

## Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på mitt masterstudium i finansiell økonomi ved NTNU. Jeg vil rette en stor takk til min veileder Snorre Lindset for lærerike, konstruktive og verdifulle tilbakemeldinger gjennom hele prosessen. Videre vil jeg takke samboeren min Kaja og vår datter Erle for stor tålmodighet og støtte.

Arbeidet med denne oppgaven har vært svært lærerikt. Det har gitt meg god innsikt og kunnskap om et tema jeg kunne svært lite om før oppstart.

Februar 2015,

Espen Murvold.



## Innholdsfortegnelse

<b>1. Introduksjon</b> .....	1
<b>2. Grunnleggende teori</b> .....	3
2.1 Stokastisk prosess og Brownsk bevegelse .....	3
<b>3. Økonomisk modell</b> .....	5
3.1 Grunnlag for modellen .....	5
3.2 Modelloppsett.....	7
<b>4. Eksisterende Litteratur</b> .....	9
4.1 Lindset, Lund og Persson (2014) .....	9
4.1.1 Konkurs wild card .....	10
4.1.2 Optimal konkurspolitikkk .....	11
4.2 Duffie og Lando (2001).....	12
<b>5. Analyse</b> .....	13
5.1 Estimert verdi av eiendeler.....	14
5.2 Estimert verdi av egenkapital .....	17
5.3 Konkursbarriere.....	18
5.4 Tallfeste informasjonsforsinkelsen, $m$ .....	19
5.5 Oppsummering .....	20
<b>6. Resultater og tolkning</b> .....	21
6.1 Parameterfastsettelse .....	21
6.2 Grunnleggende kalkulasjoner.....	22
6.3 Estimert verdi av eiendeler.....	22
6.3.1 Antall barrieretreff med mere.....	23
6.3.2 Gjennomsnittsverdi av simuleringer som traff barrieren .....	25
6.3.3 Betinget forventningsverdi og total gjennomsnittsverdi, eiendeler.....	26
6.4 Estimert verdi av egenkapital .....	28
<b>7. Konklusjon</b> .....	33

<b>Referanseliste</b> .....	35
<b>Tillegg</b> .....	37
Tillegg A – konkurs wild card.....	37
Tillegg B – løsnning på stoppe-problem .....	38
Tillegg C – koder i MATLAB.....	40
C.1. Musiela og Rutkowski (1997). .....	40
C.2. Estimert verdi av eiendeler og egenkapital.....	41
C.3. Utskrift resultater fra MATLAB.....	43
<b>Figurer</b>	
<b>Figur 1.</b> Hvordan problemet blir modellert. ....	8
<b>Figur 2.</b> Illustrasjon fra Lindset, Lund og Persson (2014) .....	11
<b>Figur 3.</b> Fremstilling av informasjonsforsinkelsene, Lindset, Lund og Persson (2014). .....	13
<b>Figur 4.</b> Fremstilling av oppgavens informasjonsforsinkelse. ....	13
<b>Figur 5.</b> Inndelingen av $\Delta t$ . ....	15
<b>Figur 6.</b> Grafisk fremstilling av simuleringene .....	16
<b>Figur 7.</b> Tidsintervallet vi beregner verdi av egenkapitalen.....	18
<b>Figur 8.</b> Konkursbarrieren gitt full informasjon. ....	19
<b>Figur 9.</b> Størrelsen på informasjonsforsinkelsen, $m$ .....	20
<b>Figur 10.</b> Jensens ulikhet grafisk. ....	29
<b>Tabeller</b>	
<b>Tabell 1.</b> Antatte verdier for simuleringer i MATLAB. ....	21
<b>Tabell 2.</b> Grunnleggende kalkulasjoner .....	22
<b>Tabell 3.</b> Resultater fra MATLAB, eiendeler.....	23
<b>Tabell 4.</b> Implikasjoner av endring i $\Delta t$ .....	24
<b>Tabell 5.</b> Implikasjoner av endring i volatilitet. ....	25
<b>Tabell 6.</b> Resultater fra MATLAB, egenkapital. ....	29

## 1. Introduksjon

Tenk på verdien av eiendelene<sup>1</sup> til et selskap som et mål på evnen til å generere inntekt. Innunder begrepet verdien av eiendeler ligger det i denne oppgaven blant annet tekniske forutsetninger, produksjonskapasitet, kompetansenivå hos de ansatte, kundelojalitet og konkurransesituasjon. Felles for dem alle er at de er faktorer som har betydning for selskapets evne til å betale dividender. Vi antar videre at den eneste tilstandsvariabelen til selskapet er nettopp verdien av dets eiendeler.

Et selskap består gjerne av en ledelse, eiere og kreditorer. God informasjonsflyt mellom aktørene er av stor betydning: ledelsen tar seg av den daglige driften og rapporterer videre til eierne, som tar beslutninger basert på informasjonen som er tilgjengelig. Konkursbeslutning er et av tilfellene der ikke-sømløs informasjonsflyt, imperfekt informasjon, er av utslagsgivende karakter. Vi antar i denne oppgaven at det finnes informasjonsforsinkelse mellom ledelsen til et selskap og dets eiere. Videre antar vi at egenkapital og gjeld kan handles fritt, slik at også kreditor har tilgang på samme informasjon som eier. Vi har dermed to grupper med ulikt informasjonsnivå: ledelsen som antas å ha tilgang til full informasjon og markedsaktørene (eier og kreditor) som antas å stå overfor en informasjonsforsinkelse.

Lindset, Lund og Persson (2014) presenterer blant annet en modell for optimal konkursbeslutning gitt informasjonsforsinkelse. I modellen tar eier beslutningen om å slå selskapet konkurs, men han tar avgjørelsen på bakgrunn av «gammel» informasjon. Denne oppgaven skal forsøke å verdsette et selskap sett fra markedsaktørens ståsted, gitt informasjonsforsinkelse. Markedsaktørene må altså estimere verdien av eiendelene gitt imperfekt informasjon.

Imperfekt informasjon er kanskje ikke et problem som skaper de største overskriftene i media, men så fort imperfekt informasjon i en eller annen form oppstår skaper det uheldige konsekvenser for de selskaper det måtte gjelde. De to følgende artiklene ser på implikasjoner av imperfekt informasjon og viser bare en brøkdel av problematikken i forbindelse med ikke-sømløs informasjonsflyt.

Tony T. Tang (2009) benytter lanseringen av Moody's nye kredittrangering i 1982 til å studere effekten av informasjonsasymmetri på et selskaps tilgang til kredittmarkeder,

---

<sup>1</sup> Verdien av eiendeler/eiendelene er i denne oppgaven en norsk oversettelse av begrepet *stock of assets* som Lindset, Lund og Persson (2014) benytter.

finansieringsbeslutninger og investeringspolitikk. Gjennom den nye kredittrangeringen, som fungerte som en offentliggjøring av ny informasjon, så han på selskap som fikk en ny rangering og resultatmessige implikasjoner som følge av dette. Resultatene viser at informasjonsasymmetri i kredittmarkedet har en signifikant effekt på et selskaps realresultat (Tang, 2009).

Derrin og Kecskes (2013) studerer effekten antall analytikere som følger et selskap<sup>2</sup> har på investering- og finansieringspolitikken. Deres hypotese er at en nedgang i antall analytikere som følger et selskap gir en økning i informasjonsasymmetri. Dette gir videre en økning i kapitalkostnaden, noe som medfører en nedgang i et selskaps investeringer og bruk av ekstern finansiering. Deres resultater viser at selskap som mister en analytiker, og dermed får en økning i informasjonsasymmetri, reduserer investeringer og finansiering med henholdsvis 1,9 % og 2,0 % av totale eiendeler, sammenlignet med tilsvarende selskaper som ikke har en økning i informasjonsasymmetri (Derrin & Kecskes, 2013).

Konsekvensene av imperfekt informasjon kan dermed være utslagsgivende for et selskap. Denne oppgaven skal verdsette et selskap slik at informasjonsforsinkelsen vi allerede har etablert, blir bakgrunn for en betinget approksimasjon av selskapets egenkapitalverdi. Oppgaven har en gjennomgående numerisk tilnærming til problemet, der alle simuleringer er gjennomført i matematikkprogrammet MATLAB. Alle numeriske beregninger forklares og det vil fremgå at de er forankret i sine respektive teoretiske prinsipper.

Kapittel 2 tar for seg grunnleggende teori vedrørende en Brownsk bevegelse. I kapittel 3 presenteres den økonomiske modellen som er benyttet, i tillegg inngår argumentasjon og antakelser som er gjort i forbindelse med modellen. I kapittel 4 ser vi på noe av den eksisterende litteratur som finnes på området. Kapittel 5 omhandler en analyse av de forskjellige aspektene i modellen, med tilhørende resultater og tolkninger i kapittel 6. Oppgavens konklusjon er i kapittel 7, og avslutningsvis inneholder oppgaven et tillegg der det finnes utledninger som er utelatt fra teksten, samt MATLAB-scriptene av størst betydning.

---

<sup>2</sup> Norsk oversettelse fra det engelske *analyst coverage*.

## 2. Grunnleggende teori

### 2.1 Stokastisk prosess og Brownsk bevegelse

Egenskapene til en Brownsk bevegelse er sentral i denne oppgaven. En stokastisk prosess er en variabel som utvikler seg over tid og er delvis tilfeldig (Dixit & Pindyck, 1994). Temperaturen i Trondheim er et eksempel. Den er delvis forutsigbar ved at temperaturen synker på natten og stiger på dagen, men også delvis tilfeldig og uforutsigbar. For en Markov-prosess er sannsynlighetsfordelingen til  $X_{t+1}$  kun avhengig av  $X_t$  og ikke av hva som skjedde før tidspunkt  $t$ . Vi har at  $X_{t+1} = X_t + \varepsilon_t$ , hvor vi lar  $\varepsilon_t$  være en tilfeldig variabel med  $\varepsilon \sim N(0,1)$  for  $t = 1, 2, \dots$ . Ergo har vi at for  $\varepsilon_t \sim N(0, t)$  vil  $\text{cov}(\varepsilon_{t_4} - \varepsilon_{t_3}, \varepsilon_{t_2} - \varepsilon_{t_1})$  for  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$  være lik null. En Wiener-prosess, eller en Brownsk bevegelse, er en stokastisk prosess som er kontinuerlig i tid og har tre viktige egenskaper (Dixit & Pindyck, 1994).

- 1) Sannsynlighetsfordelingen for alle fremtidige verdier av prosessen avhenger bare av nåværende verdi og er dermed en Markov-prosess.
- 2) Prosessen har uavhengige inkremitter. Sannsynlighetsfordelingen for endring i prosessen over et hvert tidsintervall er uavhengig av et hvert annet tidsintervall.
- 3) Endring i prosessen over et hvert bestemt tidsintervall er normalfordelt, med en varians som øker lineært med lengden på tidsintervallet.

Vi ser videre på en formell fremstilling av en Brownsk bevegelse: hvis  $B(t)$  er en Brownsk bevegelse vil enhver endring i  $B$ ,  $\Delta B$ , svare til et tidsintervall,  $\Delta t$ , oppfylle følgende betingelser (Dixit & Pindyck, 1994):

- 1) Forholdet mellom  $\Delta B$  og  $\Delta t$  er gitt ved  $\Delta B_t = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$
- 2) Verdiene av  $\Delta B$  for to ulike tidsintervall er uavhengige. Dermed følger  $B(t)$  en Markov-prosess.

En prosess som kan skrives på formen

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dB, \quad (1)$$

kalles en geometrisk Brownsk bevegelse, der  $\alpha$  og  $\sigma$  er konstanter og gir oss henholdsvis drift og volatilitet (Dixit & Pindyck, 1994). Om  $x(t)$  er gitt ved (1), vil  $F(x) = \log x$  være følgende enkle Brownske bevegelse med drift:

$$dF = \left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB. \quad (2)$$

Fra (2) ser vi at over et bestemt tidsintervall  $t$ , er endringen i logaritmen til  $x$  normalfordelt med gjennomsnitt  $\left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t$  og varians  $\sigma^2 t$ . For  $x$  kan det vises at om nåværende verdi er  $x(0) = x_0$ , vil den forventede verdien av  $x(t)$  være gitt ved (Dixit & Pindyck, 1994):

$$E[x(t)] = x_0 e^{\alpha t}. \quad (3)$$

Variansen til  $x(t)$  er gitt ved  $V[x(t)] = x_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$ . Resultatet for forventning av en geometrisk Brownsk bevegelse skal vise seg å være nyttig senere i oppgaven og kan benyttes til å kalkulere forventet diskontert nåverdi av  $x(t)$  over en gitt tidsperiode. Merk at vi i tillegg kan skrive

$$E \left[ \int_0^\infty x(t) e^{-rt} dt \right] = \int_0^\infty x_0 e^{-(r-\alpha)t} dt = x_0 / (r - \alpha), \quad (4)$$

forutsatt at diskonteringsraten,  $r > \alpha$  (Dixit & Pindyck, 1994).



### 3. Økonomisk modell

#### 3.1 Grunnlag for modellen

Denne oppgaven følger oppsettet til Lindset, Lund og Persson (2014), samt Duffie og Lando (2001) tett, som på sin side har likhetstrekk med Leland (1994). Følgende antakelser er gjort:

- a) Økonomien består av to grupper agenter: gruppe 1 består av ledelsen til selskapet og gruppe 2 består av eiere og kreditorer.
- b) Agentgruppene har ikke tilgang til lik informasjon på samme tidspunkt. Det er informasjonsforsinkelse mellom gruppene.
- c) Ledelsen tilhører gruppen som er tidligst informert om hendelser i selskapet. Eier og kreditor tilhører gruppen som av ulike årsaker informeres senere – derav informasjonsforsinkelsen som fører til informasjonsasymmetri.
- d) For å kansellere muligheten for en underoppspalting av gruppe 2 hva informasjonsforsinkelse angår, antas det at egenkapital og gjeld handles fritt slik at disse to undergruppene til enhver tid har tilgang på samme informasjon.

Informasjon på tidspunkt  $t$  er gitt ved  $\sigma$ -algebraen  $\mathcal{F}_t$ . Vi antar at ledelsen, som den ene agentgruppen har full informasjon, med tilhørende filtreringsnotasjon  $\mathcal{F}_t$ . Dette er ikke en urealistisk antakelse da det er nærliggende å tro at ledelsen, som tar seg av den daglige driften, fanger opp utslagsgivende situasjoner selskapet møter så raskt de inntreffer. Videre setter vi informasjonsforsinkelsen til å være lik  $m$ . Summen av dette utgjør antakelse e):

- e) Vi angir startpunktet for økonomien til å være  $t_0$ . Definerer  $m$  slik at  $0 \leq m \leq t_0$ , og  $\sigma$ -algebraen ved

$$\mathcal{F}_t^m = \mathcal{F}_{t-m} \quad \text{for alle } t \geq t_0, \quad (5)$$

som kan oppsummeres slik:

$$\mathcal{F}_t^m \subseteq \mathcal{F}_t, \quad (6)$$

der  $m$  i denne sammenhengen står for *mindre*.

- f) Selskapet drives av ledelsen, som tar seg av den daglige driften. Eierne beslutter når selskapet skal slutte å betjene gjeld og dermed slå seg konkurs.
- g) Ledelsen av selskapet sier i fra til eierne straks selskapet i praksis er konkurs, noe eierne ikke kan observere selv grunnet informasjonsforsinkelsen.

- h) Grunnet antakelse g) vil den som i praksis tar konkursbeslutningen ha full informasjon (leder) gjennom varsling av eiere på konkurstidspunktet.
- i) Selskapet har utstedt evigvarende gjeld med hovedstol  $D$ . Gjelden er betjent med en konstant rate kupongbetalinger  $C$ .
- j) Verdien av eiendelene genererer en kontinuerlig strøm av dividendebetalinger til eierne.
- k) Verdien av eiendeler blir i denne oppgaven modellert som en Brownsk bevegelse. Som en følge av dette blir verdien av eiendeler gitt som løsningen på den stokastiske differensialligningen

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\varepsilon_t, \quad S_0 > 0. \quad (7)$$

Hvor  $\mu < r$ ,  $\sigma$ , og  $S_0$  er konstanter, der  $\mu$  gir oss drift eller vekstrate til verdien av eiendeler,  $\sigma$  gir oss volatilitet og  $r$  gir oss risikofri rente. Vi har videre at  $\varepsilon \sim N(0, \sqrt{t})$  er en geometrisk Brownsk bevegelse og  $S_t$  er log-normalt fordelt. Dette gir oss at  $\ln[S(t)]$  er normalfordelt (McDonald, 2013):

$$\ln[S(t)] \sim N(\ln[S(0)] + (\mu - 0.5\sigma^2)t, \sigma^2 t). \quad (8)$$

Som et resultat kan vi skrive

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma\varepsilon\sqrt{t}}, \quad (9)$$

hvor  $\varepsilon \sim N(0,1)$ .

- l) Verdien av eiendeler estimeres ved bruk av Monte Carlo-simulering.
- m) Alle agenter i økonomien er antatt å være risikonøytrale. Vi diskonterer derfor fremtidig kontantstrøm med konstant kontinuerlig beregnet risikofri rente,  $r$ .

Antakelser som er gjort utover disse blir kommentert underveis. Agentgruppen eier og kreditor omtales fra nå av bare som markedsaktørene.

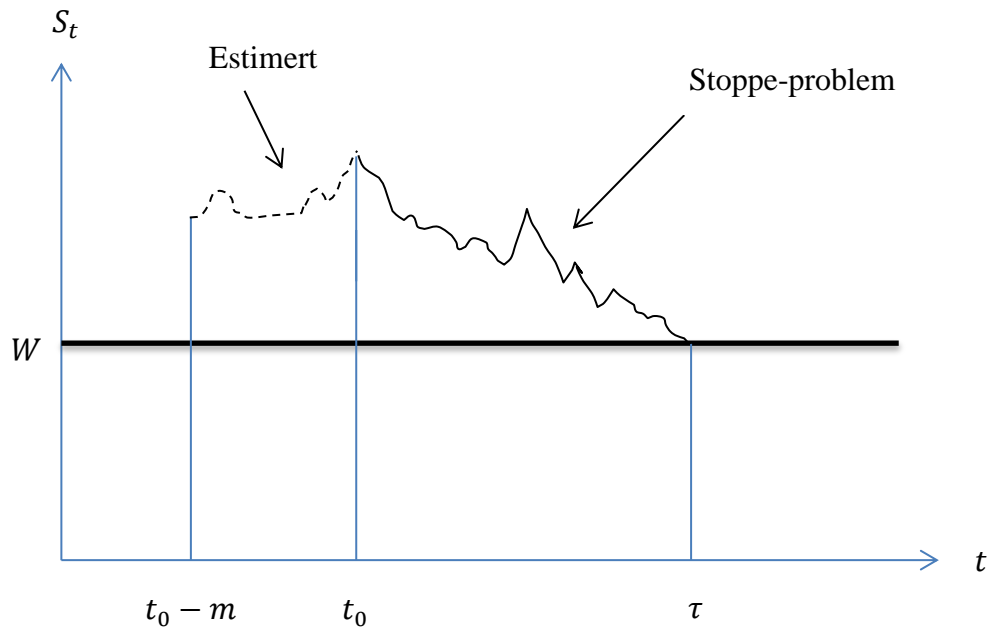
### 3.2 Modelloppsett

I denne oppgaven skal vi verdsette egenkapitalen til et selskap sett fra markedsaktørenes ståsted, der markedsaktørene har mindre informasjon enn leder. Verdien av eiendeler er antatt å være den eneste tilstandsvariabelen og blir, som i Lindset, Lund og Persson (2014), tolket bredt. Den blir også her sett på som en indikator på evnen verdien av selskapets eiendeler har til å generere inntekt. Som vi har vært inne på avhenger dette av flere ting, blant annet tekniske forutsetninger, produksjonskapasitet, kompetansenivå hos de ansatte, kundelojalitet, konkurransesituasjon, markedsbetingelser, men også ikke-finansielle faktorer som spiller en rolle for selskapets evne til å betale dividender. I sum representerer verdien av eiendeler det kvantum som bestemmer dividendebetalingene til eier (Lindset, Lund, & Persson, 2014).

I forrige delkapittel antok vi at økonomien starter på tidspunkt  $t_0$ . På grunn av informasjonsforsinkelsen observerer markedsaktørene selskapets tilstand, gjennom dividendeutbetaling, lik tilstanden selskapet hadde for  $m$  perioder siden. Tidsintervallet  $[t_0 - m, t_0]$  tilsvarer dermed informasjonsforsinkelsen. Det finnes videre en konkursbarriere, der det antas at på et ukjent tidspunkt  $\tau$  treffer verdien av eiendeler barrieren. Dette impliserer at selskapet slutter å betjene gjelden og slår seg konkurs. Vi antar at ledelsen er lojal overfor sine eiere og optimerer driften frem til konkurstidspunktet,  $\tau$ . Dette modelleres som et optimalt stoppeproblem. Ved å diskontere fremtidig forventet kontantstrøm fra  $\tau$  og ned til  $t_0$  finner vi verdien av egenkapitalen til selskapet.

Markedsaktørene observerer verdien av eiendeler på tidspunkt  $t_0 - m$ . I og med at stoppeproblemet nevnt over starter på tidspunkt  $t_0$ , må markedsaktørene estimere verdien av eiendeler frem til tidspunkt  $t_0$ . For å finne den estimerte verdien av egenkapitalen til selskapet må de sette den estimerte verdien av eiendeler på tidspunkt  $t_0$  inn i stoppeproblemet. For at en estimering av ovennevnte situasjon skal være mulig må vi anta at selskapet ikke har gått konkurs mellom tidspunkt  $t_0 - m$  og  $t_0$ . Denne antakelsen er realistisk av tre grunner: den ene årsaken er at ledelsen som innehar full informasjon er antatt å varsle eier om at selskapet er konkurs når verdien av eiendeler treffer konkursbarrieren. Den andre årsaken er at i det verdien av eiendeler treffer konkursbarrieren vil det bli offentliggjort at selskapet er konkurs, børsen vil bli varslet og bobestyrer vil bli oppnevnt. Den tredje årsaken er at det er ulovlig å drive på kreditors regning om ledelsen observerer at selskapet i praksis er konkurs.

Lar vi verdien av eiendeler være gitt ved  $S_t$  og konkursbarrieren være gitt ved  $W$  kan problemet uttrykkes grafisk som i **figur 1**, der den svarte grafen gir oss en mulig utvikling i verdien av eiendeler:



**Figur 1.** Viser hvordan problemet blir modellert. Markedsaktørene estimerer verdi på eiendeler fra tidspunkt  $t_0 - m$  til  $t_0$ . Vi kan dermed finne estimert verdi av egenkapitalen ved å løse stoppe-problemet og sette inn estimert verdi av eiendeler.

Markedsverdien av egenkapitalen til selskapet vil derfor kunne finnes ved at markedsaktørene først estimerer verdien av eiendeler gitt at minste verdi av  $S_t$  er større enn konkursbarrieren:

$$S_{t_0} \Big|_{\mathcal{F}_{t-m} \wedge \min_{t \in \{t_0-m, t_0\}} S_t > W}, \quad (10)$$

ved bruk av Monte Carlo-simulering. Denne verdien blir deretter benyttet i stoppe-problemet der verdien av egenkapital blir estimert. Formelt kan dette skrives:

$$E[\varphi | \mathcal{F}_{t-m} \vee \tau > t_0], \quad (11)$$

der  $\varphi$  tilsvarer verdien av egenkapitalen.  $\mathcal{F}_{t-m}$  gir oss betingelsen om at verdsettelsen er gjort med informasjonsforsinkelse og  $\tau > t_0$  gir oss betingelsen om at konkurs i tidsintervallet  $[t_0 - m, t_0]$  ikke har funnet sted.

## 4. Eksisterende Litteratur

I de følgende delkapitlene skal vi se på eksisterende litteratur vedrørende oppgavens tema. Der vil vi finne at stoppe-problemet introdusert i kapittel 3 løses, og forenkler markedsaktørens oppgave i å finne estimert verdi av egenkapitalen til selskapet.

### 4.1 Lindset, Lund og Persson (2014)

Lindset, Lund og Persson (2014) presenterer en teoretisk modell av kredittspreader for et selskaps gjeld, hvor eierne og kreditorene har imperfekt informasjon. De behandler også optimal konkurspolitikk, gitt asymmetrisk informasjon. De antar to typer agenter: eierne og kreditorene. Det er antatt imperfekt informasjonsflyt mellom disse gruppene. De antar videre at eierne tilhører den bedre informerte gruppen, og kreditorene tilhører den mindre informerte gruppen. Selskapet er i denne modellen drevet av eierne og avgjørelsen om konkurs blir besluttet av eierne. Det antas at verdien av eiendeler er den eneste tilstandsvariabelen, og den er gitt ved løsningen på følgende stokastisk differensialligning

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 > 0, \quad (12)$$

hvor  $\mu < r$ ,  $\sigma$  og  $S_0$  er konstanter og prosessen  $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$  er en standard Brownsk bevegelse. Informasjon på tidspunkt  $t$  er gitt ved  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_t$ . Her er  $\mathcal{F}_t$  generert av prosessen  $\{S_u, 0 \leq u \leq t\}$ . Informasjonen som er tilgjengelig på tidspunkt  $t$  for de to agentgruppene er gitt ved  $\sigma$ -algebraene  $\mathcal{F}_t^m$  og  $\mathcal{F}_t^l$ . Notasjon  $m$  og  $l$  står for henholdsvis mer og mindre informasjon (more og less). Startpunktet for økonomien er angitt til å være  $t_0$ .  $l$  og  $m$  defineres slik at  $0 \leq m \leq l \leq t_0$ , og  $\sigma$ -algebraene ved

$$\mathcal{F}_t^m = \mathcal{F}_{t-m} \quad \text{for alle } t \geq t_0$$

og (13)

$$\mathcal{F}_t^l = \mathcal{F}_{t-l} \quad \text{for alle } t \geq t_0.$$

Fra denne spesifiseringen kan  $\sigma$ -algebraene oppsummeres slik;

$$\mathcal{F}_t^l \subseteq \mathcal{F}_t^m \subseteq \mathcal{F}_t. \quad (14)$$

Lindset, Lund og Persson (2014) tolker altså  $m$  som et mål på informasjonsforsinkelse og  $l - m$  som et mål på informasjonsasymmetri, der informasjonsasymmetri refererer til differansen i informasjonsforsinkelsen mellom de to agentgruppene.

Fra ligning (4) har vi at nåverdien på tidspunkt  $t$  av alle fremtidige dividender for et selskap uten gjeld,  $V_t^m$ , er gitt ved

$$V_t^m = \left[ \int_t^\infty e^{-r(u-t)} \delta S_{u-m} du \middle| \mathcal{F}_t^m \right] = \frac{\delta S_{t-m}}{r - \mu}, \quad (15)$$

hvor raten dividenden blir betalt av på tidspunkt  $t$  er  $\delta S_{t-m}$  for en konstant  $\delta > 0$ . På konkurstidspunktet,  $\tau_*^m$  som tilsvare optimalt konkurstidspunkt gitt forsinket informasjon, blir avviklingsverdien til selskapet definert som

$$V_{\tau_*^m} = V_{\tau_*^m}^0 = \frac{\delta S_{\tau_*^m}}{r - \mu}. \quad (16)$$

På konkurstidspunktet vil en konkurskostnad inntreffe. Den er proporsjonal med konkursverdien;  $\alpha \delta S_{\tau_*^m} / (r - \mu)$ ,  $\alpha \in [0,1]$ . Det antas at selskapet har utstedt evigvarende gjeld med hovedstol  $D$ . Gjelden er betjent med en konstant rate kupongbetalinger  $C$ . Disse betalingene er fradragsberettiget hva skatt angår. Skattefordelsraten er  $\theta C$ , hvor  $\theta$  er skatteraten.

#### 4.1.1 Konkurs wild card<sup>3</sup>

Når konkurs inntreffer, vil kreditor kreve et beløp lik hovedstolen  $D$  til gjelden. Kreditors krav har førsteprioritet, men det finnes imidlertid en sannsynlighet for at avviklingsverdien til selskapet er stor nok til å dekke kreditors krav, konkurskostnader og fortsatt stå igjen med en positiv verdi. Dette på grunn av informasjonforsinkelsen. Avviklingsverdien til selskapet er gitt ved ligning (16), konkurskostnaden blir gitt som en andel av dette, ergo er betingelsen for at konkurs wild card skal gi utbetaling gitt ved følgende;  $V_{\tau_*^m} - \alpha V_{\tau_*^m} - D > 0$  (Lindset, Lund, & Persson, 2014). Illustrasjonen i **figur 2** viser at observert verdi, gitt full informasjon, kan øke fra observert konkurstidspunkt ved full informasjon,  $\tau_*$  frem til observert konkurstidspunkt ved forsinket informasjon,  $\tau_*^m$ . Enhver positiv verdi utover kreditors krav og konkurskostnader tilhører eier. Ved å beslutte konkurs på tidspunkt  $\tau_*^m$ , vil eier oppnå et konkurs wild card med verdi lik (nærmere forklaring, tillegg A):

$$\begin{aligned} \pi(S_{\tau_*^m-m}) &= E \left[ \left( \frac{\delta(1-\alpha)}{r-\mu} S_{\tau_*^m} - D \right)^+ \middle| \mathcal{F}_{\tau_*^m}^m \right] \\ &= \frac{\delta(1-\alpha)}{r-\mu} e^{\mu m} S_{\tau_*^m-m} N(z) - DN(z - \sigma\sqrt{m}), \end{aligned} \quad (17)$$

hvor

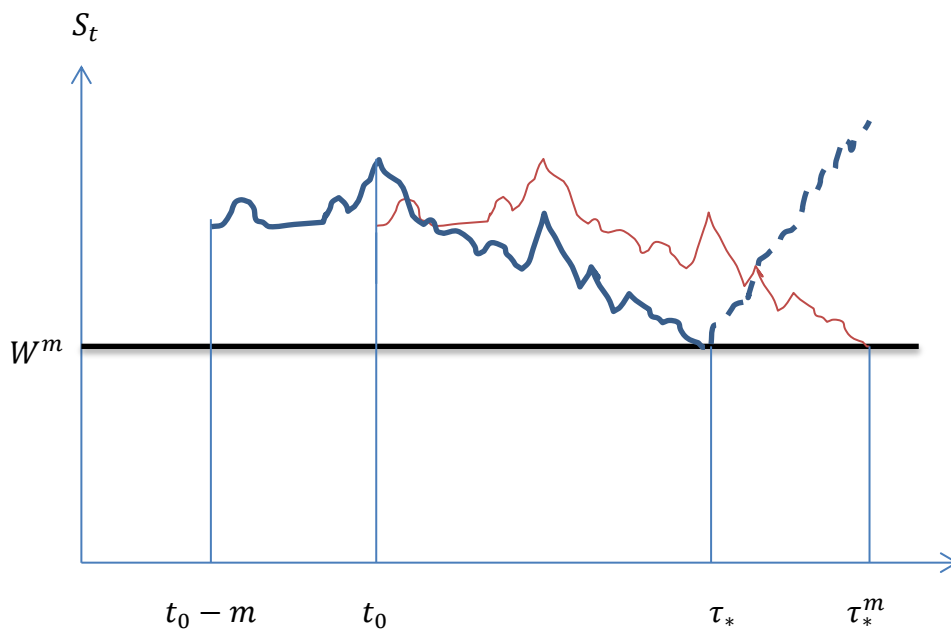
$$z = \frac{\ln \left( \frac{\delta(1-\alpha) S_{\tau_*^m-m}}{(r-\mu)D} \right) + \left( \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) m}{\sigma\sqrt{m}} \quad (18)$$

og  $N(*)$  er den kumulative standard normalfordelingsfunksjonen.

<sup>3</sup> Direkte oversatt fra det engelske *bankruptcy wild card* (Lindset, Lund, & Persson, 2014).

### 4.1.2 Optimal konkurspolitik

Avgjørelsen om å slå seg konkurs blir tatt av eier. De antar at optimal stoppe-tid er første gang man treffer konkursbarrieren, konstanten  $W^m$ , det vil si at selskapet er konkurs første gang  $S_{t-m} = W^m$ . I denne økonomien tolkes optimal stoppe-tid som konkurstidspunktet, der  $\tau_*$  er klassisk ikke-forsinket stoppe-tid og  $\tau_*^m$  er optimal stoppe-tid gitt informasjonsforsinkelse. Uten forsinkelse ville eier besluttet konkurs på tidspunkt  $\tau_*$ , når verdien av eiendelene er lik  $W$ , konkursbarriere gitt full informasjon (antatt at  $W = W^m$ ). Informasjonsforsinkelsen er illustrert i **figur 2**, som er hentet fra Lindset, Lund og Persson (2014).



**Figur 2.** Illustrasjonen er hentet fra Lindset, Lund og Persson (2014). Blå linje viser observert verdi av eiendeler gitt full informasjon. Rød linje viser observert verdi av eiendeler gitt forsinket informasjon.

Eier tar avgjørelsen om konkurs på tidspunkt  $\tau_*^m$ , der notasjonen  $\tau_*^m(t_0)$  benyttes for optimal stoppe-tid, og mengdene av alle  $m$ -forsinkede stoppe-tider som  $\mathcal{T}^m$ . Som vanlig gir  $\mathcal{T}$  alle mengder av klassiske stoppe-tider. På et hvert tidspunkt  $t \geq t_0$  står eier ovenfor følgende optimale stoppe-problem:

$$\begin{aligned} \varphi(S_{t-m}) = \sup_{\tau^m(t) \in \mathcal{T}^m} E \left[ \int_t^{\tau^m(t)} e^{-r(v-t)} (\delta S_{v-m} - (1-\theta)C) dv \right. \\ \left. + e^{-r(\tau^m(t)-t)} \pi(S_{\tau^m-m}) | \mathcal{F}_t^m \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Problemet løses, og man står igjen med følgende uttrykk for verdien av egenkapital,  $\varphi$  (for mellomregninger, se tillegg B):

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{\delta s}{r - \mu} - \frac{\delta W^m}{r - \mu} \left(\frac{s}{W^m}\right)^\gamma - (1 - \theta) \frac{C}{r} \left(1 - \left(\frac{s}{W^m}\right)^\gamma\right) + \pi(W^m) \left(\frac{s}{W^m}\right)^\gamma & s > W^m, \\ 0 & s \leq W^m \end{cases}, \quad (20)$$

hvor

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu - \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} < 0. \quad (21)$$

Den konstante konkursbarrieren  $W^m$  er implisitt gitt ved ligningen

$$W^m = \frac{\gamma(1 - \theta) \frac{C}{r} + \gamma\pi(W^m)}{\frac{\delta}{r - \mu}(\gamma - 1) + \pi'(W^m)}, \quad (22)$$

hvor funksjonen  $\pi(*)$  er gitt ved ligning (13).

#### 4.2 Duffie og Lando (2001)

Duffie og Lando (2001) presenterer blant annet i sin artikkel uttrykket for verdien av egenkapital gitt klassisk ikke-forsinket stoppe-tid,  $\tau_*$ . Innledningsvis i artikkelen til Lindset, Lund og Persson (2014) er oppsettet likt som i Duffie og Lando (2001), på grunn av dette vil ikke fremgangsmåte og antakelser bli presentert nærmere. Omskrevet til Lindset, Lund og Persson (2014) sin notasjon, er verdien av egenkapital gitt ved

$$\varphi(s) = \frac{\delta s}{r - \mu} - \frac{\delta W}{r - \mu} \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma - (1 - \theta) \frac{C}{r} \left(1 - \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma\right), \quad (23)$$

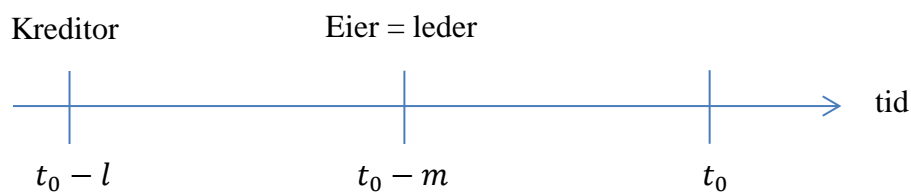
der den eneste forskjellen fra Lindset, Lund og Persson (2014) er deres utvidelse med konkurs wild card. Komponentene i ligning (20) og (23) blir nærmere forklart i kapittel 5.2.



## 5. Analyse

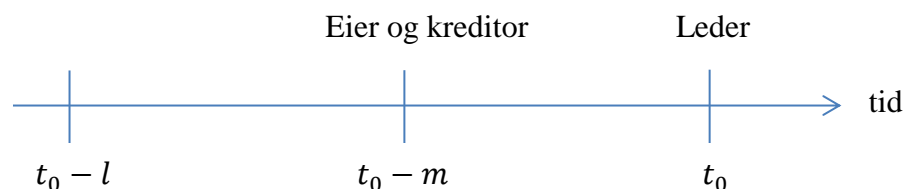
Vi har hittil sett på en introduksjon av oppgavens modell, samt fått et innblikk i eksisterende litteratur. Før vi starter med analysen av oppgavens modell skal vi klargjøre strukturelle forskjeller denne oppgaven har i forhold til eksisterende litteratur, primært Lindset, Lund og Persson (2014).

Som vi så i kapittel 4.1, antok Lindset, Lund og Persson (2014) at selskapet er drevet av eier. I praksis vil dette si at eier og leder er samme person og har tilgang på lik informasjon. Det ble videre antatt at eier observerte verdien av eiendelene med en forsinkelse i forhold til full informasjon. Kreditor ble antatt å tilhøre gruppen som var senere informert enn eier. Det var dermed asymmetrisk informasjon mellom agentgruppene, der  $m$  tilsvarende informasjonssforsinkelse og  $l - m$  tilsvarende informasjonssasymmetri. Om vi tar utgangspunkt i en tidslinje, vil en grafisk fremstilling se slik ut:



Figur 3. Grafisk fremstilling av informasjonssforsinkelsene i Lindset, Lund og Persson (2014).

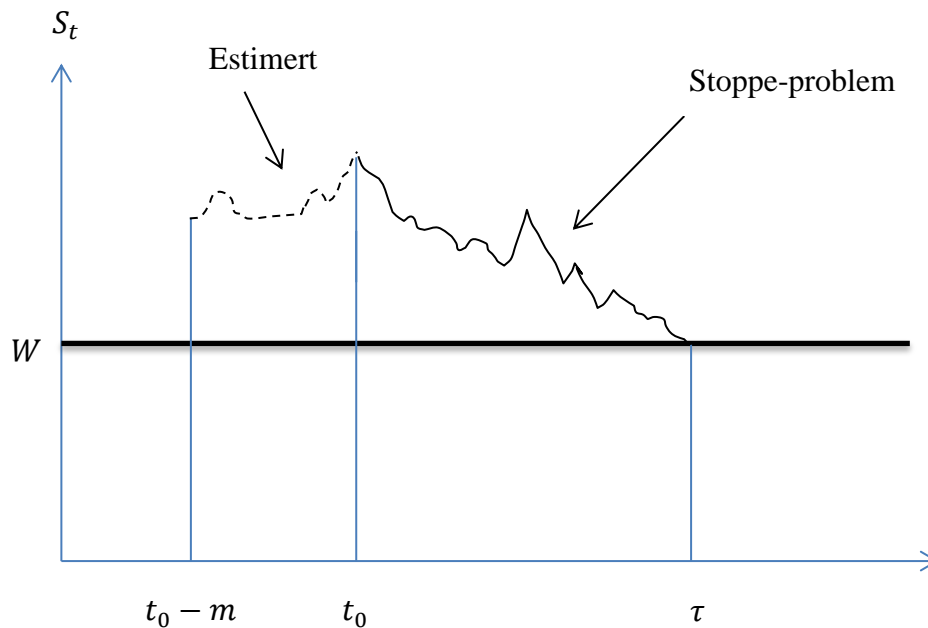
Denne oppgaven gjør to endringer i forhold til dette. Vi antok i kapittel 3 at ledelsen informerer eier når selskapet er konkurs. Dette vil i praksis bety at konkursbeslutningen blir tatt med full informasjon, dette er en forenkling fra Lindset, Lund og Perssons modell. Videre skiller vi mellom eier og leder av selskapet og etablerer informasjonssforsinkelse mellom disse to gruppene. I tillegg er kreditor sidestilt med eier hva informasjonssforsinkelse angår. Grafisk fremstilling av oppgavens tidslinje ser dermed slik ut:



Figur 4. Grafisk fremstilling av oppgavens informasjonssforsinkelse.

Hovedforskjellen fra eksisterende litteratur er dermed utvidelsen av informasjonssforsinkelse mellom ledelsen av selskapet og dets eiere. Det er også implisitt antatt at den som i praksis tar konkursbeslutningen har  $m = 0$ , full informasjon.

Videre i dette kapittelet skal vi se på de forskjellige elementene som sammen utgjør en løsning på problemet, slik at vi videre vil være i stand til å gjøre numeriske beregninger basert på disse funnene. Vi tar utgangspunkt i **figur 1**.



### 5.1 Estimert verdi av eiendeler

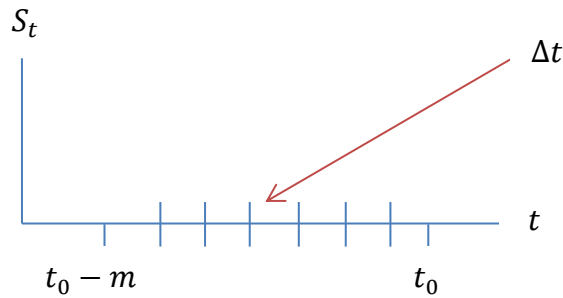
Ligning (9) gav oss uttrykket for verdien av eiendeler, som er antatt å være den eneste tilstandsvariabelen:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma\varepsilon\sqrt{t}}, \quad \varepsilon \sim N(0,1).$$

Vi tar utgangspunkt i at markedsaktørene vet to ting: 1) De vet initialverdien til eiendeler på tidspunkt  $t_0 - m$ . I ligning (9) tilsvarende dette  $S(0)$ . 2) De vet at det eksisterer en informasjonsforsinkelse. Å simulere ligning (9) i et dataprogram vil kun gi oss en estimert verdi av eiendeler på tidspunkt  $t_0$ , gitt en antatt startverdi  $S(0)$ . Hva som skjer med prosessen mellom tidspunkt  $t_0 - m$  og tidspunkt  $t_0$  er uvisst. Vi er imidlertid interessert i å vite, i tillegg til å finne estimert verdi av eiendeler på tidspunkt  $t_0$ , om prosessen har truffet konkursbarrieren eller ikke. Vi kan dermed finne forventet verdi av eiendeler på tidspunkt  $t_0$ , betinget av at konkurs ikke har inntruffet. Vi deler derfor tidsintervallet  $[t_0 - m, t_0]$  inn i mindre deler med størrelse  $\Delta t$ . Dette er for å fange opp antall barrieretreff bedre der logikken er; jo finere inndeling (lavere  $\Delta t$ ) jo flere barrieretreff vil vi fange opp. Uttrykket brukt i Monte Carlo-simuleringen er dermed lik følgende:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - 0.5\sigma^2)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}}. \quad (24)$$

Grafisk har  $\Delta t$  følgende utforming:



Figur 5. Viser hvordan inndelingen av  $t$  er gjennomført.

I simuleringen sjekkes ett og ett tidsintervall for barrieretreff og dermed vil konkurs-sannsynligheten kunne estimeres. Sannsynligheten for overlevelse blir da  $1 - (treff/N)$ , der  $N$  tilsvarer antall simuleringer. Musiela og Rutkowski (1997, Corollary B.3.4) presenterer en formel der man kan regne ut sannsynligheten for overlevelse rent analytisk. Dette vil dermed tilsvare en sømløs inndeling av  $\Delta t$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ . Den analytiske sannsynligheten for overlevelse er gitt ved

$$\Psi(m, x) = N\left(\frac{-y + mv}{\sigma\sqrt{m}}\right) - e^{2yv/\sigma^2} N\left(\frac{y + mv}{\sigma\sqrt{m}}\right), \quad y \leq 0, \quad (25)$$

der  $v = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ ,  $y = \ln\left(\frac{W}{S_{t_0-m}}\right)$  og  $m$  tilsvarer størrelsen på informasjonsforsinkelsen.  $S_{t_0-m}$  er initialverdien til eiendeler, altså observert verdi av eiendeler gjort på tidspunkt  $t_0 - m$  av markedsaktørene, og er antatt kjent. Konkursbarrieren er som før gitt ved  $W$ . Totalt vil dette gi oss en form for diagnostisk test på hvor liten  $\Delta t$  som trengs for å fange opp tilstrekkelig antall barrieretreff, slik at resultatene har så liten skjevhet som mulig. I delkapittel 6.3.1 vil det bli presentert flere datasimuleringer med ulik størrelse på  $\Delta t$ . Dette for å vise effekten, og viktigheten, av en så fin inndeling som mulig når det kommer til  $\Delta t$ .

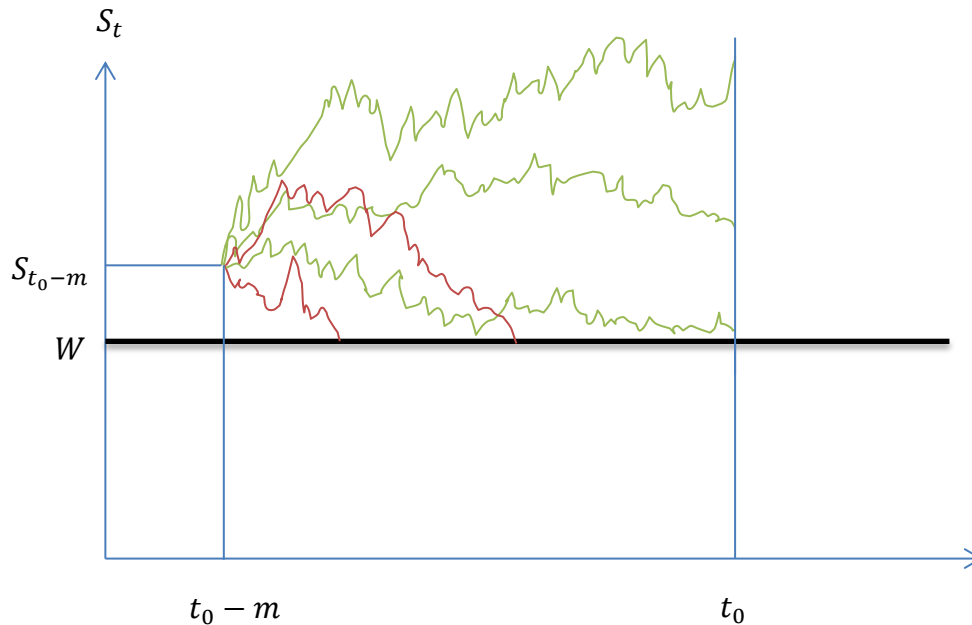
For å kontrollere at Monte Carlo-simuleringene er tilnærmet korrekte, hva verdi av eiendeler angår, kontrolleres dette opp mot den analytiske forventningsverdien til  $S_t$ . I kapittel 2.1 ble det vist at for  $s$ , om man antar en initialverdi lik  $S(0) = S_0 = S_{t_0-m}$ , vil den forventede verdien av  $S(t)$  på tidspunkt  $t_0$  være gitt ved ligning (3) (Dixit & Pindyck, 1994):

$$E[S_{t_0}] = S_{t_0-m} e^{\mu t} \quad , \text{ for } t = m. \quad (26)$$

I og med at det er en stokastisk prosess vi behandler vil resultatene fra de forskjellige simuleringene variere. Vi vil i den forbindelse gjøre mange simuleringer når verdien av eiendeler skal bestemmes. Et gjennomsnitt av alle simuleringene vil videre bli regnet ut og

kontrollert opp mot ligning (26) som blir benyttet som en form for fasit. På samme måte som ligning (25) virker som en diagnostisk test på hvor liten  $\Delta t$  som trengs, vil ligning (26) svare til hvor mange simuleringer som trengs for at gjennomsnittsverdien av alle simuleringer skal være tilnærmet lik den analytiske forventningsverdien. I ligning (26) vil  $t$  tilsvare tidsintervallet  $[t_0 - m, t_0]$ . Ergo vil vi i dette uttrykket ha  $t = m$ , informasjonsforsinkelsen.

Grafisk vil estimeringen av verdien til eiendeler se slik ut:



**Figur 6.** Grafisk fremstilling av simuleringene som blir gjennomført. Noen simuleringer treffer konkursbarrieren, mens de aller fleste kommer frem til målet.

Ved å beregne flere realisasjoner av  $S$  vil vi finne at noen simuleringer treffer barrieren før de når tidspunkt  $t_0$  (de røde banene i **figur 6**), mens andre simuleringer kommer frem til tidspunkt  $t_0$  (de grønne banene i **figur 6**). På samme måte som gjennomsnittsverdien av alle simuleringene kan verifiseres av ligning (26) kan vi verifisere gjennomsnittsverdien av de simuleringene som kommer frem til tidspunkt  $t_0$  (de grønne banene i **figur 6**). Vi vil i den forbindelse benytte Bayes regel og regelen for betinget forventning for å kunne gjøre en analytisk vurdering av resultatene.

## 5.2 Estimert verdi av egenkapital

Stoppe-problemet løst i Lindset, Lund og Persson (2014) vil også være relevant i denne oppgaven, da vi benytter dette etter å ha funnet estimert verdi av  $S_{t_0}$ . Verdien av egenkapitalen ble funnet å være lik følgende, gitt  $s > W^m$  der  $s = S_t$  (ligning (20))

$$\varphi(s) = \frac{\delta s}{r - \mu} - \frac{\delta W^m}{r - \mu} \left(\frac{s}{W^m}\right)^\gamma - (1 - \theta) \frac{C}{r} \left(1 - \left(\frac{s}{W^m}\right)^\gamma\right) + \pi(W^m) \left(\frac{s}{W^m}\right)^\gamma$$

Første ledd i ligning (20) tolkes som nåverdien av all fremtidig kontantstrøm, generert av  $s$  for  $s > W^m$ . Andre ledd representerer nåverdien av kontantstrømmen tapt ved, eller overført til kreditorer ved konkurstidspunktet. Tredje ledd representerer kostnaden av alle fremtidige kupongbetalinger på gjeld, netto etter skattefradrag (Duffie & Lando, 2001). Siste ledd representerer nåverdien av konkurs wild card. Faktoren  $(s/W^m)^\gamma$  tolkes som nåverdien av en enhet betaling ved konkurstidspunktet, gitt dagens tilstand  $s$  (Lindset, Lund, & Persson, 2014).

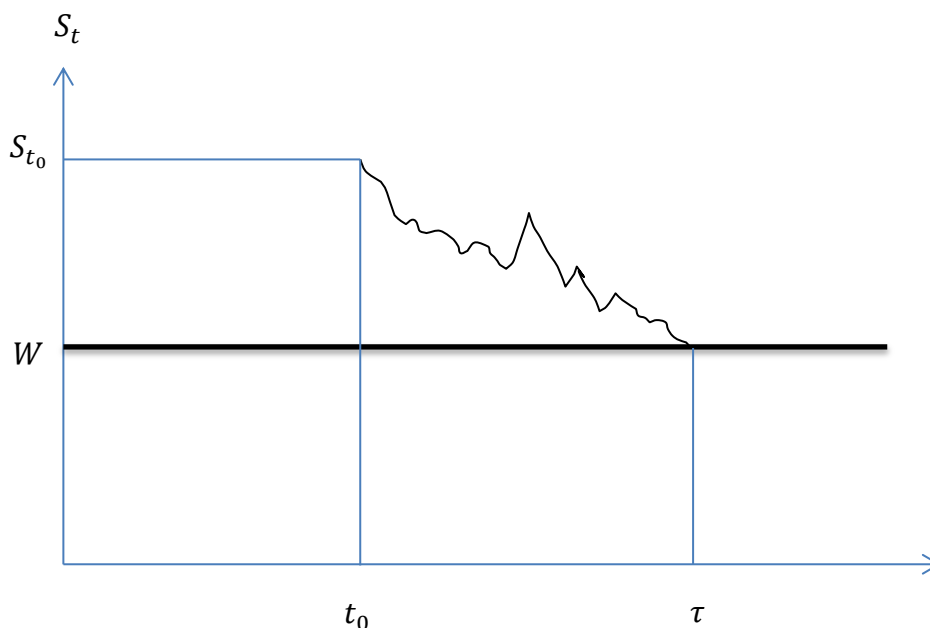
Som det kommer frem av tidligere diskusjon er det antatt at ledelsen varsler markedsaktørene når  $S_t = W$ . Følgen av dette er at konkurs wild card ikke vil ha noen verdi, da konkursbeslutningen i praksis blir tatt med  $m = 0$ . Som vi så under diskusjonen i kapittel 4.1.1 vil konkurs wild card først få en positiv verdi når den som tar konkursbeslutningen har  $m > 0$ . På bakgrunn av dette vil konkurs wild card være utelatt fra videre estimeringer i oppgaven. Uttrykket brukt for estimert verdi av egenkapitalen forenkles dermed til uttrykket Duffie og Lando (2001) utledet i sin artikkel. Fra ligning (23) har vi

$$\varphi(s) = \frac{\delta s}{r - \mu} - \frac{\delta W}{r - \mu} \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma - (1 - \theta) \frac{C}{r} \left(1 - \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma\right).$$

Der overnevnte forklaringer, samt antakelsen om at  $s > W$  der  $s = S_t$  er gjeldende også her. Som vi var inne på i kapittel 3.2 finner vi den estimerte verdien av egenkapitalen ved å la den estimerte verdien av eiendeler på tidspunkt  $t_0$ , betinget av  $\tau > t_0$ , inngå i ligning (23). Et gjennomsnitt av alle disse simuleringene blir deretter beregnet. Vi kan dermed skrive uttrykket for estimert gjennomsnittsverdi av egenkapital som

$$\varphi(S) \approx \frac{1}{\bar{N}} \sum_{i=1}^{\bar{N}} \varphi(s_i), \quad (27)$$

der  $\varphi(s)$  blir gitt ved ligning (23) og  $\tilde{N}$  er antall simuleringer av verdien til eiendeler, gitt  $\tau > t_0$ . Merk at ved simuleringer av denne typen vil vi oppnå en approksimert løsning. Ligning (27) blir dermed sett på som approksimert gjennomsnittsverdi av egenkapitalen. På samme måte som for verdi av eiendeler kan vi se på dette grafisk.



**Figur 7.** Figuren viser én simulering av verdien til eiendeler fra tidspunkt  $t_0$  frem til konkurstidspunkt  $\tau$ . Det er i dette tidsintervallet vi beregner verdi av egenkapitalen.

Som det fremgår av **figur 7** blir vi, i tillegg til å ha etablert et uttrykk for verdi av eiendeler og egenkapital, også nødt til å beregne uttrykket for konkursbarrieren,  $W$ .

### 5.3 Konkursbarriere

Konkursbarrieren som observeres av leder impliserer en konkursbarriere observert med  $m = 0$ . I den sammenheng vil, som vi tidligere har vært inne på, konkurs wild card være verdiløst (Lindset, Lund, & Persson, 2014). Uttrykket for konkursbarriere med full informasjon finnes ved å differensiere uttrykket for verdien av egenkapitalen med hensyn på  $s$  og sette dette uttrykket lik null når  $s = W$ , for så å løse ut for  $W$  (Leland, 1994). Vi tar utgangspunkt i ligning (23):

$$\varphi(s) = \frac{\delta s}{r - \mu} - \frac{\delta W}{r - \mu} \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma - (1 - \theta) \frac{C}{r} \left(1 - \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma\right).$$

Differensierer med hensyn på  $s$ , setter det hele lik null når  $s = W$ :

$$\frac{\delta}{r - \mu} - \frac{\delta \gamma}{r - \mu} - \frac{C \gamma (\theta - 1)}{r \times W} = 0.$$

Dette gir at

$$W = \frac{C\gamma(1-\theta)(r-\mu)}{r\delta(\gamma-1)}.$$

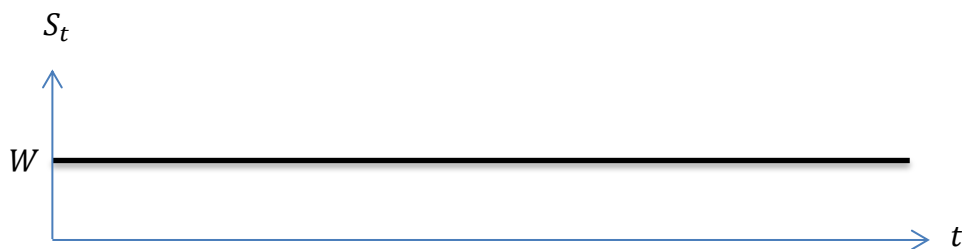
Med litt omrokking kan dette uttrykkes på samme måte som i Lindset, Lund og Persson (2014)

$$W = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{r-\mu}{\delta} \frac{(1-\theta)C}{r}, \quad (28)$$

der (ligning (21))

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu - \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} < 0.$$

Der  $\gamma$ , fra ligning (21), kan sidestilles med roten til den karakteristiske ligningen til en differensialligning av annen orden. I forbindelse med uttrykket for konkursbarrieren presenteres også grensebetingelsene for prosessen. Den første betingelsen er gitt ved  $\varphi(s) = 0$  for  $s \leq W$ . Det betyr at det ikke lengre er optimalt å drive selskapet videre når verdien av egenkapitalen har blitt redusert til ens avviklingsverdi (Duffie & Lando, 2001). Den andre betingelsen, eller «smooth pasting»-betingelsen, er gitt ved  $\varphi'(s)|_{s=W} = 0$ . Den sier at også den deriverte, eller stigningen, til verdien av egenkapitalen er null i konkurstidspunktet og ikke bare de faktiske verdiene (Dixit & Pindyck, 1994). Konkursbarrieren fremstilt grafisk:

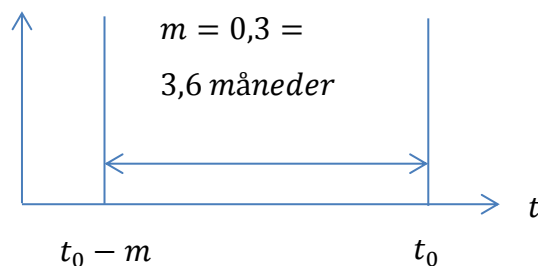


Figur 8. Konkursbarrieren gitt full informasjon.

#### 5.4 Tallfeste informasjonsforsinkelsen, $m$

For å kunne gjøre en numerisk analyse av problemet må vi tallfeste  $m$ , informasjonsforsinkelsen. Her, som i Lindset, Lund og Persson (2014), blir  $m$  sett på som andel av år. Dermed vil  $m = 1$  tilsi en informasjonsforsinkelse på ett år, likeledes vil  $m = 0$  tilsi ingen informasjonsforsinkelse (full informasjon). Verdien av eiendeler er ikke

nødvendigvis enkelt å observere. Eierne må samle, prosessere og analysere informasjon for å bedømme ens verdi. Dette tar tid, slik at også i praksis observeres verdien av eiendeler med forsinkelse (Lindset, Lund, & Persson, 2014). Det finnes dermed belegg for at  $m \neq 0$ . Et selskap leverer imidlertid kvartalsrapporter, som gjør at en informasjonsforsinkelse der  $m > 1$ , er lite sannsynlig. Vi kan videre anta at kvartalsrapportene er av såpass stor interesse hva verdivurdering angår at de benyttes videre i argumentasjonen for en fornuftig tallfestelse av  $m$ . Et kvartal tilsvarer  $m = 0,25$ , det gis derimot noe tid til å prosessere informasjonen slik at  $m = 0,3$  er antatt å være en fornuftig størrelse på informasjonsforsinkelsen. Størrelsen på informasjonsforsinkelsen grafisk:



Figur 9. Størrelsen på informasjonsforsinkelsen,  $m$ .

### 5.5 Oppsummering

Markedsverdien av egenkapitalen,  $\varphi$ , bestemmes av markedsaktørene som står overfor en informasjonsforsinkelse i forhold til ledelsen av selskapet. Totaluttrykket for markedsverdien av  $\varphi$  er dermed gitt ved at den estimerte verdien av eiendeler,  $S_{t_0}$ , settes inn i det løste stoppeproblemet fra Lindset, Lund og Persson (2014) uten konkurs wild card. Prosessen gjentas flere ganger og vi beregner til slutt en gjennomsnittsverdi av egenkapitalen. Dette gir oss approksimert verdi av egenkapital med to betingelser: 1) Verdsettelsen, utført av markedsaktørene, er gjennomført med mindre informasjon enn hva ledelsen innehar. 2) Selskapet har ikke gått konkurs i tidsintervallet  $[t_0 - m, t_0]$ , ergo  $\tau > t_0$ . Vi har dermed at:

$$E[\varphi | \mathcal{F}_{t-m} \vee \tau > t_0] \approx \frac{1}{\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \varphi(s_i). \quad (29)$$

Vi kan med dette gå videre til datasimuleringer av problemet.



## 6. Resultater og tolkning

### 6.1 Parameterfastsettelse

For å kunne gjennomføre Monte Carlo-simuleringene må vi anta verdier på de ulike parameterne som er benyttet. For å oppnå sammenlignbare resultater benytter vi i denne oppgaven de samme parameterverdiene som i Lindset, Lund og Persson (2014, tabell 1):

Tabell 1. Antatte verdier for simuleringer i MATLAB.

<i>Parameter</i>	<i>Verdi</i>	<i>Forklaring</i>
$S_{t_0-m}$	100	Initialverdi eiendeler
$\delta$	0,035	Andel av eiendeler betalt som dividende
$r$	0,08	Risikofri rente
$\mu$	0,045	Vekstrate eiendeler (drift)
$\sigma$	0,3	Volatilitet eiendeler
$\theta$	0,3	Skatterate
$\alpha$	0,5	Konkurskostnadsparameter
$C$	13	Kupongbetaling
$D$	90	Hovedstol, gjeld
$m$	0,3	Informasjonsforsinkelse, andel av år

Det er nærliggende å kommentere at den mest utslagsgivende antakelsen i denne sammenhengen vil omhandle initialverdien til eiendeler,  $S_{t_0-m} = 100$ . Denne størrelsen har stor innvirkning på oppgavens resultater, der de to mest interessante størrelsene som blir påvirket er betinget verdi av eiendeler og verdi av egenkapital. Som vi tidligere har vært inne på er det ønskelig at størrelsen på  $\Delta t$  er relativt liten. Dette er for å fange opp så mange barrieretreff som mulig, der  $\Delta t$  vil tilsvare størrelsen til én periode av den totale inndelingen tidsintervallet  $[t_0 - m, t_0]$  er delt inn i. Vi deler tidsintervallet inn i 100 000 deler, ergo for  $m = 0,3$  vil vi få en steg-lengde lik  $\Delta t = 0,3/100\ 000 = 0,000003$ .

## 6.2 Grunnleggende kalkulasjoner

Resultatene vi presenterer i tabell 2 er grunnleggende kalkulasjoner som trengs for videre bruk. Felles for dem alle er at de kan beregnes ved bruk av en enkel kalkulator.

Tabell 2. Grunnleggende kalkulasjoner for videre simuleringer.

Nr.	Beskrivelse	Uttrykk	Verdi
(21)	Gamma	$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu - \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}$	$-\frac{4}{3}$
(28)	Konkursbarriere, full informasjon	$W = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{r - \mu}{\delta} \frac{(1 - \theta)C}{r}$	65
-	Smooth pasting-betingelse (fra kapittel 5.3)	$\varphi'(W) = \frac{\delta}{r - \mu} - \frac{\delta}{r - \mu} = 0$	OK

Gamma ( $\gamma$ ) tilfredsstiller kravet  $\gamma < 0$ , da verdien er funnet å være lik  $-\frac{4}{3}$ .

Konkursbarrieren uten forsinkelse er funnet å være  $W = 65$ , dette vil altså bety at når verdien av eiendeler treffer 65 er selskapet konkurs.

Videre finner vi, ved derivasjon, at smooth pasting-betingelsen fra kapittel 5.3 er oppfylt.

## 6.3 Estimert verdi av eiendeler

Den stokastiske prosessen  $S_t$  estimeres fra tidspunkt  $t_0 - m$  til  $t_0$ , der vi er ute etter  $S_{t_0}$ , da denne benyttes videre. Vi gjennomfører dermed simuleringer av  $s = S_{t_0 - m} e^{(\mu - 0.5\sigma^2)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}}$ , der startverdien er satt til  $S_{t_0 - m} = 100$ . Antall simuleringer er satt lik  $N = 1\,000\,000$ . Scriptet som er benyttet i MATLAB tar høyde for at verdien til  $S_t$  kan falle under konkursbarrieren, vi har i den forbindelse kodet inn en tellemekanisme slik at antall barrieretreff kan dokumenteres (for script, se tillegg C.2). Vi får dermed et mål på hvor stor sannsynligheten er for at konkurs inntreffer i det nevnte tidsrom. Tabell 3 gir oss resultatene som ble funnet og hvert resultat blir forklart i de påfølgende delkapitlene.

Tabell 3. Resultater fra MATLAB.  $N = 1\,000\,000$ .

Forklaring	Verdi
Antall barrieretreff	8744
Sannsynlighet for konkurs	0,8744 %
Sannsynlighet for overlevelse	99,1256 %
Gjennomsnittsverdi av simuleringer som traff barrieren	65,1184
Betinget forventningsverdi av eiendeler	101,6733
Total gjennomsnittsverdi av alle simuleringer	101,3537

### 6.3.1 Antall barrieretreff, sannsynlighet for konkurs og sannsynlighet for overlevelse

Av 1 000 000 simuleringer ser vi at 8744 simuleringer treffer konkursbarrieren. Dette gir en estimert sannsynlighet for konkurs lik 0,8744 %, som igjen gir estimert sannsynlighet for overlevelse lik 99,1256 %. Disse resultatene kan verifiseres ved tidligere nevnte uttrykk fra Musiela og Rutkowski (1997), som gir sannsynligheten for overlevelse direkte. Ligning (25) gav oss:

$$\Psi(m, x) = N\left(\frac{-y + mv}{\sigma\sqrt{m}}\right) - e^{2yv/\sigma^2} N\left(\frac{y + mv}{\sigma\sqrt{m}}\right),$$

der  $v = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  og  $y = \ln\left(\frac{W}{S_{t_0-m}}\right)$ . Ved innsettelse av  $m = 0,3$ ,  $S_{t_0-m} = 100$  og  $W = 65$ , i tillegg til verdier for  $\mu$  og  $\sigma$ , finner vi at den analytiske sannsynligheten for overlevelse er lik 99,1250 %. Gjennom våre simuleringer finner vi en marginalt høyere sannsynlighet for overlevelse, men differansen er neglisjerbar. Grunnen til differansen er størrelsen til  $\Delta t$ . Hadde vi latt  $\lim \Delta t \rightarrow 0$ , ville vi klart å fange opp flere barrieretreff. Flere barrieretreff gir lavere sannsynlighet for overlevelse, derfor havner Monte Carlo-simuleringen hva overlevelsessannsynlighet angår marginalt over analytisk verdi. Vi skal i det videre se på simuleringer der vi tar for oss implikasjoner ved en endring i  $\Delta t$ . Til nå har vi antatt  $\Delta t = 0,3/100\,000$ , hypotetisk sett skal antall barrieretreff gå ned jo grovere inndeling  $\Delta t$  har. Vi husker at inndelingen benyttet over gav oss 8744 barrieretreff ved å simulere verdien av eiendeler 1 000 000 ganger. I tabell 4 ser vi på ulike størrelser av  $\Delta t$ , men antall simuleringer er det samme. Vi benytter antall barrieretreff som et resultatmål.

**Tabell 4.** Viser hvordan en finere inndeling på  $\Delta t$  fanger opp flere barrieretreff enn ved en grovere inndeling av  $\Delta t$ .

$\Delta t$	Steg-lengde, desimal	Antall barrieretreff
$\frac{0,3}{100\ 000}$	$\Delta t = 0,000003$	8744
$\frac{0,3}{10\ 000}$	$\Delta t = 0,00003$	8420
$\frac{0,3}{1000}$	$\Delta t = 0,0003$	8323
$\frac{0,3}{100}$	$\Delta t = 0,003$	7360
$\frac{0,3}{10}$	$\Delta t = 0,03$	5519
$\frac{0,3}{1}$	$\Delta t = 0,3$	4391

Vi merker oss at  $\Delta t = 0,3/100\ 000$ , samt  $\Delta t = 0,3/10\ 000$  fanger opp barrieretreff tett oppunder analytisk verdi (der  $\Delta t = 0,3/100\ 000$  er funnet å være absolutt nærmest). Dette tyder på at  $\Delta t$ -finheten benyttet for simuleringene er god nok for å få presise resultater. Vi ser videre at hypotesen om at jo grovere inndeling vi gir  $\Delta t$ , jo færre barrieretreff greier vi å registrere, stemmer også i praksis. Ser vi på situasjonen der vi kun har ett steg,  $\Delta t = 0,3/1$ , vil vi bare avdekke cirka halvparten (4391) av de barrieretreffene vi klarte å avdekke med  $\Delta t = 0,3/100\ 000$ .

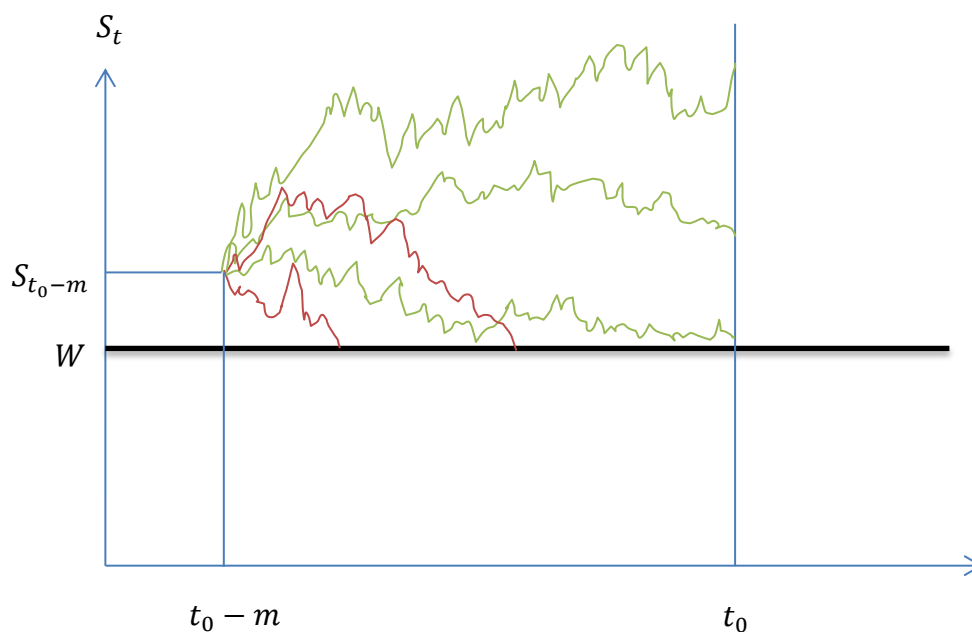
I tillegg til  $\Delta t$ -finhet er antall barrieretreff også svært sensitiv til endringer i volatilitet. Selv om dette ikke har vært diskutert tidligere i oppgaven er resultatene såpass entydige at de er verdt å merke seg. Jo høyere volatilitet, jo større svingninger vil vi få i utviklingen til  $S_t$ . Tilsvarende vil lavere volatilitet gi mindre svingninger i  $S_t$ . Vi husker at vi satte volatiliteten til  $S_t$  å være lik  $\sigma = 0,3$ . Alt annet likt, skal vi se på hvilke resultater vi oppnår om vi gjør simuleringer med ulik størrelse på volatiliteten,  $\sigma$ . Antall barrieretreff blir brukt som resultatmål også her.

**Tabell 5.** Viser hvordan resultatene, målt i antall barrieretreff, påvirkes av endringer i volatilitet.

<i>Volatilitet</i>	<i>Antall barrieretreff</i>	<i>Konkurs-sannsynlighet</i>
$\sigma = 0,1$	0	0%
$\sigma = 0,2$	70	0,007%
$\sigma = 0,3$	8744	0,8744%
$\sigma = 0,4$	54 889	5,3889%
$\sigma = 0,5$	131 880	13,188%

Resultatene fra tabell 5 er entydige og viser at antall barrieretreff påvirkes i høy grad av størrelsen på volatiliteten. Dette er i all hovedsak en forventet effekt, men det er uansett verdt å merke seg størrelsen på effekten før vi går i gang med hovedresultatene av oppgaven, da en endring i volatilitet også ville påvirket resultatene til den betingede forventningsverdien av eiendeler.

For en analyse av de resterende tre verdiene fra tabell 3, tar vi utgangspunkt i **figur 6**:



### 6.3.2 Gjennomsnittsverdi av simuleringer som traff barrieren

I MATLAB lar vi simuleringene som treffer barrieren likevel nå frem til sluttidspunktet,  $t_0$ , slik at vi kan regne ut gjennomsnittlig verdi av disse på tidspunkt  $t_0$  for videre bruk. I **figur 6** vil dette tilsvare de røde banene. Gjennomsnittsverdi av simuleringer som traff barrieren ble funnet å være lik 65,1184.

### 6.3.3 Betinget forventningsverdi av eiendeler + total gjennomsnittsverdi av alle simuleringer

Betinget forventningsverdi av eiendeler gir oss en gjennomsnittlig verdi av eiendeler på tidspunkt  $t_0$  for de simuleringene som *ikke* traff barrieren i tidsintervallet  $[t_0 - m, t_0]$ . Altså gjennomsnittsverdien av  $S_{t_0}$  betinget av at selskapet ikke har gått konkurs,  $\tau > t_0$ . I **figur 6** vil dette tilsvare de *grønne* banene. Betinget forventningsverdi av eiendeler er funnet å være lik 101,6733.

Total gjennomsnittsverdi av alle simuleringer gir gjennomsnittlig verdi av alle simuleringer på tidspunkt  $t_0$ . I **figur 6** vil dette tilsvare både de *røde* og de *grønne* banene. Total gjennomsnittsverdi av alle simuleringer er funnet å være lik 101,3537.

Disse størrelsene kan verifiseres, der den enkleste verifiseringen er total gjennomsnittsverdi av alle simuleringer. Dette vil tilsvare den analytiske forventningsverdien til  $S_{t_0}$ , uttrykt ved ligning (26):

$$E[S_{t_0}] = S_{t_0-m} e^{\mu t}.$$

Der  $t = m = 0,3$ . Innsatt aktuelle verdier,  $S_{t_0-m} = 100$  og  $\mu = 0,045$ , gir dette

$$E[S_{t_0}] = 101,3592.$$

Simuleringene gir en gjennomsnittlig verdi av eiendeler på tidspunkt  $t_0$  lik  $S_{t_0} = 101,3537$ . Vi anser dette som presist nok. I og med at det er en stokastisk prosess vi behandler, vil resultatene variere noe om man kjører MATLAB-scriptet flere ganger, men avvikene er svært små.

For å verifisere betinget forventningsverdi av eiendeler går vi via definisjonen av betinget forventning og Bayes regel. Dette er på grunn av at vi skal finne forventningsverdien til eiendeler, betinget av at konkurs ikke har inntruffet. Vi har at (Sydsæter, Strøm, & Berck, 2008):

$$E[X|y] = \sum_x x f(x|y), \text{ der } f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \text{ der } \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)}.$$

Vi kan dermed skrive

$$E[X|y] = x \times \left( \frac{P(X = x \cap Y = y)}{P(Y = y)} \right), \quad (30)$$

der  $x$  er forventningsverdien til  $S_t$ , som vil tilsvare total gjennomsnittsverdi av alle simuleringer ( $E[S_{t_0}] = S_{t_0-m}e^{\mu t}$ ). Videre må vi justere forventningsverdien for at konkurs ikke har inntruffet.  $P(X = x \cap Y = y)$  vil i denne sammenhengen tilsvare  $P(s > W \cap s_{min} > W)$ , som betyr at både hendelsen  $s > W$  og  $s_{min} > W$  inntreffer. Den første hendelsen betyr at verdien av eiendeler er større enn konkursbarrieren, og den andre hendelsen betyr at den minste verdien til  $S_t$  også er større enn konkursbarrieren. Nevneren i brøken i ligning (30),  $P(Y = y)$ , tilsvarer sannsynligheten for at verdien av  $S_t$  er større enn konkursbarrieren. Sagt med andre ord: sannsynligheten for at konkurs ikke inntreffer (overlevelse). Lar vi  $x$  fortsatt være forventningsverdien til eiendeler,  $s_{min}$  være minste verdi av eiendeler og  $P(\tau > t_0)$  være sannsynligheten for at konkurs ikke inntreffer, kan ligning (30) skrives som

$$E[x|\tau > t_0] = x \times \frac{P(s > W \cap s_{min} > W)}{P(\tau > t_0)}, \quad (31)$$

der  $P(s > W \cap s_{min} > W)$  forenkles på bakgrunn av at inntreffer  $s_{min} > W$ , må også  $s > W$  inntreffe. Vi får dermed

$$P(s > W \cap s_{min} > W) = P(s_{min} > W) = 1 - P(s_{min} \leq W).$$

Hvor  $P(s_{min} \leq W)$  gir oss sannsynligheten for at minste verdi av  $S_t$  er mindre eller lik konkursbarrieren. Det kan uttrykkes som gjennomsnittsverdien av simuleringer som traff barrieren multiplisert med andelen (sannsynlighet for konkurs). Dette divideres så med forventningsverdien til eiendeler,  $x$ , for å finne  $P(s_{min} \leq W)$  uttrykt som andel av det totale gjennomsnitt. Lar vi  $s_{konkurs}$  være gjennomsnittsverdien av simuleringene som traff konkursbarrieren og  $P(\tau < t_0)$  være sannsynligheten for konkurs, kan dette uttrykkes som

$$P(s_{min} \leq W) = \frac{s_{konkurs} \times P(\tau < t_0)}{x}.$$

Totalt står vi dermed igjen med

$$E[x|\tau > t_0] = x \times \left( \frac{\left( 1 - \frac{s_{konkurs} \times P(\tau < t_0)}{x} \right)}{P(\tau > t_0)} \right). \quad (32)$$

Vi setter inn verdiene funnet ved simulering:  $x = 101,3537$ ,  $s_{konkurs} = 65,1184$ ,  $P(\tau < t_0) = 0,008744$  og  $P(\tau > t_0) = 0,991256$ . Vi får ved innsetting:

$$E[x|\tau > t_0] = 101,3537 \times \left( \frac{\left(1 - \frac{65,1184 \times 0,008744}{101,3537}\right)}{0,991256} \right) = 101,67334 .$$

Den betingede forventningsverdien til eiendeler er altså lik 101,67334. Den simulerte verdien av betinget forventningsverdi til eiendeler ble funnet å være lik 101,6733. Den nært neglisjerbare feilmarginen skyldes at en estimert forventning har en standardfeil  $> 0$ , men vi anser likevel simuleringen som presis nok.

Vi kan på bakgrunn av disse resultatene konkludere med at de numeriske beregningene vi har gjort til nå er korrekte. Merk at ingen av gjennomsnittsverdiene diskutert i dette kapittelet har noen praktisk betydning for den estimerte verdien av egenkapital. Disse verdiene er kun ment for å verifisere at de simuleringene som gjennomføres er gode nok for videre bruk. Vi kan med dette gå videre til estimeringen av verdien til egenkapitalen.

#### 6.4 Estimert verdi av egenkapital

For å finne estimert verdi av egenkapitalen bruker vi samme MATLAB-script som vi benyttet ved estimering av verdien til eiendeler. Vi lar verdien til eiendeler på tidspunkt  $t_0$  inngå i formelen for verdi av egenkapital, gitt  $s > W$ , for hver simulering som gjøres. Vi får dermed en estimert verdi av egenkapitalen for hver  $s > W$ . Dette gjentas 1 000 000 ganger og vi beregner deretter et gjennomsnitt av alle verdiene av egenkapitalen som simuleres, slik at vi til slutt står igjen med en forventet betinget gjennomsnittsverdi av egenkapitalen. Til dette benyttes ligning (29):

$$E[\varphi|\mathcal{F}_{t-m} \vee \tau > t_0] \approx \frac{1}{\bar{N}} \sum_{i=1}^{\bar{N}} \varphi(s_i) .$$

For sammenligningens skyld beregner vi i tillegg verdien til egenkapitalen ved direkte innsettelse av betinget forventningsverdi til eiendeler i ligning (23),

$$\varphi(s) = \frac{\delta s}{r - \mu} - \frac{\delta W}{r - \mu} \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma - (1 - \theta) \frac{C}{r} \left(1 - \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma\right),$$

for  $s = S_{t_0} = 101,6733$ . Resultatene av simuleringene er gjengitt i tabell 6:



**Tabell 6.** Resultater fra simuleringer i MATLAB, verdi av egenkapital. Antall simuleringer:  $N = 1\,000\,000$ . Kalkulasjonen som omfatter verdi av egenkapital, ligning (23), beregnes uten simulering.

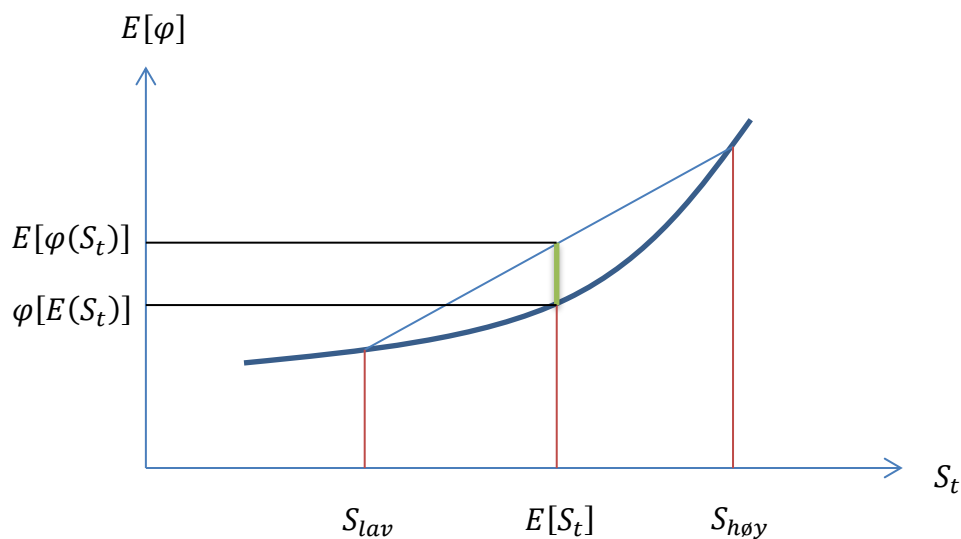
Forklaring	Verdi
Betinget forventningsverdi av eiendeler på tidspunkt $t_0$ (fra kapittel 6.3)	101,6733
Verdi av egenkapital ved innsettelse i ligning (23), $\varphi(101,6733)$	14,7716
Simulert forventet gjennomsnittsverdi av egenkapital, ligning (29)	<b>15,8562</b>

Gjennomsnittlig forventningsverdi av egenkapitalen er altså funnet å være 15,8562. Det er verdt å merke seg den ikke-lineære sammenhengen mellom verdi av egenkapital ved direkte innsettelse av betinget forventningsverdi til eiendeler ( $\varphi(101,6733) = 14,7716$ ) og simulert forventet gjennomsnittsverdi av egenkapitalen (15,8562). I utgangspunktet skulle man kanskje tro at ved å beregne  $\varphi(101,6733)$  direkte ville man få en verdi av egenkapitalen nært den estimerte gjennomsnittsverdien. Det stemmer imidlertid ikke, og grunnen til dette er *Jensens ulikhet*. Om vi antar at  $x$  er en tilfeldig variabel med gjennomsnitt lik  $E(x)$ , og  $f(x)$  er en konveks funksjon av  $x$ , sier Jensens ulikhet: gitt at  $f(x)$  er konveks vil, for alle sannsynlighetsfordelingene til  $x$ ,

$$E[f(x)] \geq f[E(x)]. \quad (33)$$

Hvis  $f(x)$  er konkav, er ulikheten reversert (McDonald, 2013). Skrevet med oppgavens notasjon gir dette

$$E[\varphi(S_t)] \geq \varphi[E(S_t)]. \quad (34)$$



**Figur 10.** Viser Jensens ulikhet grafisk.  $S_{lav}$  tilsvarer en tilfeldig lav verdi av eiendeler og  $S_{høy}$  tilsvarer en tilfeldig høy verdi av eiendeler.  $E[S_t]$  gir forventningsverdien til eiendeler, med tilhørende verdier av egenkapitalen. Der  $\varphi$  er gitt ved den tykke blå linjen.

**Figur 10** viser verdien av egenkapitalen,  $\varphi$ , og dens konvekse utvikling. Implikasjonen av dette er at når vi tar gjennomsnittsverdien av  $\varphi(S_{lav})$  og  $\varphi(S_{høy})$  havner vi på et høyere nivå for verdi av egenkapital, det vil si på den rette linjen mellom punkt  $S_{lav}$  og  $S_{høy}$ , enn om vi skulle beregnet  $\varphi[E(S_t)]$  direkte. En funksjon er konveks om den annenderiverte er positiv. På bakgrunn av dette kan vi bevise at  $\varphi(s)$  er konveks. Fra ligning (23) har vi:

$$\varphi(s) = \frac{\delta s}{r - \mu} - \frac{\delta W}{r - \mu} \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma - (1 - \theta) \frac{C}{r} \left(1 - \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma\right).$$

Vi skriver ut parentesene, og stryker deretter  $\left((1 - \theta) \frac{C}{r}\right) \times 1$ , da dette forsvinner ved derivering. Vi står dermed igjen med:

$$\varphi(s) = \frac{\delta s}{r - \mu} + \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma \left( (1 - \theta) \frac{C}{r} - \frac{\delta W}{r - \mu} \right).$$

Den 1.deriverte blir da

$$\varphi'(s) = \frac{\delta}{r - \mu} + \frac{\gamma}{W} \left(\frac{s}{W}\right)^{\gamma-1} \left( (1 - \theta) \frac{C}{r} - \frac{\delta W}{r - \mu} \right). \quad (35)$$

Av dette finner vi den 2.deriverte å være lik

$$\varphi''(s) = \left(\frac{\gamma^2 - \gamma}{W^2}\right) \left(\frac{s}{W}\right)^{\gamma-2} \left( (1 - \theta) \frac{C}{r} - \frac{\delta W}{r - \mu} \right). \quad (36)$$

Vi setter inn for  $W$  i det siste leddet i den siste parentesen,  $\frac{\delta W}{r - \mu}$ :

$$\frac{\delta}{r - \mu} \times \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{r - \mu (1 - \theta) C}{\delta r} \right),$$

stryker, og står igjen med

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{(1 - \theta) C}{r}.$$

Setter videre dette inn i uttrykket for den 2.deriverte

$$\varphi''(s) = \left(\frac{\gamma^2 - \gamma}{W^2}\right) \left(\frac{s}{W}\right)^{\gamma-2} \left( (1 - \theta) \frac{C}{r} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{(1 - \theta) C}{r} \right).$$

For  $\gamma < 0$  kan vi konkludere med at

$$(1 - \theta) \frac{C}{r} > \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{(1 - \theta)C}{r} > 0,$$

og

$$\frac{\gamma^2 - \gamma}{W^2} > 0.$$

Vi kan dermed konkludere med at  $\varphi(s)$  er konveks, i og med at

$$\varphi''(s) > 0, \tag{37}$$

gitt realistiske verdier av de resterende parameterne, det vil si:  $s > 0$ ,  $W > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $r > 0$  og  $C > 0$ .

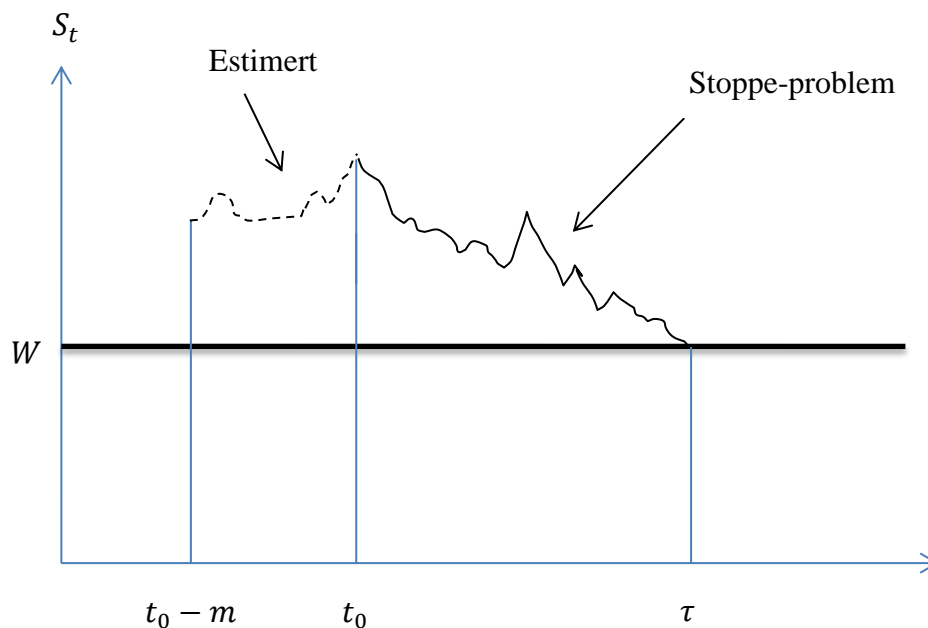
Differansen mellom den estimerte forventningsverdien av egenkapitalen (15,8562) og  $\varphi(101,6733) = 14,7716$  tilsvarer altså lengden til den grønne linjen i **figur 10**.

I lys av resultatene kan vi fastslå at markedsaktørene finner en estimert verdi av egenkapitalen som vil være 7,34 % høyere enn ved beregning av  $\varphi(101,6733)$  direkte. Dette skyldes usikkerheten som har oppstått i forbindelse med informasjonsforsinkelsen. Om vi antar at  $\varphi(101,6733)$  tilsvarer fundamentalverdien til egenkapitalen tyder det på at markedsaktørene er vel optimistiske på selskapets vegner. Om informasjonsforsinkelsen plutselig bortfaller, kan det tenkes at fundamentalverdien avsløres, noe som igjen kan føre til et økonomisk tap for markedsaktørene.



## 7. Konklusjon

Målet med oppgaven var å finne markedsverdien til et selskap gitt informasjonsforsinkelse. Fremgangsmåten vi benyttet impliserer at markedsaktørene estimerer verdien av eiendeler fra sitt observerte starttidspunkt av økonomien,  $t_0 - m$ , frem til starttidspunktet av økonomien observert med full informasjon,  $t_0$ . Gitt at konkurs ikke har oppstått i nevnte tidsintervall, setter de den estimerte verdien av eiendeler på tidspunkt  $t_0$  inn i stoppe-problemet fra Lindset, Lund og Persson (2014) uten konkurs wild card. Prosessen gjentas flere ganger, og vi står til slutt igjen med en estimert betinget gjennomsnittsverdi av egenkapitalen til selskapet. For en grafisk fremstilling viser **figur 1** mulig utvikling til én simulering av verdien til eiendeler.



Markedsverdien av egenkapitalen til selskapet ble altså funnet ved

$$E[\varphi | \mathcal{F}_{t-m} \vee \tau > t_0] \approx \frac{1}{\bar{N}} \sum_{i=1}^{\bar{N}} \varphi(s_i).$$

Der

$$\varphi(s) = \frac{\delta s}{r - \mu} - \frac{\delta W}{r - \mu} \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma - (1 - \theta) \frac{C}{r} \left(1 - \left(\frac{s}{W}\right)^\gamma\right)$$

og

$$s = S_{t_0-m} e^{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma\varepsilon\sqrt{t}}, \quad \varepsilon \sim N(0,1).$$

I tillegg er konkursbarrierene gitt ved

$$W = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{r - \mu(1 - \theta)C}{\delta r}.$$

Vi tallfestet informasjonsforsinkelsen til  $m = 0,3$ , altså 3,6 måneder. Dette gjorde vi på bakgrunn av at et selskap leverer kvartalsrapporter som i høy grad gir de svarene en verdsettelse trenger, det gis videre noe tid til å prosessere informasjonen.

Av estimeringsresultater fant vi en betinget gjennomsnittlig forventningsverdi av eiendeler på tidspunkt  $t_0$  lik 101,6733. Dette estimatet er betinget av at konkurs i tidsintervallet  $[t_0 - m, t_0]$  ikke inntreffer. Sannsynligheten for at konkurs inntreffer i dette tidsrommet er funnet å være lik 0,8744 %. Disse estimatene, og de fleste andre, ble verifiserte av sine respektive analytiske verdier.

Estimert betinget gjennomsnittsverdi av egenkapitalen, altså markedsverdien til selskapet, ble funnet å være lik 15,8562. Setter vi betinget gjennomsnittlig forventningsverdi av eiendeler på tidspunkt  $t_0$  direkte inn i ligning (23) for verdi av egenkapital ( $\varphi(101,6733)$ ) finner vi en verdi av egenkapitalen lik 14,7716. Differansen på 7,34 % mellom disse størrelsene skyldes usikkerheten i markedet når det eksisterer informasjonsforsinkelse.

Om vi ser resultatene under ett vil metoden benyttet i denne oppgaven gi en god approksimering på både verdi av eiendeler og egenkapital. Når det er sagt tar denne oppgaven for seg en relativ lav, men realistisk, verdi av informasjonsforsinkelsen,  $m$ . Ved lengre tidshorisonter på informasjonsforsinkelsen vil det bli større usikkerhet og tilsvarende vanskeligere å gi gode estimater.

En potensiell videreføring av denne oppgaven kan være å se på mulige tilnærminger til problemet ved større verdier av informasjonsforsinkelsen,  $m$ , eksemplvis  $m = 1,0$ . En annen mulig videreføring er om man antar at egenkapital og gjeld ikke kan handles fritt. Da kan man tenke seg at det blir tre agentgrupper, der ledelsen innehar full informasjon, eier står ovenfor en informasjonsforsinkelse lik en andel  $a$  av den fulle forsinkelsen,  $a \times m$ , og kreditor står ovenfor full informasjonsforsinkelse,  $m$ . Da kan man se på ulikheter i verdsettelsesverdien funnet av henholdsvis eier og kreditor og implikasjoner dette medfører.

## Referanseliste

- Derrin, F. og A. Kecskes (2013): "The Real Effects of Financial Shocks: Evidence from Exogenous Changes in Analyst Coverage", *The Journal of Finance*, 68(4), 1407-1440.
- Dixit, A. K. og R. S. Pindyck (1994): *Investment under uncertainty*. Princeton University Press, Princeton.
- Duffie, D. og D. Lando (2001): "Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information", *Econometrica*, 69(3), 633-664.
- Leland, H. E. (1994): "Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure", *Journal of Finance*, 49(4), 1213-1252.
- Lindset, S., A.-C. Lund og S.-A. Persson (2014): "Credit risk and asymmetric information: A simplified approach", *Journal of Economic Dynamics & Control* (39), 98-112.
- McDonald, R. L. (2013): *Derivatives Markets*, 3.utgave. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River.
- Musiela, M. og M. Rutkowski (1997): *Martingale Methods in Financial Modeling*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin.
- Sydsæter, K., A. Strøm og P. Berck (2008): *Matematisk formelsamling for økonomer*, 4.utgave. Gyldendal Norsk Forlag AS, Oslo.
- Tang, T. T. (2009): "Information asymmetry and firms' credit market access: Evidence from Moody's credit rating format refinement", *Journal of Financial Economics*, 93(2), 325-351.





## Tillegg

### Tillegg A – konkurs wild card

Ved å beslutte konkurs på tidspunkt  $\tau_*^m$ , vil eier oppnå et konkurs wild card med payoff  $((\delta(1-\alpha)/(r-\mu))S_{\tau_*^m} - D)^+$ . Fra standard egenskaper til en geometrisk Brownsk bevegelse, vil fullinformasjonsverdien til eiendeler på konkurstidspunkt  $\tau_*^m, S_{\tau_*^m}$ , uttrykt som en funksjon av forsinket verdi av eiendeler observert av eier,  $S_{\tau_*^m-m}$ , være gitt ved (Lindset, Lund, & Persson, 2014):

$$S_{\tau_*^m} = S_{\tau_*^m-m} e^{(\mu-1/2\sigma^2)m + \sigma(B_{\tau_*^m} - B_{\tau_*^m-m})},$$

den er log-normalt fordelt. Gitt konkurstidspunkt  $\tau_*^m$ , vil tid  $\tau_*^m$ -verdien på konkurs wild card være gitt ved ligning (17):

$$\begin{aligned} \pi(S_{\tau_*^m-m}) &= E \left[ \left( \frac{\delta(1-\alpha)}{r-\mu} S_{\tau_*^m} - D \right)^+ \middle| \mathcal{F}_{\tau_*^m}^m \right] \\ &= \frac{\delta(1-\alpha)}{r-\mu} e^{\mu m} S_{\tau_*^m-m} N(z) - DN(z - \sigma\sqrt{m}), \end{aligned}$$

hvor  $z$  er gitt ved ligning (18).

### Tillegg B – løsning på stoppe-problem

Følgende utledning er hentet fra Lindset, Lund og Persson (2014). Det optimale stoppe-problemet gitt av ligning (19) med forsinket informasjon blir transformert til et optimalt stoppe-problem uten forsinket informasjon. Forholdet mellom optimal stoppe-tid  $\tau_*^m$  fra det forsinkede problemet og optimal stoppe-tid,  $\tau_*$ , fra det ikke-forsinkede problemet er gitt ved  $\tau_*^m = \tau_* + m$ . Samtidig substitueres  $u = t - m$  inn, og man får:

$$\varphi(S_u) = \sup_{\tau(u) \in \mathbb{T}} E \left[ \int_u^{\tau(u)} e^{-r(v-u)} (\delta S_v - (1-\theta)C) dv + e^{-r(\tau(u)-u)} \pi(S_\tau) | \mathcal{F}_u \right],$$

for  $u \geq t_0 - m$ . Dette kjennes igjen som et standard optimalt stoppe-problem. Løsningen til sistnevnte problem oppfyller Hamilton-Jacobi-Bellmann-ligningen

$$\mu s \varphi_s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \varphi_{ss} - r\varphi + \delta s - (1-\theta)C = 0,$$

hvor  $s = S_t$ . Fotskrift  $s$  gir partiellderivate, det vil si  $\varphi_s = \delta\varphi(s)/\delta s$ ,  $\varphi_{ss} = \delta^2\varphi(s)/\delta s^2$ , sammen med verdimatchingsbetingelsen og smooth-pasting betingelsen, der  $W^m$  er konkursbarrieren ved forsinket informasjon:

$$\varphi(S_t) = \pi(W^m) \quad \text{og} \quad \varphi_s(S_t) = \pi'(W^m).$$

Evaluert i punktet  $W^m$  gir dette;

$$\varphi(W^m) = \pi(W^m) \quad \text{og} \quad \varphi_s(W^m) = \pi'(W^m).$$

Videre defineres

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{\pi'(x)}{\delta} - \frac{\gamma\pi(x)}{C(1-\theta)} \\ &= \frac{1-\alpha}{r-\mu} e^{\mu m} N(z) \left( 1 - \frac{\gamma\delta}{(1-\theta)C} x \right) + \frac{\gamma D}{(1-\theta)C} N(z - \sigma\sqrt{m}), \end{aligned}$$

hvor

$$z = \frac{\ln\left(\frac{\delta(1-\alpha)x}{(r-\mu)D}\right) + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)m}{\sigma\sqrt{m}}.$$

Der  $\Gamma(x)$  er en vektet sum av verdien til konkurs wild card fra ligning (17), og dens derivate. Hvor  $\gamma < 0$  er en konstant, gitt av ligning (21). To betingelser blir videre innført:

*Betingelse 1.* Anta at  $(1 - \alpha)e^{\mu m}N(z) < |\gamma - 1|$  og at  $\Gamma(W^m) < \gamma/r - (\gamma - 1)/(r - \mu)$ .

*Betingelse 2.* Anta at  $(1 - \alpha)e^{\mu m}N(z) > |\gamma - 1|$  og at  $\Gamma(W^m) > \gamma/r - (\gamma - 1)/(r - \mu)$ .

Der betingelse 1 er relevant for små verdier av forsinkelsen  $m$ , mens betingelse 2 er relevant for større verdier av  $m$ . Anta at betingelse 1 eller 2 er oppfylt, der den optimale stoppe-tiden er gitt ved  $\tau_*(u) = \inf\{t \geq 0: S_t \leq W^m\}$ . Verdien av egenkapitalen er da gitt ved ligning (20):

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{\delta s}{r - \mu} - \frac{\delta W^m}{r - \mu} \left(\frac{s}{W^m}\right)^\gamma - (1 - \theta) \frac{C}{r} \left(1 - \left(\frac{s}{W^m}\right)^\gamma\right) + \pi(W^m) \left(\frac{s}{W^m}\right)^\gamma & s > W^m \\ 0 & s \leq W^m \end{cases}.$$

Der  $\gamma$  og  $W^m$  er gitt ved henholdsvis ligning (21) og (22).

### Tillegg C – koder i MATLAB

Koder benyttet i MATLAB som bare omfatter konstanter – eksempelvis  $\gamma$  og  $W$ , er ikke tatt med da disse kan utføres på en enkel kalkulator. De følgende scriptene inneholder derimot koder som bør belyses. I tillegg er resultatene fra MATLAB-simuleringene gjengitt i delkapittel C.3.

*C.1. Musiela og Rutkowski (1997).* Denne formelen gav oss en diagnostisk test på hvor liten  $\Delta t$  som trengs for å fange opp tilstrekkelig antall barrieretreff, gjennom å gi oss sannsynligheten for overlevelse (ikke konkurs) direkte. Den kumulative standard normalfordelingsfunksjonen er gitt ved MATLAB-funksjonen *normcdf*. «sshet» gir sannsynlighet for overlevelse.

```
function [sshet]=rutkow()
S0=100; %initialverdi eiendeler.
SB=65.0; %konkursbarriere.
mu=0.045; %drift.
sigma=0.3; %volatilitet.
V=0.3; %størrelse informasjonsforsinkelsen, m.
X=log((SB/S0));
v=(mu-(0.5*sigma^2));

sshet = normcdf((-X+(v*V))/(sigma*sqrt(V))) -
(exp((2*X*v)/sigma^2))*(normcdf((X+(v*V))/(sigma*sqrt(V))));
%svar=1-sshet;

%disp(svar)
format long;
end
```

C.2. *Estimert verdi av eiendeler og egenkapital.* Dette scriptet består egentlig av to. Ett som forteller hva som skal gjøres, og ett som utfører operasjonen det er satt til. MATLAB-funksjonen som tilsvarer den Brownske bevegelsen,  $\varepsilon \sim N(0,1)$ , er *randn*. Scriptnavn: *calc*.

```
function [sim, broke] = calc(inndeling, range)

st = 100.0;
my = 0.045;
barrier = 65;
sigma = 0.3;

delta_t = (1/inndeling)*range;

broke = 0;

st_start = st;
sim = zeros(1,inndeling);
randoms = randn(1,inndeling);

for i = 1:inndeling
    st_start = st_start*exp((my-
0.5*sigma^2)*delta_t+sigma*randoms(i)*sqrt(delta_t));
    sim(i) = st_start;
    if st_start < barrier
        broke = 1;
    end
end
end
```

Der scriptet sier at om verdien av eiendeler faller under  $W$  telles dette i form av «broke». Videre definerer «range» informasjonsforsinkelsen,  $m$ . Den er tallfestet i neste script.

Det neste scriptet kjører det overnevnte scriptet. Der «kast» gir antall simuleringer, «inndeling» gir finheten til  $\Delta t$ , da den er definert over som  $(1/inndeling) \times range$ . «gcons» tilsvarer den kalkulerte tallverdien til  $\gamma$ . Der «range», som nevnt, gir størrelsen på informasjonsforsinkelsen,  $m$ . Alle barrieretreff blir talt opp, der de simuleringene som ikke treffer barrieren går inn i funksjonen «value». Den gir oss simulert verdi på egenkapitalen. Videre regner scriptet ut gjennomsnittsverdiene til de aktuelle størrelsene, «Avg value» gir gjennomsnittlig verdi av egenkapitalen. «Mean not broken» gir gjennomsnittsverdien til de  $s$  som kommer frem til tidspunkt  $t_0$  (ikke konkurs). «Mean broken» gir gjennomsnittsverdien til de  $s$  som treffer barrieren. «Broken» gir antall barrieretreff, uttrykt som både tallverdi og prosent. «Total mean» gir total gjennomsnittsverdi av alle simuleringer fra tidspunkt  $t_0 - m$  til  $t_0$ . Av tidsmessige hensyn (disse simuleringen tar tid) er  $\gamma$  og  $W$  satt inn som tall og ikke funksjoner. Dette spiller ingen rolle for sluttresultatet. Scriptet er gitt ved (navn: *test2*):

```

broken = 0;

kast = 1000000;
inndeling = 100000;
range = 0.3;
r = 0.08;
mu = 0.045;
delta = 0.035;
gcons = -(4/3);
theta = 0.3;
C = 13;

mean_end = 0;
mean_downers = 0;

value = 0;
for i = 0:kast
    [sim,broke] = calc(inndeling, range);
    %plot(sim);
    if broke == 1
        broken = broken + 1;
        mean_downers = mean_downers + sim(inndeling);
    else
        mean_end = mean_end + sim(inndeling);
        value = value + (delta*sim(inndeling)/(r-mu))-((delta*65)/(r-
mu))*((sim(inndeling)/65)^gcons)-(1-theta)*(C/r)*(1-
(sim(inndeling)/65)^gcons);
    end
end

X = sprintf('Avg value: %s\nMean not broken: %s\nMean broken: %s\nBroken:
%s\nBroken: %s%\nTotal mean: %s', num2str(value/(kast-broken)),
num2str(mean_end/(kast-broken)), num2str(mean_downers/broken),
num2str(broken), num2str((broken/kast)*100),
num2str((mean_end+mean_downers)/kast));
disp(X)

```

*C.3. Utskrift resultater fra MATLAB.* Som nevnt over gir «Avg value» gjennomsnittlig estimert verdi av egenkapitalen. «Mean not broken» gir gjennomsnittlig verdi til simuleringer av eiendeler som ikke traff barrieren. «Mean broken» gir gjennomsnittlig verdi til simuleringer av eiendeler som traff barrieren. «Broken» gir antall barrieretreff, både som tallverdi og prosentandel. «Total mean» gir gjennomsnittlig verdi for alle simuleringer av eiendeler fra tidspunkt  $t_0 - m$  til  $t_0$ . Hovedsimuleringen som er benyttet ble funnet å være:

```
>> test2                                %delta_t=0.3/100 000, N=1 000 000, sigma=0,3
Avg value: 15.8562
Mean not broken: 101.6733
Mean broken: 65.1184
Broken: 8744
Broken: 0.8744%
Total mean: 101.3537
```

*Utskrift fra simuleringene med forskjellig volatilitet,  $\sigma$ , gjengitt i tabell 5:*

```
>> test2                                %sigma=0.1
Avg value: 14.6934
Mean not broken: 101.3572
Mean broken: NaN
Broken: 0
Broken: 0%
Total mean: 101.3572
```

```
>> test2                                %sigma=0.2
Avg value: 15.0798
Mean not broken: 101.3657
Mean broken: 65.0637
Broken: 70
Broken: 0.007%
Total mean: 101.3632
```

```
>> test2                                %sigma=0.4
Avg value: 17.5624
Mean not broken: 103.4291
Mean broken: 65.23
Broken: 53889
Broken: 5.3889%
Total mean: 101.3706
```

```
>> test2                                %sigma=0.5
Avg value: 20.3448
Mean not broken: 106.8513
Mean broken: 65.2522
Broken: 131880
Broken: 13.188%
Total mean: 101.3652
```

*Utskrift fra simuleringene med forskjellig  $\Delta t$ -finhet, gjengitt i tabell 4:*

```
>>test2                                %delta_t=0,3/10 000
Avg value: 15.8668
Mean not broken: 101.686
Mean broken: 65.0578
Broken: 8420
Broken: 0.842%
Total mean: 101.3776
```

```
>>test2                                %delta_t=0,3/1000
Avg value: 15.8489
Mean not broken: 101.6571
Mean broken: 64.9519
Broken: 8323
Broken: 0.8323%
Total mean: 101.3516
```

```
>>test2                                %delta_t=0,3/100
Avg value: 15.8471
Mean not broken: 101.6449
Mean broken: 64.4935
Broken: 7360
Broken: 0.736%
Total mean: 101.3714
```

```
>>test2                                %delta_t=0,3/10
Avg value: 15.8243
Mean not broken: 101.5954
Mean broken: 63.3151
Broken: 5519
Broken: 0.5519%
Total mean: 101.3842
```

```
>>test2                                %delta_t=0,3/1
Avg value: 15.8017
Mean not broken: 101.5468
Mean broken: 61.7805
Broken: 4391
Broken: 0.4391%
Total mean: 101.3722
```