

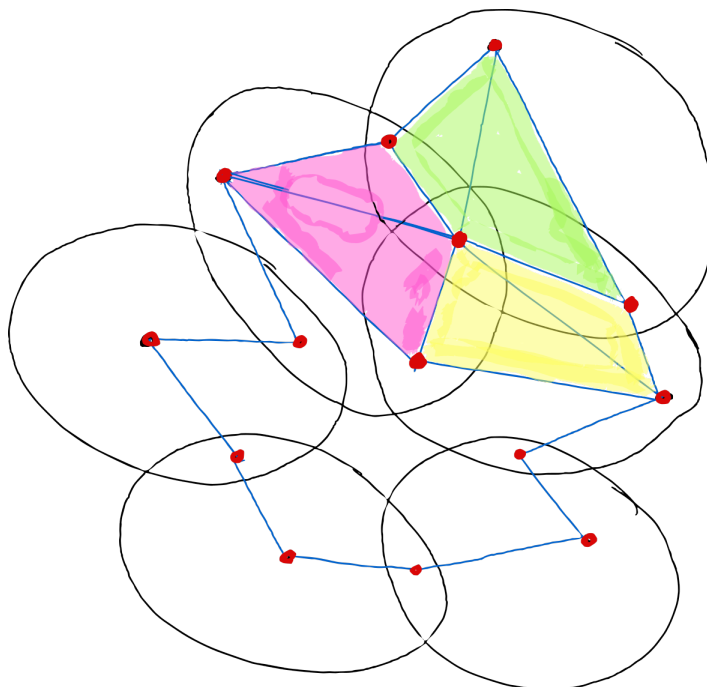
Håvard Skjetne Lilleheie

# Nerveteoremet i det endelege, kompakte og konvekse tilfellet i $\mathbb{R}^n$

Bacheloroppgåve i Matematiske fag

Rettleiar: Marius Thaule

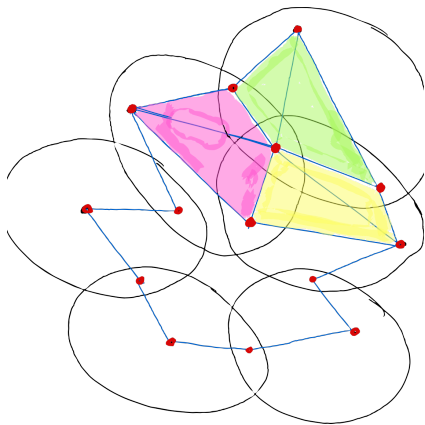
Juni 2022





Håvard Skjetne Lilleheie

# Nerveteoremet i det endelige, kompakte og konvekse tilfellet i $\mathbb{R}^n$



Bacheloroppgåve i Matematiske fag  
Rettleiar: Marius Thaulé  
Juni 2022

Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet  
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk  
Institutt for matematiske fag



# Nerveteoremet i det endelege, kompakte og konvekse tilfellet i $\mathbb{R}^n$

Håvard Skjetne Lilleheie

31. mai 2022

## Innhald

<b>1</b>	<b>Innleiing</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Førehandskunnskapar</b>	<b>2</b>
2.1	Spesiell notasjon . . . . .	2
2.2	Førehandskunnskapar . . . . .	2
2.3	Kjente teorem . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Grunnleggande definisjonar og resultat</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Bevis for nerveteoremet</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>35</b>
	<b>Referansar</b>	<b>36</b>

# 1 Innleiing

Topologisk dataanalyse er eit fagfelt der ein brukar abstrakte topologiske verktøy til å rekna seg fram til «forma» til data. Gunnar Carlsson argumenterer i [4] for at topologisk dataanalyse er bra på å finna den generelle strukturen til data meir uavhengig av val av metrikk og totalt uavhengig av val av koordinatsystem ein har ei datamengd i.

Eit av dei mest sentrale resultatata i topologisk dataanalyse er «nerveteoremet», som koplar den intuitive måten ein ser på forma til data på, med ein matematisk struktur ein kan jobba med. Det er ein grunnmur som store delar av topologisk dataanalyse er bygd på. Det er dette resultatet som er fokuset av denne teksten.

Nerveteoremet er som oftast kreditert til anten Borsuk i [3] i 1948, eller Weil i [14] i 1952, så det er eit resultat som er over 70 år gammalt.

Men trass i at nerveteoremet er så sentralt i topologisk dataanalyse, så er det svært få konkrete bevis for kvifor det fungerer i dei tilfella det blir brukt. Somme skriv teoremet upresist som til dømes [5, Theorem 2.1], eller referer ikkje til eit skikkeleg bevis som til dømes [10, Lemma 4.11]. Medan andre viser nerveteoremet ved å bruka svært avanserte teknikkar som til dømes [6, Corollary 4G.3] eller [8, Theorem 15.21], utan å visa det for det kompakte og konvekse tilfellet som er det som blir brukt mest i topologisk dataanalyse.

I denne teksten ynskjer eg å bevise nerveteoremet i det endelege, konvekse og kompakte tilfellet i  $\mathbb{R}^n$ , som er det mest vanlege tilfellet det blir brukt til i topologisk dataanalyse.

## 2 Førehandskunnskapar

### 2.1 Spesiell notasjon

Eg lar  $\#S$  tyda talet på element i  $S$ .

Eg lar  $f \simeq g$  tyda at to avbildingar  $f$  og  $g$  er homotope.

Eg lar  $X \cong Y$  tyda at to topologiske rom  $X$  og  $Y$  er homeomorfe.

La  $x \in \mathbb{R}^d$  og  $r \in \mathbb{R}$ . Då lar eg  $B_r(x)$  vera den opne ballen med omsyn på den euklidske metrikk i  $\mathbb{R}^d$ , og  $\bar{B}_r(x)$  vera den lukka ballen med omsyn på den euklidske metrikk i  $\mathbb{R}^d$ .

### 2.2 Førehandskunnskapar

Eg kjem til å anta at lesaren har grunnleggande kunnskap innan topologi, lineær algebra og analyse, og kan litt om permutasjonar.

### 2.3 Kjente teorem

Beviset av nerveteoremet er langt og bygger på mange kjente resultat. Her kjem ei samling av kjente teorem som blir brukt i både beviset og forklaringa av nerveteoremet i denne teksten.

**Teorem 2.1** (Universaleigenskapen til underromstopologien). *La  $X$  og  $Y$  vera topologiske rom, og la  $A \subseteq X$  vera ei delmengd av  $X$  med underromstopologien, og la  $f : Y \rightarrow A$  vera ei vilkårleg avbilding frå  $Y$  til  $A$ , og la  $i : A \hookrightarrow X$  vera inklusjonsavbildinga.*

*Då er  $f$  kontinuerleg visst og berre visst  $i \circ f$  er kontinuerleg.*

For eit bevis av [Teorem 2.1](#), sjå [12, s. 98].

**Teorem 2.2** (Heine–Borel). La  $\mathbb{R}^d$  ha standardtopologien. La  $X$  vera eit underrom av  $\mathbb{R}^d$  med underromstopologien.

Då er  $X$  kompakt visst og berre visst  $X$  er lukka og avgrensa.

For eit bevis av [Teorem 2.2](#), sjå [11, s. 100].

**Teorem 2.3.** La  $X$  og  $Y$  vera to topologiske rom, med  $X$  kompakt, og  $Y$  Hausdorff. La  $f : X \rightarrow Y$  vera ei kontinuerleg og bijektiv avbilding.

Då er  $f$  ein homeomorfi.

Eit bevis av [Teorem 2.3](#) kan ein finna i [12, s. 135–136].

**Teorem 2.4.** La  $X$  og  $Y$  vera topologiske rom med  $A, B \subseteq X$  underrom med underromstopologien. La  $A, B$  vera lukka mengder i  $X$  med  $A \cup B = X$ .

Då er  $f : X \rightarrow Y$  er kontinuerleg visst og berre visst både  $f|_A$  og  $f|_B$  er kontinuerlege.

Eit bevis av [Teorem 2.4](#) kan ein finna i [9, s. 108–109].

**Teorem 2.5.** La  $X$  vera ei delmengd av  $\mathbb{R}^d$  med standardtopologien. La  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Då er

$$d(x, X) = \inf_{y \in X} \|x - y\|$$

kontinuerleg.

Eit bevis av [Teorem 2.5](#) kan ein finna i [7, s. 90–91].

**Teorem 2.6.** La  $K$  vera eit kompakt topologisk rom, og la  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  vera ein vilkårleg kontinuerleg funksjon der  $\mathbb{R}$  har standard topologi.

Då er

$$\inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x)$$

og

$$\sup_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} f(x).$$

For eit bevis av [Teorem 2.6](#), sjå [12, s. 132].

**Teorem 2.7.** La  $A$  vera ei tuppel av endeleg mange element, og la  $f : A \rightarrow A$  vera ein permutasjon (bijektiv funksjon).

Då kan  $f$  skrivast som ei samansetting av endeleg mange permutasjonar som berre byter om to element.

For eit bevis av [Teorem 2.7](#), sjå [2, s. 130].

**Teorem 2.8.** La  $V := (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , vera ein tuppel av  $n$  lineært uavhengige vektorar i  $\mathbb{R}^d$ , med  $d \geq n$ . La  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  vera ein tuppel av  $n$  vilkårlege (ikkje naudsyntvis distinkte) punkt i  $\mathbb{R}^k$ .

Då kan ein konstruera ei lineæravbilding  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  som tek  $v_i \mapsto w_i$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Bevis.* Ettersom  $V$  er ei lineært uavhengig mengd, så kan den utvidast til ein basis  $B \supseteq V$ . Ein har frå grunnleggande lineær algebra at ei lineæravbilding er eintydig bestemt av der den sender basiselementa.

La  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  vera den lineære avbildinga som sender  $v_i \mapsto w_i$  for  $v_i \in V$ , og resten av  $b \in B \setminus V$  til 0. Den oppfyller krava.  $\square$

**Teorem 2.9.** La  $\mathbb{R}^n$  og  $\mathbb{R}^m$  ha standard topologi, med  $n, m < \infty$ .

Då er alle lineære avbildingar frå  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^m$  kontinuerlege.

*Bevis.* La  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vera ei lineær avbilding.

Då så seier [7, Theroem 6.3.1] at alle lineære avbildingar frå eit endelegdimensjonalt rom, som til dømes  $\mathbb{R}^n$ , er avgrensa. Difor er  $L$  ei avgrensa avbilding.

Då seier [7, Theorem 6.4.1] at alle avgrensa lineære avbildingar er kontinuerlege, så det gir at  $L$  må vera kontinuerleg.  $\square$

**Teorem 2.10.** La  $\{K_i\}_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av kompakte topologiske rom.

Då er

$$K = \bigcup_{i=1}^n K_i$$

også kompakt.

*Bevis.* La  $U := \{U_i\}_{i \in A}$  vera eit uendeleg overdekke av  $K$ .

Då er  $U$  eit overdekke av  $K_j$  for alle  $j = 1, 2, \dots, n$ . Men sidan  $K_j$  er kompakt, så kan ein velga eit deloverdekke  $\{U_i\}_{i \in A_j}$  som berre består av endeleg mange element. Då får ein at

$$\hat{A} := \bigcup_{j=1}^n A_j$$

berre består av endeleg mange element, og  $\{U_i\}_{i \in \hat{A}}$  dekkar alle  $K_j$ . Det er difor eit endeleg deloverdekke av  $U$  som dekkar  $K$ .  $\square$

### 3 Grunnleggande definisjonar og resultat

I denne delen så bygger ein opp grunnlaget til å kunna forstå kva nerveteoremet seier i tillegg til nokre resultat som bygger forståelse, men som blir brukt i beviset som kjem i neste kapittel.

**Definisjon 3.1.** La  $V$  vera ei ikkje-tom og endeleg mengd, og  $K$  ei mengd som oppfyller dei følgjande krava:

1.  $\forall v \in V : \{v\} \in K$ .
2.  $\forall \sigma \in K : \sigma \subseteq V$ .
3.  $\forall \sigma \in K, \forall \tau \subseteq \sigma : \tau \in K$ .

Då kallar ein  $K$  for eit *endeleg abstrakt simplisielt kompleks over  $V$* , og  $V$  blir kalla for *hjørnemengda* til  $K$ .

Om ein lar  $\sigma \in K$ , med  $\#\sigma = n$ , då kallar me  $\sigma$  for eit *abstrakt  $(n-1)$ -simpleks*.

**Døme 3.2.** Nokre døme på endelege abstrakte simplisielle kompleks over  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ :

- $A_1 = \{\{p_1, p_2\}, \{p_1\}, \{p_2\}\}$ .
- $A_2 = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_1, p_3\}, \{p_2, p_3\}\}$ .
- $A_3 = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}\}$ .

Og her er nokre ikkje-døme på endelege abstrakte simplisielle kompleks over  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ :



- $A'_1 = \{\{p_1, p_2\}, \{p_1\}\} = A_1 \setminus \{\{p_2\}\}$ , fordi  $\{p_2\} \subseteq \{p_1, p_2\}$ , men  $\{p_2\} \notin A'_1$ .
- $A'_2 = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_1, p_3\}, \{p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, p_3\}\} = A_2 \cup \{\{p_1, p_2, p_3\}\}$ , fordi ein har  $\{p_1, p_3\} \subseteq \{p_1, p_2, p_3\}$ , men  $\{p_1, p_3\} \notin A'_2$ .
- $A'_3 = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_2, p_3\}\} = A_3 \setminus \{\{p_3\}\}$ , fordi  $\{p_3\} \notin A'_3$ .

**Merknad 3.3.** Inspirasjonen bak denne definisjonen kan verka tilfeldig og heilt umotivert, men som ein kjem til å sjå seinare, er dette ein svært praktisk definisjon for å karakterisere strukturen til visse topologiske rom. Abstrakte simplisielle kompleks blir mykje brukt i både definisjonen og beviset av nerveteoremet.

**Definisjon 3.4.** La  $P := \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  vera ei endeleg mengd av punkt i  $\mathbb{R}^m$ .

Då er  $P$  geometrisk uavhengig om for alle mengder  $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$  med

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0$$

og

$$\sum_{i=1}^n a_i p_i = 0,$$

så er

$$a_i = 0 \quad \forall i.$$

**Teorem 3.5.** La  $P := \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  vera ei endeleg mengd av punkt i  $\mathbb{R}^m$ .

Då er  $P$  geometrisk uavhengig visst og berre visst vektorane  $\{(p_2 - p_1), (p_3 - p_1), (p_4 - p_1), \dots, (p_n - p_1)\}$  er lineært uavhengige i  $\mathbb{R}^m$ .

*Bevis.* ( $\implies$ )

La  $a_i \in \mathbb{R}$ , og anta  $\sum_{i=2}^n a_i (p_i - p_1) = 0$ . Om ein då definerer  $a_1 := -\sum_{i=2}^n a_i$ , så ser ein at

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=2}^n a_i - \sum_{i=2}^n a_i = 0$$

og at

$$\sum_{i=1}^n a_i p_i = \sum_{i=2}^n a_i (p_i - p_1) = 0.$$

Sidan  $\{p_i\}_{i=1}^n$  er geometrisk uavhengig, så er  $a_i = 0 \quad \forall i$ . Som er definisjonen av lineært uavhengig.

( $\impliedby$ )

La  $a_i \in \mathbb{R}$  og anta  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$  og  $\sum_{i=1}^n a_i p_i = 0$ . Då ser ein at

$$a_1 = -\sum_{i=2}^n a_i$$

Det gir ein at

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i p_i = \sum_{i=2}^n a_i p_i - \sum_{i=2}^n a_i p_1 = \sum_{i=2}^n a_i (p_i - p_1).$$

Men sidan  $\{(p_i - p_1)\}_{i=2}^n$  er lineært uavhengig, så er  $a_i = 0$  for  $i \in [2, n]$ . Men sidan  $a_1 = -\sum_{i=2}^n a_i = 0$ , får ein at  $a_i = 0 \quad \forall i$ , som er definisjonen av geometrisk uavhengigheit.  $\square$

**Merknad 3.6.** Ein direkte konsekvens av dette resultatet og grunnleggande lineær algebra er at ei geometrisk uavhengig mengd i  $\mathbb{R}^m$  maksimalt kan innehalda  $m + 1$  forskjellige punkt. Dette er fordi det kan ikkje vera meir enn  $m$  lineært uavhengige vektorar i eit  $m$ -dimensjonalt vektorrom.

**Definisjon 3.7.** La  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  vera ei endeleg mengd av punkt i  $\mathbb{R}^m$ , med  $x \in \mathbb{R}^m$ .

Då er  $x$  ein *konveks kombinasjon* av  $P$  om det eksisterer ein mengd av koeffisientar  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  i  $\mathbb{R}$ , med  $a_i \geq 0 \forall i$  og  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , sånn at

$$x = \sum_{i=1}^n a_i p_i.$$

Om  $P$  er ein tuppel (ei ordna mengd), så blir koeffisientane også ein tuppel, og  $A$  blir då kalla dei *barysentriske koordinatane* til  $x$ .

**Teorem 3.8.** *Dei barysentriske koordinatane til ein konveks kombinasjon av geometrisk uavhengige punkt er eintydige.*

*Bevis.* La  $x$  vera ein konveks kombinasjon av geometrisk uavhengige punkt  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  i  $\mathbb{R}^m$ . Anta at  $x$  har to barysentriske koordinatar  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  og  $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ .

Det gir at

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^n a_i p_i - \sum_{i=1}^n b_i p_i = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) p_i$$

og ein får

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = 1 - 1 = 0.$$

Men sidan  $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  er geometrisk uavhengig, så er

$$(a_i - b_i) = 0 \forall i \iff a_i = b_i \forall i$$

og dei barysentriske koordinatane er difor like. □

**Definisjon 3.9.** La  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$  vera geometrisk uavhengige punkt i  $\mathbb{R}^m$ .

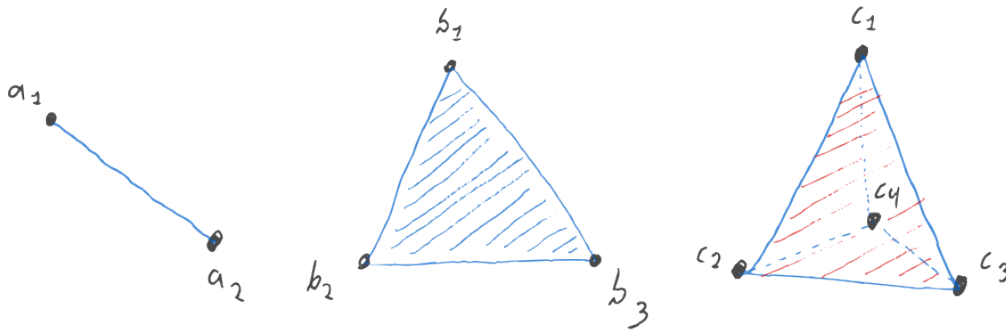
Då er det *geometrisk simplekset* utspent av  $P$ , alle konvekse kombinasjonar av  $P$ .

Vidare, så kallar ein dette geometriske simplekset for eit *geometrisk  $(n - 1)$ -simpleks*.

**Merknad 3.10.** Ut ifrå den førre definisjonen ser ein at eit 0-simpleks berre er eit enkelt punkt, eit 1-simpleks er alle konvekse kombinasjonar av to punkt, som viser seg å vera ei linjestykket mellom dei to punkta. Eit 2-simpleks dannar ein trekant. Eit 3-simpleks er eit tetraeder. Denne simpleksdefinisjonen gir ei fin matematisk forklaring av trekantstrukturar i  $\mathbb{R}^m$ .

**Døme 3.11.** I [Figur 1](#) ser ein tre geometriske simpleks. Eit 1-simpleks utspent av  $\{a_1, a_2\}$ , eit 2-simpleks utspent av  $\{b_1, b_2, b_3\}$ , og eit 3-simpleks utspent av  $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ .

**Merknad 3.12.** Noko som er svært interessant med denne definisjonen er at om ein har ei geometrisk uavhengig mengd  $P$ , og ser på  $\hat{P}_i := P \setminus \{p_i\}$ , så vil dette også vera ei geometrisk uavhengig mengd. I tillegg så vil det geometriske simplekset utspent av  $\hat{P}_i$  vera ei delmengd av det geometriske simplekset utspent av  $P$ . Med andre ord, alle delmengder av  $P$  dannar også geometriske simpleks, inneheldt i det originale geometriske simplekset! Men ikkje nok med det! Når ein ser på det geometriske simplekset utspent av  $\hat{P}_i$  for ein eller annan  $i$ , så ser ein at det



Figur 1: Tre geometriske simpleks.

er som eine «fjeset» av det geometriske simplekset utspent av  $P$ . Om ein vidare ser på unionen av alle geometriske simpleks utspent av  $\hat{P}_i$  for alle  $i$ , så gir dette randa til det geometriske simplekset utspent av  $P$ . Dette kan ein sjå i [Figur 1](#), der den geometriske simpleksen utspent av  $\{b_1, b_2\}$ , er eine «fjeset» til det geometriske simplekset utspent av  $\{b_1, b_2, b_3\}$ , og unionen av alle desse fjesa vil vera heile randa til det geometriske simplekset utspent av  $\{b_1, b_2, b_3\}$ .

**Definisjon 3.13.** La  $V$  vera ei endeleg mengd, og  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  ei injektiv avbiling der biletet  $f(V)$  er ei geometrisk uavhengig mengd av punkt.

Då kallar me  $f$  for ei *affin imbedding*.

**Definisjon 3.14.** La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks  $K$  over ei ikkje-tom hjørnemengd  $V$ , og la  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  vera ei affin imbedding.

Då er den *geometriske realiseringa med omsyn på  $f$  av  $K$* , unionen av alle dei geometriske simpleksa utspent av punkta i  $f(\sigma)$ , for alle  $\sigma \in K$ . Dette er ofte skrive  $|K|_f$ .

**Merknad 3.15.** Det er ofte at ein brukar same notasjon når ein tenker på eit geometrisk simpleks med (geometrisk uavhengig) hjørnemengd  $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$  for eit abstrakt  $(n - 1)$  simpleks  $V := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Ein skriv dette som  $|V|_f$ , der ein tenker at ein tek den geometriske realiseringa over det minste abstrakte simplisielle komplekset som inneheld  $V$ . Altså  $|V|_f := |\{\tau : \tau \subseteq V\}|_f$ .

**Lemma 3.16.** La  $K$  vera eit abstrakt simplisielt kompleks over  $V$ , og la  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  vera ei affin imbedding. Fiksér ein vilkårleg  $x \in \mathbb{R}^n$ .

La

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto y - x \end{aligned}$$

og la

$$\begin{aligned} \hat{\tau} := \tau|_{|K|_f} : |K|_f &\rightarrow |K|_{\hat{\tau} \circ f} \\ y &\mapsto y - x. \end{aligned}$$

Då er  $\hat{\tau}$  veldefinert og ein homeomorfi, og  $\hat{\tau} \circ f$  er ei affin imbedding.

*Bevis.* For å visa at  $\hat{\tau} \circ f$  er ei affin imbedding, så ser ein på  $\hat{\tau} \circ f(V) = (f(v_1) - x, f(v_2) - x, \dots, f(v_n) - x)$ . Ein får då at

$$\begin{aligned} &(f(v_2) - x - (f(v_1) - x), f(v_3) - x - (f(v_1) - x), \dots, f(v_n) - x - (f(v_1) - x)) \\ &= (f(v_2) - f(v_1), f(v_3) - f(v_1), \dots, f(v_n) - f(v_1)). \end{aligned}$$

Frå [Teorem 3.5](#), får ein at  $(f(v_2) - f(v_1), f(v_3) - f(v_1), \dots, f(v_n) - f(v_1))$  er lineært uavhengig fordi  $f(V)$  er geometrisk uavhengig. Det tyder igjen at  $(f(v_2) - x - (f(v_1) - x), f(v_3) - x - (f(v_1) - x), \dots, f(v_n) - x - (f(v_1) - x))$  er lineært uavhengig, som tyder at  $\hat{\tau} \circ f(V)$  er geometrisk uavhengig.

For å visa at  $\hat{\tau}(|K|_f) \subseteq |K|_{\hat{\tau} \circ f}$ , så ser ein på  $y \in \hat{\tau}(|K|_f)$ . Då er  $y$  ein konveks kombinasjon av  $f(\sigma)$  for ein eller annan  $\sigma \in K$ . Det vil seie at for  $k$  lik talet på element i  $f(\sigma)$ , så er  $y = \sum_{i=1}^k a_i f(v_i)$ . Då er

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(y) &= \left( \sum_{i=1}^k a_i f(v_i) \right) - x \\ &= \left( \sum_{i=1}^k a_i f(v_i) \right) - \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) x && \text{(hugs at } \sum_{i=1}^k a_i = 1) \\ &= \left( \sum_{i=1}^k a_i f(v_i) \right) - \sum_{i=1}^k a_i x \\ &= \sum_{i=1}^k (a_i f(v_i) - a_i x) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i (f(v_i) - x) \end{aligned}$$

som er ein konveks kombinasjon av element i  $\hat{\tau} \circ f(\sigma)$ , og difor ei delmengd av  $|K|_{\hat{\tau} \circ f}$ .

For å visa at  $\hat{\tau}(|K|_f) \supseteq |K|_{\hat{\tau} \circ f}$ , så lar ein  $y \in |K|_{\hat{\tau} \circ f}$ . For ein eller annan  $\sigma \in K$  får ein då at  $y$  er ein konveks kombinasjon av element i  $\hat{\tau} \circ f(\sigma)$ . Altså:  $y = \sum_{i=1}^k a_i (f(v_i) - x)$ . Ein lik sum-manipulasjon som ovanfor, berre motsett veg, gir ein at  $y = \hat{\tau} \left( \sum_{i=1}^k a_i f(v_i) \right)$ , altså  $\hat{\tau}(z)$ , der  $z$  er ein konveks kombinasjon av punkta  $f(\sigma)$ . Altså  $y$  er eit element i  $\hat{\tau}(|K|_f)$ .

Merk at  $\hat{\tau} = \tau \circ i$ , der  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  er ein homeomorfi og  $i : |K|_f \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  er inklusjonen inn i  $\mathbb{R}^n$ . [Teorem 2.1](#) gir då at  $\hat{\tau}$  er kontinueleg.

Ved symmetri så kan ein gjera eit likt argument på  $\hat{\tau}^{-1} : y \mapsto y + x$ , og ein får difor at  $\hat{\tau}$  er ein homeomorfi.  $\square$

**Teorem 3.17.** *Geometrisk realisering er eintydig opp til homeomorfi. Med andre ord: For to ulike geometriske realiseringar av eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks  $K$ , med omsyn på  $f$  og  $g$  (to ulike affine imbeddingar), så er  $|K|_f$  og  $|K|_g$  homeomorfe.*

*Bevis.* La  $K$  vera eit abstrakt simplisielt kompleks, og la  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  vera hjørnemengda til  $K$ . La  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  og  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^l$  vera to affine imbeddingar. Definér vidare  $x_i = (f(v_{i-1}) - f(v_1))$  og  $y_i = (g(v_{i-1}) - g(v_1))$ . La  $\tau_f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  vera ei forskyving som tek  $x \mapsto x - f(v_1)$ , og la  $\tau_g : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$  vera ein forskyving som tek  $x \mapsto x - g(v_1)$ . Til slutt, Definér  $\hat{f} := \tau_f \circ f$  og  $\hat{g} := \tau_g \circ g$ .

La  $L_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  vera ei lineær funksjon som sender  $x_i \mapsto y_i$ . Det er mogleg sidan  $\{x_i\}_{i=2}^{\#V}$  er ei lineært uavhengig mengd ifølge [Teorem 3.5](#), så ein kan bruka [Teorem 2.8](#) på dei, og  $x_1 \mapsto y_1$  følger ettersom  $x_1 = 0 \mapsto 0 = y_1$ .

Ein får då at  $L_1(\hat{f}(v_i)) = \hat{g}(v_i)$ , fordi:

For  $i = 1$ , så er

$$L_1(\hat{f}(v_1)) = L_1(f(v_1) - f(v_1)) = L(0) = 0 = g(v_1) - g(v_1) = \hat{g}(v_1).$$

For  $i \neq 1$ , så er

$$L_1(\hat{f}(v_i)) = L_1(f(v_i) - f(v_1)) = L_1(x_{i-1}) = y_{i-1} = g(v_i) - g(v_1) = \hat{g}(v_i).$$

Om ein då lar  $L_2 : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$  vera den lineære funksjonen som sender  $y_i \mapsto x_i$ , så er definisjonane symmetriske og  $L_2(\hat{g}(v_i)) = \hat{f}(v_i)$  frå det same argumentet som ovanfor.

La  $\hat{L} := L_1|_{|K|_{\hat{f}}}$ , og  $\tilde{L} := L_2|_{|K|_{\hat{g}}}$ .

For eit vilkårleg element  $x \in |K|_{\hat{f}}$  så kan ein kan utrykka  $x$  som ein konveks kombinasjon av ei geometrisk uavhengig mengd som korresponderer til hjørnemengda

$$\hat{f}(\sigma) = \{\hat{f}(v_1), \hat{f}(v_2), \dots, \hat{f}(v_k)\}$$

for ein eller annan  $\sigma \in K$ .

Då er  $x = \sum_{i=1}^k a_i \hat{f}(v_i)$  med  $\sum_{i=1}^k a_i = 1$  og  $a_i \geq 0 \forall i$ .

Her er valet av kva hjørnemengd ein ser  $x$  som ein konveks kombinasjon over ikkje viktig, ettersom  $\hat{L}$  er veldefinert.

$$\begin{aligned} \tilde{L} \circ \hat{L}(x) &= \tilde{L} \circ \hat{L} \left( \sum_{i=1}^k a_i \hat{f}(v_i) \right) \\ &= \tilde{L} \left( \sum_{i=1}^k \hat{L}(a_i \hat{f}(v_i)) \right) \\ &= \tilde{L} \left( \sum_{i=1}^k a_i \hat{L}(\hat{f}(v_i)) \right) \\ &= \tilde{L} \left( \sum_{i=1}^k a_i \hat{g}(v_i) \right) \end{aligned}$$

ettersom  $\sum_{i=1}^k a_i \hat{g}(v_i) \in |K|_{\hat{g}}$ , får ein at

$$\begin{aligned} \tilde{L} \left( \sum_{i=1}^k a_i \hat{g}(v_i) \right) &= \sum_{i=1}^k \tilde{L}(a_i \hat{g}(v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \tilde{L}(\hat{g}(v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \hat{f}(v_i) \\ &= x. \end{aligned}$$

Ein kan gjera det same for  $\hat{L} \circ \tilde{L}(y)$  ved eit symmetrisk argument. Dette tyder at  $\hat{L}$  er bijektiv med invers  $\tilde{L}$ .

Om ein lar  $\hat{\tau}_f := \tau_f|_{|K|_f} : |K|_f \rightarrow |K|_{\hat{f}}$  og  $\hat{\tau}_g := \tau_g|_{|K|_g} : |K|_g \rightarrow |K|_{\hat{g}}$ , får ein frå [Lemma 3.16](#) at desse er homeomorfiar.

Då får ein det følgande kommutative diagrammet:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tau_f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^l & \xleftarrow{\tau_g} & \mathbb{R}^l \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
|K|_f & \xrightarrow{\hat{\tau}_f} & |K|_{\hat{f}} & \xrightarrow{\hat{L}} & |K|_{\hat{g}} & \xleftarrow{\hat{\tau}_g} & |K|_g
\end{array}$$

der alle dei vertikale avbildingane er dei naturlege inklusjonane.

Merk her at avbildinga  $\hat{L}$  på nedste rad er kontinuerleg ifølge [Teorem 2.1](#). I tillegg så har ein at  $\hat{\tau}_f$  og  $\hat{\tau}_g$  er homeomorfiar.

Sidan  $\hat{L}$  er både kontinuerleg og bijektiv, med invers  $\tilde{L}$  som frå eit symmetrisk argument også er kontinuerleg, då har ein at  $\hat{L}$  er ein homeomorfi.

Ein får at avbildinga  $(\hat{\tau}_g)^{-1} \circ \hat{L} \circ \hat{\tau}_f : |K|_f \rightarrow |K|_g$  er ei samansetting av tre homeomorfiar, og er difor ein homeomorfi sjølv.  $\square$

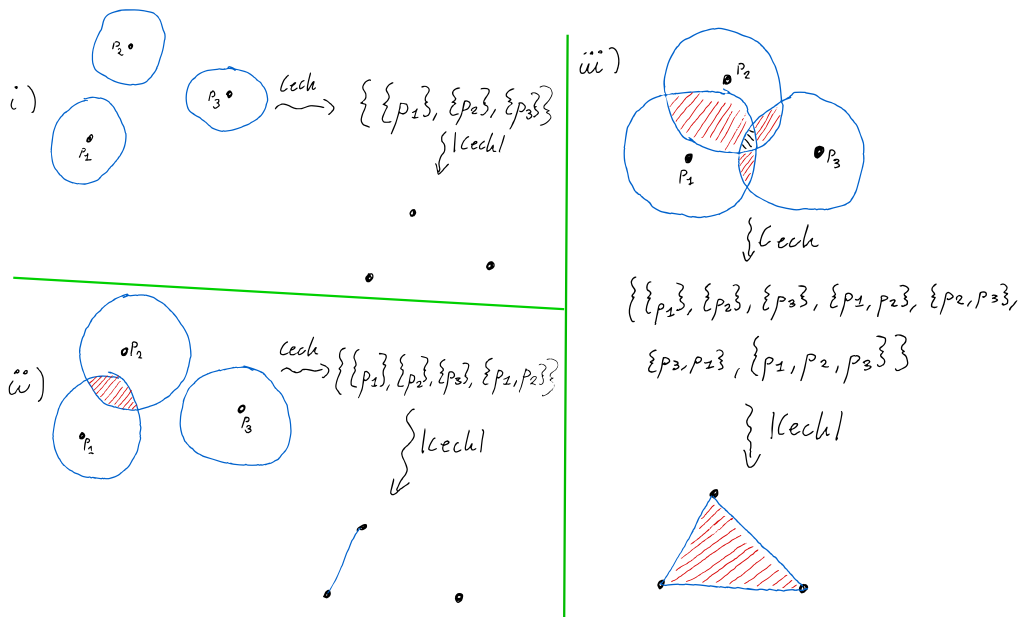
**Merknad 3.18.** Etersom alle forskjellige geometriske realiseringar er homeomorfe grunna det førre resultatet, så er det vanleg å snakka om *den* geometriske realiseringa av eit abstrakt simplisielt kompleks  $K$ . Difor plar ein å sløyfa subskrifta i notasjonen og berre bruka  $|K|$  for *den* geometriske realiseringa av  $K$ .

**Definisjon 3.19.** La  $P$  vera ei endeleg mengd av punkt i  $\mathbb{R}^m$ , og la  $r \in [0, \infty)$ .

Då er *Cech-komplekset til  $P$  med radius  $r$*  definert som

$$\text{Cech}_r(P) := \left\{ \sigma \subseteq P : \bigcap_{p \in \sigma} \bar{B}_r(p) \neq \emptyset \right\}.$$

**Døme 3.20.** I [Figur 2](#) så kan ein sjå tre ulike døme på korleis Cech-komplekset ser ut med varierende radius. Merk her at det skal vera ballar med same radius i kvart døme, men det var vanskeleg å teikna.



Figur 2: Tre døme på Cech-kompleks.

**Teorem 3.21.** La  $P$  vera ei endeleg mengd av punkt i  $\mathbb{R}^m$  med  $r \in [0, \infty)$ .

Då er *Cech-komplekset til  $P$  med radius  $r$*  eit abstrakt simplisielt kompleks over  $P$ .

*Bevis.* For å visa dette, så må ein visa at alle dei tre aksioma i [Definisjon 3.1](#) held:

1. For ein  $\hat{p} \in P$  så ser ein at for  $\sigma = \{\hat{p}\}$ , så er  $\bigcap_{p \in \sigma} \bar{B}_r(p) = \bar{B}_r(\hat{p}) \neq \emptyset$  og då er  $\{\hat{p}\} \in \text{Cech}_r(P)$ .
2. Per definisjon av Cech-komplekset, så er alle  $\sigma \in \text{Cech}_r(P)$  ei delmengd av  $P$ .
3. For  $\sigma \in \text{Cech}_r(P)$ , så ser ein at  $\bigcap_{p \in \sigma} \bar{B}_r(p) \neq \emptyset$ . Men det tyder at for alle  $\tau \subseteq \sigma$ , så er  $\bigcap_{p \in \tau} \bar{B}_r(p)$  også ikkje-tom, for om den var tom, så ville

$$\bigcap_{p \in \sigma} \bar{B}_r(p) = \left( \bigcap_{p \in (\sigma \setminus \tau)} \bar{B}_r(p) \right) \cap \left( \bigcap_{p \in \tau} \bar{B}_r(p) \right) = \left( \bigcap_{p \in (\sigma \setminus \tau)} \bar{B}_r(p) \right) \cap \emptyset = \emptyset$$

som ikkje er sant. Difor må  $\tau \in \text{Cech}_r(P)$ . □

Det følgande teoremet er eit fint resultat som gir ein ekvivalent definisjon av Cech-komplekset:

**Teorem 3.22.** *La  $P$  vera ei endeleg mengd av punkt i  $\mathbb{R}^m$  og la  $r \in [0, \infty)$ .*

*Då er  $\sigma \in \text{Cech}_r(P)$  visst og berre visst det eksisterer ein  $x \in \mathbb{R}^m$  sånn at  $\sigma \subseteq \bar{B}_r(x)$ .*

*Bevis.* ( $\implies$ )

Sidan  $A := \bigcap_{p \in \sigma} \bar{B}_r(p) \neq \emptyset$ , så finst det ein  $x \in A$  der for alle  $p \in \sigma$  så er  $d(p, x) \leq r$ , sidan  $x \in \bar{B}_r(p)$ .

Men sidan  $d(p, x) = d(x, p)$  per definisjon av metrikk, får ein at  $\forall p \in \sigma$  så er  $p \in \bar{B}_r(x)$ .

( $\impliedby$ )

Ved eit likt argument så ser ein at om alle  $p \in \sigma$  gir at  $d(x, p) \leq r$  så tyder det at  $d(p, x) \leq r$  for alle  $p \in \sigma$ . Men det tyder at  $x \in \bigcap_{p \in \sigma} \bar{B}_r(p)$ , som igjen tyder at  $\bigcap_{p \in \sigma} \bar{B}_r(p) \neq \emptyset$ . □

Arbeidet fram til no gir ein nok grunnlag til å endeleg kunna forstå og definera nerva, som er ein sentral del av nerveteoremet:

**Definisjon 3.23.** *La  $X$  vera eit ikkje-tomt topologisk rom. Vidare la  $F$  vera ei mengd av underrom av  $X$ .*

Definér *nerva til  $F$* , skrive  $\mathcal{N}(F)$ , som

$$\mathcal{N}(F) := \left\{ \sigma \subseteq F : \bigcap_{F_i \in \sigma} F_i \neq \emptyset \right\}.$$

**Teorem 3.24.** *La  $X$  vera eit topologisk ikkje-tomt topologisk rom, og la  $F$  vera ei mengd av underrom av  $X$ .*

*Då er nerva til  $F$  eit abstrakt simplisielt kompleks over  $F$ .*

*Bevis.* Som i beviset for at Cech-komplekset er eit abstrakt simplisielt kompleks ([Teorem 3.21](#)), så må ein visa at alle krava i [Definisjon 3.1](#) er oppfylte:

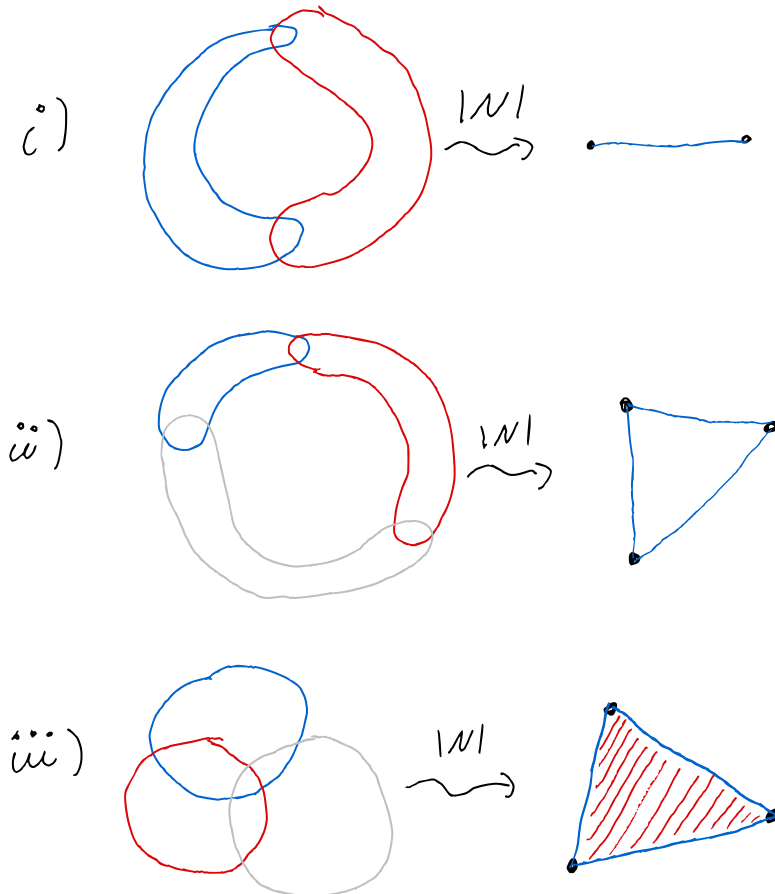
1. For  $v \in F$  har ein at for  $\sigma = \{v\}$  så er  $\bigcap_{p \in \sigma} p = v \neq \emptyset$ , så  $\{v\} \in \mathcal{N}(F)$ .
2. Alle element i  $\mathcal{N}(F)$  er per definisjon ei delmengd av  $F$ .

3. For  $\sigma \in \mathcal{N}(F)$  ser ein at  $\bigcap_{v \in \sigma} v \neq \emptyset$ . Det tyder at for alle  $\tau \subseteq \sigma$ , så er  $\bigcap_{v \in \tau} v$  også ikkje-tom, for om  $\bigcap_{v \in \tau} v = \emptyset$ , så ville

$$\bigcap_{v \in \sigma} v = \left( \bigcap_{v \in (\sigma \setminus \tau)} v \right) \cap \left( \bigcap_{v \in \tau} v \right) = \left( \bigcap_{v \in (\sigma \setminus \tau)} v \right) \cap \emptyset = \emptyset$$

som ikkje er sant. Difor må  $\tau \in \mathcal{N}(F)$ . □

**Døme 3.25.** I [Figur 3](#) kan ein sjå tre døme på mengder av delmengder i  $\mathbb{R}^2$  og den geometriske realiseringa av nerva deira.



Figur 3: Tre døme på geometrisk realisering.

**Merknad 3.26.** Direkte frå [Definisjon 3.23](#) så ser ein at Cech-komplekset til  $P$  med radius  $r$  (som gitt i [Definisjon 3.19](#)), er «ekvivalent» til nerva til  $\bigcup_{p \in P} \{\bar{B}_r(p)\}$ . Meir om kva «ekvivalent» tyder i denne samanhengen kjem seinare i teksten.

Då kan ein endeleg uttrykka nerveteoremet:

**Teorem 3.27** (Nerveteoremet). *La  $\mathbb{R}^d$  ha standardtopologien, og la  $U = \{U_i\}_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av kompakte og konvekse delmengder av  $\mathbb{R}^d$  med underromstopologien.*

*Då er  $\bigcup_{u \in U} u$  homotopiekvivalent med  $|\mathcal{N}(U)|$ .*

Merk at dette er berre eit av mange ulike nerveteorem som eksisterer, som nemd i [seksjon 1](#), men dei har mange ting til felles. Alle seier at ein kan kondensera all «strukturen» til eit topologisk rom opp til homotopiekvivalens inn i eit abstrakt simplisielt kompleks om ein finn eit riktig overdekke av det. Dette er det som gjer nerveteorema så sterke.



Nerveteoremet i det kompakte og konvekse tilfellet som eg skriv om, er det som blir vanlegast brukt i topologisk dataanalyse, ettersom det er det ein får mest bruk for.

Den mest vanlege anvendinga av nerveteoremet i topologisk dataanalyse er å sjå på Cech-komplekset. Sidan Cech-komplekset er «ekvivalent» til nerva til  $\bigcup_{p \in P} \{\bar{B}_r(p)\}$ , og sidan  $\bar{B}_r(p)$  er kompakt og konveks, så fungerer nerveteoremet for det. Det viser at Cech-komplekset ivaretek nesten heile den topologiske strukturen til  $\bigcup_{p \in P} \bar{B}_r(p)$ .

Dette er veldig praktisk, ettersom Cech-komplekset er ein svært naturleg ting ein vil sjå på om ein er ute etter «strukturen» til ei datamengd.

I neste seksjon så kjem eit bevis av dette nerveteoremet.

## 4 Bevis for nerveteoremet

Dette beviset er svært inspirert av [1, Section 3].

**Definisjon 4.1.** La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over  $V$ .

Då er den *barysentriske oppdelinga* av  $K$ , skriven  $\text{Sd}(K)$ , alle tuplar på forma:

$$\{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n) \mid \sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \sigma_3 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_n, \sigma_i \in K\}.$$

**Lemma 4.2.** La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over  $V$ .

Då er  $\text{Sd}(K)$  eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over  $K$ .

*Bevis.* Ein må visa at dei tre krava i [Definisjon 3.1](#):

1. For  $k \in K$ , så er  $(k)$  trivielt ei streng følge av element i  $K$ , så  $(k) \in \text{Sd}(K)$ .
2. For  $\sigma \in \text{Sd}(K)$  så er  $\sigma$  per definisjon ei delmengd av  $K$ .
3. For  $\sigma \in K$ , med  $\tau \subseteq \sigma$ , så er  $\tau$  ei delfølge av element frå  $K$ . Men ei delfølge er framleis ei følge, så  $\tau \in \text{Sd}(K)$ . □

**Merknad 4.3.** Grunnen til at ein kallar den barysentriske oppdelinga til  $K$  for  $\text{Sd}(K)$ , er at den barysentriske oppdelinga av eit abstrakt simplisielt kompleks ofte kalla for ein «subdivision» på engelsk.

**Lemma 4.4.** La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over  $V$  og la  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  vera ei affinn imbedding.

Då er  $|K|_f$  lukka og kompakt.

*Bevis.* Ein ser på eit vilkårleg geometrisk  $n$ -simpleks i  $\mathbb{R}^n$  med hjørne i  $(0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ , der  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  er standardbasisen til  $\mathbb{R}^n$ . Dette er ei geometrisk uavhengig mengd ifølge [Teorem 3.5](#) sidan  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  er lineært uavhengig per definisjon. Ein kallar denne  $n$ -simpleksen for  $\Delta^n$ .

La  $U_i$  vera hyperplanet definert av å gå gjennom dei  $n$  punkta  $(0, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$ , og så ser ein på halvplanet danna av den delen av  $\mathbb{R}^n \setminus U_i$  som ikkje inneheld  $e_i$  (For  $i = 1$ , så ser ein på planet der ein fjernar punktet 0.). Dette kallar ein for  $\hat{U}_i$ . Dette er ei open mengd i  $\mathbb{R}^n$ , sidan det er ein homeomorfi frå  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^n$ , som sender  $\hat{U}_i$  til det standard øvre hyperplanet  $H^n := (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ .

La  $x \in \mathbb{R}^n$ . Då kan ein skriva  $x$  som ein unik lineærkombinasjon av standardbasisen, altså  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ .

Ein har at for  $j \neq 0$ , så er  $\hat{U}_j$ , hyperhalvplanet danna av den sida av  $U_j$  som ikkje inneheld  $e_j$ . Men sidan  $U_j$  er hyperhalvplanet danna av alle punkt der den  $j$ -te koordinaten er 0, og sidan  $e_j$  har opplagt positiv  $j$ -te koordinat, så då er  $\hat{U}_j = \mathbb{R}^{j-1} \times (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{n-j}$ .

For  $j = 0$ , så er  $\hat{U}_0$ , hyperhalvplanet danna av sida av  $U_0$  som ikkje inneheld 0. Men sidan  $U_0$  er hyperhalvplanet danna av alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , der  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ , med  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , og sidan  $x = 0$ , så er  $a_i = 0$  for alle  $i$ . Difor må  $\hat{U}_0$  vera hyperhalvplanet som består av alle  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  der  $\sum_{i=1}^n a_i > 1$ .

Merk at  $x \in \Delta^n$  visst og berre visst  $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1$  og  $a_i \geq 0$  for alle  $i = 1, 2, \dots, n$ , sidan ein kan alltid definere  $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^n a_i \geq 0$ , utan å endre koordinat.

For  $x \notin \Delta^n$  då er det to ulike tilfeller som kan skje:

1. Ein kan ha at  $a_j < 0$  for ein eller annan  $j \neq 0$ .

Men då er  $x \in \hat{U}_j$ , sidan  $\hat{U}_j = \mathbb{R}^{j-1} \times (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{n-j}$ .

2. Eller ein kan ha at alle  $a_j \geq 0$ , men  $\sum_{i=1}^n a_i > 1$ .

Då er  $x \in \hat{U}_0$ , fordi  $\hat{U}_0$  er hyperhalvplanet som består av alle  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  der  $\sum_{i=1}^n a_i > 1$ .

Difor får ein at for  $x \notin \Delta^n$  så er  $x \in \hat{U}$ .

For  $x \in \Delta^n$ , så er  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ , med  $a_i \geq 0$ , og  $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1$ .

Då er det opplagt at  $x \notin \hat{U}_j$  for  $j \neq 0$ , sidan den  $j$ -te koordinaten ikkje er strengt negativ og  $\hat{U}_j = \mathbb{R}^{j-1} \times (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{n-j}$ . I tillegg, så er det opplagt at  $x \notin \hat{U}_0$ , sidan  $\hat{U}_0$  er hyperhalvplanet som består av alle  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  der  $\sum_{i=1}^n a_i > 1$ .

Ein får då at  $x \in \Delta^n$  gir at  $x \notin \hat{U}$ .

Samlar ein saman dei to resultat, får ein at  $\mathbb{R}^n \setminus \hat{U} = \Delta^n$ . Og sidan  $\hat{U}$  er ein union av opne mengder, så er  $\hat{U}$  open. Det gir ein at  $\Delta^n$  er lukka.

Vidare, sidan alle hjørna til  $\Delta^n$  er inne i den lukka ballen  $\bar{B}_1(0)$ , som er konveks, så seier [Lemma 4.7](#) at  $\Delta^n \in \bar{B}_1(0)$ . Det gir at  $\Delta^n$  er både avgrensa og lukka. [Teorem 2.2](#) gir ein difor at  $\Delta^n$  er kompakt.

Gitt eit vilkårleg geometrisk  $n$ -simpleks i  $\mathbb{R}^d$  kalla for  $\hat{\Delta}^n$ , sjå på avbildinga  $\Delta^n \rightarrow \hat{\Delta}^n$  som blir danna i [Teorem 3.17](#) om ein tenker på  $\Delta$  og  $\hat{\Delta}$  som geometriske realiseringar av det minimale abstrakte simpliselle komplekset som inneheld  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , som i [Merknad 3.15](#). Sidan denne avbildinga er ein homeomorfi og  $\Delta^n$  er kompakt, så er  $\hat{\Delta}^n$  også kompakt.

[Teorem 2.2](#) gir ein då at  $\hat{\Delta}^n$  er både lukka og kompakt i  $\mathbb{R}^d$ .

Og sidan ei vilkårleg geometrisk realisering er ein union av endeleg mange geometriske simpleks, så er det ein endeleg union av lukka og kompakte mengder, og difor ei lukka og kompakt mengd sjølv ifølge [Teorem 2.10](#).  $\square$

**Lemma 4.5.** *La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simpliselt kompleks over  $V$ , la  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$  vera ei affin imbedding, og la  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  vera ei affin imbedding.*

Då er  $|\text{Sd}(K)|_f$  homeomorf med  $|K|_g$  ved ein homeomorfi ein kallar for  $\alpha$  som vert definert i slutten av beviset nedanfor.

*Bevis.* Dette beviset brukar mykje den same strategien som i [Teorem 3.17](#).

Fyrst, lag ei ordning av elementa i  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  og ei ordning  $K = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$  med  $\sigma_1 = \{v_1\}$ . Vidare, la  $\tau_f(x) := x - f(\{v_1\})$ , og la  $\tau_g(x) := x - g(v_1)$ . Desse er homeomorfiar ifølge [Lemma 3.16](#).

Definér  $\hat{f} := \tau_f \circ f$  og  $\hat{g} := \tau_g \circ g$ .

Då kan ein definera ein lineæravbilding  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  definert for  $\sigma \in K$  ved å senda  $\hat{f}(\sigma) \mapsto \frac{1}{\#\sigma} \sum_{v_j \in \sigma} \hat{g}(v_j)$ . Dette er mogleg ifrå [Teorem 2.8](#) sidan  $\hat{f}(K) \setminus (0) = (f(\sigma_2) - f(\sigma_1), f(\sigma_3) - f(\sigma_1), \dots, f(\sigma_n) - f(\sigma_1))$ , er lineært uavhengig ifrå [Teorem 3.5](#) sidan  $f$  er ei affin imbedding. Og 0 blir sendt til 0 uansett om  $L$  er ei lineæravbilding, og  $\hat{g}(v_1) = g(v_1) - g(v_1) = 0$ .

Ein veit då frå [Teorem 2.9](#) at  $L$  er kontinuerleg.

Vidare, får ein at  $L(|\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}) \subseteq |K|_{\hat{g}}$ . Sidan for  $x \in |\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}$ , så er  $x$  ein konveks kombinasjon av punkt  $\hat{f}(\sigma)$  for ein eller annan  $\sigma \in \text{Sd}(K)$ , ifrå definisjonen av geometrisk realisering ([Definisjon 3.14](#)). La  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\#\sigma})$ . Då er  $x = \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i \hat{f}(\sigma_i)$ . Og  $(a_i)_i^{\#\sigma}$  er dei barysentriske koordinatane til  $x$ . Ein får då

$$\begin{aligned} L(x) &= L\left(\sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i \hat{f}(\sigma_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\#\sigma} L(a_i \hat{f}(\sigma_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i L(\hat{f}(\sigma_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i \frac{1}{\#\sigma_i} \sum_{v_j \in \sigma_i} \hat{g}(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{\#\sigma} \sum_{v_j \in \sigma_i} a_i \frac{1}{\#\sigma_i} \hat{g}(v_j). \end{aligned}$$

Summen av koeffisientane til  $\hat{g}(v_j)$ -ane er difor

$$\sum_{i=1}^{\#\sigma} \sum_{v_j \in \sigma_i} a_i \frac{1}{\#\sigma_i} = \sum_{i=1}^{\#\sigma} \#\sigma_i a_i \frac{1}{\#\sigma_i} = \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i = 1,$$

og når  $\sigma \in \text{Sd}(K)$  så er  $\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} \sigma_i = \sigma_{\#\sigma} \in K$ . Då er  $x$  i eit geometrisk simpleks utspent av punkta  $\hat{g}(\sigma_{\#\sigma})$ , men sidan  $\sigma_i \in \mathcal{N}(U)$  for alle  $i$ , må  $\sigma_{\#\sigma} \in \mathcal{N}(U)$ , som gir at  $x \in |\sigma_{\#\sigma}|_{\hat{g}} \subseteq |K|_{\hat{g}}$ .

Definér  $\hat{L} := L|_{|\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}} : |\text{Sd}(K)|_{\hat{f}} \rightarrow |K|_{\hat{g}}$ .

Frå den universale eigenskapen til underromstopologien ([Teorem 2.1](#)), får ein at  $\hat{L}$  er kontinuerleg.

Vidare, definér avbildinga  $\tilde{L}$  punktvis:

For ein  $y \in |K|_{\hat{g}}$ , så er  $y$  ein konveks kombinasjon av punkt  $\hat{g}(\epsilon)$  for ein  $\epsilon \in K$ , med barysentriske koordinatar  $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{\#\epsilon})$ . Vel ei ordning av  $\epsilon = (v_1, v_2, \dots, v_{\#\epsilon})$  sånn at  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq$

$b_{\#\epsilon} \geq b_{\epsilon+1} = 0$ , og la

$$\sigma := \left( \bigcup_{j=1}^k \{v_j\} \right)_{k=1}^{\#\epsilon} = (\sigma_i)_{i=1}^{\#\epsilon} \in \text{Sd}(K).$$

Definér

$$\tilde{L}(y) = \tilde{L} \left( \sum_{i=1}^{\#\epsilon} b_i \hat{g}(v_i) \right) := \sum_{i=1}^{\#\epsilon} i (b_i - b_{i+1}) \hat{f}(\sigma_i).$$

Ein har at  $\tilde{L}$  er veldefinert med omsyn på ulike barysentriske koordinatar ettersom dei barysentriske koordinatane er eintydige ifrå [Teorem 3.8](#). I tillegg er  $\tilde{L}$  veldefinert med omsyn på ulike val av ordning, for om ein fikserer ei vilkårlig ordning av  $\epsilon$ , får ein berre forskjellige ordningar av dei barysentriske koordinatane. Ein kan redusera alle permutasjonar av denne ordninga av dei barysentriske koordinatane til ei samansetting av fleire permutasjonar av berre to barysentriske koordinatar ifølge [Teorem 2.7](#). Anta at ein har to ordningar med  $n < m$ :

$$b_{i_1} \geq \dots \geq b_{i_n} \geq \dots \geq b_{i_m} \geq \dots \geq b_{i_{\#\epsilon}}$$

og

$$b_{j_1} \geq \dots \geq b_{j_n} \geq \dots \geq b_{j_m} \geq \dots \geq b_{j_{\#\epsilon}}$$

der  $i_n = j_m$  og  $i_m = j_n$  har bytta posisjon, men resten er urørt.

Då får ein at

$$b_{i_n} \geq b_{i_m} = b_{j_n} \geq b_{j_m} = b_{i_n}$$

som tyder at

$$b_{i_n} = b_{i_{n+1}} = \dots = b_{i_m} = b_{j_n} = b_{j_{n+1}} = \dots = b_{j_m}.$$

Det gir at  $b_{i_k} = b_{j_k}$  for alle  $k$ . Det gir ein at  $r(b_{i_r} - b_{i_{r+1}}) = r(b_{j_r} - b_{j_{r+1}})$  for alle  $r$ , så det påverkar ikkje verdien av  $\tilde{L}$ , om ein brukar den eine eller den andre ordninga.

Sidan alle moglege permutasjonar er ei samansetting av parvise permutasjonar som ikkje påverkar verdien, må  $\tilde{L}$  vera veldefinert, uavhengig av val av permutasjon av  $\epsilon$ .

Vidare er  $\tilde{L}(|K|_{\hat{g}}) \subseteq |\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}$ , fordi for  $y \in |K|_{\hat{g}}$  får ein

$$\tilde{L}(y) = \sum_{i=1}^{\#\epsilon} i (b_i - b_{i+1}) \hat{f}(\sigma_i)$$

og då er summen av koeffisientane

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\#\epsilon} i(b_i - b_{i+1}) &= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} (ib_i - ib_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} ib_i - \sum_{i=1}^{\#\epsilon} ib_{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} ib_i - \sum_{i=2}^{\#\epsilon} (i-1)b_i \\
&= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} ib_i - \sum_{i=2}^{\#\epsilon} ib_i + \sum_{i=2}^{\#\epsilon} b_i \\
&= b_1 + \sum_{i=2}^{\#\epsilon} b_i \\
&= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} b_i \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Sidan  $b_i \geq b_{i+1}$ , så er  $i(b_i - b_{i+1}) \geq 0$ . Det vil seie,  $\tilde{L}(y)$  er ein konveks kombinasjon av den geometrisk uavhengige mengda  $\hat{f}(\sigma)$ , for  $\sigma \in \text{Sd}(K)$ . Altså  $\tilde{L}(y) \in |\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}$ .

Ein kan difor skriva  $\tilde{L} : |K|_{\hat{g}} \rightarrow |\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}$ .

Gitt ein  $y \in |K|_{\hat{g}}$ , så er  $y$  ein konveks kombinasjon av punkt  $\hat{g}(\epsilon)$  for  $\epsilon \in K$ . Vel ei ordning av hjørna:  $\epsilon = (v_1, v_2, \dots, v_{\#\epsilon})$ , og la  $y$  ha barysentrisk koordinatar  $(b_1, b_2, \dots, b_{\#\epsilon})$  sånn at

$$y = \sum_{i=1}^{\#\epsilon} b_i \hat{g}(v_i).$$

Vel ei ordning av hjørna i  $\epsilon$  der  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{\#\epsilon}$  for  $y$ . La

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\#\epsilon}) &= (b_1 - b_2, 2(b_2 - b_3), \dots, (\#\epsilon - 1)(b_{\epsilon-1} - b_{\epsilon}), \#\epsilon b_{\epsilon}) \\
&= (i(b_i - b_{i+1}))_{i=1}^{\#\epsilon}, b_{\epsilon+1} = 0
\end{aligned}$$

og la

$$\left( \bigcup_{j=1}^k \{v_j\} \right)_{k=1}^{\#\epsilon} = (\sigma_i)_{i=1}^{\#\epsilon} = \sigma \in \text{Sd}(K).$$

Då er

$$\begin{aligned}
\hat{L} \circ \tilde{L}(y) &= \hat{L} \circ \tilde{L} \left( \sum_{i=1}^{\#\epsilon} b_i \hat{g}(v_i) \right) \\
&= \hat{L} \left( \sum_{i=1}^{\#\epsilon} a_i \hat{f}(\sigma_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} \hat{L} (a_i \hat{f}(\sigma_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} a_i \hat{L} (\hat{f}(\sigma_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} a_i \frac{1}{\#\sigma_i} \sum_{v_j \in \sigma_i} \hat{g}(v_j) \\
&= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} a_i \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \hat{g}(v_j) \\
&= \sum_{i=1}^{\#\epsilon} (b_i - b_{i+1}) \sum_{j=1}^i \hat{g}(v_j),
\end{aligned}$$

der den førre likninga følger frå at  $b_{\epsilon+1} = 0$ . Eit ikkje-trivielt summasjonskifte gir vidare at

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\#\epsilon} (b_i - b_{i+1}) \sum_{j=1}^i \hat{g}(v_j) &= \sum_{j=1}^{\#\epsilon} \hat{g}(v_j) \sum_{i=j}^{\#\epsilon} (b_i - b_{i+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{\#\epsilon} b_j \hat{g}(v_j) \\
&= y.
\end{aligned}$$

Ettersom  $y$  var eit vilkårleg element i  $|K|_{\hat{g}}$ , så er  $\hat{L} \circ \tilde{L} = \text{Id}_{grK_{\hat{g}}}$ .

Gitt  $x \in |\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}$  ein konveks kombinasjon av punkt  $\hat{f}(\hat{\sigma})$  for  $\hat{\sigma} \in \text{Sd}(K)$ , med barysentriske koordinatar  $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{\#\hat{\sigma}})$ . La  $n = \#\hat{\sigma}$  og la  $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^n := (v_j)_{j=1}^n$  for  $v_j \in \hat{\sigma}$ . Ein kan utvida  $\hat{\sigma}$  til  $\sigma$  ved å velga ei ordning av hjørna  $v_j \in \hat{\sigma}$  sånn at  $\hat{\sigma}_i = \sigma_{\#\hat{\sigma}_i}$ . Det er mogleg fordi ein  $\hat{\sigma} \in \text{Sd}(K)$  er ei strengt aukande følge av simpleks i  $K$ , så ingen har likt tal på element. I tillegg er  $\hat{\sigma}_i \subseteq \hat{\sigma}_{i+1}$  frå definisjonen av barysentrisk oppdeling. Merk at  $\sigma \in \text{Sd}(K)$ , ettersom det er ei streng følge av  $\sigma_i \in K$ .

Vel vidare barysentriske koordinatar til  $\sigma$  sånn at

$$a_i = \begin{cases} \hat{a}_i & \text{om } i = \#\hat{\sigma}_j \text{ for ein eller annan } j \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Merk at

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\#\hat{\sigma}} \hat{a}_i = 1.$$

Difor kan ein skriva  $x$  som ein konveks kombinasjon av element i  $\hat{f}(\sigma)$  med barysentriske koordinatar  $(a_i)_{i=1}^n$ . Hugs at ettersom  $\hat{L}$  er veldefinert så vil valet av barysentriske koordinatar for  $x$  ikkje endra verdien ein får.

Då er

$$\begin{aligned}
\tilde{L} \circ \hat{L}(x) &= \tilde{L} \circ \hat{L} \left( \sum_{i=1}^n a_i \hat{f}(\sigma_i) \right) \\
&= \tilde{L} \left( \sum_{i=1}^n a_i \hat{L}(\hat{f}(\sigma_i)) \right) \\
&= \tilde{L} \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\#\sigma_i} \sum_{v_j \in \sigma_i} \hat{g}(v_j) \right) \\
&= \tilde{L} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{v_j \in \sigma_i} \frac{a_i}{\#\sigma_i} \hat{g}(v_j) \right).
\end{aligned}$$

Eit ikkje-trivielt summasjonskifte gir då

$$\begin{aligned}
\tilde{L} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{v_j \in \sigma_i} \frac{a_i}{\#\sigma_i} \hat{g}(v_j) \right) &= \tilde{L} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{\{i: v_j \in \sigma_i\}} \frac{a_i}{\#\sigma_i} \hat{g}(v_j) \right) \\
&= \tilde{L} \left( \sum_{j=1}^n \hat{g}(v_j) \sum_{\{i: v_j \in \sigma_i\}} \frac{a_i}{\#\sigma_i} \right).
\end{aligned}$$

La  $b_j = \sum_{\{i: v_j \in \sigma_i\}} \frac{a_i}{\#\sigma_i}$ . Merk at  $\{i : v_j \in \sigma_i\} = \{j, j+1, \dots, n\}$  per definisjon av  $\sigma$ . I tillegg så ser ein at  $\#\sigma_i = i$ , så ein kan skriva  $b_j = \sum_{i=j}^n \frac{a_i}{i}$ .

Men det er då tydeleg at  $b_i \geq b_{i+1}$  ettersom  $b_i$  er den same summen som  $b_{i+j}$ , men med eit ekstra positivt ledd. Ein kan difor bruka denne ordninga i definisjonen av  $\tilde{L}$ , og ein kan difor bruka den same definisjonen av  $\sigma$ , så ein får

$$\begin{aligned}
\tilde{L} \circ \hat{L}(x) &= \tilde{L} \left( \sum_{j=1}^n \hat{g}(v_j) \sum_{i: v_j \in \sigma_i} \frac{a_i}{\#\sigma_i} \right) \\
&= \tilde{L} \left( \sum_{j=1}^n \hat{g}(v_j) \sum_{i=j}^n \frac{a_i}{i} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n j \left( \sum_{i=j}^n \frac{a_i}{i} - \sum_{i=j+1}^n \frac{a_i}{i} \right) \hat{f}(\sigma_j) \\
&= \sum_{j=1}^n j \left( \frac{a_j}{j} \right) \hat{f}(\sigma_j) \\
&= \sum_{j=1}^n a_j \hat{f}(\sigma_j) \\
&= x
\end{aligned}$$

sånn at  $\tilde{L} \circ \hat{L} = \text{Id}_{|\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}}$ .

Dei to førre utsegna gir at  $\hat{L}$  er bijektiv, med invers  $\tilde{L}$ .

Merk at  $\hat{L} : |\text{Sd}(K)|_{\hat{f}} \rightarrow |\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}$  er ei kontinuerleg og bijektiv avbiling der  $|\text{Sd}(K)|_{\hat{f}}$  er kompakt ifra [Lemma 4.4](#), og  $|K|_{\hat{g}}$  er Hausdorff ettersom det er ei delmengd av  $\mathbb{R}^n$  for ein eller annan  $n$ . Ein får då frå [Teorem 2.3](#) at  $\hat{L}$  er ein homeomorfi.

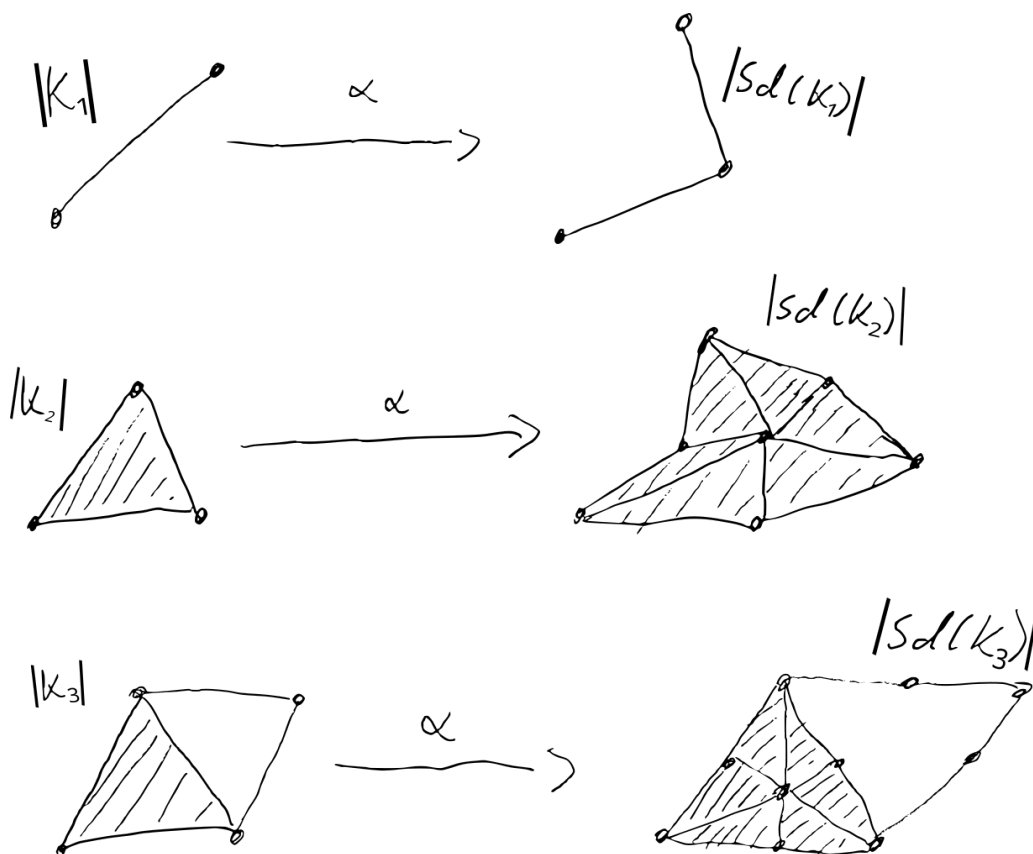
La  $\alpha : |\text{Sd}(K)|_f \rightarrow |K|_g$  vera gitt ved

$$\alpha := \tau_g^{-1} \circ \hat{L} \circ \tau_f.$$

Sidan  $\alpha$  er ein komposisjon av tre homeomorfiar, så er  $\alpha$  ein homeomorfi. □

**Døme 4.6.** I Figur 4 ser ein tre døme på barysentriske oppdelingar. Under  $\text{Sd}(K_2)$  ser ein at den barysentriske oppdelinga ikkje naudsyntvis treng å ha den same «forma» som originalen.

Merk at medan eg har teikna alle desse geometriske realiseringane i to dimensjonar, så eksisterer  $|K_3|$ ,  $|\text{Sd}(K_2)|$  og  $|\text{Sd}(K_3)|$  i røynda i høgare dimensjonar ettersom alle desse har strengt fleire enn tre hjørne, som er det meste ei geometrisk uavhengig mengde kan ha i  $\mathbb{R}^2$ .



Figur 4: Tre døme på barysentriske oppdelingar.

**Lemma 4.7.** La  $V$  vera ei konveks mengd, og la  $P := \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  vera (ikkje naudsyntvis geometrisk uavhengige) punkt i  $V$ .

Då er alle konvekse kombinasjonar av  $P$  inneheldt i  $V$ .

*Bevis.* Beviset er gjort ved induksjon på talet på punkt i mengda av punkt ein tek ein koveks kombinasjon over, her kalla  $n$ .

Ein vis fyrst grunntilfella:

La  $n = 1$ , då er  $x = a_1 p_1$ , med  $a_1 = 1$ , så  $x = p_1 \in K$ .

For  $n = 2$ , då er  $x = a_1 p_1 + a_2 p_2$ , med  $a_1 + a_2 = 1$ . Men då er  $a_2 = 1 - a_1$ , så ein kan skriva  $x = a_1 p_1 + (1 - a_1) p_2$ . Men dette er jo definisjonen av eit punkt på eit linjestykke mellom  $p_1$  og  $p_2$ . Frå definisjonen av ei konveks mengd, må  $x \in K$ .



Anta at induksjonshypotesen gjeld for  $n = k - 1$ . Ein vil no visa at det gjeld for  $n = k$ .

La  $x = \sum_{i=1}^k a_i p_i$ . Ein kan då skriva

$$x = a_1 p_1 + \sum_{i=2}^k a_i p_i = a_1 p_1 + \left( \sum_{i=2}^k a_i \right) \frac{\sum_{i=2}^k a_i p_i}{\left( \sum_{i=2}^k a_i \right)} = a_1 p_1 + (1 - a_1) \frac{\sum_{i=2}^k a_i p_i}{\left( \sum_{i=2}^k a_i \right)}.$$

Ein ser at

$$\frac{\sum_{i=2}^k a_i p_i}{\left( \sum_{i=2}^k a_i \right)} = \sum_{i=2}^k p_i \frac{a_i}{\left( \sum_{i=2}^k a_i \right)}$$

dannar ein konveks kombinasjon av  $k - 1$  punkt sidan

$$\sum_{i=2}^k \frac{a_i}{\left( \sum_{i=2}^k a_i \right)} = \frac{\sum_{i=2}^k a_i}{\left( \sum_{i=2}^k a_i \right)} = 1$$

og

$$\frac{a_i}{\left( \sum_{i=2}^k a_i \right)} \geq 0, \quad i = 2, 3, \dots, k.$$

Difor er

$$y := \frac{\sum_{i=2}^k a_i p_i}{\left( \sum_{i=2}^k a_i \right)}$$

eit element i  $V$  ifølge induksjonshypotesen. Og ein har at

$$x = a_1 p_1 + \sum_{i=2}^k a_i p_i = a_1 p_1 + (1 - a_1) y$$

er ein konveks kombinasjon av 2 punkt i  $V$ , og ein får frå induksjonshypotesen at  $x \in V$ .  $\square$

**Definisjon 4.8.** La  $U = \{U_i\}_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av konvekse delmengder av  $\mathbb{R}^m$ . Vidare, for kvar  $\epsilon \in \mathcal{N}(U)$ , vel eit punkt  $v_\epsilon \in \bigcap_{u \in \epsilon} u$ . Vidare, la  $x \in |\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f$  vera ein konveks kombinasjon av dei geometrisk uavhengige punkta  $f(\sigma)$  for ein eller annan  $\sigma \in \text{Sd}(\mathcal{N}(U))$ , der  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\#\sigma})$  med dei barysentriske koordinatane  $(a_1, a_2, \dots, a_{\#\sigma})$ .

Definér då

$$\begin{aligned} \Gamma : |\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f &\rightarrow \bigcup_{u \in U} u \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i v_{\sigma_i}. \end{aligned}$$

**Lemma 4.9.** Avbildinga  $\Gamma$  frå [Definisjon 4.8](#) er veldefinert, kontinuerleg og biletet er  $\bigcup_{u \in U} u$ .

*Bevis.* Avbildinga  $\Gamma$  er kontinuerleg og veldefinert på ulike representasjonar av verdiar, for om ein lar  $\hat{\tau} : |\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f \rightarrow |\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_{\hat{\tau} \circ f}$  vera definert som i [Lemma 3.16](#) ( $x \mapsto x - f(\hat{\sigma})$  for ein  $\hat{\sigma} \in \mathcal{N}(U)$ ), så er dette ein homeomorfi, og om ein deretter definerer  $L$  til å vera ei lineæravbilding som tek  $\hat{\tau} \circ f(\sigma) \mapsto v_\sigma$  for alle  $\sigma \in \mathcal{N}(U)$ , og vidare lar  $\hat{L} := L|_{|\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_{\hat{\tau} \circ f}}$ , så ser ein at for  $x \in |\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f$  ein konveks kombinasjon av dei geometrisk uavhengige

punkta  $f(\sigma)$  for ein eller annan  $\sigma \in \text{Sd}(\mathcal{N}(U))$ , der  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\#\sigma})$  med dei barysentriske koordinatane  $(a_1, a_2, \dots, a_{\#\sigma})$ , så er

$$\begin{aligned}
\hat{L} \circ \hat{\tau}(x) &= \hat{L} \circ \hat{\tau} \left( \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i f(\sigma_i) \right) \\
&= \hat{L} \left( \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i f(\sigma_i) - f(\hat{\sigma}) \right) \\
&= \hat{L} \left( \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i f(\sigma_i) - \left( \sum_{j=1}^{\#\sigma} a_j \right) f(\hat{\sigma}) \right) \\
&= \hat{L} \left( \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i f(\sigma_i) - \left( \sum_{j=1}^{\#\sigma} a_j f(\hat{\sigma}) \right) \right) \\
&= \hat{L} \left( \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i (f(\sigma_i) - f(\hat{\sigma})) \right) \\
&= \hat{L} \left( \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i \hat{\tau}(f(\sigma_i)) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i L(\hat{\tau}(f(\sigma_i))) \\
&= \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i v_{\sigma_i} \\
&= \Gamma(x).
\end{aligned}$$

Og sidan  $\hat{\tau}$  er kontinuerleg og veldefinert, og  $\hat{L}$  er kontinuerleg og veldefinert ifølge [Teorem 2.9](#) og [Teorem 2.1](#), så må  $\Gamma = \hat{L} \circ \hat{\tau}$  også vera kontinuerleg og veldefinert.

For  $x \in |\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f$  ein konveks kombinasjon av dei geometrisk uavhengige punkta  $f(\sigma)$  for ein eller annan  $\sigma \in \text{Sd}(\mathcal{N}(U))$ , der  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\#\sigma})$  med dei barysentriske koordinatane  $(a_1, a_2, \dots, a_{\#\sigma})$ , får ein at

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{\#\sigma} a_i v_{\sigma_i}$$

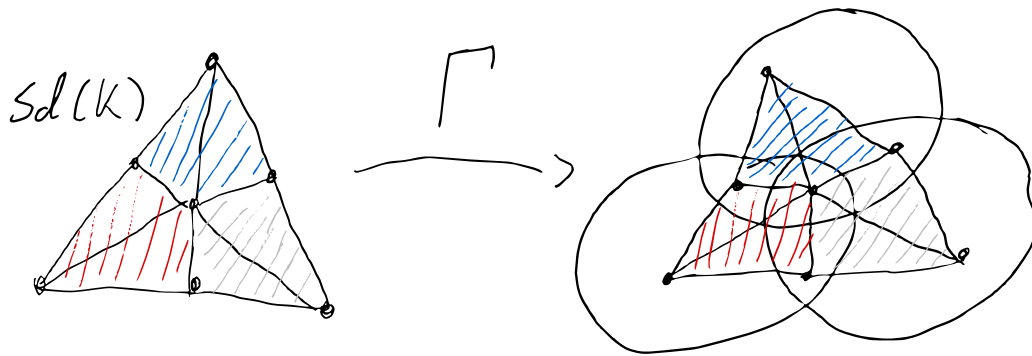
er ein konveks kombinasjon av punkta  $v_{\sigma_i}$  for  $i = 1, 2, \dots, \#\sigma$ . Men sidan  $\sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_{\#\sigma}$ , så finst det ein  $\epsilon \in U$  med  $\epsilon \in \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\#\sigma}$ . Difor er  $v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \dots, v_{\sigma_{\#\sigma}} \in \epsilon$ . Men ettersom alle elementa i  $U$  er konvekse mengder, så er  $\Gamma(x)$  ein konveks kombinasjon av element i ei konveks mengd  $\epsilon$ , og ifølge [Lemma 4.7](#), er  $x \in \epsilon \subseteq \bigcup_{u \in U} u$ . Og biletet til  $\Gamma$  er difor i  $\bigcup_{u \in U} u$ .  $\square$

**Døme 4.10.** I [Figur 5](#) kan ein sjå korleis  $\Gamma$ -avbildinga verkar på den barysentriske oppdelinga av ei samling av konvekse mengder. Legg merke til dei farga områda. Dei blir viktige i framtida.

**Definisjon 4.11.** La  $U = \{U_i\}_{i=1}^n$  vera ei mengd av delmengder av  $\mathbb{R}^d$ , og la  $\epsilon > 0$ .

Definér  $U_i^\epsilon := \bigcup_{x \in U_i} B_\epsilon(x)$ , og definér  $U^\epsilon := \{U_i^\epsilon\}_{i=1}^n$ .

**Lemma 4.12.** La  $U = \{U_i\}_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av kompakte delmengder av  $\mathbb{R}^d$ , og la  $A$  vera mengda av alle moglege delmengder av  $U$ , og la  $A^\epsilon$  vera mengda av alle moglege delmengder



Figur 5: Avbildinga  $\Gamma$ .

av  $U^\epsilon$ . La

$$f : A \rightarrow A^\epsilon$$

$$\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\} \mapsto \{U_{i_1}^\epsilon, U_{i_2}^\epsilon, \dots, U_{i_k}^\epsilon\}.$$

Då eksisterer det ein  $\epsilon > 0$  sånn at

$$f|_{\mathcal{N}(U)} : \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U^\epsilon)$$

er ein bijeksjon.

*Bevis.* Ein ser at  $f$  dannar ein bijeksjon frå  $A$  til  $A^\epsilon$ . Og sidan  $i : \mathcal{N}(U) \hookrightarrow A$ , inklusjonsavbildinga, er injektiv, så er  $f \circ i$  injektiv.

Ettersom  $U^\epsilon$  berre kan få fleire snitt enn  $U$  sidan det inneheld større mengder, må  $f(\mathcal{N}(U)) \subseteq \mathcal{N}(U^\epsilon)$ .

For å visa  $f(\mathcal{N}(U)) \supseteq \mathcal{N}(U^\epsilon)$ , ser ein på det kontrapositive tilfellet:

$$f(\mathcal{N}(U)) \supseteq \mathcal{N}(U^\epsilon)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{N}(U^\epsilon) \implies \sigma \in f(\mathcal{N}(U))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \sigma \in A, \sigma \notin f(\mathcal{N}(U)) \implies \sigma \in A^\epsilon, \sigma \notin \mathcal{N}(U^\epsilon)$$

For ein  $\sigma = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\} \in A$  så kan ein skriva  $\sigma$  som  $\sigma_J$  for  $J = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ . Det same gjeld for  $\sigma_J^\epsilon \in A^\epsilon$ .

Ein vil visa at  $\exists \epsilon > 0$  sånn at  $\sigma_J^\epsilon \notin f(\mathcal{N}(U)) \implies \sigma_J^\epsilon \notin \mathcal{N}(U^\epsilon)$  for alle moglege  $J$  der  $\sigma_J^\epsilon \notin f(\mathcal{N}(U))$ . Men ettersom  $f$  dannar ein bijeksjon frå  $A$  til  $A^\epsilon$ , så kan ein sjå på tilfellet der  $\exists \epsilon > 0$  sånn at  $\sigma_J \notin \mathcal{N}(U) \implies f(\sigma_J) \notin \mathcal{N}(U^\epsilon)$ .

La

$$r_J := \sup_{x \in \bigcup_{j \in J} u_j} d(x, 0).$$

Sidan  $\bigcup_{j \in J} u_j$  er ein endeleg union av kompakte mengder, så er  $\bigcup_{j \in J} u_j$  kompakt ifølge [Teorem 2.10](#). Då får ein frå [Teorem 2.6](#) at  $r_J = \max_{x \in \bigcup_{j \in J} u_j} d(x, 0)$  og difor endeleg. Ein får også at  $\bigcup_{j \in J} u_j \subseteq \bar{B}_{r_J}(0)$ .

Definér vidare  $D_J := \bar{B}_{4r_J}(0)$ . Sidan dette er ei lukka og avgrensa mengd i  $\mathbb{R}^d$ , så er ho kompakt ifølge [Teorem 2.2](#).

La  $g_J : D_J \rightarrow \mathbb{R}$  der  $x \mapsto \max_{j \in J} d(x, U_j)$ .

La  $Z_k := \{x \in D_J : d(x, U_k) = g_J(x)\}$ . Den er lukka fordi for  $x_n \in Z_k$  der  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$ , har ein at  $\{d(x_n, U_k)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow d(x, U_k)$  fordi  $d(x, U_k)$  er kontinueleg frå [Teorem 2.5](#). Anta at følga konvergerer utanfor  $Z_k$ , altså  $g_J(x) > d(x, U_k)$ . Då er  $g_J(x) - d(x, U_k) = \epsilon > 0$ . Men då er  $|d(x, U_k) - d(x_n, U_k)| \geq \epsilon$  sidan  $d(x_n, U_k) \geq g_J(x) > d(x, U_k)$ . Men dette strider imot at  $\{d(x_n, U_k)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow d(x, U_k)$ , så  $Z_k$  må vera lukka.

Då ser ein at  $g_J$  er kontinuerleg, fordi om ein ser på  $g_J|_{Z_k}$ , er jo dette  $d(x, U_k)$ , som er kontinuerleg frå [Teorem 2.5](#), om ein gjentek dette for alle  $Z_k$  for  $k \in J$ , gir [Teorem 2.4](#) at  $g_J$  er kontinuerleg.

Om ein lar  $\sigma_J \notin \mathcal{N}(U)$ , får ein at  $g_J(x) > 0$  for alle  $x$  i  $D_J$ , sidan  $\bigcap_{u \in \sigma_J} u = \emptyset$ .

Og sidan  $D_J$  er kompakt, får ein frå [Teorem 2.6](#) at  $g_J(x)$  oppnår eit minimum, som ifølge argumentet ovanfor må vera ulik 0. Dette kallar ein for

$$\epsilon_J := \min_{x \in D_J} \max_{j \in J} d(x, U_j).$$

Men dette minimumet er eit globalt minimum over heile  $\mathbb{R}^d$ , fordi når  $x \in \mathbb{R}^d \setminus D_J$ , er  $g_J(x) \geq 3r_J$ , sidan det er den minste moglege avstand frå  $x$  til ein av  $u_j \in U_J$ . Men om  $x \in \bar{B}_{r_J}(0)$ , er  $g_J(x) \leq 2r_J$  sidan det er det lengste vekte mengda kan vera og framleis vera inne i  $\bar{B}_{r_J}(0)$ . Difor må eit globalt minimum må vera eit minimum inne i  $D_J$ .

Vidare ser ein at  $\sigma_J^{\epsilon_J} \notin \mathcal{N}(U^{\epsilon_J})$ , for om ein lar  $x$  vera eitt av punkta som gir det globale minimumet  $\epsilon_J$ , så er  $x \notin \bigcap_{j \in J} u_j^{\epsilon_J}$ , fordi det finst ingen  $y \in u_{\hat{j}}$  for  $\hat{j}$  den verdien i  $J$  som gav maksimumet til  $\max_{j \in J} d(x, U_j)$ , som har  $d(y, x) > \epsilon_J$ . Difor finst det ingen open ball om  $y$  med radius  $r_J$  som inneheld  $x$ . Difor kan ikkje  $x$  vera i snittet av alle  $u_j$ -ane. Det same argumentet gjeld for alle andre punkt i  $D_J$  som ikkje er globale minimum.

Det er altså ingen punkt i  $\bigcap_{j \in J} u_j^{\epsilon_J}$ , og difor er  $\sigma_J^{\epsilon_J} \notin \mathcal{N}(U^{\epsilon_J})$ .

Vidare, la

$$\epsilon := \min_{\{J : \sigma_J \notin \mathcal{N}(U)\}} \epsilon_J.$$

Då er  $\epsilon \neq 0$  fordi alle  $\epsilon_J \neq 0$ , og det er berre endeleg mange  $\sigma_J \in A$ .

Ein får at for alle  $\sigma_J \notin \mathcal{N}(U)$ , så er  $\sigma_J^\epsilon = f(\sigma_J) \notin \mathcal{N}(U^\epsilon)$ , som var det ein ville visa.  $\square$

**Merknad 4.13.** Avbildinga  $f$  ovanfor, blir ofte kalla ein simplisiell isomorfi, og er det eg meinte då eg skreiv at nerva til  $\{\{\bar{B}_\epsilon(p_i)\}\}_{i=1}^n$  er ekvivalent med Cech-komplekset av  $\{p_i\}_{i=1}^n$  med radius  $\epsilon$  i [Merknad 3.26](#).

**Definisjon 4.14.** La  $U = \{U_i\}_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av kompakte delmengder av  $\mathbb{R}^d$ , og la  $\epsilon$  vera som i [Lemma 4.12](#).

Definér då

$$\begin{aligned} \phi_i : \bigcup_{u \in U} u &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto \frac{d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_i^\epsilon)}{d(x, U_i) + d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_i^\epsilon)} \end{aligned}$$

og vidare

$$\begin{aligned} \psi_i : \bigcup_{u \in U} u &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \frac{\phi_i(x)}{\sum_{k=1}^n \phi_k(x)}. \end{aligned}$$

**Lemma 4.15.** *Avbildingane  $\phi_i$  og  $\psi_i$  frå Definisjon 4.14 er kontinuerlege og veldefinerte.*

*Bevis.* Sidan avstandsfunksjonen  $d$  er kontinuerleg ifølge Teorem 2.5, og nemnaren er alltid ulik null sidan  $U_i \subsetneq U_i^\epsilon$ , og sidan ein sum av to kontinuerlege funksjonar er kontinuerleg så er  $\phi_i$  ein kvotient av to kontinuerlege funksjonar med heile  $\mathbb{R}^d$  som definisjonsmengd, og difor kontinuerleg på  $\bigcup_{i=1}^n U_i$  ifølge Teorem 2.1.

Ved å bruka mykje det same argumentet, ser ein at  $\psi_i$  er ein kvotient med ei kontinuerleg avbilding i teljaren og ein sum av kontinuerlege avbildingar i nemnaren. Nemnaren er alltid ulik null, sidan på  $\bigcup_{i=1}^n U_i^\epsilon$  er minst ein  $\phi_i$  ulik null fordi  $\phi_i(x) = 0$  berre når  $d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_i^\epsilon) = 0$  som skjer når  $x \notin U_i^\epsilon$ . Men når  $x \in \bigcup_{i=1}^n U_i$  så er det minst ein  $U_i^\epsilon$  som  $x$  er eit element av. Difor er  $\psi_i$  kontinuerleg.

I tillegg, for  $\phi_i(x) \neq 0$ , så er

$$\psi_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\sum_{k=1}^n \phi_k(x)} \leq \frac{\phi_i(x)}{\phi_i(x)} = 1,$$

så verdimgda til  $\psi_i$  er veldefinert. □

**Definisjon 4.16.** La  $U = \{U_i\}_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av kompakte delmengder av  $\mathbb{R}^d$ , og la  $\psi_i$  vera som i Definisjon 4.14, og la  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  vera ei affin imbedding.

Definér for  $x \in \bigcup_{u \in U} u$ :

$$\begin{aligned} \Psi : \bigcup_{u \in U} u &\rightarrow |\mathcal{N}(U)| \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n \psi_i(x) f(U_i) \end{aligned}$$

**Lemma 4.17.** *Avbildinga  $\Psi$  frå Definisjon 4.16 er kontinuerleg, og har bilete i  $|\mathcal{N}(U)|_f$ .*

*Bevis.* Sidan alle  $\psi_i$ -ane er kontinuerlege, så er  $\psi_i(x)f(U_i)$  også kontinuerleg, ettersom  $f(U_i)$  er ein konstant vektor. Då er  $\Psi$  ein sum av kontinuerlege funksjonar og er difor kontinuerleg sjølv.

For å visa at  $\Psi \left( \bigcup_{u \in U} u \right) \subseteq |\mathcal{N}(U)|_f$ , la  $x \in \bigcup_{u \in U} u$ . Då er  $\Psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) f(U_i)$ . Merk at

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \psi_j(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j(x)}{\sum_{k=1}^n \phi_k(x)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \phi_j(x)}{\sum_{k=1}^n \phi_k(x)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sidan  $\phi_i(x) \geq 0$  for alle  $i$  og for alle  $x$  så er  $\psi_i(x) \geq 0$  for alle  $i$  og for alle  $x$ . Difor er  $\Psi(x)$  ein konveks kombinasjon av punkta  $f(U)$ .

Ettersom  $x \notin U_i^\epsilon$  visst og berre visst  $\phi_i(x) = 0$  visst og berre visst  $\psi_i(x) = 0$ , får ein at  $\psi_i(x) \neq 0$  visst og berre visst  $x \in U_i^\epsilon$ . La då  $A_x^\epsilon := \{U_i^\epsilon \in U^\epsilon : x \in U_i^\epsilon\}$ . Då ser ein at  $A_x^\epsilon \in \mathcal{N}(U^\epsilon)$ . Men med  $h(x)$ -bijeksjonen ein får frå [Lemma 4.12](#), veit ein at  $A_x^\epsilon$  korresponderer til ein  $A_x := h^{-1}(A_x^\epsilon) \in \mathcal{N}(U)$ .

For alle  $x \in \bigcup_{u \in U} u$  så er  $\Psi(x)$  ein konveks kombinasjon av punkta  $f(A_x)$ , altså  $x \in |A_x|_f \subseteq |\mathcal{N}(U)|_f$ , sidan  $A_x \in \mathcal{N}(U)$ . Difor er biletet til  $\Psi$  i  $|\mathcal{N}(U)|_f$ .  $\square$

**Definisjon 4.18.** La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over  $V$ , og la  $v$  vera eit vilkårleg element i  $V$ .

Då er den lukka barysentriske stjerna til  $K$  i  $v$ , skrive  $\text{bst}(v)$ , gitt ved

$$\text{bst}(v) = \{\sigma \in \text{Sd}(K) \mid \sigma \cup \{v\} \in \text{Sd}(K)\}.$$

**Døme 4.19.** Den lukka barysentriske stjerna er nøyaktig dei farga delane ein såg i [Figur 5](#) ovanfor. Merk her at  $\Gamma$  ser ut til å alltid ta ei lukka barysentrisk stjerne fullstendig inn i eine delmengda. Det blir viktig i beviset av nerveteoremet.

**Lemma 4.20.** Den lukka barysentriske stjerna som definert i [Definisjon 4.18](#), er eit abstrakt simplisielt kompleks med hjørnemengd  $W = \{w \in K : \{w\} \cup \{v\} \in \text{Sd}(K)\}$ .

*Bevis.* Her må ein visa dei tre krava i [Definisjon 3.1](#) held:

1. For  $w \in W$ , så er  $\{w\} \in \text{bst}(v)$  ifølge definisjonen av  $W$ .
2. For  $\sigma \in \text{bst}(v)$ , så er  $\sigma \subseteq W$ , fordi for ein vilkårleg  $\tau \in \sigma$ , så er  $\sigma \cup \{v\} = \{\tau\} \cup \sigma \cup \{v\} \in \text{Sd}(K)$ . Men sidan  $\text{Sd}(K)$  er eit abstrakt simplisielt kompleks ifølge [Lemma 4.2](#), så er  $\sigma \cup \{v\} \supseteq \{\tau\} \cup \{v\} \in \text{Sd}(K)$ . Då er  $\tau \in W$ .
3. For  $\sigma \in \text{bst}(v)$ , la  $\tau \subseteq \sigma$ . Sidan  $\sigma \cup \{v\} \in \text{Sd}(K)$ , og sidan  $\text{Sd}(K)$  er eit abstrakt simplisielt kompleks ifølge [Lemma 4.2](#), så er  $\sigma \cup \{v\} \supseteq \tau \cup \{v\} \in \text{Sd}(K)$ . Difor er  $\tau \in \text{bst}(v)$ .  $\square$

**Lemma 4.21.** La  $U = \{U_i\}_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av konvekse mengder i  $\mathbb{R}^m$ , og la  $\Gamma$  vera definert som i [Definisjon 4.8](#).

Då er  $\Gamma(|\text{bst}(U_i)|_f) \subseteq U_i$ .

*Bevis.* Frå [Lemma 4.20](#) veit ein at hjørnemengda til  $\text{bst}(U_i)$ , er

$$W = \{w \in \mathcal{N}(U) : \{w\} \cup \{U_i\} \in \text{Sd}(\mathcal{N}(U))\} = \{w \in \mathcal{N}(U) : U_i \in w\}.$$

La  $v_w$  vera som i [Definisjon 4.8](#).

Men då er jo  $v_w$  eit element i  $\bigcap_{u \in w} u \subseteq U_i$  for alle  $w$ . Og sidan  $\Gamma$  tek eit element  $x$  i  $|\text{bst}(U_i)|_f$ , som er ein konveks kombinasjon av punkta  $\{f(w)\}_{w \in W}$ , til ein konveks kombinasjon av  $\{v_w\}_{w \in W} \subseteq U_i$ , får ein at  $\Gamma(x)$  er ein konveks kombinasjon av punkta  $\{v_w\}_{w \in W}$ , som alle ligg i ei konveks mengd  $U_i$ , og ein får difor frå [Lemma 4.7](#) at  $x \in U_i$ .  $\square$

**Lemma 4.22.** La  $U = (U_i)_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av delmengder av  $\mathbb{R}^d$ , og la  $\alpha : |\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f \rightarrow |\mathcal{N}(U)|_g$  vera definert som i [Lemma 4.5](#). Vidare, la  $x \in |\mathcal{N}(U)|_g$  vera ein

konveks kombinasjon av punkta  $g(\tau)$  for ein eller annan  $\tau \in \mathcal{N}(U)$  med barysentriske koordinatar  $(b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_{\#\tau})$ . La  $b_i \geq b_j, \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, \#\tau\}$ .

Då er

$$\alpha^{-1}(x) \in |\text{bst}(U_i)|.$$

*Bevis.* Legg fyrst merke til at

$$\alpha^{-1} = \tau_f^{-1} \circ \tilde{L} \circ \tau_g.$$

Då får ein at

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(x) &= \tau_f^{-1} \circ \tilde{L} \circ \tau_g(x) \\ &= \tau_f^{-1} \circ \tilde{L} \circ \tau_g \left( \sum_{j=1}^{\#\tau} b_j g(U_j) \right). \end{aligned}$$

Sidan  $\tau_g$  ivaretek barysentriske koordinatar ifølge beviset for [Lemma 3.16](#), har ein at

$$\tau_f^{-1} \circ \tilde{L} \circ \tau_g \left( \sum_{j=1}^{\#\tau} b_j g(U_j) \right) = \tau_f^{-1} \circ \tilde{L} \left( \sum_{j=1}^{\#\tau} b_j \tau_g \circ g(U_j) \right).$$

Men ifølge antakinga er  $b_i \geq b_j \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, \#\tau\}$ . Difor kan ein kan velga ei ordning av  $U = (U_{j_i})_{i=1}^n$  sånn at  $b_{j_1} \geq b_{j_2} \geq b_{j_3} \geq \dots \geq b_{j_{\#\tau}}$ , og der  $b_{j_1} = b_i$ . Ein har då

$$\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^{\#\tau} = \left( \bigcup_{i=1}^k \{U_{j_i}\} \right)_{k=1}^{\#\tau}.$$

La  $a_k = k(b_{j_k} - b_{j_{k+1}})$ , då får ein at

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(x) &= \tau_f^{-1} \left( \sum_{l=1}^{\#\tau} a_l \tau_f \circ f(\sigma_l) \right) \\ &= \sum_{l=1}^{\#\tau} a_l f(\sigma_l). \end{aligned}$$

Men sidan  $\sigma \cup \{U_i\} = \sigma \in \text{Sd}(\mathcal{N}(U))$ , så er  $\sigma \in \text{bst}(U_i)$ . Og ein har at  $\sum_{k=1}^{\#\tau} a_k = 1$ , og  $a_k \geq 0, \forall k$  ifølge beviset til [Lemma 4.5](#). Difor er  $\alpha(x)$  ein konveks kombinasjon av punkta i  $f(\sigma), \sigma \in \text{bst}(U_i)$ , og ein har at

$$\alpha^{-1}(x) \in |\text{bst } U_i|_f. \quad \square$$

**Lemma 4.23.** La  $U = \{U_i\}_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av kompakte delmengder av  $\mathbb{R}^m$  og la  $\Psi$  vera som i [Definisjon 4.16](#). Vidare, la  $f : \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathbb{R}^d$  vera ei affin imbedding, og la  $\alpha$  vera som i [Lemma 4.5](#).

Då er  $\alpha \circ \Psi(U_i) \subseteq |\text{bst}(U_i)|_f$ .

*Bevis.* La  $x \in U_i$ . Då ser ein at

$$\phi_i(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_i^c)}{d(x, U_i) + d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_i^c)} = \frac{d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_i^c)}{d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_i^c)} = 1.$$

For  $j \neq i$ , sidan  $d(x, U_j) \geq 0$ , får ein

$$\phi_j(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_j^\varepsilon)}{d(x, U_j) + d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_j^\varepsilon)} \leq \frac{d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_j^\varepsilon)}{d(x, \mathbb{R}^m \setminus U_j^\varepsilon)} = 1$$

så  $\phi_i(x) \geq \phi_j(x)$  for alle  $j$ .

Dette gir at

$$\psi_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\sum_{k=1}^n \phi_k(x)} \geq \frac{\phi_j(x)}{\sum_{k=1}^n \phi_k(x)} = \psi_j(x).$$

La  $\tau = \{U_i : \psi_i(x) \neq 0\} \in \mathcal{N}(U)$ .

Sidan  $\Psi(x)$  er ein konveks kombinasjon av punkta  $f(\tau)$  med barysentriske koordinatar  $A := (\psi_j(x))_{\{j: U_j \in \tau\}}$  (ifølge beviset for [Lemma 4.17](#)), og sidan  $\psi_i(x) \neq 0$ , så er  $U_i \in \tau$ , og  $\psi_i(x) \in A$ .

Frå det som vart vist ovanfor, så er  $\phi_i(x) \geq \phi_j(x)$  for alle  $\phi_j(x) \in A$ .

Vidare, frå [Lemma 4.22](#), så er

$$\alpha \circ \Psi(x) \in |\text{bst}(U_i)|_f.$$

Sidan verdien var uavhengig av val av  $x \in U_i$ , får ein

$$\alpha \circ \Psi(U_i) \subseteq |\text{bst}(U_i)|_f. \quad \square$$

**Lemma 4.24.** *La  $U = (U_i)_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av kompakte og konvekse delmengder av  $\mathbb{R}^d$ . La  $\Gamma$  vera som i [Definisjon 4.8](#), la  $\Psi$  vera som i [Definisjon 4.16](#), og la  $\alpha$  vera som i [Lemma 4.5](#).*

Då er

$$\Gamma \circ \alpha^{-1} \circ \Psi \simeq \text{Id}_{\bigcup_{u \in U} u}.$$

*Bevis.* For  $x \in U_i$  følger det frå [Lemma 4.23](#) at

$$\alpha^{-1} \circ \Psi(x) \in |\text{bst}(U_i)|_f.$$

Ifølge [Lemma 4.21](#) får ein difor at

$$\Gamma \circ \alpha^{-1} \circ \Psi(x) \in U_i.$$

Sjå på avbildinga

$$\begin{aligned} H : \bigcup_{u \in U} u \times I &\rightarrow \bigcup_{u \in U} u \\ (x, t) &\mapsto xt + \Gamma \circ \alpha^{-1} \circ \Psi(x)(1-t) \end{aligned}$$

Denne er kontinuerleg fordi  $\Gamma$  er kontinuerleg ifølge [Lemma 4.9](#),  $\Psi$  er kontinuerleg ifølge [Lemma 4.17](#), og  $\alpha$  er ein homeomorfi.

Avbildinga  $H$  er også veldefinert, for om ein fikserer ein  $x \in U_i$ , så er  $xt + \Gamma \circ \alpha^{-1} \circ \Psi(x)(1-t) \in U_i$  for alle  $t \in I$  sidan det ligg på ei linje mellom to punkt i  $U_i$ , og  $U_i$  er konveks.

Difor er  $H$  ein homotopi frå  $\text{Id}_{\bigcup_{u \in U} u}$  til  $\Gamma \circ \alpha^{-1} \circ \Psi$ . □

**Definisjon 4.25.** La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over hjørnemengda  $V$ .

Då er  $n$ -skjelettet til  $K$ , skrivne  $\text{Sk}_n(K)$ , gitt ved

$$\text{Sk}_n(K) := \{\sigma \in K : \#\sigma \leq n\}.$$



**Lemma 4.26.** *La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over hjørnemengda  $V$ .*

*Då er  $n$ -skjelettet til  $K$  eit abstrakt simplisielt kompleks.*

*Bevis.* Alle  $\tau \in \text{Sk}_n(K)$  er delmengder av ein  $\sigma \in K$ , så dei oppfyller krav 2 og 3 i [Definisjon 3.1](#). Krav 1 er oppfylt ved at  $\text{Sk}_0(K) \subseteq \text{Sk}_n(K)$ .  $\square$

**Lemma 4.27.** *La  $V := \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  vera ei mengd av punkt.*

*Då er det geometriske simplekset utspent av  $V$  konvekst.*

*Bevis.* La  $\Delta$  vera det geometriske simplekset. La  $x$  og  $y$  vera to vilkårlige punkt i  $\Delta$ . Då er

$$x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

og

$$y = \sum_{i=1}^n b_i v_i$$

med  $a_i, b_i \geq 0 \forall i$ , og difor er

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1.$$

For ein vilkårlig  $t \in I$ , sjå på

$$\begin{aligned} xt + (1-t)y &= t \sum_{i=1}^n a_i v_i + (1-t) \sum_{i=1}^n b_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^n b_i v_i + t \left( \sum_{i=1}^n a_i v_i - \sum_{i=1}^n b_i v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n b_i v_i + t \left( \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n b_i v_i + \left( \sum_{i=1}^n t(a_i - b_i) v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n b_i v_i + t(a_i - b_i) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n (b_i + t(a_i - b_i)) v_i. \end{aligned}$$

Merk fyrst at  $b_i + t(a_i - b_i) \geq 0$  fordi

$$b_i + t(a_i - b_i) = (1-t)b_i + ta_i \geq ta_i \geq 0.$$

Vidare, så er

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (b_i + t(a_i - b_i)) &= \sum_{i=1}^n (1-t)b_i + ta_i \\ &= (1-t) \sum_{i=1}^n b_i + t \sum_{i=1}^n a_i \\ &= 1-t+t=1. \end{aligned}$$

Altså ligg alle linjer mellom to vilkårlige punkt i  $\Delta$  i  $\Delta$ , og  $\Delta$  er difor konveks.  $\square$

**Definisjon 4.28.** La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over hjørnemengda  $V$ , og la  $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^{\#\sigma} \in K$ .

Då er randa til  $\sigma$ , skrive som  $\partial\sigma$ , gitt ved

$$\partial\sigma := \bigcup_{i=1}^{\#\sigma} \sigma \setminus \sigma_i.$$

**Lemma 4.29.** La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over hjørnemengda  $V$ , og la  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  vera ei affin imbedding. Vidare, la  $\sigma \in K$ , og la  $|\sigma|_f$  vera det geometriske simplekset utspent av punkta  $f(\sigma)$  (som i [Merknad 3.15](#)), og la  $|\partial\sigma|_f := \bigcup_{\tau \in \partial\sigma} |\tau|_f$ .

Då er

$$|\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\} \cong S^{\#\sigma}$$

og

$$|\sigma|_f \times I \cong D^{\#\sigma+1}.$$

*Bevis.* Ein kan anta at  $|\sigma|_f \subseteq \mathbb{R}^{\#\sigma}$ , sidan det er unikt opp til homeomorfi ifølge [Teorem 3.17](#). Då er  $|\sigma|_f \times I \subseteq \mathbb{R}^{\#\sigma+1}$ . Ved å bruka same  $f$ , får ein også at  $|\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}^{\#\sigma+1}$ .

Vel eit vilkårleg punkt  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  i det indre av  $|\sigma|_f \times I$ . Sidan  $|\sigma|_f \times I$  er ei delmengd av  $\mathbb{R}^{\#\sigma+1}$ , så eksisterer det ein  $\epsilon$  sånn at  $G := \bar{B}_\epsilon((\tilde{x}, \tilde{t})) \subseteq (|\sigma|_f \times I)^\circ$ .

La

$$l(x, t) := |\sigma|_f \times I \setminus (\tilde{x}, \tilde{t}) \rightarrow |\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\}$$

vera ei avbilding som tek punktet der den uendelege stråla frå  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  til  $(x, t)$  og utover, snittar randa til  $|\sigma|_f \times I$ , som er  $|\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\}$ .

Ein har at  $l$  er veldefinert fordi ho treffer berre eitt element i  $|\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\}$  sidan  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  er i det indre, er det ingen linjer frå  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  til  $(x, t)$  som «tangerer»  $(\tilde{x}, \tilde{t}) \rightarrow |\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\}$ , sidan det ville ha medført at ei linje mellom punktet etter det fyrste «tangentpunktet» og eit punkt i omegnet rundt  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  ville ha gått utanfor mengda. Om stråla ikkje «tangerer» mengda, men likevel treffer randa til  $|\sigma|_f \times I$  i fleire punkt, så er det umogleg ettersom  $|\sigma|_f \times I$  er konveks ifølge [Lemma 4.27](#), så det fyrste punktet ein treffer er eit element i det indre av  $|\sigma|_f \times I$ . I tillegg så veit ein at kvar verdi  $(x, t) \in |\sigma|_f \times I \setminus (\tilde{x}, \tilde{t})$  må gi ein verdi på randa sidan  $|\sigma|_f \times I$  er kompakt ifølge [Lemma 4.4](#).

Ein får då frå argumenta ovanfor at det er ein 1 – 1 korrespondanse mellom eit punkt på  $G$  og eit punkt på randa, som gir at avbildinga

$$\begin{aligned} g : G &\rightarrow |\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\} \\ (x, t) &\mapsto l(x, t) \end{aligned}$$

er ein bijeksjon med invers

$$\begin{aligned} g^{-1} : |\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\} &\rightarrow G \\ (x, t) &\mapsto \epsilon \cdot \frac{(x, t) - (\tilde{x}, \tilde{t})}{\|(x, t) - (\tilde{x}, \tilde{t})\|} + (\tilde{x}, \tilde{t}). \end{aligned}$$

Men merk at  $g^{-1}$  er kontinuerleg og ein bijeksjon.

Sidan  $|\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\}$  er kompakt i  $\mathbb{R}^{\#\sigma+1}$  sidan det er ein endeleg union av direkteprodukt av kompakte mengder ifølge [Lemma 4.4](#) og difor kompakt sjølv ifølge [Teorem 2.10](#). Og

sidan  $G$  er Hausdorff ettersom det er eit underrom av  $\mathbb{R}^{\#\sigma+1}$  og  $g^{-1}$  er ein bijeksjon, er  $g^{-1}$  ein homeomorfi ifølge [Teorem 2.3](#).

Men det tyder at  $g$  er kontinuerleg. Ein kan utvida  $g$  til ei kontinuerleg avbiding definert på heile  $|\sigma|_f \times I \setminus (\tilde{x}, \tilde{t})$ , ved å ta

$$\begin{aligned} \hat{g} : |\sigma|_f \times I \setminus (\tilde{x}, \tilde{t}) &\rightarrow |\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\} \\ (x, t) &\mapsto l \left( \epsilon \frac{(x, t) - (\tilde{x}, \tilde{t})}{\|(x, t) - (\tilde{x}, \tilde{t})\|} \right) \end{aligned}$$

men då er  $\hat{g} = l$ , og  $l$  er difor kontinuerleg. Ifølge [Teorem 2.1](#), så er avbidinga  $i \circ l : |\sigma|_f \times I \rightarrow |\sigma|_f \times I$  kontinueleg for  $i : |\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\} \hookrightarrow |\sigma|_f \times I$  inklusjonsavbidinga.

Merk at sidan  $G \simeq S^{\#\sigma}$ , får ein det fyrste resultatet frå argumentet ovanfor.

La

$$\begin{aligned} h : |\sigma|_f \times I \setminus (\tilde{x}, \tilde{t}) &\rightarrow D^{\#\sigma+1} \setminus \{0\} \\ (x, t) &\mapsto (x, t) \frac{\|(x, t) - (\tilde{x}, \tilde{t})\|}{\|i \circ l(x, t) - (\tilde{x}, \tilde{t})\|} \end{aligned}$$

og la

$$\begin{aligned} \tilde{h} : |\sigma|_f \times I &\rightarrow D^{\#\sigma+1} \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} h(x, t) & (x, t) \neq (\tilde{x}, \tilde{t}) \\ 0 & (x, t) = (\tilde{x}, \tilde{t}). \end{cases} \end{aligned}$$

Sidan  $\tilde{h}$  er kontinuerleg frå [Teorem 2.4](#) og frå argumenta ovanfor, og det er ein bijeksjon, er det ein homeomorfi ifølge [Teorem 2.3](#), sidan  $|\sigma|_f \times I$  er kompakt og  $D^{\#\sigma+1}$  er Hausdorff sidan det er ei delmengd av  $\mathbb{R}^{\#\sigma+1}$ .  $\square$

**Lemma 4.30.** *La  $K_1$  og  $K_2$  vera to abstrakte simplisielle kompleks over høvsevis  $V_1$  og  $V_2$ .*

*Då er  $K := K_1 \cap K_2$  eit abstrakt simplisielt kompleks over  $V := V_1 \cap V_2$ .*

*Bevis.* Ein må visa at dei tre krava i [Definisjon 3.1](#) held:

1. La  $v_i \in V$ . Då er  $\{v_i\} \in K_1, K_2$ , som tyder at  $\{v_i\} \in K$ .
2. La  $\sigma \in K$ . Då er  $\sigma \subseteq V_1$  og  $\sigma \subseteq V_2$ , som tyder at  $\sigma \subseteq V$ .
3. La  $\sigma \in K$ , og la  $\tau \subset \sigma$ . Då er  $\tau \in K_1$  og  $\tau \in K_2$ , sidan  $\sigma \in K_1, K_2$ . Men det tyder at  $\tau \in K$ .  $\square$

**Definisjon 4.31.** La  $U$  vera eit overdekke av eit topologisk rom  $X$ , der alle ikkje-tomme endelege snitt av element av  $U$  er samantrekkbare.

Då kallar ein  $U$  for eit *samantrekkbart overdekke*.

**Lemma 4.32.** *La  $K$  vera eit endeleg abstrakt simplisielt kompleks over  $V = (v_1, \dots, v_n)$ , og la  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$  vera ei affin imbedding  $f$ .*

*Då er  $B := \{|\text{bst}(v_i)|_f\}_{i=1}^n$  eit samantrekkbart overdekke av  $|\text{Sd}(K)|_f$ .*

*Bevis.* Legg fyrst merke til at  $B$  er eit overdekke av  $|\mathrm{Sd}(K)|_f$ , sidan for ein vilkårlig  $\sigma \in \mathrm{Sd}(K)$ , vel ein  $v_i \in \sigma_1$ , då er  $\sigma \in \mathrm{bst}(v_i)$ . Men det betyr at  $|\sigma|_f \subseteq |\mathrm{bst} v_i|_f$ . Som betyr at  $B$  dekkar  $|\mathrm{Sd}(K)|_f$ .

Merk at om  $\{v_i, v_j\} \notin K$ , så er  $\mathrm{bst}(v_i) \cap \mathrm{bst}(v_j) = \emptyset$ . Om  $\tau \in \mathrm{bst}(v_i) \cap \mathrm{bst}(v_j) \neq \emptyset$ , så ville  $\tau_1$  ha innehaldd både  $v_i$  og  $v_j$  for at  $\tau \cup \{v_i\} \in \mathrm{Sd}(K)$  og det same gjeld for  $v_j$ . Men det tyder at  $\{v_i, v_j\} \in \mathrm{bst}(v_i), \mathrm{bst}(v_j)$  sidan dei er abstrakte simplisielle kompleks ifølge [Lemma 4.20](#). Det tyder at  $\{v_i, v_j\} \in K$ . Ein kan utvida argumentet til eit vilkårlig  $\{v_a, v_b, \dots\}$ .

Sjå på  $\sigma \in \bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})$ . Då må  $\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}$  vera ei delmengd av  $\sigma_1$ , for alle  $\sigma$ . Det tyder at

$$\sigma \subseteq \sigma \cup \{\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}\} \in \bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i}).$$

For  $x \in |\bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$  (som er mogleg sidan det er eit abstrakt simplisielt kompleks ifølge [Lemma 4.30](#)), så er  $x \in |\sigma|_f$  for ein  $\sigma \in \bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})$ . Men då er også  $x \in |\sigma \cup \{\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}\}|_f$ . Men sidan  $|\sigma \cup \{\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}\}|_f$  er konveks ifølge [Lemma 4.27](#), så er det ei linje frå  $x$  til  $f(\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\})$ , som dannar ein homotopi  $\mathrm{Id}_{|\sigma|_f} \simeq c_f(\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\})$ , der  $c_f(\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\})$  er konstantavbildinga som sender alt til  $f(\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\})$ . Og sidan ein kan gjera dette med alle  $\sigma \in \bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})$ , så gir [Teorem 2.4](#) ein at ein kan danne ein homotopi

$$\mathrm{Id}_{|\bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})|_f} \simeq c_f(\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\})$$

Merk at  $|\bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})|_f \subseteq \bigcap_{i=1}^k |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$ , fordi for  $x \in |\bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$ , så er  $x \in |\sigma|_f$  for ein eller annan  $\sigma \in \bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})$ . Men då er også  $|\sigma|_f \subseteq \bigcap_{i=1}^k |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$  ettersom  $|\sigma|_f \subseteq |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$  for alle  $i$ , sidan  $\sigma \in \mathrm{bst}(v_{j_i})$  for alle  $i$ . Difor er  $x \in \bigcap_{i=1}^k |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$ .

Ein får også at  $\bigcap_{i=1}^k |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f \subseteq |\bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$  fordi for  $x \in \bigcap_{i=1}^k |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$ , så er  $x \in |\tau_i|_f$  for ein eller annan  $\tau_i \in |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$  for alle  $i$ . Då har ein at ein kan uttrykka  $x$  sine barysentriske koordinatar på  $k$  ulike måtar. Men ifølge [Teorem 3.8](#), så må alle dei ikkje-null koordinata vera like ettersom dei barysentriske koordinata skal vera eintydige. La  $\hat{\tau}$  vera det abstrakte simplekset som berre inneheld dei ikkje-null koordinata til  $x$ . Då er  $x \in |\hat{\tau}|_f$ , og  $\hat{\tau} \subseteq \tau_i$  for alle  $i = 1, 2, \dots, k$ . Men sidan  $\tau_i \in \mathrm{bst}(v_{j_i})$  er abstrakte simplisielle kompleks ifølge [Lemma 4.20](#), så er også  $\hat{\tau} \in \mathrm{bst}(v_{j_i})$  for alle  $i = 1, 2, \dots, k$ . Det tyder at  $\hat{\tau} \in \bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})$ , så  $x \in |\hat{\tau}|_f \subseteq |\bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$ .

Om ein set saman dei to resultatata ovanfor, får ein at

$$gr \bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})_f = \bigcap_{i=1}^k |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f.$$

Dette fører til

$$\mathrm{Id}_{\bigcap_{i=1}^k |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f} = \mathrm{Id}_{\bigcap_{i=1}^k \mathrm{bst}(v_{j_i})_f} \simeq c_f(\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}).$$

Som tyder at  $\bigcap_{i=1}^k |\mathrm{bst}(v_{j_i})|_f$  er samantrekkbart. □

**Lemma 4.33.** La  $X$  vera eit samantrekkbart rom, og la  $f : S^n \rightarrow X$  vera ei kontinuerleg avbilding frå  $n$ -sfæra til  $X$ .

Då kan  $f$  utvidast til ei avbilding  $\hat{f}$  sånn at det følgande diagrammet kommuterar

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & \searrow \hat{f} & \uparrow \\ D^{n+1} & & \end{array}$$

der  $i : S^n \hookrightarrow D^{n+1}$  er inklusjonsavbildinga.

Dette beviset er frå [11, s. 319–320].

*Bevis.* Sidan  $X$  er samantrekkbart, så er  $f = \text{Id}_X \circ f \simeq c \circ f = c$ , så ein har ein homotopi frå  $\text{Id}_X$  til  $c$  (konstantavbildinga)

$$H : S^n \times I \rightarrow X$$

der  $H(x, 0) = c$  og  $H(x, 1) = x$  for alle  $x \in X$ .

Men det er ei avbilding  $B : S^n \times I \rightarrow D^{n+1}$  der  $(x, t) \mapsto x \cdot \frac{1+t}{2}$ , som dannar ein homeomorfi frå  $S^n$  til «donuten» mellom  $S^n$  og  $\frac{1}{2}S^n$ , som ein kallar for  $T^n$ . Denne har invers  $B^{-1} : T^n \rightarrow S^n$ , som tek  $x \mapsto \left( \frac{x}{\|x\|}, 2\|x\| - 1 \right)$ .

Merk at  $B^{-1} \left( \frac{1}{2}S^n \right) = c$ , så ein kan utvida  $H \circ B^{-1} : T^n \rightarrow X$  til ei avbilding

$$\widehat{H \circ B^{-1}} : D^{n+1} \rightarrow X$$

$$x \mapsto \begin{cases} H \circ B^{-1}(x) & \|x\| \in [\frac{1}{2}, 1] \\ c & \|x\| \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

som er kontinuerleg ifølge Teorem 2.4.

Difor er  $\widehat{H \circ B^{-1}}$  ei kontinuerleg avbilding frå  $D^{n+1} \rightarrow X$ , med dei ynskja eigenskapane.  $\square$

**Lemma 4.34.** La  $U = (U_i)_{i=1}^n$  vera ei endeleg mengd av kompakte og konvekse delmengder av  $\mathbb{R}^d$ , la  $\Gamma$  vera som i Definisjon 4.8, la  $\Psi$  vera som i Definisjon 4.16, og la  $\alpha$  vera som i Lemma 4.5.

Då er

$$\alpha^{-1} \circ \Psi \circ \Gamma \simeq \text{Id}_{|\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f}.$$

*Bevis.* La  $h := \alpha^{-1} \circ \Psi \circ \Gamma$ . Ifølge Lemma 4.9 og Lemma 4.17, så veit ein at  $h$  er kontinuerleg. Vidare la

$$C_\sigma := \bigcap_{\{U_i : \sigma \in \text{bst}(U_i)\}} |\text{bst}(U_i)|_f.$$

Dette beviset er gjort ved induksjon over  $m$ -skjelettet til  $\text{Sd}(\mathcal{N}(U))$  for å finna ein

$$H_m : |\text{Sk}_m(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))|_f \times I \rightarrow |\text{Sk}_m(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))|_f$$

der

$$H_m(|\text{Sk}_m(\text{bst}(U_i))|_f) \subseteq |\text{bst}(U_i)|_f$$

og er ein homotopi frå  $\text{Id}_m := \text{Id}_{|\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f} |_{|\text{Sk}_m(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))|_f}$  til  $h_m := h|_{|\text{Sk}_m(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))|_f}$ .

For å visa grunntilfellet  $m = 0$ , ynskjer ein å finna ein  $H_0 : |\text{Sk}_0(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))|_f \times I \rightarrow |\text{Sk}_0(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))|_f$  med induksjonsegenskapen. Merk at  $\text{Sk}_0(\text{Sd}(\mathcal{N}(U))) = \{\{v\} : v \in \mathcal{N}(U)\}$ , så  $|\text{Sk}_0(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))|_f$  er ei mengd med diskrete punkt.

Vel ein  $p \in \text{Sk}_0(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))$ . Sidan  $p$  er trivielt eit abstrakt simplisielt kompleks ettersom det berre er eitt punkt, kan ein sjå på den geometriske realiseringa av  $p$ . Ein har at  $|p|_f \in C_p$  per definisjon av  $C_p$ , men sidan  $h(|p|_f) \in |\text{bst}(U_i)|$  for alle  $p \in \text{bst } U_i$ , ifølge [Lemma 4.21](#) og [Lemma 4.23](#), så er  $h(|p|_f) \in C_p$  også.

Men sidan  $\{|\text{bst}(U_i)|_f\}_{i=1}^n$  er eit samantrekkbart overdekke av  $|\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f$  ifølge [Lemma 4.32](#), så er alle  $C_\sigma$  samantrekkbare uavhengig av val av  $\sigma \in \text{Sd}(\mathcal{N}(U))$ .

Difor er både  $|p|_f$  og  $h(|p|_f)$  i eit samantrekkbart rom  $C_p$ , og ein kan konstruera ein sti i  $C_p$ , kalla  $s_p$ , med  $s_p(0) = |p|_f$  og  $s_p(1) = h(|p|_f)$  mellom dei. Om ein gjer dette for alle punkta, får ein den fyrste homotopien

$$H_0 : (|p|_f, t) \mapsto s_p(t).$$

For å sjekka om  $H_0$  oppfyller induksjonshypotesen

$$H_0 : |\text{Sk}_0(\text{bst}(U_i))|_f \ni x \mapsto y \in |\text{bst}(U_i)|_f$$

så ser ein at for  $p \in \text{Sk}_0(\text{bst}(U_i))$ , då er  $p \in \text{bst}(U_i)$ , så må  $\text{bst}(U_i)$  vera eit av ledda som snittar i definisjonen til  $C_p$ , og  $s_p(I) \subseteq C_p \subseteq |\text{bst}(U_i)|_f$ , som var det ein ville visa.

Anta at induksjonshypotesen gjeld for  $H_{m-1}$ . Ein vil visa at det gjeld for  $H_m$ .

Vel ein vilkårlig  $\sigma \in \text{Sk}_m(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))$  med  $\#\sigma = m$  ( $\sigma$  er eit  $m$ -simpleks). Og definér for  $(x, t) \in |\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\}$ :

$$\hat{H}_{m-1}^\sigma(x, t) := \begin{cases} id_m|_{|\sigma|_f}(x) & t = 0 \\ H_{m-1}|_{|\partial\sigma|_f \times I}(x, t) & t \in (0, 1) \\ h_m|_{|\sigma|_f}(x) & t = 1. \end{cases}$$

Ein ser at  $\hat{H}_{m-1}^\sigma$  er kontinuerleg ifølge [Teorem 2.4](#).

Ein ser også at  $\hat{H}_{m-1}^\sigma(x, t) \in C_\sigma$  fordi:

For  $t = 0$ , så følger det trivielt, sidan  $|\sigma|_f \subseteq C_\sigma$  per definisjon av  $C_\sigma$ , sidan den dekkar  $|\sigma|_f$ .

For  $t = 1$  så følger det frå [Lemma 4.21](#) og [Lemma 4.23](#) fordi for  $x \in |\sigma|_f \cap |\text{bst}(U_i)|_f$ , så er  $h(x) \in |\text{bst}(U_i)|$ . Det tyder at for  $x \in C_\sigma \supseteq |\sigma|_f$ , så er  $h_m|_{|\sigma|_f}(x) \in C_\sigma$ .

For  $t \in (0, 1)$ , med  $x \in |\partial\sigma|_f$ , så er  $x \in |\tau|_f$  for ein eller annan  $\tau \in \partial\sigma$ . Men  $C_\tau \subseteq C_\sigma$ , sidan for alle  $|\text{bst}(U_i)|_f$  som dekkar  $|\sigma|_f$ , så dekkar dei også  $|\tau|_f$ . Det er difor anten like mange, eller fleire ledd i snittet til  $C_\tau$ . Frå induksjonshypotesen så er  $H_{m-1}(x, t) \subseteq C_\tau \subseteq C_\sigma$ .

Ifølge [Lemma 4.29](#) så er  $|\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\} \cong S^m$  og  $|\sigma|_f \times I \cong D^{m+1}$ , så ein får eit kommutativt diagram og induserte avbildingar frå [Lemma 4.33](#):

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\beta} & |\partial\sigma|_f \times I \cup |\sigma|_f \times \{0, 1\} \\ \uparrow \gamma \circ i \circ \beta & \nearrow \hat{H}_{m-1}^\sigma & \downarrow i \\ D^{m+1} & \xleftarrow{\gamma} & |\sigma|_f \times I \\ & \nearrow \xi & \nwarrow \xi \circ \gamma \\ & C_\sigma & \end{array}$$

der avbildinga  $\xi : D^{m+1} \rightarrow C_\sigma$  er den ein får frå [Lemma 4.33](#), og  $\beta, \gamma$  er homeomorfiene ein får frå [Lemma 4.29](#).

Ein definerer  $H_m|_{|\sigma|_f \times I} := \xi \circ \gamma$  som den raude avbildinga i diagrammet ovanfor.

Induksjonshypotesen gjeld for  $H_m|_{|\sigma|_f \times I}$ , fordi om ein lar  $x \in |\text{Sk}_m(\text{bst}(U_i))|_f \cap |\sigma|_f$ , så er  $H_m|_{|\sigma|_f \times I}(x) \in C_\sigma$ . Men sidan  $C_\sigma$  er snittet av alle geometriske realiseringar av dei lukka barysentriske stjernene som inneheld  $|\sigma|_f$ , så tyder det at om  $x$  er i det indre av  $|\sigma|_f$  og  $x \in |\text{Sk}_m(\text{bst}(U_i))|_f$ , så må  $|\text{Sk}_m(\text{bst}(U_i))|_f$  vera eit av ledda i snittet som danner  $C_\sigma$ , og ein får at

$$H_m|_{|\sigma|_f \times I}(x) \in C_\sigma \subseteq |\text{Sk}_m(\text{bst}(U_i))|_f.$$

Om  $x$  er ikkje i det indre av  $|\sigma|_f$ , men heller  $x \in |\text{Sk}_m(\text{bst}(U_i))|_f \cap |\partial\sigma|_f$ , så er dette ei delmengd av  $|\text{Sk}_{m-1}(\text{bst}(U_i))|_f$ , sidan  $\partial\sigma$  er ein samling av  $m - 1$ -simpleks. Men frå diagrammet, og induksjonshypotesen får ein difor at

$$H_m|_{|\sigma|_f \times I}(x) = H_{m-1}(x) \in |\text{Sk}_{m-1}(\text{bst}(U_i))|_f \subseteq |\text{Sk}_m(\text{bst}(U_i))|_f.$$

Difor gjeld induksjonshypotesen.

Sidan valet av  $\sigma$  med  $\#\sigma = m$  var vilkårlig, så kan ein lima alle saman med [Teorem 2.4](#), og ein får

$$H_m : |\text{Sk}_m(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))|_f \times I \rightarrow |\text{Sk}_m(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))|_f.$$

Sidan  $U$  er endeleg, så er  $\mathcal{N}(U)$  og  $\text{Sd}(\mathcal{N}(U))$  også endelege og har difor eit abstrakt  $k$ -simpleks med  $k \geq r$  for alle andre  $r$ -simpleks (dette vil vera avgrensa av  $\#U$ ), så om ein gjentek induksjonen mange nok gongar til  $\text{Sk}_k(\text{Sd}(\mathcal{N}(U))) = \text{Sk}_{k+1}(\text{Sd}(\mathcal{N}(U)))$ , får ein at

$$H = H_k$$

er den ynskja homotopien frå  $\text{Id}_{|\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f}$  til  $h = \alpha^{-1} \circ \Psi \circ \Gamma$ . □

Endeleg så har ein alle dei naudsynnte resultatata ein treng for å visa nerveteoremet.

*Bevis av [Teorem 3.27](#).* Vel ei affin imbedding  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$  og ei affin imbedding  $f : \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ . Definér  $\Psi$  som i [Definisjon 4.16](#),  $\Gamma$  som i [Definisjon 4.8](#), og  $\alpha$  som i [Lemma 4.5](#).

Då får ein ifølge [Lemma 4.24](#) og [Lemma 4.34](#) at  $\alpha^{-1} \circ \Psi$  er ein homotopi-invers til  $\Gamma$ , som gir ein homotopiekvivalens mellom  $\bigcup_{u \in U} u$  og  $|\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f$ .

Men sidan  $\alpha : |\text{Sd}(\mathcal{N}(U))|_f \cong |\mathcal{N}(U)|_g$  ifrå [Lemma 4.5](#), får ein ein homotopiekvivalens mellom  $\bigcup_{u \in U} u$  og  $|\mathcal{N}(U)|_g$ .

Ifølge [Teorem 3.17](#), så er  $|\mathcal{N}(U)|_g$  homeomorf til alle geometriske realiseringar av  $\mathcal{N}(U)$ , og resultatet følger. □

## 5 Konklusjon

Grunnen til at ein visar nerveteoremet [Teorem 3.27](#) for endelege, konvekse og kompakte mengder er i hovudsak for å visa at Cech-komplekset ivaretek all strukturen opp til homotopiekvivalens. Cech-komplekset er den naturlege strukturen ein ser på om ein har ei stor datamengd og ynskjer å veta «forma» på datamengda. Ved å bruka nerveteoremet får ein bevist at Cech-komplekset er ein svært god approksimasjon av strukturen danna av datamengda.

Diverre, så viser det seg at å rekna ut Cech-komplekset tek ekstremt lang tid, til og med for kraftige datamaskinar. I praksis brukar ein heller andre approksimasjonar av Cech-komplekset, som til dømes Vietoris-Rips komplekset eller Delaunay-komplekset som Carlsson argumenterer for i [4, s. 263–264].

Det er også mange fleire variantar av nerveteoremet som ikkje vert omtala i denne teksten som til dømes eit nerveteorem for uendelege og opne samantrekkbare overdekke av eit parakompakt rom [6, Corollary 4G.3]. Det mest vanlege beviset av eit nerveteorem ein kjem borti er i eit ope tilfelle som i [8, Theorem 15.21], [13, Theorem 4.3] eller [4, Theorem 2.3].

Men sidan Cech-komplekset vert gjort med lukka ballar, så dekker ikkje nerveteoremet i det opne tilfellet dette. Studiet av nerveteoremet og i kva tilfelle det gjeld eller ikkje gjeld, er eit aktivt fagfelt ifølge Oudot i [10, s. 82], som på same side påstår det er eit nerveteorem for uendeleg lukka overdekke med andre føresetnadar, utan å referera til eit bevis av påstanden.

Dette viser at i trass for at mange anvender nerveteoremet, så er både dei naudsynte føresetnadane og eit bevis for nerveteoremet utanom det ope og parakompakt tilfellet vanskeleg å finna.

Eg håpar difor at denne teksten gav eit relativt kort og enkelt bevis av nerveteoremet, sånn som det vanlegvis blir brukt i topologisk dataanalyse.

## Referansar

- [1] Ulrich Bauer, Michael Kerber, Fabian Roll, and Alexander Rolle. A unified view on the functorial nerve theorem and its variations. arXiv:2203.03571, 2022.
- [2] P. B. Bhattacharya, S. K. Jain, and S. R. Nagpaul. *Basic abstract algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1994.
- [3] Karol Borsuk. On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes. *Fund. Math.*, 35:217–234, 1948.
- [4] Gunnar Carlsson. Topology and data. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 46(2):255–308, 2009.
- [5] Tamal Krishna Dey and Yusu Wang. *Computational topology for data analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2022.
- [6] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [7] Christopher Heil. *Metrics, norms, inner products, and operator theory*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Cham, 2018.
- [8] Dmitry Kozlov. *Combinatorial algebraic topology*, volume 21 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin, 2008.
- [9] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [10] Steve Y. Oudot. *Persistence theory: from quiver representations to data analysis*, volume 209 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [11] Tej Bahadur Singh. *Introduction to topology*. Springer, Singapore, 2019.
- [12] Wilson A. Sutherland. *Introduction to metric and topological spaces*. Oxford University Press, Oxford, 2009.



- [13] Žiga Virk. Rips complexes as nerves and a functorial Dowker-nerve diagram. *Mediterr. J. Math.*, 18(2):Paper No. 58, 24, 2021.
- [14] André Weil. Sur les théorèmes de de Rham. *Comment. Math. Helv.*, 26:119–145, 1952.

