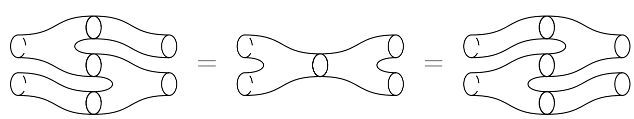
Topologiske kvantefeltteoriar og koplingar til kommutative frobeniusalgebraar

Håkon Skjalg Selland Johnstuen

Mai 2020



$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \otimes A \arrow[dr, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"] & \\
A \otimes A \arrow[ur, "\mathrm{id}_A\otimes\delta"] \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\delta\otimes\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[r, "\delta"] & A \otimes A \\
& A \otimes A \otimes A \arrow[ur, "\mathrm{id}_A\otimes\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

1 Introduksjon

1.1 Motivasjon

I denne bacheloroppgåva vil me sjå på samanhengen mellom spesielle symmetrisk-monoidale funktorar kalla topologiske kvantefeltteoriar og kommutative frobeniusalgebraar. Topologiske kvantefeltteoriar er funktorar frå kategorien av kobordismar av ein gjeven dimensjon, til kategorien av vektorrom over ein gjeven kropp. Dette er funktorar som omset topologiske eigenskapar på mangfaldigheiter som genus, rand og samanhenge til lineæravbildingar mellom vektorrom. Frobeniusalgebraar er vektorrom med ein spesiell symmetrisk multiplikativ struktur, og oppstår naturleg blant vanlige algebraar me allereie kjenner til.

Målet for oppgåva er å visa ein ekvivalens av kategoriar, mellom kategorien av todimensjonale topologiske kvantefeltteoriar og kategorien av kommutative frobeniusalgebraar. Me vil strukturera sjølve provet for dette ved å studera dei inngåande komponentane kvar for seg: frobeniusalgebraar, kobordismar og til slutt topologiske kvantefeltteoriar. Dette er naturleg då desse temaa bur på ulike grender i matematikkbygda, og bør derfor presenterast i sine naturlege habitat. Ein slik framgangsmåte vil vonleg òg underbyggja entusiasmen rundt hovudteoremet, der tilsynelatande separate og ulike konstruksjonar sameinast som sysken.

Fruktene ein kan høsta frå hovudteoremet vil vera av smaken «algebraiske invariantar av mangfaldigheiter». Meir spesifikt vil einkvar frobeniusalgebra gje konstante invariantar for lukka flater — eit tal, rett og slett. Desse invariantane vil hjelpa oss å skilja mangfaldigheiter frå kvarandre: dersom to mangfaldigheiter får ulike tal som invariantar under ein frobeniusalgebra, kan ikkje mangfaldigheitene vera diffeomorfe til kvarandre.

1.2 Formål

Formålet med denne bacheloroppgåva er å læra å presentera ein matematisk tekst skfitleg. Til dette formålet har eg sett meg inn i typesettingsystemet LaTeX, den dominerande programvara i produksjon av matematiske tekstar. Bacheloroppgåva er eit sjølvstendig prosjektarbeid med rettleiing. Eg har eigenhendig og med tilvising oppsøkt matematisk litteratur, og prøvd etter beste evne å trekkja eigne slutningar basert på ulike synspunkt. Hovudinspirasjonen for oppgåva har vore den velskrivne og fengande boka til Kock [3]. Språkvalet i oppgåva er gjort bevisst, og eit underliggjande formål med oppgåva har vore å formulera presis matematikk gjennom god, norsk språkføring. I kva grad dette har vore vellukka er ein dom for dei språkunnige lesarane av denne oppgåva.

Temaet for oppgåva og framstillinga av ho er gjort i samråd med Marius Thaule ved Institutt for matematiske fag.

1.3 Notasjon og ordbruk

Gjennom oppgåva vil eg introdusera konsept som eg ikkje antar er kjende for målgruppa. Under finn lesaren nokre meir vanlege matematiske teikn med forklaring. Her vil lesaren òg finna nokre omsetjingar frå norsk til engelsk for spesielle ord, og i seksjon 7 vil ho finna bakgrunnsstoff rundt dei sentrale kategoriteoretiske temaa i oppgåva.

$\cong$ kategorisk isomorfisymbol

$\mathbb{C}$ dei komplekse tala

$\mathbb{Q}$ dei rasjonale tala

$\mathbb{R}$ dei reelle tala

$\mathbb{N}$ dei naturlege tala $= 0, 1, 2, \ldots$

$\otimes$ tensorprodukt

$\times$ kartesisk produkt

S^n n-sfæren

X^n kartesisk produkt av X n gongar

$X^{\otimes n}$ tensorprodukt av X n gongar

- Avbilding — Map

- Definisjonsområde — Domain

- Eining — Unit

- Hovudideal — Principal ideal

- Ikkjedegenerert — Non-degenerate

- Målområde — Codomain

- Omgjevnad — Neighbourhood

- Rand — Boundary

Innhald

2 Frobeniusalgebraar

I denne delen av oppgåva vil me introdusera frobeniusalgebraar og studera dei ulike avbildingane som oppstår i ein slik algebra. Målet er å karakterisera ein frobeniusalgebra gjennom samspelet mellom desse avbildingane, som me vil kalla *relasjonane* i algebraen. Etter dette vil me sjå at eit vektorrom utstyrt med lineæravbildingar med tilsvarande relasjonar, faktisk er ein frobeniusalgebra. Avslutningsvis vil me sjå at frobeniusalgebraar dannar ein kategori, og at kategorien tillet ein symmetrisk-monoidal struktur.

Ein algebra er i bunn og grunn eit vektorrom, men med meir struktur — der det er lagt til ein multiplikasjon som er kompatibel med den underliggjande strukturen. La oss bli påminna kva eit vektorrom er, og sjå dei grunnleggjande definisjonane.

Definisjon 2.1. Eit vektorrom over ein kropp $\Bbbk$ er ei abelsk gruppe A saman med ein ringverknad $\Bbbk \times A \to A$ slik at A er ein modul over $\Bbbk$.

Definisjon 2.2. Ein algebra over ein kropp $\Bbbk$ er eit vektorrom A over $\Bbbk$ saman med to avbildingar, $\mu : A \otimes A \to A$ (kalla *multiplikasjon*) og $\eta : \Bbbk \to A$ (kalla *eining*), slik at dei fylgjande diagramma kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \otimes A \arrow[dl, "\mu\otimes \mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A\otimes\mu"] & \\
A \otimes A \arrow[dr, "\mu"'] & & A \arrow[dl, "\mu"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
& A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[d, "\mu"'] & A \otimes \Bbbk \arrow[l, "\mathrm{id}_A\otimes\eta"'] \arrow[dl] \\
A &
\end{tikzcd}$$

Viss me brukar notasjonen $x \otimes y \to xy$ for verknaden frå μ, seier det øvste diagrammet at $x(yz) = (xy)z$, og viss me lar 1_A vera bildet av 1 under $\eta : \Bbbk \to A$, seier dei to nedste at $x1_A = x = 1_A x$. Med andre ord er multiplikasjonen assosiativ og det finst eit nøytralt multiplikativt element 1_A i algebraen. Me skriv gjerne at A er ein $\Bbbk$-algebra for å spesifisera den underliggjande kroppen.

Definisjon 2.3. Ein frobeniusalgebra er ein endelegdimensjonal $\Bbbk$-algebra A saman med ein lineær funksjonal $\varepsilon : A \to \Bbbk$ (kalla *frobeniusforma* på A), slik at $Null(\varepsilon)^\dagger$ ikkje rommar ikkjetrivielle ideal.

†Me brukar $Null(\varepsilon) = \{a \in A \mid \varepsilon(a) = 0\}$ i staden for $ker(\varepsilon)$ for å understreka at $Null(\varepsilon)$ ikkje er eit ideal under μ, men eit lineært underrom av A.

Me vil sjå seinare i oppgåva at dette er éin måte å definera ein frobeniusalgebra på. Denne definisjonen gjev faktisk opphav til ein annan, ekvivalent definisjon. Denne vil me oppdaga gjennom å studera funksjonalen ε nærmare. For å gjera funksjonalen litt enklare å jobba med vil me heller sjå på hovudideal i $Null(\varepsilon)$, og observera at når $Null(\varepsilon)$ ikkje rommar ikkjetrivielle ideal er dette ekvivalent med at $Null(\varepsilon)$ ikkje rommar ikkjetrivielle hovudideal.

Lemma 2.1. *$Null(\varepsilon)$ har ingen ikkjetrivielle ideal viss og berre viss $\varepsilon(Ay) = 0 \implies y = 0$.*

Prov. Me viser begge vegar kontrapositivt. «$\Rightarrow$»: anta at det finst ein $y \in A$ med $\varepsilon(Ay) = 0$. Då er Ay eit ikkjetrivielt ideal i A og $Ay \subset Null(\varepsilon)$, som betyr at $Null(\varepsilon)$ rommar ikkjetrivielle ideal. «$\Leftarrow$»: anta at $I \subset A$ er eit ideal slik at $I \subset Null(\varepsilon)$ og $I \neq (0)$. Ta eit element $0 \neq y \in I$ og sjå på hovudidealet $Ay \subset I$. Sidan $\varepsilon(I) = 0$ og $Ay \subset I$, vil $\varepsilon(Ay) = 0$ utan at $y = 0$. □

Me kan nå sjå på nokre enkle døme på frobeniusalgebraar.

Døme 2.1. La $\Bbbk = \mathbb{C}$ vera kroppen av komplekse tal. Sjå på $\mathbb{C}$-algebraen $A = \mathbb{C}[x]/x^n$ generert av $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ med vanleg multiplikasjon av polynom og inklusjonen av $\mathbb{C}$ inn i A som einingsavbilding. Definer ein funksjonal ε som sender generatoren x^{n-1} til 1 og dei andre generatorane til 0:

$$\varepsilon(x^i) = \begin{cases} 1, & i = n-1, \\ 0, & i \neq n-1. \end{cases}$$

Me påstår at ε er ei frobeniusform på A. For å lita på dette må me visa at $Null(\varepsilon)$ ikkje rommar ikkjetrivielle hovudideal. Anta derfor at $Aq \subset Null(\varepsilon)$ for eit element $0 \neq q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$. Anta vidare at $a_i \neq 0$ for ein $i = 1, \ldots, n-1$. Sidan $x^{n-1-i} \in A$ og Aq er eit ideal må $x^{n-1-i}q \in Aq$, som gjeld spesielt for $x^{n-1-i}(a_i x^i) = a_i x^{n-1}$. Sidan ε er lineær får me at

$$\varepsilon(a_i x^{n-1}) = a_i \varepsilon(x^{n-1}) = a_i = 0 \implies q = 0 \implies Aq = (0).$$

Dermed har $Null(\varepsilon)$ ingen ikkjetrivielle ideal, og (A, ε) er vår fyrste frobeniusalgebra!

2.1 Dualar og induserte paringar

Definisjon 2.4. La V og W vera vektorrom over ein kropp $\Bbbk$. Ei *bilineær paring*, eller berre *paring* er ei avbilding $\beta : V \otimes W \to \Bbbk$ med fylgjande eigenskapar:

1. $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2 \in V, \quad y \in W,$
2. $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x \in V, \quad y_1, y_2 \in W,$
3. $\beta(ax, y) = \beta(x, ay) = a\beta(x, y) \quad \forall x \in V, \quad y \in W, \quad a \in \Bbbk.$

Me skriv gjerne $\langle x \mid y \rangle$ for bildet av $\beta(x, y)$.

Definisjon 2.5. Ei paring $\beta : V \otimes W \to \Bbbk$ blir kalla *ikkjedegenerert i variabelen* V dersom det finst ei lineær avbilding $\gamma : \Bbbk \to W \otimes V$ (kalla *koparinga*), slik at komposisjonen

$$V \cong V \otimes \Bbbk^{\dagger} \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \gamma} V \otimes (W \otimes V) \cong (V \otimes W) \otimes V \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_W} \Bbbk \otimes V \cong V$$

verkar som identiteten på V. Tilsvarande har me at β er *ikkjedegenerert i variabelen* W dersom det finst ei koparing $\gamma : \Bbbk \to W \otimes V$ slik at komposisjonen

$$W \cong \Bbbk \otimes W \xrightarrow{\gamma \otimes \mathrm{id}_W} (W \otimes V) \otimes W \cong W \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \beta} W \otimes \Bbbk \cong W$$

verkar som identiteten på W. Viss paringa β er ikkjedegenerert i begge variablane, kallar me β berre *ikkjedegenerert*, og i det tilfellet vil me sjå at koparingane er like.

Lemma 2.2. *La $\beta : V \otimes W \to \Bbbk$ vera ei ikkjedegenerert paring og la γ_V og γ_W vera koparingane som gjer β ikkjedegenerert i respektivt V og W. Då er $\gamma_V = \gamma_W$.*

Prov. Definer komposisjonen λ som

$$\Bbbk \xrightarrow{\gamma_V \otimes \gamma_W} (W \otimes V) \otimes (W \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_V} W \otimes V.$$

Me kan faktorisera ut γ_V på denne måten:

$$\Bbbk \xrightarrow{\gamma_V} W \otimes V \xrightarrow{\gamma_W \otimes (\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_V)} (W \otimes V) \otimes (W \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_V} W \otimes V.$$

Sidan β er ikkjedegenerert i W har me at komposisjonen $(\mathrm{id}_W \otimes \beta) \circ (\gamma_W \otimes \mathrm{id}_W) = \mathrm{id}_W$, som gjer at

$$\begin{aligned} \lambda &= (\mathrm{id}_W \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\gamma_W \otimes (\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_V)) \circ \gamma_V \\ &= (\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_V) \circ \gamma_V \\ &= \gamma_V. \end{aligned}$$

Tilsvarande kan me faktorisera ut γ_W:

$$\Bbbk \xrightarrow{\gamma_W} W \otimes V \xrightarrow{(\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_V) \otimes \gamma_V} (W \otimes V) \otimes (W \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_V} W \otimes V.$$

Sidan β er ikkjedegenerert i V har me at komposisjonen $(\beta \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \gamma_V) = \mathrm{id}_V$, som gjer at

$$\begin{aligned} \lambda &= (\mathrm{id}_W \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_V) \circ ((\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_V) \otimes \gamma_V) \circ \gamma_W \\ &= (\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_V) \circ \gamma_W \\ &= \gamma_W. \end{aligned}$$

Altså har me at $\gamma_W = \gamma_V$. $\square$

[†]Her har me brukt den monoidale strukturen til kategorien $\mathbf{Vect}_{\Bbbk}$. Sjå 7.2.

Grunnen til å bruka tid på desse paringane er at nettopp ei slik paring oppstår naturleg i ein $\Bbbk$-frobeniusalgebra A: sjå på komposisjonen $\varepsilon \circ \mu : A \otimes A \to \Bbbk$ av multiplikasjonen og frobeniusforma. Dette er då ei avbilding mellom eit vektorrom og ned i den underliggjande kroppen. Med litt arbeid kan me visa at denne paringa faktisk er er ikkjedegenerert og assosiativ.

Lemma 2.3. *La A vera ein $\Bbbk$-frobeniusalgebra med frobeniusform ε og definer komposisjonen $\beta := \varepsilon \circ \mu$. Då er β ei assosiativ, bilineær paring.*

Prov. Me påstår at β har dei fylgjande eigenskapane:

(i) $\beta(xy, z) = \beta(x, yz), \quad x, y, z \in A,$

(ii) $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y), \quad x_1, x_2, y \in A,$

(iii) $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2), \quad x, y_1, y_2 \in A,$

(iv) $\beta(ax, y) = \beta(x, ay) = a\beta(x, y), \quad x, y \in A, \quad a \in \Bbbk,$

som alle fylgjer frå eigenskapane til μ og ε:

(i) $\beta(xy, z) = \varepsilon(\mu(xy, z)) = \varepsilon(\mu(x, yz)) = \beta(x, yz),$

(ii) $\beta(x_1 + x_2, y) = \varepsilon(\mu(x_1 + x_2, y)) = \varepsilon(\mu(x_1, y) + \mu(x_2, y)) = \varepsilon(\mu(x_1, y)) + \varepsilon(\mu(x_2, y)) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y),$

(iii) $\beta(x, y_1 + y_2) = \varepsilon(\mu(x, y_1 + y_2)) = \varepsilon(\mu(x, y_1) + \mu(x, y_2)) = \varepsilon(\mu(x, y_1)) + \varepsilon(\mu(x, y_2)) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2),$

(iv) $\beta(ax, y) = \varepsilon(\mu(ax, y)) = \varepsilon(\mu(x, ay)) = \beta(x, ay),$
$\beta(ax, y) = \varepsilon(\mu(ax, y)) = \varepsilon(a\mu(x, y)) = a\varepsilon(\mu(x, y)) = a\beta(x, y).$

I (i) har me brukt at μ er assosiativ, og i (ii) og (iii) at μ er lineær i respektive fyrste og andre argument. I (iv) har me brukt at både μ og ε er lineære. $\square$

Me ser at ei frobeniusform gjev opphav til ei paring. På tilsvarande måte vil ei paring $\beta : V \otimes W \to \Bbbk$ mellom vektorrom gje opphav til funksjonalar ved å låsa identiteten i eit av argumenta;

$$\varepsilon_V : V \to \Bbbk \text{ og } \varepsilon_W : W \to \Bbbk,$$

$$v \mapsto \langle v \mid 1_W \rangle \text{ og } w \mapsto \langle 1_V \mid w \rangle.$$

Det gjenstår nå å visa at ei ikkjedegenerert paring gjev funksjonalar i same stil som i definisjon 2.3, og motsett.

Lemma 2.4. *La $\beta : V \otimes W \to \Bbbk$ vera ei paring mellom vektorrom. Då er dei fylgjande ekvivalente:*

(i) β er ikkjedegenerert,

(ii) V er endelegdimensjonalt og viss $\langle v \mid w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$, så må $v = 0$,

(iii) W er endelegdimensjonalt og viss $\langle v \mid w\rangle = 0 \quad \forall v \in V$, så må $w = 0$.

Prov. «$(i) \Rightarrow (ii)$»: anta at β er ikkjedegenerert, og sei at $\gamma : \mathbb{k} \to W \otimes V$ er den tilhøyrande koparinga. La $\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i$ vera bildet av $1_{\mathbb{k}} \in \mathbb{k}$ under γ, og la $v \in V$ vera eit vilkårleg element. Sidan β er ikkjedegenerert veit me at komposisjonen $(\beta \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \gamma) = \mathrm{id}_V$, som betyr at dersom me sender v igjennom denne komposisjonen får me v tilbake att:

$$v \xmapsto{\mathrm{id}_V \otimes \gamma} v \otimes \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{n} v \otimes w_i \otimes v_i \xmapsto{\beta \otimes \mathrm{id}_V} \sum_{i=1}^{n} \langle v \mid w_i \rangle \otimes v_i = v.$$

For ein vilkårleg $v \in V$ er altså $v \in \mathrm{span}\{v_1, \dots v_n\}$, og V må vera eit endelegdimensjonalt vektorrom. Anta nå at $\langle v \mid w\rangle = 0$ for alle $w \in W$. Dette gjeld då spesielt for $\{w_1, \dots w_n\}$, som betyr at $\sum_{i=1}^{n} \langle v \mid w_i \rangle \otimes v_i = 0 \implies v = 0$.

«$(ii) \Rightarrow (i)$»: anta at V er endelegdimensjonalt med basis $\{v_1, \dots v_n\}$. Då er dei induserte funksjonalane $\langle v_i \mid - \rangle$ lineært uavhengige i W^* og utgjer ein dualbasis, så det finst vektorar $\{w_1, \dots w_n\}$ i W slik at

$$\langle v_i \mid w_i \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Me definer ei koparing γ ved å la $\gamma(1_{\mathbb{k}}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i$. La $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ vera ein vektor i V, og send igjennom komposisjonen $V \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \gamma} V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_V} V$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j \mapsto \sum_{i,j} a_j v_j \otimes w_i \otimes v_i \mapsto \sum_{i,j} \langle v_j \mid w_i \rangle a_j v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

så β er ikkjedegenerert i variabelen V. På tilsvarande måte kan ein visa «$(i) \iff (iii)$», som fullfører provet. $\square$

Korollar 2.1. *La A vera ein $\mathbb{k}$-frobeniusalgebra med ei lineær funksjonal ε. Då er komposisjonen $\varepsilon \circ \mu$ er ei ikkjedegenerert, assosiativ paring.*

Prov. Me veit at A er ein endelegdimensjonal algebra. Anta nå at $\varepsilon(\mu(x, y)) = 0$ for alle $x \in A$. Altså er $\varepsilon(Ay) = 0$, som betyr at $y = 0$ fordi ε er ei frobeniusform. Lemma 2.4 seier då at komposisjonen $\varepsilon \circ \mu$ er ikkjedegenerert. $\square$

Korollar 2.2. *La A vera ein $\mathbb{k}$-algebra med ei ikkjedegenerert, assosiativ paring $\beta : A \otimes A \to \mathbb{k}$. Då er funksjonalen $\langle 1_A \mid - \rangle = \langle - \mid 1_A \rangle : A \to \mathbb{k}$ ei frobeniusform på A.*

Prov. Anta at det finst eit hovudideal Ay slik at $\langle Ay \mid 1_A \rangle = \langle A \mid y \rangle = 0$, altså at $\langle x \mid y \rangle = 0$ for alle $x \in A$.

Lemma 2.4 seier då at $y = 0$, som betyr at $Ay = (0)$. Lemma 2.1 gjev oss då at $Null(\langle . \mid 1_A \rangle)$ ikkje rommar ikkjetrivielle ideal. Altså er funksjonalen $\langle Ay \mid 1_A \rangle$ ei frobeniusform. Resultatet er analogt for det andre argumentet. $\square$

Desse korollara opnar nå for ein alternativ definisjon av ein frobeniusalgebra:

Definisjon 2.6. Ein frobeniusalgebra er ein $\mathbb{k}$-algebra A saman med ei ikkjedegenerert, assosiativ paring $\beta : A \otimes A \to \mathbb{k}$, kalla *frobeniusparinga*.

Merk at i denne definisjonen treng me ikkje anta at A er endelegdimensjonalt, då dette fylgjer frå at β er ikkjedegenerert.

2.2 Koalgebraar

Definisjon 2.7. Ein koalgebra over ein kropp $\mathbb{k}$ er eit vektorrom A saman med to avbildingar, $\delta : A \to A \otimes A$ (kalla *komultiplikasjon*) og $\varepsilon : \mathbb{k} \to A$ (kalla *koeining*), slik at dei fylgjande diagramma kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \otimes A & \\
A \otimes A \arrow[ur, "\delta\otimes\mathrm{id}_A"] & & A \otimes A \arrow[ul, "\mathrm{id}_A\otimes\delta"'] \\
 & A \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{k} \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}_A"'] \\
 & A \arrow[ul] \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_A\otimes\varepsilon"] & A \otimes \mathbb{k} \\
A \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Diagramma viser respektivt *koassosiativitet* og *koeiningeigenskapen*.

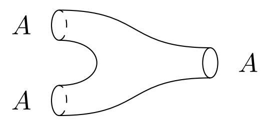
Så langt har me vist at einkvar frobeniusalgebra kan karakteriserast anten ut i frå frobeniusforma eller frobeniusparinga, og at desse definisjonane er ekvivalente. For ein gjeven frobeniusalgebra A har me altså tilhøyrande avbildingar $\mu, \eta, \varepsilon, \beta, \gamma$ og id_A; respektivt multiplikasjonen, eininga, frobeniusforma, frobeniusparinga, koparinga og identitetsavbildinga. Ein kan kanskje spørja seg sjølv kva andre avbildingar ein kan få av å komponera desse fem i ulike retningar. Me kjem til å sjå at det faktisk ligg gjemt ein koalgebrastruktur mellom desse avbildingane. Dette krev ein drøss med piler, og før me går i gang vil me innføra ein grafisk notasjon for avbildingane.

2.3 Grafisk algebra

Kommutative diagram er kategoriteoriens språk, og dei kan formidla mykje presis informasjon på ein eintydig måte. Ei pil går frå eit definisjonsområde til eit målområde, og det er samspelet mellom andre piler i det same diagrammet som skildrar eigenskapane til strukturen ein ser på. Det me nå vil prøva på, er å overføra informasjonen som ligg i pilene, definisjonsområda og målområda til grafiske figurar. For ei gjeven avbilding i algebraen vår består både definisjonsområdet og målområdet av kopiar av algebraen A og kroppen $\mathbb{k}$, sydd saman med tensorproduktet. Sjå til dømes på multiplikasjonen

$$\mu : A \otimes A \to A.$$

Me går frå to kopiar av A til éin kopi av A. Frå nå av vil me erstatta kvar A med ein sirkel, og pilene lar me vera enkle flater som forbind definisjonsområdet med målområdet. Multiplikasjonen blir då sjåande sånn ut:

μ: 

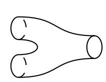
I avbildingar der kroppen $\mathbb{k}$ inngår vil me representera kroppen ved å la delen av flata som peikar mot kroppen ha tom rand. Eininga i algebraen,

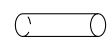
$$\eta : \mathbb{k} \to A,$$

lar me altså bli representert av denne flata:

η: 

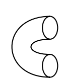
Til saman får me desse seks figurane for kvar av dei naturlege avbildingane i ein frobeniusalgebra, nemleg multiplikasjon, eining, koeining, paring, koparing og identiteten:

$\mu : A \otimes A \to A \iff$ 

$\mathrm{id}_A : A \to A \iff$ 

$\beta : A \otimes A \to \mathbb{k} \iff$ 

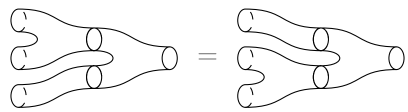
$\varepsilon : A \to \mathbb{k} \iff$ 

$\gamma : \mathbb{k} \to A \otimes A \iff$ 

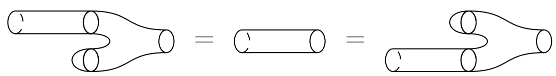
$\eta : \mathbb{k} \to A \iff$ 

Me har essensielt lyst til å uttrykkja fleire av relasjonane i algebraen ved hjelp av desse figurane. Alle figurane går frå venstre mot høgre, som for funksjonen dei representerer svarer til å gå frå definisjonsområdet til målområdet. Vidare lar me tensorproduktet $\otimes$ svara til disjungt union $\coprod$ av figurar, med konvensjonen at funksjonane til venstre i tensorproduktet hamnar øvst i figuren. Komposisjon skildrar me med liming mellom to figurar — dersom ein komposisjon av funksjonar skal gje meining, må eit definisjonsområde samanfalla med eit målområde. Grafisk limer me berre saman sirklane som representerer desse. Komposisjonen går frå venstre mot høgre slik som notasjonen er elles i oppgåva. La oss sjå nokre døme.

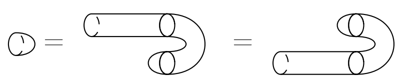
Multiplikasjonen i ein frobeniusalgebra er assosiativ. Ifylgje diagramma våre skal $\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mu)$, ein likskap som kan skildrast grafisk med dei fylgjande figurane:



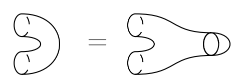
Ein annan viktig eigenskap ved frobeniusalgebraen er einingseigenskapen, nemleg at $\mu \circ (\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \mu)$, som kan skildrast gjennom fylgjande figur:



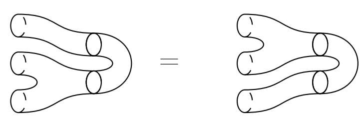
Relasjonane mellom frobeniusparinga β og frobeniusforma ε, nemleg at $\varepsilon = \langle 1_A \mid - \rangle = \langle - \mid 1_A \rangle$ og $\beta = \varepsilon \circ \mu$ kan synast på fylgjande måte:

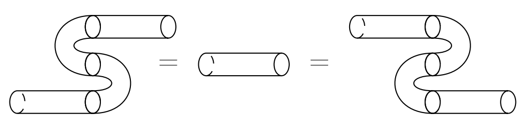


og



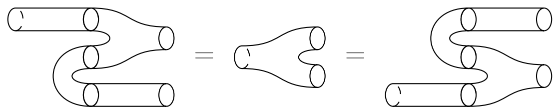
Me har òg assosiativiteten til paringa, samt samspelet med koparinga om identiteten:





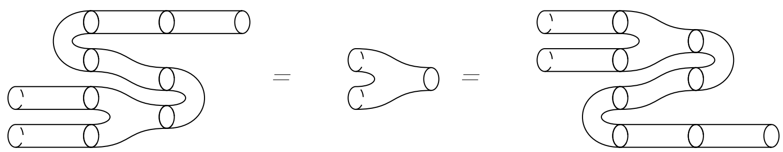
Denne siste relasjonen vil me herfrå kalla *slangerelasjonen*. Merk at sidan ein alltid kan komponera ei avbilding med identitetsavbildinga utan å endra på noko, vil det å leggja til, eller ta bort, identitetar framleis representera den same avbildinga.

For å definera ein komultiplikasjon i algebraen, treng me altså ei koassosiativ avbilding $\delta : A \to A \otimes A$. Måten me vil gjera dette på er å la $\delta = (\mu \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \gamma) : A \cong \Bbbk \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \gamma} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mu \otimes \mathrm{id}_A} A \otimes A$. Merk at viss me byter om på rekkjefylgja i tensorprodukta får me framleis ei avbilding $A \to A \otimes A$, og me har endå ein kandidat for komultiplikasjonen, nemleg $\delta = (\mathrm{id}_A \otimes \mu) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id}_A) : A \cong \Bbbk \otimes A \xrightarrow{\gamma \otimes \mathrm{id}_A} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \mu} A \otimes A$. Målet vårt er å visa at desse konstruksjonane er like, altså at

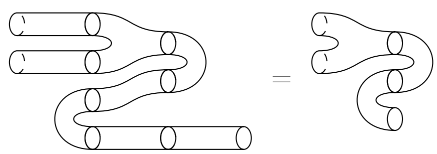


For å visa dette treng me to lemma.

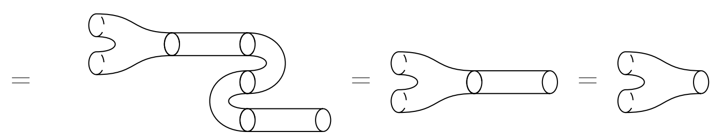
Lemma 2.5. *Desse relasjonane held:*



Prov. Me viser høgresida — venstresida fylgjer analogt. Fyrst tek me bort identitetane:

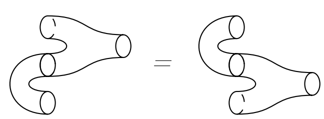


Deretter set me inn identitetar rett etter multiplikasjonen og rett etter koparinga,

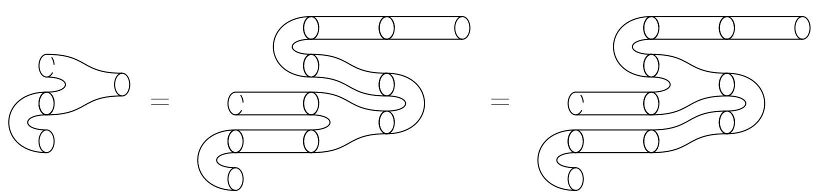


og brukar slangerelasjonen før me tek bort den siste identiteten. □

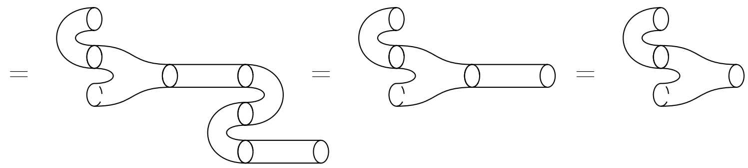
Lemma 2.6. *Desse relasjonane held:*



Prov. Ved å bruka uttrykket for multiplikasjonen i lemmaet over får me



Her har me brukt assosiativiteten til paringa β. Ved å fjerna og leggja til identitetar får me



$\square$

Korollar 2.3. *Konstruksjonane*

$$(\mu \otimes id_A) \circ (id_A \otimes \gamma) : A \to A \otimes A$$

og

$$(id_A \otimes \mu) \circ (\gamma \otimes id_A) : A \to A \otimes A$$

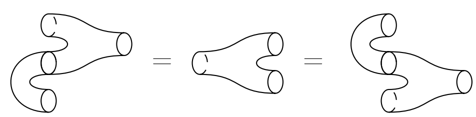
er like.

Me er nå klare til å gje fylgjande definisjon av komultiplikasjonen δ:

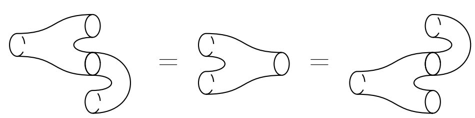
Definisjon 2.8. Me definerer komultiplikasjonen δ i ein frobeniusalgebra til å vera komposisjonen

$$(\mu \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \gamma) = \delta = (\mathrm{id}_A \otimes \mu) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id}_A),$$

som grafisk ser slik ut:



Med denne definisjonen kan me uttrykkja den vanlege multiplikasjonen med komultiplikasjonen, dualen til definisjon 2.8, altså at det fylgjande held:



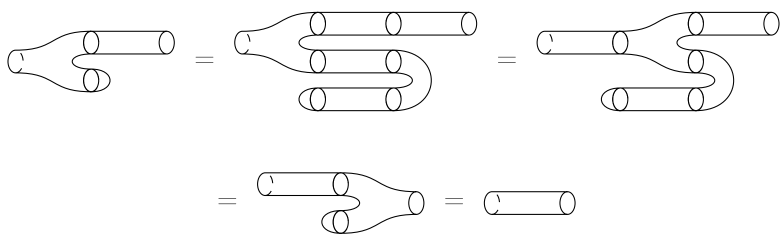
Algebraisk tyder dette at

$$(\mathrm{id}_A \otimes \beta) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_A) = \mu = (\beta \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \delta).$$

Me treng nå ei koeining for komultiplikasjonen — eit nøytralt element. Det er kanskje ikkje overraskande at det er frobeniusforma som speler denne rolla:

Lemma 2.7. *Frobeniusforma ε er koeining for komultiplikasjonen δ.*

Prov (grafisk). Me vil visa at $\delta \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A = \delta \circ (\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon)$. Me viser høgresida av likninga, då venstresida fylgjer analogt.



$\square$

Det kan kanskje vera greitt å sjå korleis eit grafisk prov svarer til eit reint algebraisk prov, og me vil derfor gje eit alternativt prov av lemma 2.7 som berre brukar piler.

Prov (algebraisk). Me vil visa høgresida i likninga, altså at det fylgjande diagrammet kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon"] \\
& A \otimes \Bbbk
\end{tikzcd}$$

Det fyrste me gjer er å leggja til nokre identitetar, samt å bruka at $\varepsilon = \beta \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta)$, og me får dette utvida diagrammet:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\cong"] \arrow[drr] & A \otimes \Bbbk \arrow[r, "\delta \otimes \eta"] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] & A \otimes A \otimes A \arrow[dl, bend left, "\mathrm{id}_A \otimes \beta"] \\
& & A \otimes \Bbbk &
\end{tikzcd}$$

Ved å byta litt om på identitetane får me

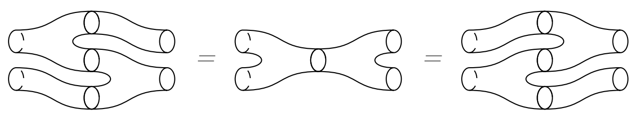
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\cong"] \arrow[drr] & A \otimes \Bbbk \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes \eta"] & A \otimes A \arrow[r, "\delta \otimes \mathrm{id}_A"] & A \otimes A \otimes A \arrow[dl, bend left, "\mathrm{id}_A \otimes \beta"] \\
& & A \otimes \Bbbk &
\end{tikzcd}$$

Nå gjenstår det berre å observera at komposisjonen $(\mathrm{id}_A \otimes \beta) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_A) = \mu$, som forenklar diagrammet til

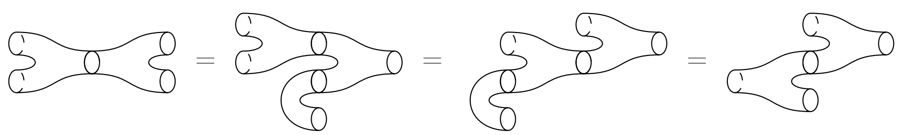
$$\begin{tikzcd}
A \cong A \otimes \Bbbk \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes \eta"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Dette diagrammet veit me at kommuterer, det er nemleg einingseigenskapen til frobeniusalgebraen! ☐

Lemma 2.8. *Komultiplikasjonen δ tilfredsstiller fylgjande relasjon, kalla frobeniusvilkåret:*



Prov. Me viser høgresida i likninga. Ved å bruka relasjonane i definisjon 2.8 får me

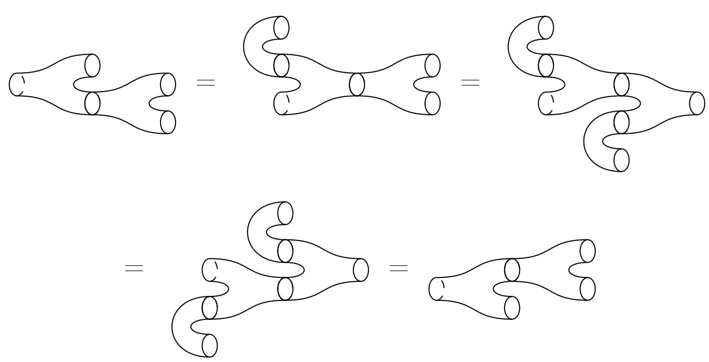


I tredje steg har me brukt assosiativiteten til multiplikasjonen. Merk at me har utelate nokre identitetar her. Venstresida fylgjer analogt. ☐

Det einaste som gjenstår å visa for komultiplikasjonen er koassosiativiteten. Den oppstår frå assosiativiteten til multiplikasjonen.

Lemma 2.9. *Komultiplikasjonen δ er koassosiativ.*

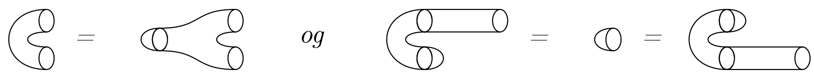
Prov.



I dei fyrste stega har me brukt definisjonen av δ, deretter assosiativiteten til multiplikasjonen og definisjonen ein gong til. ☐

På same måte som at β kan representerast som komposisjonen $\varepsilon \circ \mu$, og at $\varepsilon = \beta \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta)$, har me tilsvarande ekvivalensar for komultiplikasjonen og koparinga.

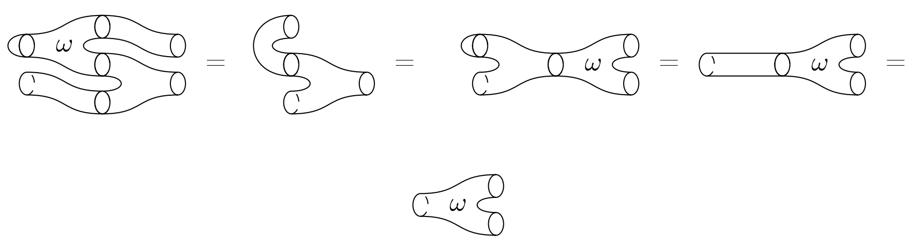
Lemma 2.10. *Desse relasjonane held:*



Me kan nå oppsummera arbeidet rundt komultiplikasjonen i fylgjande proposisjon:

Proposisjon 2.1. *La A vera ein frobeniusalgebra med frobeniusform ε. Då finst det ein eintydig, koassosiativ komultiplikasjon på A med koeining ε som tilfredsstiller frobeniusvilkåret.*

Prov. Eksistens fylgjer frå definisjon 2.8, og koeining, frobeniusvilkåret og koassosiativitet frå respektivt lemma 2.7, 2.8 og 2.9. Me må altså visa at δ er eintydig. Anta derfor at ω er ein anna komultiplikasjon med koeining ε som tilfredsstiller lemma 2.8. Me veit frå lemma 2.2 at koparinga γ er eintydig, og altså må $\eta \circ \omega = \gamma$. Dette betyr at om me komponerer ω med η i uttrykket for frobeniusvilkåret får me definisjonen på komultiplikasjonen δ, og dei må altså vera like:

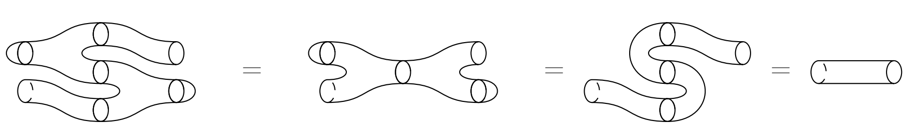


□

Nå kan me sjå at eit vektorrom med spesielle avbildingar som tilfredsstiller likningane over, faktisk er ein frobeniusalgebra.

Proposisjon 2.2. *La A vera eit vektorrom med ei multiplikasjonsavbilding $\mu : A \otimes A \to A$, eining $\eta : \Bbbk \to A$, komultiplikasjon $\delta : A \to A \otimes A$ og koeining $\epsilon : A \to \Bbbk$, og anta at frobeniusvilkåret for μ og δ held. Då er (A, ε) ein frobeniusalgebra.*

Prov. Me lar dei ulike avbildingane vera representerte grafisk som før. Me får to induserte paringar, $\beta = \varepsilon \circ \mu$ og $\gamma = \delta \circ \eta$. Ved å komponera frobeniusvilkåret med ε og η får me slangerelasjonen, som bertyr at desse paringane er ikkjedegenererte, og det fylgjer frå lemma 2.4 at A er endeligdimensjonalt:



Assosiativitet og koassosiativitet oppnår ein på tilsvarande måte, men denne gongen ved å berre komponere frobeniusvilkåret med ε eller η for å få respektivt assosiativitet og koassosiativitet. Korollar 2.2 gjev oss at ε faktisk er ei frobeniusform på A. $\square$

2.4 Kategorien av frobeniusalgebraar

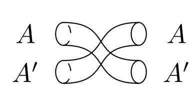
Definisjon 2.9. La A og A' vera to $\Bbbk$-frobeniusalgebraar. Ein *frobeniusalgebrahomomorfi* er ein $\Bbbk$-algebrahomomorfi som samstundes er ein $\Bbbk$-koalgebrahomomorfi. Dersom $\varphi : (A, \mu, \eta, \delta, \varepsilon) \longrightarrow (A', \mu', \eta', \delta', \varepsilon')$ er ein homomorfi mellom frobeniusalgebraar A og A', må altså dei fylgjande diagramma kommutera:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi\otimes\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ A' \otimes A' \arrow[r, "\mu'"] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi\otimes\varphi"] \\ A' \arrow[r, "\delta'"] & A' \otimes A' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] & A' \\ \Bbbk \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "\eta'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & A' \arrow[d, "\varepsilon'"] \\ & \Bbbk \end{tikzcd}$$

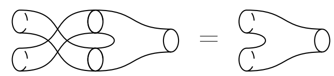
Dette er altså avbildingar som bevarer strukturen i algebraen. Komposisjon av homomorfiar er assosiativt, og det er alltid ei identitetsavbilding $\mathrm{id}_A : A \to A$ som verkar som nøytralt element ved komposisjon. På denne måten utgjer frobeniusalgebraar og frobeniusalgebrahomomorfiar over ein kropp $\Bbbk$ ein kategori. Denne kategorien vil me kalla $\mathbf{FA}_\Bbbk$ for *frobeniusalgebraar over* $\Bbbk$.

Alltid når ein har ein algebraisk struktur med ein multiplikativ operasjon, er det interessant å spørja kva tid denne operasjonen er kommutativ. For frobeniusalgebraar, som har to slike operasjonar, vil dette innebera ei vriding mellom tensorproduktet av det underliggjande vektorrommet. Denne vridingsavbildinga kallar me gjerne $\sigma_{A,A}$, og alt ho gjer er å byta om på faktorane i tensorproduktet: $\sigma_{A,A}(x \otimes y) = y \otimes x$. Grafisk ser denne vridinga slik ut:



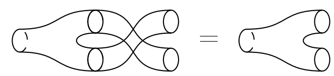
For (ko)kommutativitet i ein frobeniusalgebra kan me gje fylgjande karakteriseringar:

Definisjon 2.10. La A vera ein algebra med multuplikasjon μ. Me seier at A er *kommutativ* dersom $\mu \circ \sigma_{A,A} = \mu$, som grafisk betyr at



Det speler altså ikkje rolle for resultatet om me vrir på faktorane før multiplikasjonen. For kokommutativitet seier me det tilsvarande:

Definisjon 2.11. La A vera ein koalgebra med komultiplikasjon δ. Me seier at A er *kokommutativ* dersom $\delta \circ \sigma_{A,A} = \delta$, som grafisk betyr at



Ein kan visa at multiplikasjonen i ein frobeniusalgebra er kommutativ viss og berre viss komultiplikasjonen er kokommutativ. Samlinga av (ko-)kommutative frobeniusalgebraar dannar ein full underkategori $\mathbf{cFA}_{\Bbbk}$ av $\mathbf{FA}_{\Bbbk}$.

2.5 Symmetrisk-monoidal struktur

For to vektorrom V og W kan ein alltid laga eit nytt vektorrom $V \otimes W$ ved hjelp av tensorproduktet. For tre vektorrom U, V og W kjenner me til dei kanoniske isomorfiane $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$, og $\Bbbk \otimes V \cong V \cong V \otimes \Bbbk$. Dette betyr at kategorien $\mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ saman med tensorproduktet $\otimes$ og kroppen $\Bbbk$ er utgjer ein monoidal kategori, sjå 7.2. Viss me i tillegg ser på den naturlege vridingsavbildinga for kvart par V, W;

$$\sigma_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$$

$$v \otimes w \longmapsto w \otimes v$$

får me ein *symmetrisk-monoidal kategori.*

Kva då om ein legg til meir struktur på vektorrommet? Kan me få $\mathbf{FA}_{\Bbbk}$ til å vera er ein symmetrisk-monoidal kategori? Det fyrste ein i så fall burde undersøka, er om frobeniusalgebraar er lukka under tensorprodukt.

La A og A' vera to $\Bbbk$-frobeniusalgebraar. Me definerer multiplikasjonen i tensorproduktet $A \otimes A'$ komponentvis,

$$(A \otimes A') \otimes (A \otimes A') \to A \otimes A'$$

$$(x \otimes x') \otimes (y \otimes y') \mapsto xy \otimes x'y',$$

og tilsvarande for komultiplikasjonen:

$$A \otimes A' \to (A \otimes A') \otimes (A \otimes A')$$

$$x \otimes y \to (x_1 \otimes y_1) \otimes (x_2 \otimes y_2).$$

Desse konstruksjonane skal me sjå at gjer $A \otimes A'$ til ein ny frobeniusalgebra.

Merk at for to forskjellige frobeniusalgebraar A og A' så har vridinga $\sigma_{A,A'}$: $A \otimes A' \to A' \otimes A$ den eigenskapen at dobbel vriding går tilbake til utgangspunktet, altså at $\sigma_{A',A} \circ \sigma_{A,A'} = \mathrm{id}$.

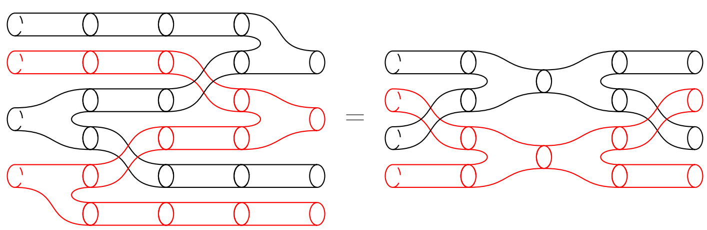
For at $A \otimes A'$ igjen skal vera ein frobeniusalgebra, treng me at frobeniusvilkåret held. Viss me lar μ og δ vera multiplikasjon og komultiplikasjon i tensorproduktet må altså dei fylgjande tre avbildingane vera like:

$$(A \otimes A') \otimes (A \otimes A') \xrightarrow{\delta \otimes \mathrm{id}} (A \otimes A') \otimes (A \otimes A') \otimes (A \otimes A') \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mu} (A \otimes A') \otimes (A \otimes A')$$

$$= (A \otimes A') \otimes (A \otimes A') \xrightarrow{\mu} A \otimes A' \xrightarrow{\delta} (A \otimes A') \otimes (A \otimes A') =$$

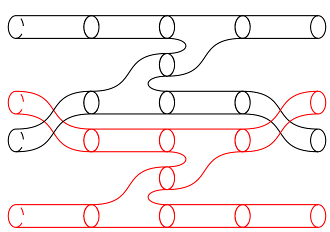
$$(A \otimes A') \otimes (A \otimes A') \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \delta} (A \otimes A') \otimes (A \otimes A') \otimes (A \otimes A') \xrightarrow{\mu \otimes \mathrm{id}} (A \otimes A') \otimes (A \otimes A').$$

Viss me set inn identitetar for å få fram vridingane betyr dei to øvste likningane grafisk at



Her skjer dei svarte avbildingane i A og dei raude i A'. Merk at dette eigentleg berre er to «overlappande» vanlege frobeniusvilkår, og me vil at denne overlappinga skal fylgja med under vilkåret.

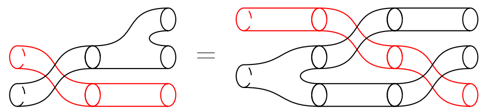
For å sjå at dette stemmer brukar me frobeniusrelasjonane for både A og A' på høgresida av likninga, og får



Me vil nå bruka at vridinga er naturleg, altså at dei fylgjande avbildingane er like:

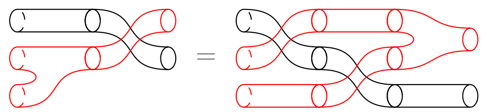
$$A' \otimes A \xrightarrow{\sigma_{A',A}} A \otimes A' \xrightarrow{\delta \otimes \mathrm{id}_{A'}} A \otimes A \otimes A'$$

$$= A' \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_{A'} \otimes \delta} A' \otimes A \otimes A \xrightarrow{\sigma_{A',A} \otimes \mathrm{id}_A} A \otimes A' \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \sigma_{A',A}} A \otimes A \otimes A,$$

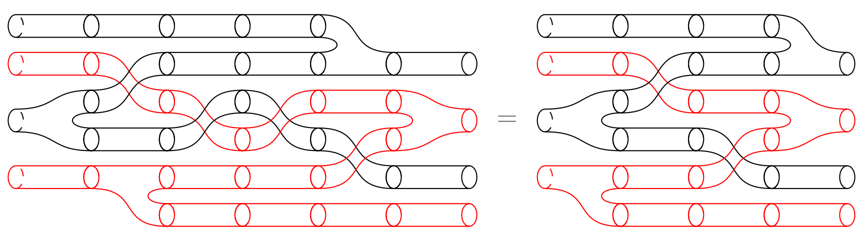


og dualen

$$A \otimes A' \otimes A' \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \mu} A \otimes A' \xrightarrow{\sigma_{A,A'}} A' \otimes A$$
$$= A \otimes A' \otimes A' \xrightarrow{\sigma_{A,A'} \otimes \mathrm{id}_{A'}} A' \otimes A \otimes A' \xrightarrow{\mathrm{id}_{A'} \otimes \sigma_{A,A'}} A' \otimes A' \otimes A \xrightarrow{\mu \otimes \mathrm{id}_A} A' \otimes A.$$



Dette gjer at me kan flytta vridingane eitt hakk inn:



Her har me fjerna nokre identitetar og brukt at to vridingar blir identiteten. Flyttar me nå om på vridingane ein siste gong får me venstresida i likninga, som me ville visa. Me kan visa dei to nedste likningane på tilsvarande måte, men då ved å bruka den andre sida av frobeniusvilkåret. Assosiativitet og koassosiativitet fylgjer på liknande vis, og proposisjon 2.2 gjev då at tensorproduktet $A \otimes A'$ er ein frobeniusalgebra.

Me kan konkludera med fylgjande korollar:

Korollar 2.4. *Kategorien ($\boldsymbol{FA}_{\Bbbk}$, $\otimes$, $\Bbbk$, σ) er ein symmetrisk-monoidal kategori.*

Prov. Me har nettopp sett at tensorprodukt av ein frobeniusalgebra er ein frobeniusalgebra. Vidare har me assosiativitet og nøytralitet opp til kanoniske isomorfiar, som gjer kategorien monoidal, og symmetrien er arva frå vridinga σ på dei underliggjande vektorromma. $\square$

3 Kobordismar

Ordet *kobordisme* har sitt opphav i det franske ordet *bord; kant* eller *rand*, og prefiksen *ko* vil kanskje indikera eit slags samspel mellom kantar eller render. Ordrett kan ein kanskje forstå ein kobordisme som ei foreining av to render; noko som bind to kantar eller render til eit objekt. Eit *tviegga* sverd er til dømes definert ut i frå kantane sine, og ein kan kanskje kalla sverdbladet ein *kobordisme* frå den eine eggen til den andre. Denne vinklinga er kanskje ikkje så dum å ha når me ser på matematiske kobordismar. Her blir sverdbladet byta ut med vilkårleg euklidsk rom, og sverdeggen med euklidsk halvrom: det kan vera vanskeleg å seia kor sverdbladet sluttar og eggen byrjar, men forskjellen på dei er soleklar, nemleg kanten på sverdet.

I denne delen av oppgåva vil me introdusera orienterte mangfaldigheiter med rand og studera komposisjon av kobordismar for å til slutt definera ein kategori av n-dimensjonale kobordismar, og sjå at denne kategorien tillet ein symmetrisk-monoidal struktur. Til slutt vil me sjå på det spesielle tilfellet for $n = 2$, og finna ut at denne kategorien er generert av ei handfull enkle flater.

Definisjon 3.1. For euklidsk rom av dimensjona n kallar me mengda $\mathbb{H}^n = \{x_1, \dots x_n \mid x_i \in \mathbb{R}^n, \quad x_n \geq 0\}$ for det *euklidske halvrommet* av dimensjon n. Randa av $\mathbb{H}^n$ definerer me til å vera mengda $\{x_1, \dots x_n \mid x_i \in \mathbb{R}^n, \quad x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, som er kanonisk homeomorf til $\mathbb{R}^{n-1}$.

Definisjon 3.2. La $X \subseteq \mathbb{R}^n$ vera ei delmengde av euklidsk rom. Me seier at X er ei *k-dimensjonal mangfaldigheit* dersom det for eitkvart punkt $x \in X$ finst ein open omgjevnad U rundt x og ein open omgjevnad V som er ei delmengde av $\mathbb{H}^k$ og ein diffeomorfi $\varphi : V \to U$. Me kallar φ ei *parameterisering* av omgjevnaden $U \subset X$.

Mangfaldigheiter er altså berre delmengder av euklidsk rom som er *lokalt euklidske.* Dei fleste vil til dømes gå med på at jorda er rund, men for menneske på landjorda er krumminga så vanskeleg å sjå at jorda verkar *lokalt flat.* Alltid når me snakkar om mangfaldgheiter i denne oppgåva er topologien til mangfaldigheitene gjeven som underomstopologien frå rommet mangfaldigheita er ei delmengde av, og dette rommet har alltid standardtopologien.

Definisjon 3.3. La $X \subseteq \mathbb{R}^n$ vera ei k-dimensjonal mangfaldigheit. *Randa* av X definerer me til å vera mengda av alle punkt $x \in X$ der det finst ei parameterisering $\varphi : V \longrightarrow U$ av ein omgjevnad U rundt x, der $\varphi^{-1}(x) \in \partial\mathbb{H}^k \cap V$. Denne mengda skriv me som ∂X.

Definisjon 3.4. La $X \subset \mathbb{R}^n$ vera ei k-mangfaldigheit og sei at $\varphi : V \to U$ er ei parameterisering av U rundt eit punkt x, og anta at $0 \mapsto x^\dagger$. Me definerer *tangentrommet til X ved x* til å vera bildet $d\varphi_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ av den deriverte av

†Dette kan me alltid anta for mangfaldigheiter. Dersom $\varphi(x') = x$ og $x' \neq 0$ kan me komponera φ med ein koordinatbytande diffeomorfi der $0 \mapsto x'$, og heller bruka denne komposisjonen som parameterisering.

parameteriseringa ved 0, altså mengda av alle retningsderiverte i punktet $x \in X$ under φ. Me skriv tangentrommet som $T_x X$.

Merk at tangentrommet ved eit punkt $x \in X$ er eit underrom av $\mathbb{R}^n$ og kan derfor orienterast: me tilordnar eit forteikn til kvar ordna basis for vektorrommet på ein slik måte at to basisar har same forteikn viss og berre viss lineærtransformasjonen som går frå den eine basisen til den andre har positiv determinant. Ei mangfaldigheit der kvart av tangentromma har ei tilordna orientering kallar me ei *orientert mangfaldigheit*.

Sidan basisbytte er ein invertibel operasjon, vil determinanten til ei slik avbilding vera anten strengt positiv eller strengt negativ. Einkvar orienterbar mangfaldigheit har derfor berre to moglege orienteringar[††], som gjer at me kan kalla den eine positiv og den andre negativ. Som utgangspunkt definerer me standardbasisen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ for $\mathbb{R}^n$ som ein *positiv basis*, og ein annan basis $\mathcal{B}$ får tildelt «forreikn» etter forteiknet til determinanten til lineæravbildinga som går frå standardbasisen til $\mathcal{B}$.

Døme 3.1. $S^2 = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ er ei 2-mangfaldigheit med $\partial S^2 = \emptyset$. Alle punkt på sfæren har ein omgjevnad diffeomorf til ein omgjevnad i $\mathbb{R}^2$. Me kallar slike kompakte mangfaldigheiter utan rand for *lukka mangfaldigheiter*.

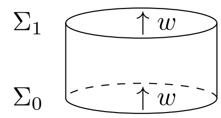
Definisjon 3.5. La X vera ei orientert n-mangfaldigheit og Σ ei lukka, orientert undermangfaldigheit av kodimensjon 1. La $x \in \Sigma$ vera eit punkt med $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ som positiv basis for $T_x\Sigma$. Me kallar ein vektor $w \in T_x X$ for ein *positiv normal* viss mengda $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, w\}$ er ein positiv basis for $T_x X$. Vidare seier me at

- Σ er ei *inn-rand* dersom w peikar *inn mot* X. Me skriv $\Sigma = \partial_{inn} X$.
- Σ er ei *ut-rand* dersom w peikar *ut frå* X. Me skriv $\Sigma = \partial_{ut} X$.

Døme 3.2. Sjå på sylinderen $C = S^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ med undermangfaldigheiter $\Sigma_0 = S^1 \times \{0\}$ og $\Sigma_1 = S^1 \times \{1\}$. Då er $\left\{ \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ein positiv basis for $T_{(x,y,i)}\Sigma_i$, $i = 0, 1$. Ved å velja vanleg høgrehandsorientering for C får me at mengda $\left\{ \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er ein positiv basis for $T_{(x,y,z)}C$.

Sidan w peikar *inn mot* C frå alle punkt på Σ_0 er dette ei *inn-rand*, og sidan w peikar *ut frå* C frå alle punkt på Σ_1 er dette ei *ut-rand*.

[††] For eindimensjonale vektorrom definerer me orientering til å vera eit konsekvent val.



Eit naturleg spørsmål å stilla seg kan kanskje vera kva tid ei lukka, orientert mangfaldigheit utgjer randa til ei anna mangfaldigheit, eller kva tid det finst ei mangfaldigheit som «forbind» to render. Ein slik konstruksjon kan me gje fylgjande definisjon:

Definisjon 3.6. La Σ_0 og Σ_1 vera lukka orienterte $(k-1)$-mangfaldigheiter. Ein *orientert kobordisme* frå Σ_0 til Σ_1 er ei kompakt orientert k-mangfaldigheit M med inklusjonar

$$\Sigma_0 \xrightarrow{\iota_0} M \xleftarrow{\iota_1} \Sigma_1,$$

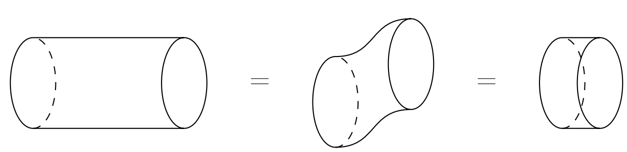
slik at $\mathrm{Im}(\iota_0) = \partial_{inn}M$ og $\mathrm{Im}(\iota_1) = \partial_{ut}M$. Me skriv gjerne $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ for kobordismen frå Σ_0 til Σ_1. Sidan det er orienterte kobordismar som er av særleg interesse vidare i oppgåva, vil me utelata dette ordet der konteksten tillet det.

Med denne konstruksjonen kan me sjå at dersom $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ er ein kobordisme, så treng ikkje dette vera den einaste mangfaldigheita med Σ_0 og Σ_1 som render: sylinderen $C = S^1 \times [0,1]$ er ein kobordisme $S^1 \Rightarrow S^1$, og det same er $C' = S^1 \times [0,2]$, sjølv om dette er ulike mangfaldigheiter. Samspelet mellom dei kan me karakterisera med fylgjande definisjon:

Definisjon 3.7. La M og M' vera to kobordismar mellom lukka orienterte mangfaldigheiter Σ_0 og Σ_1 av same dimensjon. Me seier at M og M' er *ekvivalente kobordismar* dersom det finst ein orienteringsbevarande diffeomorfi $\varphi : M \to M'$ mellom dei, slik at det fylgjande diagrammet kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
& M & \\
\Sigma_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Sigma_1 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
& M' \arrow[uu, "\varphi", "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Sidan me krev at Σ_0 og Σ_1 er *like* rendene til M og M', ser me at diffeomorfien φ ikkje endrar forma til desse, medan mangfaldigheita mellom dei kan endrast. Her er eit døme på tre ekvivalente kobordismar $S^1 \Rightarrow S^1$:



3.1 Komposisjon av kobordismar

Gjeven to lukka orienterte $(k-1)$-mangfaldigheiter Σ_0 og Σ_1 kan me tenka på ein kobordisme mellom dei som ein kontinuerleg overgang frå den eine til den andre. Dette motiverer til å prøva å formulera ein kategori, der objekta er lukka orienterte $(k-1)$-mangfaldigheiter og morfiane er kobordismar mellom dei. Skal me få til dette, må me argumentera for at det finst ein identitetsmorfi og me må definera ein komposisjon som er assosiativ.

Dersom $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ er to funksjonar kan me definera komposisjonen $gf : X \to Z$ fordi målområdet til f er lik definisjonsområdet til g. På tilsvarande måte vil me definera komposisjon mellom to kobordismar der kobordismane har ei *felles rand*.

Definisjon 3.8. La $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ og $\Sigma_1 \overset{M'}{\Longrightarrow} \Sigma_2$ vera to kobordismar av same dimensjon med felles rand Σ_1, og la ι_1 og ι_1' vera inklusjonane av Σ_1 i respektivt M og M'. Me definerer komposisjonen MM' av M og M' til å vera mengda

$$M \coprod M'/\iota(z) \sim \iota'(z) \quad \forall z \in \Sigma_1.$$

Denne komposisjonen får me altså av å «lima» mangfaldigheitene M og M' langs ei felles rand. I ein generell kategori blir ein slik konstruksjon kalla ein *pushout*, og blir skrive som $M \amalg_{\Sigma_1} M'$. Sjølve pushouten er eit objektet som gjer at dette diagrammet kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
& M \amalg_{\Sigma_1} M' & \\
M \arrow[ur] & & M' \arrow[ul] \\
& \Sigma_1 \arrow[ul, "\iota"] \arrow[ur, "\iota'"'] &
\end{tikzcd}$$

Pushouten har ein universell eigenskap: dersom det nå finst eit anna kommutativt diagram,

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
M \arrow[ur, "f"] & & M' \arrow[ul, "f'"'] \\
& \Sigma_1 \arrow[ul, "\iota"] \arrow[ur, "\iota'"'] &
\end{tikzcd}$$

så finst det ei unik glatt avbilding $M \amalg_{\Sigma_1} M' \to X$ som utvider diagrammet på fylgjande vis:

$$
\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & M \amalg_{\Sigma_1} M' \arrow[u, dashed, "\exists!"] & \\
M \arrow[ur] \arrow[uur, bend left, "f"] & & M' \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "f'"'] \\
 & \Sigma_1 \arrow[ul, "\iota"] \arrow[ur, "\iota'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Spørsmålet er nå om konstruksjonen $M \amalg_{\Sigma_1} M'$ igjen er ei glatt orientert mangfaldigheit, slik at komposisjonen MM' faktisk er ein kobordisme frå Σ_0 til Σ_1.

Definisjon 3.9. Ein morsefunksjon på ein kobordisme $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ er ein glatt funksjon $f : M \longrightarrow [0, 1]$ slik at

1. $f^{-1}(0) = \Sigma_0$ og $f^{-1}(1) = \Sigma_1$,
2. alle kritiske punkt p ligg i det indre i M, altså i $M \setminus \partial M$.

Me vil bruka, utan prov, at einkvar kobordisme har ein morsefunksjon og at dette òg gjeld for kobordismar $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ med éi rand; altså der $\Sigma_0 = \emptyset$ eller $\Sigma_1 = \emptyset$. Detaljar er å finna i [5, Section 2, Theorem 2.5.].

Definisjon 3.10. La $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ vera ein kobordisme mellom ikkjetomme, lukka orienterte mangfaldigheiter. Me seier at kobordismen er ein *produktkobordisme* dersom han er ekvivalent til kobordismen $\Sigma_0 \times [0, 1]$.

Med andre ord er ein kobordisme ein produktkobordisme dersom han er ekvivalent med sylinderen over den eine randa. Dette tvinger rendene i kobordismen til å vera like. Me kan òg ha produktkobordismar med berre éi rand, til dømes $\Sigma \times [0, 1)$ for ei lukka orientert mangfaldigheit Σ. Dette er då ein kobordisme $\Sigma \Rightarrow \emptyset$.

Lemma 3.1. *La $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ vera ein kobordisme. Viss det finst ein morsefunksjon på M utan kritiske punkt, så er $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ ein produktkobordisme.*

Provet tar nytte av metodar som elles ikkje er av relevanse vidare i oppgåva, og vil bli utelege her. Sjå [5, Section 3, Theorem 3.4].

Lemma 3.2. *La M vera ei kompakt, glatt mangfaldigheit med ikkjetom orientert rand Σ. Då finst det ein omgjevnad U av Σ slik at $U \cong \Sigma \times [0, 1)$.*

Me kallar denne omgjevnaden *kragen* til M.

Prov. La $\mu : M \longrightarrow [0,1]$ vera ein morsefunksjon på M. Me veit at dei kritiske punkta til μ ligg i det indre av M. Derfor må det vera ein omgjevnad U nært Σ der μ ikkje har kritiske punkt. Sei at bildet $\mu(U) = [0,\varepsilon) \subset [0,1]$. Undermangfaldigheita $\mu^{-1}[0,\varepsilon]$ er då ein kobordisme

$$\Sigma = \mu^{-1}(0) \xRightarrow{\mu^{-1}[0,\varepsilon]} \mu^{-1}(\varepsilon)$$

der morsefunksjonen μ ikkje har kritiske punkt. Lemma 3.1 seier då at kobordismen $\mu^{-1}[0,\varepsilon]$ er ekvivalent med ein produktkobordisme $\Sigma \times [0,1)$. $\square$

Teorem 3.3. *La* $\Sigma_0 \xRightarrow{M} \Sigma_1$ *og* $\Sigma_1 \xRightarrow{M'} \Sigma_2$ *vera orienterte kobordismar med felles rand* Σ_1. *Komposisjonen* $M \amalg_{\Sigma_1} M'$ *er då ein orientert kobordisme* $\Sigma_0 \xRightarrow{MM'} \Sigma_2$, *der orienteringa er kompatibel med inklusjonane.*

Prov. Lemma 3.2 gjev to kragar $U \cong \Sigma_1 \times (0,1]$ og $U' \cong \Sigma_1 \times [1,2)$ nær rendene. Sei at desse diffeomorfiane er gjevne eksplisitt av

$$\varphi : \Sigma_1 \times (0,1] \longrightarrow U \text{ og } \varphi' : \Sigma_1 \times [1,2) \longrightarrow U',$$

slik at $\varphi(x,1) = x$ for alle $x \in \Sigma_1$ og $\varphi'(x,1) = x$ for alle $x \in \Sigma_1$.

La ι og ι' vera inklusjonane av respektivt M og M' inn i komposisjonen $M \amalg_{\Sigma_1} M'$. Definer $\psi : \Sigma_1 \times (0,2) \longrightarrow M \amalg_{\Sigma_1} M'$ på fylgjande måte:

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \iota(\varphi(x,t)) & \text{dersom } 0 < t \leq 1, \\ \iota'(\varphi'(x,t)) & \text{dersom } 1 < t < 2. \end{cases}$$

Observer nå at $M \amalg_{\Sigma_1} M'$ er dekkja av dei tre glatte funksjonane ι, ι' og ψ:

$$M \amalg_{\Sigma_1} M' \subseteq \iota(M \setminus \Sigma_1) \cup \iota'(M' \setminus \Sigma_1) \cup \psi(\Sigma_1 \times (0,2)).$$

Dermed har komposisjonen MM' ein glatt struktur. Orienteringa til M og M' er vidareført igjennom inklusjonane inn i komposisjonen: ein positiv normal w for ein basis for tangentrommet $T_x\Sigma_0$ peikar *inn mot* M, og vil då peika *inn mot* MM' under ι, slik at Σ_0 er ei inn-rand. På tilsvarande måte peikar ein positiv normal w' for ein basis for tangentrommet $T_x\Sigma_2$ *ut frå* M', og vil då peika *ut frå* MM' under ι', slik at Σ_2 er ei ut-rand. $\square$

Me har tatt det fyrste steget mot ein veldefinert kategori av kobordismar, nemleg at komposisjon av kobordismar er ein ny kobordisme med samsvarande orientering. Det neste steget vil vera å visa at komposisjonen er assosiativ. Med andre ord, gjeven tre kobordismar,

$$\Sigma_0 \xRightarrow{M} \Sigma_1,\ \Sigma_1 \xRightarrow{M'} \Sigma_2 \text{ og } \Sigma_2 \xRightarrow{M''} \Sigma_3,$$

så må komposisjonane tilfredsstilla

$$(MM')M'' = M(M'M'').$$

Dette fylgjer frå konstruksjonen. Merk fyrst at dette stemmer overeins med pushouten;

$$(M \amalg_{\Sigma_1} M') \amalg_{\Sigma_2} M'' = M \amalg_{\Sigma_1} (M' \amalg_{\Sigma_2} M'').$$

Vidare veit frå teorem 3.3 at me kan finna kragar og tilhøyrande diffeomorfiar rundt rendene Σ_1 og Σ_2, og den oppnådde glatte strukturen er uavhengig av kva del me limer saman fyrst. Dei resulterande kobordismane vil altså vera like.

3.2 Kategorien av n-dimensjonale kobordismar

Nå som ein veldefindert assosiativ komposisjon er på plass gjenstår det å finna ein identitetsmorfi for kategorien vår. Gjeven ei lukka orientert $(n-1)$-mangfaldigheit Σ burde identiteten vera ein kobordisme $\Sigma \overset{\text{id}}{\Rightarrow} X$ mellom Σ og ei anna $(n-1)$-mangfaldigheit X slik at id $= \Sigma$, altså at kobordismen er Σ sjølv. Problemet med dette er at ein slik konstruksjon er ei orientert n-mangfaldigheit, og då slettes ikkje lik Σ. Ei mogleg løysing kan kanskje vera å definera identitetskobordismen til å vera ein sylinder $\Sigma \Rightarrow \Sigma$ med høgde 0. Ei anna løysing kan vera å sjå tilbake på komposisjonen av kobordismane: Gjeven ein kobordisme $\Sigma_0 \overset{M}{\Rightarrow} \Sigma_1$ veit me at det finst ein omgjevnad U nær randa Σ_0 slik at $U \cong \Sigma_0 \times [0, 1)$. Denne sylinderen kan me strekka og krympa som me vil opp til diffeomorfi. Spesielt kan me komponera sylinderen med ein annan sylinder utan å endra strukturen:

Me dekomponerer kobordismen M i $M_{[0,\varepsilon]} = U$ og $M_{[\varepsilon,1]} = M \backslash U$. La C vera ein sylinder over Σ_0. Me veit frå teorem 3.3 at me kan lima saman sylindrane C og $\Sigma_0 \times [0, 1)$ fordi dei har ei felles rand, og at komposisjonen $CU \cong U$. Me får då at

$$CM = CM_{[0,\varepsilon]}M_{[\varepsilon,1]} = CUM_{[\varepsilon,1]} \cong UM_{[\varepsilon,1]} = M_{[0,\varepsilon]}M_{[\varepsilon,1]} = M.$$

Her har me brukt at komposisjon er assosiativ.

Dette viser at komposisjon med sylindrar verkar som identiten *opp til orieringsbevarande diffeomorfi*. Me fiksar altså problemet med identiteten ved å la morfiane i kategorien vera diffeomorfiklasser av orienterte kobordismar. Dette kjem til å innskrenka kategorien ein del, og mykje informasjon svinn hen. Seinare skal me sjå at ein slik definisjon gjev oss fullstendig kontroll over ein spesiell kategori, nemleg **2Cob**, som vil vera fundamentalt for hovudresultatet vårt.

Definisjon 3.11. Kategorien **nCob** har lukka orienterte $(n-1)$-mangfaldigheiter som objekt og diffeomorfiklasser av orienterte kobordismar som som morfiar.

3.3 Monoidal struktur

Sidan mangfaldigheiter kan vera samanhengande eller disjungte er det naturleg å diskutera dette for kobordismar òg. Sei at $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ og $\Sigma_0' \overset{M'}{\Longrightarrow} \Sigma_1'$ er to kobordismar, og la $[M]$ og $[M']$ vera diffeomorfiklassene deira. Det oppstår då ein naturleg kobordisme frå den disjungte unionen av inn-rendene til den disjungte unionen av ut-rendene til M og M':

$$\Sigma_0 \coprod \Sigma_1 \xRightarrow{M \coprod M'} \Sigma_0' \coprod \Sigma_1'.$$

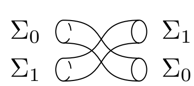
Diffeomorfiklassa til $M \coprod M'$ lar me beint fram vera den disjungte unionen av diffeomorfiklassene;

$$[M \coprod M'] := [M] \coprod [M'].$$

Vidare kan me merka oss at den tomme mengda av dimensjon n er ei n-mangfaldigheit, slik at ein har kobordismar $\emptyset_{n-1} \overset{\emptyset_n}{\Longrightarrow} \emptyset_{n-1}$. Å ta ein disjungt union mellom den tomme mengda og ei mangfaldigheit burde ikkje endra mangfaldigheita i det heile, altså burde $\emptyset \coprod M = M = M \coprod \emptyset$. Sidan disjungt union av mangfaldigheiter er ein assosiativ operasjon resulterer dette i at kategorien **nCob** saman med $\coprod$ og $\emptyset$ er ein monoidal kategori.

3.4 Symmetrisk struktur

Gjeven to lukka orienterte $(n-1)$-mangfaldigheiter Σ_0 og Σ_1 er det ein naturleg orienteringsbevarande diffeomorfi $\Sigma_0 \coprod \Sigma_1 \cong \Sigma_1 \coprod \Sigma_0$ som byter om på faktorane i unionen. Me kan konstruera ein kobordisme mellom desse mangfaldigheitene ved å trekka sylindrar $\Sigma_0 \overset{C_0}{\Longrightarrow} \Sigma_0$ og $\Sigma_1 \overset{C_1}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ slik at rendene hamnar på rett plass. Me kallar denne vridinga T_{Σ_0,Σ_1}, og me teiknar ho grafisk slik:



For å oppnå ein symmetrisk struktur for den monoidale kategorien vår, treng me at vridinga speler på lag med disjungt union av kobordismar.

Lemma 3.4. *La $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ og $\Sigma_0' \overset{M'}{\Longrightarrow} \Sigma_1'$ vera to kobordismar. Då vil vriding av disjungt union vera likt disjungt union av vriding. Med andre ord vil fylgjande diagram kommutera:*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_0 \coprod \Sigma_0' \arrow[r, Rightarrow, "M \coprod M'"] \arrow[d, Rightarrow, "T_{\Sigma_0,\Sigma_0'}"'] & \Sigma_1 \coprod \Sigma_1' \arrow[d, Rightarrow, "T_{\Sigma_1,\Sigma_1'}"] \\
\Sigma_0' \coprod \Sigma_0 \arrow[r, Rightarrow, "M' \coprod M"'] & \Sigma_1' \coprod \Sigma_1
\end{tikzcd}$$

Prov. Me må visa at kobordismane $T_{\Sigma_1,\Sigma_1'}(M\coprod M')$ og $M'\coprod M(T_{\Sigma_0,\Sigma_0'})$ er ekvivalente. Me observerer fyrst at vridinga $T_{\Sigma_0,\Sigma_0'}$ er invertibel med invers T_{Σ_0',Σ_0}. Frå definisjon 3.7 må me finna ein orienteringsbevarande diffeomorfi $M'\coprod M \xrightarrow{\cong} M\coprod M'$ slik at dette diagrammet kommuterer:

$$
\begin{tikzcd}
 & & M\coprod M' & & \\
\Sigma_0\coprod\Sigma_0' \arrow[urr, "\iota"] \arrow[dr, "T"'] & & & & \Sigma_1\coprod\Sigma_1' \arrow[ull, "\iota"'] \arrow[dl, "T"] \\
 & \Sigma_0'\coprod\Sigma_0 \arrow[dr, "\iota"'] & & \Sigma_1'\coprod\Sigma_1 \arrow[dl, "\iota"] & \\
 & & M'\coprod M \arrow[uuu, "\cong"] & &
\end{tikzcd}
$$

Her er det naturlege valet vridinga $T_{M',M}$, og kobordismane er dermed ekvivalente. $\square$

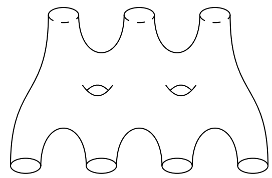
Lemma 3.4 gjev at vridingsavbildinga i **nCob** er *naturleg*. Vidare veit me at $T_{\Sigma,\Sigma'}\circ T_{\Sigma',\Sigma} = \mathrm{id}_{\Sigma\coprod\Sigma'}$. Det som gjenstår for at **nCob** skal vera ein symmetrisk monoidal kategori, er at for kvar trippel av objekt X, Y og Z, så må desse avbildingane vera like:

$$T_{X,Y\coprod Z} = (\mathrm{id}_Y \coprod T_{X,Z})\circ(T_{X,Y}\coprod \mathrm{id}_Z),$$
$$T_{X\coprod Y,Z} = (T_{X,Z}\mathrm{id}_Y)\circ(\mathrm{id}_X \coprod T_{Y,Z}\coprod).$$

Den fyrste likninga seier altså at det ikkje skal spela ei rolle om me fyrst vrir X rundt Y og vidare X rundt Z, eller om me vrir paret $Y\coprod Z$ rundt X med ein gong. Kobordismen me ender opp med er uansett den same, og me kan konkludera med at $(\mathbf{nCob}, \coprod, \emptyset, T)$ er ein symmetrisk-monoidal kategori.

3.5 2Cob

Kategorien av lukka orienterte 1-mangfaldigheiter og orienterte kobordismar mellom dei skil seg ut frå resten av familien på fleire vis. For det fyrste er dei einaste lukka 1-mangfaldigheitene diffeomorfe til sirklar, slik at eit objekt i **2Cob** ikkje er anna enn ein disjungt union av slike. Morfiane er 2-mangfaldigheiter mellom ulike utval sirklar, altså *flater*. Eit døme på ein morfi i **2Cob** kan vera ei flate frå 3 sirklar til 4 sirklar med genus 2:



For dimensjonar $n \geq 3$ kan **nCob** vera veldig komplisert, men sidan **2Cob** består av sikrlar og flater mellom dei kan me bruka resultat om klassifikasjon av flater til å få fullstendig kontroll.

Definisjon 3.12. Ei *genererande mengde* **S** til ein monoidal kategori $(\mathcal{C}, \coprod, \emptyset)$ er eit utval morfiar frå $\mathcal{C}$ slik at alle andre morfiar i $\mathcal{C}$ kan oppdrivast gjennom komposisjon av morfiar frå **S**, samt bruk av funktoren $\coprod$.

Definisjon 3.13. Eit *skjelett* av ein kategori $\mathcal{C}$ er ein full underkategori beståande av éin representant for kvar av isomorfiklassene i kategorien.

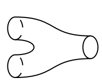
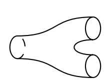
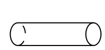
Sidan objekta i **2Cob** berre er disjungte unionar av sirklar kan me konstruera eit skjelett av **2Cob** som mengda $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots\}$, der $\mathbf{0} = \emptyset_1$, $\mathbf{1} = S^1$, $\mathbf{2} = S^1 \coprod S^1$ og så bortover. For å forenkla notasjonen vil me kalla skjelettet av **2Cob** for **2Cob**, altså den opphavlege kategorien der alle isomorfiklasser består av berre éitt objekt, nemleg $\coprod_n S^1, \quad n = 0, 1, \dots$

Målet vårt vidare er å finna ei endeleg genererande mengde for **2Cob**. For å klara dette treng me eit viktig resultat frå flateteorien som klassifiserer kobordismane i kategorien.

Teorem 3.5. *To samanhengande, kompakte orienterte flater med rand er diffeomorfe viss og berre viss dei har same genus, like mange inn-render og like mange ut-render.*

Dette er ei reformulering av det same resultatet for flater utan rand som ein kan finna i [2, Theorem 9.3.5]. Provet vil bli utelete her. For to morfiar M og M' i **2Cob** vil altså M vera diffeomorf til M' viss og berre viss dei begge har m inn-render, n ut-render og genus g.

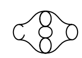
Definisjon 3.14. La $\mathbf{m} \overset{M}{\Longrightarrow} \mathbf{n}$ vera ein kobordisme med genus g. *Normalforma* til M er ein dekomposisjon av kobordismen som berre brukar flatene brok, kobrok, kopp, kokopp og identitet. Grafisk ser desse slik ut:

 ,  ,  ,  og .

Teorem 3.6. *For ein samanhengande kobordisme* $\mathbf{m} \overset{M}{\Rightarrow} \mathbf{n}$ *så eksisterer normalforma til* M*.*

Prov. Anta fyrst at $\mathbf{m} > 0$. Ta $\mathbf{m} - 1$ kopiar av broka. Komponer den fyrste broka med den andre slik at det nedste brokbeinet til den fyrste broka er det nedste brokbeinet til komposisjonen. Legg så ein identitet til det øvste brokbeinet til den andre broka, slik at inn-rendene er på linje. Komponer resten av brøkene på tilsvarande vis og me har ein kobordisme $\mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{1}$. Viss $\mathbf{m} = 0$, la heller heile delen vera ein kokopp. For ut-delen, ta $\mathbf{n} - 1$ kopiar av kobroka dersom $\mathbf{n} > 0$ og komponer desse slik at det nedste brokbeinet til ei brok festar seg til inn-randa av den neste broka. Dette resulterer i ein kobordisme $\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{n}$. Er $\mathbf{n} = 0$, la heile delen vera ein kopp.

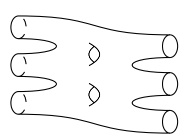
For delane i midten tar me beint fram eit «handtak»; komposisjonen



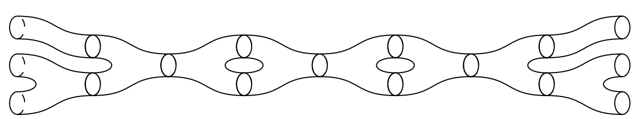
for kvart hol i flata og me får ein kobordisme $\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1}$ med genus g.

Komponerer me desse tre konstruksjonane får me altså ein kobordisme $\mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{n}$ med genus g, som vil vera normalforma til M. $\square$

Sjå til dømes på ei flate med tre inn-render, genus to og tre ut-render:



Normalforma vil då bli sjåande slik ut:



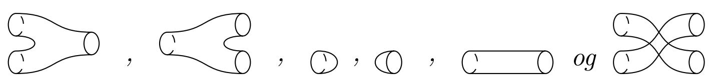
Sidan normalforma til samanhengande kobordismar alltid eksisterer og sidan ein kobordisme er diffeomorf til normalforma si, kan me velja normalformene som representantar for dei ulike diffeomorfiklassene. Dermed vil dei samanhengande kobordismane i **2Cob** vera genererte av flatene i definisjon 3.14. Me vil gjerne inkludera dei disjungte kobordismane i ei genererande mengde òg, men må då utvida mengda med vridinga frå avsnitt 3.4 om symmetrisk struktur.

Lemma 3.7. *Alle 2-kobordismar kan faktoriserast som eit produkt av ein permutasjonskobordisme, ein disjungt union av samanhengande kobordismar, samt endå ein permutasjonskobordisme.*

Gjeven ein kobordisme beståande av fleire «overlappande» samanhengande delar vil me altså permutera rendene på ein slik måte at kobordismen blir ein disjungt union av dei samanhengande delane. Kvar av desse delane veit me kan konstruerast frå mengda i definisjon 3.14, og saman med vridinga vil me altså kunna konstruera einkvar kobordisme i **2Cob**.

Prov. La $\mathbf{m} \overset{M}{\Longrightarrow} \mathbf{n}$ vera ei kobordisme som ikkje er samanhengande og anta utan tap av generalitet at M består av to samanhengande komponentar, M_0 og M_1. Anta vidare at M_0 har p inn-render og at M_1 har q inn-render. La $\Pi : \mathbf{m} \to \mathbf{m}$ vera kobordismen som permuterer inn-rendene til M slik at dei p rendene til M_0 og dei q inn-rendene til M_1 står kvar for seg, altså at $\partial_{inn}\Pi M = (\partial_{inn}M_0)\coprod(\partial_{inn}M_1)$. Gjer det tilsvarande for ut-rendene til M: sei at $\Pi' : \mathbf{n} \to \mathbf{n}$ er kobordismen som permuterer rendene til M slik at utrendene til M_0 er skilde frå ut-rendene til M_1. Komposisjonen $\Pi M \Pi' : \mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{n}$ er då ein kobordisme der $\partial(\Pi M \Pi') = \partial M_0 \coprod \partial M_1$, altså ein disjungt union av dei samanghengande komponentane. Permutasjonskobordismane Π og Π' er invetible, der inversane er kobordismar som permuterer rendene tilbake til utgangspunktet. Me kan nå observera at $M = \Pi^{-1}(\Pi M \Pi')\Pi'^{-1}$, som er på forma me ville visa. $\square$

Korollar 3.1. *Den symmetrisk-monoidale kategorien **2Cob** er generert under komposisjon og disjungt union av dei fylgjande seks kobordismane:*

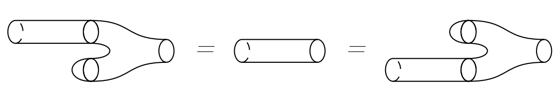


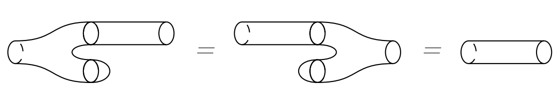
Prov. For ein gjeven kobordisme brukar me fyrst vridinga for å få ein disjungt union av samanhengande kobordismar. Me kan deretter finna normalforma til alle desse ved bruk av flatene over, og til slutt bruka vridinga igjen til å komma tilbake til den opphavlege kobordismen. $\square$

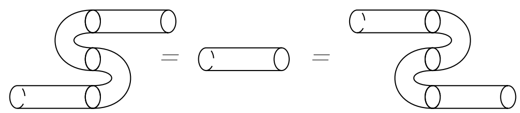
3.6 Relasjonar i 2Cob

Likskapen mellom generatorane i **2Cob** og dei grafiske framstillingane av morfiane i ein frobeniusalgebra er vonleg innlysande. Faktisk kan relasjonane me fann i frobeniusalgebraane overførast inn i **2Cob** med same gildskap, men då ikkje basert på ein algebraisk natur, men rett og slett det faktum at figurane i relasjonane er diffeomorfe mangfaldigheiter. La oss sjå på dei viktigaste:

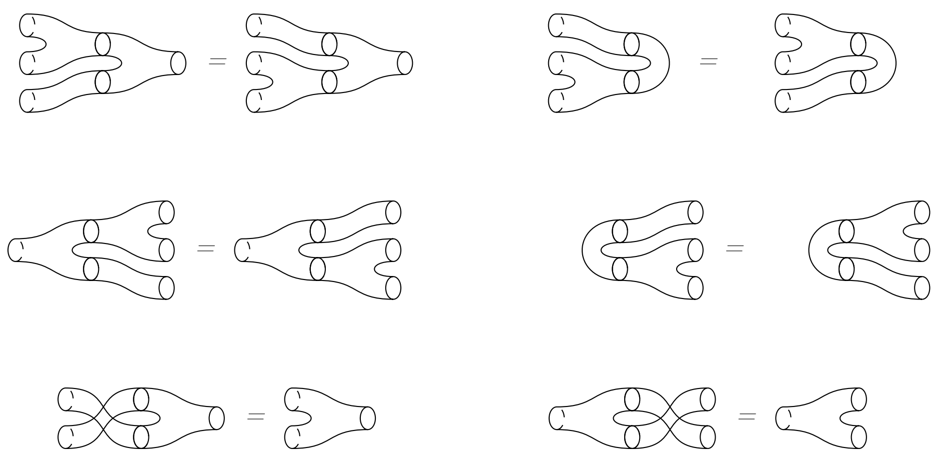
Lemma 3.8. *Desse einingsrelasjonane held i **2Cob**:*



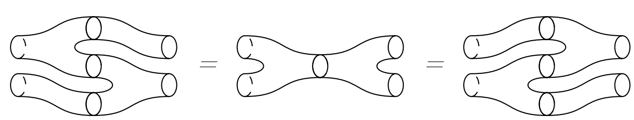




Lemma 3.9. *Desse relasjonane for (ko)assosiativitet og (ko)kommutativitet held i* ***2Cob****:*



Lemma 3.10. *Frobeniusvilkåret held i* ***2Cob****:*

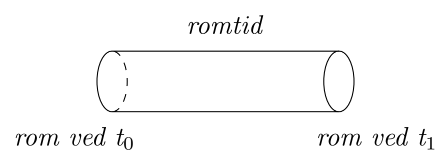


Prov. I alle tilfella over har kobordismane lik genus, like mange inn-render og like mange ut-render. Frå teorem 3.5 er dei då diffeomorfe. □

4 Topologiske kvantefeltteoriar

Feltteori er hyppig studert i fysikken og har ei lang historie gjennom fleire hundre år. Dei fleste vil kjenna til klassiske feltteoriar som gravitasjonsfelt og kanskje magnetiske og elektriske felt. Desse er *vektorfelt* og kan forklara mykje av den visuelle fysikken rundt oss. For ein generell feltteori tar me alltid utgangspunkt i ein dimensjon, ofte n: feltteorien består av $n-1$ dimensjonar i *rommet*, og éin dimensjon for *tida*. Ved å kombinera romparameterane med tida får me ei n-dimensjonal *romtid* mellom to rom ved kvart tidsintervall $[t_0, t_1]$. Sjølve *feltetteorien* er ein slags funksjon på rommet og romtida, som assosierer vektorrom me kan kalla *tilstandsrom* til dei $(n-1)$-dimensjonale romma ved tid t. Romtida mellom to rom blir då assosiert med ei lineæravbilding mellom dei induserte tilstandsromma.

Dersom rommet er ein enkel sirkel som ikkje forandrar seg i intervallet $[t_0, t_1]$ kan romtida frå t_0 til t_1 illustrerast som ein sylinder som bind tilstandsromma ved $t = t_0$ og $t = t_1$ saman:



Ein *topologisk feltteori* er ein feltteori der romtida er uavhengig av kontinuerlege parametarar som differensiell data eller metrikkar. Romtida er framleis avhengig av *topologiske* eigenskapar, og me krev til dømes at orientering blir bevart gjennom romtida. Ein topologisk feltteori med ein spesiell multiplikativ struktur kallar me ein *topologisk kvantefeltteori* (TKFT) og dette vil vera hovudfokuset for oppgåva. Her vil romma i feltteorien vera lukka orienterte $(n-1)$-mangfaldigheiter, og ei romtid mellom to slike vil vera ei orientert n-mangfaldigheit med dei lukka mangfaldigheitene som rand. Oppførselen til feltteorien kan då skildrast igjennom fylgjande aksiomatiske definisjon, basert på Atiyah[1]:

Definisjon 4.1. Ein *topologisk kvantefeltteori* av dimensjon n over ein kropp $\Bbbk$ består av fylgjande data:

1. Eit $\Bbbk$-vektorrom $Z(\Sigma)$ for kvar lukka, orienterte $(n-1)$-mangfaldigheit Σ,
2. Ein vektor $Z(M) \in Z(\partial M)$ for kvar orientert n-dimensjonal mangfaldigheit M,

slik at dei fylgjande aksioma held:

(i) Z er *funktoriell* for orienteringsbevarande diffeomorfiar for Σ og M,

(ii) Z er *dualisert*,

(iii) Z er *multiplikativ.*

At Z er *funktoriell* betyr at dersom $f : \Sigma \to \Sigma'$ er ein orienteringsbevarande diffeomorfi, så er $Z(f) : Z(\Sigma) \to Z(\Sigma')$ ein isomofri mellom vektorrom, og dersom me har avbildingar $f : \Sigma \to \Sigma'$ og $g : \Sigma' \to \Sigma''$, så er $Z(gf) = Z(g)Z(f)$.

(ii) seier oss at dersom Σ^* er lik Σ med motsett orientering, må $Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^* := Hom(Z(\Sigma), \mathbb{k})$. Med andre ord, dersom Z sender Σ til vektorrommet V, vil mangfaldigheita Σ^*, som er lik Σ berre med motsett orientering, bli sendt til dualrommet V^*.

(iii) seier oss at $Z(\Sigma \coprod \Sigma') = Z(\Sigma) \otimes Z(\Sigma')$; disjungt union av mangfaldigheiter blir sendt til tensorproduktet av vektorromma assosiert med kvar av mangfaldigheitene. Vidare seier multiplikativiteten at dersom ein har ein kobordisme M og kan dekomponera $\partial M = \Sigma_0 \coprod \Sigma_1^*$, ein disjungt union av mangfaldigheiter med motsett orientering, så vil vektoren

$$\begin{aligned} Z(M) \in Z(\partial M) = Z(\Sigma_0 \coprod \Sigma_1^*) = Z(\Sigma_0) \otimes Z(\Sigma_1^*) = Z(\Sigma_0) \otimes Z(\Sigma_1)^* \\ = Hom(Z(\Sigma_0), Z(\Sigma_1)). \end{aligned}$$

Dette betyr at einkvar kobordisme $\Sigma_0 \overset{M}{\Longrightarrow} \Sigma_1$ blir assosiert med ei lineæravbilding mellom vektorromma $Z(\Sigma_0)$ og $Z(\Sigma_1)$. For ein sylinderkonstruksjon $M = \Sigma \times [0,1]$ vil då $Z(M) \in End(\Sigma, \Sigma)$.

Definisjonen på ein TKFT kan på vegne av dette komprimerast til å vera ein slags strukturbevarande funksjon frå samlinga av lukka orienterte mangfaldigheiter og kobordismane mellom dei til samlinga av vektorrom over ein kropp $\mathbb{k}$. Aksiom (i) seier at ein slik funksjon må ha funktorelle eigenskapar, og ved å la desse samlingane av vektorrom og kobordismar vera kategoriane deira, indikerer dette at Z må vera ein fuktor. Denne funktoren må då bevara den symmetrisk-monoidale strukturen frå kobordismane til vektorromma, og me kan gje ein presis definisjon:

Definisjon 4.2. Ein todimensjonal topologisk kvantefeltteori er ein symmetrisk-monoidal funktor frå ($\mathbf{2Cob}$, $\coprod$, $\emptyset$, T) til ($\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$, $\otimes$, $\mathbb{k}$, σ).

Samlinga av desse funktorane utgjer ein kategori,

$$\mathbf{2TKFT} = \mathbf{SymMonCat}(\mathbf{2Cob}, \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}),$$

der objekta er symmetrisk-monoidale funktorar og morfiane er monoidale naturlege transformasjonar mellom dei.

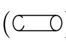
5 Hovudteoremet

I denne delen av oppgåva vil me visa at kategoriane **2TKFT** og $\mathbf{cFA}_{\Bbbk}$ er ekvivalente. Måten me vil gjera dette på er å setja opp spesifikke funktorar begge vegar, og visa at komposisjonane av desse er identitetar. Dette inneber å spesifisera kva funktorane gjer med både objekt og morfiar.

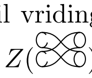
Den eine vegen vil me definera funktoren $\mathscr{F} : \mathbf{2TKFT} \to \mathbf{cFA}_{\Bbbk}$ på fylgjande måte: For ein topologisk kvantefeltteori $Z : \mathbf{2Cob} \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ lar me $\mathscr{F}(Z) = Z(\mathbf{1})$. Med andre ord lar me Z bli sendt til vektorrommet assosiert med sirkelen $S^1 = \mathbf{1}$ under Z.

Lemma 5.1. *$\mathscr{F}(Z)$ er ein kommutativ frobeniusalgebra.*

Prov. Frå eigenskapane til den symmetrisk-monoidale funktoren Z får me umiddelbart desse resultata:

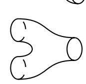
(i) Sidan Z er ein *funktor* er $Z(\mathrm{id}_{\mathbf{2Cob}}) = \mathrm{id}_A$, altså er $Z($$) = \mathrm{id}_A : A \to A$.

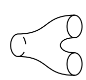
(ii) Sidan Z er ein *monoidal funktor* vil $Z(\mathbf{2}) = Z(S^1 \coprod S^1) = Z(S^1) \otimes Z(S^1) = A \otimes A$, og generelt, $Z(\mathbf{n}) = A^{\otimes n}$ for $\mathbf{n}$ i skjelettet av **2Cob**.

(iii) Sidan Z er ein *symmetrisk-monoidal funktor* vil vridingskobordismen bli sendt til vridinga av tensorproduktet, altså er $Z($$) = \sigma : A \otimes A \to A \otimes A$.

Dette dekkjer nokre av generatorane i **2Cob**, og me spesifiserer dei fylgjande avbildingane for dei resterande generatorane:

 $\longmapsto$ $[\eta : \Bbbk \longrightarrow A]$

 $\longmapsto$ $[\mu : A \otimes A \longrightarrow A]$

 $\longmapsto$ $[\delta : A \longrightarrow A \otimes A]$

 $\longmapsto$ $[\varepsilon : A \longrightarrow \Bbbk]$

Me ser at bildet av $\mathbf{1}$ under Z er eit vektorrom A med seks avbildingar. Gjennom funktoren Z blir relasjonane mellom kobordismane overførte til relasjonar mellom avbildingane, og ved hjelp av den grafiske algebraen såg me at eit vektorrom med slike avbildingar og slike relasjonar faktisk er ein kommutativ frobeniusalgebra. $\square$

Me har nå tatt hand om kva $\mathscr{F}$ gjer med objekta i **2TKFT**, og me vil nå sjå på morfiane.

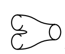
Anta at $u : Z \to Z'$ er ein monoidal naturleg transformasjon mellom to topologiske kvantefeltteoriar Z og Z', og la $Z(\mathbf{1}) = A$ og $Z'(\mathbf{1}) = A'$ vera dei induserte frobeniusalgebraane. Me hugsar at u er ei samling morfiar $u_X : Z(X) \to Z'(X)$ for kvart objekt $X \in \mathbf{2Cob}$. Sidan objekta i $\mathbf{2Cob}$ er på forma $\coprod_n S^1, n \in \mathbb{N}$ og funktorane Z og Z' er monoidale, kan me karakterisera desse morfiane som

$$u_n : Z(\mathbf{n}) = A^{\otimes n} \longrightarrow A'^{\otimes n} = Z'(\mathbf{n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sidan u er ein monoidal naturleg transformasjon, faktoriserer $u_n : A^{\otimes n} \longrightarrow A'^{\otimes n}$ til $u_1^{\otimes n} : (A \longrightarrow A')^{\otimes n}$, slik at me berre treng å spesifisera den eine avbildinga $u_1 : A \longrightarrow A'$. På grunnlag av dette definerer me funktoren $\mathscr{F}$ til å senda ein monoidal naturleg transformasjon $u : Z \to Z'$ til denne eine lineæravbildinga $u_1 : Z(\mathbf{1}) \longrightarrow Z'(\mathbf{1})$.

Lemma 5.2. *La $u : Z \to Z'$ vera ein monoidal naturleg transformasjon mellom topologiske kvantefeltteoriar Z og Z'. Då er $\mathscr{F}(u)$ ein frobeniusalgebrahomomorfi.*

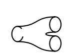
Prov. Me må visa at u_1 er ein algebrahomomorfi og ein koalgebrahomomorfi. For å gjera dette, vil me bruka naturaliteten til u, samt kva funktorane Z og Z' gjer me generatorane i **2Cob.**

Sjå på kobordismen $M =$ . Dette er ei avbilding $\mathbf{2} \xrightarrow{M} \mathbf{1}$ i $\mathbf{2Cob}$, og dersom me brukar funktorane Z og Z' får me to avbildingar i $\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$:

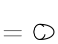
$$Z(\mathbf{2}) \xrightarrow{Z(M)} Z(\mathbf{1}) \quad \text{og} \quad Z'(\mathbf{2}) \xrightarrow{Z'(M)} Z'(\mathbf{1}).$$

Morfiane u_1 og $u_1 \otimes u_1$ får då dette diagrammet til å kommutera:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mu"] & Z(\mathbf{2}) \arrow[r, "u_1 \otimes u_1"] \arrow[d, "Z(M)"] & Z'(\mathbf{2}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "Z'(M)"] & A' \otimes A' \arrow[d, "\mu'"] \\
A \arrow[r, equal] & Z(\mathbf{1}) \arrow[r, "u_1"] & Z'(\mathbf{1}) \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Viss me ser på kobordismen $\Delta =$ , som er ei avbilding $\mathbf{1} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{2}$ i $\mathbf{2Cob}$ vil transformasjonen u få dette diagrammet til å kommutera:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, equal] & Z(\mathbf{2}) \arrow[r, "u_1 \otimes u_1"] & Z'(\mathbf{2}) \arrow[r, equal] & A' \otimes A' \\
A \arrow[r, equal] \arrow[u, "\delta"] & Z(\mathbf{1}) \arrow[r, "u_1"] \arrow[u, "Z(M)"'] & Z'(\mathbf{1}) \arrow[r, equal] \arrow[u, "Z'(M)"'] & A' \arrow[u, "\delta'"']
\end{tikzcd}$$

Tilsvarande diagram har me for kobordismane $H =$  og $E =$ , nemleg

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[r, equal] \arrow[d, "\eta"] & Z(\mathbf{0}) \arrow[r, "u_0=\mathrm{id}_\Bbbk"] \arrow[d, "Z(H)"] & Z'(\mathbf{0}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "Z'(H)"] & \Bbbk \arrow[d, "\eta'"] \\
A \arrow[r, equal] & Z(\mathbf{1}) \arrow[r, "u_1"] & Z'(\mathbf{1}) \arrow[r, equal] & A'
\end{tikzcd}$$

og

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] & Z(\mathbf{1}) \arrow[r, "u_1"] & Z'(\mathbf{1}) \arrow[r, equal] & A' \\
\Bbbk \arrow[r, equal] \arrow[u, "\varepsilon"] & Z(\mathbf{0}) \arrow[r, "u_0=\mathrm{id}_\Bbbk"] \arrow[u, "Z(E)"'] & Z'(\mathbf{0}) \arrow[r, equal] \arrow[u, "Z'(E)"'] & A' \arrow[u, "\varepsilon'"']
\end{tikzcd}$$

Me har altså ei avbilding $u_1 : A \longrightarrow A'$ med desse eigenskapane, uttrykte igjennom fire kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "u_1 \otimes u_1"'] & A \arrow[d, "u_1"] \\
A' \otimes A' \arrow[r, "\mu'"] & A'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "u_1"'] & A \otimes A \arrow[d, "u_1 \otimes u_1"] \\
A' \arrow[r, "\delta'"] & A' \otimes A'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u_1"] & A' \\
\Bbbk \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "\eta'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & A' \arrow[d, "\varepsilon'"] \\
& \Bbbk
\end{tikzcd}$$

som er nøyaktig definisjonen på at $u_1 : A \to A'$ er ein frobeniusalgebrahomomorfi. $\square$

Den andre vegen vil me definera ein funktor $\mathscr{G} : \mathbf{cFA}_\Bbbk \longrightarrow \mathbf{2TKFT}$. Me må altså senda ein kommutativ frobeniusalgebra $(A, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ til ein symmetriskmonoidal funktor $Z : \mathbf{2Cob} \longrightarrow \mathbf{Vect}_\Bbbk$. Dette gjer me ved å definera $\mathscr{G}$ til å senda A til funktoren Z som sender $\mathbf{1} \mapsto A$,  $\mapsto \mu$ og så bortover. Den grafiske algebraen garranterer at ein slik konstruksjon er veldefinert: to ekvivalente kobordismar i **2Cob** svarer til ekvivalente lineæravbildingar i $\mathbf{Vect}_\Bbbk$. Me kan nå sjå at $\mathscr{F}$ og $\mathscr{G}$ er inversar av kvarandre på objektnivå: dersom $\mathscr{G}(A) = Z$, så er $\mathscr{F}\mathscr{G}(A) = \mathscr{F}(Z) = Z(\mathbf{1}) = A$, og tilsvarande den andre vegen.

Dersom $\varphi : A \longrightarrow A'$ er ein frobeniusalgebrahomomorfi, må $\mathscr{G}$ senda φ til ein monoidal naturleg transformasjon $u : \mathscr{G}(A) \longrightarrow \mathscr{G}(A')$. Sidan $\mathscr{G}(A)(\mathbf{1}) = A$ og $\mathscr{G}(A')(\mathbf{1}) = A'$ kan me definera $\mathscr{G}(\varphi) = u$, der $u_n : \mathscr{G}(A)(\mathbf{n}) \longrightarrow \mathscr{G}(A')(\mathbf{n})$ berre er tensorproduktet $(\mathscr{G}(A)(\mathbf{1}) \longrightarrow \mathscr{G}(A')(\mathbf{1}))^{\otimes n} = (\varphi : A \to A')^{\otimes n}$. For at dette skal vera ein monoidal naturleg transformasjon, må desse diagramma kommutera:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(A)(\mathbf{n}\coprod\mathbf{m}) \arrow[r, "u_{\mathbf{n}\coprod\mathbf{m}}"] \arrow[d, equal] & \mathscr{G}(A')(\mathbf{n}\coprod\mathbf{m}) \arrow[d, equal] \\
\mathscr{G}(A)(\mathbf{n})\otimes\mathscr{G}(A)(\mathbf{m}) \arrow[r, "u_{\mathbf{n}}\otimes u_{\mathbf{m}}"] & \mathscr{G}(A')(\mathbf{n})\otimes\mathscr{G}(A')(\mathbf{m})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(A)(\Bbbk) \arrow[r, "u_{\Bbbk}"] \arrow[d, equal] & \mathscr{G}(A')(\Bbbk) \arrow[d, equal] \\
\Bbbk \arrow[r, "\mathrm{id}_{\Bbbk}"] & \Bbbk
\end{tikzcd}$$

som blir til

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes(n+m)} \arrow[r, "u_1^{\otimes(n+m)}"] \arrow[d, equal] & A'^{\otimes(n+m)} \arrow[d, equal] \\
A^{\otimes(n+m)} \arrow[r, "(u_1^{\otimes n})\otimes(u_1^{\otimes m})"] & A'^{\otimes(n+m)}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[r, "u_{\Bbbk}"] \arrow[d, equal] & \Bbbk \arrow[d, equal] \\
\Bbbk \arrow[r, "\mathrm{id}_{\Bbbk}"] & \Bbbk
\end{tikzcd}$$

Altså må $u_1^{\otimes(n+m)} = (u_1^{\otimes n})\otimes(u_1^{\otimes m})$ og $u_{\Bbbk} = \mathrm{id}_{\Bbbk}$, som fylgjer frå definisjonen av u. Dersom me nå brukar $\mathscr{F}$ på u, får me frobeniusalgebrahomomorfien $u_1 = \varphi : A \to A'$, og me ser at $\mathscr{F}$ og $\mathscr{G}$ er inversar på morfinivå òg. Dette konkluderer hovudresultatet i oppgåva.

Teorem 5.3. *Kategoriane* ***2TKFT*** *og* $\mathbf{cFA}_{\Bbbk}$ *er ekvivalente.*

6 Bruksområde for hovudteoremet

Me har funne ein kanonisk ekvivalens av kategoriar;

$$\mathscr{F} : \mathbf{2TKFT} \rightleftarrows \mathbf{cFA}_{\Bbbk} : \mathscr{G}$$

og vil nå sjå på bruksområde av dette. Resultatet seier at dersom me har ein gjeven kommutativ frobeniusalgebra A, så kan me konstruera ein topologisk kvantefeltteori $Z : \mathbf{2Cob} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ frå A. La nå M vera ei lukka 2-mangfaldigheit, altså ein orientert kobordisme $\emptyset_1 \overset{M}{\Longrightarrow} \emptyset_1$ i **2Cob**. Sidan Z er monoidal, veit me at $Z(\emptyset_1) = Z(\mathbf{1_{2Cob}}) = \mathbf{1}_{\mathbf{Vect}_{\Bbbk}} = \Bbbk$. Den tomme mangfaldigheita blir altså sendt til den underliggjande kroppen i frobeniusalgebraane, som me hugsar verkar som nøytralt element for tensorproduktet. Vidare veit me at $Z(M) \in Hom(Z(\emptyset_1), Z(\emptyset_1)) = Hom(\Bbbk, \Bbbk)$. Mangfaldigheita M blir altså sendt til ei lineæravbilding $\Bbbk \longrightarrow \Bbbk$, altså ein konstant. Dersom M' er ei anna mangfaldigheit som er diffeomorf til M, må M' bli sendt til *same* lineæravbilding som M. Dette er fordi Z er ein funktor. På denne måten produserer Z *invariantar* for lukka 2-mangfaldigheiter, fordi dersom to mangfaldigheiter får tildelt *ulik* konstant under Z i $Hom(\Bbbk, \Bbbk)$, så kan dei *ikkje* vera diffeomorfe i **2Cob**. La oss sjå nokre døme.

6.1 Døme 1.

La $\mathbb{C}[x]$ vera polynomringen over $\mathbb{C}$ og la $A = \mathbb{C}[x]/(x^2)$ med basis $\mathcal{B} = \{1, x\}$. Definer funksjonalen ε til å senda $1 \to 0_{\mathbb{C}}$ og $x \to 1_{\mathbb{C}}$. Det blei vist tidlegare i oppgåva at denne funksjonalen faktisk er ei frobeniusform. For å finna eksplisitte avbildingar $\Bbbk \to \Bbbk$ må me fyrst finna eksplisitte uttrykk for avbildingane μ, η og δ. Definisjonane på dei to siste tvinger oss i tillegg til å gå innom paringane β og γ.

Multiplikasjonen i algebraen er gjeven slik:

$$\mu(1 \otimes 1) = 1, \quad \mu(1 \otimes x) = x, \quad \mu(x \otimes 1) = x \quad \text{og} \quad \mu(x \otimes x) = 0.$$

Paringa $\beta = \varepsilon \circ \mu : A \otimes A \longrightarrow \mathbb{C}$ blir då gjeven som

$$\beta(1 \otimes 1) = \beta(x \otimes x) = 0_{\mathbb{C}}, \quad \beta(x \otimes 1) = \beta(1 \otimes x) = 1_{\mathbb{C}}.$$

β svarer dermed til matrisa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Me veit at β i komposisjon med koparinga γ er identiteten, og sidan $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ er sin eigen invers og koparinga γ er unik, er altså koparinga gjeven med $\gamma(1_{\mathbb{C}}) = 1 \otimes x + x \otimes 1$.

Me kan nå bruka definisjonen på eininga η til å sjå at

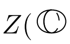
$$\begin{aligned}
\eta(1_{\mathbb{C}}) &= (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma(1_{\mathbb{C}}) \\
&= (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&= \varepsilon(1) \otimes x + \varepsilon(x) \otimes 1 \\
&= 0_{\mathbb{C}} \otimes x + 1_{\mathbb{C}} \otimes 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Til slutt brukar me definisjonen på $\delta = (\mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\gamma \otimes \mathrm{id})$, som gjev oss at

$$\delta(1) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \quad \text{og} \quad \delta(x) = x \otimes x.$$

Sjå nå på $M = S^2$. I **2Cob** kan me laga sfæren ved å lima saman kobordismane  og . Merk at sidan kobordismen går frå venstre mot høgre, må me fyrst ta  og deretter , og me skriv derfor komposisjonen  som ()$\circ$().

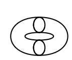
Dersom me nå sender sfæren gjennom den monoidale funktoren Z, får me at

$Z($$) = Z($$) \circ Z($$) = \varepsilon \circ \eta \in Hom(\Bbbk, \Bbbk).$

Invarianten til sfæren er dermed gjeven som bildet av $1_{\mathbb{C}}$ under komposisjonen $\varepsilon \circ \eta$:

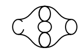
$$\mathrm{Inv}(S^2) = \varepsilon \circ \eta(1_{\mathbb{C}}) = \varepsilon(1) = 0_{\mathbb{C}}.$$

Me kan gjera det tilsvarande for torusen $\mathbb{T}^2$, som kan konstruerast ved å lima saman kobordismane  og . Sender me torusen gjennom Z får me at

$Z($$) = Z($$) \circ Z($$) = \beta \circ \gamma \in Hom(\Bbbk, \Bbbk).$

Me får fylgjande invariant for torusen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inv}(\mathbb{T}^2) &= \beta \circ \gamma(1_{\mathbb{C}}) \\
&= \beta(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&= \beta(1 \otimes x) + \beta(x \otimes 1) \\
&= 1_{\mathbb{C}} + 1_{\mathbb{C}} \\
&= 2_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Me kan nå sjå på ei flate med genus $g > 2$. Her vil «handtaket»  oppstå fleire gongar, faktisk $g - 2$ gongar etter kvarandre dersom me ser bort frå identitetar. Diverre er avbildinga $\mu\delta(x) = 0$, og alle flater med genus > 2 vil dermed få invariant null. Dette viser at «fine» algebraar ikkje alltid gjev «fine» invariantar.

6.2 Døme 2.

La $A = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ med basis $\mathcal{B} = \{1, x\}$. Definer funksjonalen ε ved å senda $1 \mapsto 1_{\mathbb{R}}$ og $x \mapsto 0_{\mathbb{R}}$. La oss fyrst sjekka at dette er ei frobeniusform.

Anta at $Ay \subset Null(\varepsilon)$ for eit ikkjenull-element $y = ax + b \in A$. Ay er eit ideal, som betyr at $xy = ax^2 + bx = -a + bx \in Ay$. Då er $\varepsilon(-a+bx) = -a\varepsilon(1) + b\varepsilon(x) = -a = 0 \implies a = 0$. Så y er på forma $b \in \mathbb{R}$. Men dersom $\varepsilon(Ab) = 0$ må $b = 0$, så uansett må $y = 0 \implies Ay = (0)$, og ε er dermed ei frobeniusform. Merk at dersom funksjonalen var definert ved $1 \mapsto 0_{\mathbb{R}}$ og $x \mapsto 1_{\mathbb{R}}$, hadde konklusjonen vore den same.

Ved same framgangsmåte som i det førre dømet kan me karakterisera avbildingane i algebraen slik:

$$\mu(1 \otimes 1) = 1, \quad \mu(1 \otimes x) = x, \quad \mu(x \otimes 1) = x, \quad \mu(x \otimes x) = -1,$$

$$\beta(1 \otimes 1) = 1_{\mathbb{R}}, \quad \beta(1 \otimes x) = \beta(x \otimes 1) = 0_{\mathbb{R}}, \quad \beta(x \otimes x) = -1_{\mathbb{R}}.$$

Dermed svarer β til matrisa $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, med invers $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, som gjev oss koparinga

$$\gamma(1_{\mathbb{R}}) = 1 \otimes 1 - x \otimes x,$$

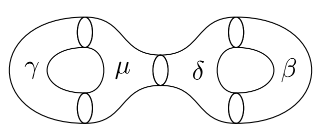
$$\implies \eta(1_{\mathbb{R}}) = 1,$$

$$\implies \delta(1) = 1 \otimes 1 - x \otimes x, \quad \delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1.$$

For sfæren og torusen får me desse invariantane:

$$\begin{aligned} \mathrm{Inv}(S^2) &= \varepsilon \circ \eta(1_{\mathbb{R}}) \\ &= \varepsilon(1) \\ &= 1_{\mathbb{R}}. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathrm{Inv}(\mathbb{T}^2) &= \beta \circ \gamma(1_{\mathbb{R}}) \\ &= \beta(1 \otimes 1 - x \otimes x) \\ &= \beta(1 \otimes 1) - \beta(x \otimes x) \\ &= 1_{\mathbb{R}} - (-1_{\mathbb{R}}) \\ &= 2_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

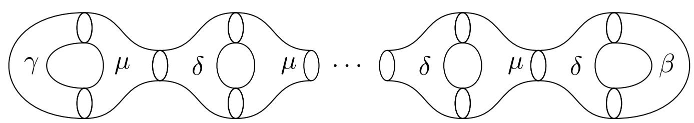
La oss nå sjå på ei flate med genus 2. Denne kobordismen kan konstruerast på fylgjande vis med generatorane i **2Cob**:

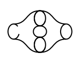


Invarianten til denne flata blir då

$$
\begin{aligned}
\beta\delta\mu\gamma(1_{\mathbb{R}}) &= \beta\delta\mu(1\otimes 1 - x\otimes x)\\
&= \beta\delta(2_{\mathbb{R}}\cdot 1)\\
&= 2_{\mathbb{R}}\beta(1\otimes 1 - x\otimes x)\\
&= 2_{\mathbb{R}}\cdot(1_{\mathbb{R}} - (-1_{\mathbb{R}}))\\
&= 2_{\mathbb{R}}\cdot 2_{\mathbb{R}}\\
&= 4_{\mathbb{R}}.
\end{aligned}
$$

Kva så med ei flate med genus $g > 2$? Ei slik flate ser slik ut:



der handtaket  opptrer $g-2$ gongar. Avbildinga som svarer til ei slik flate er altså $(\beta\delta)\circ(\mu\delta)^{g-2}\circ(\mu\gamma)$. Me veit at $\mu\gamma(1_{\mathbb{R}}) = 2_{\mathbb{R}}\cdot 1$ og $\beta\delta(1) = 2_{\mathbb{R}}$. Me må altså finna ut kva handtaket gjer med 1:

$$
\begin{aligned}
\mu\delta(1) &= \mu(1\otimes 1 - x\otimes x)\\
&= \mu(1\otimes 1) - \mu(x\otimes x)\\
&= 2_{\mathbb{R}}\cdot 1\\
&\implies (\mu\delta)^n(1) = 2_{\mathbb{R}}^n\cdot 1.
\end{aligned}
$$

Med dette kan me gje fylgjande resultat av teorem 5.3:

Korollar 6.1. *La $A = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ med frobeniusform $1\to 1_{\mathbb{R}}, x\to 0_{\mathbb{R}}$. La M vera ei samanhengande, lukka orientert 2-mangfaldigheit med genus $g = 0,1,\ldots$ Feltteorien som svarer til A gjev då at*

$$
Inv(M) = (2_{\mathbb{R}})\cdot(2_{\mathbb{R}}^{g-2})\cdot(2_{\mathbb{R}}) = 2_{\mathbb{R}}^g.
$$

Dette resultatet viser at om ein legg til ei frobeniusform til den allereie flotte og uskuldige polynomringen $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$, oppstår det invariantar som skil alle samanhengande, lukka flater frå kvarandre.

Ein kan kanskje spørja seg kvifor denne frobeniusalgebraen gav så mykje betre invariantar enn den fyrste me såg på. Er det det underliggjande vektorrommet som er avgjerande, eller kan det vera valet av frobeniusform $\varepsilon : A\to \Bbbk$? Som eit eksperiment kan me sjå på den same algebraen, men gje ei anna frobeniusform, og sjå kva dette har å seia for dei induserte invariantane.

6.3 Døme 3.

La oss igjen sjå på algebraen $A = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$, men denne gongen definera funksjonalen ε som $1 \mapsto 0_\mathbb{R}$ og $x \mapsto 1_\mathbb{R}$. Vil ei anna frobeniusform gje andre invariantar?

Multiplikasjonen i algebraen er som over, men paringa blir litt annleis på grunn av funksjonalen:

$$\mu(1 \otimes 1) = 1, \quad \mu(1 \otimes x) = x, \quad \mu(x \otimes 1) = x, \quad \mu(x \otimes x) = -1,$$

$$\beta(1 \otimes 1) = 0_\mathbb{R}, \quad \beta(1 \otimes x) = \beta(x \otimes 1) = 1_\mathbb{R}, \quad \beta(x \otimes x) = 0_\mathbb{R}.$$

Me ser at β svarer til matrisa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, slik at koparinga blir

$$\begin{aligned} \gamma(1_\mathbb{R}) &= 1 \otimes x + x \otimes 1 \\ \implies \eta(1_\mathbb{R}) &= 1 \\ \implies \delta(1) = 1 \otimes x + x \otimes 1, &\quad \delta(x) = x \otimes x - 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Inv}(S^2) &= \varepsilon \circ \eta(1_\mathbb{R}) \\ &= \varepsilon(1) \\ &= 0_\mathbb{R}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{Inv}(\mathbb{T}^2) &= \beta \circ \gamma(1_\mathbb{R}) \\ &= \beta(1 \otimes x + x \otimes 1) \\ &= \beta(1 \otimes x) + \beta(x \otimes 1) \\ &= 1_\mathbb{R} + 1_\mathbb{R} \\ &= 2_\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Her ser me allereie at invarianten for sfæren er annleis. For genus 2-flata blir invarianten

$$\begin{aligned} \beta\delta\mu\gamma(1_\mathbb{R}) &= \beta\delta\mu(1 \otimes x + x \otimes 1) \\ &= \beta\delta(2_\mathbb{R} \cdot x) \\ &= 2_\mathbb{R} \cdot \beta(x \otimes x - 1 \otimes 1) \\ &= 2_\mathbb{R} \cdot (0_\mathbb{R} + 0_\mathbb{R}) \\ &= 0_\mathbb{R}. \end{aligned}$$

For ei generell flate med genus $g \geq 2$ er altså dekomposisjonen $(\beta\delta) \circ (\mu\delta)^{g-2} \circ (\mu\gamma)$. Me veit at $\mu\gamma(1_\mathbb{R}) = \mu(1 \otimes x + x \otimes 1) = 2_\mathbb{R} \cdot x$, og må sjekka kva handtaket gjer med x:

$$\begin{aligned} \mu\delta(x) &= \mu(x \otimes x - 1 \otimes 1) \\ &= \mu(x \otimes x) - \mu(1 \otimes 1) \\ &= -2_\mathbb{R} \cdot 1. \end{aligned}$$

Dersom genusen er større enn 3, oppstår handtaket minst to gongar, og i dette tilfellet me må sjekka kva handtaket gjer med 1:

$$\begin{aligned} \mu\delta(1) &= \mu(1 \otimes x + x \otimes 1) \\ &= \mu(1 \otimes x) + \mu(x \otimes 1) \\ &= 2_{\mathbb{R}} \cdot x. \end{aligned}$$

For n handtak får me altså at

$$(\mu\delta)^n(x) = \begin{cases} -2^n_{\mathbb{R}} \cdot 1, & n \equiv 1 \pmod{4}, \\ 2^n_{\mathbb{R}} \cdot 1, & n \equiv 3 \pmod{4}, \\ -2^n_{\mathbb{R}} \cdot x, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2^n_{\mathbb{R}} \cdot x, & n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Det kjem altså an på genusen om det er eit multippel av 1 eller x som blir sendt vidare til komposisjonen $\beta\delta$. For flatene med partalsgenus finn me at $\beta\delta(x) = \beta(x \otimes x - 1 \otimes 1) = 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}$, så desse flatene blir ikkje «oppdaga» av feltteorien.

For flatene med oddetalsgenus derimot, får me at $\beta\delta(1) = \beta(1 \otimes x + x \otimes 1) = 2_{\mathbb{R}}$.

Ei generell flate M med dekomposisjon $(\beta\delta) \circ (\mu\delta)^{g-2} \circ (\mu\gamma)$ får altså invarianten

$$\mathrm{Inv}(M) = \begin{cases} 0, & g \equiv 0 \pmod{2}, \\ 2^g_{\mathbb{R}}, & g \equiv 1 \pmod{4}, \\ -2^g_{\mathbb{R}}, & g \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Merkelig nok vil feltteorien assosiert med denne frobeniusalgebraen berre klara å skilja «halvparten» av dei samanhengande, lukka flatene frå kvarandre, nemleg dei med oddetalsgenus.

Dette dømet viser at det ikkje nødvendigvis er algebraen A som er viktig for dei algebraiske invariantane, men frobeniusforma ε.

7 Appendiks

7.1 Kategoriar og funktorar

Definisjon 7.1. Ein *kategori* $\mathcal{C}$ består av

- ei samling ob $\mathcal{C}$ av *objekt*, der me skriv $X \in \mathcal{C}$ kvar gong $X \in \text{ob } \mathcal{C}$,
- for kvart par $X, Y \in \mathcal{C}$ ei mengde $\mathcal{C}(X, Y)$ av *morfiar* frå X til Y, der me skriv $f : X \to Y$ for $f \in \mathcal{C}(X, Y)$,
- for kvar trippel $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ ei assosiativ komposisjonslov

  $$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z),$$

  der me skriv gf eller $g \circ f$ for komposisjonen av $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$,
- for kvar $X \in \mathcal{C}$ ein identitetsmorfi $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$, som speler rolla som nøytralt element ved komposisjon frå begge sider.

At komposisjonslova er asossiativ betyr at kvar gong me har tre morfiar $W \xrightarrow{e} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, så vil komposisjonane tilfredsstilla

$$g(fe) = (gf)e,$$

og for to morfiar $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ vil nøytraliteten til id_X bety at $f\text{id}_X = f$ og $\text{id}_X g = g$.

Definisjon 7.2. La $\mathcal{C}$ vera ein kategori. Me kallar $\mathcal{S}$ for ein *underkategori* av $\mathcal{C}$ viss $\mathcal{S}$ består av

- ei samling ob $\mathcal{S}$ av objekt frå $\mathcal{C}$,
- ei samling $Hom(\mathcal{S})$ av morfiar frå $\mathcal{C}$,

slik at

- for kvart objekt $X \in \mathcal{S}$ så er $\text{id}_X \in Hom(\mathcal{S})$,
- for kvar morfi $f : X \longrightarrow Y \in Hom(\mathcal{S})$ så er både definisjonsområdet X og målområdet Y i $\mathcal{S}$,
- for kvart par med morfiar $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z \in Hom(\mathcal{S})$ så er komposisjonen $gf : X \longrightarrow Z$ i $Hom(\mathcal{S})$.

Døme 7.1. Fleire matematiske objekt dannar kategoriar. Her er nokre vanlege døme:

- Kategorien **Set** har *mengder* som objekt og *funksjonar* som morfiar.

- Kategorien **Top** har *topologiske rom* som objekt og *kontinuerlege funksjonar* som morfiar.
- Kategorien $\mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ har *vektorrom* over kroppen $\Bbbk$ som objekt og *lineæravbildingar* som morfiar.
- Kategorien har **Grp** har *grupper* som objekt og *gruppehomomorfiar* som morfiar.
- Underkategorien **Ab** av **Grp** har *abelske grupper* som objekt og gruppehomomorfiar som morfiar. Merk at for $X, Y \in \mathbf{Ab}$, så er $X, Y \in \mathbf{Grp}$ og at $\mathbf{Grp}(X, Y) = \mathbf{Ab}(X, Y)$. Kategoriane har altså ulike objekt, men dersom eit par (X, Y) er i begge kategoriane, er morfimengda mellom dei lik i begge kategoriane. Slike underkategoriar kallar me *fulle underkategoriar*.

Definisjon 7.3. Ein *funktor* mellom to kategoriar $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ består av ei avbilding F mellom ob $\mathcal{C}$ og ob $\mathcal{D}$, som

- for kvart objekt $X \in \mathcal{C}$ knyt eit objekt $FX \in \mathcal{D}$ til X,
- for kvar morfi $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ knyt ein morfi $Ff \in \mathcal{D}(FX, FY)$ til f som bevarer assosiativitetslova og identitetsmorfiane.

At ein funktor F bevarer assosiativitetslova betyr at kvar gong ein har morfiar $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ i $\mathcal{C}$ med tilsvarane morfiar $Ff : FX \to FY$ og $Fg : FY \to FZ$ i $\mathcal{D}$, så må

$$F(fg) = F(f)F(g),$$

og for kvart objekt $X \in \mathcal{C}$, så må F senda identitetsmorfien til $X \in \mathcal{C}$ til identitetsmorfien til $FX \in \mathcal{D}$, altså må

$$F\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}.$$

Døme 7.2. Einkvar kategori $\mathcal{C}$ kjem med ein identitetsfunktor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, som verkar som identiteten på både objektane og morfiane.

Døme 7.3. Singulær homologi H_n av grad n er ein funktor frå **Top** til **Ab** der eit topoligisk rom X blir knyt til ei abelsk gruppe $H_n(X)$ og ein kontinuerleg funksjon $f : X \longrightarrow Y$ blir knyt til ein gruppehomomorfi $\varphi : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$. Fordi funktorar bevarer isomorfiar kan ein analysera den induserte homomorfien φ for å avgjera om f er ein isomofri i **Top**; ein *homeomorfi*, eller ikkje.

Definisjon 7.4. La $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ vera kategoriar, og la F og G vera to funktorar

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}.$$

Ein *naturleg transformasjon* $u : F \Longrightarrow G$ er ei samling av morfiar som

- for kvart objekt $X \in \mathcal{C}$ knyt ein morfi $u_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ i $\mathcal{D}$ til X (kalla komponenten til u ved X) som kommuterer med morfiar frå X.

At komponentane til u kommuterer med morfiar vil seia at kvar gong me har ein morfi $f : X \longrightarrow Y$, så vil dette diagrammet kommutera:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "u_X"'] & F(Y) \arrow[d, "u_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Dersom morfiane u_X og u_Y er isomorfiar i kategorien $\mathcal{D}$, kallar me u ein *naturleg isomorfi.*

Definisjon 7.5. La $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ vera to kategoriar. Ein *ekvivalens av kategoriar* består av to funktorar $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ og $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, slik at komposisjonen av funktorane er isomorfe til identiteten på kvar av kategoriane. Med andre ord, $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er ekvivalente dersom finst det naturlege isomorfiar $FG \xrightarrow{\cong} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ og $GF \xrightarrow{\cong} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Døme 7.4. La $\varphi : R \longrightarrow S$ vera ein ringhomomorfi mellom kommutative ringar R og S. Me gjer desse observasjonane:

- Restriksjonen $\varphi^* : R^* \longrightarrow S^*$ mellom gruppene av *einingar* i R og S er ein funktor $^* :$ **cRing** $\longrightarrow$ **Grp**.

- Mellom gruppene $GL_n(R)$ og $GL_n(S)$ av invertible $n \times n$-matriser med element frå ringane blir det indusert ein homomorfi $GL_n(\varphi)$ ved å bruka φ på kvart av elementa i matrisene. På denne måten får me ein funktor $GL_n :$ **cRing** $\longrightarrow$ **Grp**.

- Determinanten for gruppa $GL_n(R)$ er ein homomofri $\det_R : GL_n(R) \longrightarrow R^*$ som kommuterer med funktorane over, og er dermed ein naturleg transformasjon mellom funktorane GL_n og *. Altså er $\varphi^* \circ \det_R = \det_S \circ GL_n(\varphi)$, visualisert i dei fylgjande diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{cRing} \arrow[r, shift left, "GL_n"] \arrow[r, shift right, "*"'] & \mathbf{Grp}. \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} GL_n(R) \arrow[r, "GL_n(\varphi)"] \arrow[d, "\det_R"'] & GL_n(S) \arrow[d, "\det_S"] \\ R^* \arrow[r, "\varphi^*"'] & S^* \end{tikzcd}$$

7.2 Monoidale kategoriar

Definisjon 7.6. La $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ vera kategoriar. Det *kartesiske produktet* av $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er ein kategori $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, der

- objekta er ordna par (X, Y) der $X \in \mathcal{C}$ og $Y \in \mathcal{D}$,
- morfiane mellom objektane (X, Y) og (X', Y') er det kartesiske produktet $\mathcal{C}(X, X') \times \mathcal{D}(Y, Y')$.

Merk: Me skriv den tomme produktkategorien som $\mathbf{1}$. Dette er kategorien med berre eitt objekt, og den einaste morfien er identitetsmorfien. (Alternativt: $\mathbf{1}$ er tuppelen (X, id_X).) Det er òg verdt å merka seg at produkt av kategoriar er assosiativt, og at den tomme produktkategorien verkar som nøytralt element for det kartesiske produktet. Altså har me ekvivalensar

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{E} = \mathcal{C} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{E})$$

og

$$\mathbf{1} \times \mathcal{C} = \mathcal{C} = \mathcal{C} \times \mathbf{1}.$$

Definisjon 7.7. Ein *strengt-monoidal kategori* er ein kategori $\mathcal{C}$ saman med to funktorar,

$$\mu : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \text{ og } \eta : \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C},$$

kalla *multiplikasjon* og *eining*, slik at dei fylgjande diagramma kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[dl, "\mu \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \mu"] & \\
\mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[dr, "\mu"'] & & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[dl, "\mu"] \\
 & \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\eta \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[d, "\mu"] \\
 & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{C} \times \mathbf{1} \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \eta"'] \arrow[dl] \\
\mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

Dette vil seia at μ tilfredsstiller assosiativitetslova og at bildet av $\mathbf{1}$ under η verkar som nøytralt element for μ. Me skriv gjerne ein slik kategori som ein tuppel $(\mathcal{C}, \otimes, 1_{\mathcal{C}})$, der $X \otimes Y$ svarer til bildet av $\mu(X, Y)$ og $1_{\mathcal{C}}$ svarer til bildet av $\eta(\mathbf{1})$. Merk at $\otimes$ berre symboliserer «multiplikasjonen» i kategorien, og at funktoren μ ikkje alltid har tensorproduktet som kodomene.

Fleire kategoriar kjem med ein multiplikasjons- og einingsfunktor, men tilfredsstiller ikkje krava for å vera ein strengt-monoidal kategori. Til dømes er $\mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ saman med $\otimes$ og $\Bbbk$ ein monoidal kategori i generell forstand — tensorprodukt som multiplikasjon og kroppen som identitet. Problemet oppstår fordi for tre vektorrom U, V og W så er ikkje $(U \otimes V) \otimes W$ teknisk sett *lik* $U \otimes (V \otimes W)$. Altså vil ikkje diagramma i definisjon 7.7 kommutera. Dette betyr at funktorane

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \underset{\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \mu}{\overset{\mu \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}}}{\rightrightarrows}} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \underset{\mu}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}$$

og

$$\mathbf{1} \times \mathcal{C} \underset{\mathrm{id}_{\mathcal{C}}}{\overset{\mu \circ \eta \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}}}{\rightrightarrows}} \mathcal{C} \qquad\qquad \mathcal{C} \times \mathbf{1} \underset{\mathrm{id}_{\mathcal{C}}}{\overset{\mu \circ \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \eta}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}$$

ikkje alltid er ekvivalente i ein generell monoidal kategori. I vårt tilfelle med tensorprodukt av vektorrom er det heldigvis kanoniske isomorfiar $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$. Altså er det ein inverterbar naturleg transformasjon

$$\alpha : \mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \Longrightarrow \mu \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \mu)$$

mellom funktorane. På denne måten kan me seia at multiplikasjonen i $\mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ er assosiativ *opp til naturleg transformasjon.* Finst det tilsvarande transformasjonar for eininga, sei

$$\lambda : \mu \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \eta) \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$$

$$\rho : \mu \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \mu) \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \ ,$$

kan me definera ein (svakt-) monoidal kategori.

Definisjon 7.8. Ein *monoidal kategori* er ein kategori $\mathcal{C}$ saman med to funktorar

$$\mu : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \text{ og } \eta : \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C},$$

samt inverterbare naturlege transformasjonar α, λ, ρ slik at $\mathcal{C}$ oppfører seg som ein strengt-monoidal kategori under dei naturlege transformasjonane.

Funktorar som bevarer ein slik monoidal struktur definerer me slik:

Definisjon 7.9. La $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$ og $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, 1_{\mathcal{D}})$ vera to monoidale kategoriar. Ein *monoidal funktor* frå $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ er ein funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ saman med naturlege transformasjonar $\varphi_{X,Y} : F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \to F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)$ for alle objekt $X, Y \in \mathcal{C}$, samt ein morfi $\varphi_1 : 1_{\mathcal{D}} \to F(1_{\mathcal{C}})$ slik at dei fylgjande diagramma kommuterer for alle triplar X, Y og Z i $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(FX \otimes_{\mathcal{D}} FY) \otimes_{\mathcal{D}} FZ \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, "(\varphi_{X,Y}) \otimes_{\mathcal{D}} (\mathrm{id}_{\mathcal{D}})"'] & FX \otimes_{\mathcal{D}} (FY \otimes_{\mathcal{D}} FZ) \arrow[d, "(\mathrm{id}_{\mathcal{D}}) \otimes_{\mathcal{D}} (\varphi_{Y,Z})"] \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} FZ \arrow[d, "\varphi_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z}"'] & FX \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[d, "\varphi_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z}"] \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[r, "F_{\alpha_{\mathcal{C}}}"'] & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FX \otimes_{\mathcal{D}} 1_{\mathcal{D}} \arrow[r, "(\mathrm{id}_{\mathcal{D}}) \otimes_{\mathcal{D}} \varphi_1"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{D}}"'] & FX \otimes_{\mathcal{D}} F1_{\mathcal{C}} \arrow[d, "\varphi_{X, 1_{\mathcal{C}}}"] \\
FX & F(X \otimes_{\mathcal{C}} 1_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F_{\rho_{\mathcal{C}}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} FY \arrow[r, "\varphi_1 \otimes_{\mathcal{D}} (\mathrm{id}_{\mathcal{D}})"] \arrow[d, "\lambda_{\mathcal{D}}"'] & F1_{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{D}FY \arrow[d, "\varphi_{1_{\mathcal{C}}, Y}"] \\
FY & F(1_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[l, "F\lambda_{\mathcal{C}}"']
\end{tikzcd}$$

Det fyrste diagrammet seier at funktoren bevarer assosiativitetslova for multiplikasjonen, og dei to nedste seier at funktoren respekterer einingane i kvar av kategoriane.

Ein kan òg krevja meir struktur frå desse funktorane. Ein *sterkt-monoidal funktor* er til dømes ein monoidal funktor $\mathscr{F} : (\mathcal{C}, \otimes) \to (\mathcal{D}, \coprod)$ der ein krev at morfiane $\mathscr{F}(X \otimes Y) \to \mathscr{F}(X) \coprod \mathscr{F}(Y)$ og $\mathscr{F}(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \to \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ er isomorfiar. Om ein heller krev at desse morfiane faktisk er identitetar, har me ein *strengt-monoidal funktor.*

For å få den monoidale strukturen til (svakt-) monoidale kategoriar som ($\mathbf{Vect}_{\Bbbk}$,$\otimes$) til å gå opp, må ein altså drassa rundt på ein drøss naturlege transformasjonar. Om ein då vil gå vidare med til dømes monoidale funktorar, vil den opphopande ekstra informasjonen kanskje gjera slike monoidale kategoriar vanskelege å jobba med. Heldigvis finst det eit resultat som seier at alle monoidale kategoriar *på ein måte* er strengt monoidale.

Teorem 7.1. *Einkvar monoidal kategori M er kategorisk ekvivalent, via ein sterk monoidal funktor $\mathscr{G} : M \to S$ og ein sterk monoidal funktor $\mathscr{F} : S \to M$, til ein strengt monoidal kategori S.*

Dette teoremet seier at ein kan *behandla* kategorien ($\mathbf{Vect}_{\Bbbk}$,$\otimes$) som ein strengt-monoidal kategori, fordi kategorien er *ekvivalent* med ein strengt-monoidal kategori, sei $\mathcal{S}$. Så når $(U \otimes V) \otimes W \neq U \otimes (V \otimes W)$ kan ein berre bruka funktorar, sei $\mathscr{F}$ og $\mathscr{G}$, på fylgjande måte:

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes W \arrow[d, "\mathscr{F}"] & U \otimes (V \otimes W) \\
\mathscr{F}((U \otimes V) \otimes W) \arrow[r, equal] & \mathscr{F}(U \otimes (V \otimes W)) \arrow[u, "\mathscr{G}"']
\end{tikzcd}$$

der $\mathscr{G} \circ \mathscr{F} \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{Vect}_{\Bbbk}}$. Detaljar rundt teorem 7.1 finn du i [4, Chapter XI, section 3, Theorem 1.]

7.3 Symmetrisk-monoidale kategoriar

Monoidale kategoriar kan komma med ein spesiell vridingsfunktor som byter om på «faktorane» i produktet. Analogt til dette i gruppeverda vil vera abelske grupper.

Definisjon 7.10. Ein (strengt) symmetrisk-monoidal kategori er ein monoidal kategori $(\mathcal{C}, \otimes, 1_{\mathcal{C}})$ saman med ei *vridingsavbilding* for kvart par $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$T_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X,$$

slik at desse diagramma kommuterer:

(i) For to morfiar $f : X \to X'$ og $g : Y \to Y'$ så respekterer T desse:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "T_{X,Y}"] \arrow[d, "f \otimes g"'] & Y \otimes X \arrow[d, "g \otimes f"] \\
X' \otimes Y' \arrow[r, "T_{X',Y'}"'] & Y' \otimes X'
\end{tikzcd}$$

(ii) For kvar trippel X, Y og Z så skal dobbelvriding vera likt komposisjonen av to enkeltvridingar:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \otimes Z \arrow[r, "T_{X,Y \otimes Z}"] \arrow[d, "(T_{X,Y}) \otimes \mathrm{id}_Z"'] & Y \otimes Z \otimes X \\
Y \otimes Z \otimes Z \arrow[ur, "\mathrm{id}_Y \otimes T_{X,Z}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \otimes Y \otimes Z \arrow[r, "T_{X \otimes Y,Z}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X \otimes T_{Y,Z}"'] & Z \otimes X \otimes Y \\
& X \otimes Z \otimes Y \arrow[u, "T_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y"']
\end{tikzcd}$$

(iii) For kvart par $X, Y \in \mathcal{C}$ så er dobbelvriding lik identiteten:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "T_{X,Y}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{X \otimes Y}"'] & Y \otimes X \arrow[d, "T_{Y,X}"] \\
& X \otimes Y
\end{tikzcd}$$

Me skriv gjerne ein symmetrisk-monoidal kategori som ein kvartett $(\mathcal{C}, \otimes, 1_{\mathcal{C}}, T)$ for å spesifisera notasjonen for vridinga.

Det neste naturlege vil vera å sjå på funktorar som bevarer strukturen mellom slike kategoriar.

Definisjon 7.11. La $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}}, T)$ og $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, 1_{\mathcal{D}}, T')$ vera to symmetrisk-monoidale kategoriar. Ein *symmetrisk-monoidal funktor* frå $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ er ein monoidal funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ slik at for kvart par $X, Y \in \mathcal{C}$ så er

$$F(T_{X,Y}) = T'_{FX,FY}.$$

7.4 Funktorkategoriar

For to kategoriar $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ vil funktorane mellom dei utgjera ein kategori der morfiane er naturlege transformasjonar mellom funktorane. Dersom F, G og H er funktorar mellom $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ og $u_X : F(X) \to G(X)$ og $v_X : G(X) \to H(X)$ er to naturlege transformasjonar mellom dei for eit objekt $X \in \mathcal{C}$, så vil samlinga

$$w_X := v_X u_X : F(X) \to H(X)$$

vera ein naturleg transformasjon frå F til H. Med denne konstruksjonen er komposisjonen assosiativ, og identitetsmorfien $\mathrm{id}_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ er berre identiteten på objektet $F(X)$.

Definisjon 7.12. La $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, 1, \mathcal{C})$ og $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, 1, \mathcal{D})$ vera to monoidale kategoriar, og la F og G vera to monoidale funktorar

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}.$$

Ein *monoidal naturleg transformasjon* frå F til G er ein naturleg transformasjon $u : F \to G$ slik at for kvart par $X, Y \in \mathcal{C}$ så er $(u_X) \otimes_{\mathcal{D}} (u_Y) = u_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}$, og me krev at $u_{1_{\mathcal{C}}} = \mathrm{id}_{1_{\mathcal{D}}}$. Dette treng me for at transformasjonen skal samspela med dei monoidale funktorane. Med andre ord må desse diagramma kommutera:

$$\begin{tikzcd} F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[r, "u_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}"] \arrow[d, equal] & G(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[d, equal] \\ F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \arrow[r, "u_X \otimes_{\mathcal{D}} u_Y"] & G(X) \otimes_{\mathcal{D}} G(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(1_{\mathcal{C}}) \arrow[r, "u_{1_{\mathcal{C}}}"] \arrow[d, equal] & G(1_{\mathcal{C}}) \arrow[d, equal] \\ 1_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\mathrm{id}_{1_{\mathcal{D}}}"] & 1_{\mathcal{D}} \end{tikzcd}$$

Definisjon 7.13. For to monoidale kategoriar $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, 1, \mathcal{C})$ og $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, 1, \mathcal{D})$ definerer me $\mathbf{MonCat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ til å vera kategorien der objekta er monoidale funktorar mellom $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$, og morfiane er monoidale naturlege transformasjonar mellom dei. Dersom i tillegg $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er symmetrisk-monoidale kategoriar, definerer me $\mathbf{SymMonCat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ til å vera kategorien der objekta er symmetrisk-monoidale funktorar frå $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ og morfiane er monoidale naturlege transformasjonar mellom dei.

8 Referansar

[1] MICHAEL ATIYAH. Topological quantum field theories. Publications mathématiques de l'I.H.É.S. volume 68, side 175–186. 1988.

[2] MORRIS HIRSCH. Differential Topology. No. 33 i Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1976.

[3] JOACHIM KOCK. Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories. No. 59 i London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, New York, 2003.

[4] SAUNDERS MAC LANE. Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] JOHN MILNOR. Lectures on the h-cobordism theorem. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1965