach with document analysis as a method.

Prominent in the data material was that possibilities for reasoning characterized work with even and odd numbers, work with larger, smaller, more or less than, work with the number line, work with ones and tens and work with doubling and halving.

Through discussion, positive effects emerged from working with reasoning in mathematics. For example, working with reasoning can contribute to increased motivation and the urge to explore the subject. One remark, however, is that this study has only analyzed the content of teacher guides. I can therefore not comment on what characterizes the opportunities for reasoning students are given. What I can say, however, is what characterizes the possibilities for reasoning in the content of teacher guides.

Innhold

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Tema for denne studien er matematisk resonnering og hvordan lærebøker i matematikk legger til rette for det. Resonnering er en viktig del av elevers læring og forståelse for matematikk (Ball et al., 2002; Stylianides, 2007; Stylianides & Harel, 2018). Resonnering er også nødvendig for dybdelæring i matematikk (Ball & Bass, 2003; Hanna, 1990).

Tidligere har det i forskningslitteraturen vært vanskelig å finne en tydelig definisjon av hva begrepet matematisk resonnering er (Yackel & Hanna, 2003), men Jeannotte & Kieran (2017) er blant dem som har forsøkt å tilby det. De definerer matematisk resonnering som en kommunikasjonsprosess med seg selv eller andre, som gjør det mulig å slutte matematiske ytringer ut fra andre matematiske ytringer. Videre utarbeidet de et rammeverk for matematisk resonnering i skolen, hvor resonnering blir beskrevet gjennom et struktur- og et prosessaspekt. Strukturaspektet handler om resonnementets struktur. Nærmere forklart handler det om hvordan et resonnement er bygd opp, og eksempler på slike strukturer er deduksjon, induksjon og abduksjon. Prosessaspektet handler om prosesser ved resonnering. Jeannotte & Kieran (2017) klassifiserer prosesser ved resonnering i to hovedkategorier, enten gjennom å lete etter likheter og forskjeller eller gjennom validering. Definisjoner og begrep fra deres studie har vært utgangspunkt for denne studien, og er nærmere forklart i teorikapittelet, kapittel 2.

Resonnering har, tradisjonelt sett, ikke vært noe elevene arbeidet med før de på ungdomsskolen og i høyere utdanning hadde geometri og algebra (Stylianides, 2009). Forskningsfeltet viser også at det har vært usikkerhet rundt hvilken plass resonnering skal ha i undervisningen (Harel, 2007). I dag er det en bredere enighet om at resonnering er avgjørende for matematikklæringen gjennom hele skoleløpet, også på barnetrinnet (Styliandes, 2007). Til tross for det har en stor andel av forskninga fortsatt satt søkelys på matematisk resonnering hos de eldste elevene. Stylianides (2016) er blant dem som belyser et behov for mer forskning på resonnering og bevis i matematikk på barnetrinnet. Med bakgrunn i dette ønsket jeg å forske på resonnering på 2. trinn.

Videre viser forskning at elever på samtlige trinn i skolen har vansker knyttet til resonnering og bevis i matematikken (Stylianides, 2009). Vanskene skyldes imidlertid ikke elevenes kognitive ferdigheter, men undervisningen (Stylianides, 2009). Stylianides et al. (2013) mener vanskene kommer av at undervisningen ikke i stor nok grad vektlegger resonnering. Flere studier viser også at resonnering og bevis bør ha en større og mer sentral rolle i de matematiske erfaringene elevene gjør seg i løpet av utdanningsløpet, enn det de har nå (Ball & Bass, 2003; Reston, 2000; Yackel & Hanna, 2003). De siste tiårene har forskningsfeltet rettet et søkelys mot resonnering og bevis i skolen, men Kongelf (2019) problematiserer at søkelyset i for liten grad er rettet mot innholdet i lærebøkene i matematikk. Dette begrunnes med at læreboka har en sterk posisjon i undervisningen. I følge TIMMS (Third International Mathematics and Science Study) er læreboka hovedkilden til hvordan lærere presenterer matematikk i undervisningen (Valverde et al., 2002). Som oftest bruker lærere læreboka som utgangspunkt for oppgaver, men det finnes også lærere som bruker læreboka som utgangspunkt for alt innhold i matematikken (Haggarty & Pepin, 2001). I tillegg har læreboka hatt stor påvirkning og innflytelse på hvordan lærere legger opp undervisningen, med tanke på metoder og struktur (Valverde et al., 2002). Å forske på lærebøker er noe Li et al., (2009) anbefaler, da de slår fast at å forske på lærebøker vil gi et klart bilde på hva som faktisk blir undervist i og lært om i klasserommet. Resultatene fra TIMMS gjenspeiles i Mosvold (2006) sin doktorgradsavhandling. Mosvold (2006) slår fast at læreboka er hovedkilden til de aller fleste matematikklærere, også i Norge. Denne forskningen viser at lærebokas betydning for undervisningen er stor, og jeg fant det derfor aktuelt å forske på hvordan norske lærebøker implementerer resonnering i sine innhold.

I tillegg til at læreboka ofte er utgangspunkt for planlegging av undervisning skal læreboka også være en fortolkning av læreplanen (Gilje et al., 2016). I 2020 ble det i Norge innført en ny læreplan, LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020), og i kjølvannet av at denne ble innført kom lærebokforlagene ut med flere nye lærebøker. Til forskjell fra tidligere læreplaner regnes nå resonnering og argumentasjon som ett av læreplanens seks kjerneelement. Resonnering blir med det enda mer aktualisert som et viktig felt i den norske skolen. Likevel, Valenta & Enge (2020) studerte hvordan læreplanen legger til rette for resonnering og bevis, og de fant at viktige begrep innenfor resonnering og bevis ikke eksplisitt ble definert i læreplanen. Funnet til Valenta og Enge (2020) motiverte meg derfor til å forske på hvordan lærebøkene tolker læreplanen, og hvordan de faktisk legger til rette for resonnering, når viktige begrep innenfor temaet ikke eksplisitt er definert.

Formålet med studien er å bidra med kunnskap om hva som kjennetegner muligheter for resonnerende arbeid i innhold i lærebøker på barnetrinnet. Mer kunnskap på området kan øke bevisstheten av lærebokas rolle i det å representere læreplanen og ivareta dens kjerneelement. Mer kunnskap på området kan også bidra til at lærere i større grad vurderer lærebøkenes innhold før de bygger undervisningen sin på dem. I en norsk studie svarte 52% av lærerne som deltok at de ikke var fornøyd med læreboka (Lepik et al., 2015). Likevel svarte 49% at de brukte læreboka som hovedredskap i forberedelsene til undervisningen (Lepik et al., 2015). At læreboka ukritisk blir brukt som utgangspunkt for undervisning i den norske skolen, er noe jeg mener kan ha betydning for elevenes faglige utbytte og matematiske kompetanse. Derfor kan en innsikt i lærebøkenes innhold være nyttig, med tanke på om lærere lykkes med å implementere resonnering i undervisningen sin eller ikke. Videre kan dette ha innvirkning på elevers forståelse og kunnskap om matematisk resonnering, som igjen kan påvirke resultat fra ulike undersøkelser, for eksempel TIMSS. Å forske på lærebøkers innhold trenger derfor ikke bare gi resultat i form av hvilken måte lærebøker legger til rette for resonnerende arbeid. Det vil også kunne gi indikasjoner på hva elevene tilegner seg av kunnskap og forståelse om matematisk resonnering.

1.2 Studiens forskningsspørsmål og avgrensinger

Valenta & Enge (2020) forsket som nevnt på hvordan den nye læreplanen legger til rette for bevisrelaterte kompetanser. I sin analyse av læreplanen delte de formuleringer og begrep fra kompetansemålene inn i ulike kategorier hentet fra rammeverket til Hemmi et al. (2013). En av kategoriene kalte de for «Arg» og den omhandlet formuleringer som å argumentere, forklare, begrunne, resonnere og vurdere. Ett av kompetansemålene i matematikkfaget er at eleven etter 2. trinn skal kunne *ordne tal, mengder og former ut frå eigenskapar, samanlikne dei og reflektere over om dei kan ordnast på fleire måtar* (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette kompetansemålet blir ikke av Valenta & Enge (2020) direkte knyttet til «Arg» kategorien, men har likevel valgt å ta utgangspunkt i det i denne studien. Dette fordi ordet reflektere blir sammenliknet med det å overveie eller tenke over noe (Store Norske Leksikon, 2021). De samme synonymene blir også brukt til å forklare hva det vil si å resonnere. Med utgangspunkt i Store Norske Leksikon (2021) sin forklaring kan en da tolke kompetansemålet over som at eleven skal kunne ordne tall, mengder og former ut fra egenskaper, sammenligne de og *resonnere* over om de kan ordnes på flere måter. Som tidligere diskutert er temaet for denne studien matematisk resonnering og jeg fant det derfor interessant å forske på om lærebøkene legger opp til at dette kompetansemålet blir nådd.

I prosessen med å formulere problemstillingen var jeg nødt til å gjøre noen avgrensinger. På grunn av studiens omfang avgrenset jeg problemstillingen til å kun gjelde resonnering i arbeid tall. Å studere hvordan lærebøkene la til rette for resonnering i arbeid med former og mengder, i tillegg, ville krevd mer tid enn det jeg hadde til rådighet i denne studien. Resonnering i arbeid med tall ble valgt til fordel for resonnering i arbeid med mengder og former, fordi jeg i lærebøkene jeg kikket i, fant flere talloppgaver enn jeg fant oppgaver knyttet til mengde og former.

Etter at jeg hadde kikket i lærebøker i matematikk på 2. trinn fattet jeg også ganske raskt at innholdet i lærebøkene var tilpasset leseferdighetene til en andreklassing. Dette kan forklares med at lærebokas struktur, tekst og illustrasjoner er resultat av hva læreverkets forlag vurderer og finner som viktig kunnskap, normer og verdier (Selander & Skjelbred, 2004). Derfor finnes det i de aller fleste læreverk en lærerveiledning. Lærerveiledningen er utformet som en guide, og lærerveiledningenes tilrettelegging og informasjon kan være avgjørende for læreres forståelse av kompetansemålene i faget (Gilje et al., 2016). Med andre ord kan en slå fast at det er gjennom lærerveiledningen en finner lærebokforfatternes intensjoner bak og forklaringer til de ulike oppgavene en lærebok på 2. trinn inneholder, og at det er gjennom lærerveiledningen en får innblikk i hvordan læreverket vurderer hvordan et kompetansemål skal bli nådd.

For å illustrere hvordan intensjonene og forklaringene til en oppgave i læreboka kan komme frem i en lærerveiledning har jeg laget en figur (figur 1):

Oppgave i lærebok:

Hvor mange til sammen?

10 knapper	10 knapper	10 knapper	10 knapper

______ knapper

Oppgave i lærerveiledning:

Hvor mange til sammen?

10 knapper	10 knapper	10 knapper	10 knapper	______ knapper

Hvor mange til sammen?
Elevene har ikke mulighet til å telle ett og ett objekt, men må telle med 10, 5, og 2 av gangen. Samtal gjerne om at det er 4 like esker/grupper med knapper, det er i 10 i hver og derfor 40 til sammen osv.

Figur 1. Hvordan en oppgave er presentert i en lærebok og i en lærerveiledning, tilpasset versjon av oppgave hentet fra Matematikk 2A (Dahl & Nohr, 2020, s. 9).

Figuren illustrerer hvordan en gjennom lærerveiledningens oppgave får mer informasjon om hva hensikten med oppgaven er. Dersom en lærer hadde fulgt lærerveiledningen til punkt og prikke, ville sannsynligheten for at læreren samtalte med elevene om at det er 4 like esker/grupper med knapper og dermed 10 i hver og derfor 40 til sammen, vært større enn dersom læreren kun hadde forholdt seg til læreboka. Dette mener jeg fordi det til oppgaven i læreboka ikke følger med en forklaring på hvilke spørsmål lærerveiledningens forfattere mener kan være hensiktsmessige å stille.

Med tanke på at jeg i denne studien ville studere hva som kjennetegner muligheter lærebøker legger til rette for resonnering i arbeid med tall, fant jeg det derfor mest hensiktsmessig å studere lærerveiledningene til de ulike lærebøkene. Å studere lærerveiledninger heller enn lærebøker var også mest rettferdig overfor læreverkets forfattere, da det er gjennom lærerveiledningene de får presentert potensialet i, hensikten bak og målet med lærebokas oppgaver, som vist i figur 1. Videre i denne oppgaven er oppgaver, tekst og eksempel jeg viser til utelukkende hentet fra lærerveiledningene. Det er også lærerveiledningens innhold som er utgangspunkt for analysen.

Forskningsspørsmålet for denne studien er derfor:

Hva kjennetegner muligheter for resonnering i arbeid med tall i innhold presentert i lærerveiledninger?

Lærerveiledningen er en stabil, objektiv kilde. Likevel, kunnskapen rundt og forståelsen av lærerveiledningen er ikke objektiv, da det avhenger av hvem som bruker den. Det vil altså være samspillet mellom lærer og lærerveiledning som avgjør utfallet av læringssituasjonen, og en kreativ lærer kan finne muligheter til arbeid med resonnering utover det som er presentert i lærerveiledningen. Jeg finner det derfor viktig å presisere at analysen i denne oppgaven ikke sier noe om hva som kjennetegner *alle* muligheter som finnes i en lærerveiledning, men den sier noe om hva som kjennetegner muligheter som er tenkt fra forfatternes side, gjennom innholdet lærerveiledningene presenterer.

1.3 Studiens paradigmatiske forankring

I all type forskning ligger det en paradigmatisk og vitenskapsteoretisk forankring bak (Krumsvik, 2014). Forankringen gir forskeren innblikk i egenarten til fenomenet som skal studeres, studiens ontologi. Den gir også innblikk i hvilke spørsmål som skal belyses, studiens epistemologi, og hvilke metoder som er nødvendige for å forstå fenomenet en studerer på, studiens metodikk. Mens ontologi handler om hva virkeligheten er og består av, handler epistemologien om hva kunnskapen er og defineres som (Krumsvik, 2014). Forskerens virkelighetsoppfatning og syn på kunnskap er styrt av hvilket paradigme forskeren befinner seg i. Et paradigme er et grunnleggende verdensbilde som hjelper forskeren å ta stilling til ontologien, epistemologien og metodikken (Guba & Lincoln, 1994). Positivismen, konstruktivismen og pragmatismen er eksempel på ulike paradigme (Postholm & Jacobsen, 2018).

Denne studien har jeg plassert innenfor det postpositivistiske paradigme. Et postpositivistisk paradigme er en blanding av positivismen og konstruktivismen (Postholm & Jacobsen, 2018). I en lærebokanalyse er forskeren fri fra objektet, og vil ikke kunne påvirke dette direkte. Forskeren vil være nøytral og skilt fra virkeligheten, og en slik tilnærming kjennetegner positivismen (Postholm & Jacobsen, 2018). Likevel vil ikke forskerens objektivitet og nøytralitet kunne karaktiseres som fullstendig, da det er flere faktorer ved studien som blir styrt av forskerens subjektivitet. For eksempel forskerens forutinntatte antakelser og forskerens valg av tema og problemstilling. I arbeidet med å kode og analysere datamaterialet vil forskeren også basere seg på sine egne tolkninger og forståelser, og resultatene vil være en oppfattelse av virkeligheten heller enn virkeligheten selv. En slik tilnærming kjennetegner konstruktivismen (Postholm & Jacobsen, 2018). Med tanke på at jeg i min studie har gjennomført en lærebokanalyse hvor jeg i utgangspunktet har vært løsrevet fra objektet, ved at datamaterialet har vært satt og ikke påvirkelig, har jeg med mine subjektive tolkninger og forståelser også analysert det. Studien har jeg derfor plassert innenfor det postpositivistiske paradigme, hvor synet på forskning baserer seg på teorier om at forskeren og virkeligheten vanskelig kan skilles, men at sann kunnskap om virkeligheten likevel er mulig å frembringe (Postholm & Jacobsen, 2018).

1.4 Oppgavens struktur

Oppgaven er delt inn i ulike kapitler. Først et innledningskapittel hvor jeg har gjort rede for studiens bakgrunn, hvilke avgrensinger det er gjort i forbindelse med studien samt studiens forskningsspørsmål. Videre er det et teorikapittel. I teorikapittelet har jeg presentert hva jeg i denne studien har lagt til grunn i begrepet resonnering. Teorien er forankret i Jeannotte & Kieran (2017) sitt rammeverk. Teorikapittelet etterfølges av et metodekapittel der studiens metode for analyse er gjort rede for. Valg av metode, innsamling av data, gjennomføring av analyse, oppgavens troverdighet og etiske hensyn er sentrale faktorer i kapittelet. Resultatene jeg fikk, at det som kjennetegner muligheter for resonnering blant annet er arbeid med partall og oddetall, større/mindre/færre/flere enn, tiere og enere, rekkefølgen til tall og dobling/halvering, er presentert i resultatkapittelet. I det sjette kapittelet, diskusjonskapittelet, har jeg først oppsummert studiens funn, deretter er de drøftet i lys av tidligere forskning. I tillegg har jeg diskuteret studiens pedagogiske implikasjoner og studiens begrensinger og metodekritikk. Avslutningsvis har jeg diskutert studien som utgangspunkt for videre forskning.

2. Teori

Matematisk resonnering er et sentralt begrep i forskningsspørsmålet, og jeg har i dette kapittelet gjort rede for hva jeg har lagt i begrepet. Redegjørelsen tar utgangspunkt i et rammeverk fra Jeannotte & Kieran (2017), og er nærmere forklart i kapittel 2.2. Hvorfor akkurat Jeannotte & Kieran (2017) er valgt som teoretisk rammeverk er gjort rede for i kapittel 2.1.

2. 1 Valg av teoretisk rammeverk

I litteraturen er resonnering ofte definert som en ferdighet av høy, logisk kvalitet (Silver, 1997). Dette er ikke tilfellet i Jeannotte & Kieran (2017) sin studie. Deres overordnede syn på matematisk resonnering er at resonneringen kan skje på alle nivå i arbeid med å løse matematiske problem. Et slikt syn på matematisk resonnering er i tråd med nasjonale læreplaner, som legger opp til at elever på alle trinn skal oppnå kompetanse i det å kunne resonnere matematisk. Dette blir blant annet belyst gjennom LK20 sitt kjerneelement, resonnering og argumentasjon (Utdanningsdirektoratet, 2020). Forskningsspørsmålet i denne studien retter fokus mot resonnering på 2. trinn. For å best besvare forskningsspørsmålet fant jeg det naturlig å ta utgangspunkt i en definisjon av resonnering som ser på resonnering som en kompetanse en andreklassing har forutsetninger for å oppnå, noe Jeannotte & Kieran (2017) gjør. Andre forskere som deler denne oppfatningen, er blant annet Ball & Bass (2003), som ser på matematisk resonnering som en grunnleggende ferdighet, og Lithner (2007), som argumenterer for at resonnering både finnes og brukes i alle vanskelighetsgrader i matematikken.

Matematisk resonnering er et begrep det i forskningslitteraturen ofte er en implisitt antagelse om hva innebærer, men ingen eksplisitt definisjon av (Yackel & Hanna, 2003). Jeannotte & Kieran (2017) forsøkte derfor å klargjøre begrepet. Med bakgrunn i en litteraturstudie lagde de et rammeverk for matematisk resonnering. Rammeverket består av ulike trekk som går igjen i litteraturen og definerer matematisk resonnering som det å slutte matematiske ytringer fra andre matematiske ytringer (Jeannotte & Kieran, 2017). At rammeverket forener hvordan begrepet blir beskrevet av ulike forskere, heller enn at det er et resultat av en enkelt studie, var en av grunnene til at jeg foretrakk det rammeverket. En annen grunn til at jeg valgte det rammeverket var at det sammenfatter et bredt spekter av litteraturen.

I tillegg er Jeannotte & Kieran (2017) sitt rammeverk brukt som utgangspunkt i liknende sammenhenger. Blant annet brukte Valenta & Enge (2020) det som utgangspunkt i sin analyse av hvilke muligheter og utfordringer for elevers læring og kompetanseutvikling av resonnering det finnes i den nye læreplanen, LK20. Også Herbert & Williams (2021) bygde sin studie, hvordan en førsteklasselærer implementerte resonnering i sin undervisning på, på Jeannotte & Kieran (2017) sin definisjon av begrepet. At rammeverket er benyttet i liknende studier fant jeg positivt, fordi det forsterker rammeverkets legitimitet i form av troverdighet og aksept i forskningsmiljøet.

2.2 Matematisk resonnering

For å beskrive matematisk resonnering utviklet Jeannotte & Kieran (2017) en modell. Modellen er bygget på Sfards (2008) begrep om kommognisjon og viser til to aspekt ved resonneringen: et strukturelt aspekt og et prosessorientert aspekt. Videre er hvert aspekt delt inn i ulike prosesser. For å gi et overordnet blikk av modellen har jeg utformet en tabell (figur 2). Tabellen er nærmere presentert i dette kapittelet.

<table>
<tr><th colspan="3">Matematisk resonnering</th></tr>
<tr><th>Strukturelt aspekt</th><th colspan="2">Prosessorientert aspekt</th></tr>
<tr><td>Deduksjon
Induksjon
Abduksjon</td><td>Prosesser som innebærer å finne likheter og forskjeller</td><td>Prosesser som innebærer validering</td></tr>
<tr><td></td><td>Generalisere
Forme en hypotese
Identifisere et mønster
Sammenligne
Klassifisere</td><td>Begrunne
Formulere bevis
Formulere formelle bevis</td></tr>
</table>

Figur 2. Aspekter ved matematisk resonnering (Jeannotte & Kieran, 2017).

2.2.1 Strukturelt aspekt

Det strukturelle aspektet består av prosesser som handler om å gjøre rede for hvordan et matematisk resonnement er bygd opp (Jeannotte & Kieran, 2017). De mest kjente formene å gjøre rede for det er gjennom deduksjon, induksjon eller abduksjon. Deduksjon, induksjon og abduksjon er alle prosesser som handler om bevisføring, å bevise at noe er sant eller sannsynlig, samt å trekke logiske slutninger. Med bakgrunn i forskningsspørsmålet for denne studien fant jeg det strukturelle aspektet ved resonnering lite relevant. Jeg har i denne studien forsket på lærerveiledninger tilhørende 2. trinn, og prosessene innenfor det strukturelle aspektet ved resonnering ville, slik jeg tolket dem, i skriftlig læreboksammenheng være tiltenkt høyere klassetrinn enn det. Det strukturelle aspektet er derfor ikke videre omtalt.

2.2.2 Prosessorientert aspekt

Det prosessorienterte aspektet består av ni ulike prosesser innenfor matematisk resonnering. Alle har til felles at de utleder narrativ om objekter eller relasjoner, ved å utforske relasjonen mellom objektene (Jeannotte & Kieran, 2017). Narrativ er et begrep en finner igjen i det kommognitive perspektivet, og kan for eksempel være skriftlige eller muntlige beskrivelser av objektet (Sfard, 2008). Videre i teksten har jeg brukt begrepet påstander om begrepet narrativ. Eksempel på matematiske påstander er: «tall som kan deles i to like deler er partall», «fire er dobbelt så stort som to» og «alle tall i fem-gangen er delelig på fem».

Jeannotte & Kieran (2017) deler de forskjellige prosessene inn i to kategorier, den ene kategorien består av fem prosesser knyttet til leting etter likheter og ulikheter, den andre kategorien består av tre prosesser knyttet til validering. Den siste prosessen, eksemplifisering, fungerer kun som en støtte innenfor de to kategoriene, ved at det gjennom prosessen sluttes eksempler. På grunn av prosessens funksjon ble den ikke videre vurdert som aktuell som utgangspunkt for analyse i denne studien.

Det som skiller prosesser knyttet til leting etter likheter og ulikheter fra prosesser knyttet til validering er den epistemiske verdien til påstandene som utledes. *Epistemisk verdi* er et begrep som forteller om påstanden er sannsynlig, sann eller usann (Jeannotte & Kieran, 2017). Prosessene knyttet til leting etter likheter og ulikheter har som mål å tilordne påstandene en epistemisk verdi, mens prosessene knyttet til validering har som mål å endre påstandenes epistemiske verdi.

For eksempel: En prosess knyttet til leting etter likheter og ulikheter utleder en påstand som at «alle tall i 10-gangen slutter på 0». Påstanden tilordnes da en epistemisk verdi som sannsynlig, sann eller usann. Dersom påstanden for en elev verken er åpenbar sann eller usann, bør den valideres. Gjennom prosesser knyttet til validering endres den epistemiske verdien til påstanden fra sannsynlig til mer sannsynlig, fra sannsynlig til sann eller fra sannsynlig til usann.

Jeg har videre i kapittelet gjort rede for de ulike prosessene knyttet til leting etter likheter og ulikheter og prosessene knyttet til validering.

Prosesser knyttet til leting etter likheter og ulikheter

Jeannotte & Kieran (2017) relaterer fem prosesser til leting etter likheter og ulikheter. Disse fem prosessene er: identifisering av mønster, sammenligning, generalisering, klassifisering og hypotesesetting. På samme måte som at hver prosess har sin egen verdi, har alle til felles at de leder til påstander om matematiske objekt, som kan være både sannsynlige, sanne eller usanne.

Jeg har gitt en nærmere forklaring på hva matematiske påstander kan være, og hvordan de kan oppstå under matematisk arbeid, gjennom et eksempel (Eksempel 1):

På et 2. trinn planlegger læreren å notere tallene fra 0 til 40 på tavla i form av en tabell med rader på ti, som vist i tabellen nedenfor. Læreren planlegger å spørre elevene om de ser noe mønster blant tallene.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Gjennom denne aktiviteten kan det komme frem ulike matematiske påstander som følge av et resonnerende arbeid. For eksempel:

«Alle tall i den første kolonnen slutter på tallet 1» og «alle tall i den andre raden begynner med tallet 1» er påstander som kan komme gjennom *identifisering av mønster*.

«Alle tall i den første kolonnen vil slutte på tallet 1 uansett hvor langt vi fortsetter å telle» er en påstand som kan komme som et resultat av *generalisering*.

Generaliseringen vil skje på grunn av at påstanden omhandler mer enn det som kan observeres av tabellen.

«5 og 15 har samme tall på enerplassen» er en påstand som kan oppstå ved at eleven *sammenlikner*.

«Tallene i den siste kolonnen er tall i 10-gangen» er en påstand som kan komme gjennom *klassifisering,* ved at eleven har vurdert tallene ut fra hvilken gange de går opp i.

«Annethvert tall er partall og oddetall, uansett hvor langt vi fortsetter å telle» er også en påstand en elev kan komme med. Påstanden er ikke nødvendigvis åpenbar sann for alle elevene på trinnet. Påstanden kalles da for en hypotese, og er et resultat av en *hypotesesetting*.

Eksempel 1. Tilpasset versjon av eksempelet i Valenta & Enge (2022) sitt kapittel i QED 1-7, hentet fra (Valenta & Enge, 2022, s. 510).

Selv om jeg gjennom eksempel 1 viste til påstander knyttet til hver enkelt prosess, henger de ulike prosessene tett sammen. Påstander kan derfor være resultat av flere prosesser samtidig. For eksempel kan påstanden «Alle tall i den fjerde raden begynner på 4» komme av at eleven både *identifiserer et mønster*, *sammenlikner* og *klassifiserer.* Påstanden «det er en differanse på ti mellom hvert tall som står under hverandre, uansett hvor langt en fortsetter å telle» kan være et resultat av både en *generalisering* og en *hypotesesetting.*

Dersom prosessen(e) som utleder en påstand ikke er helt åpenbar for det gitte felleskapet, slik som «det er en differanse på ti mellom hvert tall som står under hverandre, uansett hvor langt en fortsetter å telle» kan tenkes å være i en 2.klasse, bør påstanden i videre arbeid valideres.

Prosesser knyttet til validering

Jeannotte & Kieran (2017) knytter tre prosesser til validering. Disse er: begrunnelse, formulering av et bevis og formulering av et formelt bevis. Felles for alle prosessene er at de endrer den epistemiske verdien til en påstand. Den epistemiske verdien kan endres fra sannsynlig til mer sannsynlig, fra sannsynlig til sann eller fra sannsynlig til usann.

Å formulere formelle bevis handler om å formulere bevis bygget på matematiske teorier og teorem (Jeannotte & Kieran, 2017). Det vil si at de definisjonene og sammenhengene en baserer beviset sitt på, ikke bare må være sanne, men også være en del av en bestemt matematisk teori. Formelle bevis er slik jeg vurderte dem kun relevante for disiplinfaget matematikk og er derfor ikke videre omtalt i denne studien.

I forlengelse av eksempel 1 har jeg gitt en nærmere forklaring på hvordan prosessene knyttet til validering kan oppstå under matematisk arbeid. Dette har jeg vist gjennom et nytt eksempel (eksempel 2):

På et 2. trinn har en elev kommet med en matematisk påstand «annethvert tall er partall og oddetall, uansett hvor langt vi fortsetter å telle».

En elev kan *begrunne* påstanden med at den er sann «fordi førtien, førtito, førtitre og førtifire også er annethvert partall og oddetall».

Påstandens epistemiske verdi endres da fra sannsynlig til mer sannsynlig, fordi eleven identifiserer en grunn for påstandens epistemiske verdi basert på eksempler.

En elev kan også *formulere et bevis* for at påstanden er sann «fordi tallet 7 er et oddetall. Vi kan skrive tallet om som (6+1), altså som (partall + 1). Dersom vi trekker fra 1, vil vi stå igjen med (-1 + partall + 1), som gir partall. Dette kan være et bilde på tallet foran et oddetall i en tallrekke med hele tall. Dersom vi legger til enda 1, altså (partall + 1 + 1), vil vi også få et partall fordi (partall + 2) gir et partall, og dette kan være et bilde på tallet etter et oddetall i en tallrekke med hele tall. Dette vil gjelde for hvilket som helst oddetall en tar utgangspunkt i i en tallrekke med hele tall».

Påstandens epistemiske verdi endres da fra sannsynlig til sann, fordi eleven beviser påstandens epistemiske verdi som sann basert på gyldige definisjoner og kjente sammenhenger.

Eksempel 2. Eksempel på prosesser knyttet til validering (Jeannotte & Kieran, 2017).

I eksempel 2 bevises påstanden «annethvert tall er partall og oddetall, uansett hvor langt vi fortsetter å telle» sann gjennom et bevis. I eksempelet kommer det frem at beviset bygger på gyldige definisjoner og kjente sammenhenger. Hva som anses som gyldige definisjoner og kjente sammenhenger vil variere, alt etter hvilken tidligere kunnskap og erfaring deltakere i den matematiske diskursen har (Jeannotte & Kieran, 2017). Videre bygger beviset på et generisk eksempel. Et generisk eksempel tar utgangspunkt i noe konkret, men er presentert på en måte som gjør at det konkrete fungerer som en bærer for noe generelt (Mason & Pimm, 1984). Om en elev på 2. trinn har kompetanse til å formulere et slikt bevis er ikke sikkert, men jeg fant det relevant å vise til, fordi et generisk eksempel kan være eksempel på et matematisk korrekt bevis (Jeannotte & Kieran, 2017).

2.3 Liknende studier

Etter søk i ulike databaser fant jeg en rekke studier som i likhet med denne studien, baserer seg på lærebokanalyse. At det finnes studier med lik metodisk tilnærming er ikke overraskende, da forskning på lærebøker har blitt mer og mer vanlig (Fan et al., 2013). Resultat viser at hele 63% av studier på lærebøker enten gjør en analyse eller sammenlikning av dem, resterende studier har hatt fokus på bruken av lærebøker eller hvordan lærebøkene påvirker undervisningen i klasserommet (Fan et al., 2013).

På samme måte som at det i stor grad finnes studier med liknende metode for analyse, finnes det også en mengde studier med liknende tematisk tilnærming. Blant annet Stylianides (2009), Stacey & Vincent (2009) og Thompson et al. (2012).

Stylianides (2009) og Thompson et al. (2012) analyserte lærebøker med fokus på matematisk resonnering og bevisføring. Hensikten med studien til Stylianides (2009) var å se hvorvidt lærebøkene ga elevene mulighet til å utforske hvordan sammenhenger i mønstre kan føre til antagelser som igjen kan føre til generering av bevis. Thompson et al. (2012) ønsket å studere hvordan bevisrelatert resonnering ble brukt til å forklare ulike matematiske egenskaper. Stacey & Vincent (2009) analyserte lærebøker med fokus på hvordan de presenterte resonnerende arbeid. Bakgrunnen for deres studie var at elevers matematikkforståelse ikke skal begrenses til å kun omhandle regler og formler, men at forståelsen også skal bygge på matematisk resonnering (Stacey & Vincent, 2009).

Forskningsspørsmålet for denne studien omhandler muligheter for matematisk resonnering i lærerveiledningers innhold, og de nevnte studiene over er derfor studier jeg selv mener er liknende. Det som imidlertid skiller studiene, er blant annet utvalg av datamaterialet.

Stylianides (2009) analyserte lærebøker til mellom- og ungdomstrinnet, Stacey & Vincent (2009) analyserte lærebøker til åttende trinn mens Thompson et al. (2012) analyserte lærebøker til videregående trinn. Utvalget i denne studien har basert seg på data fra barnetrinnet. Studien min vil derfor kunne bidra til et bredere spekter av forskning knyttet til matematisk resonnering. Det at jeg i tillegg har analysert lærerveiledninger, ikke lærebøker, og at lærerveiledningene er norske, ikke amerikanske (Stylianides, 2009; Thompson et al., 2012) eller australske (Stacey & Vincent, 2009) er andre aspekt ved studien jeg mener vil påvirke det matematikkdidaktiske forskningsmiljøet positivt.

3. Metode

I dette kapittelet har jeg gjort rede for studiens forskningsdesign- og metode. Et forskningsdesign er et mønster som beskriver retningslinjene en forsker må følge for å gjennomføre studien (Thagaard, 2009). Forskningsdesignet velges med bakgrunn i forskningsspørsmålet, da det er forskningsspørsmålet som peker på hva studien skal sette søkelys på.

3.1 Kvalitativ metode

Forskningsspørsmålet for denne studien er: *Hva kjennetegner muligheter for resonnering i arbeid med tall i innhold presentert i lærerveiledninger?*

I min forskning ønsket jeg å si noe om det generelle, matematisk resonnering, ved å betone det spesielle, hva som kjennetegner muligheter innhold i lærerveiledninger på 2. trinn legger til rette for det. Ifølge Postholm & Jacobsen (2012) har denne studien da en kvalitativ forskningsmetode. I forskningsmiljøet skiller en generelt sett mellom kvalitative og kvantitative metoder, men Silverman (2011) understreker at det ikke finnes en metode som er bedre enn andre. Forskjellen ligger heller i datamaterialet, om det er fremstilt i tall eller tekst (Grønmo, 2012). Kvantitative metoder blir hovedsakelig brukt når en skal analysere datamateriell fremstilt i tall eller andre former for mengde, mens kvalitative metoder blir brukt når en skal analysere datamateriell fremstilt som tekst. Noen ganger kan det å bare ha en forskningsmetode gi en for smal studie på visse fagfelt (Creswell, 2009). Postholm & Jacobsen (2012) mener at det da kan være hensiktsmessig å benytte begge metodene sammen. Å benytte seg av begge forskningsmetodene blir kalt for *mixed methods* (Creswell, 2009) som oversatt blir kalt *blandet metode*.

I innsamlingen av studiens datamateriell kom det gjennom tabeller til syne ulike former for tall. For eksempel ble det i tabellene ført opp antall sider lærerveiledningenes kapitler bestod av, samt årstall for utgivelse og nummer på oppgavene. Likevel, disse tallene ble kun brukt som et verktøy i datainnsamlingen. Jeg som forsker har hatt et nært forhold til forskningen, datamaterialet er stort sett basert på tekst og i analysearbeidet er det gått i dybden på et lite utvalg. Studiens forskningsmetode har jeg derfor kategorisert som kvalitativ.

3.2 Dokumentanalyse

Fokuset for denne oppgaven er matematisk resonnering, og informasjonen jeg har søkt har vært hva som kjennetegner muligheter lærerveiledningene ut fra sitt innhold, gir for det i arbeid med tall. Thagaard (2009) mener at fokuset en har og informasjonen en søker bør gjenspeiles i valg av metode. Med tanke på det har jeg derfor valgt å gjennomføre en innholdsanalyse. En innholdsanalyse er studie av tekst, som kan basere seg på både feltdata og publiserte dokumenter (Thagaard, 2009). Feltdata kan være tekst fra intervju eller notater fra observasjoner som forskeren selv har samlet inn. Publiserte dokumenter kan være tekst fra forskning, bøker, læreplaner og lærebøker. Det som skiller feltdata fra publiserte dokumenter er både hvem som eier teksten, men også i hvilket formål den ble produsert. Mens feltdata i all hovedsak er produsert i forbindelse med forskning, er ikke tekst fra publiserte data det (Thagaard, 2009). En innholdsanalyse av publiserte dokumenter blir derfor betegnet som en dokumentanalyse. Et dokument kan være av både offentlig og privat karakter, samtidig som det kan være et åpent eller et lukket dokument. Et åpent dokument er gjort offentlig tilgjengelig, et lukket dokument er kun tilgjengelig for de som får innvilget innsyn i teksten (Scott, 1990).

Den type dokument som skal brukes i en dokumentanalyse, er ofte bestemt av forskningsspørsmålet, da forskningsspørsmålet for eksempel kan legge opp til analyse av et gitt tema eller dokument (Brinkmann et al., 2012). Dette har vært tilfelle i denne studien. Forskningsspørsmålet styrte dokumentanalysen til å gjelde analyse av lærerveiledninger i matematikk.

Ved en dokumentanalyse finnes det både fordeler og ulemper (Denscombe, 2003). Jeg har i de neste avsnittene gjort rede for disse. Videre er det Denscombe (2003) beskriver som ulemper, i denne teksten blitt beskrevet som utfordringer. Dette fordi jeg ikke ser på punktene som svakheter ved metoden, men heller punkter man er nødt til å være bevisst på.

En fordel ved dokumentanalyse er blant annet tilgangen forskeren har til data, da det er forholdsvis enkelt, samt billig, for forskeren å få tilgang til den. Dataen Denscombe (2003) viser til i denne forbindelse er forbeholdt åpne dokumenter. Denne fordelen dro jeg nytte av i min forskning, da lærerveiledningene jeg analyserte alle var tilgjengelige for gratis lån på biblioteket. I tillegg er en dokumentanalyse en kostnadseffektiv metode, da man kan skaffe store mengder data på en rask og effektiv måte. Det er også en fordel at dataen en samler inn i en dokumentanalyse er holdbar. I og med at dataen jeg har samlet inn er tilgjengelig for andre, kan den også kontrolleres av andre. Dette bidrar til å øke holdbarheten på analysen. Denne fordelen er videre diskutert i kapittel 3.6.1, studiens reliabilitet.

En utfordring ved dokumentanalyse kan ifølge Denscombe (2003) være dokumentets troverdighet. Etter at godkjenningsordningen for norske lærebøker i 2000 opphørte (Språkrådet, 2021), kan, i teorien, hvem som helst gi ut lærebøker i matematikk. For meg som forsker ble det derfor viktig at jeg i forkant av analysen vurderte lærerveiledningenes autoritet, dette har jeg vist til i kapittel 3.3. En annen utfordring kan være at dokumentene jeg har analysert er sekundære data. Det vil si at forfatterne av lærerveiledningene har skrevet dem for et annet formål enn det jeg brukte dem til i forskningen. Utfordringen kan sees på som et etisk hensyn forskeren er nødt til å ta i betraktning, noe jeg har diskutert nærmere i kapittel 3.7. En siste utfordring Denscombe (2003) legger frem er at det i en dokumentanalyse kan forekomme en sosial fortolking. Med det menes det at forfatteren av dokumentet kan legge mer tolkning i dokumentet enn det forskeren rent objektivt ser i sin analyse. Det er viktig å understreke at det også kan gjelde for lærerveiledningene som er blitt analysert i denne studien, og det er også diskutert nærmere i kapittel 3.7.

Scott (1990) viser til fire kriterier for hva som kjennetegner et godt dokument, dersom dokumentet skal bli studert i et gitt formål. *Autensitet* er det første kriteriet, og det handler om hvorvidt dokumentet er ekte og om det gir seg ut for å være det det er. *Troverdighet* er det andre kriteriet, og troverdigheten måles i hvilket formål dokumentet er skrevet for, hvem som har skrevet det og når det ble skrevet. Disse faktorene vil gi svar på hvor nøyaktig dokumentet er og i hvilken grad dokumentet er fritt for feil og forutinntatte meninger. Det tredje kriteriet er *representativitet*. For å måle dokumentets representativitet tar man stilling til om dokumentet er et typisk tilfelle, og om det er representativt for de fleste slike typer dokument. Siste kriteriet er dokumentets *mening*. Meningen i dokumentet finnes i ordene som er brukt, eller ikke brukt, for å fremme et tydelig eller skjult budskap. Ordene kan være klare og tydelige, eller de kan være preget av sjargong og udefinerbare koder.

Disse kriteriene er i varierende grad også diskutert senere i teksten, i kapittel 3.6, studiens reliabilitet og validitet.

I neste kapittel har jeg gjort rede for studiens utvalg, og vurdert lærerveiledningene opp mot kriteriene til Scott (1990). Hvem som har skrevet dokumentet, hvem som skal være mottaker av dokumentet og hva formålet med dokumentet er, er også diskutert, da disse punktene har stor betydning for hvordan dokumentet bør leses og hvordan det på best mulig måte kan brukes i analysearbeidet (Andersen, 2016).

3.3 Utvalg

På grunn av oppgavens omfang ble jeg nødt til å gjøre noen avgrensninger rundt hvilke lærerveiledninger jeg skulle analysere. Jeg har videre i dette kapittelet gjort rede for oppgavens valg av års-trinn og læreverk til de ulike lærerveiledningene jeg har analysert. Begrunnelse for valg av tema ble gitt i oppgavens innledning, og er derfor ikke kommenteret her.

Masteroppgaven jeg har skrevet er innenfor begynneropplæringen, dette begrenser studien til å gjelde første og andre årstrinn. Jeg valgte å analysere lærerveiledninger på 2. trinn da dette var det høyeste av de to trinnene, og jeg tenkte at det i dem var større sannsynlighet for å finne tilrettelegging for resonnering i arbeid med tall.

I valg av hvilke læreverk jeg skulle bruke som utvalg var mulighetene flere, da det i Norge i dag finnes en rekke læreverk i matematikk. Valget på hvilke læreverk sine lærerveiledninger jeg i denne oppgaven skulle analysere falt på *Multi, Matemagisk* og *Volum.*

Multi er et læreverk utgitt av Gyldendal, og er mye brukt i norsk skole. De kom i 2020 ut med en ny utgave som skal *hjelpe skole og lærere med å ta i bruk nye læreplaner til fagfornyelsen 2020* (Alseth et al., 2020, s. 3)

Et annet, mye brukt læreverk i norsk skole er Matemagisk. Det er forlaget Aschehoug som har gitt ut Matemagisk. I likhet med Multi kom også Matemagisk i 2020 ut med en ny utgave av læreverket som skal *legge det grunnlaget elevene trenger for å mestre matematikken og oppleve matematikk som relevant, spennende og lærerik* (Fritzen et al., 2020, s. 4).

Det siste læreverket jeg har analysert er Volum, utgitt av Fagbokforlaget. Volum er et nytt læreverk i matematikk for barneskolen etter fagfornyelsen 2020, og ønsker å *gi elevene læringsglede og mestring i matematikkfaget* (Bugten & Olafsen, 2021, s. omslag) I motsetning til Multi og Matemagisk er ikke Volum en revidert utgave tilpasset til den nye læreplanen, men det er skrevet ut av den nye læreplanen.

Både Multi, Matemagisk og Volum er læreverk som oppfyller Scotts (1990) første kriteriet om autensitet, da alle kategoriserer sine respektive dokument som lærerveiledninger. Også det andre kriteriet, troverdighet, er oppfylt. Dette fordi formålet i alle læreverk er at lærerveiledningene skal fungere som en hjelp og støtte for lærerne med å gi elevene mestring og læringsglede i matematikk. Samtlige læreverk er også utgitt i tidsrommet 2020-2021, som gjør dem troverdige med tanke på når dem er skrevet. Lærerveiledningene til de ulike læreverkene kan også sies å være typiske tilfelle av de fleste typer slike dokument, da de alle følger en typisk struktur. På den måten oppfyller de det tredje kriteriet representativitet. Og det siste kriteriet, dokumentets mening, oppfylles av samtlige læreverk ved at de alle fremmer et tydelig budskap med klare og definerbare ord.

3.4 Innsamling av datamateriale

Forskningsspørsmålet i denne studien etterspør *kjennetegn ved* muligheter for resonnering, ikke *om* det finnes muligheter for resonnering. For å kartlegge hva som kjennetegner muligheter lærerveiledningers innhold gir for resonnering i arbeid med tall ble jeg derfor nødt til å først få en oversikt over det aktuelle innholdet.

I innsamlingen av studiens datamateriale tok jeg utgangspunkt i det konseptuelle rammeverket Charalambous et al. (2010) utviklet. Rammeverket er utviklet for å kunne studere lærebøker i matematikk, og egnet seg derfor som utgangspunkt og inspirasjonskilde for denne studien. Selv om hensikten i denne studien ikke er å sammenligne kvaliteten på lærebøker, noe Charalambous et al. (2010) i sin studie gjorde, tilbydde rammeverket likevel en systematisk gjennomgang av lærerveiledningenes innhold. Rammeverket består av en horisontal og vertikal analyse. Den horisontale analysen omfatter overordnet informasjon som lærebøkenes bakgrunnsinformasjon og struktur, mens den vertikale analysen går mer i dybden av det matematiske innholdet til lærebøkene (Charalambous et al., 2010). Charalambous et al. (2010) argumenterer for at analyseverktøyets to deler ikke skal stilles opp mot hverandre, men heller sees i forlengelse av hverandre. Hvis den horisontale analysen har som mål å gi en oversikt over lærebokas innhold, vil den vertikale analysen ha som mål å gi informasjon om hvordan innholdet i læreboka er presentert (Charalambous et al., 2010).

Rammeverket slik Charalambous et al. (2010) benyttet det, ble for omfattende for denne studien. Jeg ble derfor nødt til å gjøre noen tilpasninger. Tilpasningene jeg har gjort er hovedsakelig under den vertikale analysedelen, og er blitt gjort rede for videre i kapittelet.

3.4.1 Horisontal analyse

Den horisontale analysen blir av Charalambous et al. (2010) delt inn i to kategorier: *bakgrunnsinformasjon* og *struktur*. Kategorien bakgrunnsinformasjon favner informasjon om hvordan lærebøkene er produsert (Charalambous et al., 2010). Eksempel på bakgrunnsinformasjon er lærebokas forfattere, lærebokas forlag, årstall for når læreboka ble gitt ut, lærebokas antall sider og eventuelle tilleggsmateriale læreboka måtte ha. Bakgrunnsinformasjonens hovedoppgave er å presentere utvalget på en oversiktlig måte.

Den andre kategorien, struktur, innebærer lærebokas inndeling av kapittel og matematiske konsept (Charalambous et al., 2010). Strukturen er lærebokas tema og lærebokas rekkefølge av tema. Informasjonen en får om lærebokas struktur er nødvendig fordi den videre legger grunnlag for den vertikale analysen.

Den eneste tilpasningen jeg ble nødt til å gjøre i forbindelse med den horisontale analysen var at jeg endret kategoriene bakgrunnsinformasjon og struktur til å gjelde lærerveiledninger, ikke lærebøker. At tilpasningene ikke var mer omfattende kan trolig skyldes at bakgrunnsinformasjonen og strukturen til en lærerveiledning er tilnærmet lik bakgrunnsinformasjonen og strukturen til en lærebok. Dersom jeg skulle analysert en annen utgivelse, for eksempel et eventyr eller en roman, kan det tenkes at et slikt dokument ville krevd større tilpasninger, spesielt inn under struktur-kategorien.

Videre lagde jeg en tabell (figur 3), hvor jeg for hver av de tre lærerveiledningene fylte inn ulik informasjon. Inn under bakgrunnsinformasjonen fylte jeg inn lærerveiledningens forfatter, forlag og årstall for utgivelse. Inn under struktur fylte jeg inn navn på kapitlene og hvilket sidetall de startet ved.

Horisontal analyse		
Navn på læreverk:		
Bakgrunnsinformasjon	**Struktur**	
Forfatter:	Oversikt av kapitler:	Sidetall:
Forlag:		
Årstall for utgivelse:		

Figur 3. Tabell for innsamling av data (Charalambous et al., 2010).

Etter at jeg hadde samlet inn datamaterialet gjennom en horisontal analyse fikk jeg disse resultatene (Figur 4):

Horisontal analyse		
Navn på læreverk: Multi 2A		
Bakgrunnsinformasjon	**Struktur**	
Forfatter: Bjørnar Alseth, Ann-Christin Arnås og Mona Røsseland	Oversikt av kapitler: 1. Tallene til 40 2. Addisjon og subtraksjon til 40 3. Tid 4. Former	Sidetall: 6 44 76 96
Forlag: Gyldendal		
Årstall for utgivelse: 2020		
Navn på læreverk: Matemagisk 2		
Bakgrunnsinformasjon	**Struktur**	
Forfatter: Inger-Lise Fritzen, Erling Kvistad Nilsen, Margareth Nilsen og Sindre Nyborg	Oversikt av kapitler: 1. Måling 2. Plassverdisystemet 3. Tall og telling 4. Regnestrategier 5. Kalender 6. Klokka 7. Mønstre	Sidetall: 9 37 61 91 131 149 177
Forlag: Aschehoug		
Årstall for utgivelse: 2020		
Navn på læreverk: Volum 2A		
Bakgrunnsinformasjon	**Struktur**	

Forfatter: Åse Marie Bugten og Audun Rojahn Olafsen	Oversikt av kapitler:	Sidetall:
Forlag: Fagbokforlaget	1. Tallene 0 – 20	4
Årstall for utgivelse: 2021	2. Tallene 0 – 20	12
	3. Addisjon og subtraksjon 0 – 20	20
	4. Lengder 0 – 20	28
	5. Ulikheter og kjøp med penger	36
	6. Tallene 0 – 100	44
	7. Addisjon uten tierovergang	52
	8. Subtraksjon uten tierovergang	60
	9. Addisjon og subtraksjon på tallinja	68
	10. Speilsymmetri	76
	11. Forskyving	84
	12. Mønster med speiling og forskyving	92
	13. Dobling og halvering	100
	14. Partall og oddetall	108

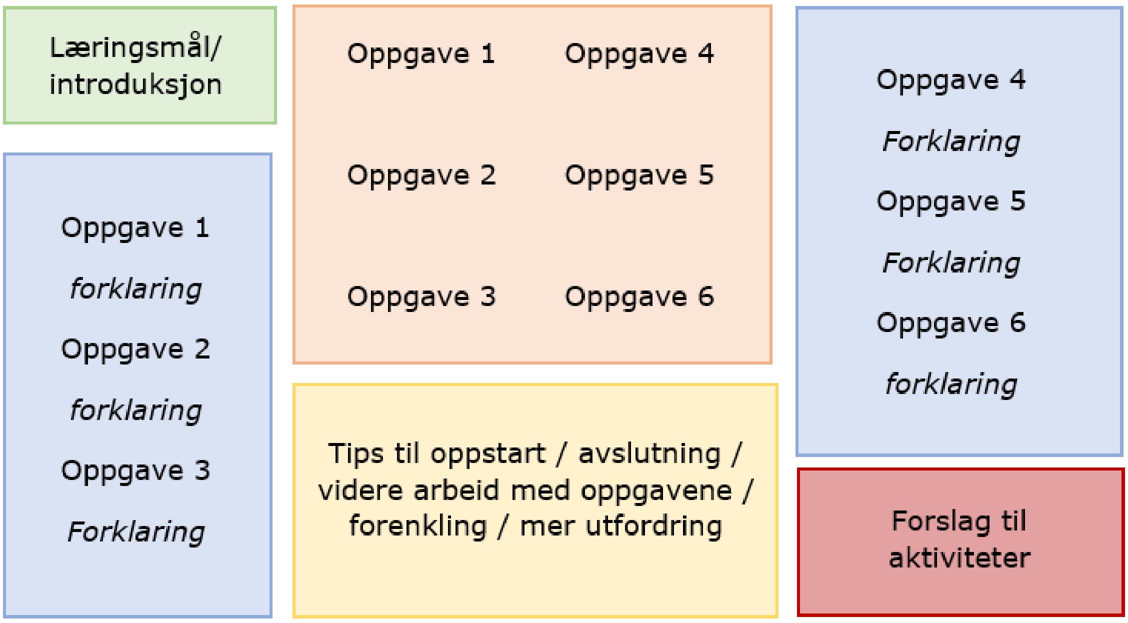
Figur 4. Resultat fra horisontal analyse.

I forskningsspørsmålet mitt er analysen avgrenset til å gjelde arbeid med tall. På grunn av den avgrensingen var det kun kapitlene som hadde tall i tittelen jeg fant aktuelle som datamateriale for analysen. Både Multi 2A og Matemagisk 2 inneholdt kun ett kapittel som hadde «tall» i tittelen: «Tallene til 40» (Alseth et al. 2020) og «Tall og telling» (Fritzen et al., 2020). At disse to kapitlene skulle være utgangspunkt for den vertikale analysen var derfor ganske klar.

Volum 2A derimot, inneholdt flere kapitler med «tall» i tittelen, og utvelgelsen av hvilket kapittel som skulle være utgangspunkt for den vertikale analysen fra denne lærerveiledningen, var ikke like tydelig. Å analysere alle kapitlene med tall i tittelen ville blitt for omfattende, og jeg ble derfor nødt til å velge ut noen. Jeg valgte kapitlene «Tallene 0 – 100» og «partall og oddetall» (Bugten & Olafsen, 2021) som utgangspunkt for den vertikale analysen. På grunn av at kapittel 6, «Tallene 0 – 100» inneholdt tallene 0 – 100, ble dette valgt til fordel for de to første kapitlene, «Tallene 0 – 40», fordi at kapittelet «0 – 100» favnet seksti flere tall. Jeg valgte også det siste kapittelet, kapittel 14 «partall og oddetall», da partall og oddetall begge er benevnelser for ulike egenskaper ved tall. Å inkludere begge disse kapitlene fant jeg forsvarlig, da sidetallsinformasjonen indikerer at kapitlene i Volum 2A er av betydelig mindre omfang enn det de er i Multi 2A og Matemagisk 2.

Utvalget for den vertikale analysen bestod derfor av kapitlene «Tallene til 40» (Alseth et al., 2020), «Tall og telling» (Fritzen et al., 2020), «Tallene 0 – 100» (Bugten & Olafsen, 2021) og «Partall og oddetall» (Bugten & Olafsen, 2021).

Et kapittel i en lærerveiledning kan ha lik struktur som et kapittel i en lærebok, men inneholde en del mer informasjon. Dette kan være informasjon som kommer i form av ulike læringsmål, tips, forklaringer eller aktiviteter. For å gi en tydeligere forklaring på hvordan innholdet i en lærerveiledning kan være strukturert, har jeg laget en figur (Figur 5) som illustrer hvordan en dobbeltside i en lærerveiledning kan se ut.



Figur 5. Hvordan en dobbeltside i en lærerveiledning kan se ut.

Den oransje boksen illustrerer en dobbeltside med oppgaver i læreboka. De blå boksene illustrerer forklaringer til hver oppgave i læreboka. Den grønne boksen illustrer et læringsmål eller introduksjonstekst. Den gule boksen illustrer tips til oppstart eller avslutning av en time, tips til videre arbeid med oppgavene, tips til forenkling av oppgavene eller tips til hvordan gjøre oppgavene mer utfordrende. Den røde boksen illustrer forslag til aktiviteter.

Kapitlene «Tallene til 40» (Alseth et al., 2020), «Tall og telling» (Fritzen et al., 2020), «Tallene 0 – 100» (Bugten & Olafsen) og «Partall og oddetall» (Bugten & Olafsen, 2021) hadde alle en tilnærmet lik struktur, som det figuren illustrerer.

Bakerst i kapitlene til Multi 2A og Matemagisk 2 fant jeg prøve- og testsider. Disse sidene inneholdt nivådelte oppgaver og prøveoppgaver og ble ikke medregnet som utvalg for den vertikale analysen.

3.4.2 Vertikal analyse

Den vertikale analysen blir av Charalambous et al. (2010) delt inn i tre kategorier: *presentert til elevene*, *forventet av elevene* og *sammenhenger.* Alle kategoriene er utarbeidet med tanke på å kunne analysere en lærebok, ikke en lærerveiledning. For at rammeverket på best mulig måte skulle passe til innsamling av studiens datamateriell, ble jeg, som tidligere nevnt, derfor nødt til å gjøre noen tilpasninger. Jeg har videre i kapittelet gjort rede for hvilke tilpasninger jeg har gjort innenfor hver kategori.

Kategorien *presentert til elevene* tar i utgangspunktet for seg hvordan lærebøker formidler matematisk innhold til elevene (Charalambous et al., 2010). Siden jeg har analysert lærerveiledninger, kalles kategorien i denne studien *presentert til lærerne.* Dette fordi jeg har tatt utgangspunkt i hvordan lærerveiledningene formidler matematisk innhold, og dette innholdet hovedsakelig er presentert til lærerne. I Charalambous et al. (2010) sin studie havnet alle deler av lærebøkene som ikke var oppgaver inn under denne kategorien. Det har det også gjort i denne studien, men som jeg i figur 5 har illustrert, mye av dataen jeg samlet inn var av slikt innhold. På grunn av at mengden data var så stor, ble jeg nødt til å dele den inn i underkategorier. Dette gjorde jeg for å få best mulig oversikt. Underkategoriene kalte jeg *lærerveiledningens forklaringer, lærerveiledningens tips* og *lærerveiledningens aktiviteter.*

Kategorien *forventet av elevene* handler om lærebokas oppgaver (Charalambous et al., 2010). Charalambous et al. (2010) tar i sin studie utgangspunkt i Stein et al. (2000) sitt teoretiske rammeverk, the Mathematical Task Framework, når de skal analysere hva som er forventet av elevene. For denne studien fant jeg det ikke like relevant å plassere matematiske oppgaver innenfor ulike kognitive ferdigheter, noe Stein et al. (2000) sitt rammeverk er en veileder for. Jeg valgte derfor å endre rammeverk, og heller vektlegge Jeannotte & Kierans (2017) rammeverk for matematisk resonnering. Kategorien ble delt inn i underkategorier som jeg kalte *generalisering, identifisering av mønster, sammenlikning, klassifisering, hypotesesetting, begrunnelse og formulering av bevis.* Underkategoriene er alle punkter Jeannotte & Kieran (2017) mener at inngår i en matematisk resonnering.

Den siste kategorien, *sammenhenger,* omhandler sammenhenger mellom ulike konsept (Charalambous et al., 2010). Eksempel på slike sammenhenger kan være koblinger mellom lærebok og undervisning og koblinger mellom undervisningen og situasjoner som skjer i samfunnet rundt. På grunn av studiens forskningsspørsmål fant jeg ikke denne kategorien aktuell, da det i denne studien har blitt forsket på lærerveiledningens innhold. Slik jeg forstår kategorien ville den vært mer aktuell dersom studien for eksempel rettet seg mot hvordan lærere anvender en lærerveiledning eller hvordan utbytte av en matematikktime hadde vært, dersom lærerveiledningen var det eneste læreren tok utgangspunkt i.

Etter å ha gjort de nevnte tilpasningene, lagde jeg en tabell med utgangspunkt i kategoriene *forventet av elevene* og *presentert til lærerne* (Figur 6). Tabellen ble brukt som verktøy for innsamling av studiens datamateriell.

Vertikal analyse							
Navn på læreverk:							
Navn på kapittel:							
Forventet av elevene (horisontalt) Presentert til lærerne (vertikalt)	Generalisering	Identifisering av mønster	Sammenlikning	Klassifisering	Hypotesesetting	Begrunnelse	Formulering av bevis

Figur 6. Tabell for innsamling av data (Charalambous et al., 2010)

Kategorien presentert til lærerne er delt inn i lærerveiledningenes forklaringer, lærerveiledningens tips og lærerveiledningens aktiviteter. I arbeidet med å sortere data brukte jeg forkortelsene F (forklaring), T (tips) og A (aktivitet). F ble brukt om teksten som hørte til oppgavene i læreboka (blå boks i figur 5). Siden oppgavene i læreboka er nummererte, kalte jeg forklaringene for F + oppgavenummeret forklaringen hørte til, eksempelvis F1, F2 osv. Dersom forklaringene hørte til en oppgave som ikke var nummerert, kalte jeg dem for Fx. T ble brukt om tekst som ikke var knyttet til en oppgave i læreboka, men som fungerte som tips til læreren (gul boks i figur 5). A ble brukt om tekst som ikke var knyttet til en oppgave i læreboka, men som opplyste om en aktivitet læreren kunne presentere for elevene (rød boks i figur 5). Da jeg skulle sortere datamaterialet startet jeg med å kategorisere dataen som enten F + (oppgavenummer), T eller A. Deretter satte jeg kryss ved hvilke(t) punkt ved resonnering innholdet eventuelt oppfylte. Dette gjorde jeg med alle forklaringer, tips og aktiviteter i de aktuelle kapitlene til hver lærerveiledning.

Videre i avsnittet er det et eksempel på data fra lærerveiledning (eksempel 3), og en forklaring på hvordan jeg sorterte det. I eksempelet har jeg først vist til en oppgave, oppgaven tilsvarer innhold som kan plasseres i den oransje boksen i figur 5. Deretter har jeg vist til en forklaring til oppgaven, forklaringen tilsvarer innhold som kan plasseres i den blå boksen i figur 5.

9 Tegn hoppene til Pi og Luringen på tallinjene. Tegn ring rundt tallene der begge to lander.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Luringen står på 0 og hopper med to og to, Pi hopper med fire og fire. Når lander de på samme tall?

9 Elevene skal hoppe med ulike differanser på tallinja og sammenlikne resultatene. Hensikten er å utforske og finne ut hvilke hoppetellinger som inneholder samme tall, og forstå at det er mange ulike veier fram til en løsning

Eksempel 3. Hentet fra (Fritzen et al., 2020, s. 73)

Forventet av elevene (horisontalt) Presentert til lærerne (vertikalt)	Generalisering	Identifisering av mønster	Sammenlikning	Klassifisering	Hypotesesetting	Begrunnelse	Formulering av bevis
F9			X	X			

Først kategoriserte jeg det som var presentert til lærerne som F9, da det som er presentert er en forklaring til en oppgave i læreboka, og forklaringen hører til oppgave 9. Deretter satte jeg et kryss ved sammenlikning, fordi det i forklaringen står «elevene skal hoppe med ulike differanser på tallinja og sammenlikne resultatene» og et kryss ved klassifisering, fordi det i forklaringen står «(…) finne ut hvilke hoppetellinger som inneholder samme tall (…)»

Resultatene fra den vertikale analysen var av større omfang enn resultatene fra den horisontale analysen. For å bidra til mest mulig flyt i teksten har jeg kun lagt ved et utdrag av resultatene fra den vertikale analysen her (figur 7). Komplette tabeller ligger som vedlegg (vedlegg 1, 2, 3 og 4).

Vertikal analyse							
Navn på læreverk: Multi							
Navn på kapittel: Tallene til 40							
Forventet av elevene (horisontalt) Presentert til lærerne (vertikalt)	Generalisering	Identifisering av mønster	Sammenlikning	Klassifisering	Hypotesesetting	Begrunning	Formulering av bevis
…							
A						X	
Fx	X			X			
Fx		X					
F32		X				X	
Fx				X			
F33	X	X					
T	X						
A		X					
Fx	X	X		X	X		
F34							
A							
Navn på læreverk: Matemagisk							
Navn på kapittel: Telling og tall							
Forventet av elevene (horisontalt) Presentert til lærerne	Generalisering	Identifisering av mønster	Sammenlikning	Klassifisering	Hypotesesetting	Begrunning	Formulering av bevis

(vertika lt)							
…							
F7		X					
F8		X					
T							
A							
T							
F9			X	X			
T						X	
A		X					
T							
F10		X	X	X			
F11		X	X	X			
Navn på læreverk: Volum							
Navn på kapittel: Tallene 0-100							
Forvent et av elevene (horison talt) Present ert til lærerne (vertika lt)	Generalis ering	Identifis ering av mønster	Sammenli kning	Klassifis ering	Hypoteses etting	Begrun ning	Formul ering av bevis
T							
F1							
F2							
F3		X					
F4		X					
F6							
F7							
F8							
T							
Navn på læreverk: Volum							
Navn på kapittel: Partall og oddetall							
Forvent et av elevene (horison talt) Present ert til	Generalis ering	Identifis ering av mønster	Sammenli kning	Klassifiis ering	Hypoteses etting	Begrun ning	Formul ering av bevis

lærerne (vertikalt)							
T			X	X			
F1							
F2							
F3							
F4		X					
F5		X					
T		X		X			
F6		X					
F7							
F8	X					X	
F9							
F10	X					X	

Figur 7. Utdrag av resultat fra vertikal analyse.

Av resultatene fra den vertikale analysen var det de forklaringene, tipsene og aktivitetene (presentert til lærerne) som oppfylte ett eller flere punkt ved resonnering (forventet av elevene) som dannet grunnlag for studiens datamateriell.

3.5 Analytisk tilnærming

Etter at jeg hadde samlet inn datamaterialet satt jeg igjen med tabellene i figur 7. Ut av disse tabellene fikk jeg ikke svar på hva som kjennetegner innholdet som legger til rette for resonnering, noe forskningsspørsmålet til studien etterspør. Jeg fikk ut av tabellene kun informasjon om hvilket innhold i lærerveiledningene jeg mente legger til rette for ulike prosesser ved resonnering. For å finne ut hva som kjennetegnet dette innholdet ble jeg nødt til å studere datamaterialet nærmere. Materialet ble nærmere studert gjennom åpen koding. En slik metode kan være tjenlig for forskeren, da fremgangsmåten gir en grundig forståelsesramme over datamaterialet (Postholm & Jacobsen, 2012). Åpen koding er en prosess i den kvalitative forskningsmetoden Grounded Theory (Glaser, 1978).

Jeg startet den åpne kodingsprosessen med å legge frem alt datamateriell, det vil si de ulike tabellene for hvert læreverk, foran meg. Med utgangspunkt i tabellene gjennomgikk jeg hver forklaring, tips og aktivitet lærerveiledningene inneholdt, på ny. Det vil si at jeg gikk tilbake til hvor de ulike forklaringene, tipsene og eller aktivitetene befant seg i de forskjellige lærerveiledningene. Formålet med metoden var å finne teori ut fra data, ikke å teste hypoteser (Glaser & Strauss, 1970), det var derfor viktig at jeg så langt det lot seg gjøre hadde en objektiv tilnærming til dataen. Forklaringene, tipsene og aktivitetene ble kodet etter hva jeg fant av matematisk innhold i dem. Med matematisk innhold mener jeg ord og egenskaper som er kjent innenfor matematikkens verden, for eksempel hele tall, desimaltall, oddetall og partall.

For eksempel: I figur 7 ser man at F32 i Multi 2A var innhold som oppfylte ett eller flere punkt ved resonnering. Jeg gikk da tilbake til hvor i lærerveiledningen dette innholdet var. Deretter studerte jeg hvilket matematisk innhold denne dataen inneholdt, og fant at den inneholdt arbeid med partall og oddetall. Jeg kodet da denne dataen til å gjelde partall og oddetall.

Andre koder som ble brukt var eksempelvis posisjonssystemet, forhold, tiere, enere, tallinja og så videre. Dersom jeg fant innhold som ikke passet inn i en allerede etablert kode, ga jeg det innholdet en ny kode. Slik bevegde jeg meg frem og tilbake i dataen, jeg sammenlignet og bearbeidet kodene underveis. Jeg noterte meg også ned forslag til overordnede kategorier på et ark, mens jeg kodet dataen. Bryman (2016) kaller en slik utvikling av koder for en løpende prosess. Utover i prosessen avtok den åpne kodingen naturlig, ettersom innholdet ikke ga nye koder. Når en kode eller kategori gjentatte ganger dukket opp, fikk jeg det Glaser & Strauss (1970) omtaler som en metning i materialet. Det vil si at koden dukket opp igjen og igjen, og jeg gjentatte ganger falt tilbake på den. I Grounded Theory kaller man den mettede dataen for en kjernekategori (Glaser & Strauss, 1970).

Underveis i kodingsprosessen er det ifølge Gibbs (2007) essensielt at forskeren stiller spørsmål ved dataen. Spørsmål en kan stille seg er for eksempel: hva vil være nyttig for å oppdage de teoretiske problemstillingene som ligger i dataen, hvordan oppdage de, og hvorfor? I tråd med Gibbs (2007) anbefaling stilte jeg meg selv spørsmål som: Hva er denne dataen? Hvilket matematisk innhold kjennetegner denne dataen? På den måten sikret jeg at kodingsprosessen fokuserte på studiens tema, i tillegg til at det på en tydeligere måte gjorde det mulig å se sammenhenger.

Når forskeren har fått grep om hva kjernekategoriene er starter den selektive kodingsfasen (Glaser & Strauss, 1970). I denne fasen ble jeg hovedsakelig styrt av de forslagene til kategorier jeg i den åpne kodingsprosessen noterte. Da jeg kodet selektivt, synliggjorde flere relevante kategorier seg raskt. Noen koder og kategorier viste seg å ikke være like relevante, disse ble da fjernet. I denne fasen brukte jeg tid på å sortere sammenhengene i datamaterialet samt lage overordnede kategorier. Ved hjelp av post-it lapper fikk jeg en oversikt over hvilke koder som kunne høre sammen. For eksempel plasserte jeg kodene *partall* og *oddetall* i en kategori jeg kalte partall og oddetall. Jeg plasserte også kodene *større enn, mindre enn, flere enn, færre enn, forhold* og *størrelse* i en kategori jeg kalte flere/færre/større/mindre enn.

Når kategoriene var etablert synliggjorde resultatene fra analysen seg. Disse er presentert i kapittel 4, resultatkapittelet.

3.6 Studiens kvalitet

Det er ulike krav til studiers kvalitet, alt etter hvilken forskningsmetode som benyttes (Cohen et al., 2011). Jeg har i dette kapittelet vurdert studiens kvalitet på bakgrunn av en kvalitativ forskningsmetode. For å vurdere studiens kvalitet bør det reflekteres rundt forskningens reliabilitet og validitet, da reliabilitet er en nødvendig forutsetning for validitet, og mangel på validitet gjør forskningen verdiløs (Cohen et al., 2011). Gjennom forskningens reliabilitet og validitet vil det også være rom for refleksjon over hvordan forskeren selv kan ha formet kunnskapen, noe som er i tråd med det postpositivistiske kunnskapssynet (Postholm & Jacobsen, 2018). Jeg har videre i kapittelet gjort rede for dette gjennom begrepene reliabilitet og validitet.

3.6.1 Reliabilitet

Reliabiliteten til en studie viser til graden av pålitelighet av datamaterialet som samles inn (Thagaard, 2009). Dersom en får tilsvarende resultat av en analyse ved bruk av samme prosedyre, men av et annet datamaterialet, vil analysen ifølge Grønmo (2012) være av høy reliabilitet. Thagaard (2009) poengterer at reliabilitet henger sammen med om forskningen er blitt utført på en tillitsfull måte, og Grønmo (2012) fastslår at forskeren må utforme analyseverktøyet på en så tydelig måte at det er lite rom for misoppfatning. I tillegg vil det å samle inn datamateriale inn under grundige og systematiske forhold bidra til å øke graden av reliabilitet (Grønmo, 2012). Med andre ord handler reliabiliteten i et datasett om hvor nøyaktige og presise dataene i analysen er.

Det finnes flere typer reliabilitet ved en studie og Grønmo (2012) skiller mellom stabilitet og ekvivalens. Jeg har videre i kapittelet sett nærmere på disse.

Stabilitet er en type reliabilitet som viser om de samme resultatene vil gjelde om de ble analysert med samme analyseverktøy, men til ulik tid (Cohen et al., 2011). Dersom en forsker først har gjennomført en analyse, og så går det litt tid før forskeren gjennomfører den samme analysen på ny, med samme analyseverktøy, og med samme analysemateriale, vil et eksempel på høy stabilitet være at forskeren får samme resultat av de to like analysene. I denne studien er det innhold i fra ulike lærerveiledninger som er blitt analysert. Innholdet vil ikke kunne påvirkes over tid, da det kommer fra dokument som ifølge Thagaard (2009) er publiserte dokument, og på den måten har et fast, upåvirkelig innhold. Dette bidrar til en systematisk og objektiv analyseringsprosess, som ikke vil påvirkes over tid. Dette vil også øke mulighetene for et likt resultat dersom det samme datamaterialet skulle blitt analysert med samme analyseverktøy i senere tid. Stabiliteten ved denne analysen kan derfor sies å være høy.

Ekvivalens er en type reliabilitet som handler om at en får samme resultat fra analysen dersom det er ulike personer som gjennomfører den, gitt at de gjennomfører samme analyseringsprosess med likt verktøy for analyse (Cohen et al., 2011). Dersom resultatene ikke varierer ut fra hvilke personer som utfører analysen, vil studien være av høy ekvivalent kvalitet. Det at jeg arbeidet alene i denne studien var av stor betydning for studiens ekvivalens. For det første samlet jeg inn datamateriell alene. Dataen ble riktig nok kategorisert ut fra Jeannotte & Kieran (2017) sine aspekt ved matematisk resonnering, men selve kategoriseringen var styrt av mine subjektive meninger. Det vil si at det var mine antakelser og oppfatninger av en oppgave som bestemte i hvilken kategori de ulike forklaringene, tipsene eller aktivitetene lærerveiledningene presenterte, havnet inn under. Også selve analysen av datamaterialet var resultat av en subjektiv prosess. Det var derfor viktig at jeg, i den åpne kodingen, kodet på en repeterende og suksessiv måte. Repeterende i form av at jeg kodet i flere omganger, enten ved å legge til data til etablerte koder, eller at jeg dannet nye koder ved nytt datamaterialet. Suksessivt ved at jeg nøye gikk gjennom datamaterialet, litt etter litt. At jeg i kapittel 3.5 også beskrev hvordan jeg tilnærmet meg datamaterialet på en gjennomsiktig måte, bidro til øke studiens ekvivalens. Det som kunne bidratt til å øke graden av ekvivalens ytterligere ville vært dersom jeg hadde gjennomført analysen med en eller flere medstudenter, da vi på den måten kunne kvalitetssikret analysene med hverandre.

3.6.2 Validitet

Validiteten til en studie avhenger av dens gyldighet og hvor relevant funnene til studien er (Thagaard, 2009). For å vurdere validiteten kan en ifølge Thagaard (2009) se på om de tolkninger en har gjort samsvarer med den virkeligheten en har studert. Validitet handler om gyldigheten av det forskeren har kommet frem til. Validitet må sees i sammenheng med studiens forskningsspørsmål, og måles i hvorvidt datainnsamlingen og analysen gir resultat som er relevant for å svare på forskningsspørsmålet (Grønmo, 2012). Scott (1990) sine tre første kriterier for et godt dokument, autensitet, troverdighet og representativitet, kan ses i sammenheng med validiteten til en studie. Dette fordi kriteriene viser til en nødvendighet av at dokumentet en studerer skal være ekte, det skal være forenelig med studiens forskingsspørsmål samt være representativt for liknende dokument. En høy validitet ved studien tilsvarer at det som studeres er relevant for å svare på forskningsspørsmålet, mens en lav validitet tilsvarer det motsatte. Dersom studien har lav validitet vil det som studeres ikke være relevant for det forskningsspørsmålet spør om, og studier med lav validitet er ifølge Cohen et al. (2011) uten verdi. En studies validitet vil aldri kunne være helt valid, men det finnes grep forskeren kan gjøre for å øke den (Cohen et al., 2011).

Cohen et al. (2011) skiller blant annet mellom ekstern validitet og konstruktvaliditet. Jeg har videre i kapittelet sett nærmere på disse to typene.

Den eksterne validiteten relateres til i hvilken grad resultatene fra forskningen kan generaliseres til andre situasjoner (Cohen et al., 2011) og handler i kvalitative studier i stor grad om overførbarhet. Det vil si om tolkninger fra en studie kan gjelde for andre. I prosessen med å finne studiens utvalg ble den eksterne validiteten tatt hensyn til. Samtlige lærerveiledninger som er analysert, mener jeg er lærerveiledninger av standard kvalitet, fordi at de verken inneholder eller presenterer noe som avviker eller er helt forskjellig fra det andre lærerveiledninger inneholder eller presenterer. I tillegg er lærerveiledningene som jeg har analysert, mye brukt i Norge, som også styrker studiens eksterne validitet, da resultatene av analysen og tolkningene fra studien trolig vil gjelde for mange. Ekstern validitet sier også noe om resultatene er gode nok til å kunne generaliseres (Dahlum, 2018). Antall oppgaveforklaringer, tips og aktiviteter som er analysert tilsier at jeg har fått et godt innsyn i hvordan det i lærerveiledningers innhold legges til rette for resonnerende arbeid i arbeid med tall. Likevel, datamaterialet er hentet fra tre kapittel til tre respektive lærerveiledninger, noe som ikke gir grobunn for at resultatene fra studien kan generaliseres. Det vil derfor ikke være riktig å si at resultatene fra analysen forteller oss noe om hva som kjennetegner muligheter for resonnering i lærerveiledningers innhold generelt i arbeid med tall. Dette er med på å svekke studiens eksterne validitet. Skulle den eksterne validiteten vært høyere, måtte grunnlaget av datamaterialet også vært bredere.

Konstruktvaliditeten måles i hvorvidt forskerens oppfatninger av et fenomen er forenelig med de generelt aksepterte oppfatningene av samme fenomen (Cohen et al., 2011). Creswell & Clark (2011) beskriver det som i hvilken grad forskeren faktisk undersøker det en generelt mener den skal undersøke. Med andre ord handler det om at forskerens oppfatning av begrep og teori bør samsvare med det som blir ansett som en akseptabel oppfatning. Cohen et al. (2011) eksemplifiserer dette med at dersom en forsker ønsker å undersøke barns intelligens, og beskriver intelligens som en ferdighet å spisse blyanter, vil konstruktvaliditeten ved studien være lav, da det å kunne spisse blyanter ikke er en akseptabel forestilling om intelligens. For å øke studiens konstruktvaliditet bør beskrivelsen av begrep og teori være generelt akseptert av andre enn forskeren (Cohen et al., 2011). Det som kan være en utfordring ved denne studiens konstruktvaliditet er det faktum at jeg skrev oppgaven alene, og dermed ikke har kunnet diskutere min oppfatning av teori og begrep med andre. Dersom jeg hadde arbeidet med andre som hadde et forhold til forskningsprosjektet kunne det styrket graden av konstruktvaliditet. Utfordringen med å arbeide alene gjorde at jeg måtte støtte meg til tidligere forskning og bruke avklaringer og oppfatninger fra eksisterende litteratur. Ved at jeg brukte Jeannotte & Kieran (2017) sitt rammeverk for matematisk resonnering hjalp det meg i å faktisk studere det jeg ønsket å studere, og dette grepet var med på å øke studiens konstruktvaliditet. I tillegg analyserte jeg dokument som oppfylte Scott (1990) sitt siste kriterium for hva et godt dokument skulle være, nemlig at dokumentet gav mening. Lærerveiledningene jeg analyserte fremmet alle et tydelig budskap ved hjelp av tydelige og meningsfulle ord. At dokumentene jeg analyserte oppfylte meningskriteriet var av betydning for studiens konstruktvaliditet, da det bidro til at jeg analyserte det jeg mente jeg skulle analysere.

3.7 Etiske betraktninger

I enhver forskning må ulike forskningsetiske hensyn ivaretas. Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) er en instans i Norge som har utarbeidet retningslinjer for forskningsetikk. Formålet med retningslinjene er å gi forskere og forskersamfunnet kunnskap om anerkjente normer i forskningsetikken. De skal gjennom veiledning og råd gi innsikt i hvordan utvikle forskningsetisk skjønn og refleksjon, hvordan avklare etiske dilemma samt hvordan fremme en god vitenskapelig praksis (NESH, 2016). Dette synliggjør NESH ved hjelp av 46 punkter. Ettersom jeg har gjennomført en dokumentanalyse på offentlige dokumenter, har ikke alle punktene vært like aktuelle for denne forskningen. Jeg har imidlertid trukket frem det NESH (2006) beskriver som en overordnet forpliktelse til søken etter sannhet. Dette punktet kan sees i sammenheng med den utfordringen ved dokumentanalyse Denscombe (2003) kaller for sosial fortolkning. Både det at forfatterne av lærerveiledningene kan legge mer tolkning i det jeg som forsker rent objektivt ser i min analyse, er noe jeg har vært bevisst på. Men også motsatt, at jeg som forsker kan ha overanalysert og feiltolket lærerveiledningenes innhold, har blitt tatt høyde for. Det er derfor viktig at jeg har hatt respekt for forfatternes arbeid, noe NESH (2006) belyser gjennom aspektet som omhandler hensyn til personer. Selv om jeg i mitt datamateriale ikke har behandlet personopplysninger, har jeg hatt et ansvar for lærerveiledningenes forfattere. Dette har jeg i min oppgave prøvd å ivareta ved at jeg har presentert utvalget og resultatet på en nøyaktig og nøytral måte.

4. Resultater

I dette kapittelet har jeg presentert resultatene fra analysen. Etter den selektive kodingen satt jeg igjen med disse kategoriene: partall og oddetall, flere/færre/større/mindre enn, tiere og enere, tallinje og dobling og halvering. Kategoriene fra den selektive kodingen var utgangspunkt for resultatene, og navnet på resultatet er i tråd med kategorien dataen ble kodet til. Hvert resultat er presentert som et eget avsnitt, hvor navnet på resultatet er overskriften for avsnittet. Resultatene er presentert ved hjelp av eksempel fra datamaterialet.

På en side i lærerveiledningen er det som oftest inkludert et bilde av en side fra læreboka, som jeg har illustrert i figur 5. Rundt bildet kan det følge med blant annet forklaringer til de forskjellige oppgavene fra læreboka (den blåe boksen i figur 5), tips til forenkling eller videre arbeid (den gule boksen i figur 5) samt forslag til forskjellige aktiviteter (den røde boksen i figur 5).

Dersom resultatets innhold som legger til rette for arbeid med matematisk resonnering er en forklaring, har jeg først vist til en oppgave, oppgaven tilsvarer da innhold som kan plasseres i den oransje boksen i figur 5. Videre har jeg vist til oppgaveforklaringen, forklaringen tilsvarer da innhold som kan plasseres i den blå boksen i figur 5.

Eksemplene jeg har vist til er hentet fra lærerveiledningene, men jeg har selv skrevet dem inn i denne oppgaven. Det vil si at oppgavenes, forklaringenes, tipsenes eller aktivitetenes illustrasjoner, skrifttype og design ikke er identisk med hvordan de er fremstilt i lærerveiledningene. Men oppgavenes, forklaringenes, tipsenes eller aktivitetenes tekst er den samme.

Etter hvert eksempel har jeg vist til hva i innholdet jeg mener legger til rette for matematisk resonnering. Innholdet er da knyttet opp mot aspektene Jeannotte & Kieran (2017) presenterer.

Videre i kapittelet er resultatene jeg fikk fra analysen presentert.

4.1 Muligheter for resonnering i arbeid med partall/oddetall

Jeg fant av analysen min en rekke oppgaveforklaringer, tips og aktiviteter som ga mulighet for resonnering i arbeid med partall og oddetall.

Eksempel 4, 5 og 6 viser innhold som legger til rette for arbeid med partall og oddetall.

33 Tegn ring rundt partallene.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

33 Tegn ring rundt partallene

Her skal elevene tegne ring rundt de tallene som kan deles i to like grupper. Henvis gjerne til oppgave 32.

- *Hvor mange blå sokker, og hvor mange rosa sokker er det i oppgave 32?* (8 blå og 9 rosa.)
- *Kan vi lage par av 9 sokker?* (Nei, med 9 kan vi lage fire par, men det blir i tillegg én til overs.)
- *Da kan vi tegne ring rundt tallet 8, men ikke rundt tallet 9. Undersøk de andre tallene. Hvilke av dem kan vi lage par av?*

Elevene må gjerne få bruke klosser for å undersøke om de kan lage par av de ulike tallene. Etter at elevene er ferdige, er det fint om de blir utfordret til å se etter mønster, slik at de oppdager at tallene det kan lages par av, blir annethvert tall. Dette kan elevene så forsøke å forklare: Hvis vi har et tall det kan lages par av, og så får vi én til, vil den bli til overs. Men om vi så får enda en til, kan denne lage et par med den som var til overs. Og sånn blir det annenhver gang i hele tallrekka.

Eksempel 4. Hentet fra Multi 2A (Alseth et al., 2020, s. 37).

Der det i eksempel 4 står at elevene skal bli utfordret til å oppdage at tall det kan lages par av, blir annethvert tall, mener jeg at det legges til rette for *identifisering av mønster.* I forklaringen kommer det også frem at elevene skal forsøke å forklare at tall det kan lages par av og tall hvor det er en til overs vil komme annenhver gang i hele tallrekka. Å legge til rette for en forståelse av at noe vil gjelde for hele tallrekka mener jeg er forenelig med resonneringsaspektet *generalisering.*

Tips til oppstart

Det er viktig at elevene er sikre på betydningen av begrepene partall og oddetall og hvilke sifre som hører til i hvilken kategori.

Repeter kort ved å skrive følgende spørsmål på tavla:

Hvilke sifre har partall på enerplassen?
Elevene skal gi svarene: 0, 2, 4, 6 og 8

Hvilke sifre har oddetall på enerplassen?
Elevene skal svare: 1, 3, 5, 7 og 9.

Eksempel 5. Hentet fra Volum 2A (Bugten & Olafsen, 2021, s. 112).

I eksempel 5 er et tips til oppstart at læreren skal spørre elevene hvilke sifre partall og oddetall har på enerplassen. Oppgaven mener jeg gir mulighet for resonnering ved at elevene skal *klassifisere* tallene 0, 2, 4, 6 og 8 til å være tall partall har på enerplassen og tallene 1, 3, 5, 7 og 9 til å være tall oddetall har på enerplassen.

8 Alltid, aldri eller av og til?

Et partall pluss 1, eller et partall minus 1 er _____ et oddetall.

8 Alltid, aldri eller av og til?

Konklusjonen på resonnementet over er svaret på denne oppgaven. Når vi har et partall og legger til eller trekker fra 1, får vi alltid et oddetall.

Eksempel 6. Hentet fra Volum 2A (Bugten & Olafsen, 2021, s. 111).

Selv etter arbeid med partall og oddetall, er det ikke sikkert at det for en andreklassing er åpenbart at et partall pluss 1, eller et partall minus 1 alltid er et oddetall. Eksempel 6 mener jeg derfor viser innhold som legger til rette for at elevene kan *sette en hypotese*. Dersom det for eleven er åpenbart sant at et partall pluss 1 eller et partall minus 1 alltid er et oddetall, mener jeg innholdet legger til rette for at eleven kan *generalisere* påstanden.

4.2 Muligheter for resonnering i arbeid med flere / færre / større / mindre enn

Av analysen min kom det til syne at en rekke oppgaveforklaringer, tips og forslag til aktiviteter la til rette for resonnering gjennom arbeid med noe som var større eller mindre, flere eller færre enn noe annet.

Eksempel 7 og 8 viser innhold som gir mulighet for resonnering i arbeid med flere/færre/større/mindre enn:

23 Velg tall som passer.

__ < 45	__ > 66	79 > __
34 < __ < 36	87 > __ > 89	45 = __
49 < __	40 > __	81 > __ > __
45 > __ > 55	20 < __ < __	100 > __ > __

23 Velg tall som passer

Elevene kan velge hvilket som helst tall i det aktuelle intervallet. Tallinja viser dette på en oversiktlig måte. For å gjøre det lettere å tenke kan elevene stille spørsmål til ulikhetene. Hvilket tall er større enn 34 og mindre enn 36? Her er kun én løsning, 35. Rettelse: 45 < __ < 55. 87 < __ < 89.

Eksempel 7. Hentet fra Volum 2A (Bugten & Olafsen, 2021, s. 50-51).

I oppgaven i eksempel 7 skal elevene fylle inn tall som er større eller mindre enn andre, gitte tall. For å gjøre det lettere blir det i oppgavens forklaring foreslått at elevene kan stille spørsmål til ulikhetene. Gjennom å stille seg spørsmål som hva er større enn 34 og mindre enn 36 mener jeg elevene vil få mulighet til å *sammenlikne* tall, og på den måten resonnere.

X Innhold i en godteripose

Type godteri	**Opptelling**	**Antall**
Sjokonøtt	||||| ||||| ||	12
Lakrisbåt	||||| ||||	9
Skumbil	|||||	5
Salt sild	||||| ||||| |||||	15
Seigmann	||||| ||||| ||||| |||||	20

Hvilket godteri er det færrest av?
Hvilket godteri er det flest av?
Hvor mange flere seigmenn er det enn salte sild?
Hvor mange færre lakrisbåter er det enn sjokonøtter?
Hvor mange skumbiler og lakrisbåter er det til sammen?

X Innhold i en godteripose

Forklar oppgaven for elevene, og la dem så finne måter å besvare oppgavene på, i par eller små grupper. Elevene skal svare på spørsmålene ved hjelp av tabellen som viser antallet av hver sort i en pose. I en oppsummering bør elevene oppfordres til å beskrive hvordan de tenkte for å løse hver av oppgavene.

Still gjerne flere spørsmål til tabellen. Det er særlig viktig å ha fokus på forholdet mellom to eller flere rader, og ikke kun opptelling i én kategori:

- *Hvilken ting er det 15 av?* (Salt sild)
- *Hvilken ting er det 4 flere av enn det er skumbiler?* (Lakrisbåter)
- *Hvor mange flere sjokonøtter er det enn skumbiler?* (7)
- *Hvor mange færre salte sild er det enn seigmenn?* (5)
- *Isak liker spesielt godt seigmenn og skumbiler. Hvor mange er det av de to til sammen?* (25)

Eksempel 8. Hentet fra Multi 2A (Alseth et al., 2020, s. 10).

På samme måte som i eksempel 7, mener jeg selv at innholdet, som i eksempel 8, legger til rette for at elevene kan *sammenlikne.* Dette aspektet ved resonnering legges det til rette for gjennom spørsmålene oppgaven og oppgaveforklaringen foreslår. For å kunne svare på hvilken ting det er 4 flere av enn det er skumbiler og hvor mange færre salte sild det er enn seigmenn må elevene sammenlikne antall skumbiler med antall lakrisbåter og antall salte sild med antall seigmenn.

4.3 Muligheter for resonnering i arbeid med tiere og enere

En del av innholdet som la til rette for arbeid med resonnering var innhold som omhandlet arbeid med tiere og enere.

Eksempel 9 og 10 viser innhold med mulighet for resonnering gjennom arbeid med tiere og enere.

10 Skriv tallene som mangler i hundrerruta.

1	2						8		10
11									
	22								
			34						
		43							
								59	
61									70
				75					
						87			
					96				100

10 Skriv tallene som mangler i hundrerruta

Elevene skal skrive inn tallene som mangler i hundrerruta. Hensikten er å utforske mønstrene i hundrerruta. Samtal med elevene underveis om de ser hva som skjer med enerne og tierne når vi teller i vannrett, loddrett og skrå stilling.

Eksempel 9. Hentet fra Matemagisk 2 (Fritzen et al., 2020, s. 74-75).

I forklaringen til oppgaven i eksempel 9 står det eksplisitt at hensikten med oppgaven er å utforske mønstrene i hundrerruta. Mønstrene kan *identifiseres* gjennom samtale om hva som skjer med enerne og tierne når vi teller vannrett, loddrett og skrå stilling. Eksempel på mønster elevene kan identifisere gjennom samtalen er at annethvert tall i tallrekka er partall og oddetall og at det mellom hvert tall i en loddrett rekke er en differanse på 10. Ved å foreslå en slik samtale mener jeg at det også legges til rette for at elevene kan *klassifisere* tallene basert på egenskaper de har i hundrerruta. For eksempel at alle tall i den første kolonnen har tallet 1 på enerplassen, mens alle tall i den andre kolonnen har tallet 2 på enerplassen.

20 (nøkkelhull)

Hvilken egenskap er lik for enerplassen til oddetallene?
Hvilken egenskap er lik for enerplassen til partallene?

20 (nøkkelhull)

Dette er en nøkkelhullsoppgave. Har elevene oppdaget hvilken egenskap som er felles for enerne i oddetall/partall? Har de oppdaget det, kan de overføre kunnskapen til å gjelde alle tall.

Eksempel 10. Hentet fra Matemagisk 2 (Fritzen et al., 2020, s. 79).

For å oppdage hvilken egenskap som er felles for enerne i oddetall og partall, noe forklaringen til oppgaven i eksempel 10 etterspør, mener jeg det legges til rette for at elevene må resonnere, fordi de mest sannsynlig må *identifisere et mønster* først. Etter at mønsteret er oppdaget kan det også hende at elevene *klassfiserer* oddetallene og partallene ut fra egenskapen til enerplassene. Et annet aspekt ved resonnering, *generalisering*, mener jeg det blir lagt til rette for når elevene skal overføre kunnskapen til å gjelde alle tall.

4.4 Muligheter for resonnering gjennom arbeid med tallinja

I analysen kom det også frem at en del av innholdet lærerveiledningene presenterte, la til rette for resonnering gjennom arbeid med tallinje.

Innhold som viste muligheter for resonnering gjennom arbeid med tallinja kommer frem i eksempel 11, 12 og 13.

24 Tegn streker til tallinja.

0 - - - - - - - - - 10 - - - - - - - - - 20 - - - - - - - - - 30 - - - - - - - - - 40 - - - ->

33 31 13 28 8 18 38

24 Tegn streker til tallinja
Tegn en strek fra hvert tall til riktig sted på tallinja. Som til perlesnora bør elevene få anledning til å forklare hvordan de tenker for å finne riktig sted. For alle elevene er det nyttig å få høre om ulike strategier. Da utvikler elevene sin tallforståelse, og de vil i større grad selv bruke mer effektive strategier ved neste anledning. Noen tenkemåter kan være:

- Telle 3 videre fra 30 for å finne 33.
- Telle to bakover fra 40 for å finne 38.
- Jeg vet at 8 kommer før 10. Jeg teller derfor nedover fra 10: 10, 9, 8.

For å fokusere på strategier kan elevene forsøke å beskrive hva som er likt med plasseringen av 28, 8, 18 og 38. Dette er tall som ligger to til venstre for en tier (altså to til venstre for 30, 10, 20 og 40).

Eksempel 11. Hentet fra Multi 2A (Alseth et al., 2020, s. 29).

I oppgaven eksempel 11 viser til mener jeg det legges til rette for resonnering gjennom at elevene må *sammenlikne* tall for å kunne plassere de på tallinja, for eksempel at 8 kommer før 10 og at 33 er 3 videre fra 30. Elevene kan også *identifisere mønster* som at siffer som har 8 på enerplassen vil ligge to til venstre for en tier, for eksempel 30, 10, 20 og 40. I oppgaveforklaringen står det også at elevene bør få anledning til å forklare hvordan de tenker at tallene de har plassert finner riktig sted. Dersom en elev for eksempel kommer med en påstand om at tallet 33 skal plasseres tre til høyre for 30, er det ikke sikkert at denne påstanden umiddeltbart oppleves sann for de andre elevene. Påstanden kan da bli tillagt en epistemisk verdi som sannsynlig. Gjennom en forklaring, eller *begrunnelse*, for hvorfor tallet er plassert der det er plassert, kan påstanden endre epistemisk verdi til mer sannsynlig. Jeg mener derfor at det finnes innhold i eksempelet som også legger til rette for resonnering gjennom å gi en begrunnelse.

Tips til oppstart

Legg et hoppetau i rett linje på gulvet. Dette skal representere tallinja. Legg tallkortene 0 og 20 på riktig plass. Be en elev om å legge utover tallkortene 2, 4, 6, 8, 10 og 12 på riktig plass og hoppetelle med to og to. Be en annen elev om å legge utover tallkortene 4, 8 og 12 på riktig plass og hoppetelle med fire og fire. Hvem kom lengst på tallinja? Hvem hoppet flest ganger? Når landet dere på samme tall? Gjenta flere ganger med ulike differanser, for eksempel to og to og tre og tre.

Eksempel 12. Hentet fra Matemagisk 2 (Fritzen et al., 2020, s. 72).

Vurderingsaktivitet:
Når dere skal gå ut av klasserommet:
Be elevene hoppe til en gitt plass på tallinja før de går ut. Spør «hvordan vil du hoppe til 10?» Eleven sier «jeg vil hoppe med én og én» eller «jeg vil hoppe med fem og fem» eller noe annet. Eleven kan også prøve å hoppe med tre og tre og oppdage at det ikke går an. Dette er en spennende oppdagelse. Bruk den i videre arbeid.

Eksempel 13. Hentet fra Matemagisk 2 (Fritzen et al., 2020, s. 73).

Gjennom tipset i eksempel 12 og vurderingsaktiviteten i eksempel 13 mener jeg det gis mulighet for at elevene kan *identifisere mønster.* Mønstrene de kan identifisere er at 20 går opp i både to og fire gangen, ved at elevene hopper i steg med to og fire. De kan også oppdage at 2 ganger 6 er like mye som 4 ganger 3, gjennom spørsmålet om hvem som kom lengst på tallinja. Ved å *sammenlikne* 2 ganger 6 og 4 ganger 3 kan de finne svar på spørsmålet om hvem som hoppet flest ganger. Der det står at de kan gjenta flere ganger med ulike differanser, i eksempelet med tips til oppstart, mener jeg det legges opp til at elevene kan *klassifisere* tall ut fra om de går opp i 20 gangen eller ikke. *Klassifisering* mener jeg det også legges til rette for i vurderingsaktiviten, bare at tallene elever i dette eksempelet kan klassifisere ut fra er om de går opp i 10 gangen eller ikke.

4.5 Mulighet for resonnering i arbeid med dobling/halvering

Et siste resultat fra analysen av lærerveiledningene er at de gjennom sitt innhold la til rette for resonnering i arbeid med dobling og halvering.

Eksempel 14 viser innhold som la til rette for resonnering i arbeid med dobling/halvering:

25 Tegn dobbelt så mange ting. Skriv regnestykket.

bilde av tre pølser	
3 + 3 = ___	
bilde av fire fargeblyanter	
4 + 4 = ___	

bilde av fem kuler	
5 + 5 = ___	
bilde av en trekant	
1 + 1 = ___	

25 Tegn dobbelt så mange ting. Skriv regnestykket.

Elevene teller antallet ting i mengden før de dobler mengden. Noen elever tegner dobbelt så mange ting i den nye mengden, andre tegner bare like mange én gang til. Som en oppsummering ser dere på alle svarene. Har de noen felles egenskaper, er de like i noe? Styr om nødvendig oppmerksomheten mot oddetall/partall.

Eksempel 14. Hentet fra Matemagisk 2 (Fritzen et al., 2020, s. 83).

Eksempel 14 viser til en oppgave hvor elevene skal tegne inn dobbelt så mange ting i den høyre ruta, som det det er bilde av i den venstre ruta. I forklaringen til oppgaven står det blant annet at en oppsummering kan være å se på alle svarene, om de har noen felles egenskaper eller likheter. Gjennom denne oppsummeringen kan elevene *sammenlikne* svarene, for eksempel at det dobbelte av fire er mer enn det dobbelte av tre. Og de kan *identifisere mønster,* for eksempel at det dobbelte av noe er et partall.

5. Diskusjon

I denne masteroppgaven har jeg studert hva som kjennetegner muligheter for resonnering i talloppgaver lærerveiledninger på 2. trinn presenterer. Forskningsspørsmålet jeg formulerte var:

Hva kjennetegner muligheter for resonnering i arbeid med tall i innhold presentert i lærerveiledninger?

Lærerveiledningene jeg analyserte var alle basert på den nye læreplanen, LK20. I LK20 står resonnering og bevis frem som ett av seks kjerneelement, og kjerneelementet belyser viktigheten av resonnering og bevis i matematikkundervisningen (Utdanningsdirektoratet, 2019). I Utdanningsdirektoratet sin definisjon av kjerneelementet fremgår det at resonnering i matematikkfaget skal læres som en kunnskap, samt være bærende for elevers tankemåter i undervisningen (Utdanningsdirektoratet, 2019). Jeg ønsket derfor å studere hvordan lærerveiledningene, som er basert på den nye læreplanen, ivaretok dette kjerneelementet. Målet for studien ble å undersøke hva som kjennetegnet muligheter for resonnerende arbeid.

Funnene i studien indikerer at det som kjennetegnet muligheter for resonnering blant annet var arbeid med partall og oddetall, arbeid med flere/færre/større/mindre enn, arbeid med tallinja, tiere og enere og dobling og halvering. Fordi at et variert innhold er resonnerenderettet ser en at det økte fokuset på resonnering og bevis i matematikkundervisningen gjenspeiler seg i lærerveiledningenes innhold. Tidligere forskning viser at det kan være sprik mellom læreplan og lærebøker (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2018; Brehmer et al., 2015). Disse funnene var derfor ikke en selvfølge å finne. Av den grunn vil jeg i avsnitt 5.1 diskutere funnene ytterligere, både ved å sette funnene opp mot tidligere forskning samt diskutere de i lys av relevant litteratur.

I avsnitt 5.2 har jeg sett på studiens begrensinger og metodekritikk. Avslutningsvis, i avsnitt 5.3, har jeg satt søkelys på studiens implikasjoner og diskuterer videre forskning.

5.1 Drøfting av funn

Som tidligere nevnt har jeg i denne studien funnet funn som indikerer at det ut fra lærerveiledningenes innhold legges til rette for matematisk resonnering, slik kjerneelementet i den nye læreplanen formidler. Verdt å merke seg er det at resultatene fra analysen er resultat av en subjektiv analyseprosess. Det vil si at de aspektene ved matematisk resonnering som resultatene viser til, er resultat jeg har identifisert i lærerveiledningenes innhold ut fra mine subjektive meninger og forståelse av begrep. Innhold jeg mener legger til rette for eksempelvis identifisering av mønster, kan være innhold andre mener legger til rette for klassifisering. Dette er tatt i betraktning i den påfølgende diskusjonen.

5.1.1 Mye av det som kjennetegner resonnering bygger på identifisering av mønster

Ett av studiens funn er at mye av det som kjennetegner resonnering bygger på identifisering av mønster. Dette viste seg i både resultatet «Muligheter for resonnering i arbeid med partall/oddetall», «Muligheter for resonnering i arbeid med tiere og enere», «Muligheter for resonnering i arbeid med tallinja» og i «Muligheter for resonnering i arbeid med dobling/halvering». De siste årene har det vært et økende fokus på at elevene skal forstå matematikken, og på Utdanningsnytt sine nettsider kan en lese at pugging alene ikke vil gi en slik forståelse (Utdanningsnytt, 2019). Det vil si at elevene bør skape en forståelse av matematikk på andre måter. Sinclair (2009) vektlegger at forståelse kan skapes gjennom det estetiske ved matematikken, enten ved å oppleve at løsningen er relevant, at problemet appellerer visuelt, at man får en følelse av overraskelse eller at man kan koble problemene en møter til tidligere kunnskap. I lys av Sinclair (2009) mener jeg selv at dette funnet derfor er interessant, fordi å identifisere mønster slik jeg ser det, kan være en prosess i å se det estiske ved matematikken.

For eksempel, i resultatet «Muligheter for resonnering i arbeid med partall/oddetall» legges det til rette for at elevene skal oppdage at tallene det kan lages par av i en tallrekke blir annethvert tall. En slik oppdagelse kan for noen elever oppleves overraskende, og ifølge Sinclair (2009) kan den opplevelsen bidra til å øke både motivasjon og utforskertrang i faget. Det er derfor positivt slik jeg ser det, at andelen innhold av slik type resonnering er stor.

Funnet kan med det tyde på at det rettes et søkelys mot å gi elever økt forståelse av matematikk fra flere hold, også fra læreverkenes forfatteres side.

Selv om identifisering av mønster var et aspekt mye av innholdet som kjennetegner resonnering viste til, er det hensiktsmessig å nevne at også aspektene generalisering, sammenlikning og klassifiseringsaspektene flere ganger var synlige. Valenta & Enge (2020) forsket på hvordan læreplanen i matematikk, LK20, la til rette for elevers utvikling av bevisrelaterte kompetanser. Resultatene de presenterte var blant annet at læreplanen gir mulighet til å arbeide med aspekt ved matematisk resonnering, som for eksempel identifisering av mønster, sammenlikning og generalisering. Jeg skrev innledningsvis at lærerveiledningene har som formål å tolke og representere læreplanens kjerneelement og kompetansemål. At mye av lærerveiledningenes innhold la til rette for resonnering gjennom disse aspektene kan derfor være en følge av at læreplanen også gir muligheter for det.

5.1.2 Innhold som kjennetegner resonnering har identifisering av mønster som første steg i en matematisk resonneringsprosess

Et annet funn jeg fant var at blandt innhold som kjennetegnet resonnering ser identifisering av mønster ut til å være første steg i den matematiske resonneringsprosessen.

For eksempel, i resultatet «Muligheter for resonnering i arbeid med tiere og enere» kan generaliseringsaspektet, å overføre kunnskapen til å gjelde alle tall, først bli synlig etter at mønsteret, hvilken egenskap som er felles for enerne i oddetall og partall, er identifisert. Også i resultatet «Muligheter for resonnering i arbeid med partall og oddetall» opptrer identifisering av mønster aspektet som et første steg i resonneringsprosessen, fordi det legges til rette for at mønsteret som er identifisert etter hvert kan generaliseres.

Resultatet «Muligheter for resonnering i arbeid med flere/færre/større/mindre enn» er imidlertid et resultat som viser at identifisering av mønster aspektet ikke nødvendigvis må være til stede for å kunne legge til rette for sammenlikningsaspektet.

Likevel, funnet gir en indikasjon på at innhold som legger til rette for identifisering av mønster er innhold elever kan bygge videre på. Blank et al. (2014) ser positivt på lærebøker som består av varierende oppgavetyper, heller enn «rutineoppgaver» der man får svaret ved å se i fasiten, fordi man da unngår at de elevene som tar ting raskt, blir sittende og kjede seg. På samme måte mener jeg at dette funnet viser at elever som tar ting raskt ikke vil bli sittende og kjede seg, fordi de da kan bygge videre på andre aspekt ved resonnering, for eksempel generalisering, begrunnelse eller formulering av bevis. Et sentralt tema i all type undervisning er tilpasset opplæring. I opplæringsloven §1-3 står det at opplæringen skal tilpasses evnene og forutsetningen hos den enkelte eleven, lærlingen eller lærekandidaten (Opplæringsloven, 1998, §1-3). At undervisningen også skal tilpasses elever med høy måloppnåelse, er noe jeg mener er viktig å ikke glemme. Egne erfaringer fra praksis er at det ofte vies mer fokus til tilpassing av undervisningen til elever med lavere måloppnåelse. At å resonnere matematisk kan tilpasses elever med ulik måloppnåelse i faget er noe jeg derfor ser på som positivt.

5.1.3 Lite av det som kjennetegnet resonnering bygde på hypotesesetting og formulering av bevis

Et tredje funn jeg har drøftet her er at det var lite av innholdet som kjennetegnet resonnering som bygde på hypotesetting og formulering av bevis.

Når det gjelder elever på 2. trinn, kan disse elevene akseptere et matematisk argument som bevis dersom argumentet blir uttalt fra lærer eller at det står i læreboka (Harel & Sowder, 1998). En slik bevisforståelse kalles for autoritær bevisforståelse, og kan komme av at undervisningen i stor grad har vært basert på presentasjoner av bevis som «slik er det bare» (Harel & Sowder, 1998). Typiske utsagn en elev med autoritær bevisforståelse kan ha er «alle partall er delelig på to fordi det står i matteboka» eller «læreren sa at oddetall pluss oddetall blir partall, derfor er det det».

I lys av teori om autoritær bevisforståelse mener jeg funnet skisserer et signal til norske matematikklærere om at det i hovedsak er dem som har den viktigste rollen i det å legge til rette for at elever skal få kunnskap om å sette hypoteser og formulere bevis. Tidligere forskning antyder at det er utfordrende for barneskoleelever å begrunne en matematisk hypotese, da hypotesen skal lages ut fra om noe gjelder for uendelig med påfølgende tall eller eksempler (Evens & Houssart, 2004). Dette antyder at oppgaven lærere har med å legge til rette for resonnering i form av hypotesesetting og formulering av bevis, ikke nødvendigvis er den enkleste oppgaven. Desto viktigere mener jeg funnets verdi er. For dersom elevene har utfordringer knyttet til begrunnelse av hypoteser, men lærerveiledningene i liten grad presenterer muligheter for å arbeide med det, hvordan skal elevene da tilegne seg kompetanse og mestring knyttet til hypoteser? Analysen av lærerveiledningenes innhold er riktignok basert på innhold basert på arbeid med tall, og som jeg i innledningen avklarte, det kan finnes muligheter for resonnering i lærerveiledningenes innhold utover det som er presentert. Likevel mener jeg funnet belyser viktigheten av at lærere må være bevisst deres ansvar i matematikkundervisningen, og at dem ikke ukritisk belager undervisningen sin på bare lærerveiledningenes innhold, noe tidligere forskning tegner et bilde av (Lepik et al., 2015).

5.1.4 Variert innhold som kjennetegnet resonnering

Et siste funn jeg har presentert her er at innhold som kjennetegnet resonnering var variert. Av resultatene å lese var det både arbeid med partall og oddetall, arbeid med noe som er større, mindre, flere eller færre enn noe annet, arbeid med tallinja, arbeid med tiere og enere og arbeid med dobling og halvering. Dette funnet indikerer at det økende fokuset på resonnering og bevis i matematikkundervisningen gjenspeiles i innholdet i en lærerveiledning. Det indikerer også et svar til Valenta & Enge (2020) som håpte at lærebokforfattere tok vare på mulighetene den nye læreplanen ga til å arbeide med resonnering og bevis. At det legges til rette for resonnering i forskjellige emne i kapittelet, og at mulighetene for resonnering er representert i hele kapittelet, ikke kun i et enkelt emne eller i noen utvalgte oppgaver bakerst i kapitlet, er også noe funnet kan være et bilde på. Funnet mener jeg derfor er et positivt funn for flere. Slik jeg vurderer det er det et positivt funn for matematikklærere, forskning viser nemlig at de planlegger undervisningen gjennom lærerveiledninger i tro om at læreplanens føringer blir møtt (Gilje et al., 2016). Funnet indikerer at det er noe de kan fortsette med. Videre mener jeg det er et positivt funn for norske elever, fordi innhold som kjennetegner resonnering er tilgjengelig for alle, uavhengig av nivå eller forkunnskaper. Et slikt funn er ikke en selvfølge å finne, da det som tidligere nevnt kan være sprik mellom læreplanmål og lærebok. Brehmer et al. (2015) gjorde en analyse av svenske lærebøker og konkluderte med at det var liten tilgang til problemløsningsoppgaver. Av deres analyse fant de få oppgaver innenfor problemløsning, og de oppgavene de fant var ofte plassert bakerst i kapitlene og gjerne på det høyeste nivået. Jeg mener også at det er et positivt funn for de som er tett knyttet til lærerveiledninger, for eksempel lærere og norske skoleledere, da det viser seg at lærerveiledningene er i tråd med læreplanens kompetansemål.

5.2 Studiens begrensinger og metodekritikk

Studien har fulgt et kvalitativ forskningsdesign, noe som har medført noen begrensninger. En begrensning er at det som kjennetegner muligheter for resonnering i denne studien ikke kan generaliseres til å gjelde for alle lærerveiledninger i Norge. Det er i denne studien kun tatt utgangspunkt i tre lærerveiledninger, og selv om de lærerveiledningene jeg har analysert kommer fra læreverk som er mye brukt i Norge, finnes det andre læreverk som også blir brukt. En slik generalisering kunne med større sannsynlighet vært mulig om dataen forelå i større mengder enn det den gjorde i en kvalitativ studie som denne.

En annen begrensing ved studiens metode er at en kvalitativ forskningsmetode vanligvis blir brukt i søk etter mening eller formålsforklaring gjennom data som foreligger i tekst (Johannesen et al., 2016). Jeg har i denne studien kun belyst kjennetegn ved muligheter for matematisk resonnering gjennom lærerveiledningenes innhold. En faktor som kunne påvirket funnene var dersom jeg i tillegg hadde studert hvor mange lærere som tok de forskjellige lærerveiledningene i bruk. Svingen (2014) forsket eksempelvis på det, og presenterte i sin masteroppgave funn som viste at 2 av 3 lærere i liten grad nyttet seg av lærerveiledningen i sin planlegging, gjennomføring og vurdering av undervisning. Utvalget til Svingen (2014) var på kun tre lærere, så funnet sier ikke noe om læreres bruk av lærerveiledninger på generell basis. Men jeg mener funnet til Svingen (2014) kan gi et bilde av at ikke alle lærere nødvendigvis tar i bruk eller legger opp matematikkundervisningen sin etter lærerveiledninger. Dersom jeg hadde studert bruken av de forskjellige lærerveiledningene i tillegg til innholdet de presenterer, kunne det hatt innvirkning på studiens funn.

En innvirkning på funnene kunne for eksempel vært at indikasjonene fra «Mye av innholdet som kjennetegner resonnering bygget på identifisering av mønster» mistet sin verdi. Dette er noe jeg selv mener fordi det viste seg at å identifisere mønster for elever kan bidra til økt motivasjon og utforskertrang i matematikkfaget. Dersom jeg hadde studert læreres bruk av lærerveiledningene, og det viste seg at lærerne ikke brukte dem i sin undervisning, er sannsynligheten stor for at elever ikke ville arbeidet med innhold som kjennetegnet resonnering på den måten lærerveiledningene presenterte. Hvorvidt funnet om at elever da kan oppleve utforskertrang og motivasjon i faget er gyldig, villa da vært usikkert. Men på grunn av at data til en slik undersøkelse foreligger i form av tall, er ikke slik data forenelig med studiens kvalitative metode, og jeg kan derfor ikke uttale meg om hvorvidt lærerveiledningene jeg har analysert blir brukt eller ikke.

I den påfølgende diskusjonen har jeg valgt å ta høyde for at lærerveiledningene jeg har analysert blir brukt. Da kan en annen begrensning ved studiens metode være at jeg ikke har studert hvordan de blir brukt. Selv om jeg i denne studien har funnet at lærerveiledningene tilfredsstiller kompetansemål og kjerneelement i LK20, er det i hovedsak hvordan lærere nytter seg av lærerveiledningene som vil ha størst betydning for om kompetansemålene LK20 presenterer blir nådd. Forskning viser blant annet at selv om ulike lærere tar utgangspunkt i samme bok, vil lærestoffet bli presentert ulikt på grunn av lærerens påvirkningskraft (Remillard, 2005). Det vil si at lærerens kunnskap påvirker bruken av læreboka. Det er naturlig å anta at lærerens kunnskap også påvirker bruken av lærerveiledningene.

Ettersom jeg kun har analysert lærerveiledningenes innhold kan en diskusjon om jeg faktisk har studert fenomenet jeg var på utkikk etter, også melde seg. Hva som kjennetegner resonnerende arbeid kan, som jeg i innledningen presiserte, være mer enn det en dokumentanalyse av lærerveiledningene gir rom for. Ved å eksempelvis intervjue lærere som benyttet seg av de ulike lærerveiledningene, kunne jeg fått et innblikk i hva de mente kjennetegnet innhold som ga mulighet for resonnering. Gjennom et intervju får en nemlig frem menneskets erfaringer og oppfatninger på en god måte, samtidig som informantene gis en større frihet til å uttrykke seg (Johannesen et al., 2012). En annen metode jeg kunne benyttet meg av i forskningen min var observasjon. Data samlet inn gjennom observasjon kan berike data samlet inn gjennom andre metoder (Robson, 2002). I denne forskningen kunne da data samlet inn gjennom observasjon beriket dataen jeg samlet inn gjennom analysen av lærerveiledningene samt et eventuelt lærerintervju. En observasjon av læreres bruk av lærerveiledninger ville gitt et mer realistisk bilde av hva som kjennetegnet muligheter for matematisk resonnering de fant i innholdet, da det ikke alltid er et samsvar mellom det informantene sier og det de gjør (Robson, 2002).

Oppsummert kan en fra avsnittene om metodens begrensinger og kritikk fastslå at studiens resultat ikke indikerer hva som kjennetegner muligheter norske elever på 2.

trinn gis for matematisk resonnering. Studiens resultat indikerer heller ikke det fulle potensialet av muligheter for matematisk resonnering i lærerveiledningers innhold.

5.3 Studiens implikasjoner og videre forskning

Jeg har i denne oppgaven presentert funn som indikerer at lærerveiledninger representerer læreplanens kompetansemål og kjerneelement, ved at de i sine innhold legger til rette for matematisk resonnering i arbeid med tall. Funnene mener jeg kan bidra til å styrke tilliten og troverdigheten lærere har til lærerveiledninger. At lærerveiledningers tillit og troverdighet styrkes kan gi ringvirkninger i form av økt bruk og nyttiggjørelse av dem.

Blant den tidligere forskningen jeg viste til i teorikapittelet i avsnitt 2.3, er det gjennomført mange studier av lærebøker. Fan et al. (2013) viser til at forskning gjort på lærebøker som regel er en analyse eller en sammenlikning av bøkene. Denne studien føyer seg inn i rekken av den type forskning, da også jeg har basert forskningen min på analyse av verkene. Likevel har jeg bidratt med nyvinnende forskning, siden jeg har analysert lærerveiledninger og ikke lærebøker. Det er derfor positivt at jeg nå er med å tilby resultat fra en slik studie.

I tillegg ser en i avsnitt 2.3 at det er begrenset med studier rettet mot resonnering på barnetrinnet. Både Thompson et al. (2012), Stacey & Vincent (2009) og Stylianides (2009) baserte sin forskning på analyse av lærebøker på mellom- og ungdomstrinn. Tømmerdal (2021) forsket i sin masteroppgave på hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis det fantes blant oppgaver innenfor temaet brøk i lærebøker på 5. trinn. Han er bevisst en lav andel studier av resonnering på barnetrinnet, når han i sin studie oppfordrer til videre forskning på resonnering og bevis. Blant annet skriver han at det å studere resonnering og bevis i andre matematiske emne enn brøk vil være en god tanke, og trekker frem det å studere hvordan kjerneelementet resonnering og argumentasjon implementeres i undervisningen på barnetrinnet, som spesielt interessant. Valenta & Enge (2020) anbefalte at det i videre studier ble forsket på hvordan arbeid med bevisrelaterte kompetanser spilles ut i lærebøker og i skolen. Studien min kan derfor være et viktig bidrag til det norske forskningsmiljøet på matematisk resonnering. Både fordi hva jeg har analysert, lærerveiledninger, hvilket tema jeg har retter analysen mot, matematisk resonnering, og hvilket årstrinn lærerveiledningene tilhører, 2. trinn, er faktorer ved forskningen det i dag er etterspørsel etter.

Studien kan også være et utgangspunkt for videre forskning på matematisk resonnering på barnetrinnet. Gjennom resultatene kom det blant annet frem at det ene aspektet ved resonnering, hypotesesetting, i liten grad var å spore i lærerveiledningenes innhold. Som tidligere diskutert kan dette forklares ved at aspektet nok er krevende for elevene å forstå. På samme tid har Jeannotte & Kieran (2017) trolig inkludert aspektet i deres modell for matematisk resonnering av en grunn. En studie på hvordan en i større grad kan legge til rette for aspektet hypotesesetting i matematikk på barnetrinnet, vil derfor være interessant.

Jeg avklarte i innledningen at forskningsspørsmålet for denne studien begrenset seg til å omhandle resonnering i arbeid med tall. Begrensingene ble gjort av hensyn til oppgavens omfang. I kompetansemålet forskningsspørsmålet er formulert ut fra står det at eleven skal kunne *ordne tal, mengder og former ut frå eigenskapar* og *(…) reflektere over om* *dei kan ordnast på fleire måtar* (Utdanningsdirektoratet, 2021). Det vil si at lærerveiledninger i tillegg til å legge til rette for resonnering i arbeid med tall, også, ifølge min tolkning av kompetansemålet, skal legge til rette for resonnering i arbeid med mengder og former. På grunn av at denne studien kun har studert hva som kjennetegner muligheter for resonnering ulike lærerveiledninger legger til rette for i arbeid med tall, vil et sentralt tema for videre forskning være hva som kjennetegner muligheter for resonnering innhold i lærerveiledninger legger til rette for i arbeid med mengder og former.

6. Avslutning

I denne studien har jeg sett på hva som kjennetegner muligheter for resonnering i arbeid med tall som lærerveiledningers innholdet presenterer. Jeg har med utgangspunkt i Jeannotte & Kieran (2017) sin modell for matematisk resonnering kategorisert innhold fra lærerveiledninger, til å gjelde innholdet som la til rette for generalisering, identifisering av mønster, sammenlikning, klassifisering eller hypotesesetting. Innholdet ble i etterkant kodet, hvor jeg i kodingsprosessen oppdaget ulike sammenhenger i innholdet. Sammenhengene jeg oppdaget var at innhold som la til rette for resonnering i arbeid med tall, var innhold som kjennetegnet arbeid med partall og oddetall, arbeid med større, mindre, flere eller færre enn - oppgaver, arbeid med tiere og enere, arbeid med tallinja og arbeid med dobling og halvering. I resultatkapittelet redegjorde jeg for hvordan disse sammenhengene viste seg i datamaterialet. I diskusjonskapittelet drøftet jeg resultatene i lys av tidligere teori, samt gjorde rede for studiens metodebegrensinger og implikasjoner.

Innledningsvis presenterte jeg et forskningsspørsmål:

Hva kjennetegner muligheter for resonnering i arbeid med tall i innhold presentert i lærerveiledninger?

Forskningsspørsmålet fant jeg i arbeid med denne studien svar på, ved at muligheter kjennetegnes med arbeid med partall og oddetall, større, mindre, flere eller færre enn, tiere og enere, tallinja og dobling og halvering.

Avslutningsvis har jeg presentert et sitat:

«Hvis vi legger til muligheten for selv den minste forbedring og multipliserer det med antall elever, lærere og foreldre som bruker dem, indikerer det et stort forbedringspotenisal totalt» (Kongelf, 2017, s. 195).

Sitatet har jeg i arbeid med denne studien brukt som motivasjon, ved at arbeidet mitt kan resultere i en forbedring som igjen kan gagne mine fremtidige elevers matematikkundervisning.

Referanser

Alseth, B., Arnås, A.-C., & Røsseland, M. (2020). *Multi 2A: matematikk for barnetrinnet: Lærerens bok* (3. utg.). Gyldendal.

Andersen, G. (2016). *Dokumentanalyser.* Hentet fra http://ndla.no/nb/node/57112 (11.05.2016).

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 27–44). NCTM.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof*.* I L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. lll, pp. 907-920). Higher Education Press.

Blank, N., Melhus, K., Tveit, C. & Moe, G. I. (2014). *Utviklende opplæring i matematikk.* Utdanning, 14(13), 50-53. https://matematikklandet.no/wp-content/uploads/2017/01/publication-50-53.pdf

Bratholm, B. (2001, 23. mars). *Godkjenningsordningen for lærebøker 1889-2001, en historisk gjennomgang*. Hentet fra HVE-biblioteket: http://wwwbib.hive.no/tekster/hveskrift/notat/2001-05/not5-2001-02.htm

Brehmer, D., Ryve, A. & Van Steenbrugge, H. (2015). *Problem solving in Swedish mathematics textbooks for upper secondary school*. Scandinavian Journal of Education Research 60(6), 577-593. https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1066427

Brinkmann, S., Tanggaard, L., & Hansen, W. (2012). *Kvalitative metoder: empiri og teoriutvikling*. Gyldendal akademisk.

Bryman. (2016). *Social research methods* (5. utg.). Oxford University Press.

Gibbs, G. (2007). *Analyzing qualitative data*. SAGE.

Bugten, Å.M. & Olafsen, A. R. (2021). *Volum 2A : Lærerveiledning* (1. utg.). Fagbokforlaget.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, *12*(2), 117-151.

Creswell, J. W. (2009). *Research Design Qualitative, Quantitative, and mixed methods approaches* (3. utg.). SAGE Publications.

Creswell, J. W. & Clark, V. L. P. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2. utg.). SAGE publications

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Reasearch Methods in Education*. Routledge.

Dahl, H. H. & Nohr, M-E. (2020). *Matematikk 2A fra Cappelen Damm: Lærerveiledning*. Cappelen Damm.

Dahlum, S. (2021, 9.mars). *Validitet* i *Store Norske Leksikon*. Hentet 3. mai 2022 fra https://snl.no/validitet

Denscombe, M. (2003). *The good research guide: for small-scale social research projects.* Open University Press

Evens, H. & Houssart, J. (2004). *Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: 'I know but I can't explain'.* Educational Research, 46:3, (s. 269-282). https://doi.org/10.1080/0013188042000277331

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). *Textbook research in mathematics education: development status and directions.* ZDM, 45(5), 633-646.

Fritzen, I.L., Nilsen, E. K., Nyborg, M., Nilsen, Margareth, & Nyborg, Sindre. (2020). *Matemagisk 2: Lærerveiledning* (2. utg.). Aschehoug.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., Knain, E., Mørch, A., Naalsund, M. & Skarpaas, K. G. (2016). *Med ARK & APP. Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer*. Universitetet i Oslo.

Glaser, B. (1978). *Theoretical Sensitivity* (4.utg). The Sociology Press.

Glaser, B.G. & Strauss, A.L. (1970). *The Discovery of Grounded theory. Strategies for Qualitative research* (3. Utg.). Aldine Publ.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. *Handbook of qualitative research*, *2*(163-194), 105.

Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). *An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what?* British Educational Research Journal, 28(4), 567–590. https://doi.org/10.1080/0141192022000005832

Hanna, G. (1990). *Some pedagogical aspects of proof*. Interchange, 21(1), 6–13.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. I P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 66-78). Sense Pulishers.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). *Students' proof schemes: Results from exploratory studies.* American Mathematical Society, 7, 234–283.

Herbert, S., & Williams, G. (2021). *Eliciting mathematical reasoning during early primary problem solving*. Mathematics Education Research Journal, 1-27.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). *A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics*. Educational Studies in Mathematics, *96*(1), 1-16.

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Abstrakt.

Kongelf, T. R. (2015). *Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge*. Nordic Studies in Mathematics Education, *20*(3-4), 83-109.

Kongelf, T. R. (2017). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influence* (s. 195-221). Cappelen Damm Akademisk.

Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Agder

Krumsvik, R.J. (2014). *Forskingsdesign og kvalitativ metode: ei innføring* (p. 187). Fagbokforlaget.

Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). *Using textbooks in the mathematics classroom–the teachers' view.* Nordic Studies in Mathematics Education, 20(3-4), 129–156.

Li, Y., Chen, X. & An, S. (2009). *Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division.* ZDM, 41(6), 809-826. doi:10.1007/s11858-009-0177-5

Lithner, J. (2007). *A research framework for creative and imitative reasoning*. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 255-276. DOI: 10.1007/s10649-007-9104-2

Mason, J. & Pimm, D. (1984). *Generic examples: Seeing the general in the particular*. Educational Studies in Mathematics, 15(3), 277-289

Mosvold, R. (2006). *Mathematics in everyday life. A study of beliefs and actions* [Doktorgradsavhandling]. Universitet i Bergen.

NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.* Hentet fra: https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa* (LOV-1998-07-17-61. Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_1#%C2%A71-3

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2012). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Høyskoleforlaget.

Postholm, M.B. & Jacobsen, D. I., & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Remillard, J. T. (2005). *Examining Key Concepts in Research on Teachers' Use of Mathematics Curricula*. Review of Educational Research, 75(2), 211-246. doi: 10.2307/3516049

Reston, V. A. (2000). *National Council of Teachers of Mathematics*. NCTM.

Robson, C. (2002). *Real World Research*. Blackwell.

Scott, J. (1990). *A matter of record: Documentary sources in social research*. Polity Press.

Selander, S., & Skjelbred, D. (2004). *Pedagogiske tekster for kommunikasjon og læring*. Universitetsforlaget.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press.

Språkrådet. (2021, 18. januar). *Lærebokgransking.* https://www.sprakradet.no/Vi-og-vart/Om-oss/historie-i-tre-delar/norsk-sprakrad/larebokgransking/

Grønmo, S. (2012). *Kvalitative og kvantitative metoder: Begreper og distinksjoner*. Sosiologisk tidsskrift, 20(1), 85–91.

Silver, E., A. (1997). *Fostering Creativity through Instruction Rich*. ZDM, 29(3), 75-80.

Silverman, D. (2011). *Interpreting qualitative data* (4. utg.). Sage Publications

Sinclair, N. (2009). *Aesthetics as a liberating force in mathematics education?* ZDM, 41(1-2), 45

Stacey, K. & Vincent, J. (2009). *Modes of reasoning in explanations in australian eighth-grade mathematics textbooks.* Educational Studies in Mathematics, 72(3), 271–288. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9193-1

Store Norske Leksikon. (2021, 8. novemeber). *Reflektere*. Hentet fra https://snl.no/reflektere

Store Norske Leksikon. (2021, 8. november). *Resonnere*. Hentet fra https://snl.no/resonnere

Stylianides, A. J. (2007). *Proof and proving in school mathematics*. Journal for research in Mathematics Education, 289-321.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.

Stylianides, A. J., & Harel, G. (2018). Advances in mathematics education research on proof and proving. *An International Perspective*.

Stylianides, G. J. (2009). *Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks*. Mathematical thinking and learning, 11(4), 258–288. https://doi.org/10.1080/10986060903253954

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). *Prospective teachers' challenges in teaching reasoning and proving*. International Journal of Science and Mathematics Education, 11(6), 1463–1490. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9409-

Svingen, O. E. L. (2014). *Analyse av to lærerveiledninger i matematikk-særtrekk og læreres bruk av dem*. [Masteroppgave]. NTNU.

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode* (3. utg.). Fagbokforlaget.

Thompson, D. R., Senk, S. L. & Johnson, G. J. (2012). *Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks.* Journal for Research in Mathematics Education, 43(3), 253–295. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.43.3.0253

Tømmerdal, S. (2021). *Resonnering og bevis på barnetrinnet En kvalitativ studie av brøkoppgaver i lærebøker på 5. trinn.* [Masteroppgave]. NTNU.

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Kjernelementer – fag i grunnskolen og gjennomgående fag i videregående opplæring.* Hentet fra: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2021, 12. mars). *Læremidler og læringsteknologi i skole og opplæring.* Hentet fra https://www.udir.no/om-udir/tilskudd-og-prosjektmidler/tilskudd-til-laremidler/begrepsavklaring-skole/

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. Trinn* (MAT01-05). Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Utdanningsnytt. (2019, 28. mars). *Matte må forstås; pugging alene gir ikke forståelse.* https://www.utdanningsnytt.no/fagartikkel-matematikk/matte-ma-forstas-pugging-alene-gir-ikke-forstaelse/171189

Valenta, A., & Enge, O. (2020). *Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen.* https://doi.org/https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5617/adno.8195

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer Academic Publishers.

Van Zanten, M. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). *Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks*. ZDM, 50(5), 827-838.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 227-236.

Vedlegg

Vedlegg 1:

Vertikal analyse							
Navn på læreverk: Multi							
Navn på kapittel: Tallene til 40							
Forventet av elevene (horisontalt) Presentert til lærerne (vertikalt)	Generalisering	Identifisering av mønster	Sammenlikning	Klassifisering	Hypotesesetting	Begrunning	Formulering av bevis
Fx							
Fx							
A							
F1							
T							
Fx							
Fx							
F2							
Fx							
F3			X				
T							
A							
Fx			X				
F4			X				
Fx						X	
F5							
T		X					
A							
Fx		X		X			
F6		X					
F7							
T							
A							
Fx							
F8							
F9							
F10		X		X			
T							
A							
Fx							
Fx							
F11							
T							

A							
Fx							
Fx						X	
F12							
T							
A						X	
F13							
F14							
F15							
T							
A							
Fx						X	
Fx							
F16						X	
F17							
F18							
T							
A							
A							
F19							
F20							
F21							
A							
T							
A							
Fx		X	X	X			
Fx							
A							
Fx				X			
T							
A							
Fx						X	
F22							
F23							
F24		X	X				
F25							
A			X				
T							
Fx							
Fx							
F26		X					
F27							
A							
T							
A							
Fx							
F28							
F29							

A							
T							
A							
Fx						X	
Fx							
F30							
F31							
A							
T							
A						X	
Fx	X			X			
Fx		X					
F32		X				X	
Fx				X			
F33	X	X					
T	X				X		
A		X					
Fx	X	X		X	X		
F34							
A							
Fx	X				X		
F35						X	
T							
A							
Fx						X	
F36							
A							
T		X					
A							

Vedlegg 2:

Vertikal analyse							
Navn på læreverk: Matemagisk							
Navn på kapittel: Tall og telling							
Forventet av elevene (horisontalt) Presentert til lærerne (vertikalt)	Generalisering	Identifisering av mønster	Sammenlikning	Klassifisering	Hypotesesetting	Begrunning	Formulering av bevis
T							
F1							
F2							
F3							
F4							
T							
A							
T							
F5							
F6							
F7		X					
F8		X					
T							
A							
T							
F9		X	X				
T						X	
A		X					
T							
F10		X	X	X			
F11		X	X	X			
F12		X		X			
T							
A							
T		X	X				
F13							
F14							
F15							
F16						X	
T							
A							
T				X			
F17							

F18	X						
F19	X	X		X			
F20	X	X					
T							
A							
T		X					
F21		X					
F22		X					
F23		X	X	X			
T					X		
A							
T							
F24							
F25		X	X				
T			X				
A							
T							
F26							
F27							
T							
A							
T							
F28			X			X	
F29							
T							
A							

Vedlegg 3:

Vertikal analyse							
Navn på læreverk: Volum							
Navn på kapittel: Tallene 0-100							
Forventet av elevene (horisontalt) Presentert til lærerne (vertikalt)	Generalisering	Identifisering av mønster	Sammenlikning	Klassifisering	Hypotesesetting	Begrunning	Formulering av bevis
T							
F1							
F2							
F3		X					
F4		X					
F6							
F7							
F8							
T							
F9							
F10							
F13							
F14						X	
F15							
F16							
T							
F17			X	X			
F18			X			X	
F19						X	
F20							
T							
F21							
F22							
F23			X				
F26							
F27							
F28							
F30				X			

Vedlegg 4:

Vertikal analyse							
Navn på læreverk: Volum							
Navn på kapittel: Partall og oddetall							
Forventet av elevene (horisontalt) Presentert til lærerne (vertikalt)	Generalisering	Identifisering av mønster	Sammenlikning	Klassifisering	Hypotesesetting	Begrunning	Formulering av bevis
T			X	X			
F1							
F2							
F3							
F4		X					
F5		X					
T		X		X			
F6		X					
F7							
F8	X					X	
F9							
F10	X					X	
F11							
F12							
F14	X	X					
T			X				
F15		X					
F16	X						
T							
F18							
F20		X	X				
F21							
F22							
F23		X					
F24		X					
F26							
F27							
F28			X				

NTNU

Kunnskap for en bedre verden