Mathias Kjørholt

Et TDS-basert design av en undervisningssekvens med introduksjon til differensialregning

Masteroppgave i Lektorutdanning i realfag for trinn 8–13
Veileder: Heidi Strømskag
Februar 2022

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Mathias Kjørholt

Et TDS-basert design av en undervisningssekvens med introduksjon til differensialregning

Masteroppgave i Lektorutdanning i realfag for trinn 8–13
Veileder: Heidi Strømskag
Februar 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Jeg vil rette en takk til Chris for god studieveiledning gjennom mange år. Jeg vil rette en stor takk til Heidi som har vært min veileder gjennom masterprosjektet. Det har vært en glede og stor inspirasjon å ha en så dyktig veileder. Takk også til de frammøtte ved min muntlige presentasjon av prosjektet. Det kom flere gode innspill som jeg tok med meg videre i arbeidet.

Sammendrag

I denne oppgaven har jeg brukt teorien for didaktiske situasjoner i matematikk (TDS) og forskningsmetodologien didaktisk ingeniørvirksomhet (DI) til å designe en undervisningssekvens som introduserer differensialregning. I en didaktisk situasjon opptrer målkunnskapen som en optimal løsning på et problem som blir gitt elevene. Undervisningsopplegget jeg har designa, baserer seg på målinger av ei kules tilbakelagte strekning på vei ned skråplanet. Problemet er å finne momentanhastigheten til kula ved et gitt tidspunkt. Den optimale løsninga, og dermed målkunnskapen i designet, er den deriverte av funksjonen som beskriver relasjonen mellom strekning og tid. Designet baserer seg på en diskret og trinnvis tilnærming til grenseverdier ved at en undersøker den gjennomsnittlige endringsraten på stadig kortere intervaller. Når en ønsker en best mulig beskrivelse av hastigheten i det ene øyeblikket, melder behovet seg for et grenseverdibegrep. Utforskning av grenseverdier, både grafisk og numerisk, står i sentrum av designet. GeoGebra brukes aktivt gjennom hele undervisningssekvensen.

Designet bygger også på en forberedende analyse av målkunnskapen. I den epistemologiske analysen ser jeg nærmere på hva differensialregning består av, når og hvordan den ble oppdaga og utvikla, hva den kan brukes til og hvorfor den er inkludert i læreplanen på videregående skole. I forbindelse med differensialregningens historie har jeg valgt å vektlegge arbeidet til Galileo Galilei, sir Isaac Newton, Gottfried Wilhelm von Leibniz og Augustin-Louis Cauchy. I den didaktiske analysen gir jeg et kort historisk innblikk i differensialregningens plass i matematikkpensumet på videregående skole før jeg presenterer en alternativ modell for undervisning av temaet, en modell som har inspirert deler av designet mitt. Selve designet presenteres sammen med en *a priori*-analyse, som beskrevet i didaktisk ingeniørvirksomhet.

Abstract

This assignment makes use of the theory of didactic situations (TDS) and the research methodology didactic engineering (DE) to design a teaching sequence that introduces differential calculus. In such a didactic situation, the mathematical knowledge acts as an ideal solution to a given problem. In this assignment the designed teaching sequence is based on data from a rolling ball on an inclined plane. The problem is to find the instantaneous velocity of the ball at a given time. The ideal solution to this problem, thus also the mathematical knowledge to be taught, is the derivative of the function describing the relation between displacement and time. The design is based on a discrete step by step approach to limits done by investigating the average rate of change on decreasing intervals. When you wish the best "estimate" of the instantaneous velocity you need the concept of limits. At the very core of this design is graphical and numeric exploration of limits. GeoGebra is frequently used during the whole session.

Also, the design is built on a preliminary analysis of the mathematical knowledge. In the epistemological analysis I study differential calculus´s ingredients, origin and development, function and legitimacy in high school curriculum. The history part is centered around the work of the great mathematicians Galileo Galilei, Sir Isaac Newton, Gottfried Wilhelm von Leibniz, and Augustin-Louis Cauchy. In the didactic analysis I briefly present differential calculus´s entry into the curriculum in high school, and I present an alternative model for differential calculus teaching, which have inspired parts of my own design. The design is presented together with the *a priori* analysis, which is included and described by didactic engineering.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Min interesse for differensialregning

Jeg husker at jeg syntes det var spennende å lære om den deriverte på videregående. Matematikklæreren tegna opp en ikke-lineær graf på tavla og viste oss framgangsmåten for å finne den gjennomsnittlige vekstfarten mellom to punkter A og B på grafen. Hun illustrerte at dersom vi lot B nærme seg A mer og mer, så ville den rette linja gjennom A og B sammenfalle mer og mer med selve grafen akkurat i punktet A. «Denne linja, som vi kaller tangenten til grafen i A, beskriver vekstfarten nøyaktig i dette punktet! Vi kaller det *den deriverte*,» sa hun entusiastisk. Avstanden mellom punktene skulle *gå mot* 0, hva det enn måtte bety. Eventuelt skulle punktene komme *uendelig nærme* hverandre. Det var snakk om et grensetilfelle.

Lenge syntes jeg matematikken var enkel. Den var håndfast og begripelig. Den handla om endelige størrelser innenfor tallteorien, geometrien og algebraen. Det var klare framgangsmåter for å utføre de matematiske operasjonene, og jeg forstod hvilke spilleregler som gjaldt i hvilke situasjoner. Grenseverdier, derimot, var noe nytt og noe ganske mystisk: at h *går mot* 0 betydde ikke at h *var lik* 0. Samtidig var h mindre enn noe annet positivt reelt tall. Man kunne dividere 1 på det største tallet man kunne tenke seg, men det fantes likevel ikke noe positivt tall så lite at vi ikke kunne komme *enda nærmere* 0. Det var et innblikk i det *uendelig lille*, det jeg vil si egentlig er utenfor vår fatteevne. Vi opererte nå med en variabel (gjerne kalt h eller Δx) som vi ikke kunne gi en tallverdi på den måten vi var vant med. Vi kunne bare si at h *går mot* 0. Og den deriverte var altså definert ut fra en slik grenseverdi.

Jeg synes det er spennende å sette meg inn i begrepene om grenseverdier og kontinuitet. Kontinuitet kan forklares veldig enkelt, nemlig at en graf er kontinuerlig dersom du kan tegne den uten å løfte pennen. Samtidig har begrepet en matematisk definisjon basert på grenseverdier. Kontinuitet defineres først i et enkelt punkt på en funksjon, og deretter sier man at funksjonen er kontinuerlig innenfor et definisjonsområde dersom funksjonen er kontinuerlig i *alle* punktene i definisjonsområdet. En funksjon er for eksempel kontinuerlig i det «lille» intervallet $[0,1]$ dersom funksjonen er kontinuerlig for alle punkter i intervallet $[0,1]$. Men det er uendelig mange punkter i dette intervallet! Den reelle tallinja, som jeg tidligere kjente som en grei oversikt over kjente størrelser som heltall og brøker, er tydeligvis mye mer kompleks enn jeg kunne forestille meg.

1.2 Forskningsspørsmålet

Hvordan kan man undervise om derivasjon på en slik måte at undringen og fascinasjonen for temaet blir bevart samtidig som at stoffet blir konkret nok til at elevene kan forstå og anvende det? Jeg håper å finne et godt svar på dette spørsmålet gjennom denne oppgaven. Hovedmålet mitt er å utvikle en undervisningssekvens som jeg og andre lærere kan ta i bruk i videregående skole for å introdusere differensialregning på en hensiktsmessig måte. Designet skal være et godt faglig og didaktisk opplegg som er med på å øke elevenes forståelse for en gren av matematikken som har vist seg å være vanskelig for mange elever, og som er meget framtredende i læreplanen LK20. Opplegget er i utgangspunktet tiltenkt en R1-klasse, men det er ingenting i veien for at det kan gjennomføres også med en 1T-klasse. Det er i hovedsak én årsak til at jeg dedikerer det til R1. Det er at grenseverdier er eksplisitt nevnt i læreplanen i R1, men ikke i 1T. Diskusjon av grenseverdibegrepet utgjør en såpass stor del av opplegget. Forskningsspørsmålet formulerer jeg som følger:

Hvordan kan jeg ved hjelp av didaktisk ingeniørvirksomhet designe et undervisningsopplegg i R1 som gir en god introduksjon til differensialregning?

1.3 Hvordan oppgaven er strukturert

I Kapittel 2 presenterer jeg det teoretiske rammeverket jeg bruker. Det er teorien for didaktiske situasjoner i matematikk (TDS). Jeg forklarer de begrepene jeg bruker for å analysere mitt design. I Kapittel 3 beskriver jeg metoden. Det er en forskningsmetodologi som heter didaktisk ingeniørvirksomhet og brukes for å designe og analysere didaktiske situasjoner. Jeg bruker kun de to første fasene av didaktisk ingeniørvirksomhet. I metodekapitlet forklarer jeg grunnen til dette. Deretter følger et langt kapittel med forberedende analyse, som rommer en epistemologisk, didaktisk og institusjonell analyse av differensialregning. Den epistemologiske analysen handler om differensialregning som kunnskap. Hva består den av, hvor kommer den fra, hva brukes den til og hvorfor er den inkludert i læreplanen? I den didaktiske analysen gir jeg en kort innføring i historien til differensialregningens plass i matematikkpensumet i skolen og presenterer en modell hvor differensialregning introduseres trinnvis gjennom en diskret tilnærming til dens grunnleggende begreper. I den institusjonelle analysen ser jeg nærmere på noen lærebøker og på læreplanen. Selve designet presenterer jeg i Kapittel 5, hvor jeg også vil foreta en *a priori*-analyse av designet i lys av den forberedende analysen og med bruk av begrepene i TDS. Deretter følger en diskusjon i Kapittel 6 for å tydeliggjøre svarene på forskningsspørsmålet, før jeg gjør noen avsluttende refleksjoner til slutt.

2. Teoretisk rammeverk: Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk

Jeg vil bruke teorien for didaktiske situasjoner i matematikk (heretter kalt TDS) som det teoretiske rammeverket for oppgaven. TDS er et systematisk rammeverk og en vitenskapelig tilnærming til undervisning og læring av matematikk. Det var Guy Brousseau som stod i spissen av den tidligste utviklingen av TDS på 1960-tallet. Det var observasjon av elever og lærere i deres naturlige setting som la grunnlag for utvikling av teorien. Dette skjedde på barneskolen *Jules Michelet* i en forstad til Bordeaux fra skolen stod ferdig i 1972 (Strømskag, 2020, s. 25). Begrepene og modellene i TDS er elementer i systemer og defineres og rangeres derfor i forhold til hverandre. Sammen utgjør de et sammenhengende sett av analytiske redskaper for å planlegge og studere matematikkundervisningen og dens fenomener (Strømskag, 2020, s. 27). I det følgende vil jeg forklare de begrepene i TDS som er relevante for mitt design og deretter kort beskrive de ulike fasene som inngår i en didaktisk situasjon.

2.1 Noen sentrale begreper i TDS

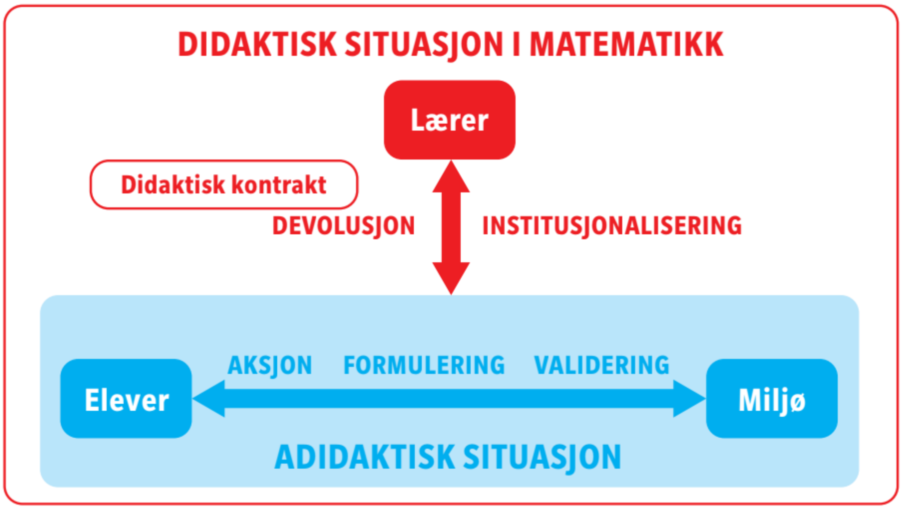
Til slutt i denne seksjonen vil jeg presenteres Strømskags (2020) definisjon av en *didaktisk situasjon*, men inntil videre ser vi på det som en situasjon designa slik at den inneholder et *problem* hvor en bestemt kunnskap, $\mathscr{k}$, er en optimal løsning på problemet. I TDS kaller vi $\mathscr{k}$ for *målkunnskapen*, og den er selve læringsmålet, i TDS også kalt den *didaktiske intensjonen*, for den didaktiske situasjonen. Didaktiske situasjoner baserer seg dermed på at matematisk kunnskap er et verktøy for å ta avgjørelser og løse problemer, noe som er et grunnleggende prinsipp i TDS. En didaktisk situasjon er et redskap for at elever skal få ekte kunnskap i matematikk, og med «ekte» mener vi i denne sammenhengen at de også vet hensikten med kunnskapen og hva den kan brukes til (Strømskag, 2020, s. 26–28).

I TDS er *miljø* et sentralt begrep, og beskrives som «en delmengde av klasserommets omgivelser med kun de egenskapene som er relevante med tanke på den matematiske målkunnskapen, k» (Strømskag, 2020, s. 36). Miljøet består av elementer som vi kan oversette med det elevene skal bruke for å løse problemet. Disse er ment å virke etter en bestemt plan, og vi kan si at elevene samspiller med elementene når de løser problemet. Gjennom fasene i en didaktisk situasjon vil miljøet endre seg. Det kan romme informative tekster, data, fysisk materiell og verktøy, andre elever, deres etablerte kunnskap, minner om relevante hendelser og objektive forutsetninger. Det *materielle miljøet* er den delen av miljøet som elevene manipulerer i startfasen av problemløsningen (Strømskag, 2020, s. 36–37).

En funksjon ved miljøet som er spesielt viktig, er at det gir objektiv feedback. Læreren har ingen rolle i denne feedbacken. For eksempel oppstår feedbacken gjerne som en respons til elevenes foreslåtte løsning på en oppgave, hvor den gjør det tydelig for elevene om deres framgangsmåter og resonnementer er hensiktsmessige med tanke på å løse problemet. Vi kan tolke feedbacken som en slags «motstand» for elevene. Miljøets evne til å yte motstand gjennom objektiv feedback kaller vi miljøets *adidaktiske potensial*, og de elementene av miljøet som fungerer som en motstander, er det *adidaktiske miljøet*. Sistnevnte inneholder ikke didaktiske intensjoner og forutsetninger. Videre er en *adidaktisk situasjon* en «situasjon der elevene som gruppe finner en løsning på et problem i samspill med miljøet, uten vesentlig hjelp fra læreren» (Strømskag, 2020, s. 37). Ved design av en adidaktisk situasjon er det et mål at miljøet har tilstrekkelig adidaktisk potensial. En viktig egenskap ved den adidaktiske situasjonen er at elevene ikke forsøker å løse problemet gjennom å avsløre lærerens hensikt med problemet. Elevene prøver derimot å løse det basert på logikken som er gitt gjennom miljøets egenskaper, og tar på denne måten eierskap til problemet. De tar avgjørelser, utarbeider nye påstander, diskuterer deres gyldighet, formulerer hypoteser, og evaluerer og endrer sine påstander basert på erfaringene. Den adidaktiske situasjonen består av tre faser som kalles aksjon, formulering og validering (Strømskag, 2020, s. 35–38 & 44). Disse forklares sammen med de didaktiske fasene av en didaktisk situasjon i neste seksjon.

I den didaktiske situasjonen er det et sett med regler som styrer samspillet mellom læreren og elevene. I TDS knytter vi både slike eksplisitte og implisitte regler til begrepet *didaktisk kontrakt*. Noen av de eksplisitt uttrykte reglene er knytta til k. Disse gis i den innledende fasen av en didaktisk situasjon, kalt devolusjonen. Den didaktiske kontrakten består også av mer generelle regler som er knytta til undervisning og læring. Dette er gjensidige forpliktelser som vanligvis er implisitte (Strømskag, 2020, s. 49).

Flere av begrepene presentert over inngår i følgende definisjon av en didaktisk situasjon: «En didaktisk situasjon er den totale situasjonen – regulert av den didaktiske kontrakten – der læreren er involvert i et samspill med samspillet mellom elevene og det adidaktiske miljøet når de løser problemet hun har gitt dem» (Strømskag, 2020, s. 54). En didaktisk situasjon kan modelleres med følgende figur:



Figur 1: En modell av en didaktisk situasjon (hentet fra Strømskag, 2020, s. 54)

2.2 De fem fasene i en didaktisk situasjon

En didaktisk situasjon består av fem faser. To av disse er didaktiske (devolusjon og institusjonalisering), og de tre andre er adidaktiske (aksjon, formulering og validering). Jeg forklarer dem i den rekkefølgen de opptrer i en ideell situasjon, men i realiteten må læreren ofte blande seg inn noe også i de adidaktiske fasene.

Devolusjon kalles den fasen hvor læreren overleverer den adidaktiske situasjonen (aksjon, formulering og validering) med miljø og problem til elevene. Overleveringen innebærer at læreren informerer om problemet som skal løses, betingelsene for situasjonen, reglene for handling og kriteriet for suksess. Målet er at elevene skal overta ansvaret for å løse problemet uten lærerens hjelp (Strømskag, 2020, s. 50).

I den første adidaktiske fasen, *aksjon*, konstruerer elevene en implisitt løsning på problemet. Dette foregår gjennom eksperimentell prøving og feiling på det materielle miljøet uten noen formell redegjørelse for handlingene. Ved vellykka devolusjon vil læreren være observatør her. Den andre adidaktiske fasen kalles *formulering*. Her formulerer eleven en eksplisitt løsning på problemet. Løsningsmetoden til en elev har til hensikt å lede en annen elev, ved at vedkommende følger denne løsningsmetoden, til en mulig løsning av problemet. Læreren skal gjøre ulike formuleringer synlige i klasserommet. Om nødvendig må læreren gripe inn og skape endringer i miljøet for at målkunnskapen transformeres fra implisitt til eksplisitt form. Dette kalles *regulering*. Dette kan gjøres gjennom henvisning til den didaktiske kontrakten eller gjennom et informasjonssprang, det vil si tilleggsopplysninger som læreren gir. *Validering* er den siste adidaktiske fasen og handler om at elevene prøver å begrunne sine løsninger. Læreren skal være leder av en vitenskapelig debatt og helst begrense seg til å strukturere debatten og få elevene til å uttrykke seg mer matematisk presist. Hvis det er læreren istedenfor elevene som presiserer behovet for begrunnelse av løsningen, er valideringsfasen didaktisk og ikke adidaktisk (Strømskag, 2020, s. 51–52).

Gjennom å løse problemet oppnår elevene en viss kunnskap. Denne må dekontekstualiseres av læreren og gjøres om til formell matematisk kunnskap. Dette innebærer en løsrivelse fra den adidaktiske situasjonen som kunnskapen er oppstått i, og kalles i TDS for *institusjonalisering*. I denne fasen skal læreren presentere kunnskapen med konvensjonell notasjon. I tillegg bør læreren informere om kunnskapens opprinnelse, rolle i gjeldende læreplan, betydning og framtid. Kunnskapens status endres fra å være løsningen på det gitte problemet til å bli en referansekunnskap for situasjoner uten didaktisk intensjon (Strømskag, 2020, s. 35 & 52–53).

3. Metode: Didaktisk ingeniørvirksomhet

I denne oppgaven bruker jeg didaktisk ingeniørvirksomhet (DI). DI er en forskningsmetodologi basert på TDS, hvor den brukes til å designe didaktiske situasjoner (Barquero & Bosch, 2015). Et hovedmål for designeren er å finne ut hvilke elementer som må inngå i miljøet, og hvordan disse skal virke sammen, for at elevene erfarer at målkunnskapen k er nyttig til å løse problemet de står overfor. I denne oppgaven er det differensialregning som er målkunnskapen, og jeg tar dermed sikte på å designe et problem som løses ved hjelp av (elementer av) differensialregning. DI har en struktur bestående av fire faser. Det er de to første fasene som er relevante for denne oppgaven siden jeg ikke implementerer det designede undervisningsopplegget. Grunnen til dette er pandemien og restriksjonene som hindra tilgang til en klasse å gjennomføre eksperimentet i. Mine data er i stedet bøker og artikler som handler om differensialregning og undervisning og læring av denne kunnskapen. Likevel forklarer jeg også de siste to fasene for å gi et helhetlig bilde av hva DI dreier seg om. Jeg baserer dette i hovedsak på framstillingen av DI i Strømskag (2020).

3.1 Forberedende analyse

Den første fasen er forberedende analyse. Den består igjen av tre analyser hvor hensikten er å finne ut av hvilke forhold og begrensninger som kan påvirke den didaktiske situasjonen med tanke på målkunnskapen $\mathscr{k}$. Disse er epistemologisk analyse, didaktiske analyse og institusjonell analyse. Den forberedende analysen danner et grunnlag for å designe en didaktisk situasjon der målkunnskapen trenger seg fram som løsningen på et problem. Den epistemologiske analysen er en presentasjon av målkunnskapens natur, opprinnelse, funksjon og gyldighet. Man spør hva målkunnskapen består av (dens natur), hvor den kommer fra (dens opprinnelse), hva den kan brukes til (dens funksjon) og hvordan den kan bevises (dens gyldighet). Slik bidrar den epistemologiske analysen til å presisere den didaktiske intensjonen til designet og avdekke eventuelle epistemologiske hindringer. Den didaktiske analysen handler om å gjøre seg kjent med resultater fra tidligere studier av hvordan målkunnskapen er blitt undervist og lært. Dette vil kunne gi designeren inspirasjon og ideer til hvordan undervisningen av målkunnskapen bør legges opp. Målet for den institusjonelle analysen er å identifisere konteksten for undervisningen. Det kan for eksempel dreie seg om typiske undervisningspraksiser, tilgjengelige teknologiske ressurser, vurderingspraksiser, skolen som organisasjon eller karakteristiske trekk ved læreren eller elevene (Strømskag, 2020, s. 71).

3.2 Design og *a priori*-analyse

Neste fase tar for seg design og *a priori*-analyse av den didaktiske situasjonen. Disse prosessene henger sammen. Den didaktiske situasjonen tar sikte på å implementere den matematiske målkunnskapen, og bør designes deretter. For at det skal skje, bygger designet på to prinsipper. Det ene er at målkunnskapen skal være en optimal løsning på et problem. Det andre er at elevene som gruppe, uten særlig hjelp fra læreren, skal være i stand til å finne denne løsningen gjennom samspill med miljøet som problemet er gitt i. Det sentrale spørsmålet for å designe den didaktiske situasjonen blir da: «Hva er de nødvendige betingelsene for at en situasjon skal implementere den matematiske kunnskapen den sikter mot?» (Strømskag, 2020, s. 72). Sagt med andre ord må situasjonen være designa slik at elevene opplever målkunnskapen som nyttig til å ta avgjørelser og nødvendig for at problemet skal kunne løses. I *a priori*-analysen formulerer man hypoteser om hvordan den didaktiske situasjonen vil utvikle seg gitt at elevene har de forkunnskapene som forutsettes og at de er villige til å delta i situasjonen. Dette handler om elevenes samspill med miljøet, strategiene de bruker og hvordan målkunnskapen utvikles. Siden virkelige elever ikke alltid oppfyller disse betingelsene, blir *a priori*-analysen en modell som sier noe om hvilken læring situasjonen gir mulighet for basert på antakelsene som gjøres om elevenes forkunnskaper og deltakelse. *A priori*-analysen sier altså ikke hvordan de virkelige elevene vil handle og lære i situasjonen (Strømskag, 2020, s. 72).

3.3 Realisering, observasjon, datainnsamling og *in vivo*-analyse

Den tredje fasen innebærer en realisering av den didaktiske situasjonen med tilhørende observasjon, datainnsamling og eventuelt *in vivo*-analyse. Forskeren er først og fremst en observatør som samler inn data til *a posteriori*-analysen. *In vivo*-analysen utvikles underveis når en tolker hva som skjer i klasserommet umiddelbart etterpå, og kan føre til justeringer (Barquero & Bosch, 2015, s. 251). Data som kan brukes til å analysere samspillet mellom elevene og miljøet med tanke på den didaktiske intensjonen og data for å analysere devolusjons- og institusjonaliseringsprosesser er særlig relevant. Ellers avhenger typen data som bør samles inn av målet for studien, hvilke hypoteser som skal testes og antakelsene i *a priori*-analysen. Relevante data kan ta form av elevbesvarelser, lyd- og videoopptak fra undervisningssituasjonen, feltnotater, spørreskjema og/eller intervjuer, men forskningsspørsmålet bestemmer hvilke man bør velge (Strømskag, 2020, s. 73).

3.4 *A posteriori*-analyse og validitetsvurdering

Den fjerde fasen inneholder en *a posteriori*-analyse og validitetsvurdering. I *a posteriori*-analysen blir hypotesene fra *a priori*-analysen sammenlignet med dataene fra gjennomføringen. Spørsmålet er i hvilken grad dataene støtter hypotesene, og man tolker de sammenfallene og avvikene man finner. Validiteten av den didaktiske ingeniørvirksomheten er basert på en sammenligning av forventa (*a priori*-analyse) og faktisk (*a posteriori*-analyse) resultat av det didaktiske designet. Validiteten innebærer ikke 100% sammenfall mellom disse. De virkelige elevene vil aldri besitte nøyaktig de forkunnskapene og vise den deltakelsen som forutsettes i *a priori*-analysen, ei heller handle nøyaktig som de forestilte generiske elevene. Derfor vil de to analysene aldri sammenfalle fullstendig (Strømskag, 2020,

s. 73). En utvikling av forskningsspørsmålet fører gjerne til nye forskningsspørsmål og/eller utvikling av lærerens praksis (Barquero & Bosch, 2015, s. 251).

4. Forberedende analyse for differensialregning

Den forberedende analysen består av de tre delene epistemologisk analyse, didaktisk analyse og institusjonell analyse. Hovedvekten vil ligge på de to første delene. I den epistemologiske analysen presenterer jeg målkunnskapens historie fra den ble oppdaget, målkunnskapens byggesteiner, dens bruksområder og legitimitet i skolen. I den didaktiske analysen gir jeg et kort historisk innblikk i differensialregningens plass i matematikkpensumet på videregående skole før jeg presenterer en alternativ modell for undervisning av temaet. I den institusjonelle analysen ser jeg nærmere på antatte forkunnskaper og differensialregningens plass i læreplanen i R1.

4.1 Epistemologisk analyse av differensialregning

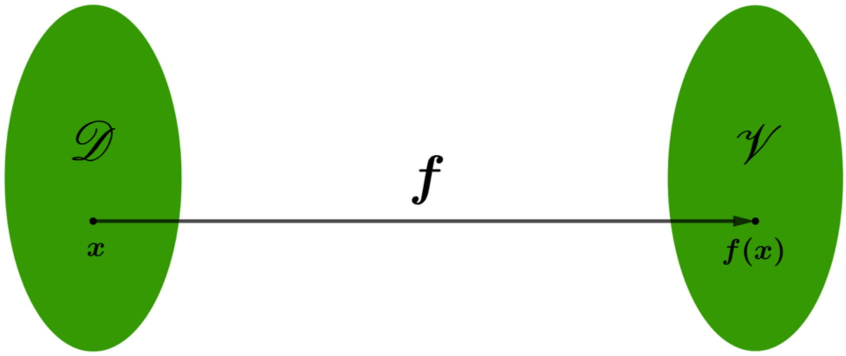
4.1.1 Differensialregningens natur

Differensialregning er nært knytta til flere begreper i matematikken, deriblant funksjoner, kontinuitet, grenseverdier, deriverbarhet og integralregning. I tillegg har differensialregning en rekke regneregler knytta til seg. Helt i kjernen av differensialregning ligger begrepet om grenseverdier, noe som skiller denne disiplinen fra andre matematiske felt som algebra, geometri og trigonometri.

4.1.1.1 Funksjoner

Når en størrelse y avhenger av en størrelse x, sier vi at y er en funksjon av x. For å understreke dette, bruker vi notasjonen $y = f(x)$, der symbolet f representerer funksjonen. Siden y avhenger av x, kaller vi y for *den avhengige variabelen* og x for *den uavhengige variabelen*. Man kan se på f som en slags maskin som tar inn x og gir ut y basert på en gitt formel eller regel. Vi kaller derfor x for *input* og y for *output*. x representerer et *element* av det vi kaller en *mengde*. I denne oppgaven vil denne mengden bestå av tallverdier i et gitt intervall. Den mengden av elementer som funksjonen f tar inn, kalles *definisjonsmengden* $\mathcal{D}$ til f. Tilsvarende kalles den mengden av elementer som f gir ut for *verdimengden* $\mathcal{V}$ til f.

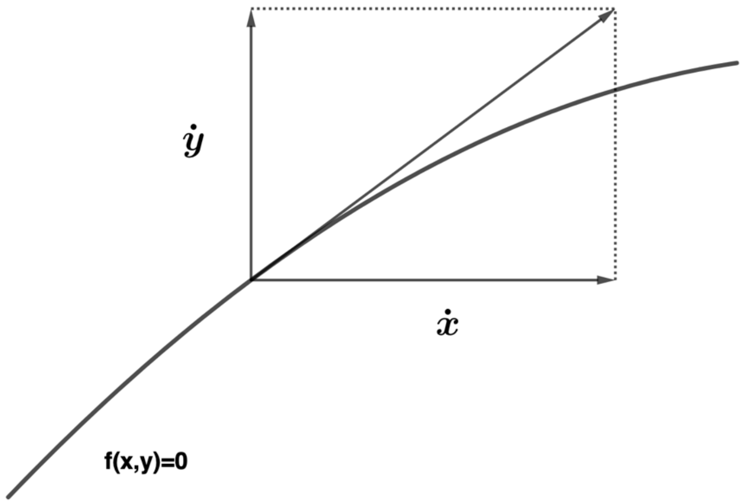
Mer presist kan vi da tenke på en *funksjon* $f : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ som en tilordning som til hvert element $x \in \mathcal{D}$ gir oss ett (og bare ett!) element $f(x) \in \mathcal{V}$
(Lindstrøm, 2006, s. 211).



Figur 2: Framstilling av en funksjon f med definisjonsmengde $\mathcal{D}$ og verdimengde $\mathcal{V}$

4.1.1.2 Newton og analyse av bevegelse

Sir Isaac Newton studerte kurven til en funksjon $f(x, y) = 0$ i et koordinatsystem. Kurven beskrev bevegelsen til et punkt (x, y) i koordinatsystemet. Koordinatene x og y var tidsavhengige størrelser, og Newton kalte dem for *fluenter*. Newton analyserte punktets bevegelse som en komposisjon av en horisontal og en vertikal bevegelse. Hastighetsvektoren til den horisontale bevegelsen hadde lengde $\dot{x}$, og den vertikale hastighetsvektoren hadde lengde $\dot{y}$. Disse kalte Newton for *fluksjoner*. Den da velkjente parallellogramloven for summen av hastighetsvektorer gav diagonalen i parallellogrammet som summen av den horisontale og den vertikale vektoren. Dette var tangenten til kurven i punktet. Tangentens stigningstall ble dermed $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ (Edwards, 1979, s. 191–192). $\dot{x}$ er den deriverte av x med hensyn på tiden t, og at $\dot{y}$ er den deriverte av y med hensyn på tiden t.



Figur 3: Illustrasjon av Newtons kurve og vektorer (hentet fra Edwards, 1979, s. 192)

4.1.1.3 Grenseverdier

Grenseverdibegrepet er en meget sentral ide i analysen. Både differensialregning og integralregning baserer seg på denne ideen, som handler om å kontrollere input-verdien x til en funksjon f slik at funksjonsverdien $f(x)$ vil være i et spesifikt intervall. Det var ifølge Grabiner (1978) den franske matematikeren Augustin-Louis Cauchy som først gav en presis definisjon av den deriverte basert på grenseverdier. Han gav først en verbal definisjon av «grense» i *Cours d'analyse* i 1821: «When the successively attributed values of one variable indefinitely approach a fixed value, finishing by differing from that fixed value by as little as desired, that fixed value is called the *limit* of all the others» (Cauchy, 1821, sitert i Grabiner, 1978, s. 382). I samme skriv presiserte han mer formelt hva han mente med grenser ved å tolke utsagnet «grensen, når x går mot uendelig, av $f(x+1)-f(x)$, er et endelig tall k» som følger:

> Designate by ε a number as small as desired. Since the increasing values of x will make the difference $f(x+1)-f(x)$ converge, to the limit k, we can give to h a value sufficiently large so that, x being equal to or greater than h, the difference in question is included between $k-\varepsilon$ and $k+\varepsilon$. (Cauchy, 1821, sitert i Grabiner, 1978, s. 382).

To år senere kom hans definisjon av den deriverte basert på grenseverdier i *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique, sur le calcul infinitésimal*, som jeg siterer fra:

When a function $y = f(x)$ remains continuous between two given limits of the variable x, and when one assigns to such a variable a value enclosed between the two limits at issue, then an infinitely small increment assigned to the variable produces an infinitely small increment in the function itself. Consequently, if one puts $\Delta x = i$, the two terms of *the ratio of differences*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df(x+i) - f(x)}{i}$$

will be infinitely small quantities. But though these two terms will approach the limit zero indefinitely and simultaneously, the ratio itself can converge towards another limit, be it positive or be it negative. (Cauchy, 1823, s. 9)[1]

Cauchy skriver altså at selv om både $df(x+i) - f(x)$ og i vil være uendelig små størrelser som går mot 0, så vil ikke nødvendigvis forholdet mellom dem gå mot 0. Det vil kunne konvergere mot en positive eller negativ grenseverdi. Videre skriver han at denne grenseverdien vil ta en bestemt og endelig verdi for hver x hvor denne grenseverdien eksisterer, og at grenseverdien varierer med x. Som eksempel bruker han funksjonen $f(x) = x^m$, der m er et heltall, og får at forholdet mellom differansene er

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-1}i + \cdots + i^{m-1}$$

som vil ha mx^{m-1} som grenseverdi når vi neglisjerer ledd med i. Altså er grenseverdien en ny funksjon av x. Cauchy konkluderer:

It will be the same in general; only the form of the new function which serves as the limit of the ratio $[f(x+i) - f(x)]/i$ will depend on the form of the proposed function $y = f(x)$. In order to indicate this dependence, one gives the new function the name of *derived function*, and designates it with the aid of an accent by the notation, y' or $f'(x)$. (Cauchy, 1823, s. 9)

I 4.1.1.6 presenterer jeg definisjonen av den deriverte med notasjonen som er vanlig i norske lærebøker og noen viktige begreper knytta til derivasjon.

---

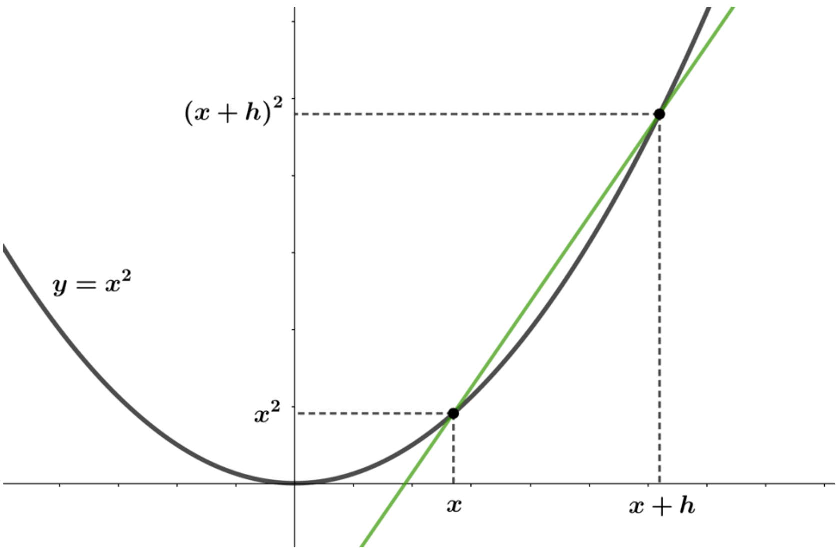
[1] Sitatene fra denne kilden er oversatt til engelsk ved hjelp av DeepL Translator.

På midten av 1900-tallet foreslo de to matematikerne Emil Artin og Serge Lang et nytt konsept for forståelse og undervisning av grenseverdier. Dette konseptet har blitt kalt *det intuitive grenseverdbegrepet* («intuitive limit concept»). Istedenfor å bruke den formelle definisjonen av grenseverdier, blir det her vektlagt formuleringer som «kommer nærmere og nærmere.» Man regner ut den deriverte av polynomfunksjoner gjennom algebraiske transformasjoner uten å bruke den formelle definisjon av grenseverdier (Weigand, 2014, s. 606). Weigand (2014) refererer til et eksempel med en enkel polynomfunksjon Lang bruker for å illustrere konseptet, noe jeg også vil gjøre.

Lang (1986) ser på polynomfunksjonen $y = x^2$. Et punkt på grafen med x-koordinaten x vil ha y-koordinaten x^2. La $x + h$, der $h \neq 0$, være x-koordinaten til et annet punkt på grafen. Den tilhørende y-koordinaten blir da $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$. Nå finner vi stigningstallet til linja som går gjennom disse to punktene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x + h - x} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

Så kommer den typiske formuleringa: «As h approaches 0, $2x + h$ approaches $2x$» (Lang, 1986, s. 62). Denne utledningen viser at stigningstallet til kurven i et vilkårlig punkt (x, y) er lik $2x$.



Figur 4: En sekantlinje gjennom punktene (x, x^2) og $(x + h, (x+h)^2)$ på grafen $y = x^2$

4.1.1.4 Kontinuitet

Spørsmålet om en funksjons kontinuitet er relatert til dens grenseverdier. En funksjons definisjonsmengde består potensielt av *indre punkter* og *endepunkter*. Et punkt som tilhører et åpent intervall () som er inneholdt i definisjonsmengden, er et indre punkt. Punkter som ikke er indre punkter, er venstre eller høyre endepunkter. For eksempel vil en funksjon med definisjonsmengde $[1,10)$ ha det venstre endepunktet 1 og indre punkter i det åpne intervallet $(1,10)$. Definisjonen av kontinuitet på et intervall og en kontinuerlig funksjon bygger på definisjonen av kontinuitet i indre punkter og endepunkter.

En funksjon f er *kontinuerlig* i et indre punkt c av sin definisjonsmengde dersom

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Hvis $\lim_{x \to c} f(x)$ ikke eksisterer eller at den eksisterer, men er ulik $f(c)$, så sier vi at f er *diskontinuerlig* i c.

La c være et *venstre endepunkt* i definisjonsmengden til f. Vi sier at f er kontinuerlig i c hvis f er høyre-kontinuerlig her, det vil si at $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$.
La c være et *høyre endepunkt* i definisjonsmengden til f. Vi sier at f er kontinuerlig i c hvis f er venstre-kontinuerlig her, det vil si at $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$.

Vi sier at en funksjon f er *kontinuerlig på intervallet I* hvis den er kontinuerlig i hvert punkt som er inneholdt i *I*. Vi sier at f er en *kontinuerlig funksjon* hvis f er kontinuerlig i alle punktene i sin definisjonsmengde (Adams & Essex, 2014, s. 79–81).

En uformell måte å beskrive kontinuitet på er å si at funksjonen er kontinuerlig dersom du kan tegne dens graf uten å løfte pennen fra papiret. Denne formuleringa kan gi en god intuitiv forståelse av kontinuitet selv om den mangler matematisk presisjon.

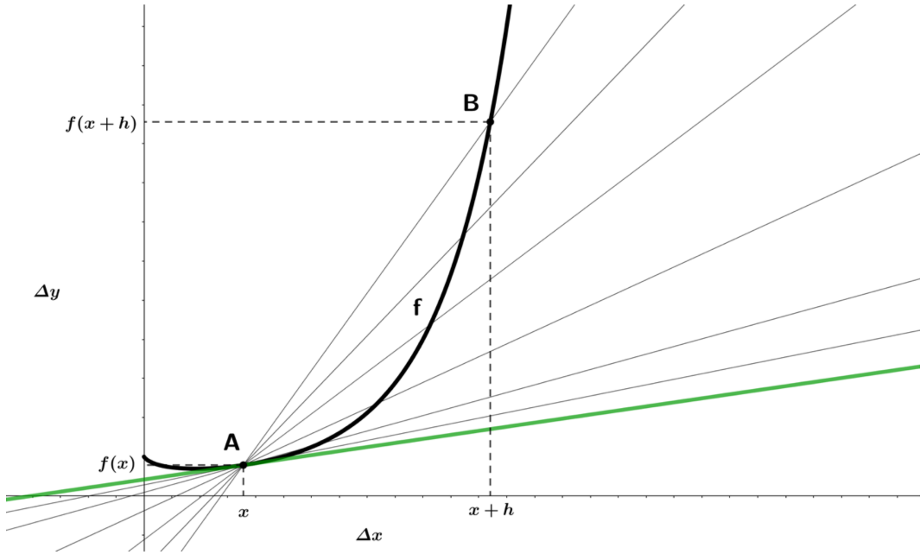
4.1.1.5 Tangent- og sekantlinjer

Av Figur 4 ser vi at tangent- og sekantlinjer er et nyttig, grafisk hjelpemiddel for å forstå grenseverdier. Hvis en ikke-lineær kurve beskriver utviklingen av en forekomst, så vil en kunne finne den gjennomsnittlige endringsraten over et intervall ved $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. En linje trukket mellom disse to punktene på kurven vil danne en sekantlinje for kurven med stigningstall gitt av Newtonkvotienten. Men dersom vi lar intervallet mellom disse to punktene bli mindre og mindre, ja, gå mot null, vil disse to punktene bli liggende uendelig nærme hverandre. Det er i dette grensetilfellet at sekantlinjen går over til å bli en tangentlinje til kurven. Stigningstallet til tangenten i dette punktet forteller oss endringsraten til funksjonen nøyaktig her. Den ikke-vertikale tangenten til grafen til f i punktet P defineres formelt på følgende måte:

Anta at funksjonen f er kontinuerlig i $x = x_0$ og at $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m$ eksisterer. Da er *tangenten* til grafen til $y = f(x)$ i P den rette linja som har stigningstall m og som går gjennom punktet $P = (x_0, f(x_0))$. En ligning for tangenten er $y = m(x - x_0) + y_0$ (Adams & Essex, 2014, s. 97).

4.1.1.6 Definisjonen av den deriverte

La oss se på en funksjon f der vi ønsker å finne tangenten i et gitt punkt A.



Figur 5: Sekanten gjennom A og B nærmer seg tangenten i A etter hvert som B nærmer seg A. Den grønne linjen er den ekte tangenten i A

I første omgang ser vi på sekanten gjennom punktene $A(x, f(x))$ og $B(x + h, f(x + h))$. Stigningstallet til sekanten finner man som endringen i y-verdi delt på endringen i x-verdi med hensyn på punktene A og B. Vi ser denne er lik

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dette uttrykket kalles *Newtonkvotienten* eller *differansekvotienten* (Adams & Essex, 2014, s. 97). Vårt neste trekk er å la B nærme seg A ved å la h gå mot 0. Hvis vi lar L være den linja gjennom A med stigningstall lik grenseverdien til stigningstallene til sekantlinjene AB når B nærmer seg A langs grafen til f, så er L tangent til f i A (Adams & Essex, 2014, s. 96). Se Figur 5. Ved å evaluere Newtonkvotienten i grensetilfellet der h nærmer seg 0, definerer vi *den deriverte* $f'(x)$ *av* f *i* x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(Adams & Essex, 2014, s. 100).

f' er selv en funksjon av x. Vi sier at f er *deriverbar* i et punkt x_0 dersom $f'(x_0)$ eksisterer som en endelig tallverdi ($f'(x_0) \neq \pm\infty$). Definisjonsmengden til f' er den mengden av x-verdier i definisjonsmengden til f hvor grafen til f har en ikke-vertikal tangent. Verdien $f'(x_0)$ til f' i punktet x_0 er stigningstallet til f i x_0, ekvivalent med stigningstallet til tangenten til f i x_0. Dermed er ligningen til tangenten til f gjennom punktet $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

x-verdier i definisjonsmengden $\mathcal{D}(f)$ til f som ikke er endepunkter og hvor f ikke er deriverbar kalles *singulære punkter* til f (Adams & Essex, 2014, s. 98–101).

4.1.1.7 Leibniz´ notasjon og differensialer

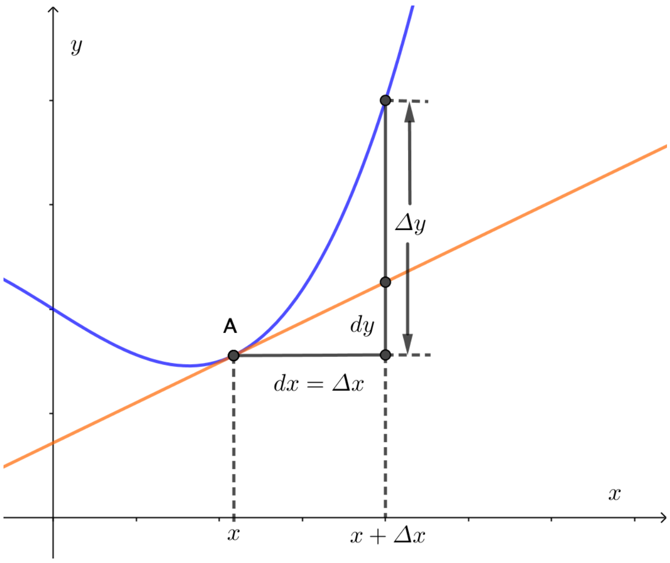
Det finnes andre måter å uttrykke den deriverte på. Gottfried Wilhelm von Leibniz brukte notasjoner som viste seg å være svært nyttige, og som vi fortsatt bruker. Det er notasjonene $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d}{dx}f(x)$. Vi har at

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Vi fant Newtonkvotienten med utgangspunkt i $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, og den deriverte ved å ta grenseverdien når $h = \Delta x \to 0$, så denne metoden er prinsipielt den samme. Spesielt i integralregning er det hensiktsmessig å anse dx som en uavhengig variabel og dy som en avhengig variabel som en funksjon av x og dx. dx kaller vi *differensialet til x* og dy *differensialet til y*. Sistnevnte er definert som

$$dy = \frac{dy}{dx}dx = f'(x)dx$$

(Adams & Essex, 2014, s. 105–106).



Figur 6: Tangenten beskriver kvotienten av differensialene

4.1.1.8 Analysens fundamentalteorem

De to grunnleggende problemstillingene i analysen, nemlig å finne tangenten til en gitt kurve og å finne arealet som er bundet av en kurve, er motsatte prosesser. Denne relasjonen kalles analysens fundamentalteorem, og kan formuleres som følger:

Anta at funksjonen f er kontinuerlig på et intervall I som inneholder punktet a. Del 1: La funksjonen F være definert på I ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Da er F deriverbar på I, og $F'(x) = f(x)$ der. F er en antiderivert av f på I:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Del 2: La $G(x)$ være hvilken som helst antideriverte av $f(x)$ på I, altså at $G'(x) = f(x)$ på I. Da har vi for enhver b i I at

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

(Adams & Essex, 2014, s. 311–312).

4.1.2 Differensialregningens opprinnelse

Analysen ble utviklet først og fremst for å løse de store naturvitenskapelige spørsmålene man diskuterte på 1600-tallet. Det var ifølge Kline (1972) fire hovedproblemer.

4.1.2.1 Fire store spørsmål

Det første problemet handla om strekning, hastighet og akselerasjon: finn momentanhastighet og -akselerasjon til et legeme når formelen for tilbakelagt strekning som en funksjon av tid er gitt. En kan også spørre motsatt: finn hastigheten og tilbakelagt strekning til et legeme når du kjenner formelen for akselerasjon som en funksjon av tid. Det var kjent at legemer i bevegelse har en hastighet i ethvert øyeblikk, men siden denne varierte fra det ene øyeblikket til det neste, kunne man ikke bruke formelen for gjennomsnittlig hastighet $\bar{v} = \frac{s}{t}$ (Kline, 1972, s. 342).

Problemet med å finne tangenten til en kurve var et annet hovedspørsmål. Dette var ikke bare et problem i geometrien. Å finne tangenten til en kurve var av praktisk interesse i både optikken og i studien av legemers bevegelse (Kline, 1972, s. 342–343). En rekke vitenskapsmenn utviklet sine metoder for å finne tangenten til en kurve. Gilles Persone de Roberval (1602–1675) baserte sin metode på at et prosjektil skutt ut fra en kanon har en horisontal og en vertikal hastighet, uttrykt gjennom to vektorer fra et punkt i dets bane. Summen av disse dannet diagonalen i et rektangel, og Roberval anså denne som tangenten til prosjektilets bane i dette punktet. Denne metoden var nyttig fordi den knyttet geometrien til dynamikken, to områder som før Galileo hadde blitt sett på som atskilte. På den andre siden var den basert på fysiske fenomener, og dermed ubrukelig for kurver der bevegelse ikke var innblandet (Kline, 1972, s. 342–344).

Det tredje problemet var å finne maksimums- og minimumsverdien til en funksjon. Å kunne regne ut disse verdiene kunne brukes til å finne utskytningsvinkelen som ville gi en kanon størst rekkevidde, eller til å finne planeters største og minste avstand fra sola (Kline, 1972, s. 343). I den tidlige fasen av utforskningen av dette problemet var Johannes Kepler interessert i formen på vinfat. Han viste at av alle parallellepipeder (tredimensjonal geometrisk figur av seks sideflater hvor sideflatene er parvis parallelle) med kvadratisk grunnflate, innskrevet i en kule, er det kuben som har størst volum. Det var gjennom å endre dimensjonene til parallellepipeden han kom fram til dette. En viktig observasjon var at da han nærma seg maksimumsvolumet, så ble volumendringen for en gitt dimensjonsendring mindre og mindre (Kline, 1972, s. 347).

Det fjerde problemet var å finne lengden av kurver, arealet avgrenset av kurver, volumet avgrenset av overflater, legemers tyngdepunkt og tyngdekraften som for eksempel planeter utøver på et annet legeme (Kline, 1972, s. 343). Kepler betrakta arealer og volumer som summen av uendelig mange infinitesimale elementer. For eksempel så han en sirkel som summen av et uendelig antall trekanter med et hjørne i sentrum av sirkelen, og noen ganger andre arealer som summen av linjer (Kline, 1972, s. 348). Galileo argumenterte også for at arealet under en graf kunne finnes som en sum av linjesegmenter. En elev av Galileo, Bonaventura Cavalieri (1598–1647), hadde en teori som bygget på Galileos. Han mente et uendelig antall like lange og parallelle linjesegmenter utgjorde et areal, og at et uendelig antall parallelle plan utgjorde et volum. Han kalte disse elementene som utgjorde arealer og volumer for *indivisibles* («de udelelige») (Kline, 1972, s. 349). Hans metode med de udelelige ble kraftig kritisert av sjokkerte matematikere som bygde forståelsen på en streng logikk (Kline, 1972, s. 383).

Allerede før Newton og Leibniz stod fram hadde man altså mye kunnskap om analyse. Til og med hadde man bevist og gjort nytte av sammenhenger mellom problemene, selv om de i utgangspunktet ble sett på som atskilte (Kline, 1972, s. 355). Mange matematikere bidro i dette utforskningsarbeidet som vi kan si var en tidlig fase i utviklingen av analysen, og som la grunnlaget for oppdagelsen av det svært betydningsfulle fundamentalteoremet i analysen. Sir Isaac Newton (1642–1727) og Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) kom begge fram til dette generelle resultatet som viste sammenhengen mellom de fire store problemene presentert her. Deres veier fram dit var dog forskjellige. Newtons tilnærming var gjennom hastighet og distanse, mens Leibniz brukte differenser og summer (Katz, 2009, s. 574). Etter deres bidrag var analysen ikke lenger en utvidelse av gresk geometri, men en uavhengig disiplin med stor betydning innenfor mange felt (Kline, 1972, s. 378).

4.1.2.2 En presentasjon av Newtons innfallsvinkel til differensialregning

A Treatise on the Methods of Series and Fluxions fra 1671 sirkulerte i det engelske matematiske fagmiljøet i England, og er et verk som presenterer sir Isaac Newtons kalkulus (Katz, 2009, s. 544). For ham hadde de grunnleggende ideene ved kalkulus å gjøre med bevegelse. Variablene måtte sees på som størrelser (strekninger) som varierte med tiden. Han kalte en slik tidsavhengig størrelse x for en *fluent*. Han definerte så begrepet *fluksjon* som den *hastigheten* fluenten x økte med, og betegnet den med $\dot{x}$ (Holme, 2004, s. 303). Ifølge Edwards (1979) var det ikke før på 1690-tallet Newton begynte å bruke denne notasjonen. I starten brukte han andre bokstaver som p og q for $\dot{x}$ og $\dot{y}$ (Edwards, 1979, s. 192). Newton definerte ikke hastighet ytterligere da han anså fenomenet kontinuerlig varierende bevegelse som totalt intuitiv. I sitt arbeid med fluksjoner regnet ikke Newton ut den deriverte, for han starta ikke med en funksjon. Men han regnet ut det vi i dag kaller differensialligninger gitt av kurven bestemt av en ligning. Gitt $f(x, y) = 0$ med x og y funksjoner av t, fant Newton det vi i dag skriver som

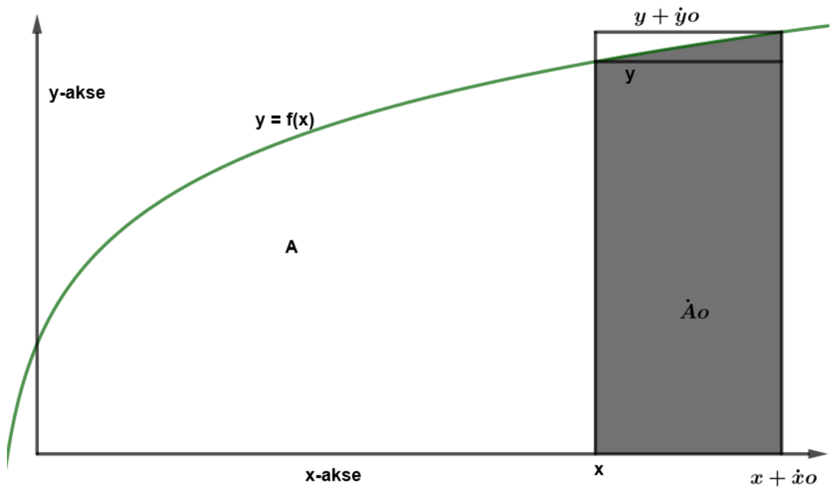
$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

Newton definerte *momentet til en fluksjon* som økningen i en «uendelig liten» tidsperiode. Altså, økningen til x i en infinitesimal tidsperiode o er produktet av hastigheten til x og o, betegnet som $\dot{x}o$. Det følger så at etter dette tidsintervallet vil x bli $x + \dot{x}o$ og y vil bli $y + \dot{y}o$. Eksempelet Newton brukte, så han at var generaliserbart (Katz, 2009, s. 550–551).

Problem 2 var å finne distansen når hastigheten er kjent. Newton fant ut at dette er ekvivalent med å finne arealet under en kurve gitt av en bestemt ligning. Dersom denne ligningen var på formen

$$y = a_1x^{n_1} + a_2x^{n_2} + \cdots + a_rx^{n_r}$$

så Newton hvordan uttrykket kunne utvides til uendelige summer og potensrekker (Holme, 2004, s. 305).



Figur 7: Newtons utledning av analysens fundamentalteorem (hentet fra Holme, 2004, s. 305)

Kurven til y (i figuren over) forstod Newton som frembrakt av fluentene x og y. Vi kan betegne arealet under kurven y fra a til x med $A(x) = A$. Vi ser nå for oss at det går en tid o. Da er x økt til $x + \dot{x}o$, y er økt til $y + \dot{y}o$ og A er økt til $A + \dot{A}o$.

Arealet av det skraverte området er lik $\dot{A}o$. Det lille rektanglet er avgrensa av linja y, mens det store rektanglet er avgrensa av linja $y + \dot{y}o$. Vi ser på figuren at arealet av det nederste rektanglet er mindre enn $\dot{A}o$, mens det store rektanglet er større enn $\dot{A}o$. Slik vil det nødvendigvis være så lenge en gjør x så liten at kurven ikke stikker ut av boksen, argumenterte man. Dette argumentet blir imidlertid gyldig først ved bruk av det moderne grensebegrepet og kontinuitetsbegrepet. Med dette resonnementet får man ulikheten

$$y(x + \dot{x}o - x) \leq \dot{A}o \leq (y + \dot{y}o)(x + \dot{x}o - x)$$

som blir

$$y\dot{x}o \leq \dot{A}o \leq y\dot{x}o + \dot{y}\dot{x}o^2$$

der o er større enn null, men uendelig liten. Det gir

$$y\dot{x} \leq \dot{A} \leq y\dot{x} + \dot{y}\dot{x}o$$

som forteller at $\dot{A}$ og $y\dot{x}$ avviker fra hverandre med en uendelig liten størrelse. Denne neglisjerer vi og får at $\dot{A} = y\dot{x}$. Med dette hadde Newton oppdaget analysens fundamentalteorem (Holme, 2004, s. 305–306). Videre fant Newton maksimum og minimum ved å sette riktig fluksjon lik 0, fordi «when a quantity is greatest or least, at that moment its flow neither increases or decreases; for if it increases, that proves that it was less and will at once be greater than it now is, and conversely so if it decreases» (Katz, 2009, s. 552). Newton gav imidlertid ingen forklaring på om det var minimum eller maksimum han hadde funnet (Katz, 2009, s. 552).

Newton skal ha hatt en voldsom frykt for kritikk, og det ser ut til å være årsaken for at han drøyde såpass lenge med å publisere sine resultater. Katz skriver at Newtons analyse hadde relativt liten innflytelse fordi bare deler av det ble publisert, og det lenge etter at det ble skrevet (Katz, 2009, s. 565). *A Treatise on the Methods of Series and Fluxions*, for eksempel, lot Newton være med å publisere, og det var først i 1736 at det latinske verket kom ut i en engelsk versjon (Holme, 2004, s. 303).

4.1.2.3 En presentasjon av Leibniz´ innfallsvinkel til differensialregning

Gottfried Wilhelm von Leibniz bygde sin forståelse av kalkulus på det motsatte forholdet mellom summer og differanser i tallfølger. Ved å gjøre elementene i denne følgen til infinitesimaler og betrakte summen av uendelig mange slike infinitesimaler, utvikla han den notasjonen som skulle vise seg å være mest praktisk. Vi bruker fortsatt dx, dy, $\frac{dx}{dy}$, d^n og $\int$ i differensial- og integralregning.

Leibniz noterte seg at «summen av differensene mellom påfølgende tall, uansett hvor store de er, er lik differensen mellom rekkens første og siste tall.» (Katz, 2009, s. 565 – 566). Dette kan illustreres i tallskjemaer hvor differensen mellom to nabotall i en kolonne gir tallene i den forrige kolonnen. Det aritmetiske trianglet, også kalt Pascals triangel, er et eksempel på et slikt tallskjema som Leibniz studerte (Katz, 2009, s. 566):

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Figur 8: Det aritmetiske trianglet (hentet fra Holme, 2004, s. 315)

Videre studerte Leibniz et triangel med lignende egenskaper, men med stambrøker istedenfor heltall. Han kalte dette tallskjemaet for Det harmoniske trianglet:

$\frac{1}{1}$						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$

Figur 9: Det harmoniske trianglet (hentet fra Katz, 2009, s. 566)

Kolonnene i det harmoniske trianglet dannes når man dividerer elementene i den første kolonnen med de korresponderende elementene i kolonnene i Pascals triangel. For eksempel dannes elementene i kolonne 4 slik: $\frac{1}{1}$ / 4 = $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ / 10 = $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{3}$ / 20 = $\frac{1}{60}$ og $\frac{1}{4}$ / 35 = $\frac{1}{140}$. Mønsteret gis ved at differensen mellom to påfølgende elementer i en kolonne er lik elementet som står i kolonnen til høyre. For eksempel er $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ og $\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$. Dermed kan man finne summen av elementene i en kolonne ved å ta differensen av det første og siste elementet i den foregående kolonnen. Hvis vi for eksempel ser på kolonne 1 og 2, så har vi at

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{6}.$

Nå observerte Leibniz at denne regelen kunne utvides til uendelige summer fordi jo flere ledd man tok med, jo mindre ble det siste elementet i den foregående kolonnen (Katz, 2009, s. 567).

Man kan generalisere Leibniz' teknikk ved å anta en tallfølge $y=\{y_i\}, i=0,1,2,\ldots,n$. Fra denne kan man danne følgen av differenser $\{(\delta y)_i\}$ der $(\delta y)_i=y_i-y_{i-1}$ slik at

$$\sum_i (\delta y)_i = y_n - y_0.$$

Videre kan man danne følgen av summer $\{(\sum y)_i\}$ der $(\sum y)_i = y_0+\cdots+y_i$, slik at

$$\delta \sum y = y.$$

Leibniz anvendte dette på en funksjon $y = f(x)$ på intervallet $[a, b]$. Han delte intervallet opp i n like små delintervaller med $x_0=a<x_1 \ldots < x_{n-1}<x_n=b$. Funksjonsverdiene er $y_i=f(x_i)$. Vi noterer differensene $(\delta x)_i = x_{i+1}-x_i$ med Δx. Leibniz skreiv dx for Δx da Δx ble gjort uendelig liten. På samme måte betegna han δy med dy. Nå så Leibniz på kurven gitt ved funksjonen som en brukket linje gjennom uendelig mange punkter. Uendelig mange uendelig tynne arealstriper $\{(\sum y)_i\}$ med tykkelse dx utgjorde arealet under kurven. Slike uendelig små størrelser ble kalt *infinitesimale* størrelser. Leibniz gav dette følgende notasjon:

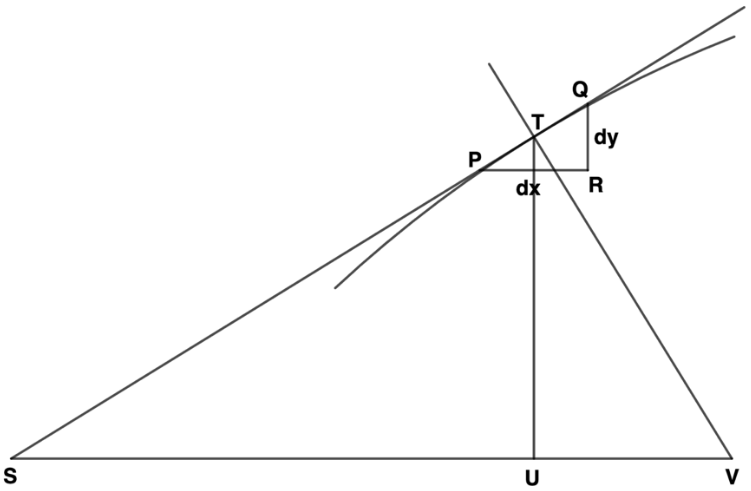
$$\int y\,dx$$

Når han så på arealet bestående av uendelig mange infinitesimale striper, ble notasjonen $\sum$ bytta ut med $\int$ og δ med d. $\delta \sum y = y$ kunne omskrives til

$$d\int y dx = dy$$

(Holme, 2004, s. 317).

Generelt betrakta Leibniz dx som differansen i x-verdier mellom to punkter som ligger uendelig nært hverandre, og en tangent som linjen gjennom slike punkter. dx og dy var størrelser mindre enn noen annen endelig størrelse, men ikke lik null. De ble noen ganger ansett som «begynnende» eller «forsvinnende» størrelser i motsetning til endelige, «faste» størrelser. Han sa også at «dx is to x as a point to the earth or as the radius of the earth to that of the heavens» (Kline, 1972, s. 385).



Figur 10: Leibniz´ karakteristiske trekant (hentet fra Kline, 1972, s. 375)

Den karakteristiske trekanten ser Leibniz på som uendelig liten, bestående av dy, dx og korden PQ, som Leibniz også anser som kurven mellom P og Q og som en del av tangenten i T. Til tross for at den er uten størrelse, er den formlik trekanten STU. Dermed er $\frac{dy}{dx} = TU/SU$, og forholdet mellom de to infinitesimale størrelsene dy og dx er dermed et endelig, bestemt tall (Kline, 1972, s. 375).

Bernard Nieuwentijdt (1654–1718) protesterte mot begrepene uendelig og infinitesimaler på slutten av 1600-tallet. Han spurte hvordan uendelig små størrelser skilte seg fra null og hvordan en sum av infinitesimaler kunne bli en endelig størrelse. Leibniz´ svar var at begrepene ble brukt som størrelser man kunne gjøre så små eller store man ville for å gjøre feilestimatet mindre enn et vilkårlig tall. Samtidig sa han at han ikke trodde det eksisterte størrelser som virkelig var uendelig små eller store (Kline, 1972, s. 385).

4.1.3 Differensialregningens funksjon

I hverdagen er vi stadig i kontakt med fenomener som har med differensialregning å gjøre. Er du sent ute til bussen, setter du opp farta fordi du vet det vil få deg raskere fram til bussholdeplassen. De siste ukene før seriestart kan det hende fotballtreneren ser progresjon på trening, men ikke nok til å kunne hamle opp med fjorårets seriemester: «Det går i riktig retning, men ikke så raskt som jeg hadde håpa på!» På lignende vis kan politikeren forsvare seg med den andrederiverte: «Arbeidsledigheten stiger, ja, men ikke like raskt som under forrige regjering!» I innspurten av et stort prosjekt kan en tankefull student sitte og fundere over hvor lang arbeidsdagen bør være for å få størst mulig utbytte av den, hvis man antar at konsentrasjonen faller i takt med mangelen på avbrekk og hvile. Sistnevnte er det vi kaller et optimeringsproblem.

Differensialregning har likevel en nytteverdi langt utover slike tankerekker, og er av uvurderlig betydning for dagens samfunn. Der en snakker om en endring, vekst eller nedgang, så er den deriverte i kjernen av fenomenet. Differensialregning er derfor sentralt innenfor disipliner og samfunnsområder som fysikk, astronomi, meteorologi, kjemi, biologi, medisin, økonomi, samfunnsutvikling, analyse, utdanning, sport, produksjon, kjøp og salg, byggeprosjekter og ulike typer forskning, for å nevne noe. Ofte er det snakk om en endring *over tid*, og begrepet *vekstfart* støtter opp om denne oppfattelsen siden vi definerer fart som strekning delt på tid. Eksempler på endringer som skjer med hensyn på tid er en bils tilbakelagte strekning per sekund, antall covid-smittede per døgn, en plantes høyde per uke, inflasjon per måned, befolkningstall per år eller forekomsten av uran i et område per milliarder av år. Alle endringer skjer likevel ikke med hensyn på tid. For eksempel vil arealet av en firkant som innrammes av et tau med en gitt lengde være en funksjon av lengden på sidene av firkanten. Det samme gjelder volumet av en firkanta boks hvor overflaten til materialet som boksen skal lages av, er gitt. Massetetthet er en funksjon av et stoffs masse og volum, og gravitasjonskraft av legemers masse og innbyrdes avstand. Derfor er begrepet *endringsrate* (engelsk: *rate of change*) mer treffende, og jeg vil bruke endringsrate framfor vekstfart i denne oppgaven selv om læreplanen bruker vekstfart.

Her gir jeg et eksempel på hva differensialregning kan brukes til. Newton fant opp en metode for å finne tilnærmede løsninger på differensialligninger som ikke kan løses algebraisk. Dette er en iterativ metode innen numerisk analyse som i dag kalles *Newtons metode* eller *Newton-Raphsons metode*. La oss starte med den homogene polynomligningen

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i = 0.$$

Vi lar x_* være en ekte løsning av ligningen, og x_n være et første gjett for å finne x_*. Vi erstatter x_* med $x_n + p$ i polynomligningen og får

$$0 = \sum_{i=0}^{k} a_i x_*^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i (x_n + p)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i \left(x_n^i + i x_n^{i-1} p + \cdots \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i x_n^i + p \sum_{i=0}^{k} i a_i x_n^{i-1} + \cdots$$

$$= f(x_n) + p f'(x_n) + \cdots$$

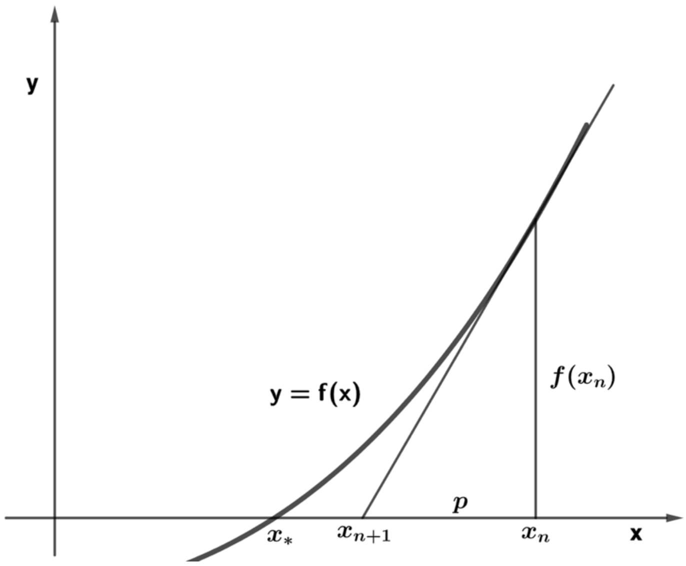
der prikkene representerer høyere potenser av p. Neglisjerer vi disse, får vi

$$p \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

og

$$x_* \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

som er den $(n + 1)$te approksimasjonen av x_* ved bruk av Newtons metode. Newton nevnte aldri at $f'(x_n)$ faktisk er stigningstallet til hypotenusen i den rettvinklede trekanten i Figur 11 (Edwards, 1979, s. 201–202).



Figur 11: Newtons metode (hentet fra Edwards, 1979, s. 203)

4.1.4 Differensialregningens legitimitet i skolen

Vi finner elementer av differensialregning i læreplanen til mange av matematikkfagene. Funksjoner er inkludert i læreplanen fra 8. trinn, og etter 10. trinn skal elevene kunne regne ut stigningstallet til en lineær funksjon og forklare begrepet gjennomsnittsfart (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 12 & 14). «Den deriverte» eller «derivasjon» er nevnt eksplisitt i læreplanen til 1T, S1, S2, R1 og R2 (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 5; Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 5 & 7; Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 5 & 6). I R1-pensumet er temaet spesielt dominerende. Etter R1 skal eleven blant annet kunne «forstå begrepene vekstfart, grenseverdi, derivasjon og kontinuitet, og bruke disse for å løse praktiske problemer» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 5).

Hvorfor skal differensialregning undervises i skolen? Som nevnt i Seksjon 4.1.3 bruker man differensialregning til å regne på svært mange fenomener innenfor en rekke ulike felt. Veldig mye av det som har med forandringer å gjøre, kan representeres av en deriverbar funksjon, enten nøyaktig eller som en tilnærming til virkeligheten. Slik har differensialregningen en stor nytteverdi i samfunnet. I Opplæringslovens formålsparagraf i Overordnet del av læreplanen står det at «Elevane og lærlingane skal utvikle kunnskap (...) for å kunne delta i arbeid og fellesskap i samfunnet» (Utdanningsdirektoratet, 2017, s. 3). Kunnskap om differensialregning er en forutsetning for å kunne arbeide i en rekke yrker, og dermed er undervisning av temaet med på å oppfylle formålet med opplæringa. Av samme grunn inngår differensialregning naturligvis i mange studieretninger på universitetsnivå. Innledningsvis i læreplanen i matematikk for realfag, står om å gi rom for at elevene får «oppleve at faget er relevant» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). Det kan skje dersom læreren lykkes i å koble kunnskapen til dens relevans i samfunnet, noe læreren har en utmerket mulighet til å gjøre her. I tillegg til dette vil kunnskap om differensialregning kunne bidra indirekte til at også andre målsettinger i den overordna delen blir nådd. For eksempel sier det tverrfaglige temaet Bærekraftig utvikling at «elevene kan forstå grunnleggende dilemmaer og utviklingstrekk i samfunnet» og at temaet rommer problemstillinger knytta til blant annet miljø, klima og demografi (Utdanningsdirektoratet, 2017, s. 14). Klimagassutslipp, klima og befolkningsutvikling er eksempler fenomener som endrer seg over tid, og de presenteres gjerne nettopp av modeller som illustrerer dette. Ofte er det også et spørsmål om veksten er økende eller avtakende, og om når en for eksempel forventer størst befolkning gitt en viss utvikling. En god forståelse av disse modellene forutsetter dermed kunnskap om begreper som gjennomsnittlig og momentan endringsrate, minimum- og maksimumspunkt og den dobbeltderiverte.

Man kan forsvare differensialregningens plass i matematikkpensumet på videregående skole fra enda flere synsvinkler. Det som kjennetegner kalkulus, det vil si differensialregning og integralregning, er at den beskriver hvordan størrelser endrer seg, i motsetning til geometri, trigonometri og algebra som beskriver statiske situasjoner. Når vi har med forandring å gjøre, blir begrepet om grenseverdier relevant, noe som er et særpreg i kalkulus. Når differensialregning er innlemmet som en del av pensum, blir matematikkundervisningen mer mangfoldig. Matematikken er nok med dette mer utfordrende både for lærere å undervise og elever å lære, men en positiv effekt er at begrepene får tid til å modnes hos elevene. Til slutt nevner jeg også differensialregningens funksjon som inngangsport til mye av matematikkens historie.

4.2 Didaktisk analyse av differensialregning

4.2.1 Differensialregning på 1900-tallet

Kalkulus var lenge utenfor pensum i matematikkundervisningen i skolen i det kontinentale Europa. Hovedgrunnen til fraværet av denne disiplinen var, ifølge Hans-Georg Weigand (2014), at den ble sett på som en krevende form for matematisk tenkning, spesielt forståelsen av grenseverdibegrepet. Matematikere frykta at skolene ikke ville undervise med tilstrekkelig matematisk presisjon, og at dette ville lede til misoppfatninger blant elevene. Diskusjonen rundt analysens (manglende) plass i utdanninga ble brakt på banen av Felix Klein tidlig på 1900-tallet. Det var en kontroversiell debatt, men den nye disiplinen ble sakte inkludert i pensum (Weigand, 2014, s. 605). Magnus Alfsen (1921) oppgir at det han kaller «elementer av infinitesimalregning» ble innført i læreplanen i en rekke europeiske land tidlig på 1900-tallet: Frankrike i 1902, Sverige i 1905, Danmark, Østerrike, De britiske øyer og Russland i 1907 og Romania, Sveits og enkelte tyske stater i 1912 (Alfsen, 1921, s. 2). Alfsen drøfter spørsmålet om dette også bør inn i det norske realgymnasiet. Når han veier dette opp mot tida en har til rådighet i skolen, konkluderer han med at et eget kurs i infinitesimalregning blir for omfattende, men at man med fordel kan introdusere «et minimum av infinitesimalregningens første elementer» i realgymnasiet (Alfsen, 1921, s. 6).

Weigand (2014) skriver at undervisningen av grenseverdier og den deriverte gjennomgikk et paradigmeskifte på 1990-tallet i mange europeiske klasserom. I 1970- og 1980-årene var det en omfattende gjennomgang av følger, med tilhørende definisjon av grenseverdi og bevis av teoremer om deres konvergens, som danna grunnlaget for definisjonen av den deriverte for reelle funksjoner $f \in \mathbb{R}$. Aritmetiske og geometriske følgers egenskaper ble undersøkt forut for introduksjonen av grenseverdier for følger gjennom den formelle definisjonen (se Seksjon 4.1.1.3). I det siste steget ble ideer og formelle representasjoner av grenseverdien til en følge overført til grenseverdien til en reell funksjon. Tilnærminga av x til den definerte verdien x_0 ble så enten framstilt intuitivt gjennom «x nærmer seg x_0,» som en trinnvis prosess med utvalgte følger eller ved omegn-begrepet (*the neighborhood concept*). Undervisningen var nært relatert til matematikken på universitetene. Fra sent på 1980-tallet vokste det imidlertid fram en ny modell for grenseverdibegrepet i matematikkundervisningen. Det var det intuitive grenseverdibegrepet, introdusert av matematikerne Emile Artin (1957) og Serge Lang (1964/1973) (Weigand, 2014, s. 605) og beskrevet i Seksjon 4.1.1.3. Det intuitive grenseverdibegrepet er blitt anerkjent og skal være dominerende for undervisningen i skoler i dag, spesielt i Storbritannia, Nederland, Frankrike, Tyskland og USA (Larson & Hostetler, 1986, 2009; Ellis & Gulick, 1989, 2003, sitert i Weigand, 2014, s. 606). Fordi det intuitive grenseverdibegrepet ikke krever bruk av følger, er følger utelatt fra pensum i analyse i mange nye læreplaner, for eksempel i Tyskland. Weigand mener det har vært en endring fra en tilnærming til kalkulus basert på begrepet til en tilnærming basert på bruksområder (Weigand, 2014, s. 606).

4.2.2 En diskret tilnærming til grenseverdier

I artikkelen «A discrete approach to the concept of derivative» presenterer Weigand (2014) en alternativ diskret tilnærming til differensialregning. Under presenterer jeg hans modell kort og inkluderer noen av hans synspunkter.

Weigand starter modellen sin med å se på rekursivt definerte følger for så å introdusere begrepet *differansefølger* $(\Delta a_n)_{\mathbb{N}}$, der differansefølgen Δa_n til en gitt følge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ er definert som $\Delta a_n \coloneqq a_{n+1} - a_n$. Differansefølgen er å anse som endringsraten til følgen. Weigand foreslår at man arbeider med hverdagslige fenomener som ikke er basert på en algebraisk formel. Videre tar Weigand sikte på trinnvis å innføre reelle funksjoner. Han starter med det han kaller Z-funksjoner $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ og differanse-Z-funksjoner. Differanse-Z-funksjoner er en funksjon av differansen mellom påfølgende elementer i Z-funksjonen f, og er gitt ved $D_f(z) = f(z+1) - f(z)$. $D_f(z)$ er endringsraten mellom punktene $(z, f(z))$ og $(z + 1, f(z+1))$. Weigand utvider så Z-funksjonens definisjonsmengde til ikke bare å inkludere heltall. Han innfører verdiene $z_{10} = \frac{z}{10}$, $z \in \mathbb{Z}$ i definisjonsmengden. Vi får en Z_{10}-funksjon $f_{10}\colon Z_{10} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_{10} = \left\{\dots, -\frac{2}{10}, -\frac{1}{10}, 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots\right\}$, hvor definisjonsmengden altså er delt inn i mindre intervaller enn heltallene. Differansefunksjonen til Z_{10}-funksjonen kaller Weigand for differanse-kvotient-Z_{10}-funksjonen som er gitt ved $D_{f10}(z_{10}) = \frac{f\left(z_{10}+\frac{1}{10}\right)-f(z_{10})}{\frac{1}{10}}$, $z_{10} \in \mathbb{Z}_{10}$. Dette kan videre generaliseres til at definisjonsmengden består av verdier med $\frac{1}{n}$ intervall, slik at *differanse-kvotient-Z_n-funksjonen* D_{fn} blir $D_{fn}(z_n) = \frac{f\left(z_n+\frac{1}{n}\right)-f(z_n)}{\frac{1}{n}}$, $z_n \in \mathbb{Z}_n$ (Weigand, 2014, s. 608–615).

Basert på studier av de siste tiårenes undervisning og læring av grenseverdier, har Weigand funnet at en konseptuell forståelse av det formelle grenseverdibegrepet er utfordrende for videregåendeelever og studenter, og at det krever forklaringer og visualiseringer gjennom ulike representasjoner. For å forstå grenseverdibegrepet som mer enn en formell definisjon, mener han det er essensielt å forstå *prosessen* der en konstruerer eller regner ut grenseverdiene på numerisk og grafisk nivå (Weigand, 2014, s. 604). Det er også nødvendig å forstå begrepet om endringsrate og overgangen fra en gjennomsnittlig til en lokal endringsrate. Dette kan og bør knyttes til hverdagslige situasjoner, for eksempel hastigheten til en bil eller temperaturendringer gjennom et døgn.

Gjennom denne steg-for-steg-prosessen utvikles begrepet om endringsrate gradvis når man tar utgangspunkt i den gjennomsnittlige endringsraten og reduserer intervallene mellom to påfølgende verdier i definisjonsmengden. Meningen er at elevene skal gå gjennom denne prosessen uten å ha blitt presentert for den formelle definisjonen av grenseverdier og den deriverte på forhånd. Weigand argumenterer for at grenseverdier er enklere å forstå gjennom denne prosessen (Weigand, 2014 s. 607). Fordelen med modellen er ifølge Weigand at den går gjennom både den diskrete tilnærmingsprosessen og resultatene som følger av prosessen. Dette legger til rette for god forståelse av den deriverte i et punkt og en global derivasjonsfunksjon (Weigand, 2014, s. 616).

Modellen til Weigand baserer seg i stor grad på bruken av følger, noe han mener er fordelaktig. Weigands sterkeste argument for å arbeide med følger før innføringen av reelle funksjoner er at det gir mulighet for å gå fram steg for steg (Weigand, 2014, s. 605). Mange hverdagslige situasjoner kan beskrives av følger. Videre kan matematiske problemer innenfor aritmetikken løses med følger, og gjentakende algoritmiske metoder, som Newtons metode, gjør bruk av iterasjonsfølger. Weigand peker også på at følger fungerer som et verktøy for å utvikle begrepet om kontinuitet (Weigand, 2014, s. 607).

4.3 Institusjonell analyse av differensialregning

4.3.1 Forkunnskaper

Når jeg skal utforme et undervisningsopplegg med differensialregning som målkunnskap, er det essensielt å vite hva elevene kan om temaet fra før. Undervisningsopplegget er ment for en R1-klasse. Siden innpass i R1 krever at man har tatt 1T (Direktoratet for høyere utdanning og kompetanse, 2020), er det spesielt relevant å undersøke læreplanen i 1T.

Læreplanen i 1T inneholder kompetansemål som blant annet sier at eleven skal kunne

- løse problemer ved hjelp av algoritmisk tenkning og digitale verktøy
- identifisere variable størrelser i ulike situasjoner
- modellere situasjoner og argumentere for om modellene er gyldige
- utforske og beskrive egenskapene ved polynomfunksjoner, rasjonale funksjoner, eksponentialfunksjoner og potensfunksjoner
- bruke gjennomsnittlig og momentan vekstfart i konkrete eksempler og gjøre rede for den deriverte

(Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 5). For å få et bilde på hva som kan ligge i disse kompetansemålene, vil jeg nå bruke læreboka *Sinus 1T Matematikk* av Oldervoll et al. (2020) som et eksempel på hvordan derivasjon kan ha blitt presentert for elevene i 1T.

I denne boka får elevene en god innføring i funksjonsbegrepet, og de studerer ulike typer funksjoner og deres respektive grafer i kapitlene forut for vekstfart og derivasjon. De ser på polynomfunksjoner, nullpunkter og ekstremalpunkter, funksjoner som lineære modeller, eksponentialfunksjoner $f(x) = a \cdot k^x$, potensfunksjoner $f(x) = a \cdot x^k$, og rasjonale funksjoner med bruddpunkter og vertikale og horisontale asymptoter. Med denne kunnskapen i bunn introduserer boka begrepet *vekstfart*, først som stigningstallet til en lineær graf. Deretter finner man *den gjennomsnittlige vekstfarten* for ikke-lineære grafer som endringen i funksjonsverdi delt på endringen i x-verdi, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Etter hvert introduserer den *momentan vekstfart* gjennom et eksempel som viser at den gjennomsnittlige vekstfarten nærmer seg én bestemt verdi når intervallet gjøres mindre og mindre. Man finner tilnærmingsverdier for den momentane vekstfarten grafisk og digitalt, og *tangenten* introduseres. Videre innfører boka begrepet *grenseverdier* og notasjonen $\lim_{x \to 0} f(x)$. For å finne vekstfarten i $x = a$, og samtidig stigningstallet til tangenten i punktet $(a, f(a))$, regner man ut $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$. Denne grenseverdien får navnet *den deriverte av f* og noteres med $f'(a)$. Boka gir et par eksempler på at definisjonen av den deriverte kan brukes til å regne ut vekstfarten i gitte punkter, og kaller f *deriverbar* for $x = a$ hvis grenseverdien eksisterer her. Det slås fast at grenseverdien ikke alltid eksisterer, men det gis ikke klare kriterier for når den eksisterer, annet enn et eksempel der grafen har en knekk i toppunktet og dermed ingen entydig tangent. Det utledes og gis en del derivasjonsregler, slik at den deriverte av polynomfunksjoner kan regnes ut direkte uten bruk av definisjonen av den deriverte. Derivasjon benyttes så til grunnleggende funksjonsdrøfting, før det til slutt gis en innføring i Newtons metode (her kalt «newton-raphson-metoden»).

4.3.2 Kompetansemål og kjerneelementer i R1

Læreplanen i R1 har en rekke kompetansemål knytta til derivasjon. Følgende mål vil være ekstra relevante til mitt undervisningsopplegg: Eleven skal kunne

- forstå begrepene vekstfart, grenseverdi, derivasjon og kontinuitet, og bruke disse for å løse praktiske problemer

- bruke ulike strategier for å utforske og bestemme grenseverdier til funksjoner, og utforske og argumentere for anvendelser av grenseverdier
- bestemme den deriverte i et punkt geometrisk, algebraisk og ved numeriske metoder, og gi eksempler på funksjoner som ikke er deriverbare i gitte punkter

(Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 5). I tillegg til kompetansemålene har læreplanen en rekke kjerneelementer. Kjerneelementene Utforsking og problemløsing og Resonnering og argumentasjon beskriver noen av arbeidsmåtene elevene vil benytte i opplegget og kunnskapene de vil sitte igjen med. Blant annet handler utforsking om å lete etter mønstre, finne sammenhenger og legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn løsningene. Problemløsning innebærer også å vurdere om og når løsninger er gyldige. Resonnering handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker, for eksempel utledningen av gjennomsnittlig endringsrate og derivasjon. Elevene jobber med argumentasjon når de begrunner sine framgangsmåter, løsninger og gyldigheten av dem (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2–3).

5. Design og *a priori*-analyse

Når jeg nå skal presentere designet og *a priori*-analysen, vil jeg først gi noen innledende kommentarer som handler om antakelser om klassens størrelse og tidsramme, hvordan designet er forankra i matematikkhistorien og hva som er dets gjennomgående problem og målkunnskap. Designet består av to oppgaver (Oppgave 1 og Oppgave 2), en beskrivelse av en plenumsdiskusjon mellom disse (Plenumsdel 1) og en plenumsdel til slutt (Plenumsdel 2). Jeg presenterer først Oppgave 1 og min intensjon med den før jeg gjør en *a priori*-analyse av den, strukturert i fasene i en didaktisk situasjon. Plenumsdel 1 og Oppgave 2 etterfølges av en tilsvarende analyse. Institusjonaliseringsfasen kommer til slutt i forbindelse med Plenumsdel 2. Jeg sparer også noen kommentarer til Formuleringsfase 2 og Valideringsfase 2 til denne seksjonen (Seksjon 5.3.5) fordi disse fasene også inngår som en del av Plenumsdel 2. *A priori*-analysen bygger på den forberedende analysen i Kapittel 4, og den viser hvordan designet er utviklet i tråd med noen av elementene som inngår i TDS. I Kapittel 6 ser jeg nærmere på hvordan designet og *a priori*-analysen svarer på forskningsspørsmålet.

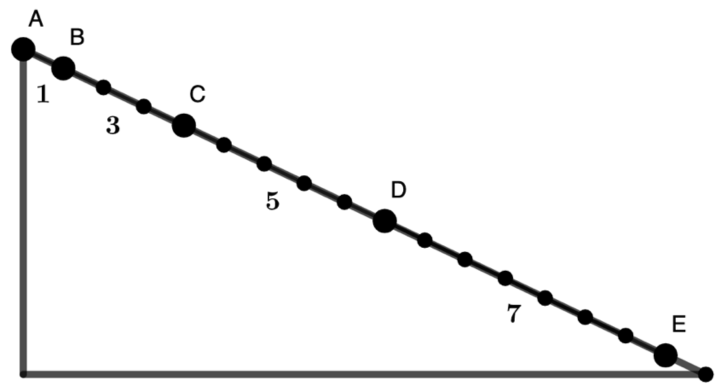
5.1 Innledende kommentarer til designet

5.1.1 Antakelser for klassen

Jeg antar at det er 24 elever i R1-klassen. Alle disse har gjennomgått kurset 1T, som er et krav for opptak til R1. Jeg antar at alle elevene har til disposisjon en egen PC med programvaren GeoGebra med innebygd graftegner, regneark og CAS-kalkulator. Tidsrammen for undervisningsopplegget er to 60-minutters økter. Siden designet er et hypotetisk opplegg, får elevene oppgitt dataene for strekning og tid i en tabell. I en gjennomføring av opplegget ville jeg latt elevene selv gjennomføre forsøket med kule på skråplan. Det ville vært en ideell måte å samle inn målepunkter til regresjonsanalysen på. Det forutsetter jo at nødvendig utstyr (skråplan og datalogger) er tilgjengelig på skolen.

5.1.2 Historisk forankring

Å bruke skråplanet som modell og studere et legemes bevegelse for å presentere grenseverdier og differensialregning har historisk gjenklang. Galileo Galilei (1564–1642) anses som grunnleggeren av moderne fysikk. Han gjorde vitenskapen eksperimentell. En av hans store ideer handler om den «naturlige» akselerasjonen til legemer i fritt fall. Han beviste at dersom et legeme faller fra stillstand, så er dets tilbakelagte strekning ved ethvert tidspunkt proporsjonalt med tiden kvadrert (Katz, 2009, s. 457 & 459). Dette forklarte han gjennom summer og differanser da han mente at forholdet mellom strekning tilbakelagt på påfølgende tidsintervaller bestemmes av følgen av oddetall. Galileo festa spikre med avstand proporsjonal med oddetallene på siden av et skråplan. Observasjonen hans var, ikke overraskende, at ballen brukte like lang tid mellom hver spikerpassering (Gravemeijer & Doorman, 1999, s. 122). Noen tiår senere var det en annen stor vitenskapsmann som studerte legemers bevegelse. Hans navn var Isaac Newton, og jeg refererer her til Seksjon 4.1.2 for et sammendrag av hans arbeider.



Figur 12: Galileo fant ut at ballen brukte like lang tid fra A til B som fra B til C som fra C til D som fra D til E

5.1.3 Problem og målkunnskap

Et av to grunnleggende prinsipper for designet av en didaktisk situasjon, er at målkunnskapen opptrer som en optimal løsning på problemet som er gitt i miljøet. I oppgaven jeg har designa, er problemet å finne den momentane hastigheten til kula i et gitt punkt. Løsninga på problemet er den deriverte av funksjonen som beskriver tilbakelagt strekning i et tidspunkt. Dette er en del av differensialregningen, og jeg skriver derfor de fleste steder at differensialregning er målkunnskapen. Dette er dermed målkunnskapen som situasjonen tar sikte på å legge til rette for, og kan også beskrives som den didaktiske intensjonen til læreren. Vi sier også at differensialregning er den didaktiske intensjonen til læreren. Imidlertid er intensjonen ikke bare at elevene skal lære den formelle symbolske definisjonen på den deriverte, men først og fremst forstå hvor definisjonen kommer fra. Altså er målkunnskapen å forstå utledningen av den deriverte grafisk og numerisk.

5.2 Oppgave 1 med intensjon

Vi sender en kule utfor et slakt skråplan. I Tabell 1 under er det oppgitt noen målepunkter som sier hvor langt kula har nådd $f(x)$ etter x antall sekunder. Samarbeid to og to.

x (antall sekunder)	0	1	2	3	4
$f(x)$ (strekning i meter)	0	0.5	2	4.5	8

Tabell 1. Dataene fra kulas ferd ned skråplanet

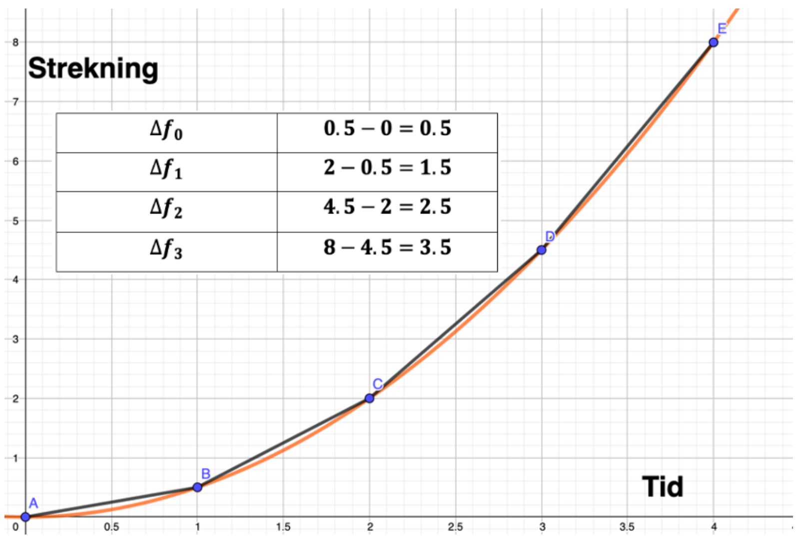
a) Plott punktene inn i et diagram med strekning langs y-aksen og tid langs x-aksen. Tegn så rette linjestykker mellom nabopunktene. Bruk GeoGebra.

b) La nå Δf_x være definert som differansen mellom den neste strekningsmålingen (strekningsmåling $f(x+1)$) og strekningsmåling $f(x)$ for $0 \leq x \leq 3$. For eksempel er $\Delta f_2 = f(3) - f(2)$. Vi kaller Δf_x for en *differansefølge*. Regn ut Δf_0, Δf_1, Δf_2, og Δf_3.

c) Bruk regresjon til å finne et funksjonsuttrykk for $f(x)$ og tegn inn grafen i samme ark i GeoGebra.

d) Uten videre bruk av digitale hjelpemidler: hva er hastigheten til kula mellom målingene etter 2 og 3 sekunder, og hva er hastigheten etter nøyaktig 2 sekunder? (tenk på hva du har gjort til nå)

Intensjonen med denne oppgaven er at elevene skal ta i bruk et digitalt hjelpemiddel for å modellere en situasjon med kule på skråplan, for så å bruke dette til å bestemme gjennomsnittlig hastighet og deretter momentan hastighet. Deloppgave a) og c) gir sammen en grafisk representasjon av situasjonen som inneholder noen målepunkter, linjestykker som en tilnærming til grafen til funksjonen av strekning tilbakelagt per tidsenhet og selve grafen. Deloppgave b) resulterer i en følge av verdier som har et tydelig mønster. Hensikten med å gi denne oppgaven er at elevene får muligheten til å oppdage sammenhengen mellom differansefølgens verdier og de tilhørende linjestykkene mellom punktene (at differansefølgens verdier samsvarer med stigningen til linjestykkene). Dette er noe som kommer fram i Plenumsdel 1. Et svar på disse tre deloppgavene er gjengitt i Figur.



Figur 13: En slik framstilling forventer jeg i Oppgave 1

Deloppgave d) er ment som en mer utforskende oppgave. Det første spørsmålet kan besvares riktig dersom man observerer at verdien av Δf_2 er nettopp gjennomsnittshastigheten i dette tidsrommet. Intensjonen med å spørre etter momentanhastigheten etter 2 sekunder er å introdusere elevene for selve problemet i den didaktiske situasjonen. Det er først i Deloppgave d) at problemet kommer til syne. Løsningen, som er den deriverte av funksjonen i punktet, er naturligvis ikke presentert eller diskutert (da ville vi ikke hatt noe problem). Intensjonen er her at elevene, ved hjelp av deloppgave a), b) og c), skal utvikle sin løsningsstrategi i den adidaktiske situasjonen som kommer etter devolusjonen.

5.2.1 Devolusjonsfase 1

Vi identifiserer lærerens overlevering av Oppgave 1 som Devolusjonsfase 1. Læreren presenterer situasjonen med kula som triller nedover et skråplan. Hvis en her ser for seg en gjennomføring av forsøk med skråplan, vil denne fasen innebære å finne fram det nødvendige utstyret og demonstrere dets virkemåte. I denne oppgaven beskriver jeg arbeidet med måleverdiene fra et tenkt eksperiment, så jeg angir hypotetiske (men realistiske) måleverdier i Tabell 1. Læreren orienterer om at elevene skal samarbeide to og to, og om at GeoGebra blir sentral for problemløsningen. I denne fasen skal læreren også presentere det overordnede problemet som elevene skal løse: vi ønsker å finne den momentane hastigheten til kula ved et vilkårlig punkt på skråplanet. Den didaktiske kontrakten blir kommunisert i devolusjonen, enten implisitt eller eksplisitt. I Deloppgave d) er det eksplisitt uttrykt ett krav og en anbefaling for elevenes utforskning. Kravet er at de ikke skal bruke digitale hjelpemidler utover det de gjorde i Deloppgave a), b) og c). Anbefalingen er å finne hjelp i de foregående deloppgavene. Jeg vil kalle begge disse instruksene for regler som inngår i den didaktiske kontrakten mellom læreren og elevene. I tillegg vil si at den didaktiske kontrakten også inneholder en mer generell regel som er implisitt. Elever som får en oppgave av læreren, tar det stort sett for gitt at det finnes en løsning som de har mulighet til å finne. Lærerens del av kontrakten er å sørge for at løsningen er tilgjengelig for elevene. Denne oppgaven er intet unntak. Dette er et eksempel på en gjensidig forpliktelse mellom lærer og elev.

5.2.2 Aksjonsfase 1

En vellykka devolusjonsfase gjør at elevene arbeider selvstendig i aksjonsfasen. Likevel kan det være greit for læreren å være forberedt på at elevene kan bli sittende fast. Det kan være til hjelp å lede oppmerksomheten deres mot sammenhengen mellom verdiene av Δf_x og linjestykkene de har tegna. Hva sier verdien av Δf_x noe om?

Aksjonsfasen karakteriseres av at elevene eksperimenterer gjennom prøving og feiling. Miljøets adidaktiske elementer gir elevene en objektiv feedback her. Jeg diskuterer hvordan i

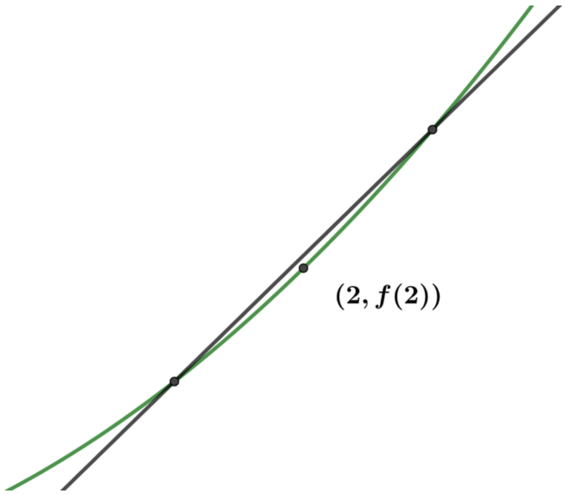
Seksjon 5.2.5. Elevene kan bruke en numerisk eller grafisk tilnærming, eller en kombinasjon av disse. For eksempel kan de studere mønsteret i differansefølgen og se hvordan disse verdiene henger sammen med linjestykkene mellom punktene. En annen løsningsstrategi er en rent grafisk tilnærming hvor en utvider linjestykkene til sekanter og prøver å få en slik linje til å «passe» med grafen akkurat i punktet. Jeg går mer i detalj på disse løsningsstrategiene i formuleringsfasen, der elevene eksplisitt uttrykker sine løsningsstrategier.

5.2.3 Formuleringsfase 1

Formuleringsfasen i Oppgave 1 er også knytta til problemet som presenteres i Deloppgave d). Jeg vil her presentere noen hypotetiske eksplisitte løsninger til denne deloppgaven. En del av denne fasen er at læreren gjør formuleringene synlige i klasserommet, noe Plenumsdel 1 gir gode muligheter for.

På spørsmålet om å finne den gjennomsnittlige hastigheten mellom 2 og 3 sekunder, kan eleven bruke formelen for gjennomsnittlig endringsrate: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4.5-2\ m}{3-2\ s} = \frac{2.5\ m}{1\ s} = 2.5\frac{m}{s}$. Dette er selvfølgelig den samme verdien de har funnet i differansefølge Δf_2. En annen løsningsstrategi til samme spørsmål er å utvide linjestykket mellom punkt C og D og regne ut forholdet mellom endringen i strekning og tid basert på antagelsen om at forholdstallet ikke endrer seg. Dette er et trigonometrisk resultat. På øyemål eller ved å telle ruter kan man da få denne utregningen: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7-2\ m}{4-2\ s} = \frac{5\ m}{2\ s} = 2.5\frac{m}{s}$.

Jeg vil også se på noen av løsningsmetodene for å finne momentanhastigheten. En tanke er at når vi kjenner gjennomsnittshastigheten mellom 1 og 2 sekunder og mellom 2 og 3 sekunder, så er momentanhastigheten etter 2 sekunder lik gjennomsnittet av disse igjen. En rask titt på verdiene i differansefølgen viser at man da får farta $2\frac{m}{s}$. En grafisk løsningsmetode er å utvide et linjestykke, for eksempel mellom $(2, f(2))$ og $(3, f(3))$ til en sekant og resonnere seg fram til betydninga av sekanten. Hvis man tar innover seg at den representerer gjennomsnittshastigheten mellom disse to punktene, vil jeg argumentere for at en elev på dette nivået vil kunne se nytten av å finne gjennomsnittshastigheten i et kortere tidsintervall rundt $(2, f(2))$. Det kan for eksempel gjøres ved å «flytte» $(3, f(3))$ nærmere $(2, f(2))$, eller ved å ta utgangspunkt i to punkter på hver sin side av $(2, f(2))$ som nærmer seg punktet symmetrisk. Dette kan føre til at eleven oppdager tangenten. En linjal kan fungere som et hjelpemiddel og inngå som en del av miljøet her. Den siste tilnærmingen illustrerer jeg med figuren under.



Figur 14: Tilnærming til momentanhastighet ved hjelp av sekant

5.2.4 Valideringsfase 1

I valideringsfase 1 skal elevene prøve å begrunne sine løsninger av Deloppgave d). Jeg vil si at denne fasen henger tett sammen med formuleringsfasen siden mange elever automatisk vil teste den formulerte løsningen og forkaste den hvis den viser seg å være feil. Sånn sett er valideringa allerede i gang for mange elever i formuleringsfasen og aksjonsfasen. Ellers består denne fasen av en vitenskapelig debatt ledet av læreren. Dette svarer til Plenumsdel 1 i designet, som presenteres i Seksjon 5.3. Et viktig element i denne diskusjonen er at uttrykket for den gjennomsnittlige endringsraten gjøres eksplisitt og begrunnes. Helst skal læreren bare strukturere debatten og la elevene presentere sine løsninger og begrunne dem. Hvis det er læreren som framsetter behovet for begrunnelse, er dette en didaktisk fase og ikke en adidaktisk fase.

5.2.5 Miljø og adidaktisk potensial i Oppgave 1

Det er en rekke elementer som er relevante for målkunnskapen og dermed er en del av miljøet i Oppgave 1. GeoGebra er det digitale verktøyet elevene skal bruke. I oppgaveteksten er det oppgitt data i en tabell og en definisjon og eksempel på differansefølger. Aktuelle forkunnskaper er formelen for gjennomsnittlig hastighet, $v = \frac{s}{t}$, uttrykket for gjennomsnittlig endringsrate, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, å tolke data gitt i en tabell og kjenne aktuelle kommandoer i GeoGebra, for å nevne noen. Ettersom elevene skal samarbeide, vil også medeleven være en del av miljøet. Av fysisk materiell vil skrivesaker og linjal kunne være relevant, linjal blant annet for å utforske sekanter og tangenter som beskrevet i Formuleringsfase 1.

En del av elementene kan sies å gi elevene objektiv feedback, og inngår dermed i det adidaktiske miljøet. Plotting av punktene inn i GeoGebra vil jeg si gir en objektiv feedback fordi en kan se at punktene følger et visst mønster ved at avstanden mellom dem er økende. At også funksjonsverdien øker med input-verdien kan ses enkelt både i tabellen og i en riktig plotting. På lignende vis gir riktig utregning av verdiene i differansefølgen en objektiv feedback fordi det gir en tallfølge hvor verdien øker med 1 i hvert ledd, altså et lett gjenkjennelig mønster. Det tyder på riktig løsningsstrategi. I motsatt tilfelle vil en utregna verdi som tydelig avviker fra et klart mønster indikere med ganske stor sannsynlighet at noe er gått galt underveis. Jeg vil også argumentere for at regresjonen gir en objektiv feedback fordi grafen som går gjennom alle punktene har det relativt enkle andregradsuttrykket $0.5x^2$. Altså kan vi si at Oppgave 1 har et klart adidaktisk potensial.

5.3 Plenumsdel 1 og Oppgave 2 med intensjon

Etter at elevene har jobba selvstendig en stund med Oppgave 1, går vi gjennom i plenum. Læreren spør: «Hva beskriver verdiene i differansefølgen?» Det skal komme fram her at disse verdiene er uttrykk for den gjennomsnittlige endringsraten, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Dette skal være et kjent begrep fra 1T, men det repeteres nå. Læreren spør også om noen ser en sammenheng mellom verdiene i differansefølgen og linjestykkene de har tegna. Før man går videre, skal det også gjøres klart hvilket fenomen endringsraten er et uttrykk for, nemlig farta til kula.

Videre retter man oppmerksomheten mot grafen i punktet $(2, f(2))$. Ved å forlenge linjestykket til en sekant, ser vi at $\Delta f_2 = f(3) - f(2)$ gir en ok tilnærming til stigningstallet til grafen nøyaktig i punktet $(2, f(2))$. Men vi ønsker en enda bedre tilnærming. Da kan vi korte ned intervallene fra heltall til for eksempel $\frac{1}{10}$-intervaller.

Oppgave 2

a) Plott inn punktene $\big(2.1, f(2.1)\big), \big(2.2, f(2.2)\big), \dots, (2.9, f(2.9))$ og tegn linjestykkene mellom nabopunkter.
b) Zoom litt inn og ut. Hva ser dere når dere zoomer ut? Hva ser dere når dere zoomer inn?

c) Finn et uttrykk for gjennomsnittlig endringsrate mellom punktene $(2, f(2))$ og $(2.1, f(2.1))$. NB! Husk at nå er ikke lenger intervallet lik 1, så nå må vi ta hensyn til størrelsen på intervallet når vi regner ut den gjennomsnittlige endringsraten.

d) Tegn sekanten gjennom punktene $(2, f(2))$ og $(3, f(3))$, gjennom $(2, f(2))$ og $(2.1, f(2.1))$ og gjennom $(2, f(2))$ og $(2.01, f(2.01))$. Tegn så tangenten til f i punktet $(2, f(2))$. Gi tangenten og sekantene ulike farger så dere klarer å skille dem fra hverandre og grafen. Forslag:
Grafen til f: svart
Sekanten gjennom $(2, f(2))$ og $(3, f(3))$: gul
Sekanten gjennom $(2, f(2))$ og $(2.1, f(2.1))$: oransje
Sekanten gjennom $(2, f(2))$ og $(2.01, f(2.01))$: rød
Tangenten i $(2, f(2))$: blå

e) Zoom inn til dere klarer å skille linjene fra hverandre. Sammenlign sekantene med tangenten. Hva ser dere? Hvordan vil dere nå gå fram for å finne hastigheten etter nøyaktig 2 sekunder?

Intensjonen med Oppgave 2 er å illustrere behovet for grenseverdibegrepet gjennom en diskret tilnærming til endringsraten i $(2, f(2))$. Når gjennomsnittlig endringsrate er kjent, så er det grenseverdibegrepet som mangler for å kunne definere den deriverte. Det er grenseverdier som er det nye, ukjente elementet for elever som introduseres for derivasjon for første gang. Derfor legger jeg såpass mye vekt på denne trinnvise, diskrete tilnærmingen hvor intervallet gjøres mindre og mindre. Metoden med å dele intervallene opp i mindre deler slik at uttrykket for den gjennomsnittlige endringsraten blir på formen $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-f(2)}{\frac{1}{n}}$ er inspirert at Weigands (2014) differanse-kvotient-Z_n-funksjoner D_{fn} forklart i Seksjon 4.2.2.

5.3.1 Devolusjonsfase 2

Plenumsdel 1 mener jeg er med på å endre miljøet i den didaktiske situasjonen. Her blir nemlig ulike løsningsstrategier diskutert, og det blir gitt føringer for den videre utforskninga. Sammenhengen mellom stigningstallet til linjestykkene og verdiene til differansefølgene blir eksplisitt uttrykt, det blir foreslått å forlenge et linjestykke til en sekant for å studere farta og ideen om å korte ned intervallet mellom nabopunkter blir framsatt. Dermed har elevene fått en utvida verktøykasse av strategier og ideer for å jobbe videre med problemet som er gitt. Det er i dette nye miljøet vi får en ny devolusjonsfase. Læreren presenterer nå ønsket om å finne en enda bedre tilnærming til momentan hastighet i $\left(2, f(2)\right)$, som er problemet man jobber med i Oppgave 2. Som i Oppgave 1 er det slik også her at selve problemet først skal utforskes i den siste deloppgaven. Deloppgave a), b), c) og d) instruerer elevene på veien til målkunnskapen. Elevene skal jakte målkunnskapen ved å først å gjøre disse konkrete deloppgavene. Slik er disse deloppgavene en del av den didaktiske kontrakten.

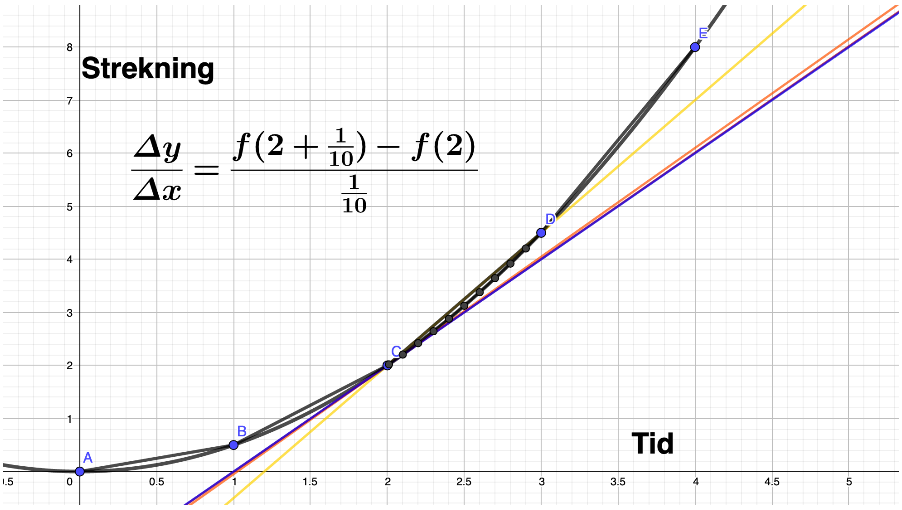
5.3.2 Aksjonsfase 2

På mange måter er aksjonsfase 2 styrt av deloppgavene a) til e) i Oppgave 2. Når problemet å finne momentanhastigheten igjen blir presentert i det siste spørsmålet, så finnes deler av løsningen i de deloppgavene elevene allerede har gjort. Likevel starter en ny aksjonsfase her. Gjennom de foregående deloppgavene har elevene nå fått en annen bakgrunn for å løse problemet. Hovedforskjellene fra Oppgave 1 vil jeg se er som følger:

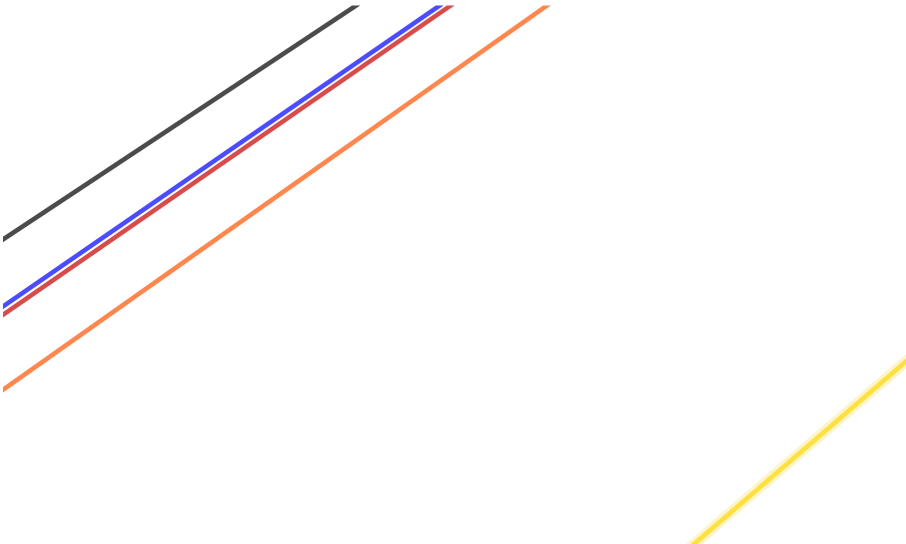
- I Oppgave 1 brukte de differansefølgen gitt ved $\Delta f_x = f_{x+1} - f_x$ for å finne gjennomsnittlig hastighet. Nå er ikke lenger intervallet mellom x-verdiene lik 1, og i oppgave 2c) skal elevene finne et uttrykk for den gjennomsnittlige endringsraten mellom $(2, f(2))$ og $(2.1, f(2.1))$. Dette uttrykket vil jeg si kan sette dem på sporet av grenseverdibegrepet.
- De har foretatt en ny og bedre tilnærming av grafen til f og tegna flere sekanter som nærmer seg tangenten. Tangenten er de også for første gang bedt om å tegne her. Også dette vil jeg si baner vei for grenseverdibegrepet.

5.3.3 Formuleringsfase 2

De implisitte løsningene i Aksjonsfase 2 gjøres eksplisitt her i Formuleringsfase 2. Numerisk forklart er ideen at vi kan gjøre tallet i nevneren vilkårlig lite. La oss se på et eksempel. Uttrykket for den gjennomsnittlige farta mellom $(2, f(2))$ og $(2.1, f(2.1))$ er $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(2+\frac{1}{10}\right)-f(2)}{\frac{1}{10}}$. Vi har endra steglengden fra 1 til $\frac{1}{10}$, men vi trenger ikke gi oss med det. Vi kunne endra den til $\frac{1}{100}$, ja, vi kan gjøre den vilkårlig liten! Den samme ideen grafisk forklart er at vi kan la punktene komme uendelig nærme hverandre. Det vil også gi utslag i sekanter som sammenfaller mer og mer med tangenten, noe intensjonen er at elevene skal få erfare gjennom å tegne tangenten i $(2, f(2))$ og sekanten gjennom nærliggende punkter i Deloppgave d). Resultatet av denne deloppgaven illustreres i de to figurene under.



Figur 15: Grafen med tangenten i $(2, f(2))$ og omkringliggende sekanter



Figur 16: Zoomer man langt nok inn, ser man at også den røde sekanten som går gjennom $(2, f(2))$ og $(2.01, f(2.01))$ ikke sammenfaller fullstendig med tangenten

Formuleringsfase 2 består også av den delen av Plenumsdel 2 hvor læreren gjør løsningsstrategier som denne synlige i klasserommet.

5.3.4 Miljø og adidaktisk potensial i Oppgave 2

Miljøet i Oppgave 2 har likhetstrekk med miljøet i Oppgave 1. Også her skal elevene bruke GeoGebra. Punktene som ble plotta inn og linjestykkene og grafen som ble tegna i Oppgave 1, er fortsatt med her. Også her skal elevene samarbeide to og to. Imidlertid er miljøet endra noe ettersom flere løsningsstrategier er blitt belyst, som diskutert i Seksjon 5.3.1.

Det adidaktiske potensialet i denne oppgaven mener jeg kommer best til uttrykk gjennom tangenten og sekantene elevene skal tegne i Deloppgave d) og sammenligne i Deloppgave e). Setningen «Zoom inn til dere klarer å skille linjene fra hverandre» hinter om at noen av disse linjene nesten vil gå parallelt. Det er spor i oppgaveteksten som gjør at elevene vil få en tydelig indikasjon på om det de har gjort er en hensiktsmessig eller riktig løsningsstrategi. Hvis elevene tegner sekantene i den rekkefølgen som er foreslått, og gjør det riktig, vil de se at de sammenfaller stadig bedre med tangenten de tegner like etterpå. Dette er et adidaktisk element i miljøet som gir oppgaven et adidaktisk potensial.

5.3.5 Plenumsdel 2 som Valideringsfase 2 og institusjonaliseringsfase

Til slutt leder læreren en diskusjon om hva vi har gjort. Denne diskusjonen inneholder deler av Formuleringsfase 2 og Valideringsfase 2 i sin helhet. Her sørger læreren for å få fram både den numeriske og den grafiske løsningsmetoden som er presentert i Seksjon 5.3.3 (Formuleringsfase 2). Valideringsfase 2 består av at elevene begrunner sine løsninger, noe som ideelt sett springer ut fra elevene selv (adidaktisk valideringsfase), men som ofte er et resultat av at læreren etterspør det (didaktisk valideringsfase). Uansett skal læreren samle trådene til slutt i institusjonaliseringsfasen. Grenseverdier har en svært sentral plass her, først gjennom verbale formuleringer med støtte i henvisninger til det grafiske, og så formelt i form av definisjonen av den deriverte. Denne sekvensen vil forløpe omtrent som følger:

Vi kan gjøre intervallet mellom to nabopunkter vilkårlig lite (viser med en tegning). Vi sier at avstanden mellom punktene «går mot null» eller blir «vilkårlig liten.» At tallet i nevneren av uttrykket for den gjennomsnittlige endringsraten går mot 0, skriver vi som $\Delta x \to 0$. Vi har da $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, der $\Delta x \to 0$ (ikke lik 0, for vi kan ikke ha 0 i nevneren). Dette uttrykket tar ofte en spesiell verdi i grensetilfellet der $\Delta x \to 0$. Det er dette vi kaller den deriverte, definert ved

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Vi sier at f er *deriverbar* i punktet x dersom denne grenseverdien eksisterer.

Den deriverte er et uttrykk for den momentane endringsraten, altså endringen i et punkt, og er lik stigningstallet til tangenten i punktet. Altså kan den deriverte representeres på ulike måter, både algebraisk med symbolspråk (som i definisjonen) og grafisk ved hjelp av en tangent.

Institusjonaliseringsfasen innebærer også en dekontekstualisering av målkunnskapen. Det betyr å løsrive målkunnskapen fra den didaktiske situasjonen slik at elevene tar den med seg i nye adidaktiske situasjoner, det vil si situasjoner uten didaktisk intensjon. Elevene skal forstå at målkunnskapen gjelder uavhengig av akkurat den situasjonen de har jobba med. Momenter jeg tenker læreren kan eller bør inkludere her, er de følgende.

- Nå har vi brukt en metode for å finne den deriverte i ett enkelt punkt, men framgangsmåten med å gjøre avstanden mellom nabopunkter vilkårlig liten er universell; den kan benyttes på alle indre punkter på grafen vår og ellers på kontinuerlige grafer.
- $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ er den formelle definisjonen av den deriverte av f i x. Vi sier at f er *deriverbar* i de punktene hvor denne grenseverdien eksisterer. Altså har $f(x)$ en derivasjonsfunksjon $f'(x)$. Derivasjon er ikke bare å finne momentan endringsrate i ett punkt, men å finne en *funksjon* som gir den deriverte for alle x hvor f er deriverbar.
- f representerer her en hvilken som helst funksjon, og x representerer et hvilket som helst punkt i dens definisjonsmengde. Det er ikke noe spesielt med disse bokstavene, annet enn at vi vanligvis kaller funksjonen f og variabelen x. Vi kunne for eksempel kalt funksjonen g og variabelen a, slik at $g'(a) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{g(a+\Delta a)-g(a)}{\Delta a}$.
- Vi har en rekke regneregler for å finne denne derivasjonsfunksjonen. De skal vi jobbe med neste uke.
- Derivasjon er meget sentralt i læreplanen i R1.

I institusjonaliseringen bør læreren også noe om målkunnskapens opprinnelse og funksjon i samfunnet. Her henviser jeg til Seksjon 4.1.2 og 4.1.3.

6 Diskusjon

Innledningsvis i oppgaven presenterte jeg følgende forskningsspørsmål: «Hvordan kan jeg ved hjelp av didaktisk ingeniørvirksomhet designe et undervisningsopplegg i R1 som gir en god introduksjon til differensialregning?» Undervisningsopplegget presentert i Kapittel 5 er mitt forslag til et slikt design. Jeg vil her diskutere årsakene til at jeg mener designet faktisk gir en god introduksjon til differensialregning.

Et viktig trekk ved designet er at jeg venter til institusjonaliseringsfasen med å innføre den formelle algebraiske definisjonen av den deriverte, og dermed også notasjonen for grenseverdier. Dette er en avgjørelse også Weigand (2014) tar sterkt til orde for. Det gjør at Deloppgave 1d) og 2e) blir utforskende oppgaver fordi elevene ennå ikke er blitt presentert for en algoritme, formell eller endelig løsningsmetode. Spørsmålene i de nevnte deloppgavene er åpne på den måten at de ikke gir føringer om noen bestemt framgangsmåte. Dermed står elevene fritt hva angår valg av strategi. I Deloppgave 2e) er det dog et forslag om å sammenligne sekantene med tangenten, noe som vil oppfattes som et hint.

Rekkefølgen for de ulike representasjonene av grenseverdier er ikke tilfeldig. I Plenumsdel 1 ser vi på sekanten gjennom $(2, f(2))$ og $(3, f(3))$ og bruker den som utgangspunkt for en diskusjon om hvordan vi kan finne en bedre tilnærming til momentanhastigheten i $(2, f(2))$. Ved hjelp av en grafisk representasjon tar vi her de første stegene på veien mot utviklinga av grenseverdibegrepet. I Oppgave 2 reduserer vi steglengden, og elevene får se at denne endringen gjør at linjestykkene i større grad sammenfaller med grafen. Siden får de også sammenligne tangenten og sekanter som nærmer seg tangenten. Det har potensiale for å gi en grafisk forståelse av grenseverdier. Elevene skal også finne et algebraisk uttrykk for den gjennomsnittlige endringsraten mellom punktene, noe som gir grunnlag også for en numerisk forståelse av grenseverdier. Her kunne jeg med fordel også bedt elevene sammenligne tallverdiene som uttrykker de ulike sekantenes (og tangentens) stigningstall. Det kunne man enkelt gjort ved hjelp av kommandoen «Stigning» i GeoGebra, og ville gjort demonstrasjonen av grenseverdier enda tydeligere. I Plenumsdel 2 blir grenseverdibegrepet representert verbalt gjennom formuleringer som er typiske for det intuitive grenseverdibegrepet: avstanden «går mot null» eller blir «vilkårlig liten» eller «så liten vi ønsker.» Til slutt, i institusjonaliseringsfasen, stadfestes den formelle notasjonen for grenseverdier. Jeg tror denne rekkefølgen er hensiktsmessig fordi konseptet om grenseverdier da får tid til å modnes underveis i prosessen, mens det symbolske uttrykket ennå ikke er presentert. Grenseverdibegrepet «vokser gradvis fram» istedenfor å brått bli innført med en notasjon som er ny eller nesten ny, og ukjent. På denne måten vil mange trolig se behovet for et grenseverdibegrep *før* det er formelt definert. Weigand (2014) mener det legger til rette for en god forståelse av grenseverdier og den deriverte når elevene både får gå gjennom den diskrete tilnærmingsprosessen og erfare resultatene som følger av denne prosessen. Han mener også at god forståelse av grenseverdier krever forklaringer og visualiseringer gjennom ulike representasjoner, som dette designet inneholder.

Jeg mener også GeoGebra spiller en svært viktig rolle i prosessen med å utvikle grenseverdibegrepet. Det digitale verktøyet gir mange muligheter som er nyttige i denne sammenhengen: man kan tegne grafer raskt og presist, man kan zoome inn og ut, som vi gjorde for å skille sekantene fra tangenten og man kan finne stigningstall ved en enkel kommando, for å nevne noe. Det er også mulig å bruke det til dynamiske modeller som kan lages ved bruk av glidere, og som også kan være glimrende modeller for å illustrere grenseverdier.

En fare ved designet når det gjennomføres i en R1-klasse er at den didaktiske intensjonen blir avslørt tidlig. Som presisert i Seksjon 4.3 har elevene tross alt vært innom derivasjon i 1T, og læreboka *Sinus 1T Matematikk* presenterer notasjonen $\lim_{x \to 0} f(x)$. Dette kan få store negative konsekvenser for utbyttet av dette opplegget fordi elevene vet hva som kommer. Kanskje husker de også derivasjonsreglene fra 1T slik at de regner ut svarene i oppgavene direkte. Da er oppgavene som presenterer problemet, ikke lenger verken problemløsningsoppgaver eller utforskende oppgaver, og prosessen kan bli ansett som meningsløs og tungvinn. Jeg anser det som nokså sannsynlig at designet mitt viser seg å passe like bra, om ikke bedre, i en 1T-klasse hvor begrepene grenseverdi, endringsrate og derivasjon er helt nye for elevene. Det gjenstår å se når jeg får realisert opplegget jeg har laga.

7. Avsluttende refleksjoner

7.1 Relevans i skolen

Som nevnt tidligere inngår ulike elementer av differensialregning i læreplanen i både 1T, S1, S2, R1 og R2. I R1-pensumet er temaet svært sentralt. Dette opplegget legger til rette for en bedre forståelse av begrepene endringsrate (står som «vekstfart» i læreplanen), grenseverdi og derivasjon. Opplegget baserer seg i stor grad bruken av digitale ressurser i form av GeoGebra. Digitale ferdigheter er ikke bare blant kompetansemålene i alle nevnte matematikkfag, men også én av fem grunnleggende ferdigheter i Overordnet del av læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2017, s. 11). Dessuten har differensialregning en tydelig relevans i samfunnet, noe jeg drøfta i Seksjon 4.1.3 og 4.1.4. Dette har en verdi fordi elevene skal i Matematikk R «oppleve at faget er relevant» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). I tillegg legger opplegget til rette for å knytte målkunnskapen til matematikkens (og fysikkens) historie. Det er opp til læreren å belyse målkunnskapens relevans i samfunnet og tilknytning til historien i institusjonaliseringsfasen av designet.

Jeg mener dette undervisningsopplegget kan bidra til en undervisning i tråd med flere av grunnopplæringens verdier og prinsipper enn de som handler om det rent matematisk faglige. Grenseverdibegrepet mener jeg er spesielt egna for å skape undring og fascinasjon hos elevene. Hva mener vi når vi sier at «h går mot 0» eller at vi kan gjøre avstanden mellom to punkter «vilkårlig liten» eller «så liten vi vil?» Noen ganger bruker man også formuleringene «uendelig liten» eller «uendelig stor.» Hva er egentlig forskjellen på «uendelig nærme 0» og 0? Som vi har sett, er dette spørsmål som meldte seg allerede ved differensialregningens opprinnelse på 1600-tallet. Grenseverdier og deres tilknytning til infinitesimale og uendelige «størrelser» er nok med på å gjøre differensialregning abstrakt og vanskelig for mange elever. Samtidig har det potensiale for å vekke undring og fascinasjon, som jeg skrev i innledningen at det gjorde for meg. Herfra er veien kort til videre engasjement og utforskertrang, noe som er understreka i Overordnet del av læreplanen: «I opplæringen skal elevene få rike muligheter til å utvikle engasjement og utforskertrang» (Utdanningsdirektoratet, 2017, s. 7).

7.2 Personlig utbytte

Jeg vil si at jeg har fått et stort utbytte av arbeidet med dette masterprosjektet. Jeg har lært mer om differensialregning gjennom de ulike analysene jeg har gjort. Spesielt vil jeg trekke fram historien om dens opprinnelse og utvikling gjennom Galileo, Newton, Leibniz og Cauchy, men jeg har også lært om dens relevans i samfunnet, legitimitet i skolen og om hvordan den kan og bør undervises. Gjennom denne prosessen har jeg også fått øvelse i å søke etter gode kilder og forskningsartikler, noe som er en verdifull erfaring til senere undersøkelser. Jeg har dessuten fått bryne meg på utfordringen med å designe et introduserende undervisningsopplegg om temaet ved hjelp av didaktisk ingeniørvirksomhet, og med det har jeg et opplegg som jeg gleder meg til å teste ut i praksis. Didaktisk ingeniørvirksomhet kan brukes til å designe didaktiske situasjoner i alle matematiske temaer hvor en er ute etter en bestemt kunnskap. Enkelte elementer av metodologien kan være nyttige å bruke i planlegging og analyse også av ordinære undervisningssituasjoner. Derfor ser jeg for meg at dette arbeidet og erfaringa med didaktisk ingeniørvirksomhet vil komme godt med når jeg som framtidig lærer skal planlegge matematikkundervisning. Det å definere et problem som målkunnskapen er en optimal løsning på er en tilnærming til undervisninga som jeg vil ta med meg videre.

Som lærer er det utenkelig å gjøre en like grundig analyse før hver undervisningstime, men over tid har en mulighet til å utvikle sin kunnskap innenfor et matematisk tema ved å gå fram som en gjør i de forberedende analysene. Forhåpentligvis vil jeg se at de forberedende analysene av differensialregning er med på å berike undervisninga i dette temaet, og at det gir meg inspirasjon til å gjøre lignende analyser også innenfor andre områder av matematikken.

Referanseliste

Adams, R.A. & Essex, C. (2014). *Calculus* (8. utg.). Pearson Canada Inc.

Alfsen, M. (1921). Infinitesimalregning i gymnasiet. I P. Heegaard & O. Thalberg (Red.), *Norsk matematisk tidsskrift: Organ for norsk matematisk forening* (3. Aargand, 1. Hefte, s. 1–6). Grøndahl & Søn.

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. I A. Watson & M. Othani (Red.), *Task Design In Mathematics Education* (s. 249–272). Springer International Publishing.

Cauchy, A.-L. (1823). *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique, sur le calcul infinitésimal*. Debure. Tilgjengelig fra https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62404287.texteImage

Direktoratet for høyere utdanning og kompetanse. (2020, 16. november). *Valg av matematikk på videregående.* https://utdanning.no/tema/utdanning_hjelp_og_veiledning/valg_av_matematikk_pa_videregaende

Edwards, C.H. (1979). *The historical development of the calculus.* Springer-Verlag.

Grabiner, J. (1978). The origins of Cauchy's theory of the derivative. *Historia Mathematica, 5*, 379–409. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086078902082?via%3Dihub

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 39, No. 1/3,* 111–129.

Holme, A. (2004). *Matematikkens historie 2.* Fagbokforlaget.

Katz, V.J. (2009). *A history of mathematics: An introduction* (3. utg.). Pearson Education, Inc.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press.

Lang, S. (1986). *A first course in calculus* (5. utg.). Springer-Verlag New York Inc.

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (3. utg.). Universitetsforlaget AS.

Oldervoll, T., Svorstøl O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Jacobsen, R. B. & Pedersen, T. (2020). *Sinus 1T Matematikk.* Cappelen Damm.

Strømskag, H. (2020). Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk: Et systemisk rammeverk for å utvikle og studere matematikkundervisning. I V. Nilssen & S.-M. Høynes (Red.), *Samtaleorientert matematikk: Et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (s. 25–80). Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/om-overordnet-del/

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat09-01?lang=nno

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R) (MAT03-02).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat03-02

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk for samfunnsfag (matematikk S) (MAT04-02).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat04-02

Weigand, H.G. (2014). A discrete approach to the concept of derivative. *ZDM Mathematics Education,* 603–619. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0595-x

NTNU

Kunnskap for en bedre verden