Masteroppgave

Master i matematikkdidaktikk 5-10

Hildegunn Danbolt

Å vise eller bevise

En studie av en gruppe 8. trinnselevers begrunnelse og argumentasjon for gyldigheten ved matematiske formodninger

Trondheim, mai 2015

HiST TRONDHEIM

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Hildegunn Danbolt

Å vise eller bevise

En studie av en gruppe 8. trinnselevers begrunnelse og argumentasjon for gyldigheten ved matematiske formodninger

To show or prove

A study of a group of 8th grade students' justification and argumentation for the validity of mathematical conjectures

Masteroppgave, Master i matematikkdidaktikk 5-10
Trondheim, mai 2015

Veileder:	Liping Ding

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

FORORD

Denne masteroppgaven markerer slutten på mine fem år som lærerstudent ved Høgskolen i Sør-Trøndelag. Å skrive masteroppgave er noe av det vanskeligste jeg har gjort. Det har vært et tungt og møysommelig arbeid, fullt av både oppturer og nedturer. Når jeg nå endelig er ved enden av prosjektet er det noen jeg ønsker å takke.

Først og fremst tusen takk til skolen, lærerne og elevene som lot meg ta av deres tid og gjøre undersøkelsene mine hos dem. En særlig takk til de intervjuede elevene som jeg gjennom arbeid med denne oppgaven har lært så mye av.

Takk til Liping Ding for all god veiledning, for å bruke metaforer om vårens og solens frembrudd i skriveprosessen og for å få meg til å tenke på masteroppgaven som «my creative work of art».

Takk til foreldrene mine for så mye god hjelp og støtte, for å alltid synes det passer bra at jeg kommer hjem en tur og for at dere har vært der som en stødig klippe når det å være masterstudent ikke har vært så lett.

Takk til gode venner som har vært tålmodige, satt ting i perspektiv for meg og passet på at jeg har levd studentlivet selv i de travleste arbeidsperioder.

Og ikke minst vil jeg rette en stor takk alle mine medstudenter på masterstudiet, særlig den dyktige, morsomme og herlige gjengen jeg har vært så heldig å dele kontor med de siste to årene. Takk for lange lunsjer, to-møter, vaffel-onsdag, kake-torsdag, fredagsgrøt, VM-tipping, quiz, radiointervju, avisartikler, alt det sosiale og alle de spennende faglige diskusjonene det går an å ha. Dere har gjort dette matematiske dypdykket til en sann glede! Den norske skolen har virkelig noe å glede seg til!

Hildegunn Danbolt

Trondheim, mai 2015

INNHOLD

TABELLOVERSIKT

1.0. INNLEDNING: Å KUNNE SNAKKE MATEMATIKK SAMMEN

1.1. BAKGRUNN FOR OPPGAVEN

«Matematikk blir fort et fag der elevene blir sittende og regne oppgaver for å øve seg til nasjonale prøver» skriver Kari Aamli, journalist for forskning.no, 11.04.2015. Hun viser til forskning gjort av Kleve og Solem (2014) som fremhever det å kunne snakke matematikk som avgjørende for elevers læring: «elevene lærer ikke å tenke om de ikke blir bedt om å uttrykke tankene sine. Ved å sammenlikne tall må de argumentere og begrunne svarene matematisk» (Aamli, 2015). Matematisk kommunikasjon er viktig for elevers individuelle utvikling av resonnering og matematisk forståelse (Yackel & Cobb, 1996). Sett i lys av Aamlis karakteristikk av matematikkfaget, er det interessant at Læreplanen i matematikk fellesfag faktisk legger opp til at matematikk skal være et fag der muntlige ferdigheter skal arbeides med og utvikles på lik linje som i andre fag. Muntlige ferdigheter i matematikk innebærer blant annet «å gjere seg opp ei meining, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både eit uformelt språk, presis fagterminologi og omgrepsbruk» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 4). I tillegg forventes det at elevene gjennom matematikkfaget skal lære å begrunne løsninger og vurdere gyldigheten av disse, og de skal utfordres til å kommunisere matematikk muntlig, skriftlig og digitalt (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det ser altså ut til å være en mangel på samsvar mellom læreplanens intensjoner og matematikkfagets praksis.

Å kunne argumentere for, begrunne eller bevise at en løsning, påstand eller slutning er gyldig, vil være en form for matematisk kommunikasjon. Prosessen hvor man former et argument, enten individuelt eller i fellesskap, handler om å søke etter en forklaring eller en begrunnelse for en påstand som andre vil godta og bli overbevist av. Som en del av dette bidrar argumentasjon til at man må forklare overfor seg selv og dermed til læring (Schwarz, Hershkowitz & Prusak, 2010). I tillegg er bevis og matematisk argumentasjon sentrale aspekter ved matematikk. Gjennom å bevise kan man validere og forklare matematikk. Man kan bruke bevis til å oppdage ny matematikk, systematisere resultater eller innlemme dem i et rammeverk, og ikke minst er bevis viktig i kommunikasjon av matematisk kunnskap (Harel & Sowder, 2007). Tidligere forskning viser derimot at elevene i møte med bevisaktiviteter i 15-16 årsalderen, får problemer med å forstå og å utføre matematiske bevis (bl.a. Chazan, 1993;

Healy & Hoyles, 2000; Senk, 1985). Mange av utfordringene ligger særlig i at elevene ikke ser deduktive bevis som generelle, men opplever empiriske eksempler som bedre bevis (Chazan, 1993). Flere forskere knytter misoppfatninger av bevis til hvordan matematikk blir begrunnet og argumentert for i klasserommet gjennom hele skoleløpet (Harel & Sowder, 1998; Knuth, Choppin & Bieda, 2009; Stylianides, 2007).

Elevene kan ha ulike oppfatninger om hva som er overbevisende og når en matematisk formodning er tilstrekkelig bevist (Harel & Sowder, 1998). Hvordan argumentasjonen, begrunnelsene eller bevisene blir formet foregår på ulike måter, avhengig av om elevene former dem alene eller sammen med andre (Cobb, 1995). Det er svært vanlig med gruppearbeid i grunnopplæringen, og å kunne samarbeide er et eksempel på en egenskap som verdsettes i den norske skolen. Dette kommer særlig frem gjennom at *det samarbeidende mennesket* er en av mennesketypene i den generelle delen av læreplanverket Kunnskapsløftet (LK06) (Utdanningsdirektoratet, 2011). Gjennom å jobbe sammen som en gruppe, oppstår det muligheter for elever til å undersøke gyldigheten ved deres resonnement på nytt og deretter bygge nye, mer elegante og velegnede former for resonnement. Dette igjen kan bidra til å fremme elevenes matematiske forståelse (Francisco, 2013; Mueller, Yankelewitz & Maher, 2012). Mueller et al. (2012, s. 385) skriver at for å kunne danne læringsfellesskap hvor elevene engasjeres i kollektiv matematisk forståelse, og hvor matematisk resonnering og argumentasjon fremmes, må lærere og utdanningsforskere kjenne til og forstå de ulike formene for samarbeid om argumentasjon som kan forekomme når elever arbeider sammen om oppgaver.

1.2. FORSKNINGSSPØRSMÅL

Argumentasjon, begrunnelse og bevis er et utfordrende og vanskelig tema. Samtidig blir argumentasjon, begrunnelse og bevis, som forklart over, betraktet som sentrale former for matematisk kommunikasjon, nyttige verktøy for elevers læring og grunnleggende elementer ved matematikken som fagfelt. På bakgrunn av dette har jeg valgt å formulere følgende forskningsspørsmål:

> *Hvordan begrunner og argumenterer en gruppe elever på 8. trinn for gyldighet ved matematiske formodninger i en gruppesituasjon, og hvordan påvirkes argumentasjonen av interaksjonen mellom elevene i gruppen?*

Gjennom dette forskningsspørsmålet ønsker jeg først og fremst å få innsikt i hva elevene opplever som overbevisende argumenter og begrunnelser. Dette vil ha hovedfokus i oppgaven min. Dessuten har jeg som mål å få forstå hvordan elevene påvirker hverandres argumentasjon og begrunnelse i en gruppesituasjon. Jeg ønsker altså å ta for meg situasjoner i en elevgruppes arbeid med bevis av matematiske formodninger og analysere disse fra et matematisk perspektiv, med fokus på hvordan elevene resonnerer rundt og argumenterer for gyldighet ved matematiske påstander. I tillegg vil jeg studere de samme situasjonene fra et sosialt perspektiv ved å se på interaksjonen mellom elevene. Jeg ønsker å belyse hvorvidt elevene bruker matematiske strukturer og eksempler i sin argumentasjon, og hvilket potensiale for matematiske bevis som ligger i argumentasjonen elevene benytter. Disse spørsmålene er interessante fordi svarene på dem både vil si noe om elevenes bilde av hva matematikk er, og hvordan elevene snakker matematikk sammen.

Denne oppgaven er en kvalitativ småskalastudie. Jeg har gjennomført intervjuer av grupper på 3-4 elever på 8. trinn, hvorav analysene av ett av disse intervjuene blir grunnlaget for denne oppgaven. Det ble gjort lydopptak, og alt materiale elevene produserte mens intervjuet pågikk, ble samlet inn. Gruppeintervjuet ble dermed den sosiale konteksten for elevenes interaksjon.

1.3. OPPBYGNING AV OPPGAVEN

Denne oppgaven er bygd opp av fem kapitler. I påfølgende kapittel, kapittel 2 vil jeg ta for meg det teoretiske perspektivet jeg bygger på og vil ha nytte av i den videre studien. I den sammenheng vil jeg i tillegg presentere tidligere forskning som er gjort innen både elevers argumentasjon og begrunnelsesformer og sosial interaksjon i mindre elevgrupper. I kapittel 3 tar jeg for meg ulike metodiske valg jeg har gjort i prosessen fra ide til gjennomført studie, og begrunner dem. Her vil jeg også presentere de fire formodningene som ble lagt fram for elevene under intervjuene. I kapittel 4 presenteres og analyseres sentrale utdrag fra et av gruppeintervjuene. Kapittelet er bygd opp kronologisk etter intervjuets gang, før resultatene oppsummeres og bindes sammen i slutten av kapittelet. I kapittel 5 drøftes resultatene av analysene opp mot den presenterte teorien, og det tas stilling til hvordan interaksjonen og elevenes begrunnelser spiller sammen. Tilslutt blir oppgaven rundet av med et kritisk blikk på metodevalg og en diskusjon av didaktiske implikasjoner denne oppgaven kan ha for lærer og undervisning.

2.0. TEORETISK PERSPEKTIV: ARGUMENTASJON, BEGRUNNELSE OG BEVIS I INTERAKSJONSKONTEKST

Målet for denne oppgaven er å finne ut hvordan elever på 8. trinn argumenterer for gyldighet ved ulike matematiske formodninger og hvordan interaksjonen mellom den virker inn. For å kunne svare på det første av disse spørsmålene vil jeg ha behov for teoretiske verktøy som kan beskrive og forklare elevers matematiske argumentasjon, begrunnelse og bevis. Elevenes argumentasjon, begrunnelse og forklaring ønsker jeg å analysere ut fra et bevisperspektiv. Jeg vil derfor ta utgangspunkt i Balacheff (1988) sine pragmatiske og konseptuelle bevis og Harel og Sowder (1998; 2007) sitt begrep *proof schemes*, og vise hvordan disse kan lede fram til begrepene empirisk og strukturell begrunnelse (Edwards, 1999; Küchemann & Hoyles, 2009) som aspekter og kjennetegn ved elevers argumentasjon og bevis. For å kunne si noe om hvordan interaksjonen mellom elevene virker inn på deres begrunnelser, tar jeg utgangspunkt i argumentasjon, begrunnelse og bevis som sosiale aktiviteter og ser på aspekter ved forståelse og samarbeid i elevgrupper. Jeg vil ta for meg begrepene sosiale og sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996), «taken-as-shared» eller antatt-felles forståelse (Voigt, 1995), direkte og indirekte samarbeid, status og matematisk autoritet (Cobb, 1995). Som en del av presentasjonen av de ulike teoretiske perspektivene vil jeg se hva tidligere forskning har vist angående kjennetegn ved elevers argumentasjon og begrunnelse og deres interaksjon i mindre grupper.

2.1. ARGUMENTASJON, BEGRUNNELSE OG BEVIS FRA ULIKE TEORETISKE PERSPEKTIV

Det er ingen felles definisjon av argumentasjon og bevis og forholdet mellom dem innen matematikkdidaktisk litteratur. Stylianides (2007, s. 2) definerer et matematisk argument som «a connected sequence of assertions intended to verify or refute a mathematical claim». Denne definisjonen legger vekt på argumentets oppbygning og overbevisende kraft. Harel og Sowder (2007, s. 806) benytter seg av et subjektivt bevisperspektiv når de definerer «a proof is what establishes truth for a person or a community». Det en person opplever som et bevis trenger ut fra det subjektive perspektivet ikke å være et matematisk gyldig bevis. Bevis i denne forstand blir det som den enkelte opplever som et overbevisende argument. Argumentasjon, begrunnelse og bevis blir dermed nært knyttet til hverandre. Videre i denne delen av kapittelet vil jeg ta for meg de teoretiske perspektivene til Balacheff (1988), Harel og Sowder (1998), Edwards (1999) og Küchemann og Hoyles (2009), før jeg diskuterer noen trekk ved elevers bruk av eksempler som har kommet fram gjennom flere studier.

2.1.1. Pragmatiske og konseptuelle bevis

Balacheff (1988) beskriver bevisforståelsen til elever gjennom deres evne til å resonnere og til å konstruere formelle bevis. Dette baserer seg på en studie der 28 elever i alderen 13-14 år arbeidet sammen i par. Elevene hadde i oppgave å finne et formeluttrykk for antall diagonaler i et polygon og begrunne det. Målet med studien var å undersøke hvordan elevene kom fram til en overbevisning om at løsningen deres var gyldig. I denne sammenhengen skiller Balacheff (1988) mellom pragmatiske og konseptuelle former for bevis eller bevisnivå. Balacheff bruker begrepet *bevis* i vid forstand, da noen av de pragmatiske formene for bevis ikke faktisk beviser at formodningen er sann. Likevel brukes dette begrepet fordi elevene opplever at formodningen blir bevist. Et bevis er pragmatisk hvis det er avhengig av handling eller å vise for å fungere. Et konseptuelt bevis, derimot, hviler på formuleringen av og sammenhengene mellom de aktuelle egenskapene ved formodningen (Balacheff, 1988). Overgangen fra å benytte seg av pragmatiske bevis, til å forstå og bruke konseptuelle bevis avhenger av en forståelse om av bevisenes generiske og generelle kvalitet. Som en del av dette distanserer man seg fra selve løsningsprosessen og handlingene på objektene, noe som gjør det mulig å diskutere og reflektere over kunnskapen. En elev kan bevege seg noe i denne retningen innenfor rammene av sitt naturlige hverdagsspråk. For å kunne arbeide med og føre formelle bevis, må språket derimot utvikles fra å kun være et kommunikasjonsmiddel og bli et verktøy for deduksjon (Balacheff, 1988).

Balacheff (1988) definerer fem ulike former eller nivå for bevis som underkategorier av pragmatiske og konseptuelle bevis: naiv empirisme, avgjørende eksperiment, generiske eksempler, tankeeksperiment og kalkulering av påstand. Disse fem formene for bevis står i et hierarkisk forhold, som baserer seg på graden av generalitet det er behov for ved bevisformen og hvor mye konseptualisering av kunnskap som kreves. I løpet av bevisningsprosessen vil elevene gjerne være innom flere av dem (Balacheff, 1988). Begrepene beskriver svært konkrete tilnærmingsmåter og matematiske handlinger elevene tar i bruk i bevisprosessen, noe som gjør dem nyttige i analyse av elevers begrunnelser og bevisformer.

Naiv Empirisme

Ved naiv empirisme prøver eleven en rekke tilfeldig valgte eksempler og ser at disse bekrefter at den matematiske formodningen er sann eller usann (Balacheff, 1988). Eksemplene blir evidens for formodningens sannhet. I sin studie fant Balacheff (1988) at elevene hadde svært stor tro på den naive empirismen, noe som gjorde at de ikke så noe behov for videre begrunnelse og bevis.

Avgjørende eksperiment

Avgjørende eksperiment refererer til situasjoner der overbevisningen om hvorvidt en løsning eller en formodning er gyldig og vil gjelde for alle tilfeller, står og faller på ett nøye utvalgt eksempel (Balacheff, 1988). Denne formen for pragmatisk bevis skiller seg fra naiv empirisme på den måten at en elev eksplisitt uttrykker at generaliteten ved formodningen vil avgjøres gjennom utfallet av et spesifikt tilfelle. Balacheff (1988) fant i sin studie at som en del av en sosial interaksjon ble det avgjørende eksperimentet et middel for å bestemme utfallet av og avslutte konflikter mellom elevers løsninger og begrunnelser.

Generiske eksempler

Generiske eksempler er en pragmatisk bevisform. Gjennom generiske eksempler blir årsakene for at en formodning er sann gjort tydelige, ved hjelp av operasjoner eller transformasjoner på et objekt eller en modell (Balacheff, 1988). Objektet fungerer som en representant for en klasse av objekter, og er valgt med tanke på å formidle de egenskapene og strukturene som kjennetegner denne klassen. Balacheff (1988) definerer generiske eksempler som pragmatiske bevis, da det avhenger av handling på objektet, men skriver likevel at generiske eksempler skiller seg tydelig fra naiv empirisme og avgjørende eksperiment. Generiske eksempler krever en form for forhandling av de generelle egenskapene ved det valgte eksempelet, og utgjør dermed en overgang fra pragmatiske til konseptuelle bevis. Gjennom denne forhandlingen av egenskaper løser man seg gradvis fra det spesielle og beveger seg i retning av det generelle og tankeeksperimentet (Balacheff, 1988).

Tankeeksperiment og kalkulering av påstand

Balacheff (1988) beskriver tankeeksperiment som en form for konseptuelt bevis. Gjennom tankeeksperimentet internaliserer man handlingene (fra de pragmatiske bevisformene) og løser seg fra konteksten og en konkret representasjon. Tankeeksperimentet skiller seg fra det generiske eksempelet ved at handlingene på og de grunnleggende strukturene ved beviset kommer frem på flere måter enn bare som et resultat (Balacheff, 1988). I tillegg identifiserte

Balacheff (1998) gjennom sine undersøkelser kalkulering av påstand som en femte form for bevis. I tilfeller av kalkulering av påstand var begrunnelsen kun basert seg på formell manipulering av symboler knyttet til den aktuelle påstanden.

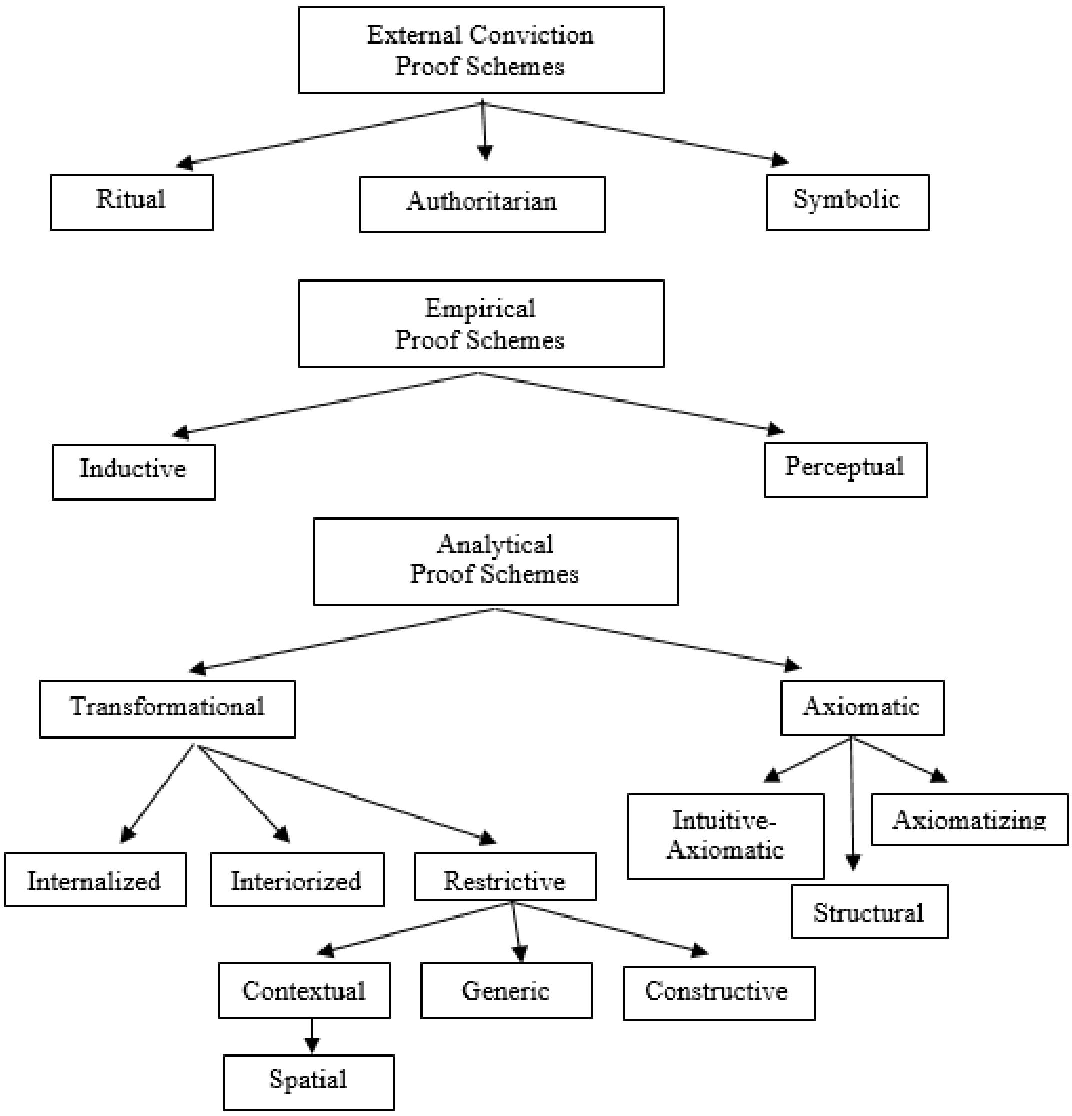
2.1.2. Proof schemes-rammeverket

Harel og Sowder (1998) sitt proof schemes-rammeverk er et resultat av en omfattende studie med mål om å kartlegge elever og studenters kognitive forståelse av matematiske bevis og få innsikt i hvilke erfaringer som hadde effektiv innvirkning på formingen av deres forståelse. Studiene bestod av seks undervisningsforsøk, som ble fulgt opp av kliniske intervjuer, prøver og lekser, og involverte totalt 128 elever eller studenter. Et omfattende datamateriale ble analysert til forskerne verken så behov for flere kategorier eller endring av dem. Proof schemes-rammeverket er senere blitt bearbeidet og satt inn i et altomfattende bevisperspektiv (Harel & Sowder, 2007). Dette rammeverket er også blitt kalt *justification schemes* (Stylianides & Stylianides, 2009), da det i stor grad handler om hva elevene opplever som tilstrekkelig rettferdiggjørelse og begrunnelse for gyldighet. Rammeverket, eller variasjoner av det, er senere blitt tatt i bruk av andre forskere og over flere trinn (jf. Edwards, 1999; Harel, 2008; Küchemann & Hoyles, 2009; Stylianides & Stylianides, 2009; Stylianou, Chae & Blanton, 2006)

Proof schemes defineres av Harel og Sowder (1998) på følgende måte: «A person's proof scheme consists of what constitutes ascertaining and persuading for that person» (s. 244). Proof schemes handler om hva som overbeviser en person (*ascertaining*, konstatering), og hva denne personen legger frem for å overbevise andre (*persuading*, overtalelse). Konstatering og overtalelse, blir av Harel og Sowder (1998) regnet for å være to underprosesser av bevisprosessen, som man må igjennom på veien mot å visshet. En persons aktuelle proof schemes vil dermed kunne identifiseres gjennom hvilke argumenter, begrunnelser og bevis han eller hun godtar som tilstrekkelig og selv tar i bruk i form av konstatering og overtalelse.

Harel og Sowder (1998) deler proof scheme-rammeverket i de tre hovedkategoriene external conviction proof schemes, empirical proof schemes og analytical proof schemes (tabell 1). Harel og Sowder (2007) påpeker at de to sistnevnte kategoriene i bred forstand vil kunne tilsvare Balacheff (1988) sine pragmatiske og konseptuelle bevis. Hver av de ulike kategoriene av proof schemes representerer et kognitivt nivå i elevens matematiske utvikling. Likevel anser ikke forskerne de ulike kategoriene for å stå i et rigid, hierarkisk forhold til hverandre. En elev vil kunne inneha mer enn én type proof scheme samtidig, avhengig av kjennskap til situasjonen det arbeides innenfor og denne elevens følelse av hvilken form for begrunnelse som er hensiktsmessig og passende å bruke (Harel & Sowder, 1998). Man snakker derfor gjerne om proof schemes i flertall. I tillegg til å snakke om proof schemes hos enkeltpersoner, kan man definere proof schemes hos en gruppe, i et samfunn eller som del av en kultur (Harel & Sowder, 1998). Dette kan man se gjennom et historisk tilbakeblikk, ved for eksempel å sammenligne bevis fra babylonsk og gammel gresk kultur, hvor metodene brukt for å overbevise er svært ulike (Harel & Sowder, 1998). Hvilke proof schemes man har er også uløselig knyttet sammen med ens følelse av hva matematisk aktivitet vil si.

Tabell 1 Proof schemes-rammeverket, Harel og Sowder, 1998, s. 245



EXTERNAL CONVICTION PROOF SCHEMES

External conviction proof schemes, altså utvendig overbevisning proof scheme, vil i følge Harel og Sowder (1998) etablere seg hos elever hvis formell matematikk blir lagt for stor vekt på for tidlig i elevene matematiske læring. Det som fjerner tvil om at en påstand eller formodning er sann innenfor denne kategorien, vil avhenge av enten en eller flere av følgende: 1) Hvordan argumentet presenteres og dets utseende (ritual proof scheme). I slike tilfeller vil elevene gjerne avvise et korrekt bevis hvis det for eksempel ikke tar i bruk formelle symboler og godta feilaktige bevis som ser riktige ut. 2) Bekreftelse fra en autoritet i form av en lærer eller en lærebok (authoritarian proof scheme), eller 3) symbolsk resonnering uten noe referansesystem (symbolic proof scheme). Ved symbolsk proof scheme behandles symbolene uten at ikke har noen reell mening for elevene. For denne oppgaven er det først og fremst autoritære proof schemes som er mest interessant, da symbolspråk og formell bevisføring ikke er en del av de intervjuede elevenes aktivitet.

De elevene som har en bevisforståelse hvor deres overbevisning avhenger av bekreftelse fra en autoritet, altså som har et autoritært proof scheme, vil på tross av forståelse for at matematikken de driver med må være sann, ikke se matematikk som et fag som krever indre begrunnelse (Harel & Sowder, 1998). Dette henviser Balacheff til når han skriver at «as long as students rely on the teacher to decide on the outcome of their activity, the word 'proof' will not make sense for them as we expect it to do» (Balacheff, 1991, s. 179). Elevene vil forvente å bli fortalt at en formodning er sann, og ikke delta aktivt i beviset av den. Hovedkilden til overbevisning hos elevene vil være det som skrives i en lærebok eller det læreren sier. Dette kan blant annet føre med seg at elevene spør læreren om hjelp uten først å gjøre et reelt forsøk på å løse oppgaven selv, eller at elevene forsøker å bevise en formodning gjennom å omformulere den til noe de anser for å være fakta (Harel & Sowder, 1998).

EMPIRICAL PROOF SCHEMES

Elever som forstår, oppfatter og bruker empiriske argumenter og begrunnelser som gyldig forklaring og begrunnelse, innehar ifølge Harel og Sowder (1998) empiriske proof schemes. I deres artikkel fra 2007 trekker Harel og Sowder en parallell mellom denne proof scheme-kategorien og Balacheff (1988) sine pragmatiske bevis. Innenfor empiriske proof schemes skilles det mellom induktive og perseptuelle proof schemes. Induktive proof schemes ligger svært nær den formen for bevis og begrunnelse som man finner i dagliglivet og ikke-matematiske sammenhenger. Elevene lar seg overbevise gjennom kvantitativ vurdering av et eller flere konkrete tilfeller. Det vil si at elevene direkte måler størrelser, setter tall inn i algebraiske uttrykk, gjør numeriske utregninger eller lignende, og finner på den måten tilstrekkelig evidens for å overbevise dem om at den aktuelle formodningen stemmer. Denne forståelsen for konstatering og overtalelse er blitt identifisert og funnet svært vanlig blant elever av flere forskere (jf. Balacheff, 1988; Bell, 1976; Chazan, 1993; Edwards, 1999). Induktiv resonnering blir ansett som viktig for læring av matematikk, da det baserer seg på å trekke konklusjoner ut fra matematiske mønster, men målet er at elevene skal utvikle seg utover dette. Ved perseptuelt proof scheme baserer elevens konstatering og overtalelse seg på uutviklede mentale bilder. Disse bildene viser sammenhenger og oppfatninger knyttet til de aktuelle objektene, men de mangler egenskaper som gjør det mulig å handle på objektene og forutsi resultatet av en handling fullstendig eller nøyaktig (Harel & Sowder, 1998). De perseptuelle begrunnelsene vil mangle den generelle egenskapen ved generiske eksempler.

Harel og Sowder (1998) karakteriserer både autoritære og empiriske proof schemes som standhaftige og vanskelige å endre. Ved autoritære proof schemes gjelder dette særlig fordi elevenes oppfatning av hvem som er kilden til kunnskap i klasserommet, må endres fra å være læreren til å bli dem selv. Forskerne stiller videre spørsmål om årsaken til disse formene for proof schemes dermed kan ligge i hvordan undervisningen blir gjennomført, og skriver:

> During instruction, empirical justifications themselves serve as examples of arguments given by mathematicians, and may inadvertently sanction the empirical proof scheme as a mode of justification fully acceptable in the mathematical context (Harel & Sowder, 1998, s. 278).

Hvordan læreren legger frem eksempler og begrunnelser i undervisningen, kan på denne måten gjøre bruk av empiriske argument og begrunnelser som tilstrekkelige, matematiske bevis til matematikkspesifikk norm i klasserommet. Om elevene i tillegg har autoritative proof schemes, vil de ikke protestere mot eller utfordre bruken av empiriske argument og begrunnelser som bevis (Harel & Sowder, 1998).

Analytical proof schemes

Dersom eleven lar seg overbevise gjennom en systematisk prosess hvor det trekkes en logisk slutning som vil gjelde «for alle» tilfeller, vil han eller hun kunne plasseres innenfor et analytisk proof scheme (Harel & Sowder, 1998). Kategorien betegner det å validere formodninger gjennom logisk deduksjon i vid forstand, og blir i senere artikler kalt deduktive proof schemes (Harel, 2008; Harel & Sowder, 2007). Harel og Sowder (1998) definerer to underkategorier, transformasjonelle og aksiomatiske proof schemes, som begge har flere egne underkategorier (se tabell 1, ovenfor). Transformasjonelle proof schemes blir kjennetegnet ved generalitet, operasjonell tenkning og logiske slutninger. Ifølge Harel og Sowder (2007) tilfredsstiller generiske eksempler krav om generalitet, operasjonell tenkning og logiske slutninger, og skiller seg derfor fra de uutviklede mentale bildene man baserer tenkningen på innenfor et perseptuelt proof scheme. Elever som blir overbevist og selv forsøker å overbevise gjennom bruk av generiske eksempler, vil i stedet befinne seg innenfor et transformasjonelt proof scheme (Harel & Sowder, 2007).

Elever som befinner seg innenfor aksiomatiske proof schemes, stiller samme krav til konstatering og overtalelse som innenfor transformasjonelle proof schemes. I tillegg finner man innenfor denne kategorien en forståelse av at bevisprosessen må begynne med en gruppe aksepterte prinsipper eller aksiomer (Harel & Sowder, 2007). De ulike underkategoriene av transformasjonelle og aksiomatiske proof schemes vil være på et høyere nivå enn det som er aktuelt for denne oppgaven. Jeg velger derfor å ikke gå nærmere inn på disse.

2.1.3. ELEVERS ARGUMENTASJON, BEGRUNNELSE OG BEVIS I SENERE STUDIER

Edwards (1999) tar utgangspunkt i proof scheme-rammeverket i sine analyser av elevers evne til å begrunne og bevise matematiske formodninger om partall og oddetall. Hun intervjuet 10 elever i 14-15 årsalderen, med hensikt å utforske hva de oppfattet som tilstrekkelig forklaring og begrunnelse for de ulike formodningene. Edwards (1999) antok i forkant av undersøkelsene at elevenes forklaringer kunne bli delt inn i to kategorier: empiriske eller induktive argument og strukturelle argument. Denne antakelsen bygde blant annet på Harel & Sowder (1998) sitt arbeid. Edwards (1999) definerte begrunnelser, argumenter og forklaringer som empiriske hvis de hovedsakelig var knyttet til bruk av eksempler og evidens. Et argument ble regnet som strukturelt hvis det baserte seg på matematiske strukturer eller definisjoner som stod i sammenheng med det som skulle bevises eller begrunnes, og kunne bli bygget opp av matematiske konvensjoner eller formelt språk (Edwards, 1999). I tillegg til sin opprinnelige antakelse, registrerte Edwards (1999) i etterkant av undersøkelsene utvendige og ikke-matematiske begrunnelsesformer i en «verken eller»-kategori, det vil si begrunnelser og argument som verken var empirisk eller strukturelt basert. Edwards (1999) inkluderte «jeg vet ikke»-utsagn, referering til utvendig autoritet, gjentagelse av regel og referering til irrelevant regel i denne kategorien. I denne studien fant Edwards at de intervjuede elevene i større grad var villige til å gi begrunnelser og bevis for formodninger de allerede var overbevist om at var sanne og generelle.

Küchemann og Hoyles (2009) gjennomførte en treåring studie av hvordan elevers evne til å trekke slutninger med grunnlag i matematiske strukturer, altså strukturell resonnering, utviklet seg over tid. Noe av kjernen ved formell bevisføring og utvikling av matematiske forståelse ligger nettopp i å kunne ta i bruk de logiske strukturene i de ulike områdene innen matematikk, altså å kunne resonnere strukturelt (Küchemann & Hoyles, 2009). Forskerne setter i denne sammenhengen strukturell resonnering opp mot empirisk resonnering. Blant sistnevnte inkluderer Küchemann og Hoyles (2009), i tillegg til eksempler, perseptuelle forklaringer og annen empirisk evidens, begrunnelser og forklaringer som baserer seg på vurderinger gjort av autoriteter. Küchemann og Hoyles sin studie viste at elevene evne til å resonnere med grunnlag i matematiske strukturer forbedret seg over tid, men at de likevel manglet tillit til og hadde et skjørt grep om strukturell resonnering og strukturelle begrunnelsesformer.

I deres studie om overgangen fra at eleven benytter seg av empiriske argumenter til at han eller hun gir bevis, og lærerens rolle i denne prosessen, fant Stylianides og Stylianides (2009) at det de kaller *the empirical justification scheme* var gjennomgripende på alle trinn i grunnskolen. Den empiriske oppfatningen av hva som var tilstrekkelig for å overbevise seg selv og andre, karakteriseres av forskerne som «[a] stubborn problem in students' mathematical education» (s. 348), men lar seg endre gjennom målrettet arbeid fra lærerens side. Stylianides og Stylianides (2009) at empirisk utforskning kan hjelpe elevene til å organisere matematiske observasjoner inn i matematiske generaliseringer og videre gi innsikt i hvordan de kan gripe fatt i bevisningen av generaliseringene. Empiriske begrunnelser og argument er dermed av verdi som verktøy for læring. Matematikkundervisningen bør likevel ikke behandle elevenes empiriske argument og begrunnelser som en erstatning for matematiske bevis, skriver forskerne. I stedet bør undervisningen streve mot at elevenes forståelse av hva gyldige bevis, går i retning av det som blir regnet den den matematiske definisjonen på bevis (Stylianides og Stylianides, 2009).

Stylianides (2007) behandler rollen til bevis og argumentasjon i barneskolen, og legger fram to argumenter for at empiriske argument aldri kan fungere som matematisk bevis i skolen, selv på lavere trinn. For det første blir ikke empirisk evidens regnet som gyldig bevis i matematikken fagfelt generelt. Å la elever oppfatte empiriske argument som gyldig bevis vil derfor være å gi elevene en misoppfatning av hva matematikk er. For det andre har elever evnen til å forstå deduktive resonnement, og det å la dem beholde misoppfatningen om at empirisk evidens er gyldige matematiske bevis, vil senere gi dem problemer når det på høyere trinn ikke lenger vil bli godtatt (Stylianides, 2007). Som lærer har man ansvar for å hjelpe elevene å nærme seg forståelsen av hva som regnes for gyldig begrunnelse og bevis i formell matematikk, altså å la elevenes proof schemes nærme seg de rådende proof schemes i matematikk (Harel & Sowder, 2007).

2.1.4. Bruk av eksempler ved argumentasjon, begrunnelse og bevis

Forskning har vist hvordan elever ofte supplerer med eksempler i tillegg til å gi et strukturelt eller deduktivt argument (Chazan, 1993; Edwards, 1999; Healy & Hoyles, 2000; Knuth et al., 2009; Küchemann & Hoyles, 2009). Spørsmålet i denne sammenhengen er om elevene bruker eksemplene som en bekreftelse på at argumentet deres stemmer, eller om de ikke er klar over at argumentet i seg selv kan være generelt. Küchemann og Hoyles (2009) tolker denne suppleringen med eksempler dit hen at det i enkelte tilfeller kan være en mer avansert form for empirisk begrunnelse, ved at elever bruker empiriske begrunnelser for å sjekke gyldigheten ved et strukturelt argument.

> (…) this can be seen as a rational way of coping with a degree of uncertainty about the influence of other features of the situation that might render their reasoning invalid, rather than as a lack of appreciation of such an argument's power. Thus, we suggest that, although recourse to empirical data may in many cases indicate a naive understanding of proof, it need not do so. (Küchemann & Hoyles, 2009, s. 189).

I stedet for å tolke bruk av eksempler som mangelfull forståelse av hva bevis er, kan et alternativ være at elevene tar høyde for at beviset deres kan inneholde mangler eller feil de selv har oversett (Küchemann & Hoyles, 2009). Chazan (1993, s. 383) skriver: «as beginning provers, students do not have strong reasons to believe that deductive proofs guarantee safety from counterexamples». Bruken av empiriske begrunnelser som supplement til strukturelle eller deduktive argument, kan dermed knyttes til de empiriske begrunnelsenes forklarende egenskap, da disse gir en direkte inngang til hva påstanden går ut på og hjelper en til å overbevise seg selv eller andre om hvorvidt den er sann eller ikke (Healy & Hoyles, 2000).

2.2. Interaksjonen mellom elever i grupper

Variasjonene mellom de formene for interaksjon som elever kan engasjere seg i, påvirker mulighetene for læring i interaksjonen (Cobb, 1995). Hvis man som lærer eller utdanningsforsker skal kunne forstå og legge til rette for læring i mindre elevgrupper, vil det derfor være av betydning å kjenne til ulike former for interaksjon og samarbeid som kan finne sted i slike grupper (som undersøkt av blant annet Mueller et al., 2012). Videre skal jeg først ta for meg det sosiale perspektivet ved argumentasjon, begrunnelse og bevis og begrepet sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996). Deretter vil jeg presentere ulike former for interaksjon og samarbeid som tidligere forskning har identifisert, og noen utvalgte elementer som virker inn på elevinteraksjonen. Mye av dette baserer seg på Cobb (1995) sitt arbeid, der han har gjennomført fire casestudier hvor han intervjuet og observerte elever som arbeidet sammen i par. Målet med studiene var å se sosial interaksjon fra ulike læringsteoretiske perspektiv, avdekke hvorvidt elevene engasjertes i matematisk utforskning når de arbeidet sammen i små grupper, og i hvilken grad de samarbeidende aktivitetene bidro til elevenes matematiske læring. Dette vil senere bli nyttige perspektiver å ha med seg i analysene av datamaterialet mitt.

2.2.1. Argumentasjon, begrunnelse og bevis som sosiale aktiviteter

I denne oppgaven ser jeg på hvordan elever på 8. trinn argumenterer for gyldighet ved ulike matematiske formodninger. Argumentasjon kan bli regnet som en sosial prosess, da det er en matematisk forklaring som blir formet med hensikt om å overbevise en selv eller andre om sannheten ved en matematisk idé (Mueller et al., 2012). Bell (1976, s. 24), i sin artikkel om elevers forklaringer og bevis i matematiske situasjoner, skriver at bevis i sin essens er en offentlig aktivitet, da den er rettet mot en potensiell tviler. Tvileren kan både være en faktisk person (som må bli overtalt) eller en indre tviler (som trenger konstatering). I en begynnende bevisprosess vil man gjerne gjøre en indre utprøving av argument og begrunnelser, som man senere presenterer for andre (Bell, 1976).

Forklaringer, begrunnelser og argumentasjon fungerer som et middel for å klargjøre elementer ved egen tenkning, som ikke vil være umiddelbart tilgjengelig for andre. Til dette ligger det føringer og forventninger til hvordan disse forklaringene godtas i gruppen, med hensyn både til det sosiale og til det matematiske. Stylianides (2007) skriver at hvorvidt et argument aksepteres som en gyldig forklaring eller bevis, vil i stor grad avhenge av gruppen der argumentet legges frem. Den endelige begrunnelsen eller beviset blir dermed et resultat av en sosial diskurs, hvor deltakerne blir enige om å akseptere eller ikke akseptere definisjonene eller antagelsene argumentet bygger på, formuleringen på argumentet og representasjonsformen (Stylianides, 2007). Argumentasjon som blir benyttet, kan i tillegg speile normer og forventinger for hvordan matematikk skal bli presentert og begrunnet i klasserommet (Yackel & Cobb, 1996).

2.2.2. SOSIOMATEMATISKE NORMER FOR ARGUMENTASJON OG BEGRUNNELSE

Yackel og Cobb (1996) vurderer forventninger og uskrevne regler om at løsninger, svar og meninger skal begrunnes og argumenteres for, som eksisterer i et klassefellesskap, som generelle sosiale normer for klasserommet. Normer for argumentasjon, begrunnelse og forklaring, for eksempel at elevene skal begrunne svarene de gir, vil gjelde i de fleste fag og er ikke matematikkspesifikke. Derimot regner Yackel og Cobb (1996) normer for hva som gjelder som en ulik matematisk løsning, en elegant og hensiktsmessig matematisk løsning og en akseptabel matematisk forklaring, som spesifikke for matematikkfaget, og kaller disse sosiomatematiske normer. De sosiale og sosiomatematiske normene ser Cobb og Yackel (1996) som del av et større rammeverk for hvordan interaksjonen mellom elever i et klasserom eller en gruppe kan bli analysert ut fra et sosialt og et individuelt psykologisk perspektiv. Normene forhandles frem mellom deltakerne i klasserommet eller gruppen. Tradisjonelt faller styringen av forhandlingen og formingen av de sosiale normene på læreren som autoritetsperson. Likevel kan elevene ses som sentrale bidragsytere, da denne forhandlingsprosessen også kan endre på den enkelte elevs syn på egen rolle i klassen, de andres rolle og matematiske aktiviteter generelt er (Cobb & Yackel, 1996).

De sosiomatematiske normene er sosiale normer som er spesifikke for matematikkundervisningen, og er nært knyttet til den enkeltes matematiske forestillinger og verdier (Yackel & Cobb, 1996). Gjennom å forhandle frem sosiomatematiske normer, konstruerer elevene aktivt personlige forestillinger og verdier knyttet til matematikk, noe som gjør dem mer matematisk autonome (Yackel & Cobb, 1996, s. 474). Hvilke sosiomatematiske normer for gyldig argumentasjon og begrunnelse som ligger til grunn i en elevgruppe, vil si noe om læreren som representant for matematikk. Hvis en lærer for eksempel stadig godtar empiriske begrunnelser fra elevene som gyldig argumentasjon for at noe er sant, kan dette feste seg som en sosiomatematisk norm for gyldig argumentasjon i elevgruppe.

2.2.3. ANTATT-FELLES FORSTÅELSE

«Taken-as-shared» beskriver situasjoner enten hvor elever (og lærere) antar at man deler samme forståelse av noe, hvor man er villig til å overse det som er av tvil fordi det ikke er mulig å unngå uklarheter, eller hvor man antar at de andre kommer til å forstå det samme hvis de «leser mellom linjene» (Voigt, 1995, s. 172). Begrepet viser altså til hvordan elever og lærere i en klasseromssituasjon kan oppleve å dele forståelse av noe. I møte med matematiske problem vil elevene ha ulike oppfatninger og tolkninger av situasjonen, men som de likevel opplever at deles av gruppen. Ved visse tilfeller vil elevene selv oppdage at tolkningene deres ikke stemmer overens. Da vil det som var antatt-felles bli gjenstand for diskusjon, noe som igjen gir mulighet for læring (Voigt, 1995). Cobb (1995) fremhever viktigheten av at elevene etablerer et antatt-felles grunnlag for kommunikasjon om den matematiske situasjonen, for at interaksjonen mellom dem skal fungere godt. På samme måte skriver Balacheff (1991, s. 188) at hvis ikke elevene evner å koordinere sine ulike tolkninger og synsvinkler, kan den sosiale interaksjonen mellom dem bli mer et hinder enn en fordel.

2.2.4. ULIKE INTERAKSJONSFORMER OG SAMARBEID OM ARGUMENTASJON

Interaksjon og samarbeid mellom elever i mindre grupper kan ta ulike former. Cobb (1995) skiller mellom interaksjoner hvor elevene fremdeles arbeider med å finne en løsning på en oppgave, og hvor elevene har kommet frem til ulike løsninger og må forhandle seg frem til hvilken løsning som er den rette eller den beste. I situasjoner hvor elevene fremdeles var i løsningsprosessen av en oppgave, observerte Cobb (1995) i sine case-studier at samarbeidet mellom elevene enten kunne være direkte eller indirekte. Ved direkte samarbeid koordinerer elevene forsøkene sine på å løse en oppgave eksplisitt. Indirekte samarbeid, derimot, foregår når elevene tenker høyt og tilsynelatende løser oppgaven uavhengig av hverandre. I slike situasjoner er samarbeidet indirekte fordi elevene til tross for å ikke være forpliktet til å høre hva den andre sier, likevel bygger videre på det som blir sagt og gjort i sine egne forklaringer. Læring oppstår gjennom indirekte samarbeid når en elev sier og gjør noe som tilfeldigvis er aktuelt og avgjørende for den andre elevens tenkning på det tidspunktet. Cobb (1995) sine case-studier viste at indirekte samarbeid så ut til å gi mer læringsutbytte enn direkte samarbeid. Dette kan ha med å gjøre at direkte samarbeid forekom hovedsakelig når elevene opplevde oppgaven de arbeidet med som rutine (Cobb, 1995).

I situasjoner der en eller flere elever har kommet fram til en løsning, kan interaksjonen mellom elevene være preget av enten univokale eller multivokale forklaringer (Cobb, 1995). Hvis interaksjonen domineres av perspektivet til en elev, definerer Cobb (1995) den til å inneholde univokale forklaringer. I slike tilfeller vurderer denne eleven samarbeidspartneren sin til enten ikke å forstå det aktuelle matematiske problemet eller til å ha gjort en feil. Den andre eleven godtar vurderingen og retter seg deretter. Cobb (1995) fant i sin studie at denne typen interaksjon i de fleste tilfeller ikke ga opphav til læring. Består interaksjonen mellom elevene av multivokale forklaringer, vil alle elevene bidra med ulike løsninger, og gjennom forklaring, utfordring og diskusjon kommer elevene fram til en løsning i fellesskap. I motsetning til univokale forklaringer, fant Cobb (1995) at multivokale forklaringer ga stort læringsutbytte. For at multivokale forklaringer skal finne sted i interaksjonen, regner Cobb (1995) det for avgjørende at elevene har etablert et antatt-felles grunnlag for kommunikasjon.

2.2.5. STATUS OG MATEMATISK AUTORITET I MINDRE ELEVGRUPPER

Status kan også ha innvirkning i på interaksjonen i gruppen. Yackel og Cobb (1996) observerte i en av sine undersøkelser en situasjon hvor to elever som ikke var enige om en løsning, begynte å diskutere hvem av dem som hadde den beste blyanten og hvem av dem som var smartest. Reglene for kommunikasjon i en gruppe er knyttet til sosiale normer og sosial autoritet (Cobb, 1995). Sosial autoritet vises når interaksjonen i gruppen blir regulert av en elev (Cobb, 1995). Dette kan observeres gjennom hvem sine tolkninger av situasjonene som får gjennomslag og blir antatt-felles i gruppen.

Matematisk autoritet forekommer når interaksjonen mellom elevene preges av univokale forklaringer. Det vil si når en elev har vurdert en annen elev til enten å ikke forstå den matematiske situasjonen eller til å ha gjort noe feil, og den andre eleven godtar den førstes vurdering og korrigeringer uten å stille spørsmål ved det (Cobb, 1995). En elev kan altså ikke kunne få matematisk autoritet i en gruppe med mindre eleven ble godtatt som den matematisk overlegne av de andre elevene han eller hun samarbeidet med. Denne formen for interaksjon blir dermed etablert av gruppen som helhet, og ikke av kun en elev alene (Cobb, 1995). I de situasjonene hvor Cobb (1995) i sin case-studie observerte tydelige matematiske autoriteter, var det en ujevn maktfordeling mellom elevene som gjorde at arbeidet ikke så ut til å være produktivt for noen av deltakerne.

3.0. METODE: FRA IDÉ TIL GJENNOMFØRT STUDIE

I dette kapittelet skal jeg begrunne valgene jeg har tatt og beskrive metodene jeg har brukt i forbindelse med innsamling, bearbeidelse og analyse av datamateriale. Først vil jeg presentere mitt valg av forskningsdesign og metode og hvordan dette står i sammenheng med studiens forskningsspørsmål. Deretter beskriver jeg konteksten for undersøkelsene, gjennomføringen av datainnsamlingen og formodningene som ble presentert for elevene. Videre tar jeg for meg bearbeidelsen og analysen av det innsamlede materialet, før jeg til slutt diskuterer metodiske utfordringer og etiske forholdsregler jeg har måttet ta hensyn til ved både innhenting og analyse av materialet.

3.1. MÅL OG FORSKNINGSDESIGN FOR OPPGAVEN

Denne oppgaven har til hensikt å belyse hvordan elever begrunner hvorvidt matematiske formodninger er sanne og hvordan den sosiale interaksjonen mellom elevene påvirker deres argumenter og forklaringer. Det har derfor vært hensiktsmessig å gjennomføre intervjuer med mindre elevgrupper. Gjennom gruppeintervju får man mulighet til å få innsikt i både enkeltes forståelse og tenkemåte og hva som skjer når ulike meninger og forståelser møtes (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Jeg har gjennomført fire intervjuer, hvor elevene fikk formodninger knyttet til ulike tallteoretiske felt, som de ble bedt om å bli enige om og argumentere for hvorvidt de var sanne eller usanne. Under intervjuene ble det lagt vekt på interaksjonen mellom elevene. Siden det innsamlede materialet er relativt lite og nærheten til forskningsdeltakerne er stor, vil jeg kalle denne oppgaven et resultat av en småskala kvalitativ studie.

Kvalitativ forskning setter forskningsdeltakerne i fokus, og har et mål om å løfte frem og forstå deres meninger, oppfatninger, handlinger, holdninger, intensjoner og væremåter, på en detaljert og fyldig måte (Cohen et al., 2011). Kvalitative metoder blir regnet som mer åpne og prosessorienterte enn kvantitative metoder (Postholm & Jacobsen, 2011). Forskeren starter gjerne med en vid problemstilling eller overordnede spørsmål, som blir endret og revidert etter hvert som forskningen utvikler seg. Forskningsdesignet formes på den måten gjennom selve forskningsprosessen (Nilssen, 2012). Dette er noe jeg selv har erfart gjennom arbeidet med denne oppgaven. Som en del av prosessen har jeg måttet ta stilling til nye perspektiver og teorier som har blitt aktuelle i arbeidet med det innsamlede materialet. Forskningsspørsmålet har også blitt omformulert en rekke ganger, for så tilslutt å nærme seg det opprinnelige spørsmålet igjen.

Fra et ontologisk og epistemologisk perspektiv er virkeligheten og kunnskapen i kvalitativ forskning noe som oppstår i møtet mellom forsker og forskningsdeltakere (Nilssen, 2012). Relasjonen mellom dem som er involvert i forskningsstudien vil derfor være av stor betydning for konstruksjonen av datamaterialet og hvilke resultater man ender opp med. Dette gjør også at datamaterialet i kvalitativ forskning i mange tilfeller fort kan bli omfattende, tidkrevende og med mange nyanser (Postholm & Jacobsen, 2011). Samspillet mellom forsker og forskningsdeltaker gjør forskningen mer fleksibel, samtidig som det stilles krav om å følge prinsipper for etikk og troverdighet (Nilssen, 2012). Som forsker er det viktig å ha et bevisst og refleksivt forhold til at man selv er med på å påvirke studien, både gjennom at man (som regel) er tilstede i forskningssituasjonen og dermed vil ha innvirkning på informantens handlinger, og gjennom de forforståelsene man har av situasjonen og forskningsfeltet (Nilssen, 2012).

3.1.1. GRUPPEINTERVJU SOM KVALITATIV METODE

Intervju er en metode som ofte blir bruket ved kvalitativ forskning. Cohen et al. (2011, s. 409) skriver at «interviews enable participants (…) to discuss their interpretations of the world in which they live, and to express how they regard situations from their own point of view». Intervjuet kan altså gi forskeren mulighet til å få innsikt i den eller de intervjuedes forståelse og tenkning. I mitt prosjekt har jeg valgt å intervjue grupper av elever. Blant fordelene ved gruppeintervju finner man diskusjonene som kan oppstå, og gjennom disse diskusjonene ligger muligheten for stor bredde i svar (Cohen et al., 2011). Gjennom gruppeintervju kan personer med ulike meninger og forståelser møtes. I større grad blir det behov for at synspunkter som legges frem må begrunnes og forklares, ved at enkeltutsagn blir møtt med kommentarer eller spørsmål fra de andre i gruppen (Postholm & Jacobsen, 2011). Som forsker får man da mulighet til å få innsikt i hvordan deltakerne påvirker, støtter opp om, komplementerer og forholder seg til hverandre, og hvordan de behandler eventuelle uenigheter (Cohen et al., 2011). Ved å gjennomføre intervju med grupper av elever, ble det mulig for meg å få tak i hvordan elevene argumenterte ovenfor hverandre og å observere hvorvidt elevene bygde på hverandres argumenter og begrunnelser i konstruksjon av sine egne.

To faktorer er viktig å ta hensyn til ved dette metodevalget. For det første kan det i gruppeintervju skje at en av deltakerne dominerer og gjør så andre deltakere havner i bakgrunnen. Gruppeintervjuer kan også føre til situasjoner hvor enkelte i gruppen ikke ønsker å ytre meninger som går mot resten av gruppen (Cohen et al., 2011). Ved gruppeintervju må elevene altså ta hensyn til hverandre på godt og vondt. For det andre kan det i intervjusituasjoner generelt bli et asymmetrisk maktforhold mellom intervjueren og intervjudeltakerne (Cohen et al., 2011). Den som intervjuer definerer situasjonen, temaet og gjennomføringen av intervjuet. Særlig ved intervju av barn vil det være ubalanse i makt og status, da intervjueren (som en voksenperson) vil kunne bli oppfattet som en naturlig autoritet i situasjonen. Barn kan som en reaksjon på dette handle ut fra motivasjon om å glede intervjueren og et ønske om å svare på riktig måte. Gruppeintervju blir regnet som nyttig ved intervju av barn, da det både skaper en viss trygghet, oppmuntrer til interaksjon og lar barna ta i bruk sitt eget språk og sine egne referanser (Cohen et al., 2011).

3.2. KONTEKSTEN OG UTVALGET TIL GRUPPEINTERVJUENE

Innsamling av data til denne studien ble gjort på et 8. trinn ved en 1-10 skole i en større norsk by. Sammenlignet med kommunen skolen ligger i og nasjonalt, har skolen i lengere tid gjort det bedre enn gjennomsnittet på de nasjonale prøvene, og har hatt gode eksamensresultater. Trinnet hvor jeg gjennomførte mine undersøkelser, bestod av omtrent 60 elever fordelt i tre grupper, og ble karakterisert av lærerne som en faglig sterk gruppe i matematikk. Elevene var hovedsakelig av norsk opprinnelse, men det var en liten andel elever med innvandrerbakgrunn. To lærere underviste i matematikk på trinnet, hvor en av dem var i mitt personlige nettverk. Den andre læreren var i tillegg kontaktlærer på trinnet og ble dermed min hovedkontakt i forbindelse med undersøkelsene. Videre i oppgaven er det denne sistnevnte læreren jeg refererer til.

Jeg opprettet kontakten mellom læreren og meg via e-post, hvor den første e-posten også ble sendt til både rektor ved skolen og min veileder. Læreren avklarte situasjonen med resten av lærerne på trinnet, og sørget for utdeling og innsamling av informasjonsskriv og samtykkeskjema til elever og foreldre. Jeg hadde ikke anledning til å møte verken elever eller foreldre i forkant av undersøkelsesperioden, men jeg presenterte meg selv og prosjektet mitt for hver av de tre gruppene på trinnet før de elevene som skulle bli intervjuet ble med ut av klasserommet.

Utvalget til gruppeintervjuene var et formålstjenlig ikke-sannsynlighetsutvalg, noe som er vanlig i småskala kvalitative undersøkelser (Cohen et al., 2011). Det var 30 elever som leverte samtykkeskjema underskrevet av foreldre og foresatte, og blant disse valgte læreren ut elever til å delta i intervjuene. Kriteriet jeg ga læreren, var at elevene først og fremst skulle være relativt muntlig aktive og villige til å diskutere matematikk. Dette var for å sikre meg best mulig datamateriale. Intervjugruppene bestod av 3-4 elever. Jeg valgte å ha dette antallet elever slik at gruppene skulle være små nok til at elevene ikke kunne la være å involvere seg, men likevel stor nok til at det kunne være et utvalg av ulike forståelser og argumenter. Totalt ble 13 elever intervjuet, fordelt på fire grupper, hvorav en av disse gruppene ble grunnlaget for de senere analysene i denne oppgaven. I tillegg deltok at tre elever fra samme trinn i et pilotintervju.

3.3. DATAINNSAMLINGSPROSESSEN

I det følgende vil jeg presentere hvordan innsamling av materiale til denne studien foregikk. Jeg gjennomførte først et pilotintervju, og deretter fire gruppeintervjuer. Alle disse fem intervjuene ble gjennomført i løpet av samme uke. I tillegg til gruppeintervjuene fikk jeg noe innsikt i hvordan undervisningen hadde foregått og hvilke forkunnskaper jeg kunne forvente at elevene satt inne med, gjennom samtaler med matematikklærerne på trinnet og gjennom å se nærmere på læreboken de brukte.

3.3.1. ERFARINGER FRA PILOTINTERVJUET

Det første gruppeintervjuet jeg gjennomførte var et pilotintervju. Hensikten med dette var å prøve hvordan elevene grep an de valgte formodningene, se hvor kjente de var med dem og få erfaring med å intervjue elever som en gruppe. Her gjorde jeg meg særlig to nyttige erfaringer som fikk ringvirkninger for de senere intervjuene. For det første var det behov for å endre rekkefølgen på formodningene som ble gitt til elevene. I den rekkefølgen formodningene opprinnelig stod, erfarte jeg at elevene sin argumentasjon for den første formodningens gyldighet i tillegg begrunnet gyldigheten ved de to neste formodningene. Det var dermed lite diskusjon å hente ut av disse formodningene etterpå. Jeg valgte derfor å snu rekkefølgen på de tre førte formodningene for de senere intervjuene (se underkapittel 3.2.). For det andre erfarte jeg at det var en viss utfordring å få elevene til å diskutere med hverandre. Blant spørsmålene jeg hadde planlagt å stille elevene, var om at de kunne bli enige om det beste argumentet og skrive det ned. Denne oppgaven fant elevene svært kunstig. Ingen av dem ønsket å skrive, og det endte med at de gjentok alt det som allerede var sagt. I stedet for å be elevene om dette i de senere intervjuene, inntok jeg til tider rollen som en tviler som elevene måtte overbevise. Dette viste seg å fungere godt, fordi elevene fikk en pådriver for å argumentere for sine oppfatninger.

3.3.2. Gjennomføringen av gruppeintervjuene

Intervjuene foregikk på skolen på tidspunkter hvor elevene vanligvis hadde enten matematikkundervisning eller arbeidstimer. Hvor lenge intervjuene varte, begrenset seg derfor til lengden på undervisningstimen, som varierte mellom 45 og 60 minutter. Det ble gjort lydopptak, i tillegg til at alt av skriftlig materiale som elevene produserte i løpet av intervjuet ble samlet inn. Intervjuene hadde en åpen form og var løst strukturert rundt formodningene som ble gitt en etter en til elevene. Elevene ble presentert for fire formodninger, som var skrevet på hver sine kort. Elevenes konklusjoner om hvorvidt formodningene var sanne, ble fulgt opp med varianter av spørsmål om hvordan de kunne være sikre på konklusjonen, om de kunne forklare på en annen måte, og om hvordan de ville overbevist noen andre. På slutten av intervjuet fikk elevene se alle formodningene på nytt, med spørsmål om de hadde noe de ønsket å tilføye. Intervjuet ble avsluttet med en generell samtale om hva det vil si at noe er sant i matematikk.

Det må bli tatt i betraktning at jeg i gjennomføringen av intervjuene var opptatt av å få tak i elevenes oppfatninger og forståelse. I mange tilfeller stilte jeg oppfølgingsspørsmål med hensikt å få større innsikt i dette. Som en konsekvens blir jeg som intervjuer i deler av intervjuene en delaktig medspiller i interaksjonen. I analyse av intervjuene er det dermed nødvendig å ta i betraktning hvordan jeg som intervjuer og naturlig autoritetsperson (jf. Cohen et al., 2011) har innvirkning på elevenes argumentasjon og begrunnelsesbruk. Hvordan jeg som intervjuer stiller elevene spørsmål, og når jeg velger å presentere neste formodning, er med på å etablere sosiomatematiske normer for akseptert og tilstrekkelig argumentasjon og bevis for matematiske formodninger.

3.3.3. Innhenting av tilleggsinformasjon – feltnotater og lærebok

Gjennom uformelle samtaler og e-postkontakt med matematikklæreren jeg samarbeidet med, har jeg fått informasjon om konteksten rundt elevene og om hvordan elevene har vært undervist i tallteori. På tidspunktet gruppeintervjuene ble gjennomført, dreide matematikkundervisningen på trinnet seg om tallteori med mye repetisjon fra mellomtrinnet. Blant annet hadde de fire regneartene, titallssystemet, naturlige tall, partall, oddetall, primtall og negative tall vært gjennomgått. Temaene ble behandlet i andre kapittel av læreboken i matematikk på trinnet, *Sirkel 8A* (Torkildsen & Maugesten, 2006). Elevene kunne dermed forventes å ha en god del forkunnskaper knyttet til matematiske strukturer de kunne gjøre nytte av i intervjuet. Det hadde ikke vært direkte fokus på å bevise i denne sammenhengen, men de to matematikklærerne på trinnet hadde diskutert hvorfor ting var som de var med elevene, og gitt forklaringer på matematiske sammenhenger utover å gi eksempler.

Jeg avklarte med læreren at dette var informasjon som ville komme til å være nyttig for å kunne gi en fyldig beskrivelse av hvor elevene kommer fra når de skal argumentere og trekke slutninger. Informasjonen jeg fikk, har karakter av feltnotater. I tillegg til gruppeintervju og uformelle samtaler med matematikklæreren, har jeg sett på lærebok-kapittelet som elevene arbeidet med i den perioden jeg gjennomførte intervjuene.

3.4. FORMODNINGENE GITT TIL ELEVENE

Under gruppeintervjuene fikk elevene fire matematiske formodninger de skulle diskutere om var sanne eller usanne. De første tre formodningene var knyttet til partall og oddetall, og er tidligere blitt brukt av Edwards (1999, s. 493), i intervjuer av enkeltelever på 9. trinn, med hensikt å få innsikt i hva elevene oppfattet som tilstrekkelige forklaringer. Disse var:

$$\textit{partall} + \textit{partall} = \textit{partall}$$

$$\textit{oddetall} + \textit{oddetall} = \textit{oddetall}$$

$$\textit{partall} \cdot \textit{oddetall} = \textit{oddetall}$$

Formodninger av denne typen er blitt brukt i flere større studier knyttet til elevenes beviskompetanse på de fleste trinn i grunnskolen (bl.a. Healy & Hoyles, 2000; Hoyles, 1997; Knuth et al., 2009; Stylianou et al., 2006), og er av en slik karakter at elevene intuitivt kan oppfatte hvorvidt de er sanne eller usanne. I oppgavene er det matematiske innholdet gjenkjennbart for elevene og i tråd med læreplanen, men samtidig utfordrende nok til å gi noe forskjell i elevenes svar. Hensikten med å ha forholdsvis enkelt matematisk innhold i formodningene, var at den matematiske løsningen i seg selv ikke skulle fungere som et hinder for argumentasjonen (Hoyles, 1997). Som en del av diskusjonen rundt disse formodningene kom elevene som regel inn på hvordan de definerte partall og oddetall. Blant matematiske strukturer knyttet til disse formodningene er delelighet med to og at oddetall er én mer eller én mindre enn partall (Edwards, 1999).

Den fjerde formodningen elevene møtte, er ikke like intuitiv. Hensikten med å presentere elevene for denne formodningen var muligheten for å få større innsikt i elevenes argumentasjon og resonnement. Formodningen skulle, i likhet med de tre om partall og oddetall, vurderes som sann eller usann, og argumenteres for:

> *Hvis man ganger sammen tre tall som kommer etter hverandre i tallrekka, får man alltid et tall som er mulig å dele på 6.*

Formodningen er blant annet blitt beskrevet og brukt som en oppgave av Healy og Hoyles (2000) som en del av en nasjonal spørreundersøkelse i Storbritannia som skulle kartlegge elevers evne til å bevise i algebra og geometri. Oppgaven var i den sammenhengen presentert med ulike mulige bevis som elevene skulle vurdere opp mot hverandre. Den er vanskelig å bevise, men det var heller ikke forventet fra min side at elevene under gruppeintervjuet skulle komme frem til et tilstrekkelig formelt bevis. Likevel var det mulig for elevene å trekke inn ulike matematiske strukturer. For eksempel var formodningen «partall · oddetall = partall», som etter å ha blitt argumentert for innledningsvis vil kunne gjelde som en akseptert sannhet, aktuell for å argumentere for at produktet av de tre tallene alltid vil bli et partall. Elevene kunne også merke seg at en av faktorene alltid vil «være i 3-gangen» og dermed delelig med tre, og at tallet 6 kan betraktes som et sammensatte tall, 2 · 3 (et begrep elevene ut i fra læreboken skulle være kjente med).

3.5. Bearbeiding og analyse av materialet

3.5.1. Transkripsjon og etterarbeid

Lydopptakene fra alle intervjuene ble transkribert. Tekster som produseres av forskeren, slik som transkripsjoner, vil aldri bli helt nøyaktige; mimikk, tonefall, gester og lignende forsvinner idet menneskelige situasjoner blir til tekst, og i tillegg vil forskeren alltid tolke og velge hva som blir lagt vekt på (Nilssen, 2012). I mitt arbeid med transkripsjonene var jeg nøye på å få en mest mulig korrekt gjengivelse av det elevene sa, da dette gir innsikt i forståelsen deres og interaksjonen mellom dem. Transkriberingen ble gjort i kortest mulig tid etter hvert intervju, slik at det som ble gjort og skrevet under intervjuet i best mulig grad kunne bli knyttet til det som ble sagt. Elevenes skriftlige arbeid ble merket med linjenummeret for utsagnet på tidspunktet hvor tegningen eller utregningen fant sted. Notater fra samtaler med lærerne på trinnet og tanker jeg hadde gjort meg underveis i innsamlingsprosessen ble renskrevet, slik at det skulle være bedre tilgjengelig for senere bruk.

3.5.2. Analyseprosessen

Analyse handler om å finne mønstre og mening i et uoversiktlig datamateriale. For å kunne gjøre det må materialet bli plukket fra hverandre til mindre meningsbærende biter, som igjen blir satt sammen til å skape en ny helhet. Tilslutt blir ny mening tilført, gjerne gjennom et teoretisk perspektiv (Postholm & Jacobsen, 2011). Analysen av kvalitative data er det nærmest umulig å unngå at er fortolkende (Cohen et al., 2011). En av de største utfordringene ved å analysere intervju, ligger i å ivareta helheten samtidig som man plukker ut interessante situasjoner, for «in interviews often the whole is better then the sum of its parts» (Cohen et al., 2011, s. 427). I ettertid har jeg hørt igjennom intervjuene flere ganger, blant annet for å kontrollere at transkripsjonene ga en god og nøyaktig gjengivelse av elevenes diskusjoner, men først og fremst for å beholde et blide av helheten av de ulike intervjuene. I analyseprosessen har jeg vekslet mellom å se på enkeltsituasjoner i intervjuene og på intervjuene som helhet.

Analysearbeidet jeg har gjort av det innsamlede datamaterialet var todelt. I den første delen av analysearbeidet ble det matematiske innholdet i intervjusituasjonene og sentrale argument og begrunnelser elevene ga, identifisert og kodet med utgangspunkt i pragmatiske og konseptuelle bevisformer, proof schemes og ulike former for begrunnelser. For å kunne plassere elevenes argumenter, begrunnelser og bevis i ulike kategorier har det vært behov for gjentatte ganger å gå tilbake til teorien. Jeg har studert litteratur, sett på datamaterialet og gått

Tabell 2 Kategorisering av begrunnelser

Utvendige begrunnelser	Empiriske begrunnelser	Strukturelle begrunnelser
Rituell begrunnelse: - Referere til form eller utseende («Det ser riktig ut») Autoritær begrunnelse: - Referere til lærer, lærebok, undervisning eller lignende - Omformulering av gitt formodning (lage en regel) - «Det bare er sånn»-argument Symbolmanipulasjon	Naiv empirisme Avgjørende eksperiment Induktiv begrunnelse: - Innsetting av tall - Direkte måling - Numeriske utregninger - Vise til mønster Perseptuell begrunnelse: - Tegning av tall	Strukturelle begrunnelser: - Benytte partall og oddetall som enheter i seg selv - Benytte definisjon av partall, oddetall eller delelighet med seks Transformasjonell begrunnelse: - Generisk eksempel Aksiomatisk begrunnelse - Tankeeksperiment

tilbake til litteraturen igjen for å kontrollere at det jeg har sett, stemmer med det som er skrevet av tidligere forskere. Jeg har studert de matematiske formodningene og tatt stilling til hvilket matematisk innhold som kan relateres til dem. Her har jeg også tatt hensyn til hva som har vært skrevet om dem i tidligere forskning, for eksempel hvilke elevsvar og begrunnelser har Edwards (1999) godtatt som strukturelle for de ulike formodningene knyttet til partall og oddetall i sin studie. Denne vekslingen mellom studie av relevant litteratur og studie av datamaterialet gir meg grunnlag for å plassere elevenes argumenter, begrunnelser og bevis under ulike koder og kategorier (tabell 2).

Den andre delen av analysearbeidet bestod i å studere enkeltutsagn og begrunnelser etter hvilke roller de spilte i interaksjonen mellom elevene, hvordan de virket inn på argumentasjonen, og hvilke former for samarbeid og interaksjon mellom elevene dette antydet. I arbeid med elevenes utsagn og interaksjon startet jeg med en åpen koding hvor jeg beskrev elevenes utsagn med utgangspunkt i rollen de spilte i dialogen. Deretter ble kodene sortert i følgende kategorier: initiativtaking (legge frem påstand eller idé, lede an, trekke konklusjon), støttende utsagn (bekrefte, godta si seg enig, forsvare, bygge videre) og vurderende utsagn (korrigere, justere, endre retning, stille spørsmål). Disse kodene kan relateres til kodene og kategoriene brukt av Mueller et al. (2012) i analyse av elevenes samarbeidende konstruksjon av argumenter. Lignende utsagn eller handlinger er også identifisert av Martin et al. (2005) i analyse av interaksjonen mellom lærer og elever ved undervisning og læring av bevis. I de støttende og vurderende utsagnene ga et uttrykk for hvilke argumenter og begrunnelser elevene godtok eller ikke, samtidig kunne mønster i hvilke elever som ga ulike former for utsagn antyde matematiske eller sosial autoritet (Cobb, 1995).

Alle gruppeintervjuene ble analysert, men for å kunne gå tilstrekkelig i dybden har jeg valgt å presentere analysene av kun ett intervju: gruppeintervjuet av elevene Dina, Erik, Frida og Gaute (alle navnene er fiktive). Jeg har valgt å presentere dette intervjuet fordi analysene viste stor bredde i begrunnelsesformer og interaksjonsmønster. Alle elevene i denne gruppen var muntlig aktive og bidro til argumentasjonen, noe som ikke gjaldt alle de intervjuede gruppene.

I hver av situasjonene er det valgt ut et utdrag der interaksjonen mellom elevene i gruppen blir analysert ved hjelp av tabellen nedenfor (tabell 3). Tabellen er inspirert av Martin et al. (2005) sine analyser av interaksjonen mellom lærer og elever. Da det i denne situasjonen er flere deltakere, kunne ikke Martin et al. (2005) sine diagrammer bli brukt direkte. I tabellen nedenfor (og i de videre tabellene i kapittel 4) refererer D, E, F, G og I til at handlingen eller utsagnet tilhører henholdsvis Dina, Erik, Frida, Gaute og intervjueren. I tillegg til å analysere interaksjonen mellom elevene, tar tabellen altså hensyn til at jeg som intervjuer har innvirkning på situasjonen. Handlingene beskrevet i tabellen tilsvarer kodene som er brukt for å beskrive elevhandlinger. Pilene viser hva hvert utsagn eller handling er en reaksjon eller kommentar på. Hvis det ikke følger en pil etter en handling, vil det dermed si at ideen, argumentet, vurderingen osv. ikke følges opp. I tilfeller hvor flere handlinger står på samme linje, foregår de uavhengig av hverandre og relativt samtidig, men handlinger til venstre kommer før handlinger til høyre. Tallene 1, 2, 3 osv. merker argumenter eller begrunnelser som har en vesensforskjell fra hverandre. Disse klassifiseres i begrunnelseskategori-kolonnen og det blir referert til linjenummer i transkripsjonsutdraget. Er argumentet merket for eksempel 1a, 1b eller lignende, betyr det at det aktuelle argumentet tydelig stammer fra argumentet merket med 1, men det er blitt omformulert, utdypet eller utvidet. Dette kommenteres også i begrunnelseskategori-kolonnen.

Tabell 3 Eksempel på analysetabell av begrunnelse og interaksjon i ulike situasjoner

LINJE	BEGRUNNELSESKATEGORIER	INTERAKSJONSMØNSTER, LINJE 84-113
64	1: Strukturell begrunnelse: - Generisk eksempel	F: Lede an, fremme argument 1 G: Si seg enig I: Spørsmål
70	1b: Strukturell begrunnelse - Delelighet med 2	F: Forsvare E: Forsvare G: Utvide 1b

3.6. VALIDITET OG RELIABILITET VED OPPGAVEN

All ny forskning har et ansvar overfor sitt fagfelt om at de nye forskningsbidragene ivaretar visse krav om validitet og reliabilitet. Slike krav kan være kredibilitet, overførbarhet, avhengighet og bekreftbarhet (Cohen et al., 2011). Forskning om og med mennesker kan aldri bli 100 prosent valid og reliabel, men gjennom å reflektere over og være oppmerksom på validitet og reliabilitet gjennom hele forskningsprosessen kan man strekke seg mot idealet (Cohen et al., 2011). I kvalitativ forskning er forskeren alltid med på å påvirke studien. Forskeren alltid vil ta med seg egne forståelser inn i studien, i form av erfaringer, kunnskap, bakgrunn, verdier, forutinntatthet og teoretisk rammeverk. Forskningen kan dermed ikke bli objektiv eller fri for verdier (Nilssen, 2012). Det er derfor viktig å være åpen om hvilke valg man har tatt, og grunnene for dem. Kredibiliteten, eller troverdigheten, ved forskningen ivaretas gjennom en slik åpenhet om hvordan innsamlingen av og arbeidet med datamaterialet har foregått (Postholm & Jacobsen, 2011), noe jeg har ønsket å formidle gjennom dette kapittelet.

Med et relativt lite elevutvalg som utgangspunkt, vil det ikke være mulig for meg å trekke konklusjoner om elever på 8. trinn sine bevisforståelser generelt. I lys av annen forskning som er gjort på området, kan jeg imidlertid bidra med nye tolkninger som igjen kan gå inn i et større bilde om elevers forståelse av og utfordringer med bevis og argumentasjon. Resultatene fra denne oppgaven kan gjennom dette sies å ha en viss overførbarhet. Funnene i kvalitative studier er avhengige av konteksten hvor de fant sted, og den samme studien kan dermed aldri bli gjennomført en gang til (Nilssen, 2012). Derfor vil jeg etter beste evne i denne oppgaven beskrive undersøkelsens kontekst slik at funnene skal kunne gis mening ut fra den. Gjennom å snakke med matematikklærerne på trinnet og se på lærebokkapittelet elevene arbeidet med, har jeg fått innsikt i undersøkelsenes kontekst og kunnet sette det som en ramme rundt funnene. På denne måten ivaretar jeg krav om avhengighet og bekreftbarhet ved studien.

3.7. ETISKE FORHOLDSREGLER

Nærheten mellom forsker og forskningsdeltakere, gjør at det i arbeid med kvalitative undersøkelser er viktig å ta etiske forholdsregler ovenfor forskningsdeltakerne. Som forsker er man også avhengig av forskningsdeltakernes samarbeid og velvilje. Ved intervju er det hovedsakelig tre etiske retningslinjer som bør bli fulgt: informert samtykke, konfidensialitet og konsekvenser for forskningsdeltakerne (Cohen et al., 2011). Dette prosjektet hadde fått godkjenning av Personvernombudet for forskning ved Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste (NSD) før kontakten ble opprettet med skolen, og i henhold til NSDs retningslinjer ble elevene og elevenes foresatte informert om prosjektet gjennom et informasjonsskriv (se vedlegg A). Dette ble delt ut av læreren og gjort tilgjengelig på skolen læringsportal. Informasjonsskrivet åpnet for at jeg kunne bli kontaktet hvis de foresatte hadde noen spørsmål. Samtykke til intervju og lydopptak ble gitt ved fysisk innlevering av samtykkeskjema eller via e-post.

I forkant av det første intervjuet i hver klasse presenterte jeg meg for elevene og informerte om hva intervjuene gikk ut på, at det skulle gjøres lydopptak og at alle navn kom til å bli endret. Elevene fikk også her spørsmål om de ønsket å delta, og de ble informert om at de når som helst kunne trekke seg, også i etterkant av intervjuet. For å sikre i konfidensialitet er elevenes navn endret på alt skriftlig materiale. Lydopptak og råmateriale slettes i henhold til

NSDs retningslinjer ved prosjektets slutt. Under intervjuene var jeg derfor opptatt av at elevene skulle oppleve at de ble behandlet med respekt, og at de fikk noe igjen for å være med, i og med at de gikk ut av matematikkundervisningen for å være med på intervjuet.

4.0. ANALYSE AV GRUPPEINTERVJUET

Innledningsvis i denne oppgaven stilte jeg et todelt forskningsspørsmål. Gjennom dette kapittelet ønsker jeg å gi grunnlag for at disse spørsmålene kan bli besvart. Først og fremst er målet med kapittelet å gi innsikt i hvordan elevene i gruppen begrunner og argumenterer for gyldigheten ved de matematiske formodningene. I tillegg skal analysene gi et bilde av hvorvidt interaksjonen mellom elevene virker inn på deres argumentasjon, begrunnelse og bevis av formodningene. For å kunne gjøre dette på en best mulig måte har jeg valgt å kun presentere analysene av ett av gruppeintervjuene. Elevene som deltok her var Dina, Erik, Frida og Gaute. Alle elevene var svært aktive i diskusjonen av formodningene, og de varierte, utdypet og forklarte de muntlige begrunnelsene sine med utregninger og tegninger. De var muntre og virket ivrige på å overbevise både seg selv, hverandre og meg som intervjuer. Dette førte med seg at elevene ofte snakket samtidig og avbrøt hverandre. Likevel uttrykte elevene at de syntes det var uvant og vanskelig å begrunne hvorfor en formodning var sann eller ikke.

Videre i kapittelet følger analyse av fire situasjoner fra gruppeintervjuet. De presenteres kronologisk etter hvordan intervjuet ble gjennomført, og er direkte knyttet til de fire formodningene elevene ble presentert for i løpet av intervjuet. Situasjonene er valgt slik at de skal kunne vise hvilke begrunnelsesformer elevene benyttet seg av i forbindelse med hver formodning, og hvordan argumentasjonen og begrunnelsene utviklet seg enten for en enkelt elev eller i gruppen som helhet. I intervjusituasjoner er forskeren delaktig og med på å påvirke interaksjonen. Det vil derfor være nødvendig å ta høyde for min rolle som intervjuer som en del av analysearbeidet. For å kunne få øye på mønster i interaksjonen mellom elevene ser jeg det som nødvendig å presentere lengre transkripsjonsutdrag, fulgt av analysetabeller (se delkapittel 3.5.2., tabell 3 for forklaring av tabellene). Deretter følger analyser og funn som underkapitler etter hver situasjon. Enkelte elementer fra det skriftlige materialet elevene produserte er også inkludert. Hensikten med dette er å støtte opp under analysene, og i visse tilfeller er det også nødvendig for å kunne få en tilstrekkelig innsikt i arbeidet til elevene. Mot slutten av dette kapittelet vil jeg trekke sammen resultatene fra hver av situasjonene og se på intervjuet som helhet.

4.1. ULIKE HENSIKTER OG GODTATT ARGUMENTASJON

4.1.1. PRESENTASJON AV SITUASJON 1: PARTALL + PARTALL = PARTALL

Situasjon 1 begynner helt i starten av intervjuet, med formodningen *partall + partall = partall.* Elevene slo med det samme fast at dette var sant.

3. Frida:	Den er sann. For det lærte vi i timen, gjorde vi ikke det?
4. Erik:	M-m.
5. Dina:	Vi har gått gjennom det i timen.
6. Intervjuer:	Ja. Men hvordan vet dere at den er sann, da? Annet enn at det …
7. Frida:	Fordi at for eksempel to pluss to …
8. Dina:	Det er fire.
9. Intervjuer:	Ja?
10. Frida:	For at to er partall og to er partall og fire er partall.

Elevene fikk spørsmål fra meg om de på grunnlag av eksempelet 2 + 2 = 4 kunne være helt sikker på at formodningen ville stemme for alle tall. Frida og Erik ga da eksempelet 134 + 134 = 268 (linje 20 og 21), som de brukte til å konkludere med at formodningen ville være sann for alle tall. Videre stilte jeg elevene spørsmålet om hvordan de ville ha overbevist noen som var uenige i formodningen.

27. Gaute:	Jeg ville sagt at hvis man har noe som kan deles på to, og så legger til noe som også kan deles på to, da må …
28. Frida:	… det kunne deles på to. *(Elevene ler)* Nei, det ga ikke noe mening. Hva med at hvis du har for eksempel to pluss to er lik fire da, så har du jo en pluss en, som også er partall, så har du en pluss en som er partall, så … nei, jeg vet ikke jeg.
29. Intervjuer:	En pluss en som er partall?
30. Erik:	En er jo ikke et partall, det er jo et oddetall.
31. Frida:	Nei, det er det jo ikke!
32. Erik:	Men det kan jo være lurt å vise hva man regner ut da. Hvis …
33. Gaute:	*(Avbryter)* Hvis man har et partall, da må man legge til noe som ikke kan deles på to for at det skal bli et oddetall.
34. Frida:	Da får vi ingen til overs!
35. Intervjuer:	Får ingen til overs? Nå er jeg … Får man noe til overs hvis man har et oddetall?
36. Dina:	Nei, men, men jo, på en måte.
37. Frida:	*(Samtidig)* Jo, hvis man tar oddetall pluss partall så får man noe til overs, og da er det jo ikke …
38. Dina:	Da får du jo en mer eller noe sånt.

39. Erik:	*(Samtidig)* Hvis du skal dele på to ja.
40. Intervjuer:	Får jo fortsatt et helt tall?
41. Erik:	Vi får et tall ja, Frida, men det blir ikke et partall
42. Frida:	Jo, men se!
43. Dina:	Da har vi noe til overs av partallet.
44. Frida:	Jo, for til overs da mener jeg at hvis du tenker deling, hvis vi skal dele det på to så får vi en til overs du hver gang du tar partall … *(Ikke mulig å høre resten av setningen)*
45. Gaute:	*(Avbryter)* Eller så kan du dele tallet på to.
46. Dina:	*(Samtidig)* Eller du får oddetall.
47. Frida:	Eller dele tallet på to. Eller du kan finne ut … Nei, det har var vanskelig! *(Elevene ler)*

Tabell 4 Begrunnelse og interaksjon i situasjon 1

LINJE	BEGRUNNELSESKATEGORIER	INTERAKSJONSMØNSTER, LINJE 27-47
27	1: Strukturell begrunnelse: - Delelighet på to - Partall som enheter i seg selv	G: Legger fram argument 1
28	2: Empirisk begrunnelse: - 2 + 2 = 4	F: Bedømmer 1 ugyldig Omformulerer 2 E: Korrigerer 2 F: Godtar korreksjon
32	3: Empirisk begrunnelse: - Vise utregning	E: Legger fram ide 3
33	1a: Strukturell begrunnelse - Delelighet med to	G: Omformulerer 1a
34	1b: Strukturell begrunnelse - «Ingen til overs» (delelighet)	F: Bygger videre 1b I: Spørsmål D: Forsvarer 1b F: Forsvarer/utvider 1b
39	1c: Strukturell begrunnelse - Delelighet med to	D: Foreslår omformulering E: Utvider 1c I: Spørsmål E: Korrigerer 1b, utvider 1c F: Forsvarer D: Omformulerer 1c F: Forsvarer, utvider 1b+c G: Korrigerer D: Korrigerer F: Gjentar, trekker argumentasjon

4.1.2. ULIK HENSIKT GIR ULIK BEGRUNNELSESFORM

Situasjon 1 viser blant annet hvordan elevene bruker ulike begrunnelsesformer etter hvilke spørsmål som blir stilt og hva som er hensikten med begrunnelsen. Frida og Dina refererer til tidligere undervisning for å konstatere ovenfor seg selv og hverandre at formodningen var sann. Formodningen *partall + partall = partall* er ikke ny for elevene, og ved å referere til tidligere undervisning gis deres påstand om at formodningen er sann, ekstra tyngde. Dette kan ses som en parallell til det å referere til en autoritet som grunnlag for overbevisning, altså en begrunnelsesform innenfor external conviction proof scheme (Harel & Sowder, 1998), da undervisningen på samme måte som en lærebok og læreren, er elevenes møte med matematikk i hverdagen, og innholdet der kan dermed symbolisere «gyldig matematikk» (Martin et al., 2005).

På spørsmål om *hvordan* de kan vite at det er sant (linje 6) gir Frida et eksempel som viser at formodningen er sann fordi «to er partall og to er partall og fire er partall» (linje 10). Hun gjør dermed en utbytning av det generelle «partall» med konkrete tall, og kan sies å gjøre et forsøk på å overtale gjennom bruk av empiriske begrunnelser (Harel & Sowder, 1998). Dette er i tillegg en form for naiv empirisme og evidens som bekrefter formodningen, men som ikke har noen forklarende eller bevisende egenskap. Noe av det samme kan man se i linje 20-23, hvor Erik og Frida på spørsmål om formodningens generalitet gir eksempelet 134 + 134 = 268 som et avgjørende eksperiment. Denne bruken av eksempel skiller seg fra Fridas naiv empiristiske eksempel i linje 7 og 10, fordi motiveres av et spørsmål om generalitet og er dermed et avgjørende eksempel (Balacheff, 1988).

Elevene benytter altså i denne situasjonen følgende begrunnelsesformer med tilsvarende hensikt: 1) referering til undervisning for å konstatere at formodningen er sann (linje 3-5), 2) naiv empirisme for å forklare hvordan de vet dette (linje 7-10), 3) avgjørende eksperiment som forsikring om at formodningen vil gjelde alle tall (linje 20-21). Hver av disse begrunnelsesformene kommer i reaksjon på spørsmål fra meg som intervjuer. Det var først da elevene ble spurt om hvordan de ville *overbevise noen andre* om det samme, at elevene tok i bruk matematiske strukturer knyttet til formodningen i sin argumentasjon (fra linje 27). I denne delen av situasjonen kan man identifisere tre tydelig ulike argumenter (se tabell 4, ovenfor): 1) Gautes innledende argument (linje 27), hvor partall behandles som enheter i seg selv og som refererer til delelighet med to, 2) Frida sitt empiriske argument (linje 28), som baserer seg på eksempelet 2 + 2 = 4, men også kan se ut til å definere partallet 2 som par av enere, og 3) forslaget til Erik om å vise hvordan man regner ut (linje 32). Som man kan se i tabell 4 er det Gaute sitt argument gruppen bygger videre på.

4.1.3. GODTATT ARGUMENTASJON OG MATEMATISK AUTORITET

Dialogen mellom elevene fra linje 27 gir et inntrykk av hvordan begrunnelser og argumenter må bli godtatt av gruppen og at elevene støtter, korrigerer og bygger videre på hverandres argumenter. Gautes påbegynte argument fra linje 27 (argument 1, tabell 4), blir ikke fullført og heller ikke godtatt av gruppen, da elevene både ler og Frida utbryter «Nei, det ga ikke noe mening» (linje 28). At argumentet ikke blir godtatt av gruppen, gjør at det ikke vil kunne bli regnet som et bevis, til tross for at det inneholder sentrale elementer av det som matematisk sett vil være en tilstrekkelig forklaring (Harel & Sowder, 2007; Stylianides, 2007).

For at argumentet skal bli godtatt, endrer Gaute i linje 33 formuleringen av argumentet fra linje 27 (1a i tabell 4). De andre elevene har ikke tatt i bruk det innledende argument til Gaute, da dette ikke ble ansett som meningsfullt, men har i mellomtiden lagt frem to andre mulige måter for å forklare formodningens gyldighet (av Frida 2, og Erik 3). Gaute bygger ikke videre på noen av disse, annet enn å trekke inn oddetall som er blitt nevnt av Erik (linje 30). Argumentet til Gaute er dermed et resultat av indirekte samarbeid med Erik (Cobb, 1995). Gaute forsøker videre å argumentere for at summen av to partall blir et partall, ved å snu på sitt forrige argument og si at «man må legge til noe som ikke kan deles på to for at det skal bli et oddetall» (linje 33). Dette argumentet leder elevene inn på sporet av flere matematiske strukturer knyttet til formodningen: hva et oddetall er, delelighet med to og «en til overs»-aspektet ved oddetall, og herfra er det argument til Gaute som er grunnlaget for den videre dialogen.

Frida sin forklaring i linje 28 (2 i tabell 4) tar utgangspunkt i eksempelet 2 + 2 = 4. Her kan det virke som om hun deler tallet to inn i par av enere, noe som i så fall vitner om at hun tar i bruk strukturer ved partallene, selv om det er empirisk basert, men argumentet er ufullstendig og utydelig, og blir ikke godtatt av Erik. Gaute sin omformulering setter Frida på sporet av «en til overs»-elementet, altså at man ved å dele oddetall på to får én i rest. Elevene er ikke helt enige om hvordan best å formulere dette, men delelighet med to og oddetall sett i sammenheng med partall blir hovedpoengene deres i diskusjonen.

Interessant i denne situasjonen er hvordan Erik forholder seg til Frida. I linje 21 fullfører han utregning til Frida og i linje 30 og 41 kommenterer han feil i begrunnelsen hennes. Det kan virke som om Erik har høy status i gruppen når det gjelder matematikk, og at de andre elevene forventer at Erik har rett og gir ham matematisk autoritet ved å rette seg etter hans kommentarer (Cobb, 1995). Mange av begrunnelsene til Frida ble ledd litt bort av de andre elevene, som om de ikke forventet at de skulle være av noen verdi. Som et videre eksempel på statusforskjellen mellom Frida og Erik, trekker Frida seg i argumentasjonen og Erik kommenterer at en ikke er et partall, som Frida svarer på med å si seg enig. Frida endte med å slå fast at det ikke var enkelt å forklare hvorfor formodningen stemte (linje 47). I tabell 4 kan man se hvordan Fridas argumenter og begrunnelser ofte blir møtt med enten korrigeringer fra elevene eller spørsmål fra intervjueren. Yackel og Cobb (1996, s. 467) skriver at det i mange tilfeller er rimelig for elever å anta at løsningen deres er feil hvis læreren stiller spørsmål ved den. I dette tilfellet kan jeg som intervjuer ha samme innvirkning som en lærer ville ha hatt. Cobb (1995, s. 43) skriver også at situasjoner hvor det er en maktbalanse mellom elevene i form av matematisk autoritet, ikke er særlig produktive. At Frida til slutt gir opp sitt forsøk på å forklare hvorfor formodningen er sann, kan derfor bli sett som en konsekvens av hvordan begrunnelsene hennes er blitt møtt gjennom situasjonen.

4.2. Generisk eksempel som tilstrekkelig bevis

4.2.1. Presentasjon av situasjon 2: Oddetall + oddetall = oddetall

Etter arbeid med den første formodningen er elevene allerede overbevist om at formodningen *oddetall + oddetall = oddetall* ikke stemmer. Elevene går dermed ikke om referering til undervisning eller den naive empirismen for først å konstatere for seg selv, men begynner med det samme Erik har lest formodningen å begrunne hvorfor det ikke stemmer.

65. Frida:	Den er ikke sant, og det kan jeg forklare. Fordi at hvis du har et oddetall for eksempel tre og så skal du plusse på tre så er det seks, og da ser du at du har tre pluss tre *(tegner sirkler mens hun snakker)* og da ser du at du har en i rest liksom og så plusser du på den som er den andre i rest så blir det også to, så da blir det og partall, så da blir det seks.
66. Gaute:	Ja.
67. Intervjuer:	Men jeg skjønner ikke helt det her med rest. For rest snakker man jo gjerne om når man deler på noe og så får man noe igjen som ikke går opp.
68. Frida:	(*Samtidig)* Ja, men da har man ikke …. Da mener jeg at man har til overs.
69. Erik:	*(Samtidig)* Men hun mener liksom at …
70. Gaute:	*(Samtidig)* Hvis du deler på to.

71. Frida: Hvis vi skal prøve dele tre på to så går jo ikke det, så da får dem jo en hver og så er det en som ikke får bli med. Også gjør du det samme med andre tallet og så er det jo en som ikke får bli med.

72. Erik: *(Tegner videre på Frida sin tegning)* Og her er det jo to

73. Dina: *(Samtidig, peker på tegningen)* Og da får jo dem være sammen.

74. Erik: Så blir det jo to her og, og da er det igjen en her. Så da blir jo dem sammen da *(Knytter de to resterende sirklene sammen med en pil)*

75. Frida: *(Samtidig)* Og da blir dem sammen.

76. Erik: Da blir dem sammen da. Og dem her sammen blir jo to …

77. Dina: Hvis det hadde vært sju, så hadde du hatt en i rest for at det skulle være partall.

78. Frida: … så da plusser du på den.

79. Erik: Det blir litt dumt å si det er rest da, det blir jo feil sagt.

80. Dina: Ja, det blir det.

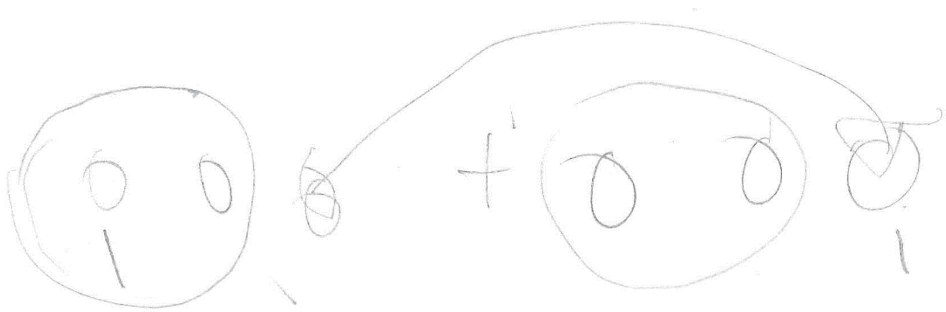
81. Frida: Men jeg vet ikke noe anna ord på det jeg.

82. Erik: Må si en for mye eller noe sånt.

83. Gaute: For alle oddetall. Hvis vi skal dele hvilke som helst oddetall på to, så blir det en … til overs. Og hvis det er to så blir det dem to sammen.

Tabell 5 Begrunnelse og interaksjon i situasjon 2

LINJE	BEGRUNNELSESKATEGORIER	INTERAKSJONSMØNSTER, LINJE 65-83
64	1: Strukturell begrunnelse: - Generisk eksempel	F: Lede an, fremme argument, 1 G: Si seg enig I: Spørsmål
70	1b: Strukturell begrunnelse - Delelighet med 2	F: Forsvare E: Forsvare G: Utvide, 1b
71	1c: Strukturell begrunnelse - Generisk eksempel	F: Bygge videre, omformulere, 1c E: Gjenta, omformulere 1c D: Gjenta, omformulere 1c F: Gjenta
77	1d: Strukturell begrunnelse - «En i rest» - Eksempel som støtte	D: Utvide, 1d F: Utvide 1d E: Korrigere D: Si seg enig E: Foreslå omformulering
83	1e: Strukturell begrunnelse - Generelt - Oddetall og delelighet	G: Bygge videre 1d, fremme argument, 1e



Bilde 1 Elevenes generiske eksempel ved situasjonens slutt. De seks små sirklene og strekene under to av dem er tegnet av Frida (linje 65) og de to større ringene og pilen mellom to av de små sirklene er tegnet av Erik (linje 72-74)

4.2.2. STADIG OMFORMULERING AV ET GENERISK EKSEMPEL

Denne situasjon viser hvordan elevene gradvis bygger på det samme generiske eksempelet for å komme frem til et generelt argument som gir mening for dem alle. Elevene benytter seg i denne situasjonen av et generisk eksempel (Balacheff, 1988) som beviser at formodningen er sann. Dette er en strukturell begrunnelse fordi den illustrerer visse matematiske egenskaper ved formodningen og fungerer generelt (Harel & Sowder, 2007). Tallene 3 + 3 i eksempelet blir representanter for oddetallene, og gjennom handlinger på dem som objekt gjøres de om til par av toere, og dermed partall. Elevene gjennomfører på denne måten en hensiktsmessig transformasjon på objekter, tilsvarende krav for transformasjonelle proof schemes (Harel & Sowder, 1998). Balacheff (1988, s. 224) skriver at for at et generisk eksempel skal godtas som bevis for flere elever, må de alle være enige om at eksempelet som benyttes (3 + 3) er av en generisk karakter, altså at det representerer en gruppe med tall (oddetall) og ikke er knyttet til dette tilfelles spesifikt. Hvordan elevene bygger videre på det generiske eksempelet, gjør det tydelig at elevene godtar generiske eksempler som tilstrekkelige bevis for at en formodning er gyldig.

Det generiske eksempelet følger elevenes argumentasjon gjennom hele situasjonen, og alle argumentene og begrunnelsene som gis etter dette er direkte knyttet til det (se tabell 5, ovenfor). Argumentet blir i linje 65-83 gjenstand for stadig omformulering, utvikling og justering, noe som også preger interaksjonen (se tabell 5). Erik overtar modellen og tegner videre for å illustrere sitt eget argument, som i stor grad er en gjentakelse og omformulering av Fridas (1c i tabell 5). Man kan se utfra bilde 1, over, at Erik ikke direkte bygger videre på Fridas eksempel ved at han ikke markerer de samme små sirklene i par. Mens Frida har markert de to ytterste sirklene som de «i rest», kobler Erik sammen de to lengst til venstre i hver tre'er-gruppe. I stor grad gjentar elevene de samme formuleringene, men små justeringer. Alle elevene er i løpet av situasjonen aktive i dialogen rundt det generiske eksempelet. Interaksjonen mellom elevene i denne situasjonen kan dermed sies å være preget av multivokale forklaringer (Cobb, 1995). Kommunikasjonen mellom elevene fungerer i altså i denne situasjonen godt, da det generiske eksempelet fungerer som et antatt-felles grunnlag for diskusjon (Cobb, 1995).

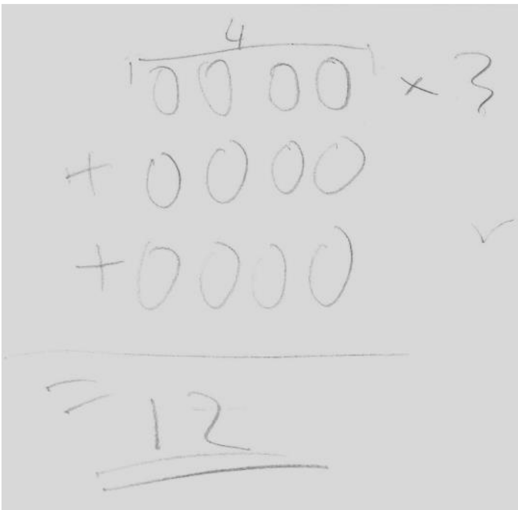
Den eneste korrigeringen kommer fra Erik som kommenterer på Dinas bruk av ordet «rest» (argument 1d, linje 77), som Dina også sier seg enig i. Korrigeringen kan se ut til å være en oppfølging av spørsmålet mitt (linje 67) om nettopp dette. Spørsmålet er motivert av et ønske om at elevene skal trekke inn delelighet med to, som ikke kom tydelig frem i Fridas innledende argument (linje 65). Gaute nevner dette (linje 70) og Frida bygger deretter videre på og omformulerer argumentet sitt slik at det inkluderer delelighet på to. Senere i situasjonen får dette utslag i den nevnte korreksjonen fra Erik, hans forslag til omformulering («Må si en for mye eller noe sånn», linje 82) og Gautes formulering av den endelige argumentet (1e, linje 83).

4.3. Bruk av eksempler og hensyn til medelever

4.3.1. Presentasjon av situasjon 3: Partall · oddetall = partall

Da elevene skulle argumentere for hvorvidt formodningen *partall · oddetall = partall* var sann, ble det behov for dem å konstatere om den faktisk gjaldt. For å gjøre dette ga Dina ett eksempel, hvorpå Frida utbryter «det har jeg ikke tenkt over!» (linje 105). Elevene var altså ikke bevisste denne sammenhengen fra før. Erik og Gaute gjør noen forsøk på å gi generelle argument som forklarer hvorfor formodningen alltid til stemme, men kommer ikke frem til en begrunnelse de virker å være fornøyde med.

106. Erik: *(Tegner mens han snakker)* Du har fire sier vi, og vi skal vi gange det med tre, så kan vi ta det under hverandre. Og da har du tatt fireren som du har og så har du ganga det tre ganger, har plussa det tre ganger, og da blir det tolv til slutt.



Bilde 2 Eriks tegning av 4 · 3 = 12, linje 106

Eriks forklaring støttes med en tegning av tallene (bilde 2) og å ramse opp 4-gangen for å vise at alle tallene der er partall. Både Frida og Dina bidrar til dette.

120. Gaute:	Nei, det er fordi at hvis du har et partall, hvis du dobler det så blir det fortsatt et partall, og hvis du tripler det så blir det også et partall. Da blir det et partall uansett hvor mange ganger du ganger det.

Elevene blir etterhvert usikre og må igjen konstatere ovenfor seg selv med et par eksempler, før de igjen konkluderer med at formodningen er sann.

134. Intervjuer:	Hva er det som gjør det? Hvorfor blir det sånn?
135. Frida:	Fordi det er bare matematikkens logikk.
136. Erik:	Fordi du har jo et partall og da spiller det jo egentlig ingen rolle … da blir det jo et partall uansett hva du ganger med. Fordi hvis du har to, og du ganger det med to til så blir det jo fire. Da må det bli fire.
137. Frida:	Det er det samme som pluss det!
138. Erik:	Ja faktisk … Ok, det var et dårlig eksempel da. Hvis du har fire, og så skal du gange det uansett med to for eksempel, så blir det bare akkurat det samme bortover. Hvis du ganger det med tre for eksempel, så bare en gang til på en måte. Det samme tallet som du ganger hele veien.
139. Gaute:	Hvis du har et oddetall og tar det et partall ganger, liksom, da blir det et partall.
140. Dina:	Ja!
141. Frida:	Enig!
142. Gaute:	For hvis du tar tre to, fire, seks eller åtte ganger, så blir det et partall.

Tabell 6 Begrunnelse og interaksjon i situasjon 3

Linje	Begrunnelseskategorier	Interaksjonsmønster, linje 134-142
		I: Spørsmål
135	1: Utvendig begrunnelse	F: Fremme argument, 1
136	2: Empirisk begrunnelse - Observasjon av mønster - Evidens	E: Bygge videre, 2 F: Kommentere
138	2a: Strukturell begrunnelse - Eksempel som støtte - Gjentatt addisjon	E: Vurderer 2 Omformulerer, 2a
139	3: Strukturell begrunnelse - Generalitet	G: Bygge videre, argument, 3 Dina: Si seg enig F: Si seg enig
142	3a: Empirisk begrunnelse - Evidens - Eksempel som støtte	G: Utvide, 3a

4.3.2. BRUK AV EKSEMPLER

I denne situasjonen er det identifisert tre ulike argumenter: 1) Frida sitt utvendige argument, linje 135, 2) Eriks empiriske argument, linje 136, som bygger videre på hans argument i linje 106, og 3) Gautes strukturelle argument, linje 139, hvor han omformulerer og bygger videre på begrunnelsen i linje 120 (se tabell 6). Når Frida gir sitt utvendige argument, har elevene allerede gjort noen forsøk på å argumentere for formodningens sannhet (bl.a. linje 106 og 120), og kan se ut til å komme som en reaksjon på at ingen av de tidligere argumentene er blitt godtatt, og jeg som intervjuer fremdeles er ute etter en forklaring. Ingen av de andre elevene verken kommenterer eller bygger videre på denne begrunnelsen (jf. tabell 6).

Eriks innledende argument i linje 106 bygger på gjentatt addisjon, og dette følger begrunnelsene til elevene utover i situasjonen. Argumentasjonen til Erik utvikler ser fra å snakke om å ha «fire tre ganger» (linje 106), hvor han er sterkt knyttet til eksempelet, til å snakke om «det samme tallet du ganger hele veien» (linje 138) hvor han distanserer seg mer fra de konkrete tallene. I linje 136 beskriver Erik en observasjon: «det blir jo et partall uansett hva du ganger med». På kommentar fra Frida (linje 137), ser Erik en svakhet i argumentasjonen og velger et nytt eksempel å forklare ut fra.

Gautes argument (3, linje 139) er en videreføring av argumentasjonen til Erik. Dette argumentet er derimot omformulert til en mer elegant og hensiktsmessig matematisk forklaring, som i stor grad blir godtatt av de andre elevene. Til tross for tydelige uttrykk fra Dina og Frida (hhv. linje 140 og 141) om at argumentet godtas, velger Gaute å støtte sitt generelle argument med et konkret eksempel. Som Küchemann og Hoyles (2009) skriver, kan dette være en måte for Gaute å ta høyde for at argumentet kan inneholde feil eller mangler han kan ha oversett. Bruken av eksempel som støtte i denne situasjonen kan i tillegg være en utvidelse av forklaringen, da empirisk evidens i stor grad har virket overbevisende på elevene i tidligere situasjoner.

4.3.3. Å TILPASSE SEG DE ANDRE

Som reaksjon på argumentet til Erik i linje 136, kommenterer Frida en sammenheng som ikke er direkte knyttet til den aktuelle formodningen eller det gitte argumentet. Erik sitt eksempel $2 \cdot 2 = 4$, får Frida til å assosiere med addisjon, noe som ikke var hensikten hans. Erik kan ha gått ut ifra at de andre elevene delte hans forståelse for sitasjonen, og at kommunikasjonsgrunnlaget var antatt-felles (Voigt, 1995). Når Frida kommenterer, oppdager

Erik at tolkningene deres av argumentet ikke stemmer overens, og han endrer argumentasjonen slik at den ikke skal virke forvirrende. Han benytter seg derfor av et annet eksempel, slik at argumentet hans kommer tydeligere frem. Den sosiale interaksjonen mellom elevene har dermed direkte innvirkning på argumentasjonen, og gjør at Eriks argument forbedres. Gjennom kommentaren til Frida blir Erik bevisst på en svakhet ved formuleringen og eksempelet han benyttet seg av.

4.4. ULIK OPPFATNING AV HVA ER ET TILSTREKKELIG ARGUMENT ER

4.4.1. PRESENTASJON AV SITUASJON 4: DELELIGHET MED SEKS

I denne situasjonen arbeider Dina, Erik, Frida og Gaute med å overbevise seg selv og hverandre om hvorvidt følgende formodning er sann:

> *Hvis man ganger sammen tre tall som kommer etter hverandre i tallrekka, får man alltid et tall som er mulig å dele på seks.*

Gjennom dialogen er det mulig å kjenne igjen mønsteret i utviklingen av argumentasjonen og begrunnelsene fra situasjon 1, og alle tre former for begrunnelse tas i bruk. Elevene brukte noe tid på å bli overbevist om at formodningen stemte, særlig fordi de hadde behov for å regne ut flere tilfeller og dele alle produktene på seks (bilde 3).

Bilde 3 En av Fridas utregninger

Som i utdraget fra linje 223-229, kan man se at flere eksempler var nødvendig for å overbevise elevene.

223. Gaute:	Da tar vi ordentlig regning her. *(Setter opp delestykket på arket og regner ut)* (…) Å jeg vet! Det blir 84. Jepp, det kan deles på seks.
224. Frida:	Men da var det sant da?
225. Dina:	Det er sant. Og så må vi forklare det her?
226. Erik:	Vi kan prøve ett eksempel til.
227. Gaute:	27, 28 og 29.
228. Erik:	Nei, tretten, fjorten og femten.
229. Gaute:	Tolv, tretten, fjorten.

Etter å ha regnet ut noen flere tilfeller, både i fellesskap og hver for seg, konkluderte elevene med at det alltid ville være mulig å dele produktet av de tre tallene på seks.

234. Intervjuer:	Det er mulig ja? Og da lurer jeg på, hvordan kan dere være sikre på det, da?
235. Frida:	Fordi har testa ut ulike eksemplene.
236. Erik:	Fordi vi har prøvd det flere ganger.
237. Intervjuer:	Og da ville dere blitt enda sikrere hvis dere hadde prøvd ut flere eksempler?
238. Frida:	Ja.
239. Erik:	Ja, så flere ganger vi gjør, så blir det jo bedre da.
240. Gaute:	Da er vi jo ikke helt sikker nå da.
241. Erik:	Jo.
242. Dina:	Jojo.
243. Frida:	Jo da.
244. Gaute:	Men hvordan kan vi være mer sikker hvis vi allerede er helt sikker? Det går jo ikke an. Vi er ikke helt sikker.
245. Erik:	Men vi er jo det.
246. Frida:	Hvis du kan finne ett tall som ikke stemmer, så skal jeg tro deg.
247. Intervjuer:	*(Til Gaute)* Hva er det som kunne gjort deg mer sikker da?
248. Dina:	At en veldig, veldig smart person sa det.
249. Gaute:	At … Nei, jeg er helt sikker, men vi kan ikke overbevise noen andre om det.
250. Frida:	Vi kan bare be dem …
251. Gaute:	*(Avbryter)* Jo, det kan hende, men vi har jo bare noen eksempler, og det kan hende at det er noen som vi ikke har prøvd som er det. Ja. Og derfor må vi finne ut liksom en regel.
252. Frida:	Ja, men hvor mange … en regel? Jo, jeg har en regel. Hvis man tar tre tall fra tallrekka og ganger dem, så får du alltid et tall som kan deles på seks.
253. Gaute:	Hvorfor det?
254. Frida:	Fordi det er sånn verden er.

Tabell 7 Begrunnelse og interaksjon i situasjon 4

LINJE	BEGRUNNELSESKATEGORI	INTERAKSJONSMØNSTER I SITUASJON (LINJE 234-254)
		I: Spørsmål
235 236	1: Empirisk begrunnelse - Eksempler gir evidens	F: Begrunner 1 E: Begrunner, 1
		I: Spørsmål
239	1b: Empirisk begrunnelse: - Flere eksempler overbeviser mer enn ett	F: Bekrefter E: Bekrefter, utvider, 1b
		G: Korrigerer
		E: Forsvarer D: Forsvarer F: Forsvarer
		G: Spørsmål, korrigerer
246	2: Empirisk begrunnelse - Kreve motbevis	E: Forsvarer F: Utfordrer, 2 I: Spørsmål
248	3: Utvendig begrunnelse - Bekreftelse fra autoritet	D: Argument, 3 G: Forsvarer korreksjon
		F: Bygger videre 2
251	4: Strukturell begrunnelse - Eksempler er ikke nok - Behov for generalitet	G: Begrunner korreksjon, 4
252	5: Utvendig begrunnelse - Omformulering av formodning	F: Begrunner, 5 G: Spørsmål
254	6: Utvendig begrunnelse - «Det bare er sånn»-argument	F: Begrunner, 6

4.4.2. EMPIRISK VERSUS STRUKTURELL OVERBEVISNING

Denne situasjonen består av to deler. I første del skal elevene konstatere at formodningen om delelighet er sann. Elevene bruker på samme måte som i situasjon 1 og 3 naiv empirisme for å overbevise hverandre. Elevene valgte seg tallfølger, regnet ut produktet av dem, og etterprøvde alle tilfellene ved å dele produktet på seks (jf. Fridas utregning bilde 3 og Eriks utregning bilde 4). Ingen av elevene anerkjente det faktum at divisjon og multiplikasjon henger sammen, eller at de ganget med tallet seks og for deretter å dele med det samme tallet igjen. Utregningene av totalt tre tallfølger ($1 \cdot 2 \cdot 3$, $4 \cdot 5 \cdot 6$ og $7 \cdot 8 \cdot 9$) utgjorde nok evidens for at Gaute og Dina kunne konkludere med at formodningen er sann i linje 223 og 225. Erik derimot etterspør et avgjørende eksperiment før de skal bestemme seg for at formodningen er sann («Vi kan prøve ett eksempel til» linje 226), og i den påfølgende dialogen kan det virke som om dette er med på å gi Erik en solid overbevisning om at formodningen er sann (jf. linje 236, 239 og 245). Gangen i elevenes dialog fra mer eller mindre tilfeldig utprøving av tilfeller til et avgjørende eksperiment, kan ses som tilsvarende til prosessen elevene gikk igjennom i situasjon 1.

Bilde 4 En av Eriks utregninger

I den andre delen av situasjonen leder dialogen mellom elevene inn i en større diskusjon om hva som er tilstrekkelig forklaring for å kunne overbevise noen andre. I den forbindelse gir elevene flere ulike argumenter, forklaringer og begrunnelser som gjelder hva som en gyldig forklaring. Disse er i hovedsak empirisk baserte (se tabell 7, over). Begrunnelsene handler altså ikke om formodningen om delelighet direkte, men i større grad en forhandling om en sosiomatematisk norm for gyldig argumentasjon og begrunnelse (Yackel & Cobb, 1996). Elevene er ikke enige om dette, noe som kanskje kan vise til ulik matematisk forståelse av generalitet.

I stor grad er argumentene som Dina, Erik og Frida fremmer i forsvar av sin overbevisning empirisk baserte. Frida og Erik begrunner sin overbevisning om at formodningen er sann ved å referere til eksemplene de har gitt (linje 235 og 236, 1 i tabell 7), de uttrykker tydelig at flere eksempler gir sterkere overbevisning (linje 238 og 239). Sammen med Dina er de tydelige i sitt forsvar at denne måten å overbevises på når den blir utfordret av Gaute. I det videre forsvaret av sin overbevisning krever også Frida et eksempel som motbeviser konklusjonen deres (linje 246 og 250). Dina, Erik og Frida kan ut fra dette til en viss grad sies å inneha et empirisk *proof scheme* (Harel & Sowder, 1998; 2007).

Gaute uttrykker i denne delen av situasjon 4 et behov for mer generelle forklaringer enn eksempler. Til tross for at han selv er blitt overbevist om at formodningen alltid vil stemme, gjennom eksemplene som er lagt frem, sier han at de «kan ikke overbevise noen andre om det» (linje 249). De tre andre elevene overbevises av de empiriske begrunnelsene, og ser ikke behovet for en mer generell forklaring. I tillegg tyr jentene til tre utvendige begrunnelser. Dina refererer til autoriteter i linje 248 når hun sier «at en veldig, veldig smart person sa det [kunne gjort meg mer sikker]» (argument 3). I forsøk på å forme en regel, omformulerer Frida den originale formodningen i linje 252 (argument 5), og i linje 254 gir Frida argumentet «fordi det er sånn verden er» (argument 6).

4.4.3. Gaute mot gruppen

Denne episoden viser hvordan elevene gjennom interaksjonen kommer inn i en diskusjon av den sosiomatematiske normen om hva som er et tilstrekkelig argument for at noe er sant (Yackel & Cobb, 1996). De ulike perspektivene på hva dette er, kan man se gjennom mønsteret i interaksjonen. Gautes vurderinger og korrigeringer av den eksempelbaserte begrunnelsesformen, reageres på av alle de tre andre elevene. Dina, Erik og Frida går da i forsvarsposisjon for sin egen overbevisning. Gjennom samtalen går Gaute fra å betrakte eksempler som tilstrekkelig begrunnelse til å mene at eksempler ikke holder i argumentasjon ovenfor andre, og han ser behov for mer generelle forklaringer («en regel» linje 251). Selv om elevene lar seg overbevise om at formodningen er sann gjennom den empiriske begrunnelsesformen, reagerer Gaute på logikken ved argumentet i linje 239. Dina, Erik og Frida har allerede slått fast at de er helt sikre på at formodningen er sann, men sier at de likevel vil kunne bli mer sikre gjennom flere eksempler. Dina, Erik og Frida ser ikke ut til å forstå Gautes problem (jf. Erik: «Men vi er jo [helt sikre]» linje 245). Gruppen kan sies å dele seg mellom Gaute og de tre andre. Gjennom interaksjonstabellen (tabell 7, ovenfor) kan man se hvordan Gautes utsagn imot den empiriske overbevisningen stadig blir møtt av forsvar eller motargument fra de andre elevene. Gaute får heller ikke medhold i sitt krav om en begrunnelse som kan gjelde alle mulige tilfeller, og kommer dermed ikke videre fordi han ikke får innspill fra de andre elevene. Det er interessant at elevene som i stor grad har benyttet seg av strukturelle og generelle begrunnelser i forklaringene sine i de foregående situasjonene, i dette tilfellet uttaler at eksempler er det mest overbevisende, og at det ikke er behov for videre forklaring.

4.5. Begrunnelsesformer og interaksjonsmønster – Oppsummerende analyser og resultater

Visse tendenser kommer til syne gjennom analyse av intervjuet med elevene Dina, Erik, Frida og Gaute. Elevene benytter seg av ulike argumentasjonsformer avhengig av hvilken hensikt begrunnelsene eller argumentene har (Situasjon 1). Elevene benytter seg av eksempler og evidens som støtte for sine strukturelle argumenter (Situasjon 3), og tilpasser seg kommentarer fra andre slik at argumentet kommer tydeligere frem (Situasjon 3).

Argumentene og begrunnelsene elevene gir, må bli godtatt av gruppen for at det skal kunne bli bygget videre på (Situasjon 1). Utvendige begrunnelser blir ikke gjenstand for utvidelse og påbygging (Situasjon 3 og 4), mens generiske eksempel både godtas og blir stadig justert og omformulert av elevene i gruppen (Situasjon 2). Det er forskjell mellom elevene i synet på behovet for generelle argument og at eksempler ikke er nok for å overbevise andre (Situasjon 4), og matematiske autoriteter kan hindre argumentasjon (Situasjon 1). Disse tendensene vil bli utdypet videre i dette underkapittelet.

Elevene varierer i stor grad sin bruk av begrunnelsesformer. En tendens som blir tydelig i situasjon 1, er at hvilke begrunnelsesformer elevene benytter, henger sammen med formålet med begrunnelsen. For å konstatere for seg selv at formodningen er sann, gir Dina og Frida utvendige argument hvor de referer til undervisning. På spørsmål om hvordan de vet det, benytter de seg av naiv empirisme, og for å sjekke om formodningen gjelder for alle tall, gjennomfører Erik og Frida et avgjørende eksperiment, hvor de prøver et tilfelle med tresifrede tall. Når de deretter skal ta stilling til hvordan de kunne ha overbevist noen andre enn dem selv, argumenterer de med grunnlag i strukturer og egenskaper ved partall og oddetall. Variasjonen i argumentasjonen kommer også frem i flere senere situasjoner. I situasjon 3 og 4 må elevene prøve flere tilfeller med tall, før de konkluderer med at formodningene er gyldige. I situasjon 4 etterspør Erik i tillegg «et eksempel til», som får rollen som avgjørende eksperiment for Eriks oppfatning av om formodningen er gyldig for alle tall.

Elevene bruker i flere tilfeller eksempler og evidens som støtte til sine mer strukturelle argument. Dette kan henge sammen med at elevene i tilfeller hvor de skal overbevise seg selv og hverandre om at en formodning stemmer, gjør systematisk utprøving av eksempler. Denne tendensen stemmer overens med forskningsresultater av blant andre Chazan (1993), Knuth, Choppin og Bieda (2009) og Küchemann og Hoyles (2009). Elevene uttrykte tydelig i situasjon 4 at eksempler var det som overbeviste dem om formodningens gyldighet. Å trekke inn eksempler for å støtte opp generelle argument, kan dermed være med på å gjøre argumentet mer overbevisende for elevene. Elevene evner med andre ord å gi strukturelle og generelle begrunnelser for formodningenes gyldighet, men det er ikke dette som overbeviser dem selv, eller som de først og fremst vil velge som argumentasjon. Dette vil antyde at empiriske proof schemes står sterkt i gruppen.

Argumentene og begrunnelsene elevene gir må også godtas av gruppen for at det skal kunne bli bygget videre på. I situasjon 3 og 4 kan man se at de utvendige begrunnelsene som blir gitt av henholdsvis Frida og Dina, verken blir kommentert, korrigert eller bygget videre på. De utvendige begrunnelsene blir på denne måten ikke godtatt som gyldige av de andre elevene, og er dermed heller ikke aktuelle til å bli tatt med i den videre diskusjonen. Til gjengjeld fungerer det generiske eksemplet i situasjon 2 godt som et antatt-felles grunnlag for kommunikasjon og videre argumentasjon.

Dina, Erik, Frida og Gaute er delt i meningen om det er behov for generelle argument og hvorvidt eksempler er tilstrekkelig for å overbevise andre. Dette blir særlig tydelig i diskusjonen hvor Gaute ser behovet for generalitet, mens de andre elevene ikke ser ut til å gjøre det, og i tilfeller hvor Gaute forsøker seg på generelle argument, som ikke blir ikke godtatt av de andre i gruppen. Gaute endrer i slike tilfeller formuleringen av argumentet eller støtter det opp med eksempler.

Gjennom å se på både elevenes argumentasjon og begrunnelsesformer enkeltvis og som en helhet får man et inntrykk av hvordan interaksjonen mellom elevene virker inn. Alle elevene viser stor bredde i måten de argumenterer, forklarer og begrunner og det tas i bruk både utvendige, empiriske og strukturelle begrunnelsesformer. Dette stemmer overens med Harel og Sowder (1998; 2007) sin forskning som viser at elever gjerne innehar flere former for proof schemes samtidig. Elevene plukker opp elementer i de andres forklaringer som de bygger videre på, og de retter opp eller omformulerer forklaringene sine etter vurderinger gjort av de andre elevene. Dette kan man blant annet se i situasjon 1 når Gaute får forklaringen sin i linje 27 vurdert som utilstrekkelig av Frida, omformulerer og legger den frem på nytt i linje 33. I det nye argumentet tar han også i bruk oddetall-begrepet, som i mellomtiden er blitt nevnt av de andre elevene.

I elevgruppen er det relativt jevn maktfordeling mellom elevene. Det eneste klare eksempelet på matematiske autoritet, finner vi i situasjon 1 der stadige korrigeringer og spørsmål fører til at Frida trekker seg i argumentasjonen. Det gis dermed inntrykk av at Gaute og Erik sitter med matematisk autoritet i gruppen, og at elevene stoler på og forventer at det Gaute og Erik sier er rett. Særlig Erik vurderer og bedømmer de andre elevenes begrunnelser. Eriks vurderinger blir i stor grad godtatt av de andre elevene, og dermed er de med på å gi Erik matematisk autoritet.

5.0. DRØFTING OG KONKLUSJON: Å VISE ELLER BEVISE?

I begynnelsen av denne oppgaven stilte jeg følgende forskningsspørsmål:

> *Hvordan begrunner og argumenterer en gruppe elever på 8. trinn for gyldighet ved matematiske formodninger i en gruppesituasjon, og hvordan påvirkes argumentasjonen av interaksjonen mellom elevene i gruppen?*

Dette er et stort spørsmål som kan romme mye. I dette avsluttende kapittelet skal jeg, med hjelp av presentert teori, diskutere hvordan analysene av elevgruppens arbeid med de fire formodningene kan besvare forskningsspørsmålet. Avslutningsvis vil jeg rette et kritisk blikk på mitt valg av metode og hvordan dette metodevalget har kunnet virke inn på resultatene, for så å løfte blikket og ta stilling til hvilke didaktiske implikasjoner mine funn kan ha.

5.1. ELEVENES ARGUMENTASJON OG BEGRUNNELSESFORMER

Analysene av intervjuet med Dina, Erik, Frida og Gaute viste variasjon i elevenes argumenter og begrunnelser. Både utvendige, empiriske og strukturelle begrunnelsesformer var representert, med en hovedvekt på empiriske begrunnelser. Dette stemmer overens med Harel og Sowder (1998) sin påstand om at hva en person oppfatter som konstatering og overtalelse på et tidspunkt kan være mangfoldig og at han eller hun dermed innehar flere proof schemes samtidig. Elevene i denne studien benyttet seg av ulike former for begrunnelse og argumentasjon avhengig av hvilken hensikt det hadde, hvilke spørsmål som ble stilt på forhånd og av hvem som var mottakeren.

Gruppens bruk av utvendige begrunnelser varierte mellom å referere til undervisning («For det lærte vi i timen» linje 3), å betrakte matematikk som et fag som ikke krever indre forklaring («Fordi det er bare universets logikk» linje 135) og å kreve bekreftelse fra autoritet («At en veldig, veldig smart person sa det [ville gjort meg mer sikker]» linje 248). Alle disse vil være mulige å plassere innenfor et autoritært proof scheme (Harel & Sowder, 1998), da det blir kjennetegnet ved at konstatering og overtalelse for en person avgjøres av elementer eller personer utenfor en selv. Elevene bygde konsekvent ikke videre på utvendige begrunnelser, men valgte i stedet å følge empiriske og strukturelle begrunnelser. De utvendige begrunnelsene ble på den måten ikke godtatt som tilstrekkelig argumentasjon eller bevis. Dette antyder at elevene i liten grad befant seg innenfor external conviction proof schemes.

Balacheff (1988) sin studie viste at elever som hadde svært stor tro på naiv empirisme ikke så noe behov for videre begrunnelse og bevis. Tilsvarende var det mulig å se i intervjuet av Dina, Erik, Frida og Gaute. I tilfeller hvor elevene måtte konstatere for seg selv at en formodning var sann, brukte de først og fremst empirisk evidens i form av naiv empirisme i sine begrunnelser. I den fjerde situasjonen uttrykte Dina, Erik og Frida eksplisitt at eksemplene var det som overbeviste dem om formodningens gyldighet. Elevenes hyppige bruk av eksempler og empirisk evidens kan tyde på at dette var normen for hvordan ting ble forklart i undervisningen. Dessuten var det i elevenes lærebok lagt opp til at elevene skulle gjøre en oppgave med mange eksempler og oppdage sammenhengen. Flere forskere har vist elevenes empiriske proof schemes som svært standhaftige (Harel & Sowder, 2007; Küchemann & Hoyles, 2009; Stylianides & Stylianides, 2009). Mine funn støtter opp om denne forskningen, da den empiriske evidensen var det elevene tydeligst uttrykte at overbeviste dem, og var det elevene i hovedsak tok i bruk for å overbevise andre.

Elevene tok i bruk eksempler da de skulle underbygge mer generelle og strukturelle argumenter. Dette kan stå i sammenheng med at de alle uttrykte at eksempler var det som overbeviste dem selv. Det var lite som tydet på at elevene så noen stor forskjell mellom å *vise* at noe er sant og å *bevise* at noe er sant. Unntaket vil være Gaute, som etterspurte en «regel» som ville gjelde for alle tall. Han uttrykte at eksemplene ikke var nok, fordi det kunne hende at det var noen tall det ikke gjelder for selv om man allerede hadde prøvd mange tall. Studiene til Harel og Sowder (2007) viste mangel av deduktive proof schemes hos elever på alle trinn og at empiriske proof schemes preget alt av elevenes bevisarbeid. Elevene valgte i stedet å bevise matematiske formodninger ved å legge frem konkrete eksempler, og så ikke behov for videre begrunnelse eller bevis.

Selv om elevenes begrunnelser og argument i de fleste tilfeller ikke kunne gjelde som matematiske bevis, ble det uttrykt av elevene at de opplevde at formodningene ble bevist gjennom deres begrunnelser og argument. Formodningene ble dermed fra elevenes subjektive perspektiv bevist. Ut fra de presenterte situasjonene var det kun formodningen *oddetall + oddetall = oddetall* som gjennom et generisk eksempel ble tilstrekkelig bevist at ikke var gyldig. Sett i lys av Edwards (1999) sin studie er dette interessant. Hun registrerte i sine intervjuer at elevene ikke så behov for å bevise denne formodningen, da de allerede var overbevist om at den ikke var gyldig. I Dina, Erik, Frida og Gaute sitt tilfelle ble den ugyldige formodningen i like stor grad som de gyldige formodningene arbeidet med, og elevene ga ikke noe uttrykk for at det ikke var behov for å motbevise formodningen.

5.2. BETYDNINGEN AV DEN SOSIALE INTERAKSJONEN

Hvis kommunikasjonen mellom elevene baserer seg på et antatt-felles grunnlag, og det er en jevn maktfordeling innad i gruppen, kan den sosiale interaksjonen virke svært gunstig på progresjonen i elevenes argumentasjon, begrunnelse og bevisarbeid (Balacheff, 1991; Cobb, 1995; Voigt, 1995). I gruppen som har vært gjenstand for analyse i denne oppgaven, arbeidet elevene godt sammen og utfylte hverandres argumentasjon. Elevene tilpasset seg hverandre ved å ta i bruk ord og formuleringer som andre elever i gruppen har brukt tidligere. De vekslet mellom å korrigere, justere og støtte opp om hverandres begrunnelser, men virket ofte enige. Å tilpasse seg de andre i gruppen kunne også foregå gjennom å endre argumentasjon og begrunnelse hvis det en elev først sa ikke ble godtatt av de andre elevene i gruppen, noe man blant annet kunne se var tilfelle for Gaute i situasjon 1. Samspillet i gruppen trekker på denne måten argumentasjonen lenger. Etter hvert som elevene deler sine tanker, bygger de andre elevene videre og nye ideer komme til. Interaksjonen mellom elevene var dermed i hovedsak preget av multivokale forklaringer (Cobb, 1995).

Samtidig kan interaksjonen mellom elever i en gruppe virke hindrende for matematisk læring og utvikling om det antatt-felles grunnlaget for kommunikasjon ikke er etablert, og det er en klar ubalanse i maktfordelingen mellom elevene (Balacheff, 1991; Cobb, 1995). Dette blir synlig i enkelte tilfeller i intervjuet med Dina, Erik, Frida og Gaute. I situasjoner der en elev kommer sterkt i forsvarsposisjon gjennom stadig å bli møtt med korrigeringer eller kritiske spørsmål fra enkeltelever eller gruppen som helhet, stagnerer argumentasjonen. Interaksjoner der en elev stadig blir korrigert av en annen, er ifølge Cobb (1995) preget av univokale forklaringer og matematisk autoritet. Disse begrepene, i likhet med multivokale forklaringer, er utarbeidet med hensyn til to elever som arbeider sammen. I analysene av intervjuet med Dina, Erik, Frida og Gaute var det situasjoner der to eller tre av elevene som gruppe ble den matematiske autoriteten overfor en av de andre elevene. Dette er mulig å se i situasjon 1 der Frida stadig blir korrigert av resten av gruppen og i tillegg for spørsmål fra meg som intervjuer.

5.3. STUDIENS BIDRAG TIL FORSKNINGSFELTET OG METODENS INNVIRKNING PÅ RESULTATET

Denne oppgaven setter teoretiske perspektiver om argumentasjon, begrunnelse og bevis inn i en norsk kontekst. Den gir informasjon om hvordan fire elever på 8. trinn i Norge overbeviser seg selv og forsøker å overbevise hverandre, og bidrar dermed til et større bilde at elevers forståelse av og utfordringer med argumentasjon og bevis i sosiale kontekster. Resultatene støtter tidligere internasjonal forskning som har vist at elevene har stor tiltro til empirisk evidens og eksempler.

Ved kvalitativ forskning er forskeren alltid med på å påvirke utfallene. Man kan diskutere om det for mitt formål hadde vært mer hensiktsmessig å gjøre rene observasjoner av elever som arbeider i grupper, da man i rollen som intervjuer ikke kan unngå å ha innvirkning på situasjonen. Samtidig opplevde jeg behov for å stille oppfølgingsspørsmål og drive elevenes diskusjon videre for virkelig å få tak i deres forståelse for og oppfatning av hva som var tilstrekkelig argumentasjon og begrunnelse. For at resultatene for oppgaven skulle bli mest mulig reelle, valgte jeg å presentere analysene fra et intervju der elevene var engasjerte og selvstendige i diskusjonene av formodningene og jeg var mindre delaktig. Resultatene fra denne studien er blitt sett opp mot teoretiske perspektiv og tidligere forskningsresultater, og blitt validert gjennom dette.

5.4. DIDAKTISKE IMPLIKASJONER

Denne oppgaven har vist hvordan en gruppe elever på 8. trinn har stor tillit til empirisk evidens i arbeid med å begrunne, bevise og argumentere for at ulike matematiske formodninger er sanne. Elevene uttrykte eksplisitt at eksempler overbeviste dem, noe som i tillegg kom fram gjennom argumentene og begrunnelsene de la frem, og som kan tyde på empirisk baserte proof schemes hos elevene. Dette legger noen didaktiske føringer. Når læreren kjenner til hva eleven oppfatter som overbevisende ovenfor seg selv og andre, kan han eller hun legge til rette for undervisningsaktiviteter som hjelper eleven med å utvikle og justere sine proof schemes til et høyere nivå. Videre ble det sosiale aspektet ved argumentasjon og bevis aktuelt, da Dina, Erik, Frida og Gaute arbeidet sammen om begrunnelsene og argumentene for eller imot gyldighet ved formodningene. I visse tilfeller var samarbeidet deres produktivt, og førte til forbedrede argument, i andre tilfeller ble den sosiale interaksjonen mer en hindring, der stadig korrigering av fremlagte begrunnelser fikk prosessen til å stagnere. I og med at gruppearbeid er mye brukt gjennom hele grunnopplæringen og samarbeid verdsettes i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2011), vil det være sentralt at man som lærer har en bevissthet rundt hvordan setter sammen elevgrupper, og hvordan elever påvirker hverandre. Ulike måter å bygge opp argumentasjon og samarbeide i en gruppe, som lærer og utdanningsforsker må man kjenne til disse (Cobb, 1995; Mueller et al., 2012).

Læreren skal sikre matematisk kvalitet i klasserommet gjennom å etablere normer for sosial og individuell matematisk aktivitet. Gjennom en omfattende litteraturgjennomgang, har Harel & Sowder (2007) tydeliggjort sammenhengen mellom lærerens fokus på argumentasjon- og bevis-fremmende aktiviteter og elevenes proof schemes-nivå. Litteraturgjennomgangen viste at elever av lærere som satte av mer tid til utvikling av resonnering og analytisk tenkning, generelt fikk bedre resultater enn gjennomsnittet. Hvordan læreren selv argumenterer for at noe er sant og hvilke eksempler han eller hun bruker, henger sammen med hvilke normer for begrunnelser, forklaring og argumentasjon som blir lagt i klasserommet (Harel & Sowder, 1998). Lærerens rolle er dermed av stor betydning når det gjelder å skape en god argumentasjons- og begrunnelseskultur i matematikkundervisningen. Utvikling av sosiale og sosiomatematiske normer hvor man lar elevene komme til ordet og diskutere matematikken, kan gi elevene mulighet til å strekke seg etter hverandre og samtalen kan inspirere elevene til å tenke. Gjennom intervjuet med Dina, Erik, Frida og Gaute kom det fram at det var uvandt for elevene å kommunisere tenkningen sin og forklare *hvorfor*, men dette gjorde dem bevisste på sammenhenger de ikke var klare over på forhånd.

Sosiomatematiske normer er matematikkspesifikke, men innenfor matematikken kan de fungere universelt (Yackel & Cobb, 1996). Læreren er sentral i arbeidet med utformingen av de sosiomatematiske normene for argumentasjon og begrunnelse, og bør dermed arbeide bevisst mot at autoritære og andre utvendige proof schemes får rotfeste i elevgruppen. Empirisk utforskning kan hjelpe elevene til å organisere matematiske observasjoner inn i matematiske generaliseringer og videre gi innsikt i hvordan de kan gripe fatt i bevisningen av generaliseringene (Stylianides & Stylianides, 2009). Likevel bør elever lære at det er forskjell på å vise at noe er sant og å bevise at noe er sant.

Referanser

Aamli, K. (2015). *Lærer matte av å snakke matte*. Hentet 12. april 2015 fra http://linkis.com/forskning.no/2015/04/lOQci

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children,* 216-235.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. I A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (red.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (s. 173-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publichers.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1/2), 23-40.

Chazan, D. (1993). High School Students' Justification of Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Cobb, P. (1995). Mathematical Learning and Small-Group Interaction: Four Case Studies. I P. Cobb & H. Bauersfeld (red.), *The Emergence of Mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cultures* (s. 25-129). New York og London: Routledge.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3/4), 175-190.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

Edwards, L. D. (1999). Odds and evens: Mathematical reasoning and informal proof among high school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 489-504.

Francisco, J. M. (2013). Learning in collaborative settings: students building on each other's ideas to promote their mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 417-438.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM, 40*(3), 487-500.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. I A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (red.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (s. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, 805-842.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 396-428.

Hoyles, C. (1997). The Curricular Shaping of Students' Appraches to Proof. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7-16.

Kleve, B., & Solem, I. H. (2014). Aspects of a teacher's mathematical knowledge in the orchestration of a discussion about rational numbers. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 119-134.

Knuth, E. J., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. I D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (red.), *Teaching and learning proof across the grades: a K-16 perspective* (s. 153-170). New York: Routledge.

Küchemann, D., & Hoyles, C. (2009). From empirical to structural reasoning in mathematics. Tracking changes over time. I D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (red.), *Teaching and learning proof across the grades: a K-16 perspective* (s. 171-190). New York: Routledge.

Mueller, M., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2012). A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 369-387.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier. Den skrivende forskeren*. Oslo: Universietsforlaget.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Schwarz, B. B., Hershkowitz, R., & Prusak, N. (2010). Argumentation and mathematics. I K. Littleton & C. Howe (red.), *Educational dialogues: Understanding and promoting productive interaction* (s. 103-127). New York og London: Routledge.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher*, 448-456.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 1-20.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 314-352.

Stylianou, D. A., Chae, N., & Blanton, M. L. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. I S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (red.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s. 54-60). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Torkildsen, S. H., & Maugesten, M. (2006). *Sirkel 8A*. Oslo: Aschehoug.

Utdanningsdirektoratet. (2011). *Generell del av læreplanen.* Hentet 15. april 2015 fra http://www.udir.no/Lareplaner/Kunnskapsloftet/Generell-del-av-lareplanen/

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet 23. januar 2015 fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf?lang=nno

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of Interaction and Sosiomathematical Norms. I P. Cobb & H. Bauersfeld (red.), *The Emergence of Mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cultures* (s. 163-201). New York og London: Routledge.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477. doi: 10.2307/749877

VEDLEGG A: INFORMASJONSSKRIV OG SAMTYKKEERKLÆRING

Hildegunn Danbolt
[…]
7043 Trondheim
Tlf: […]
hildegda@[...].no

Trondheim, 6. november 2014

Til foreldre/foresatte for elever på 8. trinn ved […] skole

Forespørsel om tillatelse til å intervjue elever og samle inn elevarbeid i matematikk.

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, Avdeling for lærer- og tolkeutdanning. I mitt masterprosjekt fokuserer jeg på hvordan elever tenker og resonnerer matematisk i møte med påstander som må bevises. Gjennom dette prosjektet ønsker jeg blant annet å få fram ny kunnskap i hva elever på 8. trinn ser som gyldige og overbevisende argument og resonneringsprosessen elevene går igjennom. Å kunne bygge opp en god argumentasjon står sentralt i grunnleggende muntlige og skriftlige ferdigheter i Læreplanen i matematikk. Fra et lærerperspektiv vil kunnskap om dette også være av nytte for forbedring av egen lærerpraksis, med tanke på hvordan man formulerer oppgaver og legger til rette for matematiske samtaler i undervisningen.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det vil være ønskelig å gjøre observasjoner av elever som arbeider med bevis- og resonnerings-aktiviteter av ulike slag. Det vil si at jeg planlegger å samle inn løsninger av oppgaver elevene arbeider med individuelt i undervisning, og å gjøre intervju med elevgrupper hvor det gjøres lydopptak av samtalen elevene imellom og arbeidet gruppen gjør samles inn. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre lydopptak, samt samle inn elevarbeid. Lydopptak vil kun benyttes under intervjuet. Det er snakk om et intervju per gruppe med elever, og elevarbeid fra en undervisningsøkt. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet konfidensielt og med respekt, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Lydopptakene vil være av grupper med 3-4 elever, som velges ut i samråd med lærer, Anette Wagnild, blant dem som ønsker å delta i studien. Gruppeintervjuet vil dels være et ustrukturert intervju der spørsmålene vil handle om hva som er gyldig argumentasjon og tilstrekkelig bevis, og dels oppgaver elevene arbeider med i fellesskap. I arbeidet med oppgavene legger jeg vekt på kommunikasjonen mellom elevene og hvordan de argumenterer ovenfor hverandre. Opptakene vil kun bli hørt av meg, min veileder og eventuelt av andre masterstudenter i matematikkdidaktikk ved høgskolen. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre, vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 1. august 2015.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til å la deres barn være med på prosjektet i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Hildegunn Danbolt

Samtykkeerklæring

Som del av overnevnt masterprosjekt om elevers matematiske resonnement, ber jeg om tillatelse til å intervjue barnet ditt/deres, gjøre lydopptak der han/hun er med og kopiere/bruke tekster skrevet av han/henne.

Jeg/vi gir tillatelse. Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

Jeg/vi er klar over at deltagelsen er frivillig, og at vi og barnet når som helst og uten grunn kan trekke oss fra prosjektet.

Dato: ………………………

Elevens fornavn og etternavn: …………………………………………. …………………..

Underskrift av foresatt(e): …………………………………………………………………..

Vennligst returner svarslippen til lærer […] så snart som mulig.