Masteroppgave

Master i matematikkdidaktikk 1-7

Eivind Ranheim

Forklaringer i matematikk

En studie av elevers genererte forklaringer og forholdet mellom forklaringene de genererer og foretrekker

Trondheim, mai 2015

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Eivind Ranheim

Forklaringer i matematikk

En studie av elevers genererte forklaringer og forholdet mellom forklaringene de genererer og foretrekker

Explanations in mathematics

A study of students' generated explanations and the relationship between the explanations they generate and prefer

Masteroppgave, Master i matematikkdidaktikk 1-7
Trondheim, mai 2015

Veileder:	Ove Gunnar Drageset

Høgskolen i Sør-Trøndelag
ALT
Biblioteket
7004 Trondheim

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Høgskolen har intet ansvar for synspunkter eller innhold i oppgaven.
Framstillingen står utelukkende for studentens regning og ansvar.

Innholdsfortegnelse

Oversikt over figurer

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Forklaringer er noe vi søker i alle faser av livet og i mange ulike situasjoner. Keil og Wilson skriver følgende:

> Children ask why and how questions very early in development and seem genuinely to want some sort of answer, despite our often being poorly equipped to provide them at the appropriate level of sophistication and detail. We seek and receive explanations in every sphere of our adult lives, whether it be to understand why a friendship has foundered, why a car will not start, or why ice expands when it freezes (Keil & Wilson, 2000, s. 1).

Dette sitatet peker på forklaringenes store og naturlige del av våre liv. Vi søker og ønsker å forstå bakenforliggende årsaker for ulike sammenhenger og en forklaring kan ofte gi svar på vår søken etter kunnskap. Dette er like gjeldende for små barn som skal oppdage verden til voksne som har erfart mye og oppdager nye sammenhenger eller årsaker for hendelser. Matematikk er et fag som inneholder mange elementer som skal forstås og det er mange sammenhenger som kan være vanskelige å oppdage. Forklaringer kan være til stor hjelp for å danne en forståelse av slike elementer.

Forklaringer i matematikk inneholder typisk nyttig informasjon, så dess flere forklaringer et barn hører dess mer sannsynlig er det at de vil bli eksponert for nyttig matematisk informasjon (Perry, 2000). Dette kan lede til at det er mer sannsynlig at en lærer et matematisk begrep bedre om en hører mange forklaringer i motsetning til å høre få forklaringer for begrepet (Perry, 2000). Perry (2000) har gjennomført en undersøkelse der hun har sett på forklaringer av matematiske begrep i 1. og 5. klasse i Japan, Kina og U.S.A. Et av poengene i hennes konklusjon er at for å oppnå suksessfull matematisk forståelse må vi gå lengre enn å fortelle elever hvordan de skal løse matematiske problemer. Vi må nå det punktet der elever ikke bare suksessfullt produserer matematiske løsninger, men samtidig forstår hvorfor prosedyrene virker og når disse prosedyrene er anvendelige (Perry, 2000). En måte å nå dette punktet på er ved å tilby og kreve at elevene bidrar med tilstrekkelige forklaringer i matematikk (Perry, 2000). Dette poenget relaterer seg til min personlige motivasjon for denne undersøkelsen da jeg gjennom egen erfaring i skolen har reflektert over hvilke forklaringer en skal benytte seg av i undervisning og hva som er forskjellen mellom bruken av ulike forklaringer. Noen forklaringer vil fremheve noen aspekter og samtidig skjule andre. Ut fra dette ønsker jeg å fordype meg innen forklaringer i matematikkdidaktikken og da spesielt hva forklaringer på barnetrinnet kan inneholde.

I den norske læreplanen, Kunnskapsløftet, er en del av den muntlige ferdigheten i matematikk at elevene skal:

> (…) gjere seg opp ei meining, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både eit uformelt språk, presis fagterminologi og omgrepsbruk. Det vil seie å vere med i samtalar, kommunisere idear og drøfte matematiske problem, løysningar og strategiar med andre. (…) Vidare går utviklinga frå å bruke eit enkelt matematisk språk til å bruke presis fagterminologi og uttrykksmåte og presise omgrep (Utdanningsdirektoratet, 2015).

Ut fra den muntlige ferdigheten i matematikk er forklarende aktiviteter en del av matematikken i skolen, og det vil være med på å utvikle forståelse og meningsdanning i et klasserom (Hovik & Solem, 2013). Schwarz og Prusak, i Hovik og Solem (2013), beskriver en forklarende aktivitet som en aktivitet der idéer blir oppklart og forklart uten at det stilles spørsmål ved dette. Slike aktiviteter inneholder ofte muntlige forklaringer, som beskrevet i den muntlige ferdigheten, selv om forklaringer også kan være skriftlige eller på andre ytringsformer.

Perry (2000) uthever også at et av målene til institusjoner som driver med utdanning er å formidle materiale som er nytt for elevene, og at det ofte, men ikke utelukkende, skjer gjennom å gi muntlige forklaringer. En annen hensikt med å drive med forklaringer i skolen er også at det er en del av det som Cramer (2011) betegner som at elever lærer å argumentere («learn to argue») og argumenterer for å lære («argue to learn»). Disse to begrepene til Cramer (2011) viser at en gjennom forklarende og argumenterende aktiviteter både kan lære seg normer for forklaringer og argumenter samtidig som læring kan skje gjennom nettopp disse forklaringene og argumentene. Forklaringer og argumentasjon henger sammen og fra et argumentasjonsperspektiv kan en si at forklaringer er byggesteinene i argumentasjon (Levenson, 2013).

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Når forklaringer viser seg å være en sentral del av matematisk aktivitet i skolen er det interessant å se nærmere på hva forklaringene i matematikk kan inneholde. Når det er argumentert for at en må tilby og kreve at elever bidrar med tilstrekkelige forklaringer for å utvikle forståelse for hvorfor produserte løsninger virker og når de er anvendelige (Perry, 2000), må en kunne skille mellom ulike forklaringer for å vurdere i hvilken grad de oppfyller dette målet. Hvordan elever forholder seg til ulike forklaringer vil også gi et bilde av hva elevene selv ser på som styrker eller svakheter i forklaringer. Om ulike forklaringer viser seg å bidra med ulike vinklinger er det viktig å være klar over hva ulike forklaringer bidrar med og hva som er forskjellen mellom de ulike typene. Med dette som utgangspunkt stiller jeg følgende spørsmål for denne undersøkelsen:

Hva kjennetegner forklaringer som er generert av elever i 4. klasse, og er det sammenheng mellom forklaringene de genererer og forklaringene de foretrekker?

Utgangspunktet for undersøkelsen er elever fra 4. trinn og det matematiske temaet er paritet. Valg av trinn og matematisk tema er gjort for å avgrense omfanget for undersøkelsen. Paritet er et overordnet begrep som omfatter to mer kjente begrep i skolen, henholdsvis partall og oddetall (utdypes i kapittel 2.1). Paritet er et tallteoretisk tema som elevene typisk møter tidlig i skolen, og dermed er det et kjent matematisk tema som er utgangspunktet for forklaringene til 4. klassingene. Når elevene kjenner temaet fra før gir det muligheter for at de kan spille på kjente matematiske egenskaper når de skal generere forklaringer.

Formålet med denne undersøkelsen er å utvikle kategorier som beskriver de kjennetegnene som forklaringer generert av elever har og se om de foretrekker noen andre forklaringer enn de som de selv genererer. Grunnen til at det er tatt et elevperspektiv er at det gir innblikk i hvilke forklaringer elever genererer og foretrekker. Å utvikle noen kategorier for elevers forklaringer kan være med på å gi lærere innblikk i hvilke forklaringer elever er i stand til å generere i matematikk og hva de ulike typene forklaringer viser av matematisk forståelse og hvordan elevene vurderer ulike forklaringer.

Forskningsspørsmålet er todelt og første del tar for seg elevenes genererte forklaringer. Det er via dette spørsmålet jeg ønsker å se på elevenes forklaringer for å utvikle kategorier som kjennetegner variasjonen som dukker opp. Den andre delen av spørsmålet, som går på elevenes foretrukne forklaringer, er tatt med for å se hvilke forklaringer de foretrekker og like interessant hvorfor de foretrekker en type forklaring fremfor en annen. I denne delen av undersøkelsen vil det være Levenson, Tirosh, og Tsamir (2006) sin kategorisering av praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer (utdypes senere) som vil være fokuset for å se om elevene genererer og foretrekker den samme typen forklaring. Samlet gir begge delene av forskningsspørsmålet et innblikk i hva elever ser på som styrker i ulike forklaringer og det vil gi et godt bilde av forklaringer på 4. trinn når det kommer til hva de kan inneholde og hvordan elevene forholder seg til dem.

1.3 Teori og metode

Gjennom litteratur og forskning skrevet og gjennomført av andre har jeg fått et godt innblikk i det matematikkdidaktiske feltet som omfatter forklaringer. Spesielt har arbeidet til Esther Levenson, Dina Tirosh og Pessia Tsamir, som er tilknyttet universitetet i Tel-Aviv, vært inspirerende. De har forsket på og utviklet tre kategorier for forklaringer som de har kalt henholdsvis praktiskbaserte forklaringer, matematikkbaserte forklaringer, og regelbaserte forklaringer (Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2004). Det er spesielt de to kategoriene praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer som har fått mest fokus i deres arbeid. De har tilnærmet seg temaet med mange ulike vinklinger, blant annet sett på forklaringer fra et lærerperspektiv (Levenson et al., 2006; Levenson, Tsamir, & Tirosh, 2010) og fra et elevperspektiv (Levenson, 2010, 2013; Levenson et al., 2004, 2006; Levenson, Tsamir, & Tirosh, 2007). I de ulike undersøkelsene har de også benyttet seg av ulike aldersklasser på elevene og ulike matematiske temaer som utgangspunkt for forklaringene. Dette gjør at kategoriene deres fremstår som solide. Mye av deres forskning er gjennomført i Israel, noe som gjør det interessant å se videre på i en norsk kontekst.

Levenson et al. (2006) sine kjennetegn på den praktiskbaserte kategorien er at den inkluderer forklaringer som benytter seg av visuelle hjelpemidler eller konkreter, kontekster fra det virkelige liv, og uformelle forklaringer. Matematikkbaserte forklaringer inkluderer forklaringer som baserer seg på matematiske definisjoner eller tidligere lærte matematiske egenskaper, og ofte inneholder de matematisk resonnering (Levenson et al., 2006). Disse utdypes videre i kapittel 2.4.1. Jeg ønsker å se videre på disse to kategoriene fordi de er godt dokumenterte og sier noe om formen på forklaringene. Innholdet innen kategoriene kan likevel variere mye. Jeg ønsker å se om det er noen trender innenfor begge kategoriene som enten relaterer seg til tidligere forskning eller om det er trender jeg selv må gå inn å lete etter. Kategoriene fremstår som vidt definerte, så ved å legge til underkategorier som kan si mer om innholdet i hver type forklaring kan en danne sammensatte kategorier som beskriver kjennetegnene på elevers forklaringer. Det kan være med på å danne et rammeverk som er mer anvendelig til å si noe om kjennetegn på forklaringene som elevene gir både ut fra form og innhold.

Undersøkelsen min er gjennomført som en kvalitativ intervjustudie. Intervjuene er gjennomført individuelt og er semistrukturerte. De ble videofilmet for å sikre et høyt nivå av detaljer. Elevene hadde tilgang til ark, blyant, og klosser som de fritt kunne benytte seg av under intervjuene. I analysen er forklaringer fra ulike elever blandet for å få et mangfold av forklaringer å jobbe ut fra. Det vil ikke bli en dybdeanalyse av én (eller flere) elevs forklaringer, men en innholdsanalyse av hva ulike forklaringer inneholder uavhengig av hvilken person som genererte forklaringen. Det at det er flest mulig forklaringer å jobbe ut fra ser jeg på som en styrke for denne undersøkelsen ved at det vil skape en større variasjon i forklaringene som vil danne grunnlaget for kategoriene som kjennetegner forklaringer generert av elever.

Resultatet av denne undersøkelsen kan få en overføringsverdi til undervisning selv om de resultatene jeg får ikke er generelle. Når jeg benytter meg av seks forskningsdeltakere vil jeg ikke ha et mangfold av deltakere som kan fungere som et representativt utvalg for sin gruppe. Mine resultater kan gi et eksempel på hvordan det kan være. Dette er også et sentralt kjennetegn innen subjektivistisk forskning og kvalitative studier.

1.4 Tekstens struktur

Teksten er videre oppbygd ved at det i førstkommende kapittel kommer en presentasjon av det teoretiske grunnlaget for undersøkelsen. Det innebærer en fremstilling av forklaringer generelt og i matematikk spesielt. Det presenteres et mangfold av kategorier for forklaringer som er utledet av tidligere forskning før jeg går nærmere inn i kategoriene for praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer. Disse to kategoriene blir presentert for seg selv siden det er kategorier jeg ønsker å bruke inn mot min kategorisering ut fra forklaringenes form. Her vil jeg vise til definisjonen for kategoriene og presentere forskning tilknyttet disse kategoriene for forklaringer. Sist i det teoretiske rammeverket vil jeg vise til teori rundt bruken av visuelle hjelpemidler, konkreter og kontekster som en del av forklaringer. Videre vil jeg i kapittel 3 fremstille metodiske tilnærminger og vise til hvilke valg jeg har tatt i min undersøkelse. Mine valg innebærer noen konsekvenser i forhold til datamaterialet og etiske betraktninger. Dette vil bli drøftet i kapittelet. Dette er for å vise hva som har skjedd i datainnsamlingen og i forskningens gang generelt som gjør at en som leser har mulighet til å selv vurdere oppgavens gyldighet ut fra de metodene som er benyttet og de valgene som er tatt.

Etter den metodiske fremstillingen kommer oppgavens analysedel. Det er i dette kapittelet jeg vil analysere elevenes forklaringer for å kunne utvikle kategorier som kjennetegner forklaringer. Jeg vil se på hver enkelt kategori hver for seg for å bruke forklaringene til elevene til å definere de ulike kategoriene. Det vil bli vist eksempler som ligger i kjernen av hver kategori og eksempler som ligger i skillet mellom ulike kategorier. Jeg vil sist i analysen se på hvilke forklaringer elevene foretrekker samt grunnen for det valget de tok. I det etterfølgende kapittelet, 5, viser jeg til resultatene av analysen før jeg i kapittel 6 vil diskutere mine funn opp mot tidligere forskning og andre teorier for å se hvordan min undersøkelse plasserer seg innenfor en større kontekst. Siste kapittelet er konklusjonen hvor jeg gir et svar på forskningsspørsmålet som er stilt for undersøkelsen og tar opp naturlige steg videre i forskningen.

2 Teoretisk rammeverk

2.1 Paritet

Som nevnt er paritet det matematiske utgangspunktet for denne undersøkelsen. Paritet er et tallteoretisk begrep som gjelder for heltall. Det angir hvorvidt et tall er delelig med to eller ikke. Det er et overordnet begrepet og i skolen snakker en ofte om partall og oddetall når en refererer til paritet. Partall og oddetall er begreper som elever kjenner til og som typisk undervises tidlig i elevenes skolegang.

Med formell matematisk notasjon skrives partall som $2k$ og oddetall som $2k+1$ (Burton, 2011). Dette viser at alle heltallsmultiplum av to er partall. Eksempelvis er 14 et partall fordi det kan skrives som $2 \cdot 7 = 14$ som viser at det er delelig med to uten at en får en rest. Oddetallet ni kan skrives som $2 \cdot 4 + 1 = 9$ som viser at det ikke er et heltallsmultiplum av to siden en får én i rest. Følgelig av denne definisjonen er null et partall fordi det kan skrives som $2 \cdot 0 = 0$. Dette er det matematiske utgangspunktet for forklaringer som vil gjelde for resten av undersøkelsen.

2.2 Forklaringer og matematiske forklaringer

Det grunnleggende utgangspunktet for forklaringer vil i denne undersøkelsen følge filosofen Peter Achinstein (1983) sin tilnærming til temaet som han tar opp gjennom boken *The Nature of Explanation*. Her utdyper han at en ikke forklarer noe kun ved å bare tenke noe, løse et problem eller finne et svar, om ikke denne tanken, løsningen eller svaret er uttrykt ved en handling i form av en ytring som kommuniserer noe. Å forklare noe er typisk utført ved å ytre noe i en viss kontekst med passende intensjoner (Achinstein, 1983).

Videre presenterer Achinstein (1983) en form for grunnsetning som han utvikler for å kunne passe til å beskrive en handling der noen forklarer noe. Denne setningen er, i sin mest grunnleggende form før Achinsteins mange utviklinger, «S explains q by uttering u» (Achinstein, 1983, s. 16). Her er «S» en person, «q» er et indirekte spørsmål, og «u» er en setning. I min undersøkelse vil da «S» være forskningsdeltakeren som svarer på et indirekte spørsmål «q» (utledet av et direkte spørsmål) ved å ytre «u». Et eksempel på dette kan være at noen blir stilt spørsmålet «hva er et partall?» og svarer «et partall er et tall som kan deles på to uten at en får en rest.» Her kommer «q», som et indirekte spørsmål, klart frem siden det er utledet fra det direkte spørsmålet som blir stilt og «u» er selve svaret til det direkte spørsmålet som er stilt. Hele denne relasjonen er det Achinstein (1983) ser på som en «explanation act» og det er produktet av denne handlingen han behandler som en forklaring. Denne brede tilnærmingen til forklaringer er den som vil bli fulgt videre i denne undersøkelsen og ved å velge denne gir det mulighet til å se på svaret av mange ulike typer spørsmål som en handling der en forklarer noe. Som nevnt er det produktet av denne handlingen som er selve forklaringen.

Det finnes ikke et entydig svar på om det er egne forklaringer som hører til sine respektive kunnskapsdomener eller ikke. Keil og Wilson (2000) viser til to ytterkanter i denne diskusjonen; på det ene ytterpunktet kan man si at det finnes ulike domener for kunnskap som har sine respektive sett med forklaringer som opererer innenfor domenet. Ulike domener vil ha sine egne mål for forklaringene og egne standarder for forklaringer (Keil & Wilson, 2000). En ser på domener av forklaringer som selvstendige fra hverandre. På den andre siden kan man se på det som at domenene er avhengige av hverandre og dermed ikke er så varierte (Keil & Wilson, 2000). Innen dette andre synet er det blitt foreslått at barn er begavet med to distinkte modeller for forklaringer som former alle andre typer forklaringer, nemlig intuitiv psykologi og intuitiv fysisk mekanikk (Keil & Wilson, 2000).

Uten å ta klart standpunkt eller gå videre i en slik diskusjon av en mer filosofisk art avgrenser jeg området for min undersøkelse ved å se nærmere på det som betegnes som matematiske forklaringer. Definisjonen som vil benyttes for en slik type forklaring vil følge Yackel (2001). Hun sier at en matematisk forklaring benyttes når en ønsker å klargjøre egenskaper ved sin matematiske tenkning som en tror kanskje ikke er innlysende for den som det forklares til (Yackel, 2001). Levenson (2013) og Levenson et al. (2006) utdyper videre at forklaringer er en prosess av kommunikasjon hvor en person forsøker å produsere en forståelse ovenfor seg selv eller en annen person ved å svare på et spørsmål som enten er eksplisitt eller implisitt stilt. Eksplisitte spørsmål er spørsmål som blir stilt direkte til en person (Eksplisitt, 2013). Spørsmålet «hva er et partall?» som jeg viste til tidligere er et eksplisitt spørsmål som er direkte stilt. Implisitte spørsmål er spørsmål som blir stilt uten at det er direkte uttalt (Implisitt, 2014). Det kan for eksempel være i form av blikk eller en handling som gjør at en annen person forstår hva en spør om uten at spørsmålet er direkte stilt. Spørsmålet er underforstått av situasjonen (Implisitt, 2014).

Disse to presiseringene av matematiske forklaringer fra Yackel (2001), Levenson (2013) og Levenson et al. (2006) bygger videre på det grunnleggende utgangspunktet for forklaringer fra Achinstein (1983). Matematiske forklaringer klargjør egenskaper ved ens matematiske tenkning, de må inneholde en form for kommunikasjon og forklaringen er utledet av et eksplisitt eller implisitt spørsmål. Svaret på spørsmålet blir sett på som en handling der en forklarer noe og produktet av denne handlingen er selve forklaringen.

Når generering av forklaringer avhenger av et eksplisitt eller implisitt spørsmål vil svaret på spørsmålet som er stilt avhenge av selve spørsmålet. Dette tilhører fagfeltet samtaleanalyse, og målet er å finne hvilke normer og/eller konvensjoner som oppstår mellom samtalepartnere i en samhandling (Svennevig, 2013a). Det som kommer i fokus i forhold til min undersøkelse er det som innenfor samtaleanalysen kalles for samtalesekvens og den grunnleggende sekvenstypen som kalles for *nærhetspar* (Svennevig, 2013b). Nærhetspar bygger på at det først kommer en første pardel som i forhold til forklaringer vil være et eksplisitt eller implisitt spørsmål. Dette spørsmålet skaper en forventning til en viss type respons i den andre pardelen, som vil være svaret på spørsmålet og dermed ende opp som forklaringen ved at det er produktet av handlingen en gjør ved å svare på spørsmålet. Dette gjør at når en stiller et eksplisitt eller implisitt spørsmål til en annen person som en samhandler med, skaper man en forventning ovenfor den som skal svare om hva svaret skal inneholde (Svennevig, 2013b). Dette leder til at hvilke spørsmål en stiller kan være en faktor som former forklaringen som blir generert ved at samtalepartneren som genererer forklaringen vil prøve å oppfylle den forventningen en føler spørsmålet en skal svare på gir (Svennevig, 2013b). Om en føler at ulike personer stiller ulike forventninger til svar er det også trolig at dette kan være med å påvirke hvilke forklaringer en gir til ulike personer (Svennevig, 2013b). Dermed er det tenkelig at elever vil kunne gi en annen forklaring til for eksempel sin lærer enn de gir til sin medelev selv om spørsmålet som er stilt og som er utgangspunktet for forklaringen er det samme.

Kommunikasjonen som forklaringer inneholder kommuniserer ikke bare en elevs tanker og idéer som allerede eksisterer, men Nunokawa (2010) hevder at de også kan være med på å generere nye tanker og idéer. Forklaringene kan da lede til nye utforskninger som kan skape en dypere forståelse av den matematikken som er involvert. Dette sammenfaller med definisjonen som er fulgt for matematiske forklaringer ved at elevene kan forsøke å produsere en forståelse ovenfor seg selv (Levenson, 2013; Levenson et al., 2006). Denne tankegangen bygger på det samme begrepet jeg benyttet i innledningen fra Cramer (2011), som var å argumentere eller forklare for å lære. Forklaringer kan derfor uttrykke hva en har lært og hvilken kunnskap en besitter samtidig som det kan være et verktøy for videre læring. Forklaringene kan bevisstgjøre elevene på nye elementer som er i relasjon med matematikken som er involvert, og det kan motivere til videre utforskninger rundt de matematiske egenskapene og begrepene som kan lede til en dypere eller bredere forståelse (Cramer, 2011; Nunokawa, 2010).

Når elever lærer nye begreper og prosedyrer for løsning av problemer er de nødt til å gi mening til disse for å kunne forklare og begrunne dem selv. Når de skal forklare, begrunne eller argumentere ovenfor seg selv eller noen andre hvorfor et begrep eller en prosedyre er korrekt må elevene bruke et språk som er godt egnet til å fremheve de poengene som de ønsker å vektlegge (Carpenter, Franke, & Levi, 2003). Carpenter et al. (2003) peker på at forklaringer som hører til spesielle matematiske begrep vil avhenge av elevenes definisjon og representasjon av begrepet. Fra et lærerperspektiv påpeker Anghileri (2006) at det er viktig å lytte til disse forklaringene fra individuelle elever for å forsøke å finne ut av elevenes forståelse av spesielle relasjoner innen det matematiske begrepet og deres evne til å anvende disse istedenfor å bare gjengi innøvde prosedyrer. Elevenes oppfattelse av begrepet paritet vil dermed være en del av det som former forklaringene som elevene gir for begrepet i min undersøkelse og det er samtidig en faktor som kan variere mellom de ulike forskningsdeltakerne.

Levenson (2013) peker også på det samme som nevnt i forrige avsnitt når hun skriver at kunnskapen og forståelsen elevene har om begrepet som er involvert vil være en del av det som former elevers forklaringer. Hun sier at hvordan barn opplever og forstår et begrep avhenger av hvilken kontekst og hvilken alder barnet hadde når det ble introdusert for begrepet (Levenson, 2013). Videre refererer hun til Fischbein som hevder at de tolkningene som elever skaper ut av undervisningsmateriell og modeller som blir brukt i skolen ofte blir rigide hos elevene, som kan gjøre det vanskelig å endre elevers oppfatning og forståelse av et begrep om eleven har en forståelse av begrepet som ikke er formålstjenlig (Fischbein, 1987, i Levenson, 2013). Hvilke matematiske modeller, språk, kontekster, konkreter eller visuelle hjelpemidler som ble brukt når elevene ble introdusert for paritet kan dermed spille inn på hvilke begrepsbilder de har. Disse begrepsbildene spiller igjen en rolle for hvilke forklaringer de genererer og foretrekker (Levenson, 2013).

2.3 Ulike kategorier for forklaringer

Gjennom tidligere forskning har det blitt beskrevet mange ulike typer forklaringer og ulike kategorier for kunnskap innen matematikk som leder til ulike typer forklaringer. Dette temaet er det forsket mye på innen mange ulike kontekster i mange land. Dette gjør at det foreligger mange forskningsresultater som har hatt ulikt fokus i forskningsprosessen. Noen fokuserer på det matematiske innholdet i sine kategorier mens andre ser mer på forklaringens form. Noen forskningsresultater har fokusert på lærerens forklaringer mens andre ser på elevforklaringer eller forklaringer uavhengig av hvem som forklarer. De kategoriene jeg vil presentere her er teori der forskningen presenterer en form for kategorisering av forklaringer og/eller matematisk kunnskap som er interessant i forhold til den analysen jeg skal gjøre.

Mack (1995) har i sin undersøkelse sett på hvordan elever utvikler sin forståelse for brøk når de bygger på sin tidligere kunnskap om hele tall og når dette påvirker deres meninger og representasjoner som de konstruerer for brøk når de bygger på sin uformelle kunnskap. Ginsburg og Seo (1999) fokuserer på og argumenterer for hvordan barns uformelle og konstruerte matematikk som de selv har funnet opp inneholder, på et implisitt plan, mange av de matematiske idéene som lærere ønsker å fremme på et formelt og eksplisitt nivå. Raman (2002) illustrerer de vanskelighetene som elever kan ha når de skal koordinere uformelle og formelle aspekter ved matematikk og Bonotto (2005) har fokusert på hvordan uformell hverdagslig matematikk kan hjelpe elever med å gi mening til formell skolematematikk. Disse undersøkelsene viser til en kategorisering for uformelle og formelle forklaringer. En uformell forklaring er en forklaring som er basert på den uformelle kunnskapen som elevene bringer med seg inn i klasserommet fra deres hverdagslige erfaringer. En formell forklaring består av formell lært matematikk og fremstår på en mer konvensjonell form og ofte kan de inneholde en symbolsk representasjon (Bonotto, 2005; Ginsburg & Seo, 1999; Mack, 1995). Raman (2002) utdyper dette skillet tydeligere ved å beskrive de formelle forklaringene som forklaringer bestående av rigide argumenter basert på matematiske definisjoner og teoremer, mens uformelle forklaringer inneholder ikke så rigide argumenter, anelser og intuisjon.

En annen kategorisering er forklaringer via kalkulering/algoritme og forklaringer via begrep (Bowers & Doerr, 2001; Cobb, McClain, & Gravemeijer, 2003; Fuchs, Fuchs, Hamlett, Phillips, Karns, & Dutka, 1997). Denne kategoriseringen skiller seg fra de uformelle og formelle forklaringene ved at de er mer fokusert inn mot hvilke aspekter ved det matematiske begrepet en ønsker å benytte eller belyse i forklaringen. Mens de uformelle og formelle forklaringene bygger på den kunnskapen den som forklarer har om begrepet, er forklaringer via kalkulering/algoritme og via begrep mer rettet mot hvordan en har løst et problem eller hvorfor en løsning er korrekt ut fra det matematiske begrepet. Denne kategoriseringen er også hentet fra ulike forskninger gjennomført. Blant annet har Bowers og Doerr (2001) i sin forskning analysert sammenhengen mellom fremtidige og praktiserende læreres læring av matematikk i endring og utviklingen av deres nye forståelse av effektiv undervisning i matematikk. Fuchs et al. (1997) har gjennomført et klasseromsbasert eksperiment med den hensikten å utforske metoder for å hjelpe elever med å generere matematiske forklaringer via begrep gjennom læringsaktiviteter som bygger på samarbeid. En tredje undersøkelse som viser til denne kategoriseringen er Cobb et al. (2003) som i sin artikkel rapporterer fra et 14 ukers langt klasseroms-designeksperiment som fokuserte på statistisk samvariasjon. Disse forskningene beskriver en forklaring som er via kalkulering eller algoritme som en beskrivelse av prosessen, prosedyren, eller stegene en tar eller har tatt når en løser et problem (Bowers & Doerr, 2001; Cobb et al., 2003; Fuchs et al., 1997). Fokuset er på hva en har gjort og inneholder lite eller ingenting om hvorfor en har gjort det. Forklaringer som går via begrep inneholder en beskrivelse av grunnen til stegene en tar eller har tatt og en slik forklaring linker disse stegene til den begrepsmessige kunnskapen som den som forklarer har (Bowers & Doerr, 2001; Cobb et al., 2003; Fuchs et al., 1997). Dette gjør at forklaringer via begrep er forklaringer som ligner på de via prosedyre, men i tillegg er det altså en tydelig begrunnelse for valgene som en tar som knyttes til det matematiske begrepet som er involvert.

Videre beskriver Fuchs et al. (1997) i sin undersøkelse fem metoder som elevene kunne bruke til å gi matematiske forklaringer via begrep til sine medelever når de samarbeidet: (a) bygge på regnefortellinger som inkluderer hverdagseksempler, som er interessante og som kan skape et bilde i hodet; (b) lage merker eller bilder som står for tallene; (c) bruke konkreter slik at partneren kan flytte og ta på ting som står for tallene; (d) diskutere meningen av de involverte tallene ved å forklare hva tallene står for, snakke om *hvorfor* problemet må bli jobbet med på en spesiell måte, eller diskutere om og hvorfor svaret gir eller ikke gir mening; og (e) spørre steg-for-steg spørsmål som starter med hva, hvor, når, hvordan og hvorfor. Disse fem stegene er oversatt til å kunne forstås og benyttes av elever på 2. til 4. trinn (Fuchs et al., 1997), og viser at forklaringer som benytter seg av begrepet kan ha stor variasjon og mange andre former enn bare en forklaring som ligner på definisjonen av det matematiske begrepet.

Rittle-Johnson og Alibali (1999) har sett på sammenhengen mellom begreps- og prosedyrebasert kunnskap. Dette skillet innenfor de to typene kunnskap er sterkt knyttet opp mot det skillet mellom forklaringer som er tatt opp i de foregående avsnittene. Rittle-Johnson og Alibali (1999) beskriver begrepsbasert kunnskap som kunnskap som viser til en eksplisitt eller implisitt forståelse av prinsippene som gjelder for et matematisk domene eller begrep og det er en sammenheng mellom deler av kunnskap innenfor dette domenet. Prosedyrebasert kunnskap består av handlingssekvenser for å løse et problem (Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Dette skillet mellom de to typene kunnskap bygger på de samme prinsippene som forklaring via kalkulering/algoritme og forklaring via begrep (Bowers & Doerr, 2001; Cobb et al., 2003; Fuchs et al., 1997) ved at forklaringer via kalkulering/algoritme sammenfaller med prosedyrebasert kunnskap og forklaringer via begrep bygger på de samme prinsippene som begrepsbasert kunnskap. Det viser at elever må ha ulik type kunnskap om begrepet eller domenet det forklares innen for å kunne veksle mellom de to ulike typene for forklaringer.

Perry (2000) har sett på noen av klasserommets prosesser som kan være ansvarlig for den fremragende matematiske ytelsen blant asiatiske barn i forhold til amerikanske barn. I hennes undersøkelse kunne en matematisk forklaring beskrive hvordan en gjør noe og/eller hvorfor en gjør noe (Perry, 2000). Hun fant at elever i alle tre landene i undersøkelsen hørte forklaringer som forklarte hvordan en skulle løse et problem, men ikke alle hørte forklaringer av matematiske prinsipper eller funksjoner. Dette bygger på det hun i analysen sin beskriver som prosedyrebaserte forklaringer og funksjonelle forklaringer (Perry, 2000). En prosedyrebasert forklaring forteller typisk hva en skal gjøre, og disse forklaringene var ofte (men ikke alltid) etterfulgt av (i undervisningstimene i Perrys undersøkelse) en funksjonell forklaring som forklarer bakgrunnen for stegene en tar (Perry, 2000). Ved å benytte seg av begge typene forklaring kommer elevene i en posisjon til å forstå ikke bare hvordan en skal bruke prosedyren, men også vilkårene for når prosedyren kan blir brukt (Perry, 2000). Dette skillet mellom prosedyrebaserte og funksjonelle forklaringer bygger på de samme prinsippene som forklaringer via kalkulering/algoritme og forklaring via begrep (Bowers & Doerr, 2001; Cobb et al., 2003; Fuchs et al., 1997). Forklaringer via kalkulering/algoritme beskriver hvordan en gjør noe (prosedyrebasert) og forklaringer via begrep har en tydeligere referanse til hvorfor en gjør noe og sier noe om bakgrunnen for stegene en tar (funksjonell).

En annen del av funnene Perry (2000) gjorde i sin undersøkelse var også at det er forskjeller mellom forklaringer som er generaliserbare utover spesifikke problem og forklaringer som er mer nyttige for de spesifikke problemene. Dette skillet finner en også i Forman, McCormick, og Donato (1998) som har undersøkt undervisningspraksisen til en lærer i detalj der hun prøver å endre sin måte å snakke om matematikk for å oppmuntre til større elevdeltakelse. Forman et al. (1998) viser til en forklaring for spesifikke problemer som en forklaring som utdyper hvordan en fant løsningen til det enkelte problemet mens en forklaring utover spesifikke problemer inneholder generelle mønstre som gjelder for en rekke lignende problemer og ikke bare det mønsteret som gjelder for et spesielt problem.

Jones (2000) presenterer data fra en langvarig studie av 12 år gamle elevers tolkninger av geometriske objekter og forhold når de bruker dynamisk geometriprogramvare. Fokuset til Jones (2000) er den progressive matematiseringen av elevenes følelse av programvaren, undersøke deres tolkninger og bruke forklaringene som elevene gir av de geometriske egenskapene til ulike firkanter som de konstruerer som en indikator på dette. I denne undersøkelsen presenterer han et skille som viste seg i hans analyser, henholdsvis pragmatiske og matematiske forklaringer (Jones, 2000). De pragmatiske forklaringene refererer til handlinger som blir utført og beskriver stegene en tar eller har tatt. Matematiske forklaringer bygger i større grad på matematiske egenskaper som er involvert og krever at elevene i større grad bruker presis matematisk terminologi (Jones, 2000). Disse to kategoriene til Jones (2000) er relativt lik andre kategorier presentert, henholdsvis forklaringer via kalkulering/algoritme og via begrep (Bowers & Doerr, 2001; Cobb et al., 2003; Fuchs et al., 1997) og prosedyrebaserte og funksjonelle forklaringer (Perry, 2000), ved at de pragmatiske forklaringene beskriver handling utført eller stegene tatt (kalkulering/algoritme og prosedyrebasert) og de matematiske forklaringene er mer koblet til de matematiske egenskapene som er involvert (begrep og funksjonell). Det som skiller Jones (2000) fra disse lignende kategoriene er at det for matematiske forklaringer kreves at en i større grad bruker presis matematisk terminologi. Dette er noe en finner igjen i de formelle forklaringene (Bonotto, 2005; Ginsburg & Seo, 1999; Mack, 1995; Raman, 2002). Videre knytter Jones (2000) skillet mellom pragmatiske og matematiske forklaringer opp mot Balacheff (1988) sin distinksjon innen bevis. Pragmatiske forklaringer gjenspeiler seg i det Balacheff (1988) kaller pragmatiske bevis, som benytter seg av faktiske handlinger. Matematiske forklaringer er knyttet opp mot begrepsbaserte bevis som ikke inneholder handlinger og baserer seg på formuleringer av egenskapene som er involvert og relasjoner mellom dem (Balacheff, 1988; Jones, 2000).

Tsamir og Sheffer (2000) har sett på elever fra videregående skole sin oppfattelse av divisjon med null og i sin undersøkelse skiller de mellom konkrete og formelle forklaringer. De refererer til en konkret forklaring som en forklaring der en bruker hverdagslige erfaringer til å gi mening til det matematiske uttrykket. I en formell forklaring bruker en bare matematiske definisjoner og teoremer (Tsamir & Sheffer, 2000). Dette skillet mellom konkrete og formelle forklaringer bygger på de samme prinsippene som uformelle og formelle forklaringer (Bonotto, 2005; Ginsburg & Seo, 1999; Mack, 1995; Raman, 2002). Konkrete og uformelle forklaringer bygger på kunnskap som en har tilegnet seg gjennom hverdagslige erfaringer og formelle forklaringer bygger på lært matematikk som relaterer seg til definisjoner og teoremer.

2.4 Praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer

2.4.1 Definisjon av praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer

Utgangspunktet for dannelsen av kategoriene praktiskbaserte (practically-based) og matematikkbaserte (mathematically-based) forklaringer var at Levenson et al. (2006) mente at det tidligere manglet noen begreper som kunne betegne forklaringer som alene er basert på matematiske begreper, men som ikke nødvendigvis var formelle og rigide som det en forventer av en matematiker på et høyere nivå. Dermed dannet de begrepet matematikkbaserte forklaringer som inneholder forklaringer som baserer seg på matematiske definisjoner eller tidligere lærte matematiske egenskaper og ofte inneholder disse forklaringene matematisk resonnering (Levenson et al., 2006). De matematikkbaserte forklaringene skiller de fra det de beskriver som formelle forklaringer som en ofte refererer til når det gjelder elever som går i videregående skole og ved lavere utdanninger (Levenson et al., 2006). Som vist til i forrige delkapittel er formelle forklaringer tydelig koblet til lærte matematiske definisjoner og teoremer og er på en mer konvensjonell form (Bonotto, 2005; Ginsburg & Seo, 1999; Mack, 1995; Raman, 2002; Tsamir & Sheffer, 2000). Ved å skille matematikkbaserte forklaringer fra de formelle åpner det dermed for at forklaringer som bygger på tidligere lærte matematiske egenskaper og som inneholder matematisk resonnering kan passe for elever i grunnskolen. Unge elever er ikke alltid i stand til å generere forklaringer som bygger på matematiske egenskaper som samtidig er konvensjonelle og aksepterte av matematikere på høyere nivå, men likevel har de god kjennskap til de matematiske egenskapene og benytter dette i forklaringene sine (Levenson et al., 2006). Levenson et al. (2006) definerer videre den matematikkbaserte kategorien smalt ved å ekskludere alt av visuelle hjelpemidler fra denne kategorien.

Ut fra de matematikkbaserte forklaringene dannet de begrepet praktiskbaserte forklaringer som inkluderer forklaringer som ikke bare baserer seg på matematiske begreper. I denne kategorien for forklaringer inkluderes visuelle hjelpemidler eller konkreter, forklaringer via kontekster fra det virkelige liv og uformelle forklaringer (Levenson et al., 2006). Som vist til tidligere er de uformelle (eller konkrete (Tsamir & Sheffer, 2000)) forklaringene forklaringer som bygger på hverdagslige erfaringer som elevene tar med seg inn i matematikken som ikke nødvendigvis trenger å være gyldige matematiske elementer (Bonotto, 2005; Ginsburg & Seo, 1999; Mack, 1995; Raman, 2002). Disse to kategoriene, matematikkbaserte og praktiskbaserte forklaringer, utgjør dermed et skille som går på forklaringens form i forhold til de kategoriene presentert i kapittel 2.3, som fokuserer på innholdet i forklaringene. Matematikkbaserte forklaringer baserer seg på matematiske egenskaper og er uttrykt i form av muntlige eller skriftlige ytringer, mens praktiskbaserte forklaringer har et større register for uttrykksmåter ved at en også kan benytte seg av visuelle hjelpemidler og konkreter i tillegg til det muntlige og skriftlige språket (Levenson et al., 2006). Som eksempel kan en tenke seg at en kan forklare stegene en har tatt (forklaring via kalkulering/algoritme, prosedyrebaserte forklaringer, pragmatiske forklaringer) når en løser et problem både matematikkbasert og praktiskbasert. Det er hva forklaringen viser av matematiske relasjoner som danner skillene i de kategoriene presentert i kapittel 2.3.

Ved å danne disse to kategoriene for forklaringer tilpasset grunnskolen ønsker Levenson et al. (2006) å kunne beskrive og utforske forklaringer som er mer fokusert på det matematiske fra tidlig alder. De viser til ulike studier som har vist at unge elever er i stand til å forstå forklaringer som bygger på matematiske elementer. De argumenterer for at målet for matematikklærere er å hjelpe elevene å gå fra praktiskbaserte forklaringer til matematikkbaserte forklaringer (Levenson et al., 2006). Som lærer har en oversikt over den mer formelle matematikken som kan være utfordrende for elever ved senere anledninger (Levenson et al., 2006). Dermed mener de at vi må se nærmere på muligheten for å introdusere flere matematikkbaserte forklaringer for elever i grunnskolen som en forberedende aktivitet til de kommende formelle forklaringene som de møter senere i sin matematiske utvikling (Levenson et al., 2006).

2.4.2 Relevante funn i forskningen

Som nevnt i innledningen har dette temaet blitt tilnærmet fra flere forskjellige vinkler og i ulike kontekster. Her vil jeg bare løfte frem de poengene fra forskningen angående matematikkbaserte og praktiskbaserte forklaringer som er relevante i forhold til mitt arbeid. Ett av de sentrale funnene til Levenson et al. (2006) er at grunnskoleelever er i stand til å forstå matematikkbaserte forklaringer og at noen elever til og med kan foretrekke slike typer forklaringer. Levenson et al. (2006) fant at dette ikke bare gjelder høyt-presterende elever, slik at ikke fullt så høyt-presterende elever også er i stand til å forstå og akseptere matematikkbaserte forklaringer. Videre fant de også at de to elevene som er brukt i denne undersøkelsen (5. trinn) forstod mesteparten av de praktiskbaserte forklaringene som ble presentert for dem, men ikke alle (Levenson et al., 2006). Dette linker de opp mot de ulempene som praktiskbaserte forklaringer kan føre med seg ved begrensningene som kan ligge i konkreter eller visuelle hjelpemidler, og at det er individuelt hva som er en relevant kontekst for ulike elever (utdypes i kapittel 2.5). Om elevene selv hadde fått gjort koblingen mellom praktiske elementer og matematikken involvert er det mer sannsynlig at de hadde sett sammenhengen mellom de ulike elementene. Videre fant de at selv om elever forstod en praktiskbasert forklaring så betydde det ikke at de mente at denne forklaringen var akseptabel som en gyldig forklaring for det matematiske innholdet (Levenson et al., 2006).

En senere undersøkelse (Levenson et al., 2007), som gikk dypere inn i pariteten til null, avdekket at det var en konflikt mellom elevenes formelle definisjoner av partall og deres begrepsbilder av partall, null, og divisjon. Begge elevene (6. trinn) i undersøkelsen påstod innledningsvis at null var verken partall eller oddetall. Disse begrepsbildene var ofte støttet av praktiskbaserte forklaringer som baserte seg på hverdagslige kontekster (Levenson et al., 2007).

Blant annet brukte den ene eleven i undersøkelsen den samme setningen til å forklare at 14 var et partall og at null ikke var et partall. Dette var knyttet opp mot hans begrepsbilde av divisjon som var at det krevde at en delte ut konkrete objekter (Levenson et al., 2007). Null mente han var ingenting og dermed kunne det ikke deles konkret fordi han hadde ingenting å dele ut. Denne undersøkelsen viser at de praktiskbaserte forklaringene som elevene blir introdusert for og/eller bruker selv kan ha påvirkning for deres senere begrepsbilder (Levenson et al., 2007). Dette forskningsresultatet peker på at en må være kritisk med tanke på innholdet i ulike forklaringer, da det kan ligge utfordringer som først kan vise seg i en senere alder.

Levenson (2010) har gjennomført en undersøkelse som så på 5. klassingers bruk og foretrukkenhet for praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer innen to matematiske kontekster; paritet og likeverdige brøker. Resultatene fra denne undersøkelsen viser at elever genererte flere matematikkbaserte enn praktiskbaserte forklaringer for begge de matematiske kontekstene (Levenson, 2010). Når de fikk velge mellom de to typene forklaringer foretrakk flest praktiskbaserte forklaringer for paritet og det var ingen trend innenfor likeverdige brøker (Levenson, 2010). I undersøkelsen var det flere ulike grunner som oppstod for hvorfor ulike elever foretrakk ulike forklaringer. Noen valgte praktiskbaserte forklaringer fordi de inneholdt kontekster som var relatert til elevenes daglige erfaringer og andre valgte slike forklaringer fordi det sto et bilde (visuelt hjelpemiddel) sammen med forklaringen som gjorde den lett å forstå (Levenson, 2010). Matematikkbaserte forklaringer ble valgt fordi elevene så på forklaringenes korthet som en styrke, andre valgte disse på grunnlag av deres enkelhet og klarhet og noen valgte de på bakgrunn av at de satt pris på den matematikken som var involvert i selve forklaringen (Levenson, 2010). Som analysen og resultatet til Levenson (2010) viser er det ikke en nødvendig sammenheng mellom hvilken type forklaring elever genererer og hvilken type forklaring de foretrekker. Det beste eksempelet på dette er at elever genererte flere matematikkbaserte enn praktiskbaserte forklaringer for paritet, mens det var motsatt når de skulle velge hvilken type de foretrakk.

Resultatene fra de tre forskningene presentert ovenfor peker på flere poenger som kan være utfordrende eller varierende i forhold til bruk av praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer. Elever viser i én undersøkelse at de forstår og foretrekker matematikkbaserte forklaringer og anser ikke alle praktiskbaserte forklaringene som matematisk gyldige (Levenson et al., 2006). I en annen undersøkelse genererer også elevene flere matematikkbaserte enn praktiskbaserte forklaringer, men de foretrekker flere praktiskbaserte enn matematikkbaserte forklaringer for paritet og det er ingen trend den ene eller andre veien for likeverdige brøker (Levenson, 2010). Dette gjør at resultatene fra disse to undersøkelsene ikke bekrefter hverandre når det kommer til sammenheng mellom genererte og foretrukne forklaringer. Det viser at forholdet mellom genererte og foretrukne forklaringer vil kunne variere og en kan ikke forvente en sammenheng. Det vil skille fra elev til elev hva som oppleves som en god praktiskbasert eller matematikkbasert forklaring, da det vil være individuelle forskjeller mellom hva de foretrekker av slike praktiskbaserte eller matematikkbaserte elementer inn mot matematikken (Levenson, 2010; Levenson et al., 2006).

Noen elever viser til begrepsbilder som er støttet av hverdagslige erfaringer (som nødvendigvis ikke er korrekte) når de skal løse problemer (Levenson et al., 2007) og noen foretrekker også praktiskbaserte forklaringer på grunnlag av nettopp disse hverdagslige referansene, som viser at elever kan sette pris på slike elementer (Levenson, 2010). Det viser at elever kan være i stand til å bruke og stole på sine praktiskbaserte begrepsbilder og gi praktiskbaserte forklaringer for matematiske relasjoner som ikke viser seg alltid å være korrekte. Introduksjonen til ulike matematiske begrep viser seg å påvirke senere begrepsbilder (Levenson et al., 2007) og kan være en faktor som avgjør hvilke begrepsbilder elevene får for ulike begreper og som de velger å holde seg til. Praktiskbaserte forklaringer i introduksjonen av begrep i skolen kan dermed gi både muligheter og være til hinder for elever (Levenson et al., 2007). Den variasjonen av resultater som vist til hos de tre forskningene presentert (Levenson, 2010; Levenson et al., 2006; Levenson et al., 2007) peker på at innen rammeverket for praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer er det store individuelle forskjeller og det er ingen spesielle trender en kan forvente å finne. Elever i alle undersøkelsene (gjennomført i Israel) viser at de behersker både praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer som gjør at de vil kunne variere mellom å benytte seg av begge typene.

2.5 Visuelle hjelpemidler, konkreter og kontekster som del av forklaringer

Kommunikasjonen som er påkrevd for at noe skal kunne betegnes som en forklaring kan ha mange ulike former. Botten (2009) hevder at matematisk språk har et eget ordforråd som for eksempel kan være navn på tall eller geometriske former, som er ord som skiller seg fra et mer dagligdags ordforråd. Matematisk språk kan være formidlet gjennom lyder, ord, illustrasjoner, bilder, konkreter, eller en kombinasjon av flere uttrykksmåter (Botten, 2009). For å ha et rikt ordforråd som en del av det matematiske språket er det ikke tilstrekkelig å bare kjenne til ordene, men også kjenne begrepet som er knyttet til ordene (Botten, 2009). Som eksempel kan en elev kjenne ordet partall, men trenger nødvendigvis ikke å kjenne til begrepet som ligger i ordet. Om en ikke kjenner begrepet partall som hører til ordet vil en ikke kunne bruke ordet på sin rette plass. Begrepet som er knyttet til ordet kan en uttrykke ved hjelp av ulike uttrykksmåter i det matematiske språket (Botten, 2009) og ulike uttrykksmåter eller kombinasjoner av disse vil avgjøre hvorvidt en forklaring er praktiskbasert eller matematikkbasert ut fra forklaringens form ved at visuelle hjelpemidler og konkreter er uttrykksmåter som er praktiskbaserte.

Bruk av visuelle hjelpemidler, konkreter og/eller kontekster er ikke alltid verktøy som nødvendigvis er til hjelp. Ulike forskere har ulike meninger og resultater knyttet opp mot dette og kommer med varierte anbefalinger vedrørende bruk av praktiskbaserte elementer i forklaringer og i undervisning generelt. Wu (1999) argumenterer for, innen konteksten divisjon av brøk, viktigheten av å variere hvordan en tilnærmer seg løsning av matematiske problemer, slik at en ikke bare benytter seg av visuelle hjelpemidler. Han mener at en tilnærming med visuelle hjelpemidler kan være passende som en innledning til ulike tema og for løsning av enklere problemer, men at elever må erfare og lære seg å løse problemer ved hjelp av en mer matematisk tilnærming (Wu, 1999). Ikke alle problemer kan visualiseres innen matematikken på en hensiktsmessig måte, men mange kan. Dette gjør at Wu (1999) ikke er mot bruk av visuelle hjelpemidler i forklaringer, men mener at de kan tjene som en god start og det burde ikke være en tilnærming en benytter seg av hele tiden. Lærere må være beviste på de mulighetene og begrensningene som ligger i ulike visuelle hjelpemidler (Wu, 1999). Hvordan elever oppfatter ulike visuelle hjelpemidler vil være med å påvirke om de greier å bruke det på en hensiktsmessig måte eller ikke i sine forklaringer.

Vedrørende bruk av konkreter diskuterer Hiebert og Carpenter (1992) både positive og negative sider ved å forklare matematiske begreper ved å manipulere med konkrete objekter. Negative sider ved bruk av konkreter kan vise seg når det er stor distanse mellom det konkrete materiellet og de matematiske relasjonene som en ønsker å representere (Hiebert & Carpenter, 1992). Elevene er da ikke i stand til å ta med seg det matematiske begrepet over fra for eksempel muntlig språk til klossene og det matematiske begrepet forsvinner når en prøver å «oversette» det til konkretene. Den positive siden er når denne avstanden er liten og elevenes assosiasjoner til begrepet sammenfaller med en riktig tolkning av det konkrete materiellet (Hiebert & Carpenter, 1992). De er da i stand til å koble relevante funksjoner av materialene til de begrepene som er under utvikling (Hiebert & Carpenter, 1992). Konkretene brukes da til å gi mening til det begrepet som er under utvikling.

Bruk av kontekster har også sine styrker og svakheter. Mack (1995, 2001) har i sine undersøkelser vist at elever er i stand til å bruke sin uformelle kunnskap som utgangspunkt i arbeid mot mer formell matematikk. Den uformelle kunnskapen kan bestå av blant annet hverdagslige eller andre kontekster som elevene er kjent med fra før som de bruker for å gi mening til matematikken de jobber med. Nyabanyaba (1999) viser til at bruk av kontekster fra det virkelige liv er personavhengig og kontekstavhengig. Det som oppfattes som en meningsfylt kontekst for en matematisk situasjon for én person trenger nødvendigvis ikke å oppfattes på samme måte for noen andre (Nyabanyaba, 1999). Dette kan kobles til den avstanden som Hiebert og Carpenter (1992) snakker om ved bruk av konkreter. Om en kontekst ikke sammenfaller med elevens assosiasjon til det matematiske begrepet vil det være vanskelig å koble de matematiske egenskapene til den konteksten som er benyttet. Dette gjør at det vil variere fra person til person hvilken type kontekst de bruker og foretrekker om de velger å bruke kontekstbaserte elementer i det hele tatt.

Dette viser at visuelle hjelpemidler, konkreter og kontekster kan by på mange av de samme mulighetene og utfordringene. Det viktige er at de forstås og tolkes rett av den personen som bruker de og at det gir mening for den enkelte å koble matematiske idéer til noe visuelt fremstilt (Wu, 1999), en konkret manipulering av noen objekter (Hiebert & Carpenter, 1992) eller en referanse til en kjent kontekst (Mack, 1995, 2001; Nyabanyaba, 1999). Alle disse tre formene for praktiskbaserte elementer kommer under den varierte kommunikasjonen som kan betegnes som matematisk språk (Botten, 2009), og som vist til i forskningsresultatene i 2.4.2 (Levenson, 2010; Levenson et al., 2006; Levenson et al., 2007) kan det være ulike utfordringer som kan oppstå rundt bruken av slike praktiskbaserte elementer i forklaringer.

Forklaringer som inneholder slike praktiskbaserte elementer som vist til her vil spesielt vise sin styrke når elever er i stand til å dra nytte av disse elementene på en hensiktsmessig måte. Fuchs et al. (1997) viser i sin undersøkelse at elever har en naturlig tendens til å benytte seg av algoritmiske forklaringer som bare forklarer den handlingssekvensen en går gjennom ved løsningen av et problem. Om elever er i stand til å bruke de praktiskbaserte elementene på en mer generell måte som viser til det matematiske begrepet (for eksempel forklaring via begrep) vil forklaringene kunne vise matematiske egenskaper på lik linje med matematikkbaserte forklaringer, som kan være tett knyttet opp mot den matematiske definisjonen av begrepet. En slik forklaring der praktiskbaserte elementer blir brukt på en mer generell måte kan være på samme form som det Balacheff (1988) kaller for et generisk eksempel og som gjelder som et gyldig bevis i matematikken. Innholdet i en slik forklaring vil være at en viser det matematiske begrepet tydelig ved hjelp av operasjoner eller transformasjoner på et objekt som er en karakteristisk representant for sin klasse (Balacheff, 1988). En forklarer de karakteristiske egenskapene og strukturene for begrepet ved å spille på de praktiskbaserte elementene, og det vil være en hensiktsmessig bruk av visuelle hjelpemidler, konkreter eller kontekster (Hiebert & Carpenter, 1992; Mack, 1995, 2001; Nyabanyaba, 1999; Wu, 1999). Dette viser at slike forklaring kan være spesielle ved at de forklarer enkelte handlingssekvenser en har gått gjennom i løsningen av et problem og de kan være mer generelle ved at de praktiskbaserte elementene kan vise til de grunnleggende strukturene i de matematiske begrepene.

3 Metode

Forskningsspørsmålet mitt for denne undersøkelsen er: Hva kjennetegner forklaringer som er generert av elever i 4. klasse, og er det sammenheng mellom forklaringene de genererer og forklaringene de foretrekker? For å kunne svare på dette spørsmålet er jeg avhengig av et datamateriale som gir meg mulighet til å analysere forklaringene som elever gir og dokumentere hvilken type forklaring de foretrekker. Datamaterialet må være av en sånn karakter at jeg har belegg for å si noe om det jeg ønsker å se nærmere på og kunne vise til resultater som betraktes som gyldige. For å oppnå dette ønsker jeg å komme i kontakt med elever som forklarer noe tilknyttet matematikk og dermed velger jeg å dra ut i skolen for å møte elevene. Videre i dette kapittelet vil jeg først presentere et metodisk overblikk innenfor sosial forskning og innen intervjustudier før jeg viser til de metodiske valgene jeg har tatt. Jeg vil beskrive hvordan jeg har gjennomført datainnsamlingen min før jeg beskriver hvordan datamaterialet analyseres. Undersøkelsens gyldighet og pålitelighet vil bli drøftet før jeg reflekterer rundt etiske betraktninger og svakheter som metoden jeg benytter meg av kan ha.

3.1 Metodisk overblikk

3.1.1 Ulike retninger og deres generaliseringsmuligheter

Ved å gå ut i skolen for å møte elever tar jeg et valg som plasserer meg innenfor sosial forskning. Innenfor den sosiale forskningen er det to tilnærminger som har hvert sitt sett med filosofiske antakelser. Disse to er den subjektivistiske tilnærmingen og den objektivistiske tilnærmingen (Cohen, Manion, & Morrison, 2011). Burrell og Morgan (1979), i Cohen et al. (2011), har beskrevet de filosofiske antakelsene som ligger til grunn for de to ulike retningene. De filosofiske antakelsene som ligger til grunn for det subjektivistiske forskningsparadigme er at virkeligheten blir konstruert av den enkelte som deltar i situasjonen og det gjør at virkeligheten er kompleks og i stadig forandring (Cohen et al., 2011). Dette gjør at det finnes mange virkeligheter, da ulike personer konstruerer sin virkelighet ut fra situasjonen en deltar i. Videre ser en på kunnskap som noe som blir konstruert i møtet mellom forsker og forskningsdeltaker - kunnskap er personlig, subjektiv og unik (Cohen et al., 2011). En ser mennesker som initiativtakere for deres egne handlinger med en fri vilje og kreativitet som produserer deres egne omgivelser, og som forsker ønsker en å forstå enkelthendelser og hva som kan ligge til grunn for disse hendelsene (Cohen et al., 2011). Innen det objektivistiske paradigme ser en på det som at objekter har en selvstendig eksistens og er ikke avhengig av den eller de som kjenner det (Cohen et al., 2011). Kunnskap fremstår som noe hardt, objektivt og håndgripelig som ligger der ute for å bli oppdaget. Mennesker responderer mekanisk og deterministisk til deres miljøer, det vil si som produkter av omgivelsene (Cohen et al., 2011). Som forsker ønsker en innen dette paradigme å stadfeste lovmessigheter og gi generelle beskrivelser av ulike hendelser (Cohen et al., 2011).

Typisk for subjektivistisk forskning er kvalitative studier mens innenfor den objektivistiske retningen snakker en ofte om kvantitative studier. En kvalitativ studie er kjennetegnet ved at man fokuserer på fenomener og prosesser og en prøver å nærme seg en dyp forståelse, ofte gjennom en lite utvalg mennesker (Bjørndal, 2009; Kvale & Brinkmann, 2009; Postholm & Jacobsen, 2011). Som beskrevet for den subjektivistiske tilnærmingen ønsker forskeren å forstå den virkeligheten som personer konstruerer i en gitt situasjon. I kvalitativ forskning er forskeren helt sentral og ofte sett på som det viktigste instrumentet (Nilssen, 2012). Dette er fordi forskeren ofte selv er den som konstruerer datamaterialet, analyserer det og tolker analysene som blir gjort. Når forskeren spiller en rolle i konstruksjonen av datamaterialet har en mulighet til å respondere og tilpasse seg situasjoner som oppstår og sjansen for at meningsfull informasjon kan samles inn kan maksimeres ut fra dette (Nilssen, 2012). Kvantitative studier er mer opptatt av tallfesting av hendelser og datamaterialet er ofte stort for å kunne generalisere ut fra et representativt utvalg (Bjørndal, 2009), som sammenfaller med den objektivistiske tilnærmingen hvor en ønsker å stadfeste lovmessigheter og gi generelle beskrivelser.

Valg av retning spiller en rolle på hvilke generaliseringsmuligheter en får ut av en undersøkelse. Innen subjektivistisk forskning vil en ikke kunne dra slutninger som gjelder for flere enn de som er involvert i forskningen (Nilssen, 2012). Kunnskap blir konstruert i forskningssituasjonen og vil være unikt for de som deltar i situasjonen (Nilssen, 2012). Forskerens mål er heller ikke å kunne generalisere i en slik undersøkelse, men prøve å komme frem til en forståelse av et fenomen eller en hendelse. Det er viktig å vise gjennomsiktighet som gjør at lesere kan bruke informasjonen om de spesielle tilfellene som har blitt studert til å gjøre en vurdering om hvorvidt funnene vil gjelde for andre lignende hendelser (Denscombe, 2010). Objektivistisk forskning retter seg mer mot det å innhente objektiv data for å kunne si noe om hvordan ting er (Cohen et al., 2011). Forskeren prøver å komme frem til en forståelse av hvordan ting opptrer utover enkelthendelser og dermed kunne generalisere ut fra sin undersøkelse. Tross relativt store forskjeller er ikke disse to retningene motsetninger til hverandre. Kvalitative og kvantitative studier utfyller hverandre og sammen kan de ofte danne det beste bildet av det en vil undersøke (Postholm & Jacobsen, 2011). De kan bidra med ulik type informasjon som kan lede til ytterligere refleksjon og diskusjon av funn innen forskningsfeltet (Postholm & Jacobsen, 2011).

3.1.2 Intervjustudier

For å gi et best mulig svar til forskningsspørsmålet mitt må jeg ha et datamateriale som inneholder flest mulig forklaringer som samtidig har stor variasjon. Et mangfold av forklaringer vil kunne være med å avdekke de ulike typene som kan oppstå og styrke de kategoriene som beskriver kjennetegnene på forklaringer som er generert av elever. Jeg er også avhengig av at elevene velger en forklaring som de foretrekker og gir en begrunnelse for det valget de tar. Observasjon kunne vært en innfallsvinkel til dette. Observasjon er en metode som gir en god mulighet til å se på fenomener der de oppstår naturlig (Denscombe, 2010). En observasjon i klasserommet kan avdekke forklaringer som ville oppstått uavhengig av om undersøkelsen ble gjennomført eller ikke. Poenget er å observere ting slik de normalt opptrer, istedenfor under kunstige forhold (Denscombe, 2010).

Antall forklaringer i en undervisningssituasjon vil variere og variasjonen av ulike typer vil muligens minske. For å sikre meg flest mulig forklaringer med stor variasjon ønsket jeg å kunne stille mange ulike spørsmål til elevene. Jeg ønsket også muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål og be om utdypende kommentarer der det var nødvendig. Når elevene skulle velge forklaring ville jeg også vite hvorfor de foretrakk den ene forklaringen foran de andre. Ut fra disse ønskene fant jeg det mest formålstjenlig å gjennomføre undersøkelsen som en intervjustudie for å få et datamateriale som kan gi et godt svar på forskningsspørsmålet.

Intervju er en utstrakt forskningsmetode innenfor sosial forskning (Cohen et al., 2011). Intervjuet kan stå alene som metode eller benyttes i kombinasjon med andre metoder. Intervju skiller seg fra en dagligdags samtale ved at det har en spesifikk hensikt og er ofte spørsmålsbasert (Cohen et al., 2011). Innenfor denne metoden skiller en mellom tilnærminger som har høy og lav grad av struktur. Samtaleintervju har den laveste graden av struktur og standardiserte intervju med faste svaralternativ har høyst grad av struktur (Bjørndal, 2009). En måte å styre graden av struktur i intervjuet på er ved å benytte seg av en intervjuguide. I samtaleintervju er det åpent for alle parter å styre samtaletemaer, mens i et semistrukturert intervju har intervjueren en klar liste med temaer som en ønsker å ta opp og som intervjuobjektet skal svare på (Bjørndal, 2009; Denscombe, 2010). Likevel er ikke intervjuet detaljstyrt slik at det er fleksibelt til å ta ulike veier med ulike forskningsdeltakere. Strukturerte intervjuer med faste spørsmål uten faste svaralternativer inneholder en enda høyere grad av struktur selv om intervjuobjektet fortsatt har frihet til å svare åpent (Bjørndal, 2009; Denscombe, 2010). Høyest struktur har som nevnt intervjuer der intervjuobjektene skal velge mellom allerede definerte svar og får dermed ikke uttrykt seg med egne ord (Bjørndal, 2009; Denscombe, 2010).

Ulike typer intervju kan gi ulik type datamateriale. En må velge det som best gir svar på det man ønsker å undersøke. Om en ønsker komparativ data, på tvers av mennesker eller på tvers av ulike plasser, benytter en seg ofte av mer standardiserte og kvantitative intervjuer (Cohen et al., 2011). Om en ønsker å tilegne seg unik, ikke-standardisert, personlig informasjon om hvordan individer ser på verden tar en gjerne i bruk kvalitative, åpne og ustrukturerte intervju (Cohen et al., 2011). Dette er ingen fast oppdeling og det er ikke et enten eller spørsmål. Det vil variere hvor mye en svinger den ene eller andre veien ut fra datamaterialet en er ute etter.

Intervjuer kan også inneholde ulikt antall deltakere. Den mest vanlige formen er én-til-én intervju (Denscombe, 2010). En fordel med et slikt intervju er at meninger og syn uttrykt i intervjuet stammer fra én enkelt kilde som gjør det enkelt for forskeren å koble spesifikke idéer til spesifikke personer (Denscombe, 2010). Det er en intervjuform som kan være lettere å kontrollere fordi en bare har én persons tanker en må plukke opp og respondere til og det gjør det lettere å komme gjennom agendaen for en eventuell intervjuguide. Svakheten er at det minimaliserer antall synspunkter og meninger som oppstår i det enkelte intervju (Denscombe, 2010). En får bare sett én side av saken. Denne svakheten kan løses ved å gjennomføre gruppeintervjuer. Gjennomføringen av intervjuet kan være relativt likt de individuelle intervjuene, men en vil få flere responser til hvert enkelt spørsmål (Denscombe, 2010). Ved å øke antallet deltakere involvert kan en også øke muligheten for å nærme seg et mer representativt utvalg (Denscombe, 2010). Et alternativ til denne gjennomføringsmåten er at en også kan fokusere mer på gruppen som helhet i intervjuet (Denscombe, 2010). En kan da få responser fra elevene som en del av gruppen istedenfor som svar fra enkeltindivider som deltar i det samme intervjuet. Gruppediskusjonen tillater deltakerne å lytte til hverandres ulike poenger og en kan da støtte noen synspunkter og/eller utfordre noen synspunkter (Denscombe, 2010).

Klima for intervjuet vil være avgjørende for resultatet av intervjuet. Faktorer som spiller inn kan være personer, tidspress og andre forstyrrende elementer (Bjørndal, 2009). Hvordan intervjuobjektet opplever intervjueren som person har vist seg å spille inn på hvordan de svarer på spørsmål, som gjør at datamaterialet er påvirket av den personlige identiteten til forskeren (Denscombe, 2010). Dette gjelder både for intervju der intervjuer og intervjuobjekt sitter sammen og for andre typer intervju som for eksempel internettintervju (Denscombe, 2010). Det er intervjuobjektets oppfatning av intervjueren som er avgjørende. En måte en kan tilnærme seg dette er å formidle ovenfor intervjuobjektet en grunnholdning om at du respekterer den som blir intervjuet (Bjørndal, 2009). En må vise at en er interessert i det som intervjuobjektet har å komme med. Spesielt i intervju der en sitter sammen kan en gi små verbale uttrykk eller aktivt bruke kroppsspråk for å vise god grunnholdning (Bjørndal, 2009).

Registrering av informasjonen som kommer frem i et intervju kan gjøres på ulike måter. Det å basere seg på hukommelse er ikke anbefalt, da menneskers evne til å huske ikke er til å stole på som et forskningsinstrument og en bør bruke en mer permanent dokumenteringsteknikk (Denscombe, 2010). Opptak vil fange opp alt som blir sagt og en vil få mulighet til å transkribere slik at en kan lett gå over intervjuet flere ganger (Bjørndal, 2009). Lyd fanger fint opp tale, men fanger ikke opp nonverbal kommunikasjon. Om en vil registrere en slik type kommunikasjonsform i tillegg burde en benytte seg av videoopptak (Bjørndal, 2009; Denscombe, 2010). I tillegg til opptaksmuligheter er feltnotater en måte å gjøre det på. Enten er notatene registreringsverktøy alene eller så kan det kombineres med opptak. Notater kan ofte alene bli mer unøyaktig og ufullstendig enn opptak, men styrken til slike notater er at det kan fremstå som mindre truende på den som intervjues selv om en omfattende notering likevel kan forstyrre dialogen (Bjørndal, 2009). En omfattende notering kan oppleves som at intervjueren ikke er «til stede» i samtalen, som er en av styrkene med å bruke opptak alene eller i kombinasjon med notering (Bjørndal, 2009). En generell trend er at det i samtalepreget eller ustrukturerte intervju er en større sjanse for en omfattende notering enn i mer strukturerte intervjuer (Bjørndal, 2009).

3.2 Metodiske valg

Forklaringer er, som vist i det teoretiske rammeverket, noe som oppstår som et produkt av en handling hvor en person svarer på et spørsmål (Achinstein, 1983). De enkelte konstruerer sine egne svar og dermed sine egne forklaringer. De ulike forklaringene er ikke objekter som har en selvstendig eksistens utover den situasjonen de oppstår og blir generert i. De blir konstruert av den enkelte deltaker og vil være unike for intervjusituasjonen. Kunnskapen som en forklaring kan vise eller lede til er personlig og avhengig av den enkelte forskningsdeltaker (Carpenter et al., 2003; Levenson, 2013), som gjør at ulike intervjuer vil kunne gi ulike svar. Hvilke forklaringer en foretrekker vil også kunne avhenge av situasjonen valget blir tatt i. Det er mulighet for at elever vil foretrekke én type forklaring under intervjuet, men foretrekke en annen forklaring i en annen situasjon. Jeg ønsker å gjennomføre intervjuer hvor jeg kan respondere på de innspillene som dukker opp slik at jeg kan ta fortløpende valg for å få et best mulig datamateriale til å finne svarene jeg leter etter. Jeg må kunne ha mulighet til å variere spørsmålene for å maksimere et mangfold av forklaringer. Dette utgangspunktet plasserer denne undersøkelsen innenfor subjektivistisk forskning (Cohen et al., 2011), og kan dermed sies å være en kvalitativ intervjustudie (Nilssen, 2012) fordi jeg er ute etter å forstå fenomener og søker en dyp forståelse gjennom et lite utvalg forskningsdeltakere.

Dette utgangspunktet har konsekvenser for generaliseringsmulighetene til min undersøkelse. Mine analyser og funn vil ikke være generelle, som gjør at jeg ikke kan dra slutninger utover de deltakerne som deltar i undersøkelsen. Funnene mine er unike for de deltakerne som deltar i situasjonen (Nilssen, 2012). Når jeg i forskningsspørsmålet spør etter hva som kjennetegner forklaringer generert av elever i 4. klasse, spør jeg etter hva som kjennetegner forklaringer for nettopp de 4. klassingene som deltar i mine intervjuer. Det samme gjelder for sammenhengen mellom genererte og foretrukne forklaringer. Hva mine forskningsdeltakere svarer sier ingenting om hva elever i en 4. klasse en annen plass ville svart.

I intervjuene ønsket jeg også å fokusere på enkeltelever for å kunne fange opp og følge opp de forklaringene som de genererte. Jeg ønsket å gjøre dette ved å stille oppfølgingsspørsmål og be om utdypende kommentarer om det var uklart hva de forklarte. Ved å ha muligheten til å stille ulike forskningsdeltakere ulike spørsmål kan jeg prøve å maksimere variasjonen av forklaringer ved å variere spørsmålene som blir stilt. Det forventes ikke at alle forskningsdeltakerne skal svare det samme som gjør at oppfølgingsspørsmålene ikke vil være like for alle. Når de skulle velge mellom hvilken forklaring de foretrakk ville jeg også ha en liten samtale rundt valget og hva de så på som forskjeller og likheter mellom de valgmulighetene de hadde. Dette var for å best kunne dokumentere hvilke forklaringer de foretrakk og begrunnelsen for valget. Ut fra disse ønskene fant jeg det mest hensiktsmessig å gjennomføre intervjuene individuelt. Individuelle intervju har nettopp den styrken at en har én enkelt kilde å forholde seg til om gangen (Denscombe, 2010), som gjør at en ikke trenger å ta hensyn til andre forskningsdeltakere samtidig når en skal stille oppfølgingsspørsmål eller få utdypende kommentarer. Svakheten ved at slike intervjuer minimaliserer antall synspunkter (Denscombe, 2010) valgte jeg å løse ved å gjennomføre flere individuelle intervju. Jeg ønsket å gjennomføre flest mulig individuelle intervjuer innenfor de rammene som var satt med tanke på tilgang til informanter og samarbeid med skole (utdypes i kapittel 3.3.1).

For å beholde en viss planlagt struktur på intervjuene samtidig som at jeg ønsket muligheten til å respondere på ting som kunne oppstå laget jeg en intervjuguide (se vedlegg 1) som en grunnleggende plan for intervjuet. Dette gir intervjuet en grad av struktur samtidig som det gir frihet til å respondere ulikt til ulike forskningsdeltakere. Dette er en type intervju som betegnes som et semistrukturert intervju (Bjørndal, 2009; Denscombe, 2010). Det er ikke et samtaleintervju og heller ikke et detaljstyrt intervju med faste spørsmål som stilles likt til alle deltakerne i den samme rekkefølgen, men noe som henter kvaliteter fra begge disse ytterpunktene. I intervjuguiden er den noen sentrale tema i en gitt rekkefølge som er likt for alle elevene og det er noen faste spørsmål som alle elevene blir stilt, men ikke nødvendigvis på det samme tidspunktet innenfor hvert tema. Det gir mulighet til å se på forskjeller mellom de ulike forklaringene som er generert ut fra det samme spørsmålet og er en viktig del for å kunne se om det er sammenheng mellom genererte og foretrukne forklaringer. Siden det er forventet at elever skal benytte seg av mange ulike typer forklaringer trenger jeg et likt spørsmål til alle elevene som utgangspunkt for å se om de genererer og foretrekker den samme typen forklaring.

Denne intervjuguiden inneholder fire temaer med noen tilhørende spørsmål. Den inneholdt også hvordan elevene kunne hjelpes om de sto fast og hvordan de eventuelt kunne utfordres videre. Det første temaet tar opp ulike tall og forskningsdeltakerne skal forklare hvorfor disse tallene er partall eller oddetall. Her står elevene fritt til å velge hvordan de skal forklare seg. Dette temaet er tatt med for å se hvilken type forklaring elevene genererer når de ikke får noen føringer. Den andre kategorien omhandler praktiskbaserte forklaringer der elevene skal forklare seg ved hjelp av tegning og/eller klosser slik at det er lett for noen andre å se at et tall er partall eller oddetall. Temaet er tatt med for å få et mangfold blant de praktiskbaserte forklaringene. Det tredje temaet tar opp generelle forklaringer for paritet som ikke er knyttet opp mot spesifikke tall. Dette er for å se hvordan de forklarer seg uten å ha et talleksempel som utgangspunkt. Den siste kategorien er der elevene blir presentert for de fem ulike forklaringene der de skal velge den de foretrekker og gi en begrunnelse for valget.

I et slikt semistrukturert intervju forventet jeg at det skulle komme frem mye informasjon på kort tid. For å kunne vurdere innhold i og beskrive kjennetegnene til ulike forklaringer er det viktig at de blir registrert med stor nøyaktighet for at det skulle gi et bilde av hva som egentlig ble sagt. Jeg ønsket også å være så mye «til stede» (Bjørndal, 2009) i intervjuet som mulig for å få meningsfylte samtaler med elevene og for at de skulle føle at de ble hørt ved å ha min fulle oppmerksomhet. Matematisk språk inneholder flere uttrykksmåter enn bare det muntlige språket (Botten, 2009), og jeg forventet at elevene benyttet seg av både gestikulering, tegning, klosser eller peking. Korrekt ordlyd er også viktig å registrere. For å fange opp både den verbale og nonverbale kommunikasjonen så presist som mulig samtidig som mitt fulle fokus var på eleven valgte jeg å benytte meg av videoopptak. Det registrerer mye informasjon presist, og det gir mulighet til å oppleve intervjuene flere ganger ved å se repriser samtidig som det er mulig å få gode og nøyaktige transkriberinger (Bjørndal, 2009) som jeg behøver for å kunne gå inn i ulike forklaringer for å finne kjennetegn.

3.3 Praktisk gjennomføring

3.3.1 Valg av skole, trinn og forskningsdeltakere

Skolen jeg har gjennomført datainnsamlingen på er en 1.-7.-skole i Nord-Norge. Jeg hadde ingen kriterier for hvilken skole jeg ville ha bortsett fra at de måtte være positive til å la meg gjennomføre datainnsamlingen. To av de fem skolene jeg kontaktet hadde jeg vært innom som vikar den samme høsten som datainnsamlingen fant sted. Én enhetsleder var positiv til min henvendelse og satte meg i kontakt med en lærer som underviste matematikk på 4. trinn. Dette var på en av de skolene jeg hadde vært innom som vikar, men jeg hadde ikke vært innom den aktuelle klassen. Dermed hadde jeg ingen kjennskap til denne klassen fra før av. Klassen besto av seks jenter og 13 gutter. Læreren jeg kom i kontakt med hadde sitt første år med denne klassen.

Jeg ønsket å gjennomføre undersøkelsen på 4. trinn fordi paritet er et matematisk begrep som typisk blir undervist på 1. eller 2. trinn. Dermed forventer jeg at elever på 4. trinn skal ha kunnskap om dette begrepet. Elevenes kjennskap til paritet ble bekreftet av elevenes lærer. Siden det på 4. trinn har gått to til tre år siden paritet mest sannsynlig ble introdusert er tanken at de har god kontroll på det matematiske begrepet som gjør at de i større grad er i stand til å gi mer avanserte forklaringer for det. Elevene har også mest sannsynlig utviklet et bredere matematisk språk i løpet av tre og et halvt år med matematikk på skolen.

For å få stor variasjon av forklaringer som bruker det matematiske begrepet på ulike måter ønsket jeg å intervjue elever som hadde god kjennskap til matematikken og som kunne uttrykke dette tydelig. Noen av temaene i intervjuet omhandler det å gå fra konkrete eksempler til mer abstrakt tenkning. Det å forklare og uttrykke abstrakte matematiske idéer kan være utfordrende og krever at en har kontroll på matematikken som er involvert. Utvalget av forskningsdeltakere ble tatt sammen med elevenes lærer som hadde en formening om deres faglige ståsted. Jeg ønsket elever som han karakteriserte som gjennomsnittlige eller sterke i matematikk. Ved å velge gjennomsnittlige eller sterke elever ser jeg på det som mer sannsynlig at de har god kontroll på matematikken som er involvert slik at de er i stand til å reflektere over og forklare mer abstrakte idéer. Jeg ønsker på ingen måte å uttrykke meg slik at det oppfattes som at jeg tror svakere elever i matematikk ikke ville greid det samme, men energiforbruket ville kanskje ligget andre plasser enn hos de elevene jeg velger til denne undersøkelsen ved at de må forstå matematikken samtidig som de forklarer den. Det ligger også en etisk betraktning i dette valget som utdypes i kapittel 3.6.1. Ut fra ønsket om gjennomsnittlige og sterke elever fra 4. trinn uavhengig av kjønn har jeg gjort et målbevisst utvalg (Cohen et al., 2011). Jeg vet hvilke forskningsdeltakere jeg vil ha ut fra den undersøkelsen jeg skal gjennomføre.

Til denne undersøkelsen har jeg intervjuet seks elever. Jeg ønsket å gjennomføre semistrukturerte intervjuer med så mange elever som mulig innenfor et overkommelig omfang. Slike intervjuer krever god forberedelse og mye etterarbeid (Bjørndal, 2009), så det å intervjue en hel klasse er uoverkommelig for en undersøkelse av denne størrelsen. Seks elever gir meg stor variasjon og mange forklaringer. Det var én time i uken som passet godt til min tilstedeværelse og jeg rakk å intervjue tre elever i løpet av denne timen. Datainnsamlingen foregikk dermed over to uker og jeg fikk en datamengde jeg var fornøyd med.

3.3.2 Gjennomføring av intervjuene

I forkant av intervjuene deltok jeg i én matematikktime i klassen. Dette var for at elevene skulle få se hvem jeg var. Jeg var åpen ovenfor elevene denne dagen at jeg var der for å se hvem de var og for at de skulle få se hvem jeg er. Jeg informerte de også om at jeg kom til å intervjue noen av elevene senere den samme uken. Intensjonen min var ikke å bli kjent med elevene, men at de hadde sett meg før i klasserommet slik at det første møtet mellom forsker og forskningsdeltaker ikke skulle være under selve intervjuet.

Som nevnt i kapittel 3.2 så ble intervjuene gjennomført individuelt. Det ble ordnet et eget rom til intervjuene for å minske forstyrrelser. Det var bare to personer til stede under intervjuene – forsker og forskningsdeltaker. Det var ikke avsatt noen fast tid til hvert intervju, så vi brukte den tiden vi trengte. Disse valgene ble tatt for å minske den påvirkningen forstyrrende elementer kan ha (Bjørndal, 2009). Når det har vist seg at forskningsdeltakerens oppfattelse av forskeren påvirker hvordan de svarer (Denscombe, 2010), ønsket jeg at de skulle få et godt inntrykk av meg som person gjennom den ene matematikktimen jeg var til stede og gjennom å uttrykke en god holdning ovenfor elevene (Bjørndal, 2009). Før intervjuet startet spurte jeg elevene om de husket at de hadde svart på et skjema som handlet om deltakelse til undersøkelsen. Jeg gjentok at elevene ikke trengte å være med om de ikke ville og at de ikke trengte å svare på spørsmål de ikke hadde lyst til å svare på. Jeg presiserte at det var elevenes forklaringer som var fokuset og at de kunne svare hva de ville. Det ville ikke bli fortalt noe til deres matematikklærer hvordan de svarte og ingen svar var verken rett eller galt. Før jeg skrudde på videokameraet poengterte jeg at kameraet var fokusert ned mot bordet, slik at ansiktene til elevene stort sett ikke ble med på filmen i det hele tatt.

Under selve intervjuene ønsket jeg å vise interesse for det elevene hadde å fortelle. Ved å ta tak i og bygge videre på svarene de kom med ville jeg vise at alle svar var gode svar. Elevene skulle til enhver tid ha min fulle oppmerksomhet og jeg skulle gi bekreftende verbale uttrykk eller nikk som viste at jeg forstod hva de sa og fulgte med på deres forklaringer. Det å gi uttrykk som viser at en er interessert i hva elevene forteller er én av flere grep en kan gjøre for å uttrykke at en har en grunnholdning som respekterer den som blir intervjuet (Bjørndal, 2009) og er takknemlig for at de velger å gi av seg selv.

3.4 Analysemetode

3.4.1 Data

Datamaterialet mitt består av de seks gjennomførte intervjuene som det ble tatt videoopptak av. I tillegg til transkriberinger fra disse videoopptakene vil det være med bilder som viser elevenes tegninger der dette er viktig. Det foreligger også skrevne notater fra samtalen med elevenes lærer. Materialet består dermed hovedsakelig av skreven tekst og dokumenter som elevene tegnet på, og betegnes som et narrativt datamateriale (Taylor-Powell & Renner, 2003). Allerede i nedskriving av notater og transkribering av opptak ligger det et element av fortolkning (Bjørndal, 2009), som gjør at ulike forskere kan transkribere på ulike måter. I mine transkripsjoner har jeg prøvd å være så konsekvent i registreringen som mulig for å få nøyaktige transkriberinger.

Når hele undersøkelsen er gjennomført innen det subjektivistiske forskningsparadigme (Cohen et al., 2011), fører det med seg at dette datamaterialet er påvirket av meg som forsker. Dette gjør at andre forskere ville fått et annet datamateriale. På sin måte er hvert enkelt intervju unikt, da det avhenger av både forsker og forskningsdeltaker og begges oppfatning av hverandre (Kvale & Brinkmann, 2009). Selv om det er forskjeller i hvordan forsker og forskningsdeltaker oppfatter hverandre er det seks relativt like intervju. Det er samme alder på elevene, de går i samme klassen, det er det samme matematiske temaet, fokuset for intervjuene er det samme, intervjuguiden er lik og det er de samme fem forklaringene alle elevene skal velge mellom. Det som er ulikt mellom intervjuene er oppfølgingsspørsmålene og etterspørsel etter utdypende kommentarer samt den nevnte oppfattelsen forsker og deltaker har av hverandre. Slike intervju som er like, men likevel kan inneholde ulike elementer, var det jeg ønsket fordi det gir muligheten til å kunne respondere og tilpasse meg etter hvert som intervjuene foregikk (Nilssen, 2012).

3.4.2 Analysemetode

Etter hver dag med intervjuer transkriberte jeg opptakene så fort som mulig for å kunne gjøre det mens jeg enda hadde situasjonene friskt i minne. Alle transkripsjonene ble skrevet ut for å forsøke å få en oversikt over datamaterialet. Det var mange ulike forklaringer innenfor hver transkripsjon så et første forsøk med fargekoder viste seg å komme til kort. Utfordringen var at det ble vanskelig å sortere og kategorisere forklaringer på en ryddig måte når det var stort mangfold innad i transkripsjonene. Å legge til skriftlige stikkord i marger hjalp heller ikke på dette. For å kunne få den oversikten og sorteringsmuligheten som jeg ønskte måtte jeg gå vekk fra å holde transkriberingene separert fra hverandre. Dette gir ikke noe tap av datamateriale siden forklaringene blir analysert uavhengig av hvem som forklarer. Jeg valgte å klippe i stykker transkripsjonene slik at jeg fysisk kunne sortere ulike typer forklaringer hver for seg for å kunne analysere de enkelte typene forklaring som var like. Nilssen (2012) skriver følgende: «Taylor og Bogdan (1998) hevder at det er nyttig å sortere materialet på så mange ulike måter som mulig» (Nilssen, 2012, s. 85). De ulike sorteringene gav meg ulike vinklinger på datamaterialet mitt og jeg måtte prøve meg frem før jeg fant en sortering som ga meg mulighet til å svare på forskningsspørsmålet mitt på best mulig måte.

I analysen ønsker jeg å se videre på de praktiskbaserte og matematikkbaserte kategoriene for forklaringer som er utviklet av Levenson et al. (2006). Disse to kategoriene er utviklet og benyttet i mange ulike kontekster som gjør at de fremstår som solide. Forskningen rundt disse kategoriene har foregått i skoler i Israel, som gjør at jeg ønsker å se videre på de i en norsk kontekst. Selv om kategoriene er veldefinerte og mye forsket på er det ikke en selvfølge at de vil gjelde for elever i norsk skole. Dette gjør at det er interessant å se om de vil kunne brukes til å beskrive forklaringene blant norske elever og se nærmere på hva som er innholdet i forklaringer innen de to kategoriene. Dermed ble disse to kategoriene en naturlig første todeling av datamaterialet mitt.

Videre ønsket jeg å se om noen av de andre kategoriene beskrevet i kapittel 2.3 ville kunne beskrive forklaringene innenfor kategoriene praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer. Jeg har tidligere presentert et bredt spekter av kategorier som har både likheter og ulikheter. Jeg ønsker å bygge analysen min på tidligere forskning så lenge det foreligger forskningsresultater som egner seg til å beskrive kjennetegnene til elevenes forklaringer. De fleste av kategoriene i kapittel 2.3 er utledet i andre matematiske kontekster enn paritet, som gjør at dette kan være kategorier som muligens kan vise seg å gjelde for flere matematiske tema. Jeg ønsker å bygge videre på det andre har funnet ut før meg slik at jeg kan være med å drive kunnskapen videre fra det som allerede foreligger innen forskningsfeltet. I analysen vil jeg vise til hvilke kategorier fra teorien jeg benyttet meg av og hvilke trender jeg fant i materialet utover disse teoribaserte kategoriene.

For å svare på forskningsspørsmålet trenger jeg verktøy som gjør at jeg kan danne kategorier som kjennetegner forklaringene. Om tidligere kategorier fra annen forskning ikke er tilstrekkelige vil jeg ha muligheten til å danne egne kategorier eller underkategorier som beskriver kjennetegnene godt. Ved å benytte meg av analysemetoden «directed contet analysis» (Hsieh & Shannon, 2005) oppfylles dette ønsket og det er en analysemetode jeg mener er den beste til å finne de svarene jeg ønsker. En av de største styrkene til en slik analyse er at nåværende teorier kan bli støttet og utviklet videre (Hsieh & Shannon, 2005). Den teoribaserte kategoriseringen av datamaterialet er deduktiv (Nilssen, 2012), som vil si at en tester tidligere teorier på datamaterialet for å se om det kan gi svar på forskningsspørsmålet. Den åpne delen av analysen hvor jeg går mer åpent inn for å finne egne trender utover de teoribaserte kategoriene er induktiv ved at jeg ønsker å utvikle nye idéer som har utgangspunkt i datamaterialet (Nilssen, 2012). For min undersøkelse vil dette være at jeg går åpent inn i datamaterialet uten en forhåndsdefinert kategori der det viser seg at de tidligere kategoriene ikke er tilstrekkelige til å beskrive kjennetegn eller der hvor de ikke fanger opp nyanser godt nok. Sammen gir den deduktive og induktive tilnærmingen i «directed content analysis» (Hsieh & Shannon, 2005) meg en mulighet til å kunne beskrive *hva som kjennetegner forklaringer som er generert av elever i 4. klasse.*

3.4.3 Forskers påvirkningskraft

Når en går ut som forsker innen det subjektivistiske forskningsparadigme og gjennomfører en kvalitativ studie opptrer man som en fortolkende forsker (Nilssen, 2012). En bringer med seg sine egne fordommer og forforståelser som er påvirket av det teoretiske rammeverket, erfaringer, kunnskap, forskningsfilosofi og holdninger (Nilssen, 2012). Dette gjelder for hele undersøkelsen og ikke bare den kommende analysen. Det teorien jeg har presentert i kapittel 2 vil være min personlige tolkning av teorien. Som vist i kapittel 3.4.1 er datamaterialet delvis skapt av meg som forsker og analysene vil være analyser av mitt skapte datamateriale ut fra min tolkning av teorien. Like viktig som å beskrive denne forforståelsen, er det det å være bevisst på at forforståelsen er noe som ligger under huden på den kvalitative forskeren (Nilssen, 2012). I en undersøkelsesprosess som dette utvikles sannhet og forståelse mellom tolker og tekst. Dette kjennetegnes av en hermeneutisk tilnærming der det ikke finnes noen egentlig sannhet og at fenomener kan forstås på ulike måter (Nilssen, 2012).

3.5 Gyldighet og pålitelighet

Siden det i en slik forskning ikke finnes en endelig virkelighet er det viktig at en som forsker er i stand til å reflektere rundt styrker og svakheter knyttet til den informasjonen som er samlet inn og behandlet. Denne refleksjonen deles i to deler som en ikke kan gi entydige svar på, henholdsvis gyldighet og pålitelighet (Postholm & Jacobsen, 2011). Åpen refleksjon rundt disse er viktig for å vise hvilke avveiinger og valg som er tatt. Som forsker må en også vise ovenfor leser at funnene er troverdige og i tråd med datamaterialet som er samlet inn (Nilssen, 2012).

Gyldighet handler om hvor gyldige funnene og resultatene er (Postholm & Jacobsen, 2011). En må ha dekning i datamaterialet for de tolkningene som en gjør og de funnene som en kommer frem til. I min undersøkelse vil jeg behandle dette ved at jeg vil referere til og dra inn elementer fra datamaterialet for å vise hva som er bakgrunnen for mine funn og begrunne mine analyser ut fra dette. Det er for å vise hvordan jeg har kommet frem til disse funnene og som leser vil en få mulighet til å selv vurdere hvor gyldige de er. Også i resultat- og diskusjonskapittelet vil jeg henvise tilbake til analysen for å vise hvilke analyser som leder meg til mine funn. Dette er det som kalles indre gyldighet (Postholm & Jacobsen, 2011).

Ytre gyldighet handler om hvorvidt en kan generalisere funnene og si at det vil gjelde for grupper som ikke har blitt studert (Postholm & Jacobsen, 2011). Dette gjenspeiler det jeg tok opp i kapittel 3.1.1 om ulike studiers generaliseringsmuligheter. Subjektivistisk forskning innebærer at virkeligheten og kunnskapen er skapt i møtet mellom forsker og forskningsdeltaker (Cohen et al., 2011). Viktig her blir å vise gjennomsiktighet (Denscombe, 2010) slik at en som leser kan bruke informasjonen og valgene som jeg presenterer om det spesielle til å vurdere hvorvidt mine analyser og funn vil gjelde for andre lignende hendelser som en ønsker å overføre resultatene til.

Datamaterialets gyldighet er også en faktor som spiller inn. En kan aldri sikre full gyldighet, men i intervjustudier er det likevel teknikker en kan benytte seg av for å øke gyldigheten (Denscombe, 2010). Når datamaterialet består av flere transkriberinger kan en se etter fellestrekk på tvers av transkripsjonene for å se om det er noen elementer som er relativt gjennomgående som kan være med på å bekrefte de enkelte transkripsjonene som mer gyldige. Det øker sannsynligheten for at det forskningsdeltakeren fortalte under intervjuet er trolige svar fra en elev på dette alderstrinnet innen dette temaet (Denscombe, 2010). Mine seks transkripsjoner er relativt lik når det kommer til hva elevene valgte å dele under intervjuene. Dette styrker de enkelte intervjuene ved at informasjonen som ble delt ikke er spesielt avvikende på tvers av forskningsdeltakerne.

Pålitelighet går på om en kan stole på at forskeren har gjort et godt arbeid i forbindelse med undersøkelsen. En skal være ærlig og redelig på hva en har gjort slik at forskere som kommer etter kan gjennomføre en lik studie og komme frem til de samme funnene (Postholm & Jacobsen, 2011). I kvalitative studier er det flere faktorer som påvirker undersøkelsen enn de valgene en tar. Dette gjør at forskningen i stor grad vil avhenge av den som gjennomfører den og de som deltar i den (Denscombe, 2010). En vil dermed ikke kunne finne absolutte funn som alltid vil opptre. Pålitelighet er likevel en del av forskningsarbeidet og dermed vil jeg prøve å være så tydelig som mulig på alle valg som er gjort og gi en ærlig beskrivelse av analyseverktøyene jeg har benyttet meg av og analysens gang.

3.6 Etiske betraktninger og metodekritikk

3.6.1 Etiske betraktninger

Ut fra de valgene jeg har tatt for å få en forskningsmetode som best svarer mitt forskningsspørsmål melder det seg etiske betraktninger som en må vurdere og ta stilling til før en går ut i forskningsfeltet. Som kvalitativ forsker er en avhengig av at andre slipper deg inn i livet sitt og gir av seg selv (Nilssen, 2012). Som gjester i det private rom skal en utøve god oppførsel og følge de etiske kodene (Nilssen, 2012). I Norge har vi en egen komité som har utarbeidet retningslinjer som skal ivareta disse etiske kravene som oppstår i forholdet mellom forsker og forskningsdeltaker (NESH, 2006).

Første steget er å få forskningsdeltakere til å bli med på undersøkelsen. Deltakerne skal ha tilstrekkelig med informasjon om det som angår hans eller hennes deltakelse og som er forståelig fremlagt for han/henne. De skal gis muligheten til å ta et informert og fritt valg (Cohen et al., 2011; Kvale & Brinkmann, 2009; NESH, 2006; Nilssen, 2012). En hovedregel er at barn opp til 15 år skal ha samtykke fra foresatte for å kunne delta i forskning (Nilssen, 2012). Informasjonsskriv og samtykkeerklæring (se vedlegg 2) ble dermed sendt til foresatte der de måtte signere på at de og eleven sammen gav samtykke til deltakelse og at de var klar over at deltakelsen var frivillig og at de når som helst kunne trekke seg fra undersøkelsen uten å måtte begrunne valget.

Det er også søkt til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste for tillatelse til å gjennomføre et prosjekt av dette omfanget. Ut fra innsamlingsteknikk og behandling av sensitiv informasjon ble måten jeg har valgt å løse det på godkjent som er et tegn på en ansvarlig behandling av materialet ut fra gjeldende lover. Informasjonsskrivet og samtykkeerklæringen ble også sendt inn som en del av denne søknaden, slik at det er sikret at elevene og deres foresatte hadde nok og korrekt informasjon til å kunne kan ta et informert og fritt valg.

Bruk av videoopptak kan oppleves som et forstyrrende element for de som blir filmet og det kan være én av flere ting som kan påvirke intervjuet. Derfor må en vurdere noen etiske dilemmaer for å se om videoopptak er den teknikken en ønsker å bruke (Bjørndal, 2009). Noen sentrale poenger som er viktig å vurdere i forhold til registreringen av informasjon er hensikten, grad av krenkelse, lokasjon, omfang, hvordan det gjennomføres og hvordan det brukes og formidles (Bjørndal, 2009). Hensikten med mine intervju var å fokusere på forklaringene til elevene, noe som også ble uttrykt eksplisitt til dem før intervjuene satte i gang. Jeg vurderte at intervjuene inneholdt en lav grad av krenkelse siden det ikke er noe personlig informasjon som blir delt og om elevene ikke vil svare på spørsmål så slipper de å gjøre det. Intervjuene gjennomføres på et eget rom slik at det ikke vil være noen andre til stede som kan høre eller se hva vi gjør og snakker om. Omfanget av hvert intervju er nokså lavt, da de anslås til å vare mellom 15-20 minutter hver. Når kameraet er slått av etter intervjuet skal jeg snakke med elevene om hvordan de synes det var å bli filmet og de får muligheten til å stille spørsmål om de ønsker det. Bruken og formidlingen var begge innlemmet i søknaden til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste. Ut fra disse betraktningene anser jeg det som etisk forsvarlig å bruke videoopptak i min undersøkelse for å kunne best mulig dokumentere det datamaterialet som jeg ønsker for å gi svar på forskningsspørsmålet.

Svake elever ble ikke tatt med i denne undersøkelsen fordi det var trolig at de ikke ville gi et like stort mangfold av forklaringer. Svake elever kjenner kanskje ikke til eller er trygge på de matematiske egenskapene som vil kunne minske variasjonen. Like viktig er hensynet om at det er ubehagelig for en person å bli spurt mange spørsmål rundt noe en er usikker på. Et sentralt punkt innen etiske vurderinger er at forskningsdeltakere ikke skal komme ut av undersøkelsen i en dårlige forfatning enn da de takket ja til å delta (NESH, 2006; Nilssen, 2012). Ved å spørre elever om ting de er usikre på kan de ende opp med å gå ut av intervjuet med en dårlig selvfølelse om de føler at de ikke var i stand til å gi gode svar. Selv om jeg vil miste data som tar for seg hvordan svakere elever i matematikk forklarer seg, står det etiske prinsippet så sterkt at jeg vurderte det som det riktige valget for min undersøkelse.

3.6.2 Metodekritikk

Jeg dro til skolen for å møte elevene i deres naturlige omgivelser i skolehverdagen. Intervjuene foregikk i et naborom av det som var deres ordinære klasserom, et rom som de var kjent med. Ved å ta elevene ut individuelt for å intervjue de mens jeg tok videoopptak var elevene plassert utenfor en naturlig situasjon i skolen. Jeg var heller ikke lærer på den aktuelle skolen, så for elevene var jeg en ukjent person. Jeg prøvde å minske denne faktoren litt ved å være tilstede i undervisningen en dag i forveien, men én dag er ikke nok til å bli kjent med en klasse og la de bli kjent med meg. En må regne at dette er faktorer som har påvirket datamaterialet som jeg har samlet inn. Selv om dette var ukjente omstendigheter for elevene prøvde jeg så godt jeg kunne å minske slike faktorer ved å fokusere på at elevene følte seg trygge og snakket med de om situasjonen før og etter selve intervjuet (som beskrevet i kapittel 3.3.2). Selv om jeg møter elevene i deres naturlige omgivelser på skolen har jeg ikke sett på forklaringer i de omgivelsene de mest naturlig oppstår i på skolen. Det at forklaringene blir generert i en kunstig situasjon, i motsetning til undervisning, kan være med å påvirke datamaterialet.

Jeg har gjennomført bare seks individuelle intervjuer, som er et lite antall elever i forhold til bestanddelen av 4. klassinger generelt. Som vist til er ikke målet med en studie innen subjektivistisk forskning å dra noen slutninger utover de som deltar i studien (Nilssen, 2012). Jeg har ikke et utvalg av elever som kan sies å være representativt. Ikke bare har jeg lite elever i forhold til den generelle bestanddelen, men jeg har også tatt et valg om å ikke inkludere de elevene som er karakterisert som svake i matematikk. I hvilken grad elevenes lærer har kjennskap til deres matematiske ståsted kan også diskuteres med tanke på at han hadde vært deres lærer i en kort periode. Det gjør at jeg ser på spesielle tilfeller av forklaringer og det gjør at funnene mine i seg selv ikke er generaliserbare, da jeg ikke kan si at jeg har alle typer forklaringer i mitt datamateriale. Jeg har mulighet til å kategorisere det mangfoldet av forklaringer som jeg finner, og disse kategoriene krever mer forskning før en kan si at de er kategorier som vil kunne opptre mer generelt.

Når noen skal forklare noe ønsker en, som nevnt i det teoretiske rammeverket, å klargjøre egenskaper ved sin matematiske tenkning som en ikke tror er innlysende for den det forklares til (Yackel, 2001) og en forsøker å produsere en forståelse ovenfor seg selv eller noen andre (Levenson, 2013; Levenson et al., 2006). Paritet er et kjent begrep for disse elevene og de vet nok at jeg som forsker også kjenner begrepet godt. Hadde de skulle forklart begrepet til noen som ikke kjente til det fra før er det mulig at de hadde valgt å forklare seg på en annen måte enn de gjør ovenfor noen som de tror kjenner begrepet. Dette vil trolig spille inn på forklaringene som elevene gir i denne undersøkelsen ved at elever er bevisste på hvem som er mottakeren og hvilken kontekst forklaringene er generert innen.

4 Analyse

Utviklingen av kategorier som kjennetegner forklaringer vil bli vist i tre steg. Først vil jeg vise til praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer for å vise og analysere hvordan disse kategoriene blir benyttet i min undersøkelse. Etter det vil jeg se nærmere på de kategoriene presentert i det teoretiske rammeverket for å finne kategorier som best beskriver det som kjennetegner forklaringene i datamaterialet. Det tredje steget vil være å vise eksempler på forklaringer innad i de kategoriene som er dannet etter at en kategorisering av forklaringer er kombinert med de praktiskbaserte og matematikkbaserte kategoriene. I den tredje delen vil jeg også vise til nyanser innad i kategoriene som er kombinert. Dette er nyanser som ikke ble plukket opp av de tidligere kategoriene og er dermed nyanser jeg selv så i datamaterialet mitt utover de teoribaserte kategoriene. I alle de tre stegene av utviklingen av kategorier vil jeg vise til forklaringer i datamaterialet for å bruke elevenes forklaringer til å definere kategoriene. Det vil bli vist både kjerneeksempler og grensetilfeller. Til slutt ser jeg på hvilke forklaringer elevene genererte for 14 som partall og hvilke forklaringer de foretrakk når de fikk velge den de synes var best.

4.1 Praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer

Før jeg går videre inn i eksempler fra praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer må det gjøres noen presiseringer ut fra de opprinnelige kategoriene som er dannet av Levenson et al. (2006). I min analyse vil jeg i stor grad følge den definisjonen av kategoriene som er presentert i kapittel 2.4.1, men med disse presiseringene. For det første bruker noen av elevene hendene sine aktivt i sin forklaring til å gestikulere og presisere muntlige poeng. Siden jeg har benyttet meg av videointervju vil disse bevegelsene bli fanget opp. Selv om de støtter opp om forklaringen med gestikulasjon vurderer jeg ikke dette som et visuelt hjelpemiddel med mindre det er en spesiell bruk av hendene som brukes i forklaringen. Visuelle hjelpemidler vil i utgangspunktet kun være tegning på tilgjengelige ark i denne undersøkelsen. For det andre refererer noen av elevene til noe som kan minne om en kontekst. Eksempel på dette kan være et en elev forklarer at en «deler det i like mange *til hver*.» I slike tilfeller vil dette tolkes som en referanse til en mengde og ikke til en kontekst, så slike referanser er ikke tilstrekkelig for å kategorisere en forklaring som praktiskbasert. Til slutt så har Levenson et al. (2006) kategorisert alle uformelle forklaringer som praktiskbaserte noe jeg ikke kommer til å gjøre. Uformelle forklaringer blir sett på som en egen kategori som det vil bli vist eksempler på i 4.1.2. Grunnen til at de er tatt ut av den praktiskbaserte kategorien er at de bygger på matematisk kunnskap som ikke er gyldig og kan dermed ikke vurderes ut fra innhold som de praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringene. Som det blir vist eksempel på kan også de uformelle forklaringene være både praktiskbaserte og matematikkbasert.

4.1.1 Eksempler på praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer

Det første eksempelet på en forklaring er generert av Tom (T)[1] som forklarer hvordan en kan bruke måten han har bestemt at 14 er et partall på til å finne ut om andre tall er partall eller oddetall:

> **E:** Mm, kan du bruke en sånn måte å forklare på for alle partall?
> **T:** Jeg kan prøve [strekker seg for å hente klosser].
> **E:** Okei.
> **T:** For at … to er et partall [legger frem to klosser], mens én er ikke partall for du kan ikke dele det [viser det med å slå hånden på tvers av klossen]. Men to kan du dele sånn [tar to klosser og skyver de ut til hver sin side].
> **E:** Mm.
> **T:** Og på tre så går det ikke an [legger to klosser til hver sin side (som over) og sitter igjen med én kloss i midten som ikke kan deles]. Sånn.

Her benytter Tom seg av konkreter når han forklarer. Konkretene er veldig sentrale ved at poengene hans blir utdypet ved hjelp av flytting og peking på disse klossene. Forklaringen hans blir rikere ved hjelp av klossene og uten bruken av klosser ville de muntlige ytringene hans være relativt meningsløse i denne sammenhengen. Som vist til i det teoretiske rammeverket er en slik bruk av konkreter en av de sentrale kjennetegnene ved praktiskbaserte forklaringer (Levenson et al., 2006).

En forklaring som inneholder referanse til en kontekst ble generert av Georg (G) som forklarer hvorfor ni er et oddetall. Han sier i forkant av denne forklaringen at ni er et oddetall fordi det ikke kan deles likt. Når han blir spurt om hva som skjer om en deler ulikt svarer han følgende:

> **E:** Hvis jeg deler ni opp i seks og tre da?
> **G:** Da blir det ni, men da blir det dobbelt så mye. Får den andre gutten dobbelt så mye.

Her forklarer han den ulikheten som oppstår ved å relatere seg til en kjent kontekst for å danne et bilde av situasjonen. Bruk av kontekst er et annet kjennetegn som Levenson et al. (2006) viser til som sentral innenfor den praktiskbaserte kategorien. Denne konteksten er med på å hjelpe Georg til å poengtere at det ikke er delt likt, som var det han mente en måtte gjøre for å se om et tall er partall eller oddetall. På denne måten tar han i bruk en kontekst fra hverdagslige

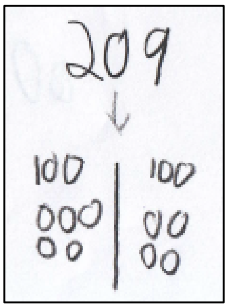
[1] Følgende transkriberingskoder er brukt når utdrag fra dialogene blir presentert:

Alle navn er forkortet til forbokstav (elevene er gitt fiktive navn). E er forsker.
[ ] – beskrivelse av nonverbal kommunikasjon og handlinger som elevene utfører.
( ) – oppklarende kommentarer. Beskriver om elevene avbryter, nøler, lengre pauser eller hva de snakker om der det er uklart.
… – naturlig kort pause.

erfaringer for å forklare seg på en måte som fremhever poenget tydelig i hans syn og som gir mening for han.

En tredje forklaring ble gitt av nevnte Tom som i en senere del av intervjuet skulle forklare ved hjelp av en tegning at 209 er oddetall. Forklaringen er som følger:

> **T:** Fordi det blir 100 på hver side [skriver 100 på hver side av en vertikal strek]. Og så blir det null på hver side. Det blir null (refererer til sifferet 0 i 209, tegner ingenting). Og så blir det ni som blir én, to, tre, fire, fem og så må det bli fire her [tegner fem rundinger under der det står 100 på venstre side av streken og tegner fire rundinger på samme måte på høyre side av streken]



Figur 1: Toms forklaring for 209 som et oddetall

Her er det visuelle bildet (figur 1) som han produserer essensielt for å forstå forklaringen. Ordene alene forklarer ingenting og dermed er det visuelle bildet sentralt for å skape mening ut fra de muntlige ytringene. Han viser med det visuelle bildet at han deler 209 i to separate mengder, men siden det blir mer på den ene siden av streken enn den andre kan det ikke deles likt og må dermed være oddetall. Som ved bruk av konkreter og kontekst er også visuelle hjelpemiddel et sentralt kjennetegn ved den praktiskbaserte kategorien for forklaringer (Levenson et al., 2006)

Aud (A) forklarer hvorfor null er et partall ved å generere følgende forklaring:

> **E:** Et partall? Hvorfor tror du det?
> **A:** Fordi at det blir liksom på en måte like mye til hver selv om det blir ingen til hver, fordi at liksom ingen får … ingen får noe og da blir det jo likt [holder hendene sine til hver sin side på bordet for å vise til to tenkte mengder som er skilt fra hverandre].

Her resonnerer Aud rundt hvordan null kan være et partall. Hun tar utgangspunkt i definisjonen hun har for partall som ser ut til å være at det skal bli likt om en deler mengden i to. Hun bruker hendene til å vise til to tenkte mengder på bordet, men som jeg har presisert så er ikke dette nok til å bli sett på som et visuelt hjelpemiddel. Den muntlige forklaringen til Aud er i seg selv bærende nok til å stå alene som en forklaring for hvorfor null er et partall og dermed er dette en matematikkbasert forklaring. En annen problematikk i forhold til denne forklaringen er ordbruken. Hun refererer til at «ingen får noe.» En slik formulering kan minne om en referanse til en kontekst som omhandler en konkret deling av noe mellom noen, men slike kontekstlignende referanser er ikke alene nok til å gjøre forklaringen praktiskbasert. Det er en forskjell mellom denne referansen og den referansen til kontekst som Georg bruker i forklaringen som er presentert ovenfor som en praktiskbasert forklaring. Denne forklaringen til Aud bygger på den definisjonen hun har for partall og hun resonnerer matematisk som er et kjennetegn ved den matematikkbaserte kategorien til Levenson et al. (2006).

En forklaring som er enda sterkere knyttet opp mot den matematiske definisjonen er Hilde (H) som forklarer hvorfor 14 er et partall:

> **E:** 14. Er det et partall eller oddetall?
> **H:** Partall.
> **E:** Hvorfor det?
> **H:** Fordi man kan dele det på to stykker.

Forskjellen fra den forrige forklaringen presentert (Auds forklaring) er at her er det en tydeligere referanse til definisjonen. At 14 er et partall fordi det kan deles på to viser til definisjonen det ser ut som Hilde har for partall, som er at de kan deles på to uten at en får en rest. Det er de samme matematiske egenskapene som Aud benytter i sin forklaring, men referansen til definisjonen er mer direkte og tydelig i denne forklaringen fra Hilde som gjør at også denne forklaringen er matematikkbasert.

En annen forklaring som baserer seg på matematiske egenskaper er Tom som også forklarer hvorfor 14 er et partall:

> **E:** Er 14 et partall eller et oddetall?
> **T:** Det er et partall.
> **E:** Hvorfor det?
> **T:** Fordi syv pluss syv er 14.

Her benytter han seg av den matematiske egenskapen av at 14 kan deles opp i syv og syv. For en uvitende fremstår ikke dette som en forklaring for hvorfor 14 er et partall, men for Tom sin del gir nok dette mening ut fra intensjonene hans. 14 har for han den egenskapen at det er delelig med to og ved å uttrykke at syv addert med syv er lik 14 mener han at han får frem poenget sitt som er at 14 er et partall. Bruk av tidligere lærte matematiske egenskaper er også ett av de sentrale kjennetegnene ved den matematikkbaserte kategorien (Levenson et al., 2006).

De seks forklaringene presentert er forklaringer som plasserer seg fint innen de praktiskbaserte og matematikkbaserte kategoriene. Eksempel på en forklaring som ligger i grenseland mellom disse to kategoriene er Aud som skal forklare hvorfor syv addert med syv viser at 14 er et partall:

> **E:** Mm. Syv pluss syv er 14. Hvordan viser det at 14 er et partall?
> **A:** Fordi at det er … det kan liksom deles på to like [viser til to tenkte mengder med hendene sine på bordet].
> **E:** Mm.
> **A:** Sånn at det liksom er syv der og syv der [peker med hendene på to tenkte mengder på bordet der hun tidligere hadde mengder med klosser som nå er tatt vekk] og hvis man blander det så blir det 14 [tar hendene sammen fra de to tenkte mengdene på hver side slik at hun viser at hun samler de to tenkte mengdene med syv i hver].

Her bruker hun hendene til å vise med samtidig som hun kommer med muntlige ytringer. Dette er en forklaring som skiller seg fra normal gestikulering som jeg har presisert tidligere. Dette gjør at denne forklaringen er praktiskbasert. Bruken av hender er så visuell at det er med å bygge opp om hele forklaringen hennes. Når hun bruker hendene så tydelig så kunne det like gjerne vært klosser hun brukte istedenfor hendene. Det gjør at denne måten å bruke hendene på som en del av det å forklare seg skiller seg fra den andre forklaringen til Aud som det er vist til tidligere der det er en mildere bruk av hendene som gjør at den er matematikkbasert. Hun sier også «syv der» og «blander» samtidig som hun peker som støtter dette ved at hun tenker på mengder som kunne ligget fremme på bordet. Forklaringer med en så visuell bruk av hendene kombinert med muntlig språk som støtter oppunder denne gestikulasjonen som denne siste forklaringen fra Aud vurderer jeg til å være praktiskbasert forklaring, og skiller seg dermed ut fra den presiseringen som er gjort.

En annen variant av en forklaring som ligger i grenseland mellom å være matematikkbasert og praktiskbasert er Johan (J) som skal forklare hvorfor ni er et oddetall:

> **J:** Tja, man, liksom får ikke like mye på hver side da. Eller delt likt da. Én får mere enn den andre [bruker hendene til å vise til to tenkte mengder på bordet].

Her er det referansene til «like mye på hver side» og spesielt «én får mere enn den andre» som gjør at denne forklaringen lander litt i grenseland mellom kategoriene. Håndbruken er også med på å gjøre en slik type forklaring til noe som kan tolkes i begge retninger. Slike forklaringer blir analysert som matematikkbaserte. Grunnen er at gestikuleringen ikke er så sterk og førende som i den forrige forklaringen som ble presentert og språket er ikke så tett knytt opp til denne gestikuleringen. Forklaringen mister ikke noe substans om en ser vekk fra gestikuleringen. Så milde referanser til noe som kan tenkes til å være en kontekst som det Johan bruker i denne forklaringen kommer inn under presiseringen av kategoriene som nevnt tidligere, og dermed tolkes dette til å være tenkte mengder det refereres til og ikke noen konkrete mengder bestående av klosser eller lignende. Den blir dermed vurdert på samme grunnlag som den første matematikkbaserte forklaringen presentert tidligere der Aud forklarer hvorfor null er et partall.

4.1.2 Uformelle forklaringer

De uformelle forklaringene som er løftet ut av den praktiskbaserte kategorien i min analyse er kjennetegnet ved den presiseringen som vist hos Raman (2002). Forklaringene bygger på elevenes uformelle kunnskap som de tar med seg inn i matematikken og vil bygge på elevenes anelser og intuisjon (Raman, 2002). Det kan være erfaringer og kunnskap som elevene selv har funnet på og gitt mening til, som kan være inspirert fra andre matematiske emner eller andre erfaringer de har. De forsøker å overføre denne uformelle kunnskap til å gjelde paritet, men de relasjonene de bygger mellom ulike typer erfaringer eller kunnskap gir ikke noe mening i denne sammenhengen. Slike forklaringer vil bli kategorisert for seg selv og vil ikke bli analysert med tanke på innhold. Innholdet innenfor praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer vil bli analysert ut fra hvordan elevene benytter seg av matematikken involvert og en analyse av matematiske egenskaper som ikke er gyldige vil ikke gi mye mening. Likevel skal en merke seg at elever kan ha gode intensjoner med slike forklaringer og med rett veiledning kan de hjelpes til å utvikle de videre til å også bygge på gyldige matematiske egenskaper.

Det ble totalt generert åtte uformelle forklaringer. Tre av dem var praktiskbasert og fem av dem matematikkbasert. Eksempel på en praktiskbasert forklaring som er uformell er Johan som skal forklare at 238 er et partall ved hjelp av et visuelt hjelpemiddel. Han forklarer og tegner følgende (figur 2):

J: Mm. Dette blir to … på den ene. Men det blir ikke likt det [skriver et lite 2-tall over 3-tallet]. Men det her kan bli … blir én [skriver et lite 1-tall over 2-tallet i 238, og 4-tall over 8-tallet]. Men dette blir én eller to [peker på 3-tallet igjen].
E: Så … er 238 et partall eller oddetall da?
J: Et partall.
E: Mm. Hvordan …
J: (Avbryter) da må den her bli to (refererer til 2-tallet som er skrevet over 3-tallet i 238).
E: Hva mener du når du skriver to?
J: Hm?
E: Hva mener du når du skriver to?
J: Liksom … det er et partall [peker på enten 8-tallet eller 2-tallet i 238]. For jeg, liksom … når jeg skriver to så er det sånn at det blir to på den ene, men én på den andre (refererer til 2-tallet som er skrevet over 3-tallet i 238).

Figur 2: Johans forklaring av 238 som et partall.

Det Johan gjør i denne forklaringen er å skrive ned tallet han skal dele for så å prøve å dele siffer for siffer. Han starter med tallet på tierplass som ikke kan deles i to. Trolig starter han å si noe om dette tallet fordi han ser at de andre kan deles i to automatisk. To og åtte er kjente tall for elever og de kjenner til at de kan deles i to. Han poengterer at tre-tallet som står på tierplass kan deles i enten én eller to og velger å skrive et to-tall over. Han går så videre til to-tallet på hundrerplassen som han deler i to. Han behandler det ikke som 200, men som sifferet to, som kan deles i én og én. Deretter går han til åtte-tallet på enerplassen og skriver fire over som er halvparten av åtte uten at han sier noe.

Dette er en praktiskbasert uformell forklaring fordi han bruker 238 som et visuelt bilde og ikke som en matematisk notasjon. Han deler tallet siffer for siffer og får dermed problemer når han kommer til tierplass som inneholder et tre-tall. Han greier ikke å dele tre i to og tar ikke høyde for at det faktisk står 30. Hvordan han kommer frem til at det er et partall kommer ikke tydelig frem, og etter at han har bestemt seg for at det er et partall tar han valget om at det skal stå et to-tall over tre-tallet som er problemet han får med dette visuelle bildet. Han forsøker å dele tallet i to som for så vidt er nærliggende begrepet paritet, men handlingssekvensen han gjennomgår når han løser det bygger ikke på lært matematikk eller matematiske prinsipper som er gyldige. Han gir mest sannsynlig denne måten å løse det på mening ut fra andre situasjoner der han har opplevd deling av talls som han har møtt gjennom arbeid med matematikk eller mer hverdagslige situasjoner.

En matematikkbasert uformell forklaring ble generert av Georg som blir utfordret på om det kan komme to partall etter hverandre i tallrekken:

> **G:** Ehm … ja (nølende). Hvis man tar et sånt … hvis man tar … for eksempel 44.
> **E:** Mm?
> **G:** Det blir to partall på rad.

Her forklarer Georg at det kan være to partall etter hverandre og gir eksempelet 44 fordi det består av to partall som kommer etter hverandre. Siden fire og fire er et partall så går dette for 44. Dette er kategorisert som en uformell forklaring fordi det ikke har noe med begrepet paritet å gjøre i denne sammenhengen. Forklaringen bygger ikke på matematiske definisjoner eller egenskaper og ut fra begrepet paritet gir den ingen mening. Slike forklaringer kommer inn under kategorien uformelle forklaringer både innenfor de praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringene.

4.2 Innledende analyse av ulike kategorier

Ut fra de ulike kategoriene som er beskrevet i det teoretiske rammeverket ble det gjort en innledende analyse der ulike kategorier ble prøvd ut på datamaterialet for å se om det var et rammeverk som godt kunne beskrive de forklaringene som elevene hadde generert innenfor de praktiskbaserte og matematikkbaserte kategoriene. Formelle og uformelle forklaringer (Bonotto, 2005; Ginsburg & Seo, 1999; Mack, 1995; Raman, 2002) er et eksempel på en slik analysen som ble gjort. Denne innledende analysen viste til utfordringer som gjorde at de ikke beskrev variasjonen av forklaringer i mitt datamateriale på en god måte. Veldig stor andel av forklaringene havnet i den formelle kategorien som bygger på tidligere lært matematikk. Elevene kjente begrepet paritet godt og dermed spilte de på denne kunnskapen. En utfordring som oppstod ved denne kategoriseringen er at formelle forklaringer er kjennetegnet ved at de er på en «mer konvensjonell form.» Hva som skulle være grensen for konvensjonelt eller ikke ble vanskelig å definere og om noen forklaringer ikke skulle være på en konvensjonell form var de fremdeles ikke uformelle siden de ikke spilte på kunnskap som elevene hadde tatt med seg fra hverdagslige erfaringer. Når nesten alle forklaringene havnet i den ene kategorien beskrev ikke disse to kategoriene mangfoldet av forklaringer på en god måte da det innad i den formelle kategorien var mange ulike forklaringer som hadde ulikt innhold.

Etter en slik innledende analyse ut fra tidligere kategoriseringer var det forklaringer via prosedyre og forklaringer via begrep som viste seg å best beskrive forklaringene i datamaterialet mitt. Disse to kategoriene er satt sammen av flere av de presentert i kapittel 2.3. Forklaringer via prosedyre er blitt beskrevet som pragmatiske forklaringer (Balacheff, 1988; Jones, 2000), forklaringer via kalkulering/algoritme (Bowers & Doerr, 2001; Cobb et al., 2003; Fuchs et al., 1997) og som forklaringer via prosedyre (Perry, 2000; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Forklaringer via begrep er tidligere beskrevet som nettopp forklaringer via begrep (Bowers & Doerr, 2001; Cobb et al., 2003; Fuchs et al., 1997), funksjonelle forklaringer (Perry, 2000) og matematiske forklaringer (Balacheff, 1988; Jones, 2000). Forklaringer via prosedyre inneholder en beskrivelse av stegene en tar når en løser et problem og det er ingen eksplisitt referanse til begrepet involvert. Forklaringer via begrep inneholder en beskrivelse av stegene en tar og er direkte knyttet opp mot den begrepsmessige kunnskapen som eleven er i besittelse av og denne kunnskapen kommer tydelig frem.

Det som gjorde at disse to kategoriene beskrev mangfoldet av forklaringer i datamaterialet bedre er at de ser på hvordan en behandler det matematiske begrepet på en annen måte. Formelle og uformelle forklaringer fokuserer på hvilken kunnskap en har om begrepet. Om en kjenner til det matematiske begrepet godt er det lite tenkelig at en vil forklare noe basert på uformelle forklaringer som bygger mer på anelse og intuisjon. Dette gjør at om en kjenner begrepet vil en oftest benytte seg av formelle forklaringer så lenge de karakteriseres som konvensjonelle nok. Forklaringer via prosedyre og begrep fokuserer på hvordan elevene benytter seg av kunnskap ut fra hvordan de kjenner begrepet. Dermed fanger de opp den variasjonen som viste seg innad i den formelle kategorien der de fleste forklaringene havnet tidligere. Det beskriver bedre variasjonen i de forklaringene som bygger på tidligere lært matematikk. Selv om en kjenner til begrepet så kan en gi både forklaringer via prosedyre og via begrep for de kjente matematiske egenskapene. Figur 3 viser hvordan disse to kategoriene er kombinert sammen med de praktiskbaserte og matematikkbaserte kategoriene.

Forklaring via begrep		
Forklaring via prosedyre		
	Praktiskbasert	**Matematikkbasert**

Figur 3: Kombinasjonen av de fire kategoriene

4.2.1 Forklaring via prosedyre og begrep

Før en inngående analyse av de fire kategoriene som ble dannet ut fra kombinasjonen av kategoriene vil jeg først vise til og analysere noen elevforklaringer som er via prosedyre og begrep uavhengig av om de er praktiskbaserte eller matematikkbaserte. En forklaring for hvorfor 14 er et partall ble gitt av Johan og er som følgende:

> **J:** Ja. Du tar liksom tre … fire ut fra ene siden. Fra begge sider [flytter fire klosser ut til høyre og fire klosser ut til venstre fra mengden som ligger midt på]. Og da er det én, to, tre, fire, fem, seks igjen. Tre fra hver [Drar tre klosser ut til hver side]. Da blir det syv. På hver.

Her forklarer Johan handlingssekvensen han gjør for å løse problemet. Han fordeler klossene i to mengder og avslutter med at det blir syv klosser i hver mengde. Grunnen til at dette er en prosedyrebasert forklaring er at han ikke eksplisitt viser hvordan han benytter seg av den begrepsmessige kunnskapen som han har. Han bruker den begrepsmessige kunnskapen sin på en implisitt måte slik at det er underforstått av denne forklaringen at 14 er et partall fordi det kan deles i to like mengder uten å få en rest. For at denne forklaringen skal bli via begrep så må det matematiske begrepet uttrykkes på en mer eksplisitt måte slik at det er tydelig for den det forklares til hva som er innholdet i det begrepet som han prøver å relatere seg til.

Et annet eksempel er Aud som forklarer hvorfor ni er et oddetall:

> **E:** Hva med ni da?
> **A:** Ehm, er ikke det et oddetall?
> **E:** Mm, det er et oddetall. Hvorfor trodde du at det var et oddetall da?
> **A:** Fordi at det kan ikke deles på to like.

Her bygger forklaringen til Aud på det matematiske begrepet paritet. Hun uttrykker eksplisitt at et tall må være delelig med to uten rest («to like») for å være partall. Siden dette ikke kan gjøres med ni må det være et oddetall. Auds definisjon av begrepet kommer godt frem ved at delelighet med to er en sentral del av begrepet paritet. Dermed er en slik forklaring en forklaring via begrep.

Et grensetilfelle mellom å være forklaring via prosedyre og begrep er Tom som forklarer hvordan en kan bruke klosser til å vise hvordan alle partall ser ut:

> **T:** Ja. Hauger. To hauger like stor. Sånn at den og den er like stor [setter to klosser oppå hverandre og lager to like mengder].

Han forklarer her at alle partall kan deles i to like mengder (hauger) som inneholder det samme antallet klosser. Om det er to eller fem klosser i hver av disse mengdene spiller ingen rolle så lenge antallet er det samme. Ved å referere til to mengder viser han eksplisitt at han har en forståelse av prinsippet paritet og han bruker den kunnskapen til å forklare seg generelt om begrepet. Stegene han tar i løsningen av problemet bygger på den begrepsbaserte kunnskapen som han besitter. Dette er dermed analysert til å være en forklaring via begrep.

En annen forklaring som er problematisk er Georg som forklarer seg rundt pariteten til null:

> **E:** Hva med null? Partall eller oddetall?
> **G:** Det er et oddetall.
> **E:** Hvorfor det?
> **G:** Eller … det er egentlig ikke i noen … i den rekka.
> **E:** Så det er ikke et partall og ikke et oddetall?
> **G:** Vel, det kan ikke deles på, så jeg tror det er et oddetall.
> **E:** Du tror det er et oddetall fordi du ikke kan dele det?
> **G:** Mm.

Først sier han at null er et oddetall før han blir mer usikker på om det i det hele tatt kan kalles for enten partall eller oddetall («ikke i noen … i den rekka»). Etter hvert kommer han frem til at han tror det er et oddetall fordi en ikke kan dele det. Her bygger han i utgangspunktet på sin begrepsmessige kunnskap om at partall er tall som kan deles og oddetall er tall som ikke kan deles. Likevel så beskriver han bare handlingssekvensen som han går gjennom. En kan ikke dele det så det er et oddetall. Han spiller ikke på eller bruker sin begrepsmessige kunnskap like tydelig som de forklaringene vist tidligere. Valgene han tar er ikke eksplisitt begrunnet i den begrepsmessige kunnskapen som han har. Dermed er dette en forklaring via prosedyre.

4.3 Analyse av de kombinerte kategoriene

Forklaring via begrep	**2** (8 forklaringer)	**4** (13 forklaringer)
Forklaring via prosedyre	**1** (28 forklaringer)	**3** (37 forklaringer)
	Praktiskbasert	**Matematikkbasert**

Figur 4: Fordelingen av forklaringer mellom kategoriene

Etter denne firedelingen av datamaterialet viste det seg fortsatt et mangfold av forklaringer innenfor hver kategori. I denne delen av analysen vil jeg vise eksempler på forklaringer innenfor de fire kategoriene. Jeg vil vise nyanser og trender som oppstod innad i hver av de fire kategoriene, som er nyanser jeg fant som ikke de teoribaserte kategoriene fanget opp. Kjerneeksempler og grensetilfeller mellom de fire hovedkategoriene er det vist til i kapittel 4.1.1 og 4.2.1. Hver av de fire kategoriene som er dannet blir behandlet i sine respektive underkapitler der de to praktiskbaserte kategoriene kommer først og er etterfulgt av de to matematikkbaserte. Mellom disse fire kategoriene som er dannet etter kombinasjonen av de to ulike rammeverkene fordelte forklaringene seg noe ujevnt. Kategori 1 (se figur 4) inneholder 28 forklaringer, kategori 2 inneholder åtte forklaringer, kategori 3 inneholder 37 forklaringer og kategori 4 inneholder 13 forklaringer. Dette viser at det ble generert flest forklaringer som forklarer via prosedyren innenfor både den praktiskbaserte og matematikkbaserte kategorien.

4.3.1 Praktiskbaserte forklaringer via prosedyre

Det som kjennetegner forklaringer innen denne kategorien er at de er forklart via en prosedyre som vil si at forklaringen beskriver handlingssekvensen en har gjort for å løse et problem. Det kan være en beskrivelse av prosessen, prosedyren, eller stegene som en tar eller har tatt. I tillegg er forklaringene i denne kategorien praktiskbaserte som vil si at de samtidig benytter seg av visuelle hjelpemidler, konkreter eller bruker konktester fra det virkelige liv. Innen denne kategorien baserer noen forklaringer seg på mye muntlig språk med støtte i for eksempel klosser mens andre bruker så godt som bare klosser eller tegning for å vise hva de mener uten å bruke så mye muntlig språk i tillegg. Dette gir et stort mangfold av forklaringer og innen denne kategorien var det et skille som viste seg. Dette skillet går mellom forklaringer som beskriver og forklaringer som begrunner. Disse to underkategoriene er nyanser som jeg så innad i den teorikombinerte kategorien og er ikke hentet fra andre kategorier som er dannet tidligere.

Det ble generert 22 forklaringer som gir en beskrivelse. Disse forklaringene bygger på at elevene bare beskriver hva de gjør uten å begrunne noen av valgene eller sier noe begrunnende om hva de kom frem til. Forklaringer der elever bare utfører handlinger enten ved bruk av klosser eller ved tegning kommer også innunder denne underkategorien da de heller ikke begrunner valg som blir tatt eller vist i forklaringen. 22 av 28 forklaringer er en stor andel som tyder på at elevene ofte bare utfører en handling eller beskriver utførelsen av handlingen når de benytter seg av praktiskbaserte forklaringer via prosedyre i mitt datamateriale. Det ble generert seks praktiskbaserte forklaringer via prosedyre som begrunner. Disse forklaringene skiller seg fra de som beskriver ved at det også sies noe eksplisitt om de valgene en tar og hva forklaringen viser eller forteller. Disse forklaringene er nærmere det matematiske begrepet enn de som beskriver ved den eksplisitt uttrykte begrunnelsen.

Et eksempel på en forklaring som er praktiskbasert via prosedyre er generert av Fiona (F) som forklarer hvorfor 14 er et partall:

> **F:** (Avbryter) Jeg kan gjøre sånn … hvis jeg tar 14 klosser [starter å ta klosser ut fra boksen og legger de ut midt på bordet]. Så kan jeg liksom ta to hit [drar to klosser til høyre side av bordet], to dit [tar to klosser til venstre side av bordet], to dit [to klosser til høyre], to dit [to klosser til venstre], to dit [to klosser til høyre], to dit [to klosser til venstre], og sånn [deler de to klossene som ligger igjen til hver sin side av bordet. Alle klossene ligger nå på en rekke på hver side av bordet med syv klosser i hver rekke] og da får man … da får man syv på hver rekke.

Her beskriver Fiona bare hva hun gjør samtidig som hun utfører det. Hun flytter klossene fra midten ut til sidene samtidig som hun sier hvor mange hun tar. Hun avslutter med at man får syv på hver rekke når hun har delt det i to på denne måten. Hun gir ingen begrunnelse for hvorfor en kan dele 14 opp på denne måten og hvorfor hun gjør det. Hun beskriver og utfører prosessen hun går gjennom for å løse problemet. Vi får bare innsyn i handlingssekvensen som hun gjennomfører. Dermed er dette en praktiskbasert forklaring via prosedyre som beskriver.

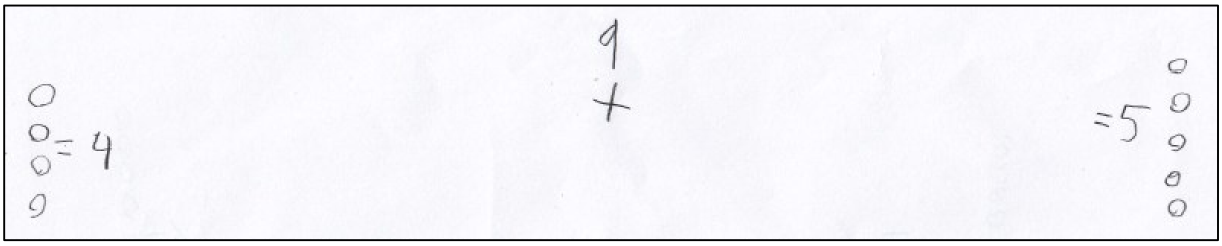
En annen forklaring som kun benytter seg av klossene uten støtte i det muntlige språket, ble gitt av Aud som også skal forklare med en praktiskbasert forklaring hvorfor 14 er et partall:

> **A:** [starter å telle opp klosser og legger de i to separate mengder etter hvert som hun finner de frem] Sånn.

Her teller Aud opp 14 klosser samtidig som hun tar de ut av boksen de ligger i. Uten å si noe som helst legger hun de i to separate mengder med syv i hver. Det muntlige uttrykket viser bare at hun er ferdig med forklaringen sin og har ingen tilknytning til hva hun har gjort. Forklaringen er en ren utførelse av prosedyren hun gjør for å vise at 14 er et partall. For å forstå en slik forklaring er det nødvendig at den det forklares til kjenner til begrepet paritet fra før slik at en har en forståelse for hvorfor en slik deling av klossene kan være en forklaring for hvorfor 14 er et partall. En uvitende person ville nok ikke forstått så mye av en slik forklaring når det bare er en utførelse av en handlingsekvens som er selve forklaringen. Slike handlingssekvenser som Aud gjennomfører her uten å støtte det opp til en annen språkform kommer inn under den beskrivende underkategorien siden hun ikke kommer med en begrunnelse for den handlingssekvensen og de stegene som hun tar.

Et annet eksempel på en praktiskbasert forklaring via prosedyre er Georg som skal forklare hvorfor ni er et oddetall:

> **E:** Hvis du skal lage tallet ni slik at det er lett for andre å se at det er et oddetall?
> **G:** Okei
> **E:** Når noen ser tegningen din … skal den vise at det er et oddetall.
> **G:** Ja, så da kan jeg for eksempel ta … ta … fire i en og fem i en.
> **E:** Mm.
> **G:** Da må det bli sånn da. Så da velger jeg å ta først med fire … siden det er mindre [tegner fire rundinger på venstre side av arket]. Så velger jeg med fem [tegner fem rundinger på arkets høyre side]. Og så gjør jeg bare det samme, så tar jeg å gjør sånn, så sånn [skriver «=4» ved siden av rundingene på venstre side, «=5» ved siden av rundingene på høyre side og skriver «+» midt på arket]. Så ser … da kan man se at disse to tallene ikke er likens [peker på venstresiden der det er fire og høyresiden der det er fem] og at det ikke er like mange her [peker på høyresiden der det er fem].



Figur 5: Georgs forklaring for 9 som et oddetall

Her tegner Georg som en del av forklaringen sin (figur 5). Første delen av forklaringen er lik de forklaringene som har en beskrivelse som vist tidligere ved at han bare sier hva han gjør samtidig som han utfører det. På slutten av forklaringen legger han til hvorfor denne forklaringen viser at ni er et oddetall ved å si at de to mengdene som han har laget ikke er lik fordi det ikke er like mange på hver side. Med denne begrunnelsen på slutten av forklaringen viser han hva han ønsker å oppnå med forklaringen og dermed skiller det seg fra en ren beskrivelse av handlingene som blir uttalt eller gjort. Fra forklaringer som beskriver skiller slike forklaringer seg ut ved at en får en dypere innsikt i hva eleven ønsker å oppnå ved at de eksplisitt uttrykker sine intensjoner med forklaringen.

En forklaring som legger seg i grenseland mellom det å være beskrivende eller begrunnende er Johan som forklarer hvorfor ni er et oddetall. Først så skriver han tallet ni på arket før han i stedet velger å gå over til å bruke klosser:

> **J:** Så kan jeg ta tre derfra [drar tre klosser fra mengden mot seg selv], tre derfra [drar tre klosser oppover slik at de ligger over resten av klossene], to og to [drar to klosser til hver av de to mengdene med tre klosser som han la frem først]. Nei, vent litt, jeg hadde ikke ni, jeg hadde ti. Sånn [tar bort én kloss fra den ene mengden slik at det er fire i en og fem i den andre.] Sånn. Nå har jeg fire på den ene og fem på den andre.

Her starter han med en beskrivelse av stegene han tar samtidig som han utfører dem. Mot slutten av forklaringen sier han at han nå har to mengder med fire i en og fem i en. Det er mulig han implisitt mener at det er en ulikhet mellom de to mengdene som gjør at dette er et oddetall, men han gir likevel ikke en begrunnelse for det. Dette gjør at forklaringen blir kategorisert som en beskrivende forklaring da det ikke foreligger noe eksplisitt uttrykt i forklaringen som fungerer som en begrunnelse enten via muntlig språk eller bruk av klossene som støtter opp rundt beskrivelsen.

4.3.2 Praktiskbaserte forklaringer via begrep

Forklaringene innen denne kategorien er som den forrige, praktiskbasert, men den skiller seg ved at forklaringene er via begrepet som er involvert. Det vil si at en viser til en forståelse av prinsippene som gjelder og at en begrunner de stegene en tar og linker de opp mot den begrepsmessige kunnskapen en besitter. Dermed skiller disse forklaringene seg fra de prosedyrebaserte begrunnende forklaringene ved at selve begrunnelsen må i denne kategorien være eksplisitt forankret i selve prinsippet paritet. Alle forklaringene i denne kategorien relaterer seg dermed til det matematiske begrepet som forklares. Innenfor denne kategorien kombinert av tidligere teori viste det seg to nyanser innad som skilte forklaringene mer nyansert enn det den teoribaserte kategoriseringen kunne fange opp. De to nyansene går på om de praktiskbaserte forklaringene via begrep inneholder et eksempel eller ikke. Noen forklarer mer generelt om prinsippet mens andre bruker eksempler som utgangspunkt for å forklare begrepet.

Innad i de åtte forklaringene som ble generert var fire av forklaringene med eksempel og fire uten eksempel. Forklaringene uten eksempel er forklaringer der elevene snakker mer generelt om paritet. Forklaringene bygger på det matematiske prinsippet som er involvert og disse forklaringene vil gjelde utover flere eksempler. De skiller seg fra forklaringene som inneholder eksempel ved at en ikke har et konkret utgangspunkt som forklaringen baserer seg på.

En praktiskbasert forklaring via begrep ble generert av Fiona som forklarer med klosser hvorfor ni er et oddetall:

> **F:** Da må du ta ni klosser [teller opp ni klosser av de 14 som allerede ligger på bordet og legger de som er til overs tilbake i boksen]. Og da blir det to og to [tar to klosser med hver hånd og skyver til hver side slik at hun tar fire samtidig. Først to til hver side og så to til hver side igjen]. Og da blir det liksom én igjen og den må man liksom dele for å få én til på hver side [flytter den siste klossen frem og tilbake mellom de to rekkene med fire klosser i hver].
> **E:** Mm. Er det sånn for alle oddetall?
> **F:** Ja.

Hun bruker klossene til å vise at hun deler ni i to mengder og blir dermed sittende igjen med én kloss. Som hun sier så blir det én igjen som eventuelt må deles om man skulle fordele den likt på de to mengdene. Hun utdyper poenget sitt med å flytte denne gjenværende klossen frem og tilbake for å vise at den ikke kan plasseres noe sted. Hun får dermed én i rest når hun deler tallet ni med to og denne ene klossen viser at tallet er et oddetall. Hun bekrefter at denne enkelte klossen som blir til overs er noe som vil gjelde for alle oddetall som viser at hun benytter seg av den begrepsmessige kunnskapen hun har for paritet når hun forklarer seg på denne måten. Forklaringen bygger på et spesifikt eksempel som brukes for å forklare et mer generelt prinsipp, og dette eksempelet gjør at forklaringen kommer innunder underkategorien som inneholder eksempel.

Samme elev genererer en annen forklaring der hun forklarer hva som er forskjellen mellom måten hun har benyttet seg av praktiskbaserte forklaringer til å forklare partall og oddetall:

> **E:** Hva er forskjellen mellom måten du har laget partall og oddetall på?
> **F:** På oddetallet blir det liksom en halv, en sånn til hver [fikler med den siste klossen som ligger i midten mellom rekkene] hvis man skal dele den, og på partall der blir det liksom akkurat like mange til hver uten noe sånn deling.

Her forklarer hun at alle oddetall vil få en kloss til overs om man skal dele det i to mengder og at alle partall kan deles likt. Hun uttrykker ikke eksplisitt at man skal dele på to, men dette kommer frem gjennom bruken av klossene. Hun knytter det ikke opp mot spesifikke tall, men snakker mer generelt om begrepet. Ved å dele mengden med klosser i to viser hun at hennes definisjon av paritet inneholder en todeling og det er dette forklaringen bygger på. Ved å ikke knytte forklaringen opp mot konkrete eksempel som vist tidligere, blir dette en mer generell forklaring av begrepet som bygger på prinsippet som er involvert og det er en tankegang som hun viser hvordan vil virke for alle partall og oddetall.

En forklaring som er mer utfordrende å skille fra å ha eksempel eller ikke er Tom som forsøker å forklare om null er et partall eller ikke. I forkant av denne forklaringen har han første benyttet seg av en matematikkbasert forklaring der han korrekt resonnerer seg frem til at null er et partall. Han blir etter det sittende å tenke litt før han forklarer følgende:

> (Lang pause der han sitter og fikler litt med klossene)
> **T:** Hmm, nei det går ikke an [har laget to mengder med to i hver og tar så vekk den ene fra den første mengden og legger den ene fra den andre mengden mellom de to gjenværende]. Null. Det kan du ikke dele på noen plasser [legger hendene sine der han tidligere har laget mengdene, men nå er det ingen klosser der].

Bruken av klosser gjør denne forklaringen praktiskbasert. Tom starter med fire klosser fordelt i to mengder og tar vekk én kloss for å få to separate mengder med én kloss mellom. Han utfører hvordan man går fra partallet fire ned til oddetallet tre. Han sier det ikke går fordi han kan ikke dele null. Han får ikke til en konkret deling når det ikke finnes noen klosser som skal deles. Dermed sier han det motsatte fra den matematikkbaserte forklaringen som han genererte i forkant av denne praktiskbaserte via begrep. Ved å dele klossene og referere til at en ikke kan dele null prøver han å bruke sin definisjon og kunnskap om begrepet paritet i forklaringen. Han løser det ved hjelp av helt konkrete eksempler ved bruk av klossene. Han sier ingenting om hvilke eksempler han bruker, men bevegelsen i klossene viser at han prøver å systematisk gå nedover for å se hvordan det vil være for null. Det er ikke begrepet paritet som gjør at han kommer frem til feil konklusjon, men hans oppfattelse av begrepene null og divisjon. Dette gjør at denne forklaringen blir kategorisert som en praktiskbasert forklaring via begrep med eksempel.

4.3.3 Matematikkbaserte forklaringer via prosedyre

Denne kategorien er matematikkbasert som vil si at forklaringene bygger på matematiske definisjoner eller tidligere lærte matematiske egenskaper. De elementene som er relatert til prosedyren er de samme som for de praktiskbaserte forklaringene, som vil si at en beskriver handlingssekvensen en har gjort når en bygger på de matematiske elementene. Innenfor de matematikkbaserte forklaringene via prosedyre genererte elevene 37 forklaringer. Nyansen som delte forklaringene innad i denne kategorien går på om forklaringene baserer seg på konkrete talleksempel eller ikke. Dette utgjorde et skille innad i denne teorikombinerte kategorien som var fremtredende nok til at jeg vil dele den i to nyanser for å bedre beskrive matematikkbaserte forklaringer via prosedyre. Noen forklarer veldig konkret rundt ett spesifikt talleksempel mens andre forklarer med en beskrivelse som ikke har et konkret talleksempel som utgangspunkt. Innenfor de matematikkbaserte forklaringene der elevene forklarte via prosedyren med talleksempel ble det generert 21 forklaringer av de 37 totalt. Forklaringer som ikke benytter seg av tall som utgangspunkt for forklaringen er der elevene beskriver i større grad prosessen de gjør når de forklarer. Innen denne underkategorien foreligger det 16 forklaringer.

Et eksempel på en forklaring som både er matematikkbasert og via prosedyre er Aud som forklarer at 14 er et partall på følgende måte:

> **E:** 14. Er det et partall eller et oddetall?
> **A:** Jeg tror det er partall.
> **E:** Hvorfor tror du det?
> **A:** For … at … eh … syv pluss syv er 14.

At syv addert med syv blir 14 sier i seg selv veldig lite om pariteten til 14. Hun bruker de matematiske egenskapene hun kjenner til og velger å benytte seg av dette for å forklare hvorfor 14 er et partall. Tallene hun bruker i forklaringen er helt sentral og er det hele forklaringen bygger på. Dette er et veldig tydelig eksempel på hvordan tallene er en sentral del av selve forklaringen siden de er hele forklaringen i dette eksempelet og er dermed et godt eksempel på forklaringer innen den underkategorien som nettopp inneholder eksempler med tall.

En annen forklaring som skiller seg litt fra den foregående er Fiona som i forkant av denne forklaringen har forklart at 14 er et partall fordi det kan deles i to mengder uten at man får en halv. I forkant av den kommende forklaringen blir hun spurt om man kan dele i to uten å få en halv er noe som vil gjelde for alle partall. Hun forklarer følgende:

> **E:** Gjelder det for alle partall?
> **F:** Ja, jeg tror det.
> **E:** Kan du … tror du at du kan dele alle partall i 2 bunker uten å få en halv?
> **F:** Man kan gjøre det på to, man kan gjøre det på fire, så vet jeg at man vertfall kan gjøre det opp til 20.

Hun er sikker på at partall vertfall opp til 20 kan deles på to uten at en får en halv. Dette er ikke en forklaring som tar høyde for noe mer generelt og er dermed veldig konkret for de tallene som hun nevner. Hun forklarer seg ut fra de tallene som hun kjenner og forklaringen bygger på disse tallene. Denne bruken av tall i en forklaring via prosedyre skiller seg fra den forrige presentert som er mer direkte knyttet til de matematiske egenskapene til tallene som blir brukt. Denne forklaringen til Fiona går mer på de erfaringene hun har med de tallene hun bruker og belyser ikke de matematiske egenskapene til disse tallene. Likevel er tallene hun trekker inn sentrale for forklaringen og bygger dermed på talleksempel.

Johan blir spurt om hva et partall er og forklarer det på følgende måte:

J: Det er liksom noe man kan dele … ja, sånn at det blir like mange på hver.
E: Mm.
J: Og da f … ja … ja, man får like mange på hver og da … Oddetall er liksom en mindre da eller en over, så blir liksom sånn annenhver.

Han beskriver mer generelt noe som vil gjelde for alle partall og knytter det dermed ikke direkte til ett eller flere tall som vist i de foregående eksemplene. Han mener at alle partall kan deles slik at det blir like mange på hver, og det vil bli en ulikhet for oddetall. Dette er noe han mener vil gjelde for alle tall, men er ikke tett knyttet opp mot begrepet paritet. Det er nok underforstått i forklaringen fra hans side at når man skal dele det så må det deles på to. For eksempel kan tallet ni deles i tre mengder med tre i hver og ut fra denne forklaringen blir det da like mange på hver når man deler det. Dermed forteller han bare prosessen han gjør for å finne ut om et tall er partall eller ikke uten å knytte det opp mot begrepet på en eksplisitt måte, men det er likevel ikke knyttet til konkrete talleksempel som den andre underkategorien det er vist eksempler til.

En forklaring som kan være vanskelig å skille fra å benytte seg av et talleksempel eller ikke er Fiona som forklarer hvorfor hun tror det er slik at en kan dele alle partall i to (utdyping videre fra den forklaringen presentert ovenfor):

E: Mm. Men tror du at det går på alle tall?
F: Ehm …
E: Alle partall?
F: Ehm … ja, jeg tror det.
E: Hvorfor tror du det?
F: Fordi at … (utydelig tale) … som ikke kan deles … sånn som fem, da blir det liksom en halv, så må … med de andre partallene så tror jeg egentlig at det går an å dele alle.

I denne forklaringen forsøker Fiona å forklare hvordan det vil være for alle partall. Hun gir et eksempel ved oddetallet fem der det blir en halv om en deler det i to og bygger videre på dette til å resonnere seg frem til at for alle de andre tallene så tror hun at partall kan deles likt. Forklaringen inneholder deler fra begge de to underkategoriene som viste seg innenfor den prosedyrebaserte kategorien. Siden tallet fem blir nevnt og er en del av selve resonnementet blir en slik forklaring analysert til å være en matematikkbasert forklaring via prosedyre som inneholder talleksempel.

4.3.4 Matematikkbaserte forklaringer via begrep

Som siste kategori er innholdselementene allerede beskrevet indirekte gjennom definisjonen av de tidligere kategoriene. Forklaringer her knytter de matematiske definisjonene eller egenskapene opp mot den begrepsmessige kunnskapen en har og valgene blir linket til denne kunnskapen. Innen denne kategorien ble det generert 13 forklaringer. Forklaringene viser til en forståelse og bruk av begrepet som forklares. Som vist til ved tidligere kategorier må det være eksplisitte referanser til begrepet som gjør at de kan komme inn under denne kategorien.

Forklaringene bygger på begrepet og viser hvordan begrepet paritet spiller inn på det de ønsker å forklare. Innenfor disse 13 forklaringene oppstod det samme skillet i nyanser som for praktiskbaserte forklaringer via begrep, nemlig forklaringer som inneholder et eksempel og forklaringer som er mer generelle som linker seg til prinsippet involvert.

Fire av forklaringene hadde eksempler som utgangspunkt. Elevene bruker eksempler til å vise begrepet og de bruker det spesielle til å forklare det generelle. Forklaringer uten eksempel ble det generert ni av. Dette er forklaringer som bygger på de matematiske prinsippene som er involvert og elevene bruker sine definisjoner for paritet i forklaringene. Når de ikke inneholder konkrete eksempler blir det mer generelle forklaringer som sier noe om elevenes generelle oppfattelse av begrepet paritet.

En forklaring innen kategorien ble generert av Johan som forklarer hvorfor ni er et oddetall:

> **J:** Oddetall. Eh, ja, man får liksom mer enn den andre, for ti kan deles på fem i hver, siden ni er én mindre så må det være én mindre på en av de.
> **E:** Mm. Kan du gjøre sånn med alle oddetall?
> **J:** Ehh, ja.

Her forklarer han at det blir ulikt mellom to mengder om en skal dele ni. Denne forklaringen kommer i forlengelsen av en sekvens der han har delt klosser, så han refererer tilbake til den delingen han har gjort der han har delt klosser i to mengder. Han gir et eksempel på at om det hadde vært tallet ti han skulle dele så hadde det blitt to like mengder med fem i hver. Når ni er ett tall lavere enn ti så må en ta vekk én fra en av mengdene, noe som vil skape denne ulikheten som gjør at den ene mengden blir større enn den andre. Her benytter han seg av begrepet paritet på de konkrete eksemplene han tar opp og denne forklaringen bygger på det at partall og oddetall kommer annenhver. Ni og ti er konkrete eksempler som er grunnlaget for forklaringen og han beskriver grunnen til stegene han tar ut fra hans begrepsmessige kunnskap.

En annen matematikkbasert forklaring via begrep ble generert av Hilde som forklarer hvorfor 14 er et partall:

> **E:** 14. Er det et partall eller oddetall?
> **H:** Partall.
> **E:** Hvorfor det?
> **H:** Fordi man kan dele det på to stykker.
> **E:** Mm. Hvorfor det da?
> **H:** Fordi da blir det likt på begge.

Denne forklaringen baserer seg bare på matematiske elementer og ingen praktiske elementer. Hilde sier først at 14 er partall fordi det kan deles på to. Dette er en sentral egenskap ved definisjonen av paritet. Når hun utdyper hvorfor det kan deles på to sier hun at det er fordi det blir likt, som bygger videre på denne definisjonen. Det blir ingen rest om en deler partall med to. Hun bruker et generelt språk rundt de matematiske egenskapene og dette kunne vært en forklaring for hvilket som helst partall. Hun forklarer ikke bare hvorfor 14 er et partall, men sier noe om alle partall. Dermed er dette en forklaring via begrepet som ikke baserer seg på et konkret eksempel som den forrige forklaringen presentert.

Et annet eksempel på en forklaring via begrep som belyser prinsippet er Aud som forklarer mer generelt hva partall og oddetall er:

> **A:** Et partall det er … et partall er det man kan dele på to stykker sånn at det blir likt til hver.
> **E:** Mm.
> **A:** Og et oddetall er sånn at den ene får mer enn den andre.

Dette er et kjerneeksempel innenfor denne underkategorien da det er en generell beskrivelse av partall og oddetall som ikke knytter seg opp mot noen konkrete tall. Aud forklarer hva et partall er ved å si at det kan deles på to uten at en får en rest og ved oddetall så vil en få én i rest når en deler med to. Hun spiller tydelig på sin definisjon og oppfattelse av paritet og kan ut fra denne kunnskapen om begrepet komme med en generell forklaring som er prinsipiell i forhold til paritet.

Innenfor underkategoriene innen denne teorikombinerte kategorien skilte forklaringene seg tydelig. Det var ingen tvilseksempler mellom de 13 forklaringene som ble generert. Enten benyttet elevene seg av eksempel i forklaringene sine eller så beskrev de paritet mer generelt. Dermed foreligger det ingen eksempler på forklaringer som ligger i grenseland mellom underkategoriene slik som det gjør i de andre kategoriene.

4.4 Sammenheng mellom elevers genererte og foretrukne forklaringer

Det er intervjuets første og siste del (se intervjuguide, vedlegg 1) som blir benyttet til denne delen av analysen. For 14 som partall genererte alle seks elevene matematikkbaserte forklaringer og i tillegg så genererte Aud en praktiskbasert forklaring. Dette gjør at blant de seks elevene så foreligger det seks matematikkbaserte og én praktiskbasert forklaring når de genererer en forklaring uten noen føringer for 14 som partall. I tilfellet med Aud så starter hun med en matematikkbasert forklaring som hun utdyper med en praktiskbasert, så den innledende forklaringen hennes er også matematikkbasert.

Innenfor de fem forklaringene elevene kunne velge mellom (vedlegg 3) er tre av forklaringene praktiskbasert (forklaring 1, 2 og 3) og to er matematikkbaserte (forklaring 4 og 5). De praktiskbaserte forklaringene inneholder alle tre visuelle bilder. Forklaring 1 og 2 har en kontekst og forklaring 3 bygger i hovedsak bare på det visuelle bildet. Forklaring 1 og 3 inneholder en deling av mengden i to slik at 14 deles i to mengder med syv i hver. Forklaring 2 deler mengden opp i syv mengder med to i hver mengde. Dette gjør at det skiller mellom hvordan de matematiske egenskapene er fremstilt innen de praktiskbaserte forklaringene. Forklaring 4 inneholder divisjon og forklaring 5 bygger på addisjon som gjør at de matematiske egenskapene er ulike også innenfor de to matematikkbaserte forklaringene. Når elevene velger forklaring så kan det være flere grunner for hvorfor de velger som de gjør. Jeg vil vise til hva de uttrykker av styrker med forklaringene, men det kan være flere faktorer som spiller inn. Det kan for eksempel være de visuelle bildene de liker, det kan være de matematiske egenskapene de liker, elevens assosiasjon til begrepet kan spille inn eller det kan være en kombinasjon av dette og andre mulige faktorer. Fokuset for denne delen er likevel praktiskbaserte eller matematikkbaserte forklaringer og så lenge elevene velger mellom en av forklaringene og gir et begrunnet valg vil jeg se på dette i sammenheng med hvilke forklaringer de genererer selv.

4.4.1 Auds valg av forklaring

Aud foretrakk forklaring 3 som er en praktiskbasert forklaring som inneholder et visuelt bilde sammen med tekst som forklarer hva bildet viser. Når hun utdyper valget sitt sier hun:

> **A:** Fordi at man vet liksom at syv pluss syv er 14 og at liksom da kan man dele dem i to like søyler sånn at liksom den ene blir syv og den andre blir syv [peker på søylene samtidig som hun forklarer].

Her begrunner hun valget sitt ved at om man vet at syv addert med syv er 14 kan man dele tallet i to like store søyler som det visuelle bildet i forklaringen viser. Når hun blir utfordret på om denne forklaringen kan brukes til å forklare alle partall sier hun følgende:

> **A:** Eh … hvis det hadde vært et stort så ville de vært veldig høy, men det hadde fortsatt vært likt.
> **E:** Mm.
> **A:** Så det hadde vært et partall da.
> **E:** Mm. Hvis det her hadde vært et oddetall, hvordan ville det sett ut da?
> **A:** Da ville den ene ha vært én større [peker på den ene søylen].
> **E:** Mm.
> **A:** Eller én mindre.
> **E:** Hvis det hadde vært et stort oddetall da?
> **A:** Eh, da ville det ha vært … en helt likens bare at den hadde vært veldig høy.
> **E:** Helt likens?
> **A:** Helt … liksom sånn at … høy bare at det fortsatt er én mindre eller én mer på en av dem.

Hun behandler her det visuelle bildet som et generisk eksempel og sier at søylene ville vært veldig høye, men fortsatt like for alle andre partall. For oddetall så vil de være ulike ved at den ene søylen vil ha én mer eller mindre enn den andre. Det visuelle bildet til forklaringen er viktig for hvorfor hun foretrekker denne forklaringen og hun relaterer bildet til addisjon selv om det ikke er nevnt i forklaringen.

4.4.2 Toms valg av forklaring

Tom velger to forklaringer og gir følgende begrunnelse:

E: Hvilken syns du forklarte best at 14 er et partall?
T: For de minste (snakker om elever) synes jeg det er den [peker på forklaring 3].
E: De minste?
T: De minste ja. For de større så kan det bli de her to [peker på forklaring 4 og 5].
E: 4'ern og 5'ern?
T: Ja.
E: Hvorfor det?
T: Fordi syv pluss syv vet jo alle er 14 og det blir ingen i rest da (snakker om forklaring 5). Og her så er 14 delt på to så det blir ingen i rest heller.
E: Mm. Hva … når du sier mindre elever til den 3'ern, hvilke …
T: (bryter inn) eller jeg synes ikke den er så helt [tar på forklaring 5 med hånden] … jeg synes kanskje det er den best forklarte [peker på forklaring 4] og den [holder hånden på forklaring 3 og peker på forklaring 4 med blyanten].

Han velger forklaring 3 som er praktiskbasert og forklaring 4 som er matematikkbasert. Grunnen til at han velger to er at han mener forklaring 3 passer for de minste elevene og forklaring 4 passer bedre for de som er eldre. Når det gjelder forklaringen for de minste elevene gir han også følgende utdypelse:

T: Der blir det for mindre elever for de kan telle [bruker blyanten til å vise at en kan telle antallet i søylene på forklaring 3] … vertfall opp til 14 vet jeg, for jeg har jo en lillebror selv.

Når en kan telle antallet klosser i de to søylene og med det komme frem til at det er to like som til sammen blir 14, mener Tom at små barn også kan forstå en slik forklaring og ut fra sine erfaringer så kan mindre elever telle vertfall til 14 uten at han utdyper hvilken alder han mener disse elevene kan ha. I begrunnelsen for at forklaring 4 passer for eldre elever relaterer han seg til den matematiske egenskapen til 14 under divisjon med to for å vise hvorfor en slik forklaring er å foretrekke. Det at en ikke får en rest er et sentralt aspekt ved paritet. Forklaring 3 blir dermed foretrukket fordi en kan bruke det visuelle bildet på en konkret måte ved telling og i forklaring 4 er det de matematiske egenskapene ved divisjon og definisjonen til paritet han verdsetter i en slik forklaring.

4.4.3 Georgs valg av forklaring

Georg foretrekker forklaring 1. Begrunnelsen hans for dette valget er som følger:

G: Fordi at det er liksom … mer presis og da kan man … og da er det sånn prikker som det er lett å forstå [peker på de to boksene med prikker i]
E: Mm.
G: Og så … kan man bare også plusse de to [peker på de to boksene med prikker] og så … vet jeg at det blir 14.

Han mener den er mer presis enn de andre fordi det med de prikkene (klinkekuler) er lett å forstå. Han utdyper det videre med at en kan addere de to mengdene som er fordelt i to bokser og han vet da at dette blir 14. Det visuelle bildet som hører til forklaringen er dermed en sentral grunn til hans valg da han synes at det er lett å forstå når det er en så konkret deling i to bokser med prikker i hver boks. Konteksten som står til det visuelle bildet virker ikke å påvirke valget.

4.4.4 Fionas valg av forklaring

Fiona velger forklaring 2 som er praktiskbasert. Dette er en forklaring som er knyttet opp mot en kontekst som er hentet fra skolehverdagen og den har et visuelt bilde som illustrerer konteksten. Grunnen til at Fiona velger nettopp denne forklaring er:

> **F:** Fordi at … når det er liksom tegning til da er det litt sånn lettere å forstå på en måte.
> **E:** Mm. Så du likte godt tegningen som var med?
> **F:** Ja, litt, fordi det er litt lettere å forstå enn sånn skrift

Hun foretrekker en forklaring som inneholder et bilde fordi hun synes det er lettere å forstå enn skrift. Denne forklaringen inneholder både et visuelt bilde og skreven tekst, men hun foretrekker nok slik forklaringer fremfor de med bare tekst som de to matematikkbaserte forklaringene hadde. Som hos Georg er det ikke nevnt noe om den konteksten som var beskrevet og som var utgangspunktet for det visuelle bildet som hun foretrekker.

4.4.5 Hildes valg av forklaring

Hilde gjør som Tom og velger to forklaringer. Hun foretrekker forklaring 1 og forklaring 5:

> **H:** Fordi den var i bokser så man så det lett [peker på forklaring 1] og den var sånn pluss, sånn syv pluss syv og det er ganske lett synes jeg (snakker om forklaring 5).

Grunnen til at Hilde velger den praktiskbaserte forklaringen (forklaring 1) er at når mengden som skal deles er plassert i to bokser så er det lett for henne å se at en kan dele det. Heller ikke hun sier noe om konteksten involvert. Den matematikkbaserte forklaringen (forklaring 5) foretrekker hun fordi hun foretrekker addisjon som matematisk egenskap. Valget av praktiskbasert forklaring spiller på det visuelle som forklaringen bidrar med, mens den matematikkbaserte forklaringen bygger på kjente matematiske egenskaper som gir mening for Hilde til å forklare hvorfor 14 er et partall.

4.4.6 Johans valg av forklaring

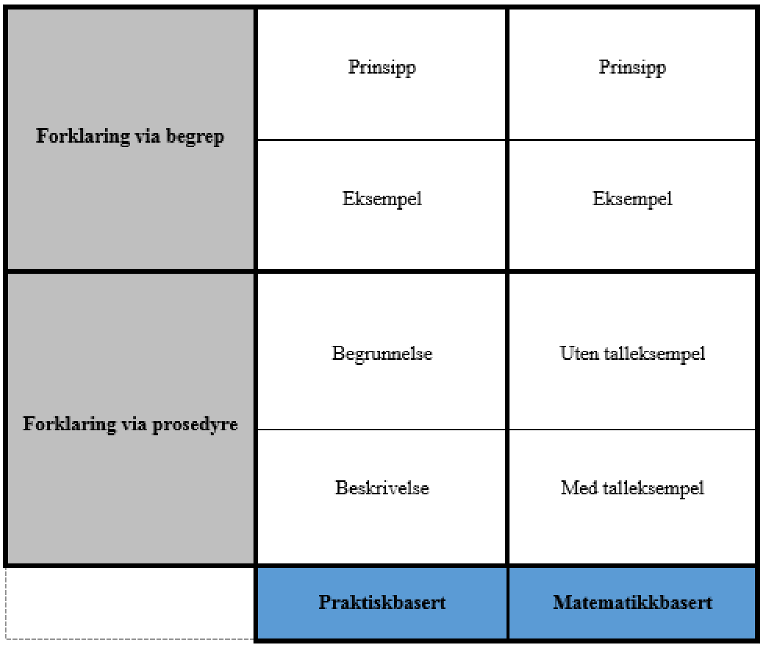
Johan foretrekker forklaring 3 og utdyper det med følgende:

> **J:** For den hadde liksom søyler og hvis den ikke hadde hatt slike søyler så ville det vært en høyere på en av de, eller en lavere.
> **E:** Hvis det ikke var et partall?
> **J:** Ja, da ville jeg … to søyler liksom.

Johan gjør som Aud og relaterer seg til det visuelle bildet som forklaringen inneholder med to søyler som er like høye. Han foretrekker denne fordi like søyler viser at det er et partall og om de hadde vært ulike i form av én mer eller mindre på en av de så ville det vært oddetall. Han er litt uklar i hva han sier i de to ytringene, men jeg analyserer det slik som jeg har beskrevet her. Grunnen er at søylene i det visuelle bildet står tett og er like høye og om en ikke hadde hatt «slike søyler» så ville det blitt ulikt. Jeg vurderer det til at han refererer til bildet og ved å ikke ha slike søyler så menes det at en ikke har to søyler som er like høye. Dermed er det visuelle bildet sentralt i prosessen han gjennomgår når han skal velge en forklaring som han foretrekker. Johan og Aud skiller seg fra Tom som velger forklaring 3 til mindre elever ved at Tom bruker det visuelle bildet til å telle klossene, mens Johan og Aud ser på om søylene er like høye eller ikke.

5 Resultat

5.1 Ulike kategorier som kjennetegner forklaringer



Figur 6: Resultatet fra analysen av ulike kategorier.

Ut fra analysen er det dannet totalt åtte kategorier for forklaringer ut fra det datamaterialet jeg har samlet inn for denne undersøkelsen. De fire hovedkategoriene er dannet fra en kombinasjon av tidligere teoretiske kategoriseringer som bygger på arbeidet til spesielt Levenson et al. (2006) som bidrar med det praktiskbaserte og matematikkbaserte skillet. Den andre sammensetningen av kategorier er fra flere tidligere matematikkdidaktiske forskninger som har en kategorisering for forklaringer via prosedyre og begrep (som vist til i 4.2)

Disse kategoriene beskriver det som kjennetegner forklaringer for paritet fra de 4. klassingene som deltok i min undersøkelse. Underkategoriene innen hver av de fire hovedkategoriene beskriver nyanser på detaljnivå i større grad enn de fire hovedkategoriene som er teorikombinerte. Nyansene har oppstått i analysen av de enkelte kategoriene og var trekk jeg fant etter at datamaterialet var delt i fire. Disse nyansene viste seg så tydelig innad i kategoriene at ved å ta de opp som egne underkategorier fikk jeg mulighet til å beskrive hva som kjennetegner forklaringer generert av elever i større detalj. Slik kategoriene er fremstilt i figur 6 er det en veldig symmetrisk kategorisering av forklaringene. Fire hovedkategorier er delt i to underkategorier hver som til sammen utgjør åtte kategorier totalt. En slik symmetri ble ikke jaktet på fra min side, men oppstod naturlig. I forklaringene via begrep er underkategoriene lik for både praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer. Matematikkbaserte forklaringer via prosedyre er også delt inn i eksempel eller ikke, selv om eksempelbruken er annerledes enn for forklaringene via begrep. Det er praktiskbaserte forklaringer via prosedyre som i størst grad skiller seg med sine to underkategorier som ikke er så tett knyttet til eksempel eller ikke eksempel som de andre kategoriene. Andelen av forklaringer er heller ikke like stor for alle de fire kategoriene og i en kvalitativ intervjustudie som dette kan jeg ikke sikre meg å få alle mulige forklaringer som kan oppstå.

Det som styrker de fire teorikombinerte hovedkategoriene er at de to kategoriseringene som er kombinert er hentet fra tidligere forskning og dermed har vist seg å fungere i andre undersøkelser. Dette gir likevel ikke en sikkerhet for at de vil fungere på alle typer forklaringer som kan genereres i matematikk. Nyansene som er presentert som underkategorier er skiller som viste seg innad i de fire kategoriene og jeg dannet disse underkategoriene for å bedre beskrive de kjennetegnene som viste seg. Grunnlaget for disse underkategoriene er i noen tilfeller ikke så omfattende, da det eksempelvis bare ble generert åtte forklaringer innen den praktiskbaserte kategorien via begrep. Dette gjør det tenkelig at det kan oppstå flere nyanser innad i denne kategorien enn de jeg fant. Et fåtall av slike forklaringer gjør at det er mer usikkert om disse nyansene vil vise seg i andres undersøkelser med andre forskningsdeltakere og innen andre matematiske tema. Dette er et av de sentrale kjennetegnene ved subjektivistisk forskning og en kvalitativ undersøkelse som dette (Nilssen, 2012).

Det som skiller denne undersøkelsen fra arbeidet til Levenson et al. (2006) er spesielt måten de praktiskbaserte og matematikkbaserte kategoriene er behandlet på. Ved å gå nærmere inn i det matematiske innholdet innen hver kategori gir det mulighet til å beskrive noen kategorier som kan tenkes å kunne kategorisere forklaringer utover bare grunnskolen. Levenson et al. (2006) beskriver et ønske om å innføre matematikkbaserte forklaringer tidlig for å forberede elever på den mer formelle matematikken som møter de senere. I dette rammeverket er nettopp slike formelle forklaringer tatt med ved at de kan være både praktiskbaserte og matematikkbaserte. Fokuset på de praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringene er litt annerledes i min undersøkelse og jeg mener denne måten å behandle de på gir de en styrke. I de kategoriene jeg dannet er fokuset både på form og innhold og inkluderer alt fra enkle beskrivelser av prosedyren en har gjennomført til forklaringer som forklarer det matematiske begrepet. Disse kategoriene er ikke en motsetning eller en kritikk av forslagene til Levenson et al. (2006), de viser at også praktiskbaserte forklaringer kan tjene som et godt utgangspunkt for den senere og mer formelle matematikken som elevene møter.

Et valg som måtte gjøres for å danne mer generelle kategorier var å plassere uformelle forklaringer for seg selv og ikke inkludere de i kategorien praktiskbaserte forklaringer som gjort hos Levenson et al. (2006). Det er en kategori for forklaringer som havner litt på siden av disse kategoriene som er dannet fordi de ikke bygger på begrepet paritet og det elevene gjør eller forklarer er ikke matematisk gyldig som gjør forklaringene vanskelige å vurdere. De bygger på intuisjon og anelse (Raman, 2002) ved at de bare prøver ut noe som de tror kan fungere. Så ved å løfte de uformelle forklaringene ut av de praktiskbaserte forklaringene kan en vurdere praktiskbaserte forklaringer på lik linje med de matematikkbaserte. Som vist i kapittel 4.1.2 kan uformelle forklaringer inneholde elementer som både er praktiskbaserte og matematikkbaserte.

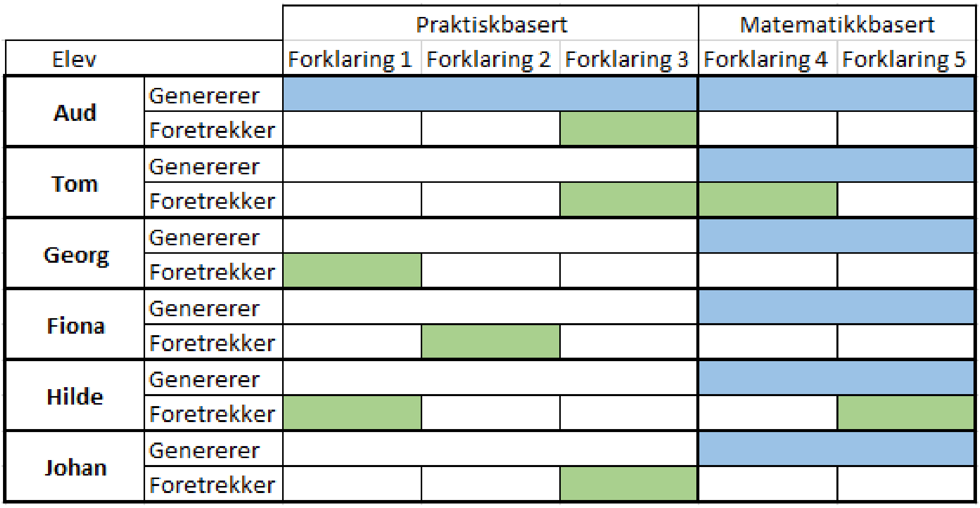
Ved å danne kategorier som fokuserer på både forklaringens form og innhold gir det mulighet til å beskrive forklaringenes kjennetegn ut fra flere kriterier. Det fanger opp flere sider ved forklaringene enn de andre kategoriene for forklaringer presentert tidligere. Innen mine kategorier er ingen kategori for forklaringer overlegen noen av de andre når det kommer til forklaringenes kvalitet. Hvilken forklaring som passer best og som er den mest fruktbare vil blant annet avhenge av hvem som forklarer og hva som forklares (Carpenter et al., 2003; Levenson, 2013) og hvem det forklares til og hvilket spørsmål som blir stilt (Achinstein, 1983; Svennevig, 2013a, 2013b). Dette viser at kontekst og mottakerbevissthet er viktig for den som skal forklare noe og en må ta stilling til hva en ønsker å belyse og hvilke viktige punkter en ønsker å komme innom i forklaringen sin.

Dette bygger på definisjonen til matematiske forklaringer fra Yackel (2001) som sier at en ønsker å klargjøre egenskaper ved sin matematiske tenkning som en tror kanskje ikke er innlysende for den som det forklares til. Hvilke sider av den matematiske tenkningen en ikke tror er innlysende for andre vil påvirke hvilket innhold en ønsker å fokusere på i forklaringen. I min undersøkelse varierte det ikke mellom hvem det ble forklart til og det var ikke variasjon i hvilken kontekst forklaringene ble generert innen. Dette fører med seg at den variasjonen som kan dukke opp i ulike kontekster ikke er fanget opp i min undersøkelse.

5.2 Forholdet mellom genererte og foretrukne forklaringer

Ut fra hvilke forklaringer elevene genererte for 14 som partall og hvilke forklaringer de foretrakk for hvorfor 14 er et partall er det ingen sammenheng som viser at de genererer og foretrekker den samme typen forklaringer. Figur 7 viser om elevene genererte praktiskbaserte eller matematikkbaserte forklaringer og det viser hvilken av de fem forklaringene de foretrakk.

Det analysen av elevenes genererte forklaringer viste er at alle elevene genererte matematikkbaserte forklaringer for å forklare at 14 er et partall. Aud er den eneste som genererte forklaringer av begge typene da hun brukte en praktiskbasert forklaring til å utdype den matematikkbaserte forklaringen som hun genererte i første omgang. Dette viser at elever på 4. trinn i stor grad kjenner til de matematiske egenskapene til paritet slik at de er i stand til å bruke disse matematiske elementene i sine forklaringer.



Figur 7: Sammenheng mellom genererte og foretrukne forklaringer

Alle seks elevene foretrakk en praktiskbasert forklaring. I tillegg foretrakk Tom og Hilde også en matematikkbasert forklaring da de valgte to forklaringer som de synes var best til å forklare at 14 er et partall. Det er ikke noe mønster for hvilken type forklaring elevene foretrakk på tvers av de fem tilgjengelige forklaringene, da alle de tre praktiskbaserte og de to matematikkbaserte ble valgt mellom de seks elevene.

Det at det ikke er en sammenheng mellom hvilke forklaringer elever genererer og foretrekker er et resultat som får støtte i undersøkelsen til Levenson (2010) der hun så på det samme forholdet for 5. klassinger innenfor to matematiske tema. I hennes undersøkelse ble det også generert flere matematikkbaserte forklaringer enn praktiskbaserte. Når det gjaldt hvilke forklaringer elevene foretrakk fant hun ikke noe trend for likeverdige brøker, men for paritet foretrakk flest elever praktiskbaserte forklaringer (Levenson, 2010). I hennes undersøkelse begrunnet elevene valget av praktiskbaserte forklaringer med at de var relaterte til elevenes daglige erfaringer og at de visuelle bildene var sentrale i valget fordi forklaringen ble lettere å forstå (Levenson, 2010). Elevene i min undersøkelse relaterte seg ikke til de kontekstene som forklaringene inneholdt, men satt pris på de visuelle bildene som sto til de praktiskbaserte forklaringene. Om det er de matematiske egenskapene som ligger bak de visuelle bildene som appellerer til elevene eller om det er selve bildet er vanskelig å si noe om. Eksempelvis så relaterer Aud og Johan forklaring 3 til divisjon med to når de velger forklaringen. De ser at søylene med syv i hver er like høye og sier at det må være slik for alle partall. Tom bruker den samme forklaringen til å påpeke at den er passende for det han refererer til som mindre elever fordi den fungerer fint til å telle på og relaterer ikke begrunnelsen sin til divisjon. Dette gjør at elever kan oppfatte ulike visuelle bilder i slike forklaringer ulikt og de bryr seg nødvendigvis ikke så mye om den konteksten som står rundt bildet. Det kan være flere grunner til at de gjør slike valg, men en inngående analyse av bakgrunnen for valgene er ikke fokuset i denne undersøkelsen.

Resultatene til Levenson (2010) er veldig like de resultatene jeg kom frem til gjennom min analyse, som støtter at det ikke er noen sammenheng mellom hvilke forklaringer elever genererer og hvilke forklaringer de foretrekker. Det at funnene ble gjort både i en norsk 4. klasse og i en israelsk 5. klasse (Levenson, 2010) gjør at en ikke kan forvente at det skal være en sammenheng mellom genererte og foretrukne forklaringer på et generelt nivå.

I undersøkelsen til Levenson et al. (2006) vise det seg at elever som forstod de praktiskbaserte forklaringene ikke så på de som gyldige eller akseptable forklaringer for det matematiske temaet de forklarte. Dette er et funn som skiller seg fra min undersøkelse, der det ikke er noen elever som sår tvil rundt de praktiskbaserte forklaringenes gyldighet. Alle elevene foretrekker de praktiskbaserte forklaringene som er et tegn på at de aksepterer disse forklaringene som gode nok til å forklare pariteten til tallet 14.

6 Diskusjon

Det at det er en klar overvekt av forklaringer via prosedyre i forhold til forklaringer via begrep innenfor både de praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringene støtter påstanden til Fuchs et al. (1997), som sier at elever har en naturlig tendens til å ty til algoritmiske forklaringer (forklaringer via prosedyre i min undersøkelse) når de skal generere forklaringer. Fuchs et al. (1997) peker videre på at tidligere forskning har vist at det er en kobling mellom bruk av mer utdypende forklaringer og elevers læring. Dette finner en også hos Perry (2000), som referert til i innledningen, som sier at elever ikke bare må forstå hvorfor en prosedyre virker, men også når prosedyren er anvendelig. Dette viser at forklaringer via begrep er viktige forklaringer, selv om de ikke er overlegen forklaringer via prosedyre når det kommer til kvalitet. Hva med det matematiske begrep en ønsker å belyse vil være viktig for å vurdere hvilken forklaring en skal benytte seg av. En balanse mellom forklaringer via prosedyre og forklaringer via begrep vil nok være mer fruktbart ut fra påstandene til Fuchs et al. (1997) og Perry (2000) om at forklaringene via begrep er viktig med tanke på elevers læring.

Prosedyrebaserte forklaringer kan lede til en dypere kunnskap om paritet på lik linje med begrepsmessige forklaringer. Forklaringer som har en praktiskbasert eller matematikkbasert form vil også belyse ulike elementer på ulike måter. Hva som oppleves som en forklaring som kan utvide en persons kunnskap vil avhenge av hvilken kunnskap denne personen har fra før og hvilken kunnskap en søker. Situasjonen eller konteksten en genererer forklaringen innen vil også spille inn på hvilken forklaring som er den beste for å utvikle kunnskap. Det er viktig at en er i stand til å variere mellom ulike typer forklaringer og vite hva de ulike typene forklaringer kan bidra med av nyttig matematisk informasjon i de gitte situasjonene.

Som også nevnt i innledningen fra Perry (2000) inneholder forklaringer typisk nyttig informasjon om det en ønsker å forklare. Alle forklaringene innen denne sammensatte kategoriseringen, bortsett fra de uformelle forklaringene, inneholder informasjon som belyser paritet på en eller annen måte. Som vist til i analysens resultat så er det flere faktorer som kan spille inn på hvordan en ønsker å fremstille den matematiske tenkningen som en ønsker å vise ovenfor seg selv eller andre. Perry (2000) påstår at om elever hører mange varierte forklaringer for et begrep eller matematisk tema øker sjansen for at en får en god og dyp forståelse for det. Ut fra Perry (2000) sitt utsagn fra et lærerperspektiv sammen med min undersøkelse fra et elevperspektiv kan dette vise at elever kan bruke og utvide sin forståelse av matematiske egenskaper ved å forsøke å bruke ulike elementer og vinklinger i forklaringene sine. Elever må få anledning til å forklare seg ovenfor ulike mottakere innen ulike kontekster for å utforske den variasjonen mellom forklaringer en kan benytte seg av. Gjennom variasjonen av forklaringer kan det de ligge muligheter for en god og dyp forståelse av begrepet.

Det at det nettopp foreligger vesentlig flere forklaringer via prosedyre enn via begrep innenfor både den praktisk- og matematikkbaserte kategorien kan skyldes flere faktorer. Som vist til i kapittel 5.1 er det varierte faktorer som kan spille inn og det vil ofte kunne være individuelle forskjeller. Mange av disse faktorene ligger hos elevene, men det som viser seg fra en lærers ståsted er hvilke spørsmål en stiller. Perry (2000) sier at vi må tilby og kreve at elevene bidrar med det en som lærer mener er tilstrekkelige forklaringer. Da er det viktig at elevene får gode spørsmål som leder til det en vil karakterisere som tilstrekkelige forklaringer som Perry (2000) påpeker må kreves (som en av flere faktorer) for å fremme læring. At et spørsmål er stilt er helt vesentlig for at en person skal inngå i en prosess der en forklarer noe og hvor produktet av handlingen er en forklaring (Achinstein, 1983). Når mange ulike spørsmål kan lede til en forklaring (Achinstein, 1983) er det en naturlig konsekvens at ulike spørsmål kan lede til ulike svar. Når en person skal svare på et spørsmål som er stilt, ønsker en å oppfylle de forventningene som følger med spørsmålet. Det ligger i vår natur å forsøke å oppfylle de forventningene vi føler ligger i et spørsmål som vi skal svare på (Svennevig, 2013a, 2013b).

I tillegg til hvilke spørsmål som er stilt som en påvirkende faktor for hvilke forklaringer elever genererer er hvilke forklaringer elevene har er faringer med og er kjent med faktor som spiller inn. Hvordan elevene er introdusert for et begrep viser seg å påvirke deres oppfattelse av begrepet ved senere anledninger (Levenson, 2013). I et klasserom er det viktig at en fokuserer på prosedyrebaserte elementer så vel som de elementene som relaterer seg til begrepet – med variasjon mellom praktisk- og matematikkbasert forklaringer. Elevene må lære seg å se styrker og svakheter ved forklaringer innenfor alle de fire hovedkategoriene dannet i denne undersøkelsen slik at de ved senere anledninger er i stand til å generere den forklaringen som de mener er den beste til det spesifikke formålet.

Elevers begrepsbilde, definisjon, og/eller representasjon av et begrep viser seg også å være en viktig del av det som avgjør hvilken forklaring de genererer (Carpenter et al., 2003; Levenson, 2013), og like viktig i hvor stor grad begrepsbildet, definisjonen eller representasjonen fører til en forklaring som bygger på korrekte eller gyldige matematiske egenskaper. Som Nunokawa (2010) påpeker så kan forklaringer lede til nye utforskninger av den matematikken som er involvert. Om elevene har et begrepsbilde som ikke er formålstjenlig vil dette være et uheldig utgangspunktet for videre utforskning og dermed kan det føre til en uriktig konklusjon.

Som eksempel kan vi se tilbake til Tom som i analysens kapittel 4.3.2 viser et praktiskbasert begrepsbilde for divisjon som gjør at hans utforskning av matematikken involvert ender opp med en feil konklusjon. Etter å ha korrekt konkludert at 14 er et partall ved å generere en matematikkbasert forklaring blir han usikker og går over til praktiskbaserte elementer for å undersøke og teste ut konklusjonen han først kom frem til. Når han da bruker konkreter i forklaringen sammen med muntlig språk hindrer hans begrepsbilde for divisjon han i å komme frem til korrekt konklusjon. Siden divisjon inneholder en deling av konkrete elementer ser han ikke hvordan han skal løse dette når han har null konkrete objekter som han skal dele i to for å kunne bestemme om null er et partall eller et oddetall.

Denne konflikten mellom begrepsbilde og den formelle definisjonen for et matematisk begrep er også noe som viser seg i undersøkelsen til Levenson et al. (2007) hvor elevene hadde et praktiskbasert begrepsbilde likt som det Tom viser til i min undersøkelse. Forskningen deres er gjennomført på 6. trinn i Israel og elevene var ikke i stand til å anslå om null var et partall eller et oddetall (Levenson et al., 2007). Dette viser seg også i min undersøkelse der Tom avkrefter at null kan være et partall, men samtidig bekrefter han aldri tydelig at det er et oddetall heller. Dette kan peke på hvordan divisjon er introdusert for elevene og bekrefter det Fischbein, i Levenson (2013), hevder ved at tolkninger som elever gjør av ulikt undervisningsmateriell og modeller kan ende opp som rigide begrepsbilder hos elevene. Levenson (2013) peker videre på at elevers oppfattelse og forståelse av matematiske begreper avhenger av hvilken kontekst de ble introdusert i og hvilken alder barnet hadde, noe som jeg ikke har informasjon om i forhold til forskningsdeltakerne i min undersøkelse.

Slike forskningsresultater som foreligger innen feltet, sammen med min egen undersøkelse, støtter opp om det jeg påstod innledningsvis i diskusjonskapittelet og som får støtte hos Perry (2000). Elever har stor nytte av å bli eksponert for ulike typer forklaringer. Dette gjelder forklaringer som både er praktiskbaserte og matematikkbaserte. Noen ganger er det forklaringer som fokuserer på prosedyren som er det beste, andre ganger er den mest passende forklaringen en som går via begrepet. Ikke bare får elever ulike vinklinger på begrepet involvert, men de gis eksempler på hvordan forklaringer kan ha ulik form og ulikt matematisk innhold. De kan lære seg normer for forklaringer samtidig som læring kan skje gjennom forklaringene (Cramer, 2011). Elevene kan ved flere ulike typer forklaringer, både generert selv og gitt av andre, utvikle begrepsbilder og forståelse som er dyp og korrekt. Som Anghileri (2006) også peker på kan en som lærer benytte seg av elevenes forklaringer for å forsøke å finne ut av hvilken forståelse av relasjoner innad i begrepet elevene har. Dette får også støtte i Jones (2000) som i sin forskning (presentert i kapittel 2.3) nettopp bruker elevenes forklaringer som indikator på elevenes matematisering og deres oppfattelse.

Hiebert og Carpenter (1992), Mack (1995, 2001), Nyabanyaba (1999) og Wu (1999) peker alle på at praktiskbaserte elementer kan ha mange positive sider så lenge de blir benyttet på en måte som ikke er til hinder for elevenes utvikling og kunnskap. Samtidig pekes det på at en ikke alltid skal benytte seg av praktiskbaserte elementer slik at elevene også er i stand til å støtte seg på en mer matematisk tankegang og benytte matematikkbaserte forklaringer. Min undersøkelse viser at det var ulike varianter av forklaringer som dukket opp når elevene forsøkte å forklare mer abstrakt matematisk tenkning ved hjelp av praktiskbaserte forklaringer. Mye av den abstrakte matematikken kan være vanskelig å forklare praktiskbasert, men paritet er et av de matematiske temaene der det absolutt er mulig. For generell tallteori mener jeg ut fra de erfaringene jeg har fått med denne undersøkelsen at elever på 4. trinn er i stand til å forstå og selv generere forklaringer som er på formen av generiske eksempler (Balacheff, 1988), som vil være praktiskbaserte forklaringer via begrep. Om elever er i stand til å presentere og forklare matematikk av en mer formell karakter ved hjelp av praktiskbaserte elementer hanskes man med problemet som Levenson et al. (2006) peker på ved nettopp de praktiskbaserte forklaringene. De presenterer et ønske om å innføre mer matematikkbaserte forklaringer tidlig i grunnskolen for å forberede og gjøre elever klar for den formelle matematikken som kommer senere (Levenson et al., 2006). Jeg mener at elever er i stand til å se generelle prinsipper ved matematikken i praktiskbaserte elementer, men det er som påpekt her avhengig av at det gjøres på en hensiktsmessig måte som ikke er til hinder for utviklingen av begrepsbilder og forståelse.

Et godt eksempel på dette er Aud som i kapittel 4.4.1 peker på at den forklaringen hun foretrekker (forklaring 3) forklarer at 14 er et partall, men samtidig så sier den noe mer generelt om partall. Hun er i stand til å behandle det visuelle bildet som et generisk eksempel og ser hvordan denne forklaringen kan si noe om pariteten til alle tall. Dette viser at praktiskbaserte forklaringer som forklarer generelle elementer er forståelige også for elever i denne alderen og at de kan støtte seg på slike elementer på veien mot mer formell matematikk.

Når elever får erfaring med og kunnskap om ulike typer forklaringer blir de i stand til å selv kunne generere forklaringer innenfor alle de kategoriene som er dannet. Ved å jevnlig forklare sin matematiske tenkning ovenfor seg selv eller andre må elevene bruke et språk som inneholder det Botten (2009) viser til som et matematisk ordforråd. Presis begrepsbruk krever at elevene kjenner begrepene de forklarer og begrepene de benytter i forklaringene sine for å kunne gi mening til de (Botten, 2009). Dette gjelder både når de skal forklare seg ved hjelp av praktiskbaserte og matematikkbaserte elementer. Bruk av for eksempel konkreter på en god måte krever at elevene har en god forståelse av begrepet de forklarer for at forklaringen skal bli god. Ulike språkformer som elever benytter seg av må alle benyttes på en måte slik at de fremstår som styrker og ikke svakheter i forklaringene.

Når det gjelder sammenhengen mellom genererte og foretrukne forklaringer er det ingen sammenheng som viser at elever ikke nødvendigvis ønsker å høre forklaringer som er på den samme formen som de forklaringene de selv genererer for det samme matematiske emnet. Dette resultatet bekrefter også tidligere forskningsresultater (Levenson, 2010; Levenson et al., 2006), som viser at dette er en trend som ikke bare gjelder for elevene jeg har fokusert på i min undersøkelse. Det at det ikke er sammenheng ser jeg ikke på som et svakhetstegn. At elever er i stand til å skape og dra nytte av ulike typer forklaringer er, som diskutert tidligere, en styrke. Elevene viser en kompetanse i å benytte seg av ulike forklaringer og rammeverket som beskriver kjennetegn ved elevenes forklaringer viser at elever på 4. trinn er i stand til å generere forklaringer innenfor alle de kategoriene jeg har funnet. Når de velger hvilke forklaringer de foretrekker er elevene i stand til å sette ord på hva de ser på som styrker i de ulike forklaringene ut fra sitt synspunkt.

Elevene i undersøkelsen min er bevisste hva de forskjellige forklaringene viser og er tydelige på hvorfor de foretrekker nettopp de forklaringene som de gjør. Godt eksempel på dette er Tom (i kapittel 4.4.2) som velger to forklaringer som han mener er best. Han velger en praktiskbasert forklaring som han mener passer for yngre elever og en matematikkbasert forklaring for de som er eldre. Det at han er bevisst på hvem han mener de ulike forklaringene passer til viser at han har mottakerbevissthet. Han gjør ikke som de andre og velger en forklaring han selv mener er best, men er i stand til å reflektere over hvilken forklaring han mener ville være å foretrekke for andre elever enn bare seg selv. Det at elever er i stand til å se og eksplisitt uttrykke forskjellene på forklaringer og reflektere rundt hvilke forklaringer som egner seg best til ulike formål kan vise seg å være viktig. Når elever er i stand til dette viser de at de er i stand til å se det matematiske innholdet fra flere vinkler og samtidig vurdere hvorvidt innholdet i forklaringen er passende ut fra flere faktorer som bestemmer hvilken forklaring en ønsker å benytte seg av.

Levenson et al. (2006) fant også i sin undersøkelse at det kunne være en konflikt mellom elevenes foretrukne forklaringer og de sosiomatematiske normene som var til stede i klassen. Klassen de gjennomførte forskningen sin i var vant til å kun høre praktiskbaserte forklaringer fordi læreren mente at dette var en type forklaring som alle elevene i klassen kunne forstå. Det deres undersøkelse viste var at det i denne israelske klassen satt elever som foretrakk matematikkbaserte forklaringer og det var til og med noen elever i den klassen som ikke så på praktiskbaserte forklaringer som matematisk gyldige (Levenson et al., 2006), men likevel var det bare disse som ble gitt av læreren i undervisningen. Disse forskningsresultatene støtter min anmodning om å variere forklaringene som blir tilbudt elever for å gi alle elevene en variasjon og generelt sett et bredere register med forklaringer. Dette gjelder ikke bare forklaringer som skiller seg mellom å være praktiskbaserte og matematikkbaserte, men også variere mellom forklaringer som fokuserer på prosedyren og forklaringer som fokuserer mer på det matematiske begrepet ut fra hva en ønsker å oppnå med forklaringen sin.

7 Konklusjon

Spørsmålet «*Hva kjennetegner forklaringer som er generert av elever i 4. klasse, og er det sammenheng mellom forklaringene de genererer og forklaringene de foretrekker?*» har jeg gjennom denne undersøkelsen skaffet meg innsikt til å gi et svar på. Svaret jeg kan gi til spørsmålet vil bare gjelde for de seks elevene som deltok i undersøkelsen og innenfor det matematiske temaet paritet, som er et overordnet begrep for partall og oddetall. Avgrensning med tanke på antall forskningsdeltakere og matematisk tema måtte gjøres for å begrense undersøkelsens omfang.

Gjennom analysen har jeg funnet totalt åtte ulike typer forklaringer (se figur 6 side 63) som har sine egne kjennetegn. Det er fire kategorier som opptrer som hovedkategorier og disse fire kategoriene er dannet etter at praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer er kombinert med forklaringer via prosedyre og forklaringer via begrep. Forklaringer via prosedyre refererer til handlingssekvensen en har gått gjennom når en løser et problem mens forklaringer via begrep linker handlingene en gjør tydelig opp mot den begrepsmessige kunnskapen en har. Denne kombinasjonen gir fire kategorier, henholdsvis praktiskbaserte forklaringer via prosedyre, praktiskbaserte forklaringer via begrep, matematikkbaserte forklaringer via prosedyre og matematikkbaserte forklaringer via begrep. Etter kombinasjonen av de to ulike kategoriseringene opplevdes ikke denne firedelingen som beskrivende nok for å fange opp alle aspekter ved forklaringene, og dermed ble det dannet underkategorier innad i hver av de fire hovedkategoriene for å kunne beskrive alle kjennetegn. Totalt gir dette åtte kategorier. Underkategoriene er ikke hentet fra tidligere forskning, men er nyanser jeg selv fant i datamaterialet. Disse nyansene var fremtredende nok, så å danne underkategorier gir et bedre bilde av hva som kjennetegner elevenes genererte forklaringer. Underkategoriene viser forskjeller mellom forklaringer innad i de fire hovedkategoriene. Alle forklaringene som er funnet i min undersøkelse passet inn i en av de kategoriene som er dannet og dermed har jeg dannet komplette kategorier ut fra det datamaterialet jeg har samlet inn for undersøkelsen. Dette gjør at jeg har funnet hva som kjennetegner forklaringene som er generert innen paritet av de seks elevene fra 4. klasse som deltok i undersøkelsen.

Når det gjelder sammenhengen mellom forklaringene elevene genererer og foretrekker er det ingen sammenheng (se figur 7 side 66). Alle seks elevene genererte matematikkbaserte forklaringer og alle foretrakk praktiskbaserte forklaringer (én elev genererte begge typer og to elever foretrakk begge typene). Dette er et resultat som bekrefter tidligere forskning (Levenson, 2010) og som viser at det ikke kan forventes at elever foretrekker og genererer samme type forklaring innenfor rammeverket for praktiskbaserte og matematikkbaserte forklaringer og innenfor det matematiske temaet paritet. Det er flere faktorer som kan tenkes å spille inn på denne sammenhengen og variasjonen kan dermed være stor på tvers av ulike elever.

7.1 Videre arbeid innenfor forskningsfeltet

Innenfor dette matematikkdidaktiske feltet er det utfordringer og spørsmål som melder seg etter en slik undersøkelse. Et naturlig første spørsmål er om de kategoriene som kjennetegner elevforklaringer i mitt datamateriale er kategorier som vil kjennetegne forklaringer fra andre elever i andre matematiske kontekster. Ved å se nærmere på forklaringer generert av elever innen andre matematiske tema med elever fra ulike klassetrinn får en større bredde i datamateriale som kan avdekke om det opptrer forklaringer som bekrefter eller som krever en endring av de kategoriene jeg har utviklet. Spesielt interessant å se om underkategoriene som beskriver nyanser innad i de fire hovedkategoriene vil vise seg innen andre matematiske begreper enn paritet, da disse beskrev godt det datamaterialet jeg samlet inn.

En annen naturlig vinkling er å fokusere på forklaringer i den konteksten de mest naturlig oppstår. Ved å velge individuelle intervju fikk jeg mange forklaringer som gjorde at jeg var i stand til å finne noen sentrale kjennetegn som beskrev de forklaringene som elevene genererte. I undervisning vil nok ikke forklaringer oppstå så ofte som i mine intervjuer, men når kategoriene er dannet i min undersøkelse kan det være lettere å gå inn i et klasserom for å se på hvilken type forklaring som er mest vanlig og hvilke spørsmål som utløser hvilke forklaringer hos elevene. Større fokus på samtaleanalyse vil være med på å avdekke om det er noen typer spørsmål som leder til en viss type forklaring og det kan gi lærere noen verktøy å jobbe med når de gjennomfører matematiske samtaler i skolen.

De punktene nevnt ovenfor mener jeg vil ta kunnskapen rundt forklaringer i matematikk enda et steg videre. Tidligere forskning og resultater fra min undersøkelse viser at elever er i stand til å bruke ulike forklaringer til ulike formål. Forklarende aktiviteter har en sentral plass i skolen og den muntlige ferdigheten i Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2015) legger opp til å drive med slike aktiviteter for å utvikle forståelse og meningsdanning i et klasserom. Et bevisst forhold til hvordan ulike forklaringer blir behandlet og hvilke forklaringer en ønsker til ulike tidspunkt kan være med å utvikle forklarende aktiviteter i matematikkundervisning. Kunnskap om hvordan ulike forklaringer spiller inn på og utvikler elevers læring i matematikk vil kunne være én av flere faktorer som kan være med på å utvikle matematikkundervisning videre.

Litteraturliste

Achinstein, P. (1983). *The Nature of Explanation*. Oxford: Oxford University Press.

Anghileri, J. (2006). *Teaching Number Sense* (2. utgave). London: Continuum International Publishing Group.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, Teachers and Children, 216*, 216-230.

Bjørndal, C. R. P. (2009). *Det vurderende øyet. Observasjon, vurdering og utvikling i undervisning og veiledning.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Bonotto, C. (2005). How Informal Out-of-School Mathematics Can Help Students Make Sense of Formal In-School Mathematics: The Case of Multiplying by Decimal Numbers. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(4), 313-344. doi: 10.1207/s15327833mtl0704_3

Botten, G. (2009). *Meningsfylt matematikk - nærhet og engasjement i læringen* (3. utgave). Bergen: Caspar Forlag.

Bowers, J., & Doerr, H. M. (2001). An Analysis of Prospective Teachers' Dual Roles in Understanding the Mathematics of Change: Eliciting Growth With Technology. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(2), 115-137. doi: 10.1023/A:1011488100551

Burton, D. M. (2011). *Elementary Number Theory* (7. utgave). New York: McGraw-Hill.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2003). Learning About Statistical Covariation. *Cognition and Instruction, 21*(1), 1-78. doi: 10.1207/S1532690XCI2101_1

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utgave). London: Routledge.

Cramer, J. (2011). Everyday argumentation and knowledge construction in mathematical tasks. Hentet 18.11.2014, fra http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Cramer.pdf

Denscombe, M. (2010). *The Good Research Guide. For small-scale social research projects* (4. utgave). Berkshire, England: Open University Press.

Eksplisitt. (2013, 11.2.2013). *Store norske leksikon.* Hentet 21.4, 2015, fra https://snl.no/eksplisitt

Forman, E. A., McCormick, D. E., & Donato, R. (1998). Learning What Counts as a Mathematical Explanation. *Linguistics and Education, 9(4)*, 313-339.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Hamlett, C. L., Phillips, N. B., Karns, K., & Dutka, S. (1997). Enhancing Students' Helping Behavior during Peer-Mediated Instruction with Conceptual Mathematical Explanations. *The Elementary School Journal, 97*(3), 223-249. doi: 10.2307/1002198

Ginsburg, H. P., & Seo, K.-H. (1999). Mathematics in Children's Thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 113-129. doi: 10.1207/s15327833mtl0102_2

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 65-97). New York: Macmillian.

Hovik, E. K., & Solem, I. H. (2013). Argumentasjon, begrunnelse og bevis på barnetrinnet. I I. Pareluissen, B. B. Moen, A. Reinertsen & T. Solhaug (red.), *FoU i praksis 2012 conference proceedings* (s. 120-126). Trondheim: Akademika forlag.

Hsieh, H.-F., & Shannon, S. E. (2005). Three Approaches to Qualitative Content Analysis. *Qualitative Health Research, 15 No. 9*, 1277-1288. doi: 10.1177/1049732305276687

Implisitt. (2014, 28.1.2014). *Store norske leksikon.* Hentet 21.4, 2015, fra https://snl.no/implisitt

Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' Interpretations when Using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 55-85. doi: 10.1023/A:1012789201736

Keil, F. C., & Wilson, R. A. (2000). Explaining Explanation. I F. C. Keil & R. A. Wilson (red.), *Explanation and cognition* (s. 1-18). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utgave). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Levenson, E. (2010). Fifth-grade students’ use and preferences for mathematically and practically based explanations. *Educational Studies in Mathematics, 73*(2), 121-142.

Levenson, E. (2013). Exploring one student's explanations at different ages: the case of Sharon. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 181-203.

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004). Elementary school students' use of mathematically-based and practically-based explanations: The case of multiplication. I M. Hoines & A. Fuglestad (red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, s. 241-248). Bergen, Norge.

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2006). Mathematically and practically-based explanations: Individual preferences and sociomathematical norms. *International journal of science and mathematics education, 4*(2), 319-344.

Levenson, E., Tsamir, P., & Tirosh, D. (2007). Neither even nor odd: Sixth grade students' dilemmas regarding the parity of zero. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 83-95.

Levenson, E., Tsamir, P., & Tirosh, D. (2010). Mathematically based and practically based explanations in the elementary school: teachers' preferences. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(4), 345-369. doi: 10.1007/s10857-010-9142-z

Mack, N. K. (1995). Confounding Whole-Number and Fraction Concepts When Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(5), 422-441. doi: 10.2307/749431

Mack, N. K. (2001). Building on Informal Knowledge through Instruction in a Complex Content Domain: Partitioning, Units, and Understanding Multiplication of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), 267-295. doi: 10.2307/749828

NESH. (2006, mars 2006). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Hentet 5.2.2015, fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi-2006.pdf

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier. Den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

Nunokawa, K. (2010). Proof, Mathematical Problem-Solving, and Explanation in Mathematics Teaching. I G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (red.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (s. 223-236). New York: Springer.

Nyabanyaba, T. (1999). Whither relevance? Mathematics teachers' discussion of the use of "real-life" contexts in school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 19*(3), 10-14.

Perry, M. (2000). Explanations of Mathematical Concepts in Japanese, Chinese, and U.S. First-and Fifth-Grade Classrooms. *Cognition and Instruction, 18*(2), 181-207. doi: 10.1207/S1532690XCI1802_02

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Kristiansand, Norge: Høyskoleforlaget AS.

Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(2), 135-150. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00119-0

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175-189.

Svennevig, J. (2013a, 22.10.2013). Samtaleanalyse. *Store norske leksikon.* Hentet 29.3, 2015, fra https://snl.no/samtaleanalyse

Svennevig, J. (2013b, 26.9.2013). Samtalesekvens. *Store norske leksikon.* Hentet 29.3, 2015, fra https://snl.no/samtalesekvens

Taylor-Powell, E., & Renner, M. (2003). Analyzing qualitative data: University of Wisconsin-Extension, Cooperative Extension.

Tsamir, P., & Sheffer, R. (2000). Concrete and formal arguments: The case of division by zero. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 92-106. doi: 10.1007/BF03217078

Utdanningsdirektoratet. (2015). Læreplan i matematikk fellesfag - grunnleggjande ferdigheiter. Hentet 7.4.2015, fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter/

Wu, H. (1999). Basic skills versus conceptual understanding: A bogus dichotomy. *American Educator, 23*(3), 1-7.

Yackel, E. (2001). *Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms.* Paper presented at the Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.

Vedlegg

Vedlegg 1: Intervjuguide

Utstyr som behøves til intervjuene:

- Videokamera
- Lydopptaker
- Ferdige forklaringer som elevene skal velge mellom
- Klosser (multilinks, centikuber etc.)
- Blanke ark
- Blyanter (grå og farge)

Tema	Spørsmål	Hjelp videre om de står fast	Videre utfordring
1) La eleven få forklare om konkrete tall er partall eller oddetall: - 14 - 9 Eleven står fritt til å kunne forklare seg kun muntlig eller ved hjelp av tegning eller klosser. Spørre eleven om partall/oddetall som er høyere enn han/hun kan se for seg eller konkretisere. Se på mønsteret mellom partall/oddetall.	- Er 14 partall eller oddetall? Hvorfor? - Er 9 partall eller oddetall? Hvorfor? - Er 0 partall eller oddetall? Hvorfor? - Er det noe som skiller 0 fra de andre tallene? - 238 vet jeg er et partall. Tror du 239 er partall eller oddetall? Hvorfor tror du dette? Hvordan kan du være sikker?	Om dette er vanskelig kan en høre om eleven vet om et tall som er partall eller oddetall. Om eleven har et eget eksempel kan det spilles videre på for å få han/henne til å forklare hvordan en kan vite sikkert at dette er et partall eller oddetall. Oppfordre eleven til å tegne eller bruke klossene for å få et konkret utgangspunkt for forklaringen om det blir vanskelig å bare bruke muntlig språk.	Utfordre elevens forklaringer ved å spørre om han/hun er sikker på om denne forklaringen er riktig og hvordan han/hun kan være sikker på det. Gjelder denne forklaringen for alle tall? Kan bruke et annet talleksempel for å se om det samme gjelder for det tallet (22 og 13). La eleven bestemme om 0 er partall eller oddetall og la han/hun utdype det med forklaringen sin. Er det noe problematisk med 0? Se om eleven oppfatter mønsteret mellom partall og oddetall. Skrive ned tallet 238 til eleven og si at dette er et partall. Er 239 partall eller oddetall? Må begrunne svaret.
2) Eleven skal forklare partall og oddetall ved hjelp av praktiskbaserte elementer. Be eleven om han/hun kan vise hvordan et partall/oddetall kan se ut og hvorfor han/hun	- Hvordan kan du med tegning eller bruk av klosser lage tallet 14 slik at det er lett for andre å se at dette er et partall? - Samme spørsmål som over bare med tallet 9.	Oppfordre eleven til å bruke klossene slik at han/hun får en konkret mengde i hendene som en kan relatere seg til. Hvordan kan du arrangere denne mengden slik at det er lett for noen andre å se	Kan eleven vise eller forklare hvordan denne praktiskbaserte forklaringen av partall/oddetall kan gjelde for alle tall? Er det mulig å lage en slik forklaring som vil gjelde for alle tall?

velger å lage det på den måten som han/hun gjør. Hva er forskjellen mellom partall og oddetall?	- Du har laget partall på «denne måten» og oddetall på «denne måten», hva er forskjellen mellom de to? - Hvordan kan du med [elevens måte å vise det på] vise at dette vil kunne gjelde for alle partall/oddetall?	om det er et partall eller oddetall?	Prøve å nærme oss et generisk eksempel gjennom praktiskbasert forklaring?
3) La eleven forklare begrepene partall/oddetall uten å direkte knytte det opp mot spesielle tall. Eleven velger selv om han/hun ønsker å bruke konkrete tall eller ikke i sine forklaringer.	- Kan du forklare hva partall er? - Kan du forklare hva oddetall er?	Om dette er vanskelig for eleven kan det oppfordres til at han/hun kan tegne/bruke klosser om han/hun vil.	Hvordan vet eleven at forklaringen han/hun gir vil gjelde for alle tall? Hvordan kan han/hun være sikker på at dette er en forklaring som alltid vil gjelde?
4) Gi eleven eksempler på ulike typer forklaringer der han/hun skal velge hvilken han/hun foretrekker (en eller flere). Begrunne hvorfor han/hun valgte nettopp denne forklaringen fremfor de andre.	- Lese alle forklaringene først; hvilken av disse forklaringene likte du best eller synes forklarte partall og oddetall best? - Hvorfor mener du at akkurat denne er bedre enn de andre? - Hva er forskjellen mellom de ulike forklaringene? Er det noe som er likt?	Lese forklaringene høyt for eleven i et saktere tempo slik at han/hun rekker å tenke over hver enkelt forklaring en stund. Kan også snakke om de enkelte forklaringene etter at de er lest for å sikre at eleven har forstått innholdet. Prøve igjen om han/hun er i stand til å ta et valg og begrunne valget sitt.	Utfordre eleven på hva som er forskjellen mellom de ulike forklaringene. Ser eleven at forklaringene egentlig forklarer akkurat det samme, men bare på forskjellige måter? Hva er det eventuelt som er det samme eller ikke det samme på tvers av de forskjellige forklaringene?

Vedlegg 2: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring til foresatte

Eivind Ranheim
Sjøstranda 115, 9006 Tromsø
E-post: ranheim.eivind@gmail.com
Tlf: 988 65 038

Tromsø, 17.10.2014

Til foreldre/foresatte for elever på 4. trinn ved XXX skole

Anmodning om tillatelse til videoopptak av intervju, samt samle inn besvarelser.

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, avdeling for lærer og tolkeutdanning. Dette studieåret skal jeg gjennomføre en undersøkelse som skal ende i en masteroppgave. Jeg er interessert i å se nærmere på elevers forklaringer i matematikk. Jeg ønsker å se på hvilken type forklaringer elever selv genererer og hvilke forklaringer de foretrekker. Dette vil jeg gjøre for å se om elevene helst genererer og foretrekker forklaringer som enten er praktiskbasert eller matematikkbasert og om de ser sammenhengen mellom ulike typer forklaringer. Kunnskap om dette teamet er absolutt noe som er relevant i forhold til dagens skole, da det oppstår forklaringssituasjoner i så godt som hver matematikktime. Det matematiske temaet som forklaringene i denne undersøkelsen vil handle om er partall og oddetall.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet frem til at det vil være ønskelig å gjøre videoopptak av intervjuer med elever. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre videoopptak, samt samle inn tekster skrevet av elever i 4. trinn ved XXX skole. Det er snakk om et engangsintervju individuelt eller i grupper på to-tre elever som vil vare i toppen 40 minutter. Tidsbruken vil variere, så noen intervjuer kan bli så korte som 10 minutter alt etter hvordan intervjuet utarter seg. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandler med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Videoopptaket vil i hovedsak fokusere på elevenes tale, men også peking og gestikulering som en del av deres måte å kommunisere på i intervjuet. Opptakene vil kun bli sett av meg, min veileder (Birgit Pepin, tlf: 73559016 / 95471895, mail: birgit.pepin@hist.no) og eventuelt av andre masterstudenter i matematikkdidaktikk ved høgskolen. I materialet som skrives eller på en annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 1. juli 2015.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir tillatelse til å la deres barn være med på undersøkelsen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Eivind Ranheim

Samtykkeerklæring

Som del av datainnsamlingen til masterprosjektet ber jeg om tillatelse til å samtale med barnet ditt/deres, gjøre videoopptak der han/hun er med og kopiere/bruke tekster skrevet av han/henne.

Forutsetningen for tillatelsen er at tekster og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i ruta dersom:

☐ Jeg/vi gir tillatelse. Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke. Jeg/vi er klar over at deltagelsen er frivillig, og at vi og barnet når som helst og uten grunn kan trekke oss fra prosjektet.

Dato:…………………………..

Elevens fornavn og etternavn: …………………………………………………………………

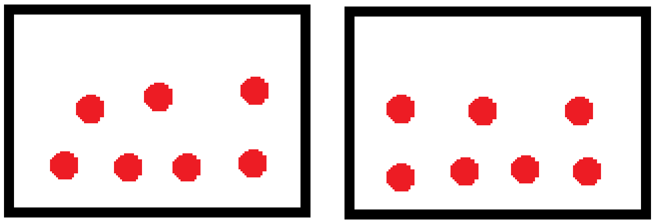
Underskrift av foresatt(e): ………………………………………………………………………

Vennligst returner svarslipen til lærer XXX så snart som mulig.

Vedlegg 3: Forklaringer elevene skulle velge mellom

Forklaring 1

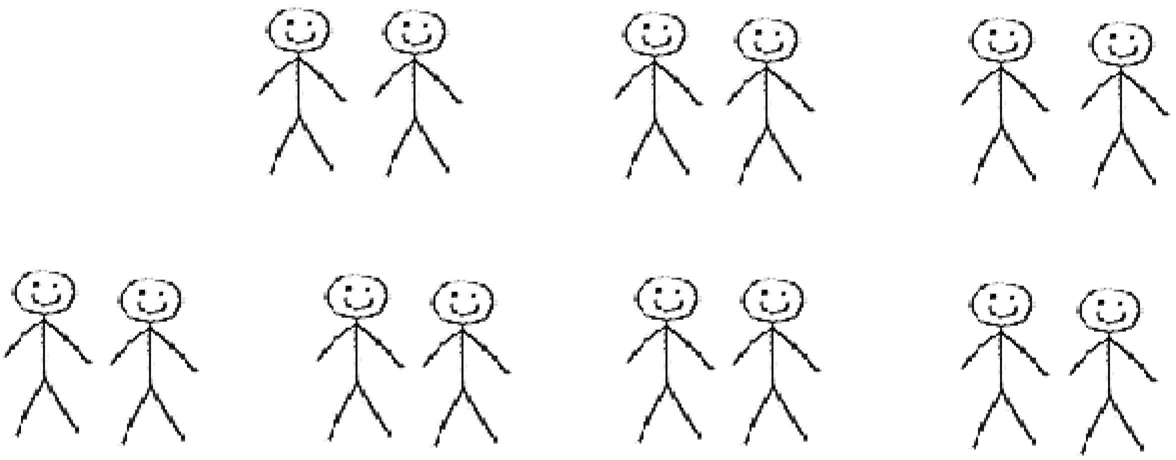
Lise har 14 klinkekuler. Hun ønsker å putte alle klinkekulene i 2 bokser slik at det er et likt antall i hver boks.



Siden dette kan bli gjort er 14 et partall.

Forklaring 2

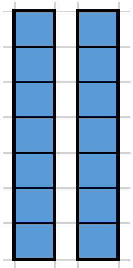
Fjorten elever fra fjerdeklasse skulle på en skoletur. Læreren sa til elevene at de skulle gå i par. Syv par ble dannet og ingen elever ble stående uten noen å gå med.



Siden 14 elever kan bli delt i par er 14 et partall.

Forklaring 3

14 kan deles inn i to søyler som er like høye. Siden alle partall er «2 ganget med noe» vil alle partall kunne vises på denne måten.



Siden to søyler med syv i hver blir 14 tilsammen er 14 er partall.

Forklaring 4

14 er delelig med 2 uten at en får en rest.

14 : 2 = 7

Derfor er 14 et partall.

Forklaring 5

14 kan bli skrevet som summen av to like hele tall.

7 + 7 = 14

Derfor er 14 et partall.