Sarah May Instanes

# Faktorisering i Hardy-rom

Bacheloroppgave i Matematiske fag
Veileder: Sigrid Grepstad og Ole Fredrik Brevig
Mai 2020

Bacheloroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sarah May Instanes

# Faktorisering i Hardy-rom

Bacheloroppgave i Matematiske fag
Veileder: Sigrid Grepstad og Ole Fredrik Brevig
Mai 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

# FAKTORISERING I HARDY-ROM

SARAH MAY INSTANES

## 1. Innledning

I denne oppgaven skal vi se nærmere på noen viktige analytiske funksjoner, nemlig de funksjonene som ligger i Hardy-rommet. For en gitt $0 < p \leq \infty$ består Hardy-rommet, som vi betegner som $H^p$, av analytiske funksjoner på enhetsdisken med begrenset Hardy-norm. Denne normen er gitt ved

$$\|f\|_{H^p} = \lim_{r \to 1^-} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

dersom $0 < p < \infty$, og ved

$$\|f\|_{H^\infty} = \lim_{r \to 1^-} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$$

hvis $p = \infty$. Merk at for $0 < p < 1$ er ikke $\|f\|_{H^p}$ en faktisk norm, men en kvasinorm. Det betyr at i stedet for den vanlige trekantulikheten har vi at

$$\|f + g\|_{H^p} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left( \|f\|_{H^p} + \|g\|_{H^p} \right).$$

I denne oppgaven ønsker vi å faktorisere ut nullpunktene til en funksjon i Hardy-rommet ved hjelp av et Blaschke-produkt. Et Blaschke-produkt er en funksjon på formen

$$B(z) = z^m \prod_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z},$$

der $m$ er et ikke negativt-heltall, $\{a_n\}_{n \geq 0}$ er en følge slik at $0 < |a_n| < 1$ for alle $n$ og $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$. Vi skal senere se at $|B(z)| < 1$ på enhetsdisken, og at $|B(e^{i\theta})| = 1$ nesten overalt. Dette vil være viktig for å vise et av de viktigste resultatene i oppgaven, nemlig følgende teorem:

**Teorem A. (Riesz-faktoriseringen)**
*La $f \in H^p$ for en $p > 0$ og anta $f \not\equiv 0$. Da kan $f$ faktoriseres på formen $f = BF$ der $B$ er et Blaschke-produkt og $F \in H^p$ ikke har nullpunkt i disken $|z| < 1$, og $\|f\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$.*

Det å kunne faktorisere en funksjon $f$ på denne måten er ofte veldig nyttig. Det skyldes blant annet at det ofte er lettere å vise resultater for funksjoner i $H^2$ enn for funksjoner i et vilkårlig Hardy-rom $H^p$. For en gitt funksjon $f = BF$ kan vi derfor se på $F^{\frac{p}{2}}$, ettersom $F^{\frac{p}{2}}$ vil være i $H^2$.

Avslutningsvis skal vi bruke Teorem A til å vise den isoperimetriske ulikheten. Det kan virke litt overraskende at faktorisering med hjelp av Blaschke-produkt kan være en måte å vise denne ulikheten på, ettersom dette er et resultat som på mange måter er svært geometrisk. Et geometrisk problem som dette resultatet besvarer er: Gitt en lengde $L$, som vi skal bruke til å omkranse et område $\Omega$, hvordan bør vi velge $\Omega$ for at $\Omega$ skal ha størst mulig areal? Lar vi $L = 1$ ser vi at et kvadrat vil ha areal $\frac{1}{16}$, mens en disk vil ha det større arealet $\frac{1}{3\pi}$. Dette illustrerer noe av det den isoperimetriske ulikheten forteller oss, nemlig at vi bør velge $\Omega$ til å være en disk. Mer presist:

**Teorem B. (Den isoperimetriske ulikheten)**
*La $\Omega$ være et enkeltsammenhengende begrenset område med areal $A(\Omega)$, som er begrenset av en kurve $\partial\Omega$ med lengde $L(\partial\Omega)$ og Lebesgue-mål 0. Da har vi den følgende ulikheten:*

$$A(\Omega) \leq \frac{L(\partial\Omega)^2}{4\pi}$$

*Vi har likhet i ulikheten hvis og bare hvis $\Omega$ er en disk.*

Kapittel 2 tar for seg en del resultater som legger grunnlaget for bevisene i resten av oppgaven. I kapittel 3 vises Poisson–Jensens formel, og følgelig også Jensens formel. Dette er viktige resultater på veien mot Riesz-faktoriseringen i Hardy-rom (Teorem A). I kapittel 4 defineres Blaschke-produktet, og vi viser noen sentrale egenskaper. Deretter vil vi i kapittel 5 introdusere Hardy-rom, og vise noen grunnleggende egenskaper. Videre definerer vi Nevanlinna-klassen og viser at alle funksjoner som er i et Hardy-rom tilhører Nevanlinna-klassen. I kapittel 6 utforsker vi funksjoner i Hardy-rom og Nevanlinna-klassen videre, og viser flere viktige teorem som til slutt gjør oss i stand til å avslutte kapittelet med beviset for Riesz-faktoriseringen for funksjoner i Hardy-rom. I oppgavens siste kapittel bruker vi som nevnt dette teoremet til å gi et bevis for den isoperimetriske ulikheten.

Resultatene i kapittel 3 baserer seg på bevis fra Ahlfors bok *Complex Anlaysis* [1]. Kapittel 4, 5 og 6 baserer seg på Durens bok *Theory of $H^p$ spaces* [3], og strukturen i kapittel 6 følger Durens struktur. Kapittel 7 baserer seg på Vukotićs bevis fra artikkelen *The isoperimetric inequality and a theorem of Hardy and Littlewood* [5].

## 2. Grunnleggende resultater

I dette kapittelet presenterer vi en rekke kjente resultater som brukes i oppgaven. De fleste av disse resultatene gis uten bevis.

2.1. **Ulikheter.** Gitt et målrom $X$, $p, q \in [1, \infty]$ slik at $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, og funksjonene $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$ gir Hölders ulikhet at

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Beviset for Hölders ulikhet finnes i [4, Teorem 3.8]. Dersom $w = w_1, w_2, \dots w_n$ og $z = z_1, z_2, \dots z_n$ er to følger med komplekse tall, forteller Cauchy–Schwarz-ulikheten at

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{z_i}\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |w_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2.$$

Vi har likhet hvis og bare hvis $w = \alpha z$ for en $\alpha \in \mathbb{C}$. Cauchy–Schwarz-ulikheten kan vises ved å la $p = q = 2$ i Hölders ulikhet. Den siste sentrale ulikheten vi vil trenge er Jensens ulikhet. Denne sier at for en konveks funksjon $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, og en ikke-negativ Lebesgue-målbar funksjon $f$ vil

$$\phi\left(\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{a-b}\int_a^b \phi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Beviset for Jensens ulikhet kan man finne i [4, Teorem 3.3].

2.2. **Kompleks analyse.** Videre ser vi på noen viktige resultater fra kompleks analyse. Lar vi $\hat{\mathbb{C}}$ betegne det utvidede komplekse planet $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ er en Möbius-transformasjon en funksjon $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ på formen $f(z) = (az+b)/(cz+d)$, der $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, og $ad - bc \neq 0$.

**Teorem 2.1.** *La $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ være en Möbius-transformasjon og la $A$ være en sirkel eller en linje i $\hat{\mathbb{C}}$. Da er bildet, $T(A)$, også en sirkel eller en linje.*

Beviset for dette finnes i [1, Kapittel 3, Teorem 14]. Et eksempel på en Möbius-transformasjon er

$$f(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}$$

Dette er en Möbius-transformasjon som sender et punkt $a$ i enhetsdisken til 0, og 0 til $a$. Videre ser vi at enhetsdisken sendes til seg selv, og randen sendes til randen. Dette ser vi ettersom $|(z-a)/(1-\overline{a}z)| \leq 1$ når $|z| \leq 1$, med likhet hvis og bare hvis $|z| = 1$. Utregningene for dette kan sees i Lemma 4.2. Vi kan alltid finne en Möbius-transformasjon som sender en disk eller et halvplan til enhetsdisken. Dette gjelder mer generelt, også for andre domener kan vi finne analytiske avbildninger slik at domenet sendes til enhetsdisken.

**Teorem 2.2.** **(Riemanns avbildningsteorem)** *La $\Omega$ være et åpent enkeltsammenhengende område som er en ekte delmengde av $\mathbb{C}$. Da eksisterer det en biholomorfi $f : \Omega \to \mathbb{D}$, der $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ betegner enhetsdisken.*

Beviset for dette er gitt i [1, Kapittel 6, Teorem 1]. Vi kommer også til å få bruk for litt teori om normale familier. Lar vi $\mathcal{F}$ være en familie av analytiske funksjoner på en åpen delmengde $U \subseteq \mathbb{C}$ sier vi at $\mathcal{F}$ er en normal familie hvis enhver følge $\{f_n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{F}$ inneholder en delfølge $\{f_{n_k}\}_{k \geq 0}$ som konvergerer uniformt mot en analytisk funksjon $f$ på alle kompakte delmengder. Merk at $f$ ikke trenger å være i $\mathcal{F}$. Montels teorem gir en annen betingelse for når en familie er normal som ofte kan være enklere å arbeide med enn definisjonen.

**Teorem 2.3.** **(Montels teorem)** *La $\mathcal{F}$ være en familie bestående av analytiske funksjoner på en åpen delmengde $U \subseteq \mathbb{C}$. $\mathcal{F}$ er normal hvis det for enhver kompakt delmengde $K \subseteq U$ eksisterer en positiv konstant $M_K$ slik at for alle $f \in \mathcal{F}$ og $z \in K$ er $|f(z)| \leq M_K$.*

Beviset for dette er gitt i [1, Kapittel 6, Teorem 15].

2.3. **Harmonisk analyse.** Gitt en åpen delmengde $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sier vi at en funksjon $f : \Omega \to \mathbb{R}$, som er to ganger kontinuerlig deriverbar er harmonisk dersom den tilfredsstiller laplacelikningen: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Et eksempel på en harmonisk funksjon er som følger:

**Lemma 2.4.** *La $D \subseteq \mathbb{C}$ være et område, og la $f : D \to \mathbb{C}$ være en analytisk funksjon. Da er $\log|f|$ harmonisk, utenom i nullpunktene til $f$.*

*Bevis.* Ettersom $f$ er analytisk vil også $\log(f)$ være analytisk der $f$ ikke har nullpunkt, og følgelig vil $\Re(\log(f)) = \log|f|$ være harmonisk for $f(z) \neq 0$. $\square$

Dersom $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ er et område og $f : \Omega \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, sier vi at $f$ tilfredsstiller middelverdiegenskapen hvis

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$$

for alle $z_0 \in \mathbb{C}$ og $r \in \mathbb{R}$ slik at $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$.

**Teorem 2.5.** *En funksjon $f : \Omega \to \mathbb{R}$, der $\Omega$ er en åpen delmengde av $\mathbb{C}$ tilfredsstiller middelverdiegenskapen hvis den er harmonisk.*

*Bevis.* La $g(z) = f(z) + i\tilde{f}(z) - i\tilde{f}(0)$ for alle $z$ i en disk $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)}$, der $\tilde{f}$ er en harmonisk konjugert til $f$. Da er $g$ analytisk. Ved Cauchys integralformel vet vi derfor at

$$\begin{aligned} g(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{g(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{z_0 + re^{i\theta} - z_0} \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Dermed må også

$$\Re\left(g(z_0)\right) = \Re\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta\right),$$

så dermed er

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta$$

for alle $z \in \overline{\mathbb{D}_r(z_0)}$. Det må da være sant for alle $z \in \Omega$ siden det for alle $z$ i en åpen mengde eksisterer en lukket disk om $z$ med radius $r$ slik at $\overline{\mathbb{D}_r(z)} \subseteq \Omega$. $\square$

Merk at det også er sant at hvis en funksjon tilfredsstiller middelverdiegenskapen så er den harmonisk.

**Teorem 2.6. (Poissons formel)** *La $\Omega$ være en åpen delmengde av $\mathbb{C}$, og la $\overline{\mathbb{D}}$ være inneholdt i $\Omega$. La $f : \Omega \to \mathbb{R}$ være harmonisk. Da er*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right) f(e^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta.$$

*Bevis.* La $w \in \mathbb{D}$ og betrakt Möbius-transformasjonen

$$\phi(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z},$$

som oppfyller $\phi(0) = w$, $\phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ og $\phi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, der $\mathbb{T}$ betegner randen til enhetsdisken. Videre ser vi ved en utregning at $\phi(\phi(z)) = z$, som betyr at $\phi^{-1}(z) = \phi(z)$. Ettersom $\phi$ er en Möbius-transformasjon er $\phi$ analytisk på $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/|w|\}$. Vi ser at $\overline{\mathbb{D}} \subseteq E$ og at $E$ er åpen. La nå $g(z) = f(\phi(z))$. Da vet vi at $g$ er harmonisk på en åpen mengde som inneholder $\overline{\mathbb{D}}$, ettersom $g$ er en komposisjon av en harmonisk og en analytisk funksjon her. Vi ser at $g(0) = f(\phi(0)) = f(w)$, så ved middelverdiegenskapen for harmoniske funksjoner følger det at

$$f(w) = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi(e^{i\theta})) \, \mathrm{d}\theta,$$

ettersom $\overline{\mathbb{D}_1(0)}$ vil være inneholdt i det området $g$ er harmonisk på. Vi utfører nå et variabelbytte for å løse dette integralet ved å la $e^{it} = \phi(e^{i\theta})$. Da er

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi(e^{i\theta}))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(\phi^{-1})'(e^{it})| f(e^{it})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|w|^2}{|1-e^{it}\overline{w}|^2} f(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{e^{it}+w}{e^{it}-w}\right) f(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$ □

Vi går nå videre til å se på underharmoniske funksjoner. La $\Omega$ være en åpen delmengde av $\mathbb{C}$, og la $f : \Omega \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig. Da sier vi at $f$ er underharmonisk hvis det følgende holder: For enhver kompakt delmengde $K \subseteq \Omega$ og enhver kontinuerlig funksjon $h : K \to \Omega$ som er slik at restriksjonen av $h$ til den indre delen av $K$ er harmonisk har vi at hvis $f \leq h$ på randen $\partial K$, så er $f \leq h$ på hele $K$. Hvis $f$ er to ganger kontinuerlig deriverbar er $f$ underharmonisk dersom $\Delta f \geq 0$. Vi sier at $f$ tilfredsstiller undermiddelverdiegenskapen dersom

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

for alle $z_0 \in \mathbb{C}$ og $r \in \mathbb{R}$ slik at $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} \subseteq \Omega$. På samme måte som middelverdiegenskapen klassifiserer de harmoniske funksjonene, klassifiserer undermiddelverdiegenskapen de underharmoniske funksjonene:

**Teorem 2.7.** *En funksjon $f$ er underharmonisk hvis og bare hvis $f$ tilfredsstiller undermiddelverdiegenskapen.*

Beviset for dette er gitt i [1, Teorem 8, kapittel 6]

**Teorem 2.8.** *La $f$ være underharmonisk på enhetsdisken. Da er*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

*ikke-synkende for $0 \leq r < 1$.*

Beviset for dette er gitt i [3, Teorem 1.6]. For en funksjon $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, sier vi at $f$ har en radiell grense $L$ i punktet $e^{i\theta}$ hvis

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = L.$$

**Teorem 2.9.** *La $f$ være en analytisk funksjon som er begrenset på enhetsdisken. Da eksisterer den radielle grenseverdien $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ nesten overalt.*

Beviset for dette er gitt i [3, Teorem 1.3]. Rommet av analytiske funksjoner som er begrenset på enhetsdisken vil vi senere omtale som $H^\infty$.

Det siste resultatet vi har bruk for er Parsevals identitet, som sier at gitt en funksjon $f \in L^2[-\pi,\pi]$ er

$$\|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

der $c_n$ er fourierkoeffisientene til $f$, gitt ved

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x.$$

Bevis for dette er gitt i [2, Teorem 1.40]

## 3. Poisson–Jensens formel

I dette kapittelet skal vi vise Poisson–Jensens formel som sier det følgende:

**Teorem 3.1. (Poisson−Jensens formel)** *La $0 < \varrho \leq 1$ , og la $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho\} \subseteq \Omega$, der $\Omega$ er en åpen delmengde av $\mathbb{C}$. La $f : \Omega \to \mathbb{C}$ være en analytisk funksjon der $a_1, a_2 \dots, a_n$ er nullpunktene til $f$ på $|z| \leq \varrho$ repetert antall ganger tilsvarende multiplisiteten. Da er*

$$\log|f(z)| = -\sum_{j=1}^{n}\log\left|\frac{\varrho^2 - \overline{a_j}z}{\varrho(z-a_j)}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\left(\frac{\varrho e^{i\theta}+z}{\varrho e^{i\theta}-z}\right)\log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

For å bygge opp litt forståelse skal vi først vise et spesialtilfelle av ulikheten der $f$ kun har nullpunkt på randen $|z| = \varrho$. For å vise dette trenger vi først to lemmaer. Det første lemmaet forteller oss at $f$ har endelig mange nullpunkt på $D$.

**Lemma 3.2.** *La $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho\} \subseteq \mathbb{C}$ være en disk inneholdt i en åpen mengde $\Omega$, og la $f : \Omega \to \mathbb{C}$ være en analytisk funksjon, ikke konstant lik 0. Da har $f$ endelig mange nullpunkt i disken $|z| \leq \varrho$.*

*Bevis.* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho\}$ er en lukket og begrenset sammenhengende mengde, og derfor inneholdt i en åpen mengde $\Omega$. Anta med mål om en motsigelse at vi har uendelig mange nullpunkt i disken $|z| \leq \varrho$, og la $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge med alle disse nullpunktene. Denne følgen er begrenset, så ved Bolzano–Weierstrass' teorem eksisterer det en konvergent underfølge $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Ettersom $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er konvergent har følgen et opphopningspunkt. Da følger det ved identitetsprinsippet at to funksjoner som er like på $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er like overalt, ettersom $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en delmengde av en åpen mengde $\Omega$. Dermed vil $f(z) = 0$ på hele $D$, som er en selvmotsigelse. Det følger at $f$ har endelig mange nullpunkt i disken $D$. □

Vi trenger også et lemma som viser hvordan nullpunktene på randen $|z| = \varrho$ påvirker integralet

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(\varrho e^{i\theta})}{\varrho e^{i\theta} - \varrho e^{it}}\right|\,\mathrm{d}\theta.$$

Vi skal derfor ved hjelp av det følgende lemmaet vise at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varrho e^{i\theta} - \varrho e^{it}| = \log\varrho.$$

**Lemma 3.3.**

$$\int_0^{2\pi}\log|1 - e^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta = 0$$

*Bevis.* Først ser vi at

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \log\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \log 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \log|2|\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} \log\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\log(2) + 2\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Videre er

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x+\frac{\pi}{2}))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\frac{1}{2}\sin(2x))\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Vi ser altså at

$$2\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = -2\pi\log 2,$$

og følgelig er

$$\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\log(2) + 2\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0. \qquad \square$$

Vi er nå klare til å vise et spesialtilfelle av Poisson−Jensens formel.

**Teorem 3.4.** *La $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ være en åpen mengde slik at $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho\}$ er inneholdt i $\Omega$, og la $f : \Omega \to \mathbb{C}$ være en analytisk funksjon som ikke har noen nullpunkt i disken $|z| < \varrho$. Da er*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

*Bevis.* Ved Lemma 2.4 følger det at $\log|f|$ er harmonisk utenom nullpunktene til $f$. Anta først at $f$ ikke har nullpunkt i disken $|z| \leq \varrho$. Da følger det av Teorem 2.5 at

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Anta nå at $f$ har nøyaktig ett nullpunkt på randen $|z| = \varrho$ av grad $m$, og la dette være gitt ved $z_0 = \varrho e^{i\theta_0}$. Definer $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$. Da er $g$ analytisk og har ingen nullpunkt. Dette ser vi ved å taylorutvikle $f$ om $z_0$, som vi kan gjøre siden $f$ er analytisk. Vi ser at

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)(z-z_0)^2}{2!} + \frac{f'''(z_0)(z-z_0)^3}{3!} + \dots \\ &= \frac{f^{(m)}(z_0)(z-z_0)^m}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)(z-z_0)^{m+1}}{(m+1)!} + \dots . \end{aligned}$$

Dermed følger det at

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{f^{(m)}(z_0)(z-z_0)^{m-1}}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)(z-z_0)^{m}}{(m+1)!} + \dots$$

og vi ser at $g$ er analytisk og fri for nullpunkt. Dermed er

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Videre har vi:

$$\begin{aligned} g(\varrho e^{i\theta}) &= \frac{f(\varrho e^{i\theta})}{(\varrho e^{i\theta} - \varrho e^{i\theta_0})^m} \\ &\implies g(\varrho e^{i\theta})(\varrho e^{i\theta} - \varrho e^{i\theta_0})^m = f(\varrho e^{i\theta}) \\ &\implies \log|g(\varrho e^{i\theta})| + \log|(\varrho e^{i\theta} - \varrho e^{i\theta_0})^m| = \log|f(\varrho e^{i\theta})| \\ &\implies \log|g(0)| + \log|(\varrho e^{i\theta_0})^m| = \log|f(0)| \\ &\implies \log|g(0)| + m\log(\varrho) = \log|f(0)| \end{aligned}$$

Samtidig er

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta + \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\varrho e^{i\theta} - \varrho e^{i\theta_0}|\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta,$$

så for å vise at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \log|f(0)|$$

holder det å vise at

$$\log|g(0)| + m\log(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta + \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\varrho e^{i\theta} - \varrho e^{i\theta_0}|\,\mathrm{d}\theta.$$

Det er ekvivalent med å vise

$$\log(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\varrho e^{i\theta} - \varrho e^{i\theta_0}|\,\mathrm{d}\theta.$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\varrho e^{i\theta} - \varrho e^{i\theta_0}|\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(\varrho)\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \log(\varrho) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|\,\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

og dermed holder det å vise at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

Vi ser at

$$\int_0^{2\pi} |e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} |e^{i(t+t_0)} - e^{it_0}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} |1-e^{it}||e^{it_0}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} |1-e^{it}|\,\mathrm{d}t.$$

Det holder derfor å vise at

$$\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

Dette følger fra Lemma 3.3. Dermed er resultatet vist i tilfellet der $f$ har nøyaktig ett nullpunkt på $\varrho = |z|$. Ved Lemma 3.2 følger det at $f$ har endelig mange nullpunkt og en kan derfor bruke induksjon til å vise at formelen holder generelt på $|z| = \varrho$. $\square$

Vi er nå klare til å vise Poisson−Jensens formel. Merk at vi har antatt at $f$ har endelig mange nullpunkt fordi det følger fra Lemma 3.2 at $f \equiv 0$ dersom $f$ har uendelig mange nullpunkt.

*Bevis for Teorem 3.1.* La

$$F(z) = f(z) \prod_{j=1}^{n} \frac{\varrho^2 - \overline{a_j} z}{\varrho(z-a_j)}.$$

Vi ser at $F$ er en analytisk funksjon på $\Omega$ og at $f$ ikke har nullpunkt i disken $|w| \leq \varrho$, ettersom vi har faktorisert disse bort. Dette kan vises med taylorrekker på samme måte som i beviset for Teorem 3.4. Funksjonen $\log F(w)$ er derfor analytisk på et område som inneholder disken $|w| \leq \varrho$, og følgelig er $\log|F(w)|$ harmonisk på det samme området. Lar vi $w = \varrho z$ vet vi at $\log|F(\varrho z)|$ er harmonisk på et område som inneholder disken $|z| \leq 1$. Vi kan derfor anvende Teorem 2.6 på $u(z) = \log|F(\varrho z)|$:

$$\begin{aligned}\log|F(w)| = u(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{\varrho}{\varrho}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right) u(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{\varrho e^{i\theta}+w}{\varrho e^{i\theta}-w}\right)\log|F(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Videre ser vi at

$$\log|F(w)| = \log|f(w)| + \sum_{j=1}^{n} \log\left|\frac{\varrho^2 - \overline{a_j}w}{\varrho(w-a_j)}\right|.$$

Ettersom $F(w) = f(w)$ på $|w| = \varrho$ følger nå Poisson−Jensens formel:

$$\log|f(w)| = -\sum_{j=1}^{n}\log\left|\frac{\varrho^2-\overline{a_j}w}{\varrho(w-a_j)}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\left(\frac{\varrho e^{it}+w}{\varrho e^{it}-w}\right)\log|f(\varrho e^{it})|\,\mathrm{d}t. \quad \square$$

Setter vi inn $z = 0$ i likningen over får vi umiddelbart Jensens formel.

**Korollar 3.5. (Jensens formel)** *La $0 < \varrho \leq 1$, og la $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho\} \subseteq \Omega$, der $\Omega$ er en åpen delmengde av $\mathbb{C}$. La $f : \Omega \to \mathbb{C}$ være en analytisk funksjon der $a_1, a_2 \ldots, a_n$ er nullpunktene til $f$ på $D$, repetert antall ganger tilsvarende multiplisitet, og anta at $z = 0$ ikke er et nullpunkt. Da er*

$$\log|f(0)| = -\sum_{j=1}^{n}\log\left(\frac{\varrho}{|a_j|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Merk at Teorem 3.4 nå følger direkte som et korollar av Korollar 3.5.

*Kommentar.* Det er også mulig å vise Jensens formel ved hjelp av Teorem 3.4 og å faktorisere ut nullpunktene. Deretter kan man definere Möbius-transformasjon

$$\phi(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z},$$

og bruke Jensens formel med $\varrho = 1$ på $f \circ \phi$, som kun har nullpunktene $\phi(a_n)$ når $a_1, a_2 \dots a_k$ er nullpunktene til $f$. Da ser vi at

$$\begin{aligned}\log|f(\phi)(0)| &= -\sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{1}{|\phi(a_j)|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\phi(e^{i\theta}))|\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{1-\overline{a_j}z}{z-a_j}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)\log|f(e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

som er Poisson−Jensens formel for $\varrho = 1$.

Vi skal nå bruke Jensens formel til å vise at når $f$ er analytisk er $\log|f|$ underharmonisk, og følgelig også at $|f|^p$ er underharmonisk når $0 < p < \infty$.

**Lemma 3.6.** *La $\Omega$ være en åpen delmengde av $\mathbb{C}$ som inneholder disken $|z| \leq \varrho$ og la $f : \Omega \to \mathbb{C}$ være en analytisk funksjon. Da er $\log|f|$ underharmonisk.*

*Bevis.* Ved Jensens formel følger det at

$$\log|f(0)| = -\sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{\varrho}{|a_j|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$$

dersom $f(0) \neq 0$. Anta nå at $z = 0$ er et nullpunkt av grad $k$ for $f$, og definer $g = f/z^k$. Da gjelder ulikheten over for $g$. Videre ser vi at $\log|g(z)| = \log|f(z)| - k\log|z|$ og at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta - k\log\varrho.$$

Dette viser at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$$

er endelig. Som spesielt betyr at

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Vi kan nå vise at $f$ tilfredsstiller undermiddelverdiegenskapen ved å se på funksjonen $h(z) = f(z + z_0)$ som er analytisk i en åpen mengde om $|z + z_0| \leq \varrho$. Dermed vet vi at

$$\log|h(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|h(\varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta,$$

og følgelig vil

$$\log|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z_0 + \varrho e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$$

når $\overline{\mathbb{D}_\varrho(z_0)} \subseteq \Omega$. Funksjonen $\log|f|$ tilfredsstiller altså undermiddelverdiegenskapen og er derfor underharmonisk. □

Vi skal nå bruke dette til å vise at også $|f|^p$ er underharmonisk.

**Teorem 3.7.** *La $f : \Omega \to \mathbb{C}$ være en analytisk funksjon og la $0 < p < \infty$. Da er $|f|^p$ underharmonisk.*

*Bevis.* Ved å bruke at $\log|f|$ tilfredsstiller undermiddelverdiegenskapen og Jensens ulikhet ser vi at

$$\log|f(z_0)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(|f(z_0+re^{i\theta})|^p)\,\mathrm{d}\theta \leq \log\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\right)$$

for alle $z_0 \in \mathbb{C}$ og alle $r \in \mathbb{R}$ slik at $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} \subseteq \Omega$. Følgelig må også

$$|f(z_0)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta,$$

som viser at $|f|^p$ tilfredsstiller undermiddelverdiegenskapen og derfor er underharmonisk. □

Fra Teorem 2.8 følger det nå at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta$$

er ikke synkende for $0 \leq r < 1$.

## 4. Blaschke-produkt

Vi definerer nå Blaschke-produktet og viser når det konvergerer og hvilke egenskaper det har på enhetsdisken. Vi begynner med definisjonen av et endelig Blaschke-produkt.

**Definisjon 4.1.** La $m$ være et ikke-negativt heltall, og la $a_1, a_2, \ldots a_k$ være en følge der $0 < |a_n| < 1$ for alle $n$. Da er et endelig Blaschke-produkt en funksjon på formen

$$B(z) = z^m \prod_{n=0}^{k} \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1-\overline{a_n}z}.$$

Vi skal nå se på et eksempel ved å se på polynomet $g$ av grad $k$. La nullpunktene til $g$ være $a_1, a_2, \ldots, a_k$, der de $l$ første ligger i enhetsdisken. Da kan vi skrive

$$g(z) = A\prod_{n=1}^{l}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\prod_{n=1}^{k}(1-\overline{\alpha_n}z),$$

der $\alpha_n = a_n$ når $n \leq l$, og $\alpha_n = \frac{1}{\overline{a_n}}$, når $l < n \leq k$, og $A$ er en konstant. Her vil altså $\prod_{n=1}^{l}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}$ være et endelig Blaschke-produkt. Dette er altså en metode vi kan bruke for å faktorisere ut de nullpunktene til en funksjon som ligger på enhetsdisken. Vi viser nå at alle faktorene i Blaschke-produktet er mindre enn 1 i enhetsdisken.

**Lemma 4.2.** *Når $0 \leq |z| < 1$ og $0 \leq |w| < 1$ er*

$$\frac{|w-z|}{|1-\overline{w}z|} < 1,$$

*og når $|z| = 1$ er*

$$\frac{|w-z|}{|1-\overline{w}z|} = 1.$$

*Bevis.* La $w = re^{i\theta}$ og la $z = se^{i\phi}$. Da er $|r| \leq 1$ og $|s| \leq 1$, og vi har det følgende:

$$\begin{aligned}
\frac{|re^{i\theta} - se^{i\phi}|}{|1 - re^{-i\theta}se^{i\phi}|} &= \frac{|re^{i\theta} - se^{i(\phi-\theta)}e^{i\theta}|}{|1 - rse^{i(\phi-\theta)}|} \\
&= \frac{|e^{i\theta}||r - se^{i(\phi-\theta)}|}{|1 - rse^{i(\phi-\theta)}|} \\
&= \frac{|r - s\cos(\phi-\theta) - is\sin(\phi-\theta)|}{|1 - rs\cos(\phi-\theta) - irs\sin(\phi-\theta)|} \\
&= \frac{\sqrt{(r - s\cos(\phi-\theta))^2 + (s\sin(\phi-\theta))^2}}{\sqrt{(1 - rs\cos(\phi-\theta))^2 + (rs\sin(\phi-\theta))^2}} \\
&= \frac{\sqrt{r^2 - 2rs\cos(\phi-\theta) + s^2}}{\sqrt{1 - 2rs\cos(\phi-\theta) + r^2s^2}}
\end{aligned}$$

Vi ser at dette er mindre enn 1 når

$$\sqrt{1 - 2rs\cos(\phi-\theta) + r^2s^2} > \sqrt{r^2 - 2rs\cos(\phi-\theta) + s^2},$$

som stemmer når $r < |1|$ og $|s| < 1$. Ved å nå la $s = 1$ ser vi at

$$\frac{|re^{i\theta} - e^{i\phi}|}{|1 - re^{-i\theta}e^{i\phi}|} = \frac{\sqrt{r^2 - 2r\cos(\phi-\theta) + 1}}{\sqrt{1 - 2r\cos(\phi-\theta) + r^2}} = 1 \qquad \square$$

Dette betyr at for et endelig Blaschke-produkt $B(z)$ er $|B(z)| < 1$ når $|z| < 1$ og $|B(z)| = 1$ når $|z| = 1$. Ser vi videre på eksempelet der $g$ er et polynom av grad $k$ og

$$g(z) = A\prod_{j=1}^{l} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \frac{\alpha_j - z}{1 - \overline{\alpha_j}z} \prod_{j=1}^{k}(1 - \overline{\alpha_j}z),$$

kan vi la $G(z) = A\prod_{j=1}^{k}(1 - \overline{\alpha_j}z)$, og $B(z) = \prod_{j=1}^{l} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}\frac{\alpha_j - z}{1-\overline{\alpha_j}z}$. Da er $g = BG$, der $B$ er et endelig Blaschke-produkt. Vi observerer da at $|g| = |G|$ når $|z| = 1$. Dette skal vi senere se at gjelder mer generelt. Vi går nå videre til å se på uendelige Blaschke-produkt.

**Definisjon 4.3.** La $m$ være et ikke negativt heltall, og la $\{a_n\}_{n\geq 0}$ være en følge der $0 < |a_n| < 1$ for alle $n$ og $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$. Da er et uendelig Blaschke-produkt en funksjon på formen

$$B(z) = z^m \prod_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}.$$

Vi skal nå vise at Blaschke-betingelsen $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$ garanterer konvergens av det uendelige Blaschke-produktet, men for å vise dette trenger vi først et lemma.

*Kommentar.* Senere skal vi se at nullpunktene til en funksjon $f \in H^p$ tilfredsstiller Blaschke-betingelsen, $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$. Nullpunktene til $f$ på enhetsdisken vil derfor kunne utgjøre et Blaschke-produkt.

**Lemma 4.4.** *La $a_1, a_2, \ldots$ være en følge med komplekse tall, der $0 < |a_n| < 1$ for alle $n$. Da konvergerer $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ mot noe ulikt 0 hvis og bare hvis $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergerer.*

*Bevis.* Det er klart at $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergerer nøyaktig i de samme tilfellene som $|\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)|$. Vi ser at $|\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)|$ konvergerer hvis og bare hvis

$$\log\left(\prod_{n=1}^{\infty}|(1+a_n)|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\log|(1+a_n)|$$

konvergerer. Videre ser vi at $\sum_{n=1}^{\infty}\log|(1+a_n)|$ konvergerer hvis og bare hvis $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergerer ved grensesammenlikningstesten, ettersom

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+a_n)}{a_n}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

Endringen av grensen skyldes at vi vet at leddene $a_n$ må gå mot 0 når $n$ øker for at rekken skal kunne konvergere. $\square$

Vi er nå klare til å vise noen viktige egenskaper ved Blaschke-produktet.

**Teorem 4.5.** *La $a_1, a_2, \ldots$ være en følge med komplekse tall slik at $0<|a_1|\leq|a_2|\leq\cdots<1$ og $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$. Da konvergerer Blaschke-produktet*

$$B(z)=z^m\prod_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}$$

*på enhver disk $|z|\leq R<1$. Vi har $B(a_n)=0$ for alle $n$, og $B(z)$ har ingen andre nullpunkt i disken $|z|<1$. Videre er $|B(z)|<1$ på $|z|<1$ og $|B(e^{i\theta})|=1$ nesten overalt.*

*Bevis.* På disken $|z|\leq R<1$ gjelder det følgende:

$$\begin{aligned}\left|1-\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}\right|&=\left|\frac{a_n+a_n|z|}{a_n}\right|\left|\frac{1-|a_n|}{1-\overline{a_n}z}\right|\\&\leq\frac{|a_n|+|a_n||z|}{|a_n|}\frac{|1-|a_n||}{|1-|\overline{a_n}z||}\\&\leq\frac{(1+|z|)(1-|a_n|)}{|1-R|}\\&\leq\frac{2(1-|a_n|)}{1-R}\end{aligned}$$

Det følger derfor at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}\right|\leq\frac{2}{1-R}\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty.$$

Dermed følger det fra Lemma 4.4 at $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}$ konvergerer. Videre viser vi at $a_n$ er de eneste nullpunktene for $B(z)$. Vi ser at for en konstant $k_n$ vil

$$B(a_n)=k_n\left(\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-a_n}{1-\overline{a_n}a_n}\right)=0.$$

Dette må være de eneste nullpunktene ettersom at for å få $B(z)=0$ må en av faktorene i produktet være lik 0. La

$$B_k(z)=\prod_{n=1}^{k}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}.$$

Fra Lemma 4.2 følger det at $|a_n - z|/|1 - \overline{a_n}z| < 1$ på $|z| < 1$, og følgelig er $|B(z)| < 1$ på disken $|z| < 1$. Men $|B_k(e^{i\theta})| = 1$ er ikke nok til å vise at $|B(e^{i\theta})| = 1$ siden Blaschke-produktet ikke nødvendigvis konvergerer på randen $|z| = 1$. Derimot har vi $|B(e^{i\theta})| \leq 1$, og må vise at dette faktisk er en likhet nesten overalt. Ettersom $B$ er analytisk og begrenset på enhetsdisken følger det fra Teorem 2.9 at den radielle grenseverdien $\lim_{r\to 1^-} B(re^{\theta})$ eksisterer nesten overalt. Det samme gjelder også for $B_k$ for alle $k$. La $f = B/B_k$. Da eksisterer også den radielle grenseverdien $\lim_{r\to 1^-} f(re^{\theta})$ nesten overalt og $|f|$ er underharmonisk. Det følger derfor fra Teorem 2.8 at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|B(re^{i\theta})|}{|B_k(re^{i\theta})|}\,\mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|B(e^{i\theta})|}{|B_k(e^{i\theta})|}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Dermed er integralet begrenset og vi kan ved Lebesgue dominerende konvergensteorem flytte grensen inn i integralet.

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{|B(re^{i\theta})|}{|B_k(re^{i\theta})|}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{k\to\infty}\frac{|B(re^{i\theta})|}{|B_k(re^{i\theta})|}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\theta = 1.$$

Vi har altså

$$1 = \frac{1}{2\pi}\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{|B(re^{i\theta})|}{|B_k(re^{i\theta})|}\,\mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Samtidig er

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \leq 1$$

ettersom $|B(e^{i\theta})| \leq 1$. Vi har altså

$$1 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \leq 1$$

og følgelig $|B(e^{i\theta})| = 1$ nesten overalt. □

## 5. Introduksjon til Hardy-rommet

I dette kapittelet skal vi vise noen grunnleggende egenskaper for Hardy-rom, og for funksjoner i Nevanlinna-klassen. Vi starter med definisjonen av et Hardy-rom.

**Definisjon 5.1.** En funksjon $f$ som er analytisk på enhetsdisken er i $H^p$, Hardy-rommet, dersom $M_p(r,f)$ forblir begrenset når $r \to 1^-$, der

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

for $0 < p < \infty$, og

$$M_\infty(r,f) = \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|.$$

Merk at vi bruker notasjonen $\|f\|_{H^p} = \lim_{r\to 1^-} M_p(r,f)$, og gjerne omtaler dette som normen til $f$. Men når $0 < p < 1$ er $\|f\|_{H^p}$ en kvasinorm og ikke en norm. Det vil si at den vanlige trekantulikheten ikke er oppfylt, derimot vet vi at

$$\|f+g\|_{H^p} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_{H^p} + \|g\|_{H^p}\right).$$

Når $0 < q \leq p \leq \infty$ er $H^p \subseteq H^q$. Dette ser vi om vi lar $f \in H^p$ og bruker Hölders ulikhet på funksjonene $f^q \in L^{\frac{p}{q}}$ og $g(z) = 1$ som er i $L^{\frac{p}{p-q}}$. Vi ser også at hvis $f \in H^p$ og $f$ ikke har nullpunkt, så er $f^{\frac{p}{2}} \in H^2$ og $\|f^{\frac{p}{2}}\|_{H^2} = \|f\|_{H^p}^{\frac{p}{2}}$ ettersom

$$\left(\frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})^{\frac{p}{2}}|^2 \, \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{2}}.$$

Dette er nyttig fordi Hardy-rommet $H^2$ ofte kan være lettere å studere enn andre Hardy-rom, blant annet fordi vi har det følgende teoremet:

**Teorem 5.2.** *En analytisk funksjon $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ er i $H^2$ hvis og bare hvis vi kan skrive $f$ som en potensrekke $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ slik at $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.*

*Bevis.* Ettersom $f$ er analytisk på enhetsdisken kan vi skrive $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{i\theta n}$. Dette er en kompleks fourierrekke, så ved Parsevals identitet følger det at

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

for $0 < r < 1$. Her kan vi endre integrasjonsgrensene og vi ser at

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i(\theta-\pi)})|^2 \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta.$$

Det følger derfor at

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

når $0 < r < 1$. Vi får da at

$$\lim_{r\to 1^-} [M_2(r,f)]^2 = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Dermed er $[M_2(r,f)]^2 < \infty$ hvis og bare hvis $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. $\square$

Fra dette ser vi at hvis $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ er i $H^2$ og $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ så er $\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$.

En annen nyttig funksjonsklasse er Nevanlinna-klassen.

**Definisjon 5.3.** La $f$ være en analytisk funksjon på enhetsdisken. Da er $f$ i Nevanlinna-klassen, som vi betegner $N$, hvis integralet

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, \mathrm{d}\theta$$

er begrenset for $0 < r < 1$, der

$$\log^+ |f(x)| = \begin{cases} \log |f(x)|, & \log |f(x)| > 0, \\ 0, & \log |f(x)| \leq 0. \end{cases}$$

Tilsvarende bruker vi notasjonen

$$\log^- |f(x)| = \begin{cases} -\log |f(x)|, & \log |f(x)| < 0, \\ 0, & \log |f(x)| \geq 0. \end{cases}$$

Dermed har vi at $\log |f| = \log^+ |f| - \log^- |f|$. Vi skal nå se at alle funksjoner som er i et Hardy-rom også er i Nevanlinna-klassen.

**Teorem 5.4.** *$H^p \subseteq N$ for alle $p > 0$.*

*Bevis.* La $f$ være i $H^p$. Vi kan anvende Jensens ulikhet på $-\log^+(t)$ og $|f(re^{i\theta})|^p$ ettersom $-\log^+(t)$ er konveks og $|f(re^{i\theta})|^p$ er ikke-negativ:

$$-\log^+\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\right) \leq -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta$$

Dermed er

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left(|f(re^{i\theta})|^p\right)\,\mathrm{d}\theta \leq \log^+\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\right) < \infty.$$

Vi ser derfor at

$$\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta < \infty,$$

så $f$ er i Nevanlinna-klassen. □

## 6. Riesz-faktoriseringen for funksjoner i Hardy-rom

I dette kapittelet viser vi flere resultater om funksjoner i Hardy-rom og Nevanlinna-klassen. Disse resultatene gjør oss i stand til å avslutte kapittelet med beviset for Riesz-faktoriseringen for funksjoner i Hardy-rom (Teorem A).

**Teorem 6.1.** *La $f \in N$ være en analytisk funksjon på enhetsdisken. Da kan $f$ skrives på formen $f = g/h$, der $g$ og $h$ er i $H^\infty$, $|g(z)| \leq 1$ og $|h(z)| \leq 1$.*

*Bevis.* La $f$ ha et nullpunkt i $z = 0$ med multiplisitet $k$, og la $z_1, z_2, \ldots$ være de andre nullpunktene sortert slik at $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \cdots < 1$, der nullpunktene er repetert antall ganger tilsvarende multiplisitet. La $\varrho < 1$, og anta at $f$ ikke har noen nullpunkt på randen $|z| = \varrho$. Definer

$$F(z) = f(z)\frac{\varrho^k}{z^k}\prod_{|z_j|<\varrho}\left(\frac{\varrho^2 - \overline{z_j}z}{\varrho(z - z_j)}\right).$$

Funksjonen $F$ har ingen nullpunkt i disken $|z| < \varrho < 1$ ettersom vi har faktorisert disse bort på samme måte som i beviset for Teorem 3.4. Vi har derfor at $F$ er en analytisk funksjon på $\mathbb{D}$ og at $G = \log(F)$ er en analytisk funksjon på et åpent område om $|z| \leq \varrho$, samt at $\log|F|$ er harmonisk på det samme området. Vi ser at

$$\log|F(\varrho e^{it})| = \log\left|f(\varrho e^{it})\frac{\varrho^k}{\varrho^k e^{itk}}\prod_{|z_j|<\varrho}\left(\frac{\varrho^2 - \overline{z_j}\varrho e^{it}}{\varrho(\varrho e^{it} - z_j)}\right)\right| = \log|f(\varrho e^{it})|.$$

Ved å anvende Teorem 3.1 på $F$ og å bruke at $\log|F(\varrho e^{it})| = \log|f(\varrho e^{it})|$ får vi derfor

$$\log|F(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\left(\frac{\varrho e^{it} + z}{\varrho e^{it} - z}\right)\log|f(\varrho e^{it})|\,\mathrm{d}t.$$

Vi ønsker nå å finne et uttrykk for $G$. Vi vet at $\Re(G) = \Re(\log F) = \log|F|$, og ser derfor på

$$\begin{aligned}
&\log|F(z)| + i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{it})|\Im\left(\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\right)\,\mathrm{d}t + iC \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{it})|\Re\left(\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\right)\,\mathrm{d}t + i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{it})|\Im\left(\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\right)\,\mathrm{d}t + iC \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{it})|\left(\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\right)\,\mathrm{d}t + iC
\end{aligned}$$

Ved analytisk komplettering får vi altså

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{it})|\left(\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\right)\,\mathrm{d}t + iC.$$

Vi ser at

$$f(z)\frac{\varrho^k}{z^k}\prod_{|z_j|<\varrho}\left(\frac{\varrho^2-\overline{z_j}z}{\varrho(z-z_j)}\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{it})|\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\,\mathrm{d}t + iC\right),$$

ettersom

$$\exp(\log(F(z))) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{it})|\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\,\mathrm{d}t + iC\right).$$

Videre ser vi at

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{it})|\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\,\mathrm{d}t + iC\right)\frac{z^k}{\varrho^k}\prod_{|z_j|<\varrho}\frac{\varrho(z-z_j)}{\varrho^2-\overline{z_j}z}.$$

Definer nå

$$\phi_\varrho(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^-|f(\varrho e^{it})|\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\,\mathrm{d}t + iC\right)\frac{z^k}{\varrho^k}\prod_{|z_j|<\varrho}\frac{\varrho(z-z_j)}{\varrho^2-\overline{z_j}z},$$

og

$$\psi_\varrho(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(\varrho e^{it})|\frac{\varrho e^{it}+z}{\varrho e^{it}-z}\,\mathrm{d}t + iC\right).$$

Da ser vi at $f = \frac{\phi_\varrho}{\psi_\varrho}$. La $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge som konvergerer mot 1, og definer

$$\Psi_n(z) = \psi_{\varrho_n}(\varrho_n z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(\varrho_n e^{it})|\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{d}t\right),$$

og

$$\Phi_n(z) = \phi_{\varrho_n}(\varrho_n z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^-|f(\varrho_n e^{it})|\frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\,\mathrm{d}t\right)z^k\prod_{|z_j|<\varrho_n}\frac{\varrho_n z-z_j}{\varrho_n-\overline{z_j}z}.$$

Videre viser vi at på $\mathbb{D}$ er $|\Phi_n(z)| \leq 1$:

$$\begin{aligned}|\Phi_n(z)| &= \left|\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f(\varrho_n e^{it})| \frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\,\mathrm{d}t\right) z^k \prod_{|z_j|<\varrho_n} \frac{\varrho_n z - z_j}{\varrho_n - \overline{z_j} z}\right| \\ &= \exp\left(\Re\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f(\varrho_n e^{it})| \frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\,\mathrm{d}t\right)\right) \left|z^k \prod_{|z_j|<\varrho_n} \frac{\varrho_n z - z_j}{\varrho_n - \overline{z_j} z}\right| \\ &\leq \exp\left(\Re\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f(\varrho_n e^{it})| \frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\,\mathrm{d}t\right)\right).\end{aligned}$$

Den siste ulikheten følger av at $|\varrho_n z - z_j| \leq |\varrho_n - \overline{z_j} z|$ når $|z| < 1$ og $|z_j| < \varrho_n$. Det gjenstår nå å vise at

$$\exp\left(\Re\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f(\varrho_n e^{it})| \frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\,\mathrm{d}t\right)\right) \leq 1,$$

som er ekvivalent med å vise

$$\Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f(\varrho_n e^{it})| \frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f(\varrho_n e^{it})| \Re\left(\frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\right)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

Dette følger av at $\log^- |f(\varrho_n e^{it})| \Re\left(\frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\right) \geq 0$ for alle $z \in \mathbb{D}$.

Funksjonene $\Phi_n$ vil utgjøre en normal familie ved Montels teorem, ettersom $\Phi_n$ er analytisk for alle $n$ og $|\Phi_n(z)| \leq 1$ for alle $z \in \mathbb{C}$. Tilsvarende vil også $\Psi_n$ utgjøre en normal familie. Fra definisjonen av en normal familie følger det nå at det finnes en følge $\{n_j\}$ slik at $\Phi_{n_j}$ konvergerer mot en analytisk funksjon $\phi$, og $\Psi_{n_j}$ konvergerer mot en analytisk funksjon $\psi$ på alle kompakte delmengder av $\mathbb{D}$. Vi ser at $|\Psi_n(0)| > 0$ for alle $n$, ettersom

$$|\Psi_n(0)| = \left|\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\varrho e^{it})|\,\mathrm{d}t\right)\right| > 0$$

er ekvivalent med

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\varrho e^{it})|\,\mathrm{d}t < \infty,$$

som følger av at $f \in N$. Dermed vet vi at $\psi$ ikke er identisk lik 0. Dermed vil $\Phi_{n_j}/\Psi_{n_j}$ konvergere mot $\phi/\psi$ på alle disker $|z| \leq r < 1$. Dette betyr at $\Phi_{n_j}/\Psi_{n_j}$ konvergerer mot $f$ på hele $\mathbb{D}$ ettersom $\Phi_{n_j}(z)/\Psi_{n_j}(z) = f(z)$ på $|z| \leq \varrho$. Det følger at $f = \phi/\psi$. □

Vi skal nå bruke at vi kan skrive $f$ som en kvotient av to funksjoner som er begrenset på enhetsdisken til å vise et nyttig resultat.

**Teorem 6.2.** *For enhver funksjon $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ som er i Nevanlinna-klassen eksisterer den radielle grenseverdien $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ nesten overalt, og $\log|f(e^{i\theta})| \in L^1[0, 2\pi]$, med mindre $f(z) \equiv 0$. Hvis $f \in H^p$ for en $p > 0$, så er $f(e^{i\theta}) \in L^p[0, 2\pi]$.*

*Bevis.* Ved Teorem 6.1 følger det at vi kan skrive $f = \phi/\psi$, der $|\phi(z)| \leq 1$ og $|\psi(z)| \leq 1$ og $\phi$ og $\psi$ er begrensede analytiske funksjoner, altså har vi $\psi, \phi \in H^\infty$. Ved Teorem 2.9 følger det da at $\phi$ og $\psi$ har radielle grenseverdier $\phi(e^{i\theta})$ og $\psi(e^{i\theta})$ nesten overalt. Vi ser at

$$\liminf_{r\to 1} |\log|\phi(re^{i\theta})|| = \left|\log|\phi(e^{i\theta})|\right| = -\log|\phi(e^{i\theta})|.$$

Dermed følger det av Fatous lemma og $|\phi(re^{\theta})| \leq 1$ at

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|\phi(e^{i\theta})||\,\mathrm{d}\theta &\leq \liminf_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|\phi(re^{i\theta})||\,\mathrm{d}\theta \\ &= \liminf_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\log|\phi(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

La $a_1, a_2, \ldots$ være nullpunktene til $\phi$, og anta først at $z = 0$ ikke er et nullpunkt. Ved Jensens formel følger det da at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\phi(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \log|\phi(0)| + \sum_{|a_n|<r} \log\frac{r}{|a_n|},$$

for alle $0 < r < 1$. Vi ser derfor at $\int_0^{2\pi} \log|\phi(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$ øker når $r$ øker. Dermed vil $-\int_0^{2\pi} \log|\phi(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$ minke når $r$ øker, og

$$\liminf_{r\to 1} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\phi(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$$

vil da være begrenset. Dermed er også

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\log|\phi(e^{i\theta})|\right|\,\mathrm{d}\theta$$

begrenset, og $\log|\phi(e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$ er i $L^1[0, 2\pi]$. Tilsvarende er også $\log|\psi(e^{i\theta})|$ i $L^1[0, 2\pi]$, som spesielt betyr at $\psi(z) \neq 0$ for nesten alle $z$ med $|z| = 1$. Dermed vet vi at den radielle grensen

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} \frac{\phi(re^{i\theta})}{\psi(re^{i\theta})} = \frac{\phi(e^{i\theta})}{\psi(e^{i\theta})}$$

eksisterer nesten overalt. Det følger derfor også at

$$\log|f(e^{i\theta})| = \log\left|\frac{\phi(e^{i\theta})}{\psi(e^{i\theta})}\right|$$

er i $L^1[0, 2\pi]$.

Se nå på tilfellet der $z = 0$ er et nullpunkt av grad $m$ for $f$. Betrakt funksjonen $g = f/z^m$ som ikke har $z = 0$ som et nullpunkt. Da må den radielle grensen $\lim_{r\to 1^-} g(re^{i\theta})$ eksistere nesten overalt. Videre vet vi at $\lim_{r\to 1^-}(re^{i\theta})^m$ eksisterer, så det følger at også den radielle grensen $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ eksisterer nesten overalt. At $\log|f(e^{i\theta})| \in L^1[0, 2\pi]$ følger direkte fra $\log|g(e^{i\theta})| \in L^1[0, 2\pi]$.

Til slutt må vi nå vise at $f(e^{i\theta})$ er i $L^p[0, 2\pi]$ når $f$ er i $H^p$. Ved å bruke Fatous lemma og at $M_p(r, f) < \infty$ når $f$ er i $H^p$ ser vi at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta \leq \liminf_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta < \infty,$$

som viser at $f(e^{i\theta}) \in L^p[0, 2\pi]$. □

Videre skal vi nå vise at nullpunktene i enhetsdisken til en funksjon i Nevanlinna-klassen tilfredsstiller Blaschke-betingelsen.

**Teorem 6.3.** *La $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ være en funksjon i Nevanlinna-klassen, med nullpunktene $a_1, a_2, \ldots$ der $0 < |a_1| \leq |a_2|, \cdots < 1$, og der hvert nullpunkt er gjentatt like mange ganger som graden til nullpunktet. Da er $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$.*

*Bevis.* Ettersom $f \in N$ vet vi fra Teorem 6.2 at $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$ er begrenset. Det finnes derfor en konstant $C$ slik at $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta < C$. Anta nå at $f(z) \neq 0$. Ved Lemma 3.2 har $f$ bare endelig mange nullpunkt i enhver disk $|z| \leq \varrho < 1$, og vi kan derfor anvende Jensens formel på $f$ på disken $|z| < \varrho < 1$. Da får vi

$$C > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = \log|f(0)| + \sum_{|a_n|<\varrho} \log\frac{\varrho}{|a_n|},$$

eller

$$\sum_{|a_n|<\varrho} \log\frac{\varrho}{|a_n|} < C - \log|f(0)| = C_1.$$

Vi ser at $\sum_{|a_n|<\varrho} \log\frac{\varrho}{|a_n|}$ øker når $\varrho$ øker siden $\log\frac{\varrho}{|a_n|} > 0$ for alle $|a_n| < \varrho$. For en fiksert $N \in \mathbb{N}$ vil derfor

$$\sum_{n=1}^{N} \log\frac{\varrho}{|a_n|} \leq \sum_{|a_n|<\varrho} \log\frac{\varrho}{|a_n|} \leq C_1.$$

Lar vi nå $N \to \infty$ og $\varrho \to 1$ får vi

$$\exp\left(\sum_{n=0}^{N} \log\frac{\varrho}{|a_n|}\right) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \leq e^{C_1}.$$

Dermed ser vi at

$$0 < e^{-C_1} \leq \prod_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Som betyr at $\prod_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$. Følgelig må da også $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |a_n|)$ være begrenset ved Lemma 4.4.

Til slutt ser vi på tilfellet der $z = 0$ er et nullpunkt av grad $m$ for $f$. Definer $g(z) = f(z)/z^m$. Da vil $g$ være analytisk på $\mathbb{D}$ og $g$ vil ha akkurat de samme nullpunktene som $f$ utenom $z = 0$. Videre ser vi at $\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|$ vil være begrenset, siden $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|$ er begrenset og

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|r^m e^{i\theta m}|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta - m\log r < \infty\end{aligned}$$

når $r > 0$. Dermed følger det at $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$, også når $z = 0$ er et nullpunkt. □

Fra Teorem 6.3 og Teorem 4.5 følger det nå at for en funksjon $f \in H^p$ som på enhetsdisken har nullpunktene $a_1, a_2, \ldots$, samt $z = 0$ som et nullpunkt av grad $m$, vil Blaschke-produktet $z^m \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z}$ konvergere. Vi er nå klare til å vise Riesz-faktoriseringen for funksjoner i Hardy-rom, og minner om hva det sier.

**Teorem A. (Riesz-faktoriseringen)**
*La $f \in H^p$ for en $p > 0$ og anta $f \not\equiv 0$. Da kan $f$ faktoriseres på formen $f = BF$, der $B$ er et Blaschke-produkt og $F \in H^p$ ikke har nullpunkt i disken $|z| < 1$, og $\|f\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$.*

*Bevis.* La $f$ ha nullpunktene $a_1, a_2, \dots$ i enhetsdisken, samt $z = 0$ som et nullpunkt av grad $m$. Ettersom $f \in H^p$ konvergerer $B(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z}$. Ved Teorem 6.2 følger det at $f(e^{i\theta}) \in L^p$. Så la

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta = M < \infty.$$

Definer nå $B_n$ og $g_n$ som

$$B_n(z) = z^m \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z}$$

og

$$g_n(z) = \frac{f(z)}{B_n(z)}.$$

Dersom $f$ har $n$ nullpunkt vil $B = B_n$ være et endelig Blaschke-produkt og vi kan la $g = f/B$. Da gir $f = Bg$ den ønskede faktoriseringen. Anta derfor at $f$ har uendelig mange nullpunkt. Ettersom $B_n$ er kontinuerlig og $B_n(z) = 1$ overalt når $|z| = 1$, følger det for en fiksert $n$ og en fiksert $\varepsilon > 0$ at $B_n(z) > 1 - \varepsilon$ når $|z|$ er nærme 1. Derfor får vi det følgende for store nok $r$:

$$\begin{aligned}
M_p^p(g_n, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|^p}{|B_n(re^{i\theta})|^p} \, \mathrm{d}\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|^p}{(1-\varepsilon)^p} \, \mathrm{d}\theta \\
&\leq (1-\varepsilon)^{-p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta \\
&\leq (1-\varepsilon)^{-p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta \\
&= (1-\varepsilon)^{-p} M
\end{aligned}$$

Ettersom $g_n$ er analytisk vet vi ved Teorem 2.8 at $M_p^p(g_n, r)$ er ikke-synkende og følgelig gjelder utregningen for alle $0 < r < 1$. Lar vi nå $\varepsilon \to 0$ ser vi at $M_p^p(g_n, r) \leq M$ for alle $0 < r < 1$ og alle $n$. Dette viser at $g_n \in H^p$. Ved Teorem 4.5 konvergerer $B_n$ mot $B$ på alle disker $|z| \leq R$ for alle $R < 1$. Dermed får vi

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f}{B_n} = \frac{f}{B} = g$$

på $|z| \leq R$. Vi ser at $\|g_n\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$ ettersom $|B_n(re^{i\theta})|$ går mot 1 når $r$ går mot 1. Videre kan vi anvende Lebesgue dominerende konvergens teorem:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{H^p}^p &= \lim_{n\to\infty} \left( \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta \right) \\
&= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} |g_n(re^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta \\
&= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta = \|g\|_{H^p}^p.
\end{aligned}$$

Dette viser at $g \in H^p$ og $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$. Ettersom $f$ og $B$ har de samme nullpunktene i enhetsdisken har ikke $g = \frac{f}{B}$ noen nullpunkt i enhetsdisken. □

*Kommentar.* Dette teoremet kan brukes til å vise at $H^p$ er et Banach-rom når $1 \leq p \leq \infty$, og et komplett metrisk rom når $0 < p < 1$. Det skal vi ikke vise her, men beviset er gitt i [3, Teorem 3.3]. I stedet skal vi se på en annen anvendelse.

## 7. Den Isoperimetriske ulikheten

I dette avsluttende kapittelet skal vi nå vise den isoperimetriske ulikheten ved hjelp av teoremet vi akkurat viste. For å gjøre dette trenger vi først å se litt på Bergman-rom. Vi sier at en funksjon $f$ er i Bergman-rommet $A^p$ dersom

$$\|f\|_{A^p} = \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \,\mathrm{d}A(z)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

der $A(z)$ er Lebesgue-målet i planet. Vi har altså at

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \,\mathrm{d}A(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ved et variabelbytte ser vi at

$$\begin{aligned}\|f\|_{A^p}^p &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 2\int_0^1 r\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\int_0^1 rM_p^p(f,r)\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Dette viser at $A^p \subseteq H^p$.

Som for Hardy-rom kan også $A^2$-normen være lettere å jobbe med enn $A^p$-normen for en vilkårlig $p$. La $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Ved å utnytte at vi allerede vet hva $H^2$-normen er og bruke Tonellis teorem ser vi at

$$\begin{aligned}\|f\|_{A^2}^2 &= 2\int_0^1 r\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n+1}\,\mathrm{d}r \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 |a_n|^2 r^{2n+1}\,\mathrm{d}r = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}.\end{aligned}$$

Vi skal nå vise et lemma som gjør oss i stand til å vise den isoperimetriske ulikheten.

**Lemma 7.1.** *La $0 < p < \infty$ og la $f \in H^p$. Da er $f \in A^{2p}$ og $\|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H^p}$, og $\|f\|_{A^{2p}} = \|f\|_{H^p}$ hvis og bare hvis*

$$f(z) = \frac{C}{(1-\lambda z)^{\frac{2}{p}}},$$

*der $C$ er en vilkårlig konstant og $|\lambda| < 1$.*

*Bevis.* Anta først at $f \in H^2$. Da vet vi at vi kan skrive $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, der $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$. Ettersom $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gir $f(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} z^n$ vil

$$\|f^2\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right|^2.$$

Ved å anvende dette og Cauchy–Schwarz-ulikheten på $\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot a_k a_{n-k}$ får vi:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{A^4}^4 &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f^2(z)|^2 \mathrm{d}A(z) = \|f^2\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right|^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 \sum_{k=0}^{n} |a_k a_{n-k}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 |a_{n-k}|^2 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^2 = \|f\|_{H^2}^4.
\end{aligned}$$

Vi har altså $\|f\|_{A^4}^4 \leq \|f\|_{H^2}^4$. Dermed ser vi at når $f \in H^2$ må også $f \in A^4$, og at $\|f\|_{A^4} \leq \|f\|_{H^2}$. Videre ser vi at for å få $\|f\|_{A^4} = \|f\|_{H^2}$ må vi ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} a_k a_{n-k}\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 \sum_{k=0}^{n} |a_k a_{n-k}|^2$$

Dette forutsetter at for enhver $n$ er $a_k a_{n-k} = C_n$ for alle $0 \leq k \leq n$. Fra dette ser vi at $a_0 a_{2n} = a_n a_{2n-n} = a_n^2$, så hvis $a_0 = 0$ er $a_n = 0$ for alle $n$, og dermed $f = 0$. Anta derfor at $a_0 \neq 0$, og la $\frac{a_1}{a_0} = \alpha$. Ettersom $a_0 a_n = a_1 a_{n-1}$ for alle $n$ ser vi at $a_n = \alpha a_{n-1}$, så $a_n = \alpha^n a_0$. Dermed har vi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \alpha^n z^n = \frac{a_0}{1-\alpha z}$$

for $|\alpha| < 1$. Når $f \in H^2$ er altså $\|f\|_{A^4} = \|f\|_{H^2}$ hvis og bare hvis $f(z) = \frac{C}{(1-\alpha z)}$, der $C$ er en vilkårlig konstant og $|\alpha| < 1$. La nå $f \in H^p$ for $0 < p < \infty$, og anta at $f$ ikke har noen nullpunkt i enhetsdisken. Da er $f^{\frac{p}{2}} \in H^2$ ettersom $\|f^{\frac{p}{2}}\|_{H^2} = \|f\|_{H_p}^{\frac{p}{2}}$. Følgelig er

$$\|f\|_{A^{2p}}^{\frac{p}{2}} = \|f^{\frac{p}{2}}\|_{A^4} \leq \|f^{\frac{p}{2}}\|_{H^2} = \|f\|_{H_p}^{\frac{p}{2}}.$$

Dermed er også $\|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H_p}$ for alle $0 < p < \infty$. Vi vet at $\|f\|_{A^{2p}} = \|f\|_{H^p}$ hvis og bare hvis

$$f^{\frac{p}{2}} = \frac{C}{(1-\alpha z)},$$

altså hvis og bare hvis

$$f(z) = \frac{C_1}{(1-\alpha z)^{\frac{2}{p}}}.$$

Anta nå at $f \in H^p$ har nullpunkt. Da kan vi faktorisere $f = Bg$, der $B$ er Blaschke-faktoren og $g \in H^p$ ikke har nullpunkt og $\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p}$. Samtidig er

$$\|f\|_{A^{2p}}^{2p} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |B(z)|^{2p}|g(z)|^{2p} \mathrm{d}A(z) < \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^{2p} \mathrm{d}A(z) = \|g\|_{A^{2p}}^{2p}$$

ettersom $|B(z)| < 1$ for $|z| < 1$. Dermed følger det at $\|f\|_{A^{2p}} < \|g\|_{A^{2p}} \leq \|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$. Siden vi her har en streng ulikhet ser vi at $\|f\|_{A^{2p}} = \|f\|_{H^p}$ ikke er mulig i dette tilfellet. □

La $\Omega$ være et område med rand $\partial\Omega$. Vi sier at $\Omega$ er et Jordan-område hvis Lebesgue-målet av randen er 0. Vi avslutter nå oppgaven med å vise den isoperimetriske ulikheten, og minner om hva teoremet sier:

**Teorem B. (Den isoperimetriske ulikheten)**
*La $\Omega$ være et enkeltsammenhengende begrenset Jordan-område med areal $A(\Omega)$, som er begrenset av en kurve $\partial\Omega$ med lengde $L(\partial\Omega)$. Da har vi den følgende ulikheten:*

$$A(\Omega) \leq \frac{L(\partial\Omega)^2}{4\pi}$$

*Vi har likhet i ulikheten hvis og bare hvis $\Omega$ er en disk.*

*Bevis.* Ved Riemanns avbildningsteorem eksisterer det en biholomorfi $g : \Omega \to \mathbb{D}$, og følgelig eksisterer det en invers avbildning $g^{-1} = f : \mathbb{D} \to \Omega$ som er analytisk og bijektiv. Vi finner nå et utrykk for lengden av $\partial\Omega$.

$$L(\partial\Omega) = L(f(\partial\mathbb{D})) = \lim_{r\to 1^-} L(f(re^{i\theta})) = \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| r \,\mathrm{d}\theta = 2\pi \|f'\|_{H^1}$$

Videre har vi $A(\Omega) = \pi\|f'\|^2_{A^2}$. Dette ser vi om vi lar $g(x,y) = 1$ og ser på

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \int f(\mathbb{D}) 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{D}} g(f(x,y)) |\det(f'(x,y))| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{D}} |\det(f'(x,y))| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{D}} |f'(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \,\mathrm{d}A(z) = \pi\|f'\|^2_{A^2} \end{aligned}$$

At $|\det(f'(x,y))| = |f'(x,y)|^2$ følger av at $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ tilfredsstiller Cauchy–Riemann-likningene. Vi kan nå anvende Lemma 7.1 på $f' \in H^1$. Vi har altså

$$\frac{L(\partial\Omega)^2}{4\pi^2} = \|f'\|^2_{H^1} \geq \|f'\|^2_{A^2} = \frac{1}{\pi} A(\Omega).$$

Vi ser dermed at vi får den ønskede ulikheten

$$A(\Omega) \leq \frac{L(\partial\Omega)^2}{4\pi}.$$

Likhet har vi kun dersom $f'(z) = \frac{C}{(1-\alpha z)^2}$, som gir

$$f(z) = \frac{C}{(1-\alpha z)\alpha} + K = \frac{-K\alpha^2 z + K\alpha + C}{-\alpha^2 z + \alpha}.$$

Vi ser at dersom vi skal ha likhet er $f : \mathbb{D} \to \Omega$ en Möbius-transformasjon. Dette betyr at $f(\mathbb{D})$ må være en disk eller et halvplan, men et halvplan er ikke begrenset, så $\Omega = f(\mathbb{D})$ må være en disk for at vi skal ha $A(\Omega) = L(\partial\Omega)^2/4\pi$. □

## Referanser

1. Lars V. Ahlfors, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 510197
2. Albert Boggess and Francis J. Narcowich, *A first course in wavelets with Fourier analysis*, second ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2009. MR 2742531
3. Peter L. Duren, *Theory of $H^p$ spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 38, Academic Press, New York-London, 1970. MR 0268655
4. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157
5. Dragan Vukotić, *The isoperimetric inequality and a theorem of Hardy and Littlewood*, Amer. Math. Monthly **110** (2003), no. 6, 532–536. MR 1984405

NTNU
Kunnskap for en bedre verden