Masteroppgave

Master i matematikkdidaktikk

Therese Ananiassen Gjerde

# En undersøkelse av aspekter ved matematisk kompetanse

kasusstudie om to elevers arbeid med matematiske oppgaver

Trondheim, mai 2012

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Therese Ananiassen Gjerde

# En undersøkelse av aspekter ved matematisk kompetanse

**kasusstudie om to elevers arbeid med matematiske oppgaver**

# Investigating aspects of mathematical competence

**case study of two students' work on mathematical tasks**

Masteroppgave, Master i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2012

| | |
|---|---|
| Veileder: | Birgit Pepin |

**Høgskolen i Sør-Trøndelag**
**Avdeling for lærer- og tolkeutdanning**

www.hist.no

Kunnskapen
du trenger

Høgskolen har intet ansvar for synspunkter eller innhold i d
Framstillingen står utelukkende for studentens regning og

# Forord

Arbeidet med denne masteroppgaven har vært tidkrevende, lærerikt, utfordrende og spennende. Resultatet av dette arbeidet hadde ikke vært mulig uten all den hjelpen og støtten jeg har fått undervis. Derfor vil jeg takke de som har hjulpet meg i mitt arbeid.

Først og fremst vil jeg takke læreren og elevene ved den aktuelle skole som frivillig har stilt opp for å la meg få gjøre mine undersøkelser der. De har delt sine tanker, erfaringer og handlinger med meg, og latt meg få lov til å analysere og drøfte dette videre. Jeg setter ufattelig stor pris på åpenheten og den varme velkomsten som jeg har blitt møtt med gjennom hele datainnsamlingen min.

Min veileder og professor ved Avdeling for lærer - og tolkeutdanning, Birgit Pepin har kommet med konstruktive tilbakemeldinger og oppmuntrende ord i arbeidet med denne oppgaven. Jeg setter utrolig stor pris på engasjementet som er blitt vist, og kunnskapen og erfaringene som er delt. Jeg vil også takke Frode Rønning, professor ved samme avdeling, for det samarbeidet vi hadde i begynnelsen av skoleåret, og da særskilt med hensyn til å forme prosjektet mitt.

Biblioteket på Rotvoll, som har vist kunnskap og service på topp nivå innenfor sitt felt, vil jeg sende en stor takk til. Jeg er veldig takknemmelig for hjelpa jeg har fått med å finne "umulige" artikler, bøker og lignende.

Jeg vil også sende en stor takk til Kjetil Aamodt og Oda Heidi Bolstad for hjelp med korrekturlesing. Kjetil vil jeg også takke for hjelp med LaTeX relaterte spørsmål.

Trondheim, 23. mai 2012

Therese Ananiassen Gjerde

# Innholdsfortegnelse

Kapittel 1

# Innledning

## 1.1 Bakgrunn

Kompetansebegrepet har blitt stadig mer aktuelt i den norske skole. I Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen var det større fokus på hva elevene skulle lære og hvilke arbeidsmetoder som skulle brukes (KUF, 1996). I dagens læreplan, Læreplanverket for Kunnskapsløftet, heretter kalt Kunnskapsløftet er det større fokus på hva elevene skal kunne, og det er formulert kompetansemål etter 2., 4., 7. og 10. årstrinn (Utdanningsdirektoratet, 2012b). Det er ikke nok at elevene skal gå på skolen, lære og få nye venner. En skal også kunne sammenlikne elevenes prestasjoner med andre land, blant annet gjennom undersøkelser som PISA og TIMMS (UiO, 2012a, 2012b).

For å kunne si noe om hva det vil si at elevene skal kunne matematikk, er det nødvendig med en bevisstgjøring av hva det vil si å ha matematisk kompetanse. Det er flere som har forsket på kompetanse, og gitt en definisjon av begrepet. Blant annet, ble det i 2000 satt i gang et prosjekt i Danmark der målet var å prøve å skape en felles forståelse for hva det vil si å beherske matematikk. Dette prosjektet, ledet av Mogens Niss, ble kalt "Kompetenceudvikling og Matematiklæring", og i 2002 kom rapporten "Kompetancer og matematiklæring" (Niss et al., 2002) som jeg blant annet har brukt i mine analyser. Dette arbeidet er nyttig da det har påvirket PISA- prosjektet (Niss, 2003) og vært en inspirasjonskilde til de nasjonale prøvene i matematikk i Norge (Røsseland, 2005).

Det er ikke bare kompetansebegrepet som har blitt en viktig del av grunnskoleopplæringen i Norge. Oppgaver er meget sentrale i elevenes læring. Disse gir ikke bare elevene muligheter til å lære, men også et synspunkt på hva faget er (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Doyle (som sitert i Hiebert, 1997) sier: "Students learn from the kind of work they do during class, and the tasks they are asked to complete determines the kind of work they do" (s.17).

Elevene utvikler et syn på hva matematikk er gjennom de ulike oppgavene de gjør i matematikktimene. Dersom eleven jobber mest med blyant og papirøvelser, er det disse ferdighetene de blir gode på. Dersom lærerne vil at elevene skal tenke at matematikk er å løse problemer, må elevene bruke mest tid på dette. Elevenes oppfattelse av faget er ikke bygd opp av formaninger fra læreren, men av arbeidet de gjør (Hiebert et al., 1997). Læreren kan ha et mål om at elevene skal lære å tenke matematisk og løse ulike problemer, men dersom elevene kun jobber med oppgaver fra læreboka, vil elevene ikke få den oppfattelsen av faget som læreren i utgangspunktet ville. Som Hiebert et al. (1997) sier "[t]he task make all the difference" (s.17).

Læreren har en viktig rolle i klasserommet. En av oppgavene til læreren er å legge til rette for matematisk forståelse. Hiebert et al. (1997) har sett på at klasserom som legger til rette for matematisk forståelse deler noen egenskaper eller dimensjoner, og at det er mulig å si om et klasserom støtter utviklingen av forståelse ved å se på disse dimensjonene. Disse dimensjonene, bestående av 1) naturen til oppgaver, 2) rollen til læreren, 3) den sosiale kulturen i klassen, 4) matematisk verktøy som er tilgjengelig og 5) tilgjengeligheten av matematikken for hver student (Hiebert et al., 1997), kan bli brukt som et rammeverktøy for å studere klasserommet. Læreren har blant annet en viktig rolle med hensyn til å velge og designe oppgaver med mål i tankene. Det er ikke bare et fokus på oppgavene hver for seg, men også på et sett med oppgaver. Kunnskapen læreren må ha for å velge oppgaver innebærer kunnskap om viktige matematiske ideer og de må være kjent med elevenes tenkning. De må dele relevant informasjon og hjelpe elevene med å peke på de viktige ideene som ligger i elevenes egne metoder (Hiebert et al., 1997). Det er også viktig med et klasseromsmiljø som støtter refleksjon og kommunikasjon (Hiebert, 1992).

Naturen til klasseromsoppgaver er karakterisert ved å gjøre matematikken problematisk, sammenkobling med der elevene er og etterlate noe av matematisk verdi (Hiebert et al., 1997). Selv om oppgavene har noen muligheter og begrensinger i seg selv, har læreren en viktig rolle med hensyn til hvordan oppgavene blir gitt til elevene, og hvilke egenskaper med oppgavene som elevene får muligheter til å jobbe med (Hiebert et al., 1997). Siden jeg skal undersøke hvordan elevene jobber med og løser to oppgaver de ble gitt av læreren er det helt vesentlig å også se på hva læreren gjør med oppgavene. Læreren må bestemme hvilke aspekter av oppgaven som skal fremheves, hvordan arbeidet skal organiseres og iscenesette dette for elevene. Læreren må også se på hvilke spørsmål de skal stille og hvordan de skal støtte elevene uten å ta over tenkeprosessene (Silver, Ghousseini, Charalambous & Mills, 2009).

Dette har blant annet å gjøre med de fasene oppgavene går gjennom i klasserommet, som blant annet Stein, Grover og Henningsen (1996) og Henningsen og Stein (1997) har skrevet om. De skiller mellom oppgavene slik de er i læreboka, altså slik oppgaven er i seg selv, slik oppgavene blir introdusert av læreren og hvordan elevene jobber med disse oppgavene. Min forskning bygger på deres forskning, så dette utdyper jeg senere.

Gjennom allmennlærerutdanningen og masterstudiet i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, har jeg vært interessert i både kompetansebegrepet og matematikkoppgaver og - aktiviteter. Dette ser man blant annet i noen av de oppgavene jeg har skrevet i løpet av studiet. I en oppgave det andre året undersøkte jeg språket to elever fra småskolen brukte i arbeid med å utvikle den matematiske kompetansen. Der tok jeg blant annet utgangspunkt i de åtte delkompetansene som Niss et al. (2002) har tatt for seg. I bacheloroppgaven jeg skrev studieåret 2009/2010 undersøkte jeg hvordan et matematisk spill, kalt "Hanois tårn" ble brukt i to skoler, en i Norge og en i Zambia. Her var fokus på aktiviteten i de to ulike skolene. I denne masteroppgaven har jeg derimot både et fokus på kompetanse og oppgaver.

## 1.2 Tema og problemstilling

Mitt fokusområde har vært på kompetansen som kan sees i to elevers arbeid med matematikkoppgaver introdusert av læreren. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i Niss et al. (2002) og Kilpatrick et al. (2001) sine arbeid, da begge gir et teoretisk rammeverk med hensyn til kompetansebegrepet. Niss har jeg, som tidligere nevnt, i tillegg valgt fordi arbeidet har påvirket de nasjonale prøvene og PISA.

Oppgaver i matematikk er et stort felt, derfor har jeg avgrenset denne rapporten til å se på samspillet mellom de fasene oppgavene går i gjennom i klasserommet, fra oppgaver slik de er i seg selv, oppgaver slik de er introdusert av læreren og oppgavene slik elevene jobber med de. Dette er basert på Mathematical Task Framework (Stein et al., 1996; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009; Henningsen & Stein, 1997). Mitt forskningsspørsmål er med utgangspunkt i alt dette formulert slik:

> *"Hvilke aspekter ved utvalgte matematiske kompetanser kan sees i to elevers arbeid, med hensyn til to oppgaver introdusert av læreren?"*

De to oppgavene, som jeg har kalt "Rutenettoppgaven" og "Mønsteroppgaven" vil bli presentert i metodekapittelet.

Blant annet på grunn av tidsaspektet ville jeg heller gå i dybden på noen få kompetanser, enn å studere mange i overflaten. Jeg valgte derfor, med utgangspunkt i Niss et al. (2002), Kilpatrick et al. (2001) og Henningsen og Stein (1997), å fokusere på representasjonskompetanse, forklaringskompetanse og strategikompetanse.

Jeg ville også kunne si noe om hvilke muligheter læreren ga slik oppgavene ble introdusert, samt undersøke hvordan elevene jobbet med oppgavene i forhold til hvordan læreren introduserte de. Disse underspørsmålene ble derfor også aktuelle:

- *Hvilke representasjoner, strategier og forklaringer og rettferdiggjøringer gir oppgavene muligheter for, slik de er introdusert av læreren?*
- *Hvordan jobber elevene med oppgavene i forhold til hva læreren gjør?*

## 1.3 Oppbygging av oppgaven

Jeg har valgt å ta for meg teori, metode, analyse og drøfting, samt oppsummering og perspektiv på forskningen i ulike kapittel, da dette er hensiktsmessig i denne rapporten.

Først starter jeg med en presentasjon av den teorien som er brukt i mine analyser. Jeg starter dette kapittelet med å ta for meg definisjon og delkompetanser innenfor kompetansebegrepet. Her er det fokus på Kilpatrick et al. (2001) og Niss et al. (2002) sine teorier. Rammeverket Mathematical Tasks Framework vil også bli grundigere gått igjennom i dette kapittelet, og da tar jeg blant annet utgangspunkt i Silver og Stein (1996), Henningsen og Stein (1997) og Stein et al. (1996). Dette rammeverket, med hensyn til representasjoner, strategier og forklaringer vil jeg i tillegg utdype ved bruk av andre kilder, som Lesh, Post og Behr (1987), Goldman (1989), Ostad (2003), Røsseland (2005) og Hiebert (1992).

Jeg har valgt å gjennomføre en kasusstudie, der jeg har undersøkt representasjonskompetanse, strategikompetanse og forklaringskompetanse i to elevers arbeid med to oppgaver i temaet “tall og algebra” på 10.trinn. I metodekapittelet vil jeg gå nærmere inn på datainnsamlingen og begrunne mine valg, både med hensyn til elever og oppgaver, og forskningsmetode. Hvordan jeg har analysert data er også sentralt i dette kapittelet. Deretter sier jeg noe om forskningsarbeidets pålitelighet og troverdighet samt etiske forholdsregler jeg har tatt og metodiske utfordringer jeg har møtt.

I det neste kapittelet har jeg valgt å slå sammen analyse og drøfting, da dette var mest hensiktmessig i forhold til hvordan jeg ville presentere resultatene. Først i dette kapittelet starter jeg med å analysere oppgavene i seg selv med hensyn til hvilke potensial de hadde rent matematisk, men også med hensyn til representasjoner, strategier og forklaringer. Dette har jeg gjort fordi oppgavene i seg selv har noen muligheter som det er nyttig å være bevisst på. Deretter har jeg presentert mine funn med hensyn til hvilke representasjoner, strategier og forklaringer som ble introdusert av læreren, og hvilke aspekter ved representasjonskompetanse, strategikompetanse og forklaringskompetanse som kunne sees i elevenes arbeid. I denne delen tar jeg for meg Rutenettoppgaven og Mønsteroppgaven hver for seg, for å kunne se på helheten i hver av de to oppgavene. Dette kapitelet blir avsluttet med en oppsummering av funnene mine.

Hele rapporten blir avsluttet i kapittel 5. I dette kapittelet ser jeg generelt på funnene mine og knytter de til blant annet klasseromsnormer. I tillegg sier jeg litt om studiens implikasjoner for praksis, bidrag på forskningsfeltet, videre forskning og kritikk av egen metode. Dette er viktig for å se min forskning i et større bilde. Helt til slutt følger noen avsluttende kommentarer.

Kapittel 2

# Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere den teorien som er grunnlaget for mine analyser. Først vil jeg starte med å ta utgangspunkt i matematisk kompetanse, som er den overordnede teorien jeg har brukt. Jeg ser på sammenhenger mellom Kilpatrick et al. (2001) og Niss et al. (2002) sine teorier. Aspekter ved kompetanse som kan sees i elevenes arbeid er ikke bare lagd med hensyn til disse. Jeg har også sett på hvilke faser oppgavene går gjennom i klasserommet. Et rammeverk som beskriver dette er kalt Mathematical Tasks Framework (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996, 2009; Stein & Lane, 1996), og tar hensyn til oppgaveegenskaper, som innebærer representasjoner, strategier og forklaringer. Jeg har valgt å utdype disse oppgaveegenskapene med hensyn til annen litteratur: representasjoner (Duval, 2006; Lesh et al., 1987), strategier (Goldman, 1989; Ostad, 2003) og forklaringer (Silver & Stein, 1996; Røsseland, 2005; Hiebert, 1992).

## 2.1 Definisjon av begrepet kompetanse

Det finnes flere definisjoner av begrepet kompetanse. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i Matematikksenteret (2012) og Niss et al. (2002) sine definisjoner.

> Alle målene i læreplanen er kompetansemål. Det innebærer at hvert mål omfatter tre komponenter som til sammen utgjør kompetansen. De tre komponentene er *ferdigheter, forståelse og anvendelse*. Alle spiller sammen, og utgjør det vi kan kalle helhetlig matematisk kompetanse. (Matematikksenteret, 2012)

Matematikksenteret (2012) snakker altså om en helhetlig matematisk kompetanse, som består av de tre komponentene ferdigheter, forståelse og anvendelse.

Niss et al. (2002) sier at matematisk kompetanse handler om "at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematik virksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå" (Niss et al., 2002, s.43). Niss et al. (2002) sin kompetanse handler dermed om bruke matematikken i ulike sammenhenger der matematikken kan inngå eller kan komme til å inngå.

Både Niss et al. (2002) og Matematikksenteret (2012) definerer kompetanse ved å bruke begrepet forståelse. Derfor er det også nyttig å definere dette begrepet her, selv om det, i følge Hiebert et al. (1997), kan være vanskelig å definere, da det er meget komplekst. Hiebert et al. (1997) sin definisjon av forståelse innebærer at en forstår noe dersom man ser hvordan det er relatert og tilkoblet til andre ting man vet. Forståelse er avgjørende, fordi det som er lært med forståelse kan bli brukt fleksibelt, brukt i andre situasjoner og kan bli brukt for å lære nye ting. Det blir sagt at to viktige prosesser for å lære matematikk med forståelse er refleksjon og kommunikasjon (Hiebert, 1992; Hiebert et al., 1997).

Selv om forståelse er viktig har jeg valgt å ha mest fokus på kompetansebegrepet i akkurat denne rapporten. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) kan forståelse være vanskelig å måle, fordi elevene kan ha konseptuell forståelse før de kan uttrykke dette verbalt. Dette tar jeg nøyere for meg i neste delkapittel. Med bakgrunn i blant annet forståelse, innebærer kompetansebegrepet at elevene kan bruke og anvende matematikken, og ha ferdigheter i matematikk.

### 2.1.1 Delkompetanser og komponenter

Kilpatrick et al. (2001) har beskrevet 5 komponenter av matematisk kompetanse, kalt *mathematical proficiency*. Disse komponentene er ikke selvstendige, men representerer ulike aspekter av en kompleks helhet. En annen egenskap ved disse er at de eksisterer på ulike nivå og utvikles over tid. De fem komponentene av kompetanse som Kilpatrick et al. (2001) skriver om, er:

1. **Konseptuell forståelse** (Oversatt fra "conceptual understanding"): Forståelse av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner. En signifikant indikator på dette er å være i stand til å representere matematiske situasjoner på ulike måter og vite hvordan ulike representasjoner kan være nyttig for ulike hensikter. Elever med en konseptuell forståelse kan forstå hvorfor en matematisk ide er viktig.

2. **Prosedyrisk flyt** (Oversatt fra "procedural fluency"): Ferdigheter i å bruke prosedyrer fleksibelt, akkurat, effektivt og passende. Noen strategier er bedre enn andre i ulike kontekster, og situasjonene varierer også med hensyn til behovet for korrekt svar.

3. **Strategisk kompetanse** (Oversatt fra "strategic competence"): Sier noe om muligheten til å formulere, representere og løse matematiske problem, og er ofte blitt kalt for problemløsning og problemformulering i annen litteratur.

4. **Adaptiv resonnering/begrunnelse** (Oversatt fra "adaptive reasoning"): Kapasiteten for logisk tanke, refleksjon, forklaring og rettferdiggjøring. Dette handler blant annet om å rettferdiggjøre sitt eget arbeid.

5. **Produktiv orientering** (Oversatt fra "productive disposition"): Innebærer å se matematikken som fornuftig, brukbar og verdig. Elever som har utviklet denne komponenten er trygg i deres kunnskap og muligheter (Kilpatrick et al., 2001).

Det er både sammenhenger mellom disse fem komponentene (Kilpatrick et al., 2001), og noe av innholdet er til en viss grad det samme som de delkompetansene som Niss et al. (2002) bruker. Niss et al. (2002) opererer med åtte typer av delkompetanser som er delt inn i to grupper, 1) *å kunne spørre og svare i og med matematikk*, og 2) *å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper*. Den førstnevnte gruppe, går ut på å stille spørsmål, være i stand til å svare på slike spørsmål, og kunne forstå, bedømme og frembringe argumenter som svar på matematiske spørsmål. Dette innebærer disse fire delkompetansene:

1. **Tankegangskompetanse**: Å kunne utøve matematisk tankegang.
2. **Problemløsningskompetanse**: Å kunne formulere og løse matematiske problemer.
3. **Modelleringskompetanse**: Å kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter.
4. **Resonnementskompetanse**: Å kunne resonnere matematisk (Niss et al., 2002).

Tankegangs-, resonnements-, og problemløsningskompetanse er forbundet, men har likevel noen ulikheter. I den førstnevnte er det fokus på de spørsmål som matematikken handler om, problemløsningskompetanse har fokus på strategier for å svare på spørsmålene, mens resonnementskompetanse innebærer å rettferdiggjøre påstandene (Niss et al., 2002).

Disse kompetansene, og da særskilt tankegangs- og resonnementskompetanse, mener jeg henger sammen med den komponenten som Kilpatrick et al. (2001) kaller for adaptiv begrunnelse. Dette vil jeg begrunne med at begge tar for seg forklaringer og rettferdiggjøring.

Den andre gruppen av matematiske delkompetanser handler om å være i stand til å håndtere matematikkens språk og redskaper. Dette går ut på å omgås med ulike representasjoner, kunne håndtere de representasjoner som utgjøres av matematikkens symbolspråk og formalisme, kunne kommunisere i, med og om matematikk og kunne bruke og forholde seg til diverse hjelpemiddel for matematisk virksomhet (Niss et al., 2002). Denne sistnevnte gruppen innebærer følgende fire delkompetanser:

5. **Representasjonskompetanse**: Å kunne håndtere forskjellige representasjoner av matematiske saksforhold.

6. **Symbol - og formaliseringskompetanse**: Å kunne håndtere matematikkens symbolspråk og formalisme.
7. **Kommunikasjonskompetanse**: Å kunne kommunisere i, med og om matematikk.
8. **Hjelpemiddelkompetanse**: Å kunne benytte seg av og forholde seg til hjelpemidler for matematisk virksomhet (Niss et al., 2002).

Jeg vil nå se knytte sammen noen av Kilpatrick et al. (2001) sine komponenter av kompetanse og noen av Niss et al. (2002) sine delkompetanser.

Representasjonskompetanse består i å kunne forstå og bruke ulike typer representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemer eller situasjoner. Den består også i å forstå forbindelser mellom ulike representasjonsformer, å kunne velge blant og oversette mellom ulike representasjonsformer alt etter i hvilken situasjon de skal brukes i (Niss et al., 2002). Dette kan knyttes til det som Kilpatrick et al. (2001) kaller for strategisk kompetanse, der en må formulere og representere matematiske problem. Dersom en igjen har en konseptuell forståelse kan en også representere ulike situasjoner på ulike måter, samt vite at noen representasjoner kan være bedre enn andre i ulike sammenhenger.

Kommunikasjonskompetanse innebærer å kunne sette seg inn i og fortolke andres utsagn, og å kunne uttrykke seg på ulike måter. Innefor begge disse er kommunikasjon både på skriftlig, muntlig og visuelt nivå aktuelt (Niss et al., 2002). Røsseland (2005) deler denne kompetansen i to, der hun gjør et skille mellom den mottakende siden og uttrykkssiden. Den mottakende siden innebærer å forstå og tolke andre sine matematikkholdige tekster, mens uttrykkssiden innebærer at elevene selv skal gjøre rede for et matematisk resonnement. For mine analyser er det fokus på hvordan elevene uttrykker sitt arbeid, altså resonnementskompetanse i følge Niss, eller det som Kilpatrick et al. (2001) kaller adaptiv begrunnelse.

Strategisk kompetanse og prosedyrisk flyt er også relevant for meg da disse sier noe om elevene kan bruke strategier, vite at ulike strategier er gode på ulike områder, samt bruke disse strategiene hensiktsmessig og korrekt. I følge Kilpatrick et al. (2001) sin definisjon av strategisk kompetanse, handler denne om muligheten til å formulere, representere og løse matematiske problem. Den er ofte blitt referert til som problemløsning i annen litteratur, og Niss et al. (2002) har blant annet kalt en av delkompetansene sine for problemløsningskompetanse.

Bommel, Liljekvist og Ottersten-Nylund (2012) har undersøkt det danske KOM - prosjektet (Niss et al., 2002) og den amerikanske rapporten Adding it Up (Kilpatrick et al., 2001), og prøvd å forstå disse to ulike rammeverkene. De skriver at KOM - prosjektet ser ut til å være mer elevsentrert, i motsetning til Adding it Up som er mer instruksjonssentrert.

Både Kilpatrick et al. (2001) og Niss et al. (2002) tar for seg en del underkategorier av matematisk kompetanse, og begge snakker om det som er særdeles aktuelt videre: kompetanse med hensyn på representasjoner, strategier og forklaring og rettferdiggjøring.

Dette dekker derimot ikke hele den helhetlige matematiske kompetansen, som jeg tok for meg i starten av dette kapittelet. Den helhetlige matematiske kompetansen, altså anvendelse, forståelse og ferdigheter, kan en se på som bestående av delkompetansene til Niss. Anvendelse består på den måten av problemløsnings- og modelleringskompetanse, forståelse består av resonnements-, tankegangs- og kommunikasjonskompetanse og ferdigheter består av representasjons-, og symbol- og formalismekompetanse.

Det å anvende matematikken innebærer altså at en kan formulere og løse matematiske problem, og lage matematiske modeller. Forståelse innebærer at en kan resonnere matematisk, utføre matematisk tankegang og kommunisere i, med og om matematikk, mens ferdigheter innebærer å kunne bruke ulike representasjoner og kunne håndtere matematikkens symbolspråk. Hjelpemiddelkompetansen hører til under hvert av disse tre punktene, anvendelse, forståelse og ferdigheter (Matematikksenteret, 2012).

For å kunne si noe om elevenes helhetlige matematikkundervisning er det altså ikke nok å bare si noe om noen av disse delkompetansene, men en må se alle disse kompetansene i sammenheng med hverandre. Se Tabell 2.1.

| Anvendelse | Forståelse | Ferdigheter |
|---|---|---|
| Problemløsningskompetanse | Resonnementskompetanse | Representasjonskompetanse |
| Modelleringskompetanse | Tankegangskompetanse | Symbol-og formalismekompetanse |
| | Kommunikasjonskompetanse | |
| | Hjelpemiddelkompetanse | |

Tabell 2.1: Niss sine kompetanser sammen med anvendelse, forståelse og ferdigheter. (Matematikksenteret, 2012)

Niss sine delkompetanser ser man også spor av i forbindelse med de fem grunnleggende ferdighetene som elevene skal utvikle i skolegangen: 1) å kunne uttrykke seg muntlig, 2) å kunne uttrykke seg skriftlig, 3) å kunne lese, 4) å kunne regne og 5) å kunne bruke digitale verktøy (Utdanningsdirektoratet, 2012a). Det å kunne uttrykke seg muntlig i matematikk innebærer å kunne gjøre seg opp en mening, stille spørsmål, argumentere og forklare en tankegang ved hjelp av matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2012a). Dette har med de delkompetansene som Niss har kalt for tankegangs-, resonnements-, og kommunikasjonskompetanse (Matematikksenteret, 2012).

### 2.1.2 Dekningsgrad av kompetansene

Niss et al. (2002) nevner tre begrep en kan operere med for å si noe om en persons besittelse av en kompetanse: 1) dekningsgrad, 2) rekkevidde og 3) teknisk nivå. Dekningsgrad innebærer i hvor stor grad de aspekter som kjennetegner kompetansen er dekket. En kompetanses rekkevidde handler om det spekteret av situasjoner og sammenhenger som personen kan aktivere kompetansen i, mens kompetansens teknisk nivå bestemmes av hvor teknisk avansert saksforhold og verktøy som personen kan aktivere den aktuelle kompetansen i (Niss et al., 2002, 64-65). Jeg ser på dekningsgraden i denne oppgaven, noe som kommer av at det er den mine data sier noe om.

## 2.2 Matematiske “tasks”

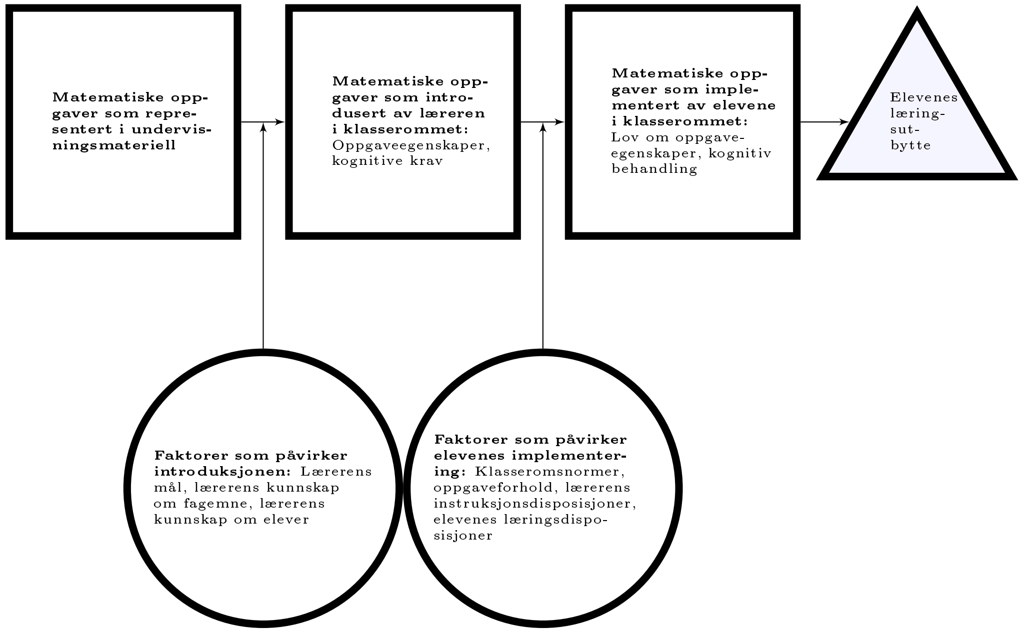
I Stein et al. (1996) definerer de en matematisk “task” som “classroom activity, the purpose of which is to focus students‘ attention on a particular mathematical idea” (side 460). I dette prosjektet kommer også jeg til å se på begrepet "task" som klasseromsaktiviteter. Jeg har valgt å oversette ordet "task" med "oppgave" i den følgende teksten, i stedet for å bruke det engelske ordet. Dette for å sikre en bedre flyt i teksten, samtidig som "oppgave" er dekkende i denne sammenhengen. En "oppgave" kan for meg være gitt både skriftlig og muntlig, og den kan gjøres både skriftlig og muntlig, så lenge den som en matematisk "task" har en spesiell matematisk ide.

### 2.2.1 Fasene oppgavene går gjennom i klasserommet

Det er laget flere rammeverk eller analyseverktøy som kan brukes når man skal undersøke oppgaver. Mange av disse rammeverkene går for eksempel ut på å analysere oppgaver slik de blir brukt i undervisningsmateriell og lærebøker, som for eksempel Mayer, Sims og Tajika (1995). Jeg har valgt å bruke Mathematical Tasks Framework som hovedrammeverk, da denne beskriver fasene oppgavene går igjennom i klasserommet. Dette rammeverket springer ut i fra QUASAR- prosjektet.

QUASAR- prosjektet (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning) er "an educational reform project aimed at fostering and studying the development and implementation of enhanced mathematics instructional programs for students attending middle school in economically disadvantaged communities" (Silver & Stein, 1996, s.476). Dette prosjektet har i følge Arbaugh og Brown (2005) bakgrunn i arbeid fra blant annet Doyle (1983, 1988) og Hiebert og Wearne (1993), og er også grundig beskrevet i blant annet Henningsen og Stein (1997), Stein et al. (1996) og Stein og Lane (1996). Her blir det sett på oppgaver slik de er representert i undervisningsmateriell, slik de er introdusert av læreren og slik de er implementert i klasserommet, og tilslutt har de et punkt som går på elevenes læring. Dette rammeverket er blitt kalt for Mathematical Tasks Framework, MTF, og beskriver fasene oppgavene går igjennom i klasserommet. Se Figur 2.1.

Matematiske oppgaver slik de er introdusert av læreren i klasserommet innebærer både oppgaveegenskaper som for eksempel bruk av flere løsningsstrategier, ulike representasjoner og matematisk kommunikasjon. I tillegg




Figur 2.1: Mathematical Tasks Framework (MTF) (Henningsen & Stein, 1997)

til at de innebærer nivå av de kognitive kravene, som er 1) memorisering, 2) prosedyrer *uten* forbindelse til begrep, mening og/eller forståelse, 3) prosedyrer *med* forbindelse til begrep, mening og/eller forståelse og 4) å gjøre matematikk (Stein & Lane, 1996). De kognitive kravene innebærer hvilken grad av matematisk tenkning elevene må bruke for å løse oppgaven. I dette prosjektet har jeg valgt å ha fokus på oppgaveegenskapene, selv om dette hører sammen med de kognitive kravene.

Det er også skissert noen faktorer som påvirker hvordan læreren introduserer oppgavene samt hvordan oppgavene blir implementert i klasserommet. I Henningsen og Stein (1997) blir det særskilt undersøkt og diskutert faktorer som påvirker elevenes implementering av oppgavene i klasserommet. De undersøker samspillet mellom oppgavene slik de blir introdusert i klasserommet, som er den andre firkanten i Figur 2.1, og oppgaver slik som de blir implementert av elevene i klasserommet, som er den tredje, og siste, firkanten i samme figur. Faktorer som påvirker elevenes implementering i klasserommet er klasseromsnormer som for eksempel kan være forventninger om hvordan akademisk arbeid blir gjort, av hvem og med hvilken grad av tilregnelighet. En annen faktor som kan påvirke elevenes implementering er oppgavevilkår. Dette kan for eksempel være at oppgaver bygger på tidligere kunnskap, eller en tilnærming av hvor lang tid som skal bli benyttet for å fullføre oppgaven. Den siste faktoren som er nevnt her er lærer og elevens “disposisjoner” (oversatt fra “dispositions”). Dette kan for eksempel være hvor lenge læreren lar elevene slite med et problem før han eller hun gir hjelp, hvordan denne assistansen blir gitt og hvor villig elevene er til å slite med en oppgave selv.

Det er også skissert noen faktorer som påvirker hvordan oppgavene blir introdusert av læreren i klasserommet. Disse går på lærerens mål, lærerens kunnskap om fagemne og lærerens kunnskap om elever (Henningsen & Stein, 1997).

### 2.2.2 Oppgaveegenskaper

To tredjedeler av oppgavene som ble observert i QUASAR- klasserom involverte flere løsningsstrategier og representasjoner, og i tillegg var ofte elevene spurt om en forklaring (Silver & Stein, 1996). Dette er de egenskapene som jeg har kalt oppgaveegenskaper i avsnittet over (oversatt fra “task features”).

Elevene kan utvikle deres egne metoder og prosedyrer som er basert på en riktig forståelse av begrep og forhold, dersom de jobber med oppgaver som oppmuntrer til en bruk av ulike representasjoner og løsningsmetoder, og dersom de er gitt muligheten til å vise ulike metoder å løse problem på, til å gi forklaringer av deres løsninger, og til å lytte til forklaringer gitt av andre (Silver & Stein, 1996).

Ifølge Silver og Stein (1996) har studier vist at det å bevege seg mellom ulike representasjonsformer, bruke flere strategier og vise problem fra flere perspektiver, har med en høyere orden av tenkning og begrunnelse å gjøre (Silver & Stein, 1996). Jeg vil nå utfylle de tre begrepene representasjoner, strategier og matematisk forklaring ved bruk av flere aktuelle kilder.

#### 2.2.2.1 Flere representasjoner

Representasjoner er en viktig del av matematikkfaget, og elevene må lære seg å bruke flere representasjoner i ulike situasjoner. Innenfor matematikkfaget kan representasjoner bli sett på som indre eller ytre. De indre representasjonene er abstraksjoner av matematiske ideer eller kognitive skjema som er utviklet gjennom erfaring. Representasjoner som for eksempel algebraiske likninger, grafer, tabeller og diagram er ytre manifestasjoner av matematiske begrep (Pape & Tchoshanov, 2001). I denne rapporten tar jeg utgangspunkt i de ytre representasjonene. Lesh et al. (1987) har laget en modell over de 5 mest vanlige representasjonene: manipulere modeller, statiske bilder, skrevne symboler, snakket språk og "real scripts". Friedlander og Tabach (2001) har, med fokus i algebra, skrevet om 4 ulike representasjoner: verbale, numeriske, grafiske og algebraiske. Verbale og grafiske representasjoner er spesielt nyttig videre.

Lesh et al. (1987) skriver om hvilken rolle representasjoner har og hvilken rolle overføringer mellom representasjoner har i matematisk læring. I denne artikkelen har de fokus på ytre, og derfor observerbare representasjoner. Overføringer mellom representasjoner er viktig, og elevene kan lære mye av å bytte representasjon. De skriver at gode problemløsere er fleksible i deres bruk av ulike representasjonssystemer og at de ubevisst bytter til den mest hensiktsmessige representasjonen for å fremheve enkelte punkt i løsningsprosessen. Lesh et al (1987, som sitert i Silver og Stein, 1996, s.484), sier at det å bevege seg fritt mellom ulike representasjonsformer av samme matematiske ide, er en karakteristikk av komponent prestasjon. Duval (2006) skriver også om dette, men han skiller mellom to ulike typer av transformeringer av semiotiske representasjoner. Den ene er å behandle (oversatt fra "treatments") transformasjoner innenfor samme representasjonssystem, mens omdanninger (oversatt fra "conversions") er transformasjoner av representasjoner som består i å skifte representasjonssystem uten av å skifte det objektet som betegnes. I følge han ligger læringen i skiftet mellom ulike representasjonsformer.

Representasjoner er ikke bare viktige fordi det ligger læring i skiftet mellom ulike representasjonsformer. Friedlander og Tabach (2001) trekker frem Ainsworth med kollegaer (1989) som har gitt tre grunner til hvorfor flere representasjoner fremmer læring. Den første er at ulike representasjoner uttrykker ulike aspekter mer tydelig. Den andre er at flere representasjoner styrker hverandre. Den siste grunnen de nevner, er at når det er krevd å relatere flere representasjoner til hverandre, så må personen engasjere seg i aktiviteten som fremmer forståelse.

#### 2.2.2.2 Ulike strategier

Det er ikke bare ulike måter å representere matematiske ideer på som er vesentlig i matematikkfaget. Det er også viktig å bruke ulike strategier i løsning av matematiske problem. Resnick (1987, som sitert i Silver og Stein, 1996, s.484) sier at muligheten til å generere og bruke flere strategier er assosiert med kognitiv fleksibilitet, og muligheten til å vise problem fra flere perspektiv, er begge karakteristikker av høyere tenkning og begrunnelse. Her er "variation theory" vesentlig. Denne teorien tilbyr et rammeverk for å fange og beskrive forskjeller i klasseromsinteraksjonen (Häggström, 2006). "Variation theory" er blant annet fremmet av Ference Marton med kollegaer, og innebærer at de som lærer må erfare variasjon i kritiske aspekter ved et begrep (Mason, 2011).

Gode strategibrukere har flere egenskaper. De har tilgjengelig et spekter av prosedyrer de kan påkalle for å utføre en spesiell oppgave, er fleksible i bruken av spesielle prosedyrer i spesifikke situasjoner, og er aktivt engasjert i å kontrollere løsningen til problemet og bestemme om det de gjør bringer dem nærmere ønsket løsning (Goldman, 1989).

Strategifleksibilitet, er et sentralt begrep innenfor strategiopplæring (Ostad, 2003). Dette er et uttrykk som reflekterer kvaliteten på elevenes strategikunnskaper og som har med at eleven er i stand til å variere strategibruken fra ulike situasjoner. Dersom en elev er ensidig innenfor en lengre tidsperiode og benytter samme strategi uten å variere strategibruken fra ulike situasjoner kan det skyldes strategirigiditet (Ostad, 2003). Siden jeg kun har studert elevenes strategibruk i en kortere periode kan jeg ikke si noe om strategirigiditet. Jeg undersøker om elevene viser en høy eller lav strategifleksibilitet.

Det kan være nyttig å skille strategier fra begrepet prosedyrer i denne rapporten. En definerer ofte en prosedyre som en fremgangsmåte, mens en strategi blir definert som en fremgangsmåte for å nå et mål. Siegler og Jenkins (1989) har brukt uttrykket "obligatorisk" for å skille strategi fra prosedyre generelt, og definerer strategi som enhver ikke obligatorisk og målrettet prosedyre.

#### 2.2.2.3 Forklaring og rettferdiggjøring

Den siste av de tre egenskapene ved oppgavene som Stein med kollegaer (Stein et al., 1996; Henningsen & Stein, 1997) har nevnt i sitt arbeid er matematisk kommunikasjon. Det er ikke bare ulike representasjoner og bruk av flere strategier som er vesentlig for å støtte læring i matematikk. Elevene må også utvikle en matematisk kommunikasjon preget av forklaring og rettferdiggjøring (Silver & Stein, 1996).

Mitt fokus ligger på elevenes forklaringer, refleksjoner og rettferdiggjøring, som er uttrykkssiden ved kommunikasjon, og ikke på den mottakende siden, som innebærer å forstå og tolke andre sine matematikkholdige tekster (Røsseland, 2005).

En av de grunnleggende ferdighetene som elevene skal utvikle i skolegangen er å uttrykke seg muntlig. For matematikkfaget gjelder dette:

> Å kunne uttrykkje seg munnleg i matematikk inneber å gjere seg opp ei meining, stille spørsmål, argumentere og forklare ein tankegang ved hjelp av matematikk. Det inneber òg å vere med i samtalar, kommunisere idear og drøfte problem og løysingsstrategiar med andre. (Utdanningsdirektoratet, 2012a)

I denne grunnleggende ferdigheten ser man at det både er et fokus på at elevene skal uttrykke seg selv, og være i kommunikasjon med andre. Elevene skal altså både kunne argumentere for og forklare en tankegang ved hjelp av matematikk og kunne kommunisere sine ideer.

Selv om jeg ikke undersøker kommunikasjonen mellom elever og læreren, så kan det være aktuelt å se på noen aspekter ved kommunikasjonen. Kommunikasjon mellom elever er viktig både for å støtte sosiale læringsprosesser og for å stimulere refleksjon (Hiebert, 1992), noe som er nyttig for mine analyser. Refleksjon er dermed viktig av flere hensikter. En av disse er blant annet å få kontroll over ens egne tanker (Hiebert, 1992).

Kapittel 3

# Metode

I dette kapittelet skal jeg beskrive datainnsamlingen min og begrunne valgene jeg har gjort for å undersøke aspekter ved de utvalgte kompetansene som kunne sees i elevenes arbeid med to oppgaver gitt av læreren. I tillegg kommer jeg også til å ta for meg etiske hensyn jeg har tatt, metodiske utfordringer jeg har møtt samt pålitelighet og troverdighet i mitt forskningsarbeid.

## 3.1 Kvalitativ forskning og kasusstudie

Jeg valgte å gjennomføre en kvalitativ forskning av flere grunner. Kvalitative data er ofte detaljerte og fyldige (Cohen, Manion & Morrison, 2007), noe jeg ønsket at mine data skulle være. Et mål for meg var å forstå de prosessene som foregikk da elevene jobbet med noen oppgaver, noe som av Postholm (2010) blir kalt for fortolkende teori. Gjennom disse detaljerte dataene ville jeg prøve å forstå elevenes arbeid med matematikkoppgaver i deres naturlige settinger, altså i klasserommet. Dette er det som Postholm (2010) skriver er et naturalistisk studie. Konstruksjonen og forståelsen av virkeligheten er i stadig endring og uvikling, derfor vil kvalitative forskere prøve å forstå hva disse tolkningene er på et spesielt tidspunkt i en spesifikk kontekst (Postholm, 2010). For meg var det derfor nyttig å undersøke aspekter ved utvalgte kompetanser som kunne sees i elevenes arbeid med matematikkoppgaver innenfor en begrenset periode på fire uker. Siden jeg ønsket å studere toergrupper i arbeid med matematikkoppgaver, ble kasusstudie et naturlig valg.

En kasusstudie gir detaljerte og fyldige beskrivelser av det som er studert i sin kontekst. Ved å ha et slikt fokus på et spesifikt kasus, kan man avdekke ulike faktorer som er karakteristiske for akkurat dette kasuset i denne settingen (Postholm, 2010). En kasusstudie er, som Cohen et al. (2007) skriver, for å forstå noe mer detaljert. Jeg fulgte nesten alle matematikktimer innenfor temaet "tall og algebra" på 10. trinn i en fire ukers periode. Min forskning var lukket i tid og sted, noe som i følge Postholm (2010) kjennetegner en kasusstudie. I hver økt hadde jeg fokus på en toergruppe som varierte fra de ulike øktene, da elevene ikke hadde faste plasser. I min studie har jeg hatt et fokus på elevers arbeid med matematikkoppgaver, nettopp for å forstå elevene i arbeid med akkurat disse spesifikke oppgavene, og ikke med oppgaver generelt. Jeg ønsket å kunne si noe om elevenes kompetanse i arbeid med disse oppgavene.

For denne rapporten har jeg valgt å konsentrere meg om data fra en av dagene jeg observerte i de to ulike halvdelene av klassen, og har fokus på en av elevene i hver av de to toergruppene. Dette har jeg valgt å gjøre, blant annet fordi data var mer detaljerte og i fokus for den av de to elevene som satt nærmest meg og kameraet jeg brukte for å filme. I denne rapporten presenterer jeg altså data basert på fire kasus, to elever i arbeid med to oppgaver hver. De andre dataene er brukt som bakgrunn for mine analyser.

## 3.2 Kontekst: Skolen, klassen og elevene

Jeg vil nå si litt om konteksten med hensyn til mine observasjoner, samt begrunne mine valg med hensyn til trinn og elever.

### 3.2.1 Skole og trinn

Jeg gjennomførte datainnsamlingen i september og oktober 2011 i en klasse med cirka 45 elever på 10. trinn. I de fleste timene eller øktene var klassen delt i to grupper, gruppe 1 og gruppe 2, med litt over 20 elever i hver gruppe. Skolens navn, by og eksakt elevantall er anonymisert i oppgaven.

For å finne svar på forskningsspørsmålet mitt var jeg helt avhengig av å finne en skole som ville la meg få undersøke dette i en av klassene deres. Valget falt på en skole der både enkeltlærere, rektor og elever var kjent for meg. Dette var viktig fordi jeg ville at elevene skulle føle seg fortrolige med å ha meg i klasserommet, samtidig som jeg ville ha en skole der det allerede var bygd opp en solid og faglig sterk kommunikasjon med lærer. Denne skolen, representert ved rektor og lærer, var den eneste jeg tok kontakt med, og jeg fikk et "ja" umiddelbart.

Grunnen til at jeg valgte elever på 10.trinn var fordi jeg gjerne ville gjøre mine undersøkelser på ungdomsskolen. Jeg ville undersøke hvordan elever, som har gått noen år på skolen, jobber med oppgaver gitt av læreren, og hvilke aspekter ved kompetanse de viser i disse oppgavene. I tillegg ville jeg undersøke elever på 10.trinn, for å se på hvilke aspekter ved kompetanse de kan ta med seg til videregående skole.

### 3.2.2 Klassen under mine observasjoner

Jeg fulgte hele perioden da elevene jobbet med temaet "tall og algebra". Elevene har hatt mye om dette temaet før, og størstedelen av timene gikk til at elevene skulle jobbe individuelt med oppgaver de selv mente de hadde behov å jobbe mer med. Da de følte seg klar, innenfor ukene de hadde med det aktuelle temaet, skulle de ta en test for å sjekke om de kunne så mye som de trudde. Elevene skulle så jobbe videre med det det var behov for ut i fra den formative testen, før de avsluttet hele temaet med en avsluttende, summativ prøve.

Elevene jobbet med oppgaver fra læreboka "Nye Mega 10A" (Gulbrandsen, Melhus & Løchsen, 2008). Noen av elevene jobbet også med oppgaver fra en lærebok fra videregående skole. Av oppgavene i læreboka kunne elevene velge mellom generelle oppgaver eller oppgaver delt i tre ulike nivå. I en av øktene ganske tidlig i den aktuelle arbeidsperioden, observerte jeg at 89 % av elevene i den ene gruppa jobbet med den vanskeligste typen oppgaver, altså røde oppgaver. I intervju med lærer kommer det frem at både elever og lærere jobber mot å bli best. I tillegg sier læreren at det er en aksept i klassen for å være flink, og at elevene skal gjøre så godt de kan. Dette er viktig fordi det har med kulturen i klassen å gjøre.

I tillegg til at elevene jobbet med selvvalgte oppgaver, ble også oppgaver og aktuelle tema gått igjennom på tavla ved behov. De to oppgavene som jeg har som utgangspunkt i denne rapporten, er oppgaver som ble gitt som felles aktivitet for hele klassen i begynnelsen av en økt.

### 3.2.3 Toergruppene som ble observert

Organiseringen i klasserommet der elevene satt sammen to og to, har hatt betydning for toergruppene jeg har observert. Elevene hadde ikke faste plasser i akkurat dette klasserommet, og siden jeg ikke ville legge styringer på organiseringen i klasserommet har de ulike toergruppene variert fra timene, da elevene har byttet plasser.

Jeg var tidlig ute med å søke tillatelse fra Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste, NSD, samt sende ut brev til foreldre og foresatte for å få tillatelse. Likevel tok det lang tid før flesteparten hadde levert inn svarskjema. Dette gjorde at jeg, fra time til time, måtte se hvem av elevene som hadde gitt tillatelse.

Valget av elever er bestemt ut i fra organisatoriske hensyn, om de har gitt tillatelse eller ikke og om det satt to og to sammen som hadde gitt tillatelse. I tillegg ville jeg ikke at noen av elevene som ikke hadde gitt tillatelse skulle komme inn i bildet på videokameraet, eller at stemmen skulle høres på videoopptak. I denne rapporten har jeg valgt å studere aspekter ved de utvalgte kompetansene i Marit og Jørgen sitt arbeid. Disse navnene er pseudonym.

## 3.3 Gjennomføring av datainnsamling

I løpet av en fire ukers periode samlet jeg inn alle data i forbindelse med dette prosjektet, både i form av observasjoner av toergrupper og to intervju med lærer. Intervjuene og deler av observasjonene er brukt som bakgrunnsopplysninger, mens observasjoner av elevene i arbeid med to oppgaver i en av øktene, vil bli analysert og drøftet i det neste kapittelet.

### 3.3.1 Observasjonsprosessen

For meg var det viktig å være med i introduksjonen av et nytt tema, og følge mest mulig av undervisningen i dette tema, for å få et detaljert bilde av undervisningen i akkurat denne klassen. Jeg ville ikke bare observere et par økter.

Under mine observasjoner, var undervisningen delt i to grupper, der hver gruppe hadde tre økter med matematikk i uken, en økt på 45 minutter, en på 90 minutter og en på 75 minutter. Dette gjorde at læreren hadde seks økter med matematikk i løpet av en uke, fordelt på tre dager i den aktuelle klassen.

I løpet av de 12 øktene elevene hadde matematikk, var det fire dager da læreren var borte. Jeg bruker ikke data fra disse fire øktene, selv om jeg hadde fått lov av vikar til å følge og observere undervisningen. Dette er fordi det er undervisningen til klassens opprinnelige lærer som jeg har søkt NSD om tillatelse for og fått tillatelse fra rektor til å gjennomføre. To økter ble matematikktimene brukt til å gå igjennom en prøve som elevene hadde hatt i geometri, samt at de hadde også hadde en avsluttende prøve i "tall og algebra". I løpet av fire uker med observasjoner satt jeg igjen med detaljerte data fra fem økter i hver av de to gruppene. Tre av disse var rene arbeidsøkter der elevene jobbet med arbeidsoppgaver, enten fra deres egen lærebok eller med en lærebok fra videregående skole. De to resterende øktene var blant annet preget av at læreren ga alle elevene samme oppgave. Det er elevenes arbeid med oppgaver fra en av disse øktene jeg vil bruke videre i analysen.

De to første ukene observerte jeg ved bruk av feltnotater. Grunnen til at jeg valgte å starte med feltnotater tidlig og observere klassen i gjennom hele perioden med "tall og algebra", var for det første fordi jeg ville få et innblikk i matematikken i løpet av hele perioden med "tall og algebra". For det andre ville jeg at elevene og læreren skulle bli vant til å ha meg i klasserommet, og at de skulle se på meg som en forsker og ikke som en lærer som de kunne spørre om hjelp. Som Postholm (2010) skriver er det viktig at forskningsdeltakerne vet hvilken rolle forskeren har.

I de resterende øktene, bortsett fra avsluttende prøve i tall og algebra, valgte jeg å observere ved bruk av videoopptak. Dette gjorde jeg for å få med meg mest mulig detaljer over hva som skjedde, både med hensyn til hva læreren introduserte for klassen, men også hva elevene skrev i arbeidsboka si, slik at jeg best mulig kunne analysere hvilke aspekter ved kompetanse som elevene viste i sitt arbeid.

Jeg satt ved siden av elevene da jeg observerte de utvalgte toergruppene. Elevene visste at jeg var til stede, og dette har nok påvirket elevene til en viss grad. Dette kan for eksempel ha påvirket hvordan elevene løste problemene og deres aktivitetsnivå. Min rolle som forsker i denne naturalistiske settingen kan derfor sies å være observatør som deltaker, slik det står i Postholm (2010).

### 3.3.2 Intervjuprosessen

I tillegg til observasjoner i klassen hadde jeg to intervju med den aktuelle læreren som var på cirka 30 minutter hver. Det ene intervjuet foregikk på et lite grupperom en dag elevene ikke hadde matematikkundervisning, det andre intervjuet var på klasserommet etter at den ene undervisningsøkten var ferdig. Jeg valgte å gjennomføre to intervju med læreren fordi jeg ville at læreren skulle få si noe om hans valg, og det han gjorde i undervisningen. I tillegg var et av målene mine med intervjuene å få bakgrunnsinformasjon om klassen, og det er slik intervjuene er brukt i denne rapporten.

I Cohen et al. (2007) er det skrevet om ulike typer av intervju. Kvale (1996, som sitert i Cohen et al, 2007) setter de ulike typene av intervju i et kontinuum, og argumenterer for at intervju er ulik med fokus på hensikt, graden av struktur og om de er utforskende eller hypotesetestende (Cohen et al., 2007). Jeg valgte det som Kvale (1997) kaller for et halvstrukturert intervju. Dette valgte jeg for å prøve å sikre at jeg holdt meg innenfor forskningsspørsmålet, men også for å sikre flyt i dialogen og for å kunne få læreren til å utdype eventuelle utsagn i dialogen. Jeg prøvde også å variere spørsmålene mellom åpne og lukkede.

## 3.4 De to oppgavene

De to oppgavene som ble brukt i 10.klassen i temaet "tall og algebra" ble gitt muntlig til elevene og er i denne rapporten kalt for "Rutenettoppgaven" og "Mønsteroppgaven". Disse to oppgavene har jeg valgt fordi jeg ville studere oppgaver eller aktiviteter som hele klassen jobbet med. Jeg har også valgt disse oppgavene på grunn av situasjoner som mine data nøye beskriver. I tillegg til at jeg syntes det var aktuelt å studere disse oppgavene i detalj, med tanke på at de både hadde et høyt potensial med hensyn til det rent matematiske, men også med hensyn til oppgaveegenskapene. I Vedlegg A, B, C og D har jeg tatt med transkripsjoner av noen ytringer som viser hvordan læreren introduserte disse oppgavene i de to gruppene.

I Rutenettoppgaven skulle elevene fylle inn sifrene $1-9$ i et rutenett på $3*3$ og hver rad ble et tresifret tall. Målet var at elevene skulle komme så nærme 1000 som mulig, da disse tre tallene ble addert sammen. Elevene kunne flytte på sifrene innenfor hvert av de tre tallene, men ikke bytte siffer mellom de tre tallene.

I den andre oppgaven, Mønsteroppgaven, skulle elevene multiplisere $1*1$, $11*11$, $111*111$ og så videre, og se om de kunne finne ut hva de neste produktene var, og se etter mønster.

## 3.5 Analysemetode

Jacobsen (2005) skriver at det å analysere data dreier seg om tre ting, å *beskrive, systematisere og kategorisere,* og å *sammenbinde.* Jeg har støttet meg til dette i min analyseprosess.

Først startet jeg med å transkribere lyd - og videoopptak fra mine observasjoner og renskrive mine feltnotater. For å få best mulig oversikt i mine transkripsjoner laget jeg meg følgende transkripsjonskoder:

| **Koder** | **Beskrivelse** |
|---|---|
| (...) | Utsagn tatt bort |
| (pause) | Pause |
| (tekst) | Beskrivelse av hva som blir gjort |
| tekst... | Person blir avbrutt |
| ... tekst | Person avbryter |
| [elev] | Utelatelse av navn på elev |

I tillegg nummererte jeg ytringene slik at det første tallet, enten 1 eller 2 beskrev hvilken gruppe ytringen var fra. Mens det andre tallet beskrev hvilket nummer ytringen hadde innenfor undervisningssekvensen. Nummereringen "2. 23" henviser til gruppe 2 og ytring 23. Alle utsagnene er i denne oppgaven skrevet på bokmål, for at ikke elevene og læreren skal kunne gjennkjennes på sin dialekt.

Mine tanker og refleksjoner etter hvert som jeg transkriberte skrev jeg også ned. Siden jeg hadde ganske mye data, fra 4 uker med observasjoner, skrev jeg ned korte beskrivelser og kommentarer av hva det var hvert sett med data inneholdt.

Deretter måtte jeg prøve å redusere mitt materiale ved å systematisere og kategorisere det (Jacobsen, 2005). Jeg valgte å kode materialet ut i fra oppgaveegenskapene som blir brukt i Mathematical Tasks Framework: representasjoner, matematiske forklaringer og strategier (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996, 2009). Med utgangspunkt i disse oppgaveegenskapene ville jeg se på aspekter ved kompetansen som kunne sees i elevenes arbeid. Jeg valgte derfor å bruke noen av Kilpatrick et al. (2001) sine komponenter av kompetanse og Niss et al. (2002) sine delkompetanser for å si noe om aspekt ved kompetansen med hensyn til oppgaveegenskapene. Med utgangspunkt i både Kilpatrick et al. (2001), Niss et al. (2002) og Henningsen og Stein med kollegaer (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 1996, 2009) ble jeg sittende igjen med mitt rammeverk bestående av følgende:

- **Representasjonskompetanse:** Hvilke ytre representasjoner elevene bruker. Forstå og bruke ulike typer representasjoner, forstå forbindelser mellom ulike representasjonsformer og kunne velge blant ulike representasjonsformer alt etter hvilken situasjon de skal brukes i.

- **Strategikompetanse:** Hvilke ulike strategier elevene bruker for å løse oppgavene. Om de for eksempel bruker standardalgoritmer eller andre strategier.

- **Forklaringskompetanse:** Hvilke matematiske resonnement, forklaringer, rettferdiggjøringer og begrunnelser de bruker. Dette innebærer uttrykkssiden ved kommunikasjon.

Disse utvalgte kompetansene er dermed beskrevet ut i fra noe aspekter og det er disse jeg har hatt fokus på for å besvare forskningsspørsmålet mitt. Jeg vil nå si noe om hvordan jeg har brukt Kilpatrick et al. (2001) og Niss et al. (2002) i hver av disse utvalgte kompetansene.

Representasjonskompetansen innebærer blant annet det som Niss et al. (2002) skriver om under sin kompetanse med samme navn. I tillegg har jeg valgt å ta med strategisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001), da denne sier noe om elevenes muligheter til å representere matematiske problem.

Med min definisjon av strategikompetanse mener jeg de strategiene som elevene bruker for å løse oppgavene. Her har jeg også et fokus på å bruke prosedyrer akkurat, effektivt og passende (Kilpatrick et al., 2001), og denne kompetansen kunne også vært kalt prosedyrisk kompetanse. Jeg har likevel valgt å kalle den for strategikompetanse, da jeg ville fange opp aspekter av kompetansen som også rommer ulike strategier, ikke bare prosedyrer. Merk at min definisjon av strategier er ulik Kilpatrick et al. (2001) sin definisjon av strategisk kompetanse, som ofte er blitt kalt for problemløsning i annen litteratur.

Forklaringskompetansen innebærer blant annet Niss et al. (2002) sin delkompetanse om kommunikasjon, men jeg har kun valgt å ha fokus på uttrykkssiden ved denne kommunikasjonen, ikke den mottakende siden. Derfor har jeg et fokus på elevens muntlige ytringer, som resonnement, forklaring, rettferdiggjøring og begrunnelse. Dette er også en del av det som Kilpatrick et al. (2001) kaller for adaptiv begrunnelse. Niss et al. (2002) sin resonnementskompetanse er også innenfor denne kompetansen.

Hver av disse kompetansene, eller kodene, fikk en egen farge, og deretter fargekodet jeg mine skriftlige transkripsjoner. Etter hvert så jeg også at det var nødvendig med en kode som gikk på å gjøre det samme som læreren. Dette er en kode som er litt på siden av de øvrige kodene jeg brukte, da denne koden blant annet tok for seg likheter i det som læreren og elevene gjorde.

Etter at jeg var ferdig med å kode materialet satte jeg sammen de ulike sekvensene etter hvilken kode de hadde, for å få et overblikk over hvilke koder som var "godt" representert i mitt materiale, og hvilke som var mindre representert. Dette er altså det som går på å sammenbinde data, altså finne sammenhenger i data (Jacobsen, 2005).

## 3.6 Forskningsarbeidets pålitelighet og troverdighet

Slik som for andre forskningsmetoder, må kasusstudier vise reliabilitet og validitet. I følge Postholm (2010) bruker gjerne fenomenologiske forskere heller begrepene pålitelighet og troverdighet. Lincoln og Guba (1985) skriver om fire kriterier til troverdighet: 1) kredibilitet, 2) overførbarhet, 3) avhengighet og 4) bekreftbarhet. Kredibilitet handler om det at forskningen fremstår som sannsynlig. Overførbarhet handler om det at funnene fra forskningen kan anvendes på andre situasjoner. Avhengighet, om andre forskere ville fått de samme resultatene og bekreftbarhet, om studien ville gitt de samme funnene om den ble gjentatt i en tilsvarende kontekst og med tilsvarende forskningsdeltakere.

Selv om kasusstudier er detaljerte beskrivelser av det som er studert i sin naturlige kontekst, kan kasusstudier i følge Cohen et al. (2007) hjelpe forskere å forstå andre like kasuser, fenomener eller situasjoner. Resultatene mine kan ikke generaliseres til enhver situasjon, men kan hjelpe forskere og lærere til å si noe om hvilke aspekter ved kompetanse som kan sees i elevers arbeid med oppgaver lik disse. Disse resultatene kan også si noe om hvordan akkurat disse elevene jobbet med oppgaver, og hvilke aspekter ved kompetanse de viste.

Min gruppe med elever er ikke representativ for en større populasjon. Elevene jeg observerte var fra samme by, gikk i samme klasse og hadde samme lærer. Om studien hadde blitt gjentatt i samme kontekst, er det sannsynlig at noen av funnene ville ha blitt tilnærmet like, men det er ikke sikkert. Siden jeg var en deltakende observatør (Postholm, 2010) og hadde en sentral rolle i intervju med lærer, er mine observasjoner, tolkninger og analyser farget av meg.

For å gjennomføre en mest mulig troverdig undersøkelse har jeg brukt flere metoder for å samle data (Postholm, 2010), altså en form for metodetriangulering. Mine data kommer ikke bare fra de naturalistiske observasjoner i klassen, men også intervju med læreren, samt at oppgavene i seg selv er data.

## 3.7 Etiske forholdsregler og metodiske utfordringer

I arbeidet med denne masteroppgaven har jeg måttet tatt flere hensyn og møtt en del utfordringer. Jeg vil nå ta for meg de jeg mener er mest relevant i forhold til denne rapporten.

Mitt forskningsarbeid ble i august 2011 meldt inn til Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste (NSD, prosjektnummer 27850). Formål med prosjektet, behandling av data og prosjektets varighet ble da gjort rede for. I september var tillatelsen i orden, og da startet jeg mine observasjoner.

Thagaard (2003) skriver om tre etiske retningslinjer som er spesielt gjeldende i kvalitativ forskning: 1) *Informert samtykke*, 2) *konfidensialitet* og 3) *konsekvenser for deltakerne*. Dette har jeg prøvd å ivareta i mine undersøkelser.

For at elever, foreldre og foresatte, lærer og rektor skulle kunne si ja til å delta i prosjektet, måtte de vite hva de sa ja til. De måtte få muligheten til å gi et informert samtykke. Foreldre og foresatte, lærer og rektor har alle mottatt et informasjonsskriv om prosjektet, som de skriftlig har sagt ja til. I tillegg har jeg muntlig informert og fått samtykke av lærer, aktuelle elever og rektor på skolen.

I alle faser av prosjektet har det vært viktig for meg å behandle data konfidensielt og i alle skriftlige dokumentasjoner, som for eksempel transkripsjoner, har jeg brukt fiktive navn.

Det har også vært viktig for meg at mitt prosjekt ikke skulle ha negative konsekvenser for mine informanter, både da jeg gjorde mine observasjoner, men også i ettertid. Jeg har prøvd å plassere meg i klasserommet på en slik måte at jeg ikke har vært til altfor stort hinder for elevene og læreren. Det har også vært veldig viktig for meg å gjengi situasjoner så nøyaktig som mulig for å kunne forstå, og det er en av grunnene til at jeg valgte å bruke videokamera.

Jeg måtte legge med et vedlegg over brevet jeg skulle sende til foreldrene, da jeg søkte NSD om tillatelse til å gjennomføre prosjektet mitt. I utgangspunktet skulle jeg ha med "Jeg/Vi gir/gir ikke tillatelse til" at det kunne bli foretatt videoopptak av deres barn, også skulle foreldre og foresatte sette ring rundt det som passet for dem. Dette tenkte jeg var hensiktsmessig fordi da måtte alle elevene levere inn svarslippen, uavhengig om de fikk eller ikke fikk tillatelse. I tilbakemeldingene jeg fikk fra NSD kom det frem at jeg måtte endre svarslippen til kun å gjelde slik at det var de som ga tillatelse som skulle fylle ut svarslippen. Dette gjorde at jeg kun fikk tilbake svarslippen fra de som gav tillatelse. Fra de elevene som ikke ga tillatelse visste jeg derfor ikke om de gav tillatelse eller om elevene hadde glemt svarslippen hjemme. Dette har påvirket mine valg av elever. I brevet kom det også frem at elevene ga sin tillatelse.

Kapittel 4

# Analyse og drøfting

I dette kapittelet skal jeg først undersøke det matematiske og didaktiske potensialet som ligger i Rutenettoppgaven og Mønsteroppgaven i seg selv. Deretter skal jeg se på mulighetene oppgavene har slik læreren introduserer de, og prøve å svare på følgende delspørsmål: "*Hvilke representasjoner, strategier og forklaringer og rettferdiggjøringer gir oppgavene muligheter for, slik de er introdusert av læreren?*" Deretter vil jeg undersøke hvilke aspekter ved de utvalgte kompetansene, strategikompetanse, forklaringskompetanse og representasjonskompetanse, som kan sees i elevenes arbeid med disse oppgavene. Dette er, som tidligere nevnt, basert på noen av Niss et al. (2002) sine delkompetanser, noen av Kilpatrick et al. (2001) sine komponenter av kompetanse og Stein et al. (1996) og Henningsen og Stein (1997) sine arbeid om Mathematical Tasks Framework. Jeg vil med dette forsøke å svare på forskningsspørsmålet *"Hvilke aspekter ved utvalgte matematiske kompetanser kan sees i to elevers arbeid, med hensyn til to oppgaver introdusert av læreren?"*. Jeg tar først for meg Rutenettoppgaven, deretter Mønsteroppgaven. Det siste delspørsmålet "*Hvordan jobber elevene med oppgavene i forhold til hva læreren gjør?*" blir forsøkt svart i dette kapittelet og i kapittel 5.

## 4.1 Matematisk og didaktisk potensial i oppgavene

Før jeg går inn på mine funn vil jeg presentere de to oppgavene, Rutenettoppgaven og Mønsteroppgaven, samt analysere oppgavene med hensyn til det matematiske og didaktiske potensialet, altså se på mulighetene som ligger i de to oppgavene. Oppgavene ble gitt muntlig av læreren, og transkripsjoner av hvordan oppgavene ble introdusert av læreren finnes i Vedlegg A, B, C og D. Jeg tar først for meg oppgaven som jeg har kalt Rutenettoppgaven, deretter Mønsteroppgaven.

### 4.1.1 Rutenettoppgaven

For å lettere kunne analysere ulike aspekter ved de to oppgavene velger jeg å dele hver av oppgavene i flere steg. Rutenettoppgaven velger jeg å dele i fire steg fordi oppgaven inneholdt fire ulike deler.

Først skulle elevene lage et rutenett på $3 * 3$ ruter og fylle inn ett siffer i hver av rutene. Dette var lærerstyrt, og læreren ba noen av elevene si et siffer. Alle elevene skulle da sitte igjen med ni sifre fordelt på tre tall. Hver rad med tre sifre tilsvarte ett tresifret tall. Det andre steget innebar at elevene skulle flytte på sifrene innenfor hver rad, for å komme nærmest tallet 1000 da de adderte disse tre tallene. Denne adderingen tilsvarer det tredje steget av oppgaven. I dette tredje steget var det fokus på at elevene arbeidet med oppgavene. Etter en stund fikk de beskjed om å skrive det de hadde kommet frem til på tavla. I dette fjerde, og siste, steget av oppgaven oppsummerte også læreren. Kort oppsummert er min inndeling av de fire stegene i Rutenettoppgaven slik:

1. *Lage et rutenett og fylle inn sifrene* $1 - 9$.
2. *Flytte på sifrene innenfor hver av de tre radene.*
3. *Addere de tre tresifrede tallene.*
4. *Skrive svaret på tavla.*

Det opprinnelige rutenettet og innfyllingen av de 9 tallene ble gjort bare en gang, mens læreren gikk igjennom dette på tavla. Derimot kunne delene 2 og 3 bli gjennomført flere ganger, da elevene kunne flytte på sifrene og addere disse tresifrede tallene flere ganger for å komme nærmest mulig tallet 1000.

Det første matematiske innholdet som jeg vil ta for meg i Rutenett-oppgaven innebærer kombinatorikk. Når det gjelder det første steget av oppgaven etter min inndeling, kunne de ulike sifrene bli plassert på mange ulike måter, noe som gjør at antall mulige kombinasjoner av tresifrede tall i rutenettet var forholdsvis stort. Dersom man tar hensyn til at tallene $1-9$ kun kunne brukes en gang, vil antall mulige kombinasjoner i rutenettet være $9! = 9*8*7*6*5*4*3*2*1 = 362880$. Dette vil være antall mulige kombinasjoner av ni ulike sifre fordelt på ni ruter. Dersom sifrene $1-9$ kan brukes flere ganger, vil antall mulige kombinasjoner bli større, nemlig $9^9$. Hvis samme siffer kunne brukes ni ganger har ikke oppgaven noe poeng, da det ikke er mulig å flytte på sifrene for å komme noe nærmere tallet 1000.

I det neste steget av oppgaven, skulle elevene flytte sifrene innenfor hvert av de tre tresifrede tallene for å komme nærmest mulig tallet 1000. Dersom man kaller hvert av de tre tallene for $abc$ kan en lage et generelt uttrykk for hvilke kombinasjoner av tresifrede tall som hvert opprinnelige tresifrede tall kan bestå av. De tre tallene kan se slik ut: $abc$, $acb$, $cba$, $bca$, $bac$ og $cab$, og hver av de tre radene kan dermed gi seks ulike tresifrede tall når elevene skal flytte på sifrene. Dette gir mange mulige løsninger av oppgaven. Samtidig er det viktig å være klar over at ikke alle mulige kombinasjoner av de tre sifrene er like hensiktsmessig for å komme nærmest mulig tallet 1000 når man summerer de tre tallene. Dette har blant annet med posisjonssystemet å gjøre.

Posisjonssystemet er en vesentlig del av matematikkinnholdet som denne oppgaven gir muligheter for. I det første steget av oppgaven vet ikke elevene at målet er å komme nærmest tallet 1000 når disse tre tallene adderes. Derimot kan elevene ta i bruk det de vet om posisjonssystemet i det andre steget av oppgaven. De kan flytte sifrene innen hvert tresifret tall slik at de for eksempel får hensiktsmessige siffer på hundreplassen i tallet og ikke 7, 8 og 9 som siffer på hundreplassen i hvert sitt tall, da dette gir godt over 1000 som sum når disse tre tresifrede tallene adderes. Elevene må ha kunnskap om at dette posisjonssystemet er et titallssystem (dekadisk tallsystem), og at verdien på et flersifret tall ikke bare bestemmes av sifrene i seg selv, men også av plasseringen som sifrene har i forhold til hverandre.

Posisjonssystemet er en spesifikk ferdighet relatert til tallforståelse (University of North Carolina at Chapel Hill, 2012), derfor er det også nyttig å se på tallforståelse. Noen tall kan være hensiktsmessig å ha som hundresiffer, i motsetning til andre siffer som passer bedre som enersiffer. Utviklingen av tallforståelse hjelper elevene å løse problemer konseptuelt heller enn prosedyrisk. Andre ferdigheter enn posisjonssystemet som er relatert til tallforståelse, er blant annet estimering og mental aritmetikk (University of North Carolina at Chapel Hill, 2012).

Før elevene begynner å addere de tre tallene kan de ta et raskt overslag for å se om summen blir for høy eller for lav, i stedet for at de må regne ut den eksakte summen for alle kombinasjonene de prøver. Elevene kan bruke ulike strategier for å flytte på sifrene, men de kan også bruke ulike strategier for å addere tallene, som er det tredje steget. Elevene må kunne addere de tre tresifrede tallene for å finne ut hvilken sum de får, og hvor nær tallet 1000 denne er. Elevene har da muligheten til å bruke standardalgoritmen for addisjon, hoderegning, eller andre algoritmer og prosedyrer.

Det er ikke bare det matematiske innholdet i oppgaven som sier noe om hvilke muligheter som ligger i oppgaven i seg selv. Det er også nyttig å se på hvilke potensial oppgaven har med hensyn til representasjoner, forklaringer og strategier. Friedlander og Tabach (2001) sitt skille mellom ulike representasjoner er nyttig her. Det matematiske objektet, altså summen i denne addisjonsoppgaven, kan uttrykkes grafisk ved bruk av rutenettet eller verbalt. Dette verbale innebærer blant annet uttrykkssiden ved kommunikasjonsaspektet (Røsseland, 2005), og sier noe om elevenes muligheter til å forklare hva de gjør og hvorfor. Elevene kan for eksempel rettferdiggjøre hvorfor de flytter sifrene på akkurat den måten de gjør det, og si noe om de prosessene de bruker for å komme nærmest tallet 1000. Dette ligger ikke eksplisitt i oppgaven, men er noe som eventuelt må fokuseres på av lærer. Addisjonen, altså summen, kan også uttrykkes symbolsk, som for eksempel $234 + 598 + 167$, og er en av de fem representasjonene som Lesh et al. (1987) har skrevet om.

### 4.1.2 Mønsteroppgaven

For å gjøre analysene mest mulig oversiktlig har jeg valgt å dele Mønsteroppgaven i tre steg for gruppe 2 og fire steg for gruppe 1. Jeg har valgt denne inndelingen fordi de ulike stegene hadde ulikt innhold, slik de ble presentert.

I denne oppgaven var felles aktivitet i hele klassen i fokus, men elevene jobbet også individuelt. Læreren startet med å spørre elevene hva $1 * 1$ og $11 * 11$ var, hvilke tall de skulle multiplisere etter dette, og hvilket svar dette ga. Her kunne de bruke kalkulatoren. I begge gruppene var det deretter en oppsummering av læreren. I gruppe 1 jobbet de i tillegg videre med denne oppgaven, og elevene skulle også regne svarene på papiret, uten bruk av kalkulator. Oppsummert er min inndeling av stegene i Mønsteroppgaven slik:

1. *Hvor mye er 1*1? 11*11? (Presentasjon av læreren)*
2. *Finn de neste stykkene og de neste produktene (Individuelt arbeid/ klassesamtale)*
3. *Er det noe system? Hva skjer når vi har elleve 1- tall og tolv 1- tall? (Oppsummering av læreren)*
4. *Gruppe 1: Regn svarene på papiret, ikke på kalkulator. Multiplisere svarene med seg selv.*

Jeg tar for meg utvalgte muligheter som denne oppgaven har. Det første matematiske innholdet som jeg vil trekke frem er å se mønster. Elevene får mulighet til å se hvilke tall som skal multipliseres som de neste tallene, men de får også mulighet til å anta hvordan de neste produktene vil se ut, ut i fra hvordan de første produktene så ut. Dette er det som jeg har valgt å karakterisere som det andre steget av oppgaven. Det at oppgaven gir muligheter for å se etter mønster, innebærer også at oppgaven gir muligheter for matematisk argumentasjon og algebraisk tenkning. Elevene kan argumentere på et uformelt nivå, men også på et mer formelt nivå der de argumenterer for hvordan et vilkårlig tall, med samme system vil se ut, og da hva mønsteret kan tenkes å være. Dette handler om generalisering av mønster, som er hjertet i matematikken, i følge Mason (1996). Oppgaven gir også et potensial for å fremsette hypoteser, teste disse hypotesene og jobbe med det mer generelle. Elevene kan prøve å uttrykke en generell formel for produktene, eller et generelt bevis for hva et vilkårlig produkt vil bli dersom to like tall av denne typen multipliseres med hverandre, altså et matematisk innhold som innebærer bevisføring. Dette handler om den ene tilnærmingen til algebra, som Radford (1996) har kalt generalisering av mønster, og som innebærer at det logiske grunnlaget er en bevisprosess.

Elevene kan se på systemet som fremkommer i likningssett 4.1 og argumentere for hva som vil komme, og hvorfor.

$$\begin{array}{rcl} 1 * 1 & = & 1 \\ 1\ 1 * 1\ 1 & = & 1\ 2\ 1 \\ 1\ 1\ 1 * 1\ 1\ 1 & = & 1\ 2\ 3\ 2\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1 * 1\ 1\ 1\ 1 & = & 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{array} \tag{4.1}$$

Det siste av de fire uttrykkene som står skrevet ovenfor, altså $1111 * 1111$ kan, dersom man utnytter posisjonssystemet, uttrykkes slik:

$$(10^3 + 10^2 + 10 + 1)(10^3 + 10^2 + 10 + 1) \tag{4.2}$$

Dersom man da skriver dette ut, blir det:

$$(10^3 * 10^3) + (10^3 * 10^2) + (10^3 * 10) + (10^3 * 1)+ \tag{4.3}$$

$$(10^2 * 10^3) + (10^2 * 10^2) + (10^2 * 10) + (10^2 * 1)+$$

$$(10 * 10^3) + (10 * 10^2) + (10 * 10) + (10 * 1)+$$

$$(1*10^3)+(1*10^2)+(1*10)+(1*1)$$

Dette gir

$$10^6+10^5+10^4+10^3+10^5+10^4+10^3+10^2+10^4+10^3+10^2+10+10^3+10^2+10+1 \tag{4.4}$$

Og da får en

$$10^6+(2*10^5)+(3*10^4)+(4*10^3)+(3*10^2)+(2*10)+1 \tag{4.5}$$

Dette kan til slutt skrives slik

$$1234321 \tag{4.6}$$

Dette gir et svar som er et palindrom, noe som betyr av tallet er symmetriske uansett om en leser fra venstre eller fra høyre (WolframAlpha, 2012). Her har jeg kun brukt produktet $1111*1111$ som eksempel, men de øvrige produktene i denne oppgaven vil også være et palindrom, slik som produktene i likningssett 4.1.

Oppgaven gir også muligheter for å arbeide med ytre representasjoner som for eksempel naturlig språk, som både innebærer verbale begrepsmessige assosiasjoner og resonneringer, i tillegg til skriftlige symbolske systemer og ikoniske representasjoner som tegninger og mønster, etter Duval (2006) sin modell. Dette mønsteret kan for eksempel representeres ved å bruke et naturlig språk, ved bruk et matematisk symbolspråk eller ved bruk av tegninger.

Med hensyn til strategier er både rene multiplikasjonsstrategier vesentlige og strategier for hvordan de finner de neste stykkene. Det blir ikke sagt noe om hvilke strategier elevene skal bruke, og slik oppgaven er i seg selv kan elevene bruke strategiene som de mener er best egnet.

Oppgaven har store muligheter med hensyn til forklaringer og rettferdiggjøring, dersom en ser på mulighetene oppgaven har i seg selv, og for eksempel ser på spørsmålet om hva som skjer når en har flere ett - tall. Oppgaven gir store muligheter for generalisering, slik tidligere nevnt. Likevel er den begrenset med hensyn til at oppgaven ikke klargjør hvilken forklaringer som det er ønsket at elevene skal komme med. Oppgaven har spørsmål i form av "Er det noe system?" Til dette kan elevene svare ved bruk av bare et enstavelsesord, som for eksempel "ja" eller "nei".

Både Rutenettoppgaven og Mønsteroppgaven er interessante fordi begge har forholdsvis høye potensial med hensyn til det matematiske, men også med hensyn til ulike representasjoner, strategier og matematiske forklaringer. Oppgavene innebærer også flere steg, noe som innebærer at elevene ikke kan finne løsningen ved kun et steg.

## 4.2 Runettoppgaven

Jeg tar først for meg potensialer i oppgaven slik læreren introduserte den, deretter aspekter ved utvalgte kompetanser som elevene viste i arbeid med Rutenettoppgaven. Helt til slutt diskuterer jeg disse funnene.

### 4.2.1 Potensial introdusert av lærer

I den første fasen av oppgaven skulle elevene finne sine tre tresifrede tall. Når det gjelder antall mulige løsninger som oppgaven ga er ikke dette særdeles begrenset til kun å gjelde for noen tall. Læreren la også ekstra vekt på at elevene *ikke* skulle plassere tallene slik han gjorde det på tavla.

> **2. 37 Lærer:** *Når dere sier tallene, så plasserer dere dem der akkurat der dere vil. Ingen noen gode grunner til at dere plasserer dem likt.*
>
> **1. 185 Lærer:** *Nå må vi finne tak i noen tall. De tallene vi får opp nå skal dere plassere i en rute. Spiller ingen roller hvor. Jeg setter tallene i noen ruter, også setter dere dem akkurat hvor dere vil.*

Læreren spurte elevene om sifre som han deretter fylte i sitt rutenett på tavla, og som elevene skulle fylle ut i sitt eget rutenett i arbeidsboka. Etter hvert som elevene sa noen sifre, poengterte læreren at de ikke måtte sette tallene slik han gjorde det.

> **2. 42 Lærer**: *Jeg setter* 7 *her. Dere setter hvor dere vil.*
>
> **2. 47 Lærer:** *Jeg setter* 6 *der. Dere setter selvfølgelig der dere vil.*
>
> **1. 190 Lærer:** *Jeg setter 7 her. Spiller ingen rolle hvor dere setter. Poenget er at dere ikke setter der jeg setter. Ikke sett likt.*

Når alle de 9 rutene var fylt ut, sa læreren:

> **2. 55 Lærer**: *Det vil si det står tre tall her nå.* 528, 163 *og* 479 *står det, til meg. Til dere står det selvfølgelig annerledes.*
>
> **1. 204 Lærer:** *Sånn at nå har alle tre tall. Jeg har 586, 329. Dere har selvfølgelig noen andre tall.*

Læreren var veldig klar og tydelig på at elevene ikke skulle sitte igjen med de samme tre tallene som han hadde, etter at de hadde fylt ut ni sifre i rutenettet. Dette betyr at antall mulige kombinasjoner av de tre tresifrede tallene ble mindre, da de ikke kunne plassere tallene slik læreren hadde gjort det.

Når det gjelder hvor mange løsningsstrategier læreren ga muligheter for er det nødvendig å se på hver av de fire fasene som jeg har delt oppgaven i: plassere sifrene, flytte på sifrene, addere de tre tresifrede tallene og dele svaret på tavla. Med hensyn til den første fasen, å plassere tallene, er det ikke rom for mye variasjon, da de for eksempel ikke visste hva målet med oppgaven var før etter at de hadde plassert de ni sifrene i rutenettet. Det som gir rom for flere løsningsstrategier er hvordan de velger å summere de tre tallene, som er den tredje fasen av oppgaven. I gruppe 2 viste ikke læreren til elevene hvordan man kunne summere tre tall, noe han gjorde i gruppe 1 som var etterpå. Elevene kunne i utgangspunktet bruke ulike addisjonsstrategier. Elevene fikk beskjed om at de skulle finne svarene uten bruk av kalkulator:

**2. 72 Lærer:** *Prøv å få det til uten kalkulator nå da. That's the point.*

**1. 209 Lærer:** *Hver for dere uten kalkulator.*

Strategier de ville bruke for å flytte tallene, som er den andre delen av oppgaven, sa læreren ingenting om, og elevene måtte på den måten selv velge hvilke de skulle bruke.

**1. 207 Lærer:** *Nå skal der bytte sifrene så dere kommer så nært tallet 1000 som mulig når dere legger sammen disse sifrene.*

Følgende sekvens er hvordan læreren avslutter introduksjonen før elevene kan jobbe med oppgaven i gruppe 2:

**2. 56 Lærer:** *Vi har tre tall her nå. De tallene her skal vi få lov til å flytte. Vi kan flytte på samme rekke (...). Vi kan ikke flytte opp og ned. Vi kan kun flytte mellom sifrene i de tre tallene. Ta å flytt dem slik at vi kommer nærmest tallet* 1000 *når vi summerer de tre tallene deres. Skjønte dere hva det går ut på?*

*(...)*

**2. 63 Jørgen:** *Er det bare under* 1000 *eller kan det være litt over?*

**2. 64 Lærer:** J*a, så nærme* 1000 *som mulig. Godt spørsmål egentlig, for visst jeg sier opp til så skal det være mindre, men nå sier jeg så nærme som mulig.*

Elevene kunne både bruke en strategi som går på å "prøve og feile" og de kunne for eksempel gå mer systematisk til verks der de tok i bruk det de for eksempel visste om posisjonssystemet.

Når det gjelder representasjoner som kunne brukes i Rutenettoppgaven, slik den ble introdusert av læreren i de to aktuelle gruppene, er den i hovedsak begrenset til å være skriftlig i form av et rutenett på $3 * 3$.

**2. 31 Lærer:** *Nå tegner vi opp et kvadrat som vi deler i* 3*. (Han tegner et kvadrat på tavla). Så vi får* 3 *rekker og* 3 *kolonner.*

> (Pause i 38 sek). *Lag dere tre kolonner og tre rekker. (...) Hvor mange ruter blir det der da, [elev]?*
>
> **1. 179 Lærer:** *Så tar vi og tegner et rutenett med tre kolonner og tre rekker, som vi sier et regneark. (...) Hvor mange ruter er det nå?*

Addisjonsstykket her blir representert ved å bruke en tabell eller et rutenett. Dette er den skriftlige representasjonen av det matematiske objektet sum, som læreren legger opp til i undervisningen. I den siste fasen av oppgaven skulle alle elevene skrive ned deres nærmeste svar på tavla.

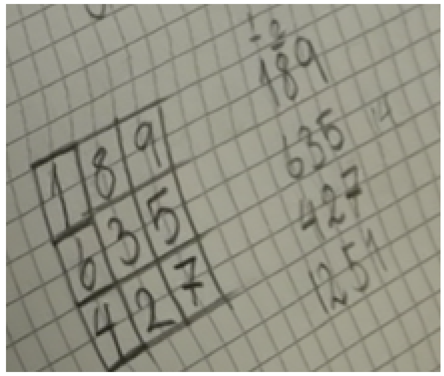
Det siste punktet under oppgaveegenskaper er matematisk kommunikasjon, som blant annet innebærer grad av forklaring og/eller rettferdiggjøring fra elevene. Denne kan se ut til å være begrenset, da læreren ikke har vektlagt dette i så stor grad. Læreren sier ikke noe om hva han forventer av elevene med tanke på forklaringer og rettferdiggjøringer. Det kan se ut til at fokus er på summen elevene får, og ikke prosessen med å jobbe mot summen som er nærmest mulig 1000. I den siste fasen av oppgaven skulle elevene skrive sine summer på tavla.

> **2. 87 Lærer:** *Når dere er ferdig, når dere er sikker på at dere har funnet. Skriv tallene dere har kommet frem til på tavla. (...) Skriv det dere har funnet ut på tavla.*

De ulike tallene blir ikke drøftet og snakket om, og elevene blir heller ikke utfordret til å si hvordan de kom frem til sitt svar, og hva de tenkte da de byttet til de aktuelle tallene. I gruppe 2 avslutter læreren oppgaven ved å ha mer fokus på prosessen ved at han sier:

> **2. 96 Lærer:** *Selvfølgelig er det ikke noe rett eller feil svar, fordi det er jo ingen som har samme tall. Men egentlig så er det en god trening for tallforståelse. Hvordan må vi endre sifrene for å komme så nærme 1000 som mulig?*

Selv om læreren knytter dette til tallforståelse, så er dette redusert til å være noe som elevene skulle ha jobbet med og tenkt over selv. Spørsmålet




Figur 4.1: Marit brukte standardalgoritmen for å addere

om hvordan en skulle ha endret sifrene for å komme så nærme tallet 1000 som mulig er heller ikke blitt drøftet og diskutert, men kun nevnt av læreren i avslutningen i arbeidet med denne oppgaven, og blir stående som et ubesvart spørsmål.

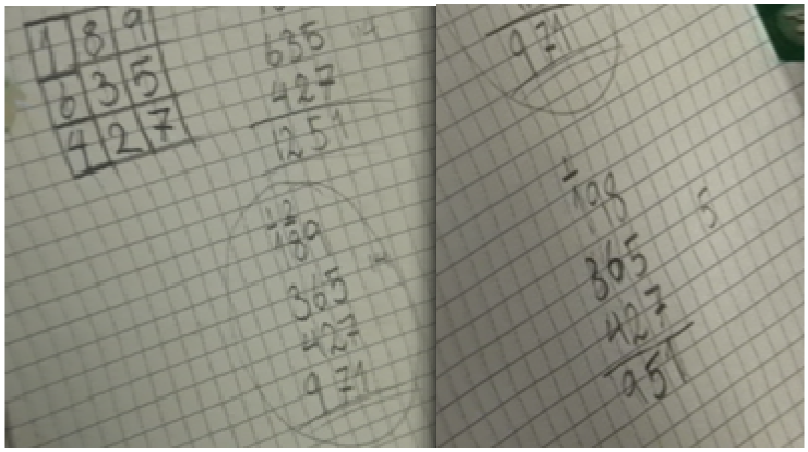
### 4.2.2 Aspekter ved utvalgte kompetanser

Nå skal jeg se på aspekter ved de utvalgte kompetansene som elevene viste i sitt skriftlige arbeid og muntlige språk da de jobbet med Rutenettoppgaven. Dette tilsvarer den tredje fasen i Mathematical Tasks Framework (Henningsen & Stein, 1997).

#### 4.2.2.1 Strategikompetanse

Både Marit og Jørgen brukte standardalgoritmen i addisjon da de skulle summere de tre tallene og se hvor nært tallet 1000 de kom. I gruppe 1, der Marit var min fokuselev, introduserte læreren Rutenettoppgaven ved å vise addisjonsalgoritmen på tavla. Marit sine strategier var ganske like med lærerens strategi. Hun fylte sifrene inn i et rutenett, flyttet på sifrene og brukte så addisjonsalgoritmen for å finne ut hva summen av de tre tallene ble. Marit hadde stilt opp og addert de tre tallene slik som i Figur 4.1.

Marit hadde likevel ikke regnet ut korrekt sum i alle de ulike stykkene hun hadde gjort. Hun gikk frem til tavla og skrev 971 på tavla etter at hun hadde addert de tre tallene 189, 365 og 427. Hun hadde også regnet ut summen av




Figur 4.2: Marit regnet feil ved bruk av standardalgoritmen

198, 365 og 427 og fått 951. Se Figur 4.2.

Hun hadde altså fått en lavere sum i det siste regnestykket, selv om hun hadde brukt 198 som er høyere enn 189. Hun spurte læreren om hjelp.

**1. 243 Marit:** *Kommer jeg nærmere enn det der? (Peker på 971)*

**1. 244 Lærer:** (Lærer ser på arket) *971. Ja.*

**1. 245 Marit:** *Gjør jeg?*

**1. 246 Lærer:** *Enn om du bytter om 8 og 9 øverst?*

**1. 247 Marit:** *Ja, men det gjorde jeg her og da ble det...*

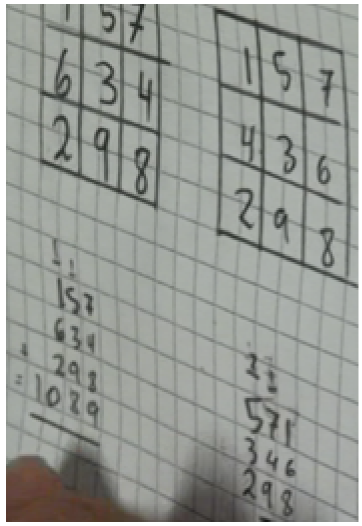
**1. 248 Lærer:** *... Åja, der har du gjort det. (...) Ja, men, se her nå. (Peker på arket der Marit har skrevet 198+365+427=951)*

**1. 249 Marit:** *Men da ble det enda mindre.*

**1. 250 Lærer:** *Men det går jo ikke an.* 198 *er jo større enn* 189.

**1. 251 Marit:** *Men det ble jo sånn da.*

Marit har ikke brukt standardalgoritmen i addisjon korrekt. Hun har altså ikke brukt den aktuelle fremgangsmåten akkurat og effektivt. Hun har ikke reflektert over eget svar, siden hun ikke så at noe måtte være feil i hennes utregninger, da hun fikk en lavere sum ved å addere et høyere tall. Hun sier



Figur 4.3: Jørgen brukte standardalgoritmen for å addere

selv "Men det ble jo sånn da". I denne oppgaven viser ikke Marit at hun har strategikompetanse med hensyn til å bruke algoritmer i addisjon korrekt.

Selv om ikke læreren har vist elevene i gruppe 2 hvordan de kan addere de tre tallene, har også Jørgen valgt å bruke standardalgoritmen for addisjon da han skulle summere de tre tallene. Han hadde både brukt denne algoritmen for å regne ut de første tallene og da han skulle regne ut de øvrige summene etter at han hadde flyttet på sifrene. Dersom noen av stykkene var for langt unna 1000 visket han disse vekk. I Figur 4.3 vises det hvordan Jørgen har summert de tre tallene.

Jørgen viser her at han har kompetanse i å bruke standardalgoritmen for addisjon. Han kunne bruke denne fremgangsmåten for å finne summen og kunne bruke den effektivt og korrekt. Han så at denne strategien kunne være nyttig å bruke i akkurat denne konteksten. Han viser altså at han har kompetanse innenfor det som jeg har kalt strategikompetanse.

#### 4.2.2.2 Representasjonskompetanse

I Rutenettoppgaven fortsatte Jørgen å bruke rutenettet som representasjon da han skulle skrive de nye tallene. Han brukte samme representasjon som læreren hadde brukt med skriftlig tabell eller altså et rutenett. Dette gjorde han både for tallene han hadde skrevet i arbeidsboka mens læreren skrev sin tabell på tavla og da han hadde byttet siffer innenfor hvert av de tre tallene. Han stilte de tre tallene under hverandre og brukte standardalgoritmen for addisjon da han skulle addere de tre tallene han hadde fått.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 7 |
| 6 | 3 | 4 |
| 2 | 9 | 8 |

Nr.1

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 7 |
| 4 | 3 | 6 |
| 2 | 9 | 8 |

Nr.2

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 7 | 1 |
| 3 | 4 | 6 |
| 2 | 9 | 8 |

Nr.3

Tabell 4.1: Jørgen sine rutenett

I sitt opprinnelige rutenett hadde Jørgen skrevet tallene som står som Nr.1 i Tabell 4.1. Han summerte sammen disse tallene og fikk 1089. Dette skreiv han både på papiret og hvisket, muligens fordi jeg filmet han. Han tegnet et nytt rutenett med tallene i Nr.2. I det nye rutenettet han hadde laget seg hadde han kun skiftet siffer i den midterste rekken, og hadde valgt å sette et lavere tall på hundrerplassen. I denne raden hadde han muligheten mellom å sette 3 eller 4 på hundrerplassen. Svaret han da fikk var lengre unna 1000 enn det tallet han først fikk, 1089. Han visket vekk hele regnestykket i Nr.2 og prøvde på nytt. Han skrev i stedet 571, 346 og 298, rutenett Nr.3 i Figur 4.1, og satte tre siffer på hundrerplassen som til sammen ga 1000. Etter at han hadde regnet ut summen i det siste rutenettet hvisket han "for høyt".

Jørgen har vært veldig konsekvent på å bruke rutenettet, og han viser at han kan behandle representasjoner innenfor dette samme representasjonssystemet. Han har ikke skiftet mellom ulike representasjonsformer, og han har ikke valgt blant et spekter av representasjoner alt etter hva de skal brukes til, men har valgt å bruke samme representasjon som læreren. Han viser dermed ikke en dekningsgrad ved representasjonskompetansen på et høyere nivå.

Marit tegnet ikke opp det nye rutenettet da hun hadde byttet på sifrene, men skrev kun opp de tre tallene ved bruk av standardalgoritmen. Heller ikke Marit viser at hun kan forstå og bruke ulike typer av representasjonsformer, forstå forbindelser mellom ulike representasjonsformer og kunne velge blant ulike representasjoner alt etter hvilken situasjon de skal brukes i. Hun viser altså heller ikke store aspekter ved representasjonskompetansen, men viser at hun kan gjøre det hun får beskjed om av læreren.

#### 4.2.2.3 Forklaringskompetanse

Det var lite snakk mellom elevene da de skulle flytte på sifrene for å komme nærmest mulig 1000. Derfor er det vanskelig å si hvordan elevene valgte å flytte på sifrene. Det var også lite kommentarer fra enkeltelevene som kan si noe om hvordan de tenkte.

Jørgen flyttet på sifrene, regnet disse ut og skrev svaret. Han regnet ut en sum som var for høy. Dette svaret kommenterte han ved å si "for høyt" og visket det ut igjen. Han gjør altså ikke rede for hans resonnement ved at han hverken forklarer, rettferdiggjør eller begrunner sine løsninger. Han viser altså ikke store aspekter ved forklaringskompetanse.

Marit skrev også ned svarene hun fikk, og det var omtrent heller ingen kommentarer av henne om hvorfor hun flyttet sifrene slik hun gjorde. Likevel var det noe prat på henne, i den forstand at hun hjalp naboeleven med oppgaven, som både innebar forklaring av hva de skulle gjøre og hjelp på veien, i tillegg til at hun kommuniserte med læreren. I sekvensen med læreren kommer det frem et viktig poeng, selv om ikke strategien i så stor grad var i fokus. Som sagt tidligere viste det seg at hun hadde fått feil sum selv om hun hadde brukt addisjonsalgoritmen. Måten hun valgte å uttrykke dette på "Men det ble jo sånn da", tydeliggjør at hun ikke kan reflektere over og rettferdiggjøre for svarene sine. Hun viser til at algoritmen ga en sum, og da er dette rett, i følge henne.

### 4.2.3 Diskusjon av aspekter ved utvalgte kompetanser

I det foregående delkapittel har jeg sett på aspekter ved representasjonskompetanse, strategikompetanse og forklaringskompetanse i elevenes arbeid. Jeg vil nå drøfte disse resultatene.

I andre del av oppgaven skulle elevene flytte på sifrene. Elevene hadde ikke muligheten til å kopiere lærerens strategier, da ikke dette ble gjennomgått på tavla. I tredje del av oppgaven skulle elevene addere de tre tallene. Marit, som ble presentert for addisjonsalgoritmen av lærer, hadde brukt denne. Likevel har hun regnet feil i noen av de aktuelle utregningene. I Rutenettoppgaven viser hun ikke at hun har ferdigheter i å bruke prosedyrer i addisjon korrekt. Likevel kan det være at hennes feil svar skyldes regnefeil, og ikke misoppfatning. Forskjellen mellom feil og misoppfatninger skriver flere om, deriblant Brekke (1995) som sier at en feil kan komme mer eller mindre tilfeldig fordi man ikke er oppmerksomme nok, mens bak misoppfatninger ligger en bestemt tenkning og de er ikke tilfeldige.

Dersom hennes feil svar skyldes misoppfatning, og hun dermed ikke kan bruke strategiene korrekt og kan variere mellom ulike strategier så har hun en lav strategifleksibilitet, som Ostad (2003) har skrevet om. For at hun skal bli en god strategibruker er det derfor vesentlig at hun er aktivt engasjert med å kontrollere løsningene (Ostad, 2003) og at hun lærer å variere strategiene etter ulike hensikter. Det at Marit regner feil kan skyldes at jeg observerer henne, og under andre omstendigheter kan det tenkes at hun ville ha regnet dette korrekt.

Marit uttrykker hennes feil svar slik: "det ble jo sånn da". Dette kan peke i den retning at hun har en instrumentell forståelse. Dette innebærer at hun har brukt regler uten begrunnelse, i motsetning til at hun vet hva hun gjør og hvorfor, altså relasjonell forståelse av Mellin - Olsen, som sitert i Skemp (1989). Disse begrepene er oversatt fra henholdsvis "instrumental understanding" og "relational understanding".

Dersom hun, i følge University of North Carolina at Chapel Hill (2012) hadde hatt en mer utviklet tallforståelse kunne det ha hjulpet henne til å løse det aktuelle problemet konseptuelt heller enn prosedyrisk. Hart et al. (1981) skriver at elevene gjør en rekke feil i beregningen som er ganske spesifikk til en spesiell prosedyre. Dette ser ikke ut til å indikere mye om elevens generelle forståelse av denne operasjonen (Hart et al., 1981). Det ser ut som at Marit har memorisert addisjonsalgoritmen, så gjør hun noen feil, og siden hun kun har en instrumentell forståelse, vet hun ikke hva som er galt med det hun har gjort. Star og Glasser (2005) skriver at elever som kun memoriserer en standardalgoritme ikke vet hvorfor den virker, og en slik kunnskap, er i følge Hiebert og Carpenter, og Hiebert og Lefevre i Star og Glasser (2005) lett glemt og lite fleksibel. Det kan se ut til at hun mangler kunnskap om posisjonssystemet.

Det at hun heller ikke har resonnert over resultatene, viser at hun ikke rettferdiggjør sine svar, som er en del av det jeg har kalt for forklaringskompetanse. I denne sekvensen kunne det vært mer snakk og refleksjoner omkring hennes resultater, men det var det ikke. Hun kunne ha sett at noe måtte være galt i hennes utregning, siden hun fikk en lavere sum, da hun adderte høyere tall, og vist at hun hadde kunnskap om posisjonssystemet, og dermed vist tallforståelse (University of North Carolina at Chapel Hill, 2012). Hadde Marit hatt en velbrukt forklaring og rettferdiggjøring kunne hun kanskje forklart hvorfor hun fikk et slikt svar, og kanskje også sett at noe måtte være galt med hennes utregninger. Hun viser derfor ikke en høy dekningsgrad innenfor forklaringskompetansen slik som jeg har definert den, som også innebærer det som Kilpatrick et al. (2001) har kalt for adaptiv begrunnelse. Det kan komme av at det ikke er blitt lagt opp til dette i undervisningen.

Henningsen og Stein (1997) snakker blant annet om faktorer som påvirker elevenes implementering. Dette kan for eksempel være klasseromsnormer som forventninger om hvordan akademisk arbeid blir gjort. Mine data peker i den retning at Marit ikke ser på forklaringer og rettferdiggjøring som en del av klasseromsnormene.

Selv om Marit har brukt samme strategi som læreren vil jeg ikke karakterisere dette som en direkte kopi av han. Min oppfatning er at standardalgoritmer er noe som elevene har brukt mye tid på i skolen. Det er derfor stor grunn til å tro at Marit ville ha brukt standardalgoritmen i addisjon selv om ikke læreren hadde brukt den.

Marit viste heller ikke store aspekter ved representasjonskompetansen, blant annet fordi hun ikke har valgt blant et spekter av representasjoner, og omdannet mellom ulike representasjoner (Duval, 2006). Det kan se ut til at hun har brukt rutenettet fordi det var det læreren sa de skulle gjøre, og at hun ikke har gjort noe mer med den aktuelle oppgaven.

Jørgen viser at han har kompetanse innenfor det å bruke prosedyrer akkurat og passende i Rutenettoppgaven. Dette kan komme av at addisjon er en regneart som er innført tidlig i skolen, noe et av kompetansemålene for 2. årstrinn vitner om. Der står det at elevene skal bruke varierte regnestrategier for addisjon. Dette er da med tosifrede tall (Utdanningsdirektoratet, 2012b). Det kunne vært interessant å sett på hvilke andre strategier Jørgen kunne ha brukt i dette addisjonsstykket, og da kanskje spesielt sett på hoderegningsstrategier. Dette kunne vært nyttig blant annet for å sett hvilke strategier i addisjon som Jørgen har lært, eller "funnet opp selv" gjennom hele sin obligatoriske skolegang. I akkurat denne oppgaven var det ikke behov for å bruke ulike strategier, men Jørgen kunne bruke en algoritme som var effektiv, noe som er en av egenskapene til slike algoritmer.

Jørgen har brukt rutenettet som representasjon, men viser ikke at han kan omdanne mellom ulike representasjonssystem, slik som Duval (2006) snakker om. Han viser heller ikke at han kan velge blant et spekter av ulike representasjoner, noe som kan komme av at det ikke har vært prioritert av læreren. Dette betyr ikke at Jørgen ikke har representasjonskompetanse, men at det ikke ble lagt opp til det akkurat her. Dette vil jeg si mer om i det neste kapittelet.

Selv om han ikke sa mye i arbeid med Rutenettoppgaven, betyr ikke dette at han ikke forstår. Som Kilpatrick et al. (2001) sier, kan elevene ha konseptuell forståelse før de kan verbalisere denne. Likevel er det vanskelig for meg å si noe om hans strategibruk da han ikke har verbalisert dette. Selv om ikke Jørgen verbaliserer sine refleksjoner, kan det være at han reflekterer. Dersom oppgaven hadde blitt lagt opp til mer kommunikasjon, kunne disse refleksjonsprosessene blitt mer stimulert (Hiebert, 1992). Selv om det å uttrykke seg muntlig er viktig i matematikk, så kan ikke dette alltid være i fokus. Elevene må også lære å jobbe individuelt og å stimulere egne tankeprosesser.

## 4.3 Mønsteroppgaven

Til nå har jeg undersøkt og diskutert Rutenettoppgaven. Her vil jeg undersøke og diskutere de samme punktene med hensyn til Mønsteroppgaven.

### 4.3.1 Potensial introdusert av lærer

I Mønsteroppgaven skal også jeg ta for meg de ulike delene ved oppgaven hver for seg. Elevene fikk beskjed om at de skulle skrive svaret slik læreren gjorde, da han presenterte oppgaven, som var den første delen etter min inndeling. 2 -tallet i 121, som er produktet av $11 * 11$, skulle stå under 1, som er produktet i det første stykket, $1 * 1$.

> **2. 117 Lærer:** (...) *Skriv svaret som jeg gjør. Ser dere hvordan jeg gjør det? 2 rett under. (...) Midt i svaret under.*

Dette har å gjøre med representasjonen som læreren legger opp til. Denne representasjonen kan bli sett på som en ytre manifestasjon av et matematisk begrep, som for eksempel en grafisk representasjon (Friedlander & Tabach, 2001). Akkurat i dette stykket skulle elevene representere produktet på en slik måte som læreren gjorde. Dette kan være med på å gi en begrensning i elevenes bruk av representasjoner, da læreren til en viss grad har vist at mønsteret kommer til å se ut omtrent slik han har representert det på tavla. Samtidig kan det være en hjelp for elevene da læreren viser hvordan det kan skrives, for de elever som for eksempel kan ha problemer med å komme i gang.

Når det gjelder antall mulige løsningsstrategier i Mønsteroppgaven, ble det ikke sagt noe om hvilken strategi elevene skulle benytte seg av for å finne de neste tallene. Læreren sa ingenting om elevenes strategier, men spurte elevene hva de neste stykkene var, hva de neste produktene var og om det var noe system. I utgangspunktet kunne elevene bruke den løsningsstrategien de ville for å finne svar på dette stykket, og oppgaven var ikke begrenset til å gjelde en strategi.

Med hensyn til den matematiske forklaringen som læreren ga muligheter for slik oppgaven ble introdusert, hadde elevene muligheter til å forklare mønsteret ved å bruke et muntlig språk da læreren stilte spørsmål. Elevene satt i toergrupper, og kunne kommunisere med hverandre i disse gruppene. Læreren legger opp til at elevene kan forklare hvilket tall som er de neste som skal multipliseres, hvilke produkter dette gir og hvilket system det er. Dette har også med representasjoner å gjøre, og innebærer blant annet det verbale slik det står skrevet i Friedlander og Tabach (2001).

> **2. 136 Lærer:** *Det er vakkert, er det ikke? (mumling i klassen). Er det noe system? (...)*

Han stiller også spørsmål om hva som skjer med en oppgave som har flere ett - tall.

> **1. 303 Lærer:** *Hva forventer du i oppgave 8 nu?*
>
> **1. 309 Lærer:** *Hvordan skal vi forvente det blir dersom vi ikke har tre tall men ti, elleve og tolv 1-tall? Vi skal ikke gjøre det nå, men det kan dere gjøre i høstferien.*

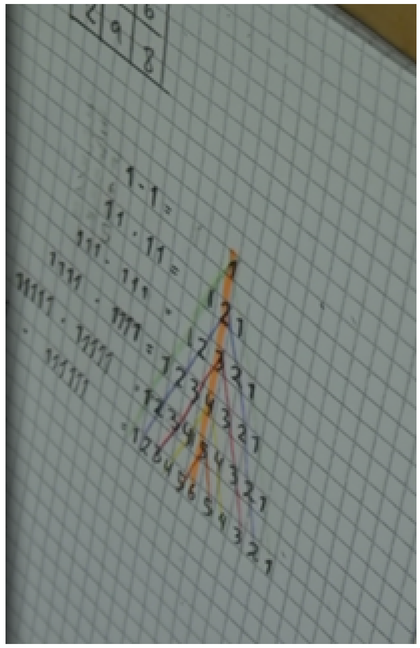
Likevel er disse spørsmålene en mindre del av oppgaven enn de kunne ha vært, og de to siste spørsmålene blir heller ikke svart på, men blir stående som ubesvarte spørsmål i klassen. Oppgaven i seg selv gir altså muligheter til argumentasjon på et høyere nivå, men slik oppgaven ble introdusert av læreren og lagt opp til i undervisningen ble ikke dette prioritert av læreren. Læreren har heller brukt tid på å finne ut hva de neste multiplikandene, multiplikatorene og produktene er.

### 4.3.2 Aspekter ved utvalgte kompetanser

Jeg vil nå se på aspekter ved utvalgte kompetanser som Jørgen og Marit viste i Mønsteroppgaven.

#### 4.3.2.1 Representasjons- og forklaringskompetanse

Elevene ble fortalt at de skulle skrive svarene slik som læreren hadde gjort det, da han introduserte Mønsteroppgaven. Dette innebar at midten i svaret



Figur 4.4: Jørgen sin representasjon i Mønsteroppgaven

alltid var over hverandre. Jørgen hadde også skrevet de ulike produktene på denne måten, og det kan være en av grunnene til at han kan svare på lærerens spørsmål om hvilket system det er blant tallene.

> **2. 136 Lærer:** *Det er vakkert, er det ikke? (mumling i klassen) Er det noe system? (Jørgen rekker opp hånda) Jørgen?*
>
> **2. 138 Jørgen:** *Ja, det er det. Nedover så er det 1 2 3 4 5 og så er det på en måte pyramide med 1erne og 2erne også 3ere.*

Dette er slik Jørgen valgte å representere dette systemet ved bruk av et muntlig, verbalt språk. Han kunne forklare hvordan mønsteret var, som er uttrykkssiden ved kommunikasjonen. Han valgte også å representere dette mønsteret grafisk, ved å tegne linjer mellom tallene i de ulike produktene. Han tegnet da en strek mellom de like tallene og det midterste tallet i hvert produkt, som vist i Figur 4.4, og fikk det som han kalte for en pyramide.

Jørgen viser at han forstår måten å representere produktene på som læreren har lagt opp til, og at han kan bruke og se nytten av andre representasjoner enn den læreren hadde presentert. Han viser at han kan omdanne mellom ulike representasjoner, og har slik jeg ser det, omdannet mellom muntlige forklaringer, skriftlige utregninger og grafiske representasjoner. Dette viser han ved at han har tegnet streker, som i Figur 4.4, mellom de ulike produktene, og laget seg en enkel "skisse" over hvordan mønsteret er. Hans dekningsgrad av representasjonskompetansen er derfor god. Dette kan komme av at læreren har lagt opp til akkurat denne representasjonen i klassen.

Marit og naboeleven jobber sammen med Mønsteroppgaven. Læreren ber elevene regne oppgave $1111 * 1111$ og $11111 * 11111$ og skrive "svarene under slik som vi har gjort". Marit og naboeleven snakker sammen, og følgende samtale finner sted:

**1. 293 Marit:** *Det går liksom oppover*
**1. 294 Elev:** *Ja. 1234321*
**1. 295 Marit:** *Sykt*
**1. 296 Elev:** *Rart*

Marit forklarte det aktuelle mønsteret ved å bruke hennes naturlige språk (Duval, 2006) og sa "Det går liksom oppover", altså hennes snakket språk (Lesh et al., 1987). Hun har likevel stoppet halvveis i mønsteret, dersom man kun ser det fra å lese fra venstre, og sier ikke noe videre om at det går nedover igjen. Dersom hun ser mønsteret som en representasjon av at det går oppover mot midten, med hensyn til hvordan produktet står skrevet, blir forklaringen hennes mer korrekt i forhold til slik mønsteret er. Likevel ser det ut til at naboeleven forstår hva hun mener, og responderer slik "Ja. 1234321". Hun kan altså kommunisere sine ideer, som er en del av det å kunne uttrykke seg muntlig i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2012a). I akkurat denne sammenhengen gjør hun seg forstått ovenfor sin naboelev, og på den måten kan man si at hun viser aspekter ved forklaringskompetanse. Likevel ville nok forklaringen hennes vært mangelfull i andre sammenhenger. En kan dermed si at hun viser en middels stor dekningsgrad innenfor denne kompetansen, basert på de data jeg har.

Marit kan derfor til en viss grad forklare mønsteret, noe som kan komme av at elevene ble fortalt å representere mønsteret på en bestemt måte. Hun har forklart mønsteret med utgangspunkt i representasjonen som læreren la opp til.

#### 4.3.2.2 Strategikompetanse

Etter at produktene til $1*1$, $11*11$, $111*111$ , $1111*1111$ og $11111*11111$ var funnet, oppsummerte læreren ved bruk av noen setninger, og sa i gruppe 1 "Det er jo system i galskapen". Deretter ba han elevene legge vekk kalkulatoren og regne $111*111$ på papiret. Dette er den fjerde delen av oppgaven etter min inndeling. Marit skrev opp oppgaven.

**1. 321 Marit**: $1*1$ *blir jo (...) Nei, jeg får ikke til.*

**1. 322 Elev:** *Det blir jo* 1.

**1. 323 Marit:** *Alt blir jo bare* 1. 1 *ganger* 1 *er* 1. 1 *ganger* 1 *er* 1.

Marit fortsetter med at "Jeg vet ikke hvordan jeg regner det på papiret. Jeg får jo bare alt til å bli 1. Det blir tre 1-ere". Marit viser at hun tror at hun skal få svaret etter den første utregningen og glemmer at hun må flytte utregningene mot venstre i neste steg, på grunn av at det da er snakk om 10ere og ikke 1ere.

Læreren har lagt merke til at det er noen i klassen som strever med multiplikasjonsalgoritmen, og han valgte å la en elev vise dette på tavla. Deretter fikk elevene i oppgave å regne ut $121*121$, da 121 er produktet av $11*11$, og da Marit var ferdig med å gjøre utregningene som i Figur 4.5, så fulgte denne samtalen:

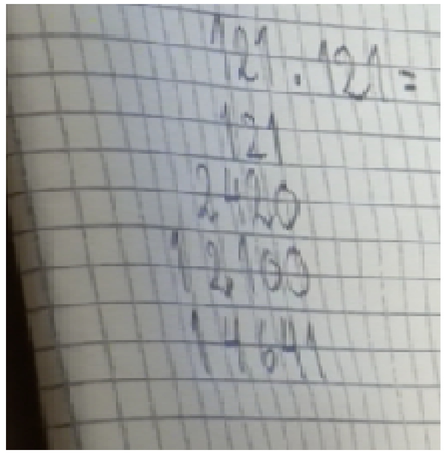
**1. 345 Marit**: *Lærer, er det her riktig?*

**1. 346 Lærer**: *Ja, bra. Det er bra. Den hjelpa du har gjort her er glimrende.*

**1. 347 Marit**: *Det er lettere å se det.*

**1. 348 Lærer**: *Selvfølgelig...*

**1. 349 Marit:** *... Enn det er åpent rom, for da...*




Figur 4.5: Marit satte inn 0 i multiplikasjonsalgoritmen

***1. 350 Lærer:*** *... Ja, klart det er det. Veldig bra. (...) Vi løfter blikket litt alle sammen (Læreren øker stemmen). Også ser vi hva [elev] gjør.*

(...)

**1. 353 Lærer:** *Ho Marit hadde en glimrende ide, for at ho ikke skulle sette (...) det her på feil plass. Hva gjorde du?*

**1. 354 Marit:** *Jeg satte inn 0.*

**1. 355 Lærer:** *Kom og vis.*

Marit hadde satt inn 0 der det ble åpent rom ved bruk av multiplikasjonsalgoritmen, for å gjøre det enklere for seg selv å se hva en skal gjøre og holde oversikt. Først hadde Marit glemt hvordan hun skulle bruke multiplikasjonsalgoritmen, men da hun fikk en kort gjennomgang på tavla så husket hun hvordan den var. Marit viser med dette at hun er litt usikker med hensyn til strategier, men også at hun er utrygg på hennes egen kompetanse. Dette har både med strategikompetanse og produktiv orientering å gjøre, slik som Kilpatrick et al. (2001) har definert det. Det at Marit søker bekreftelse fra læreren, kan tyde på at hun er usikker eller ønsker ros.

Jørgen sin strategikompetanse i Mønsteroppgaven er det vanskelig å si noe om basert på de data jeg har samlet inn.

### 4.3.3 Diskusjon av aspekter ved utvalgte kompetanser

I Mønsteroppgaven har Marit gitt uttrykk for at hun kunne se det aktuelle mønsteret, samt representere og forklare dette muntlig. Hun viste altså at hun hadde en viss kompetanse innenfor representasjoner og forklaringer. Hun har likevel forklart dette mønsteret ved bruk av et uformelt hverdagsspråk, noe en av hennes ytringer viser: "det går liksom oppover". Siden oppgaven hadde høyere potensial enn det hun har brukt, har hun ikke utnyttet alle aspekter ved den aktuelle oppgaven. Hun kunne for eksempel ha forklart og rettferdiggjort for dette mønsteret ved å fremsette et generelt bevis, som er den ene tilnærmingen til algebra, som Radford (1996) snakker om. Det at hun ikke har jobbet med oppgavene på et høyere nivå kan komme av at det ikke ble lagt opp til dette i akkurat denne undervisningsøkten.

Selv om Marit har vist at hun til en viss grad kan forklare, rettferdiggjøre og representere det aktuelle mønsteret, har hun vist til et mønster som læreren i stor grad har introdusert for de ved at elevene måtte skrive tallene akkurat slik han gjorde det. Selv om det er viktig med ulike representasjoner, og at læringen ifølge Duval (2006) ligger i skiftet mellom representasjoner, er det ikke nok at læreren forteller om dette. Elevene må også få muligheten til å jobbe med egne representasjoner og forklaringer, og da er lærerens rolle å legge til rette for dette. Læreren må altså, som tidligere nevnt, bestemme hvilke aspekter ved oppgaven som skal fremheves (Silver et al., 2009).

Marit hadde problemer med multiplikasjonen i denne oppgaven. Star (2012) skriver at flere undersøkelser viser at for mange elever mangler prosedyrisk fleksibilitet (oversatt fra "procedural flexibility"). Mange elever kan bare algoritmene mekanisk og har dermed vanskeligheter når de møter ukjente problem. Dette kunne ha vært tilfelle for Marit. Likevel viser hun senere at hun behersker multiplikasjonsalgoritmen. Det ser dermed ut til at Marit først hadde glemt hvordan multiplikasjonsaloritmen skulle brukes, men så "husket" hun den igjen når den ble gått igjennom på tavla, noe som kan indikere at hun har en instrumentell forståelse (Mellin-Olsen som sitert i Skemp, 1989). Som i Rutenettoppgaven kan det tenkes at hennes feil svar skyldes feil og ikke misoppfatning. Marit viser senere at hun kan multiplisere, og hun setter også inn et "0" i utregningene for å holde styr på hvor i multiplikasjonen hun er.

Dette "0"-tallet som hun plasserer i multiplikasjonsalgoritmen blir brukt for at "det er lettere å se det", som hun selv sier. Det at de ulike svarene skal forskyves en plass mot venstre, kan i følge Breiteig og Venheim (2005) være utfordrende for elevene. Marit ser ut til å ha funnet en måte å gjøre denne utfordringen enklere for seg selv.

Dersom Marit hadde vært ensidig i sin strategibruk innenfor en lengre tidsperiode, ikke bare denne økten som jeg har undersøkt og de fire ukene jeg observerte klassen, kunne dette ha skyldtes strategirigiditet (Ostad, 2003). Siden hun gjør en del feil, både med multiplikasjonsalgoritmen og da hun skulle addere, i den forrige oppgaven, kunne det vært interessant å undersøkt hennes strategibruk over en lengre tidsperiode og i arbeid med flere oppgaver. Selv om jeg kun har undersøkt hennes strategibruk i to oppgaver, kan jeg likevel si at hun er lite fleksibel i sin strategibruk.

Hun kunne for eksempel ha vurdert sine egne svar, uten å spørre læreren om hjelp, ved for eksempel å ha brukt andre strategier for å sjekke eget svar. Dette har blant annet med "self-assessment" å gjøre, som Black, Harrison og Lee (2003) snakker om.

I Mønsteroppgaven viser Jørgen at han kan bruke "pyramiden" som representasjon for å si hvordan mønsteret er og at han kan forklare mønsteret. I denne oppgaven var det mer refleksjoner og rettferdiggjøringer ifra Jørgen sin side, noe som blant annet kan komme av at Jørgen var en av elevene som svarte på lærerens spørsmål som ble stilt til hele klassen. Det at han veksler mellom representasjoner som muntlige forklaringer, skriftlige utregninger og grafiske representasjoner viser at han kan omdanne mellom ulike representasjoner, som Duval (2006) snakker om.

Jørgen hadde både brukt samme representasjon som læreren, og han hadde representert det aktuelle mønsteret på en annen måte enn det læreren opprinnelig hadde gjort. Han hadde videreutviklet den opprinnelige representasjonen ved at han tegnet streker mellom tallene. Hadde Jørgen kunne sett dette mønsteret selv om læreren ikke hadde sagt at elevene skulle skrive produktene akkurat slik han gjorde det? Eller har læreren redusert de kognitive nivåene, slik som Henningsen og Stein (1997) snakker om, og gjort det slik at Jørgen lettere kunne kopiere lærerens representasjoner, og utvikle de litt videre? Dersom en kun studerer Jørgen sine forklaringer og hans representasjon på papiret kan det se ut til at dette er en gutt som vet å bruke ulike representasjoner for ulike hensikter, som er en karakteristikk ved representasjonskompetanse. Men, dersom man ser Jørgen sine forklaringer og representasjoner i kontekst, ser en at det han har gjort er ganske identisk med det læreren har gjort, og det kan godt tenkes at Jørgen ikke ville forklart mønsteret slik og tegnet linjer der han gjorde dersom læreren ikke hadde introdusert oppgaven på en slik måte.

Hverken Marit eller Jørgen har brukt et algebraisk symbolspråk for å beskrive dette mønsteret, eller laget et generelt bevis for hvordan mønsteret kan representeres. Dette kan komme av at dette ikke var i fokus hos læreren da han introduserte oppgaven, og at elevene ikke gjør noe mer med oppgavene. Som tidligere nevnt, er ifølge Mason (1996) generalisering hjertet i matematikk. Selv om elevene har forklart mønsteret, har de ikke fremsatt et bevis for hvorfor dette er gyldig.

Jeg tror nok elevene kunne ha sett dette mønsteret selv om ikke læreren hadde bedt de skrive produktene akkurat slik, men det hadde nok tatt lengre tid. Dette har med faktorer som kan påvirke elevenes implementering, som Henningsen og Stein (1997) snakker om. Elevene hadde kanskje også valgt å bruke andre representasjoner og forklaringer dersom læreren ikke hadde bedt elevene skrive produktene slik han gjorde det. Lærerens introduksjon er derfor vesentlig med tanke på hvordan elevene velger å angripe oppgaven, og hvilke aspekter med oppgavene som elevene fremhever. Det er likevel ikke sikkert at elevene ville tatt i bruk ulike representasjoner og forklaringer, da de ikke var bevisste på dette. Dette har med sosiomatematiske normer å gjøre, som blant annet Yackel og Cobb (1996) snakker om. Dette vil jeg ta for meg mer nøye i kapittel 5.

## 4.4 Oppsummering av funn

Til nå har jeg sett på hvilket potensial oppgavene hadde i seg selv, hvordan læreren introduserte de, med hensyn til representasjoner, strategier og forklaringer, og hvilke aspekter ved utvalgte kompetanser: representasjonskompetanse, strategikompetanse og forklaringskompetanse elevene viste.

Marit har vært utrygg i arbeid med standardalgoritmer i addisjon og multiplikasjon, og har fått en del feil svar. Det at hun ikke kan forklare hva hun har gjort feil og resonnere over sine svar, viser at hun ikke har forklaringskompetanse på et høyere nivå. Hun har heller ikke gjort så mye mer med oppgavene, og har ikke omdannet mellom ulike representasjonsformer.

Jørgen viser at han har representasjonskompetanse, da han har omdannet mellom ulike representasjoner i Mønsteroppgaven. Han har forklart mønsteret, og viser altså aspekter ved forklaringskompetansen.

I Rutenettoppgaven har han gjort slik han fikk beskjed om ved at han har flyttet på tallene og deretter addert disse. Her var det lite forklaringer av han. Dette betyr ikke at han ikke kan forklare, men at det er vanskelig å si noe om dette basert på de data jeg har. Han har brukt algoritmen i addisjon korrekt, passende og effektivt, og viste altså at han hadde strategikompetanse. Han har brukt rutenettet som representasjon, men viser ikke at han kan omdanne mellom ulike representasjoner.

Elevene har vist at de jobber med oppgavene slik læreren la opp til og de gjør ikke så mye mer med oppgavene. Med hensyn til de mulighetene oppgavene hadde i seg selv, og hvordan elevene jobbet med disse, er oppgaveegenskapene, blitt redusert ved implementering, noe blant annet Henningsen og Stein (1997) snakker om i forbindelse med de kognitive kravene. Elevene har ikke brukt blant et spekter av representasjoner, strategier og forklaringer, men i stor grad brukt de samme som læreren. Kort oppsummert har jeg funnet ut dette:

- Marit og Jørgen viser ulike aspekter ved strategikompetanse, forklaringskompetanse og representasjonskompetansen.

- Marit og Jørgen gjorde ikke mye mer med oppgavene enn de mulighetene læreren hadde lagt opp til.
- Marit og Jørgen jobbet med oppgavene på måter som er like lærerens introduksjon.

Kapittel 5

# Oppsummering og perspektivering

Mine funn peker i den retning at elevene jobbet med oppgavene på måter som læreren la opp til, og i noen situasjoner så det ut til at elevene kopierte lærerens metoder. Dette har med klasseromskulturen å gjøre. Derfor er det også aktuelt å se nøyere på spørsmålet om elevene viser aspekter ved kompetanse eller om de kopierer læreren, ved å se på klasseromsnormer (Yackel & Cobb, 1996) og "habits of mind" (Lim & Selden, 2009) for å forstå mine funn. Deretter vil jeg drøfte viktigheten av min forskning med hensyn til klasseromspraksis, forskningsfeltet og videre forskning. Deretter kommer jeg med noen kritiske punkt til egen forskning, og helt til slutt noen avsluttende kommentarer.

## 5.1 Aspekter ved kompetanse eller kopi av læreren?

I analyse - og drøftingskapitelet har jeg trukket frem flere situasjoner der elevene har gjort det samme som læreren. Dette betyr ikke at elevene ikke viser aspekter ved de utvalgte kompetansene. Det betyr heller ikke at elevene kun kopierer det arbeidet læreren gjør. Det kan bety at de eksemplene læreren ga på tavla, og aspekter med oppgavene han valgte å fremheve, ga noen muligheter og/eller begrensninger for elevene. Dermed jobbet elevene med oppgavene på måter som var like slik læreren introduserte de.

Om elevene viser aspekter ved kompetanse eller om de kopierer læreren, er ikke lett å gi et generelt svar på, og jeg mener dette blant annet avhenger av hvilket arbeid elevene gjør. Med dette mener jeg at dersom elevene for eksempel bruker standardalgoritmer når de skal multiplisere eller addere, og dette er også noe læreren har brukt i sine introduksjoner i klassen, er ikke dette nødvendigvis en kopi av læreren. Dette vil jeg begrunne med at min oppfatning er at standardalgoritmer er mye brukt i skolen og blir innført tidlig. Likevel, dersom elevene alltid gjør oppgaver slik som læreren gjør de, og aldri gjør noe mer eller noe annerledes med oppgavene, vil ikke elevene utvikle seg til selvstendige matematikere, men vil være avhengig av det læreren gjør. Elevene vil da etter min mening, mangle noe i sin helhetlige matematiske kompetanse, og de vil ikke utvikles som selvregulerte elever.

På samme måte mener jeg at dersom elevene kopierer lærerens prosedyrer, uten å vite hvorfor, vil de mangle noe i forhold til elever som kopierer lærerens metoder, men også vet hva som ligger bak. Dersom elevene kopierer læreren uten å vite hvorfor, vil jeg si at elevene til en viss grad kopierer læreren, mens elever som også vet hva som ligger bak viser aspekter ved kompetansen, selv om de også har gjort som læreren la opp til. Det viktige mener jeg er å se på hvilke aspekter ved kompetansen som elevene viser, og om elevene forstår det arbeidet de gjør som er nært knytt opp mot det læreren la opp til, og ikke om elevene "hermer" etter læreren.

Dette viser at læreren har en viktig rolle, som jeg tidligere har tatt for meg. I Hiebert et al. (1997) står det at elevene må utvikle deres egne løsningsmetoder, og at læreren må tillate og hjelpe elevene til å jobbe med deres egne metoder. Elevenes muligheter for å konstruere matematisk forståelse vil dermed øke (Hiebert et al., 1997, s.47). For at elevene skal kunne gjøre dette, må det være en kultur i klassen som tillater nye metoder, og som legger opp til at elevene bruker andre metoder.

## 5.2 Viktigheten av klasseromsnormer

Om elevene kopierer læreren eller ikke, har sammenheng med klasseromskulturen og de sosiomatematiske normene å gjøre, mener jeg, og da er Yackel og Cobb (1996) sitt arbeid nyttig å trekke frem.

En normativ forståelse av hva som teller som matematisk ulikt, matematisk sofistikert, matematiske effektivt og matematisk elegant i klasserommet er sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996). Dersom det er en kultur i klassen som vektlegger forståelse og refleksjon, kan det være at elevene gjerne vil stille spørsmål ved det de gjør og tenke videre med hensyn til de aktuelle oppgavene. Dette innebærer da en type sosiomatematisk norm i klassen. Dersom kulturen er mer prosedyrisk, vil kanskje elevene kun gjøre det de får beskjed om, og ikke mer, noe som innebærer en annen type sosiomatematisk norm i den aktuelle klassen. Hva som for eksempel teller som en matematisk forklaring og rettferdiggjøring er en sosiomatematisk norm (Yackel & Cobb, 1996).

Mine funn peker i den retning at elevene svarer på de spørsmål som læreren stiller, og ikke tar oppgavene til nye høyder. Dette innebærer da de sosiomatematiske normene med hensyn til forklaringer og rettferdiggjøringer som er forventet i den aktuelle klassen.

For at elevene skal utvikle kompetansen videre, kan det være nyttig at det er en kultur i klassen som fokuserer på representasjoner, strategier og forklaringer. Jeg tror ikke man skal forvente at elevene tar utgangspunkt i dette dersom det ikke blir lagt opp til og elevene er blitt gjort oppmerksomme på det. Dette vil jeg knytte til det som har med matematiske "habits" å gjøre. Ideen til "mathematical habits of mind" er å hjelpe elevene å tenke på matematikken som matematikere gjør (Lim & Selden, 2009), og ble i følge Lim og Selden (2009) introdusert av Cuoco, Goldenberg og Mark. Læring i matematikk er ikke bare algoritmer, løsning av problem og kommunikasjon, men det er å gjøre dette til en del av elevens "habits", slik at de kan tenke på matematikken som matematikere gjør.

## 5.3 Implikasjoner for praksis

Min studie kan hjelpe lærere til å si noe om hvilke aspekter ved de utvalgte kompetansene som kan sees i elevenes arbeid. Analysene mine gir et detaljert bilde av to elevers kompetanse i arbeid med de to oppgavene gitt på 10.trinn.

I tillegg peker mine funn på at lærerens introduksjon har stor betydning for hvilke muligheter som ligger i oppgavene, og dermed også hvilken kompetanse elevene får muligheten til å utvikle. Mange forskere, deriblant Anthony og Walshaw (2009a), har prøvd å gitt en guide for hvordan undervisningen best skal gjennomføres for å sikre kompetanseutvikling. De nevner for eksempel at effektive lærere gjør det mulig med en klasseromsdialog som er fokusert mot matematisk argumentasjon og at elevene må lære seg å rettferdiggjøre deres løsninger. I tillegg må en gi elevene tilgang til flere representasjoner for å hjelpe dem til å utvikle konseptuell og beregningsorientert fleksibilitet (Anthony & Walshaw, 2009a). Effektiv undervisning blir altså, i følge Anthony og Walshaw (2009a, 2009b) kjennetegnet ved at det må legges opp til rettferdiggjøring og flere representasjoner, noe som har vært mitt fokusområde i denne oppgaven.

De har også et prinsipp som har med verdifulle oppgaver å gjøre. Dette prinsippet innebærer at effektive lærere forstår at oppgavene og eksemplene de velger påvirker hvordan elevene viser, utvikler og bruker matematikken (Anthony & Walshaw, 2009b). Læreren har dermed en viktig rolle med hensyn til å velge ut oppgaver som skal gjøres. Derfor kan det å undersøke oppgaver gitt i undervisning, være hensiktsmessig for å forstå hvordan elevene bruker matematikken.

Dersom oppgavene hadde blitt introdusert litt annerledes, ville dette selvsagt gitt andre implikasjoner for praksis, og de utvalgte kompetanser kunne både vært mindre og mer vektlagt. Jeg vil ta for meg noen av disse implikasjonene, da det er nyttig å kunne se på ulike måter å presentere oppgaver på, da dette har ulik betydning for hva som faktisk skjer i klasserommet.

I Rutenettoppgaven kunne det tenkes at elevene ville ha plassert tallene annerledes dersom de på forhånd hadde visst at målet var å komme nærmest tallet 1000 da de adderte disse tallene. Elevene kunne da ha tatt i bruk kunnskap om posisjonssystemet da de plasserte tallene. De kunne dermed ha vist kompetanse innenfor bruk av strategier helt fra starten av, og ikke bare løsningsstrategier, som addisjon. Dersom oppgaven hadde blitt presentert slik, hadde oppgaven hatt et helt annet formål. De kunne prøvd å få et tall som var så nært tallet 1000 helt fra starten av, og da hadde det ikke vært så mange muligheter å flytte tallene på.

I Rutenettoppgaven var det fokus på at elevene skulle dele sine resultater, altså summen som var nærmest tallet 1000, på tavla. Her kunne det ha vært et større fokus på hva elevene gjorde og hvordan de tenkte da de flyttet tallene, altså forståelse av prosessene, heller enn et fokus på resultatet og den aktuelle summen. Elevene kunne for eksempel ha rettferdiggjort sine svar, som er en del av forklaringskompetansen. Dette er også viktig fordi det har med en av de grunnleggende ferdigheten i faget som elevene skal utvikle i deres skolegang, som innebærer å uttrykke seg muntlig (Utdanningsdirektoratet, 2012a).

Også i Mønsteroppgaven kunne det ha vært et større fokus på forklaring og rettferdiggjøring, som er en viktig del av matematikkfaget. Dette er en oppgave, som nevnt i kapittel 4, hadde store potensial med hensyn til forklaringer og rettferdiggjøringer. Elevene kunne også prøvd å representere dette mønsteret annerledes. De kunne ha bevist hvordan de neste produktene ville se ut, og generalisert deres løsninger med et matematisk symbolspråk (Duval, 2006; Radford, 1996).

## 5.4 Studiens bidrag på forskningsfeltet og videre forskning

Som tidligere nevnt, finnes det mange definisjoner av begrepet kompetanse, og det finnes mange ulike delkompetanser og komponenter alt etter hva som skal måles. Mine undersøkelser i dybden av tre av disse utvalgte kompetansene er dermed et bidrag på forskningsfeltet innenfor dette området. Jeg har ikke sett andre studier som har undersøkt disse to oppgavene i detalj, derfor er også dette et nyttig bidrag på forskningsfeltet. Det er likevel andre oppgaver det kunne ha vært interessant å undersøke med hensyn til de utvalgte kompetanser, men det kunne også vært interessant å studere disse oppgavene med hensyn til andre kompetanser. Dette er noe det kan forskes videre på.

Sammenhengen mellom delkompetansene til Niss et al. (2002), komponentene til Kilpatrick et al. (2001) og Henningsen og Stein (1997) sine faser som oppgavene går igjennom, er en kobling som ikke er ferdig undersøkt. Dette gjør at også mitt arbeid er et bidrag på forskningsfeltet, men mitt bidrag er ikke nok for å se på denne sammenhengen.

I analyse - og drøftingsdelen har jeg undersøkt oppgavene i seg selv, oppgavene slik læreren introduserte de, og hvordan elevene jobbet med oppgavene, noe som tilsvarer de ulike fasene i Mathematical Tasks Framework (Stein et al., 1996; Henningsen & Stein, 1997). Mine analyser av de to oppgavene viste at de hadde forholdsvis høye potensialer med hensyn til det matematiske og didaktiske. I introduksjonen av de to oppgavene hadde læreren valgt ut noen aspekter ved oppgavene som han har villet fremheve, og alle de mulighetene som oppgavene hadde i seg selv, har ikke blitt fremhevet, noe som blant annet kan komme av de faktorene som påvirker introduksjonen (Henningsen & Stein, 1997) som jeg tok for meg i teorikapittelet. Elevene jobbet ikke med alle aspektene som oppgavene hadde i seg selv, da de jobbet med oppgavene etterpå. Dette kan ha med de ulike faktorene som kan påvirke implementeringen (Henningsen & Stein, 1997), som jeg også tok for meg i teorikapittelet. Henningsen og Stein (1997) fant ut at oppgavers kognitive kraver ofte ble redusert ved implementering, blant annet som følge av de ulike faktorene (Henningsen & Stein, 1997). Oppgavene trengte altså høyere kognitiv aktivitet slik de var i seg selv, enn det elevene brukte da de faktisk jobbet med disse. I denne rapporten har jeg hatt fokus på oppgaveegenskapene, og i mine analyser har jeg sett at disse oppgaveegenskapene, med hensyn til representasjoner, strategier og forklaringer, er redusert ved implementering. Oppgavene hadde dermed større potensial slik de var i seg selv med hensyn til representasjoner, strategier og forklaringer, i forhold til hvordan elevene jobber med disse oppgavene. Det er viktig å poengtere at disse oppgaveegenskapene har sammenheng med de kognitive kravene, selv om jeg ikke har undersøkt disse. Mitt fokus på oppgaveegenskaper, heller enn kognitive krav er dermed et bidrag på forskningsfeltet.

## 5.5 Metodekritikk

I denne rapporten har jeg kun hatt fokus på to elever. Disse elevene er ikke representative elever, hverken fra den aktuelle klasse, eller skole, men heller ikke for elever på samme trinn. Disse er likevel valgt da data fra disse var detaljerte og analyserbare.

Siden elevene satt i toergrupper hadde jeg også data fra Marit og Jørgen sine naboelever. Disse elevenes arbeid med oppgavene kunne jeg også analysert, for å få et større bilde av aspekter ved utvalgte kompetanser elevene viste i arbeid med disse oppgavene. Jeg valgte derimot å ikke ta med naboelevene. Dette valgte jeg å gjøre fordi Marit og Jørgen i større grad var dominerende i opptakene jeg gjorde, blant annet fordi de satt nærmere meg og snakket høyere enn sine naboelever. Dersom jeg hadde grepet inn i observasjonene kunne jeg ha flyttet på elevene, samt stilt de to naboelevene spørsmål og dermed fått mer data om disse.

Min studie har hatt som hensikt å studere aspekter ved utvalgte kompetanser som elevene viste i to oppgaver, heller enn et overflateblikk av flere oppgaver. Derfor har jeg ikke data som sier noe om elevenes kompetanse på et generelt grunnlag i matematikk, altså den helhetlige matematiske kompetansen, slik som Matematikksenteret (2012) skriver.

Det har ikke vært til hensikt å vurdere læreren og lærerens undervisning. Mitt fokus har som sagt vært på utvalgte kompetanser, som jeg har definert, og ikke på kompetanser og mål som læreren har hatt. Dette gjør at samspillet mellom hva som er lærerens intensjon og hvilke kompetanse man kan se i elevenes arbeid med hensyn til dette ikke har latt seg svare i akkurat denne oppgaven. Selv om jeg har tatt utgangspunkt i aktuell teori (Niss et al., 2002; Kilpatrick et al., 2001) for å finne kompetansene jeg undersøkte, heller enn å ta utgangspunkt i lærerens mål, gir det mening å studere kompetansene som jeg har gjort. Dette er nyttig fordi, som tidligere nevnt, flere representasjoner, ulike strategier og matematiske forklaringer er en del av kognitiv fleksibilitet (Silver & Stein, 1996) og er viktige i matematikkfaget. Ulike representasjoner og forklaringer er viktige for å kunne kommunisere ulike aspekter ved matematikken og å kunne bruke ulike strategier er vesentlig fordi ingen problem er like.

## 5.6 Avsluttende kommentarer

I denne oppgaven har jeg undersøkt hvilke potensial Rutenettoppgaven og Mønsteroppgaven hadde i seg selv og de representasjoner, strategier og forklaringer læreren la opp til i introduksjonen. Jeg har også undersøkt hvilke aspekter ved utvalgte matematiske kompetanser, representasjonskompetanse, strategikompetanse og forklaringskompetanse som elevene viste i arbeid med disse oppgavene.

Mine funn pekte i den retning at Marit og Jørgen viste ulike aspekter ved kompetansen i de ulike oppgavene, de gjorde ikke så mye mer med oppgavene enn de mulighetene læreren la opp til, og de jobbet med oppgavene på måter som var like med slik læreren introduserte de. Dette har jeg blant annet knyttet til klasseromsnormene i denne 10. klassen.

Hvilke aspekter ved matematisk kompetanse som kan sees i elevenes arbeid med noen oppgaver er ikke bare betinget av hvilke potensial oppgavene hadde i seg selv. Lærerens introduksjon av oppgavene har stor betydning for hvordan elevene jobber med disse. For at elevene skal utvikle høy matematisk kompetanse er det ikke bare nok å gi de "vanskelige" oppgaver. Det som er viktig er hvordan læreren introduserer disse oppgavene, og hvordan elevene jobber med disse, da det er dette arbeidet de lærer fra (Hiebert et al., 1997).

# Referanseliste


Anthony, G. & Walshaw, M. (2009a). Characteristics of effective teaching of mathematics: A view from the west. *Journal of Mathematics Education*(2), 147-164.

Anthony, G. & Walshaw, M. (2009b). *Effective pedagogy in mathematics.* International Academy of Education IAE and the International Bureau of Education IBE.

Arbaugh, F. & Brown, C.A. (2005). Analyzing mathematical tasks: A catalyst for change? *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(6), 499-536.

Black, P.J., Harrison, C. & Lee, C. (2003). *Assessment for learning: Putting it into practice.* Maidenhead: Open University Press.

Bommel, J., Liljekvist, Y. & Ottersten-Nylund, C. (2012, mai). *The KOM project and adding it up through the lens of a learning situation.* Tilgjengelig fra `http://www.math.kau.se/jorrbomm/research/madif%20final%20100119.pdf`

Breiteig, T. & Venheim, R. (2005). *Matematikk for lærere 1.* Oslo: Universitetsforlaget.

Brekke, G. (1995). Oppfatninger av desimaltall. *Nämneren*(4), 27-34.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg.). London: Routledge.

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research*, *53*(2).

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students thinking during instruction. *Educational Psychologist*, *23*(2).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. I A. Cuoco (red.), *Yearbook of the national council of the teachers of mathematics: The roles of representations in school mathematics* (s. 173-185). Reston, Virginia: The Council.

Goldman, S.R. (1989). Strategy instruction in mathematics. *Learning Disability Quarterly*, *12*(1), 43-55.

Gulbrandsen, J.E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2008). *Nye mega 10a.* Oslo: Cappelen Damm.

Häggström, J. (2006). Chapter nine: The introduction of new content: What is possible to learn? I D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka & I. Mok (red.), *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world* (s. 185-199).

Sense Publishers.

Hart, K., Brown, M., Kuchemann, D., Kerslake, D., Ruddock, G. & McCartney, M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* John Murray.

Henningsen, M. & Stein, M.K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.

Hiebert, J. (1992). Reflection and communication: Cognitive considerations in school mathematics reform. *International Journal of Educational Research*, *17*(5), 439-456.

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H. et al. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding* (J. Hiebert, red.). Portsmouth N.H.: Heinemann.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, *30*(2).

Jacobsen, D. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser?* (2. utg.). Kristiansand S.: Høyskoleforlaget.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics.* Washington, DC.: National Academy Press.

KUF. (1996). *Læreplanverket for den 10 - årige grunnskole.* Oslo: Det Kongelige Kirke, Utdannings og forskningsdepartementet. Nasjonalt læremiddelsenter.

Kvale, S. (1997). *Det kvalitative forskningsintervju* (1. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. I C. Janvier (red.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (s. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lim, K. & Selden, A. (2009). Mathematical habits of mind. *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *5*, 1576-1583.

Lincoln, Y.S. & Guba, E.G. (1985). *Naturalistic inquiry.* Sage.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I C.K. N. Bednarz & L. Lee (red.), *Approaches to algebra* (s. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (2011, November). Explicit and implicit pedagogy: variation theory as a case study. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *31*(3).

Matematikksenteret. (2012, mai). *Læreplan og kompetanser.* Tilgjengelig fra `http://www.matematikksenteret.no/content/1162/Lareplan-og-kompetanser`

Mayer, R.E., Sims, V. & Tajika, H. (1995). A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in japan and the united states. *American Educational Research Journal*, *32*(2), pp. 443-460.

Niss, M. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. I B.L. Madison & L.A. Steen (red.), *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (s. 215-220). Natonal Council on Education and the Disciplines Princeton, New Jersey.

Niss, M., Højgaard Jensen, T., Bai Andersen, T., Wåhlin Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S. et al. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i danmark* (M. Niss & T. Højgaard Jensen, red.). Roskilde Universitetscenter.

Ostad, S.A. (2003). Strategiopplœring i matematikk. *Tangenten*(2), 21-25.

Pape, S.J. & Tchoshanov, M.A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, *40*(2), 118 - 27.

Postholm, M.B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to algebra* (s. 107-111). Kluwer Academic Publishers.

Røsseland, M. (2005). Hva er matematisk kompetanse? *Tangenten*, *1*, 12-18.

Siegler, R.S. & Jenkins, E.A. (1989). *How children discover new strategies.* Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Silver, E.A., Ghousseini, H., Charalambous, C.Y. & Mills, V. (2009). *Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction* (J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann & G. Lloyd, red.). Routledge.

Silver, E.A. & Stein, M.K. (1996). The quasar project: The "revolution of the possible" in mathematics instructional reform in urban middle schools. *Urban Education*, *30*(4), 476-521.

Skemp, R., R. (1989). *Mathematics in the primary school.* London: Routledge.

Star, J. (2012, mai). *Students' use of standard algorithms for solving linear equations.* Tilgjengelig fra `http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic654907.files/PMENA05.pdf`

Star, J. & Glasser, H. (2005). *Investigating the development of students knowledge of standard algorithms in algebra.* Tilgjengelig fra `https://www.msu.edu/~glasserh/research/mathematical_flexibility/SA_paper.pdf`

Stein, M.K., Grover, B.W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-88.

Stein, M.K. & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation: An International Journal on Theory and Practice*, *2(1)*, 50-80.

Stein, M.K., Smith, M.S., Henningsen, M.A. & Silver, E.A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development* (2. utg.). N.Y.: National Council of Teachers of Mathematics.

Thagaard, T. (2003). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode.* Bergen: Fagbokforlaget.

UiO. (2012a, mai). *Om pisa.* Tilgjengelig fra http://www.pisa.no

UiO. (2012b, mai). *Timss. timss advanced.* Tilgjengelig fra http://www.timss.no/

University of North Carolina at Chapel Hill. (2012, mai). *Number sense.* Tilgjengelig fra http://www.learnnc.org/reference/number+sense

Utdanningsdirektoratet. (2012a, mai). *Grunnleggende ferdigheter for grunnskolen.* Tilgjengelig fra http://www.udir.no/Lareplaner/Grep/Modul/?gmid=2

Utdanningsdirektoratet. (2012b, mai). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Tilgjengelig fra http://www.udir.no/Lareplaner/Grep/Modul/?gmid=0&gmi=167443&v=5

WolframAlpha. (2012, Mars). *Palindrom.* Tilgjengelig fra http://www.wolframalpha.com/input/?i=palindrom\&x=8\&y=3

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

# Vedlegg

På grunn av at jeg ikke har tillatelse fra alle elevene i klassen til å observere dem, har jeg valgt å kun ta for meg noen av de ytringene som læreren kommer med i presentasjonen av oppgaven, og ikke det som elevene sier, bortsett fra Jørgen. Introduksjonen er i stor grad en klassesamtale og ikke lærermonolog. Noen av ytringene til læreren er rettet mot enkeltelever, disse er heller ikke tatt med her.

### Vedlegg A

# Rutenettoppgaven i gruppe 1

l. 175: **Lærer:** *I løpet av timen så legger vi frem innføringen. Så kan det være at noen av dere vil ta testen. Det er en del som har begynt å tatt den. Dere vet hva den går ut på? Hva er det vi må øve mer på, eller nå begynner det å bli bra slik at jeg kan ta prøve (...) Men, papir og blyant klar ja. Det er det eneste vi skal ha nå. (...)*

*l. 179:* ***Lærer:*** *Så tar vi og tegner et rutenett med tre kolonner og tre rekker, som vi sier et regneark (pause) (Læren tegner opp dette på tavla) (...) Hvor mange ruter er det nå?*

l. 185: **Lærer:** *Nå må vi finne tak i noen tall. De tallene vi får opp nå skal dere plassere i en rute. Spiller ingen rolle hvor. Jeg setter tallene i noen ruter, også setter dere dem akkurat hvor dere vil. Vi kan starte med [elev], jeg skal ha et tall. Gi meg ett tall som er mindre enn 10, altså mellom 1 og 9.*

l. 190: **Lærer:** *Jeg setter 7 her. Spiller ingen rolle hvor dere setter. Poenget er at dere ikke setter der jeg setter. Ikke sett likt.* (Han får tall av noen av elevene. Læreren fortsetter med å få et tall fra 9 ulike elever til sammen. Læreren skriver dette i sin tabell på tavla, mens elevene fyller ut sine rutenett).

l. 203: **Lærer:** *Da har alle ett tall i hver rute. Vi vet jo at vi leser fra venstre mot høyre. Sånn at, nå har alle tre tall. Jeg har 586, 329. Dere har selvfølgelig noen andre tall. I ett tall så er det* *nå til oss tre siffer. I hvert tall, det er tre tall, en to tre, så har dere nå lov til å bytte siffer.(. . . ) Kan bytte 4 og 7 da får jeg 714. Man kan bytte 7 og 1 da får man 471. Nå skal dere bytte sifrene så dere kommer så nært tallet 1000 som mulig når dere legger sammen disse sifrene (skriver på tavla samtidig). (. . . ) Hver for dere uten kalkulator.*

Vedlegg B

# Mønsteroppgaven i gruppe 1

1. 264: **Lærer:** *Da sørger vi for at det er i hvert fall en kalkulator på hvert bord.* (. . . ). (Læreren går rundt og sjekker at alle har kalkulator)

1. 266: **Lærer:** *Spesielt etter jul, for ikke å snakke om etter vinterferien, såeh, kommer vi til å kjøre repetering, og vi kommer til å kjøre repetering i form av å se på tidligere eksamensoppgaver. Vi skal drøfte (. . . ) Noen eksamensoppgaver er annerledes enn dere er vant til. Dette er en oppgave som dere aldri har hatt på en prøve. Så sånt sett er den lagt unna en prøve. Men dere kan godt få en slik oppgave på eksamen. (. . . ) 1 ganger 1 er lik 1. (...) Ja, det må jo bli 11 ganger 11. (pause) Hva blir 11 ganger 11?*

1. 285: **Lærer:** 11 ganger 11 er lik 121. 12 ganger 12 er lik hundre og førti [Elev: 4 ]

1. 289: **Lærer:** *Nå tar dere (. . . ). Her er oppgave I og II og III. Regn oppgave IV. Regn oppgave V*

1. 291: **Lærer:** *Skriv svarene under slik som vi har gjort.*

1. 303: **Lærer:** (. . . ) *Hva forventer du i oppgave 8 nu?*

1. 306: **Lærer:** *Det er jo hærlig! Det er jo system i galskapen! (. . . ) Ja, vi stopper der nu. (...)*

*1.309:* ***Lærer:*** *Hvordan skal vi forvente det blir dersom vi ikke har tre tall men ti, elleve og tolv 1- tall. Vi skal ikke gjøre det nå, men det kan dere gjøre i høstferien.*

1. 312: **Lærer:** *Men, poenget mitt er at noen ganger kan det kommer frem et system, som dere nå sikkert så, alle sammen. Og for eksempel det her er ingen eksamensoppgaven, men det kunne ha vært det. Det står 3 oppgaver, også skriv svaret på oppgave 8, altså dersom du har åtte 1-tall. Åtte 1- tall ganget med åtte 1-tall. Uten kalkulator selvfølgelig (. . . ) Kanskje ikke så dumt det. Snu kalkulatoren opp ned slik at dere ikke får til å brukt den. Ta å regn ut oppgaven på papiret. Ta og regn og vis meg at dere kan få det svaret i oppgave 3.*

## Vedlegg C

# Rutenettoppgaven i gruppe 2

2. 31: **Lærer:** *Nå tegner vi opp et kvadrat som vi deler i 3. (Han tegner et kvadrat på tavla). Så vi får 3 rekker og 3 kolonner. (Pause i 38 sek). (De to elevene jeg observerer tegner opp dette). Lag dere tre kolonner og tre rekker. (...). Hvor mange ruter blir det der da, [elev]?*

2. 36: **Lærer:** *Ja, det blir det. (Pause) Da skal vi finne til noe tall som er mindre enn 10. Det vil si mellom 1 og 9. (...)*

*2. 37: **Lærer:** Når dere sier tallene, så plasserer dere dem der akkurat der dere vil. Ingen noen gode grunner til at dere plasserer dem likt. Kom med ett tall. (Læreren spør en ny elev for hvert tall og plasserer tallene i rutenettet).*

2. 54: **Lærer:** *Da har alle fylt sine 9 ruter. Vi leser selvfølgelig fra venstre mot høyre.*

*2. 55: **Lærer:** Det vil si det står tre tall her nå. 528, 163, 479 står det, til meg. Til dere står det selvfølgelig annerledes.*

*2. 56: **Lærer:** Vi har tre tall her nå. De tallene her skal vi få lov til å flytte. Vi kan flytte på samme rekke. (...) Vi kan ikke flytte opp og ned. Vi kan kun flytte mellom sifrene i de tre tallene. Ta å flytt dem slik at vi kommer nærmest tallet 1000 når vi summerer de 3 tallene deres. Skjønte dere hva det går ut på?*

2. 63: **Jørgen:** *Er det bare under 1000 eller kan det være litt over?*

2. 64: **Lærer:** *Ja, så nærme som mulig. Godt spørsmål egentlig, for visst jeg sier opp til så skal det være mindre, men nå sier jeg så nærme som mulig.*

2. 87: **Lærer:** *Når dere er ferdig, når dere er sikker på at dere har funnet. Skriv tallene dere har kommet frem til på tavla. (...) Skriv det dere har funnet ut på tavla.*

2. 96: **Lærer:** *Selvfølgelig er det ikke noe rett eller feil svar, fordi det er jo ingen som har samme tall. Men egentlig så er det en god trening for tallforståelse. Hvordan må vi endre sifrene for å komme så nærme 1000 som mulig?*

# Mønsteroppgaven i gruppe 2

2. 112: **Lærer:** *Hvor mye er 11 * 11 da?*

2. 117: **Lærer:** *Ja, 121. Skriv svaret som jeg gjør. Ser dere hvordan jeg gjør det? 2 rett under. (...) Midten i svaret under. Ta dere litt tid. Hva er systemet her? Hva er det neste to tallene som skal ganges sammen da?*

2. 123: **Lærer:** *Ja, 111*111. Enn etter den da?*

2. 131: **Lærer:** *Dersom noen har oppgave 5 enere så skriver du dette på tavla.* (De mangler ett tall på tavla, de diskuterer litt hvem det er som mangler. De finner ut at læreren har skrevet feil på tavla).

2. 136: **Lærer:** *Det er vakkert er det ikke?* (mumling i klassen). *Er det noe system?* (Jørgen rekker opp hånda) Jørgen?

2. 138: **Jørgen:** Ja, det er det. Nedover så er det 1 2 3 4 5 og så er det på en måte pyramide med 1erne og 2erne også 3ere.

2. 159: **Lærer:** Hva skjer etter der igjen? Hva skjer når vi har elleve ett tall og tolv ett tall?