Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Hanne Hegerberg

Matematikkens historie i læring og undervisning av matematikk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Iveta Kohanova
Mai 2021

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Hanne Hegerberg

Matematikkens historie i læring og undervisning av matematikk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Iveta Kohanova
Mai 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Masteroppgavens tema er «matematikkens historie i læring og undervisning av matematikk», og handler om hvordan en kan undervise i matematikk med en historisk tilnærming. Forskning viser at det er mange positive fordeler for elevenes læring, ved å inkludere matematikkens historie i matematikkundervisningen. Det er imidlertid et gap mellom forskning og praksis, og det trengs mer forskning på hvordan en kan inkludere matematikkens historie i undervisningen. Studiens formål var derfor å undersøke på hvilken måte elever på 10.trinn gjenoppdager den formelle matematikken, innenfor temaet algebra og likninger, i en undervisningsøkt med en historisk tilnærming.

Det teoretiske rammeverket som ble valgt for studien, var «Realistisk matematikkundervisning» av Hans Freudenthal. Rammeverket ble benyttet i planlegging av undervisningsopplegget, og analyse av datamaterialet. Studien har benyttet den kvalitative forskningsmetoden; aksjonsforskning, der Lærer også var forsker. Det ble planlagt og gjennomført et undervisningsopplegg, hvor det ble skrevet observasjonsnotater, og samlet inn skriftlige elevbesvarelser. Det ble også tatt lydopptak av elevenes diskusjoner. Dataene ble analysert med tanke på elevenes aktivitet, og matematisering i undervisningen.

Matematikkens historie kan se ut til å kunne bidra positivt i elevenes gjenoppdaging av formell matematikk, ved at en historisk tilnærming ga en god situasjon for elevene å finne mening til og aktivt matematisere innenfor. Elevene utøvde progressiv matematisering, der det var sammenheng mellom horisontal og vertikal matematisering. Samtlige elever gjenoppdaget den formelle matematikken innenfor temaet algebra og likninger, ved at de generaliserte og viste forståelse for bruken av, og formålet med, algebraisk notasjon. Elevene klarte, med utgangspunkt i praktiske problemer fra oldtidens Egypt, å sette opp, tolke og løse likninger.

Abstract

The theme of the master's thesis is «the history of mathematics in learning and teaching mathematics» and is focusing on how one can teach mathematics with a historical approach. Research shows that there are many positive benefits to students' learning to include the history of mathematics in mathematics teaching. However, there is a gap between research and practice, and more research is therefore needed on how to include the history of mathematics in the teaching. The purpose of the study was therefore to investigate the way in which students in the 10th grade reinvents the formal mathematics within the topic algebra and equations, in a teaching session with a historical approach.

The theoretical framework chosen for the study was «Realistic Mathematics Education» by Hans Freudenthal. The framework was used in planning the teaching session, and in the analysis of the data material. The study has used the qualitative research method; action research. The teacher was also the researcher in the study. A teaching session was planned and carried out, where observation notes were written, and written student answers were collected. Audio recordings were also made of the students' discussions. The data were analysed with regard on the students' activity and mathematizing in the teaching session.

The history of mathematics may seem to be able to make a positive contribution to students' reinvention of formal mathematics, in that a historical approach provided a good situation for the students to find meaning and actively mathematize within. The students carried out progressive mathematizing, where there was a connection between horizontal and vertical mathematization. All students reinvented formal mathematics in the subject of algebra and equations, by generalizing and showing understanding of the use and purpose of, algebraic notation. Based on practical problems from ancient Egypt, the students were able to set up, interpret and solve equations.

Forord

Masteroppgaven er gjennomført i år 2020-2021, og markerer slutten for min femårige lærerutdannelse. Jeg kan se tilbake på en flott studietid, til tross for at siste året bar preg av koronapandemi og nedstengning. Utdanningen har vært lærerik og gitt god kompetanse på mange områder, som jeg kan ta med meg inn i læreryrket. Arbeidet med masterstudien har vært krevende, men svært lærerikt. Jeg har fått fordype meg i et tema av stor interesse, som jeg samtidig opplever at det ikke er et stort fokus på i skolen.

Jeg vil rette en stor takk til alle elevene som deltok i undervisningsopplegget, og til skolen og faglærer for at jeg fikk komme. Det var ingen selvfølge at jeg fikk komme på besøk til en skole, og gjennomføre en praksisnær studie hvor jeg selv virket som lærer. Heldigvis ble koronastengte skoler gjenåpnet slik at det lot seg gjøre.

En stor takk til veileder, førsteamanuensis Iveta Kohanova ved NTNU, for alle konstruktive og gode tilbakemeldinger underveis i prosessen.

Jeg vil også takke mine medstudenter for gode diskusjoner, samt min samboer for å ha gitt meg støtte og motivasjon i arbeidet.

Hanne Hegerberg

Mai 2021

Trondheim

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser

MH	Matematikkens historie
RME	Realistisk matematikkundervisning

1 Innledning

Å integrere matematikkens historie (MH) i matematikkundervisningen har vært aktuelt og argumentert for siden andre halvdel av 1900-tallet. På begynnelsen av 2000-tallet fikk området fornyet interesse som konsekvens av debatten omkring hva matematikk er og innebærer (Clark, Kjeldsen, Tzanakis & Wang, 2016; Vittori, 2018). Forskere over hele verden har de siste tiårene bekreftet at MH har stor relevans i matematikkundervisningen (Vittori, 2018), og trekker frem flerfoldige argumenter for hvorfor MH bør inkluderes. Noen av argumentene er at MH er en god kilde til interessante kontekster, problemer, metoder og bevis, som gir mulighet for å undersøke og utvikle kreative metoder, og løsningsstrategier (Gulikers & Bloom, 2001). MH kan dermed virke som en motiverende faktor og øke interessen for læring. Ved å lære om MH kan elevene få et nytt og dypere syn på hva matematikk er, der matematikk ikke lengre er en statisk ting, men noe som er levende og i stadig utvikling (Clark et al. 2016). Matematikere fra ulike kulturer har brukt flere tusen år på å forme matematikken til det vi kjenner i dag. Kunnskap om at denne prosessen har vært lang og problematisk, kan bidra til å ufarliggjøre matematikken for elevene (Jankvist, 2009).

MH i matematikkundervisningen kan ses i sammenheng med Freudenthal's teori om «Realistisk matematikkundervisning» (RME). Begrepet «Realistisk» innenfor RME blir betegnet som en situasjon som oppleves som meningsfull for elevene, og som inviterer til delaktighet (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). En historisk kontekst kan eksempelvis utgjøre en realistisk situasjon som elevene kan leve seg inn i, og finne mening i. Clark et al. (2016) trekker frem at matematikkundervisning bør gi elevene muligheten til å «gjøre matematikk». I tillegg er det et viktig moment at elevene går gjennom de samme stegene som matematikere har gjort gjennom historien (Gulikers & Bloom, 2001; Jankvist, 2009). Det henger sammen med RME sitt begrep «reinvention», som handler om å gå stegene til historiens matematikere, og selv gjenoppdage matematikken gjennom matematisering (Gravemeijer & Doorman, 1999). Matematisering er all den aktivitet som handler om å organisere enhver form for virkelighet med matematiske midler (Freudenthal, 1991). Formålet med undervisningen er å skape optimale muligheter for å utvikle formell matematisk kunnskap (Gravemeijer & Doorman (1999).

Om MH er passende, og til og med relevant i undervisning og læring av matematikk, er et problemområde som, sett bort i fra mye forskning og innputt de siste årene, fortsatt ikke har nådd en allmenn aksept (Clark et al. 2016). Forskning viser tydelig hvorfor en bør inkludere MH i matematikkundervisningen, og beskriver metoder for hvordan en kan gjøre det (Gulikers & Bloom, 2001; Jankvist, 2009; Clark et al. 2016). Det er imidlertid anerkjent at det finnes et gap mellom forskning på matematikkundervisning og undervisningspraksis (Wang, Wang, Li & Rugh, 2018). Inspirerende tanker hjelper ikke læreren med det praktiske problemet om hvordan en skaper gode undervisningsopplegg for elevene. En lærer må gjøre utfordrende og nøysomme valg omkring hvilken historisk periode og problem en skal ta utgangspunkt i, det matematiske formålet, de ikke-matematiske formålene og didaktisk verktøy (Gulikers & Bloom, 2001).

Med bakgrunn i manglende forskning, samt utfordringer omkring hvordan en i praksis kan benytte MH i undervisningen, har jeg gjennomført en aksjonsstudie, der jeg undersøker hvordan elever på 10.trinn involveres i, og matematiserer innenfor et undervisningsopplegg med en historisk tilnærming. Undervisningsopplegget tar utgangspunkt i Jankvist (2009) sin teori om en modul-tilnærming for å inkludere MH, og planlegges ut ifra Freudenthal's teori om RME. Studien vil forsøke å svare på følgende forskningsspørsmål:

På hvilken måte gjenoppdager elevene den formelle matematikken innenfor temaet algebra og likninger, i en undervisningsøkt med en historisk tilnærming?

Fokuset ble rettet mot elevenes involvering, matematisering og gjenoppdaging av den formelle matematikken, fordi elevers handlinger og læring ga informasjon omkring undervisningen. Elevenes delaktighet og matematisering viste om undervisningsopplegget presentert i studien, var en god måte å gjennomføre matematikkundervisning som inkluderer MH.

2 Teori

Forskning omkring MH i læring og undervisning av matematikk, beskriver mulige tilnærminger for hvordan en kan inkludere MH i matematikkundervisningen (Gulikers & Bloom, 2001; Jankvist, 2009; Clark et al. 2016). Studien har tatt utgangspunkt i Jankvist (2009) sin beskrivelse av MH sin rolle i undervisningen, samt mulige tilnærminger en kan ha for å inkludere MH. Jankvist (2009) skriver at det er behov for forskning der de ulike tilnærmingene blir testet i praksis. Studien er et bidrag til forskningen omkring MH, ved at det tar utgangspunkt i en rolle og tilnærming, for å inkludere MH i matematikkundervisningen. Studien har med utgangspunkt i Jankvist (2009) og benyttelse av teorien om RME, utformet et undervisningsopplegg, gjennomført det i praksis og analysert resultatene. Fokuset i studien er rettet mot elevenes matematisering og gjenoppdaging av den formelle matematikken, fordi det gir informasjon om undervisningsopplegget i studien er en god måte å gjennomføre matematikkundervisning som inkluderer MH.

Teorikapitlet begynner med en redegjørelse av Jankvist (2009) sin teori om mulige roller og tilnærminger en kan ha for å inkludere MH i undervisningen. Deretter gjøres det rede for teorien om RME, der fokuset er rettet mot de tre begrepene; *didaktisk fenomenologi*, *veiledet gjenoppdaging* og *matematisering*. Videre presenteres tidligere forskning omkring temaet; «MH i læring og undervisning av matematikk». Avslutningsvis beskrives kompetansemål, tema og historisk element som er valgt for undervisningsopplegget i studien.

2.1 Matematikkens historie i matematikkundervisningen

Jankvist (2009) argumenterer for at MH kan ha to ulike roller i matematikkundervisningen. Den første er å benytte historien som et didaktisk verktøy for læring av matematikk (historie som verktøy), og den andre er at kunnskapen om historien er et mål i seg selv (historie som mål). Hver av de to kategoriene kan knyttes til ulike argumenter og tilnærmingsmetoder for MH i undervisningen.

2.1.1 Matematikkens historie som verktøy

Argumenter for å benytte MH som verktøy, er at det kan virke som en motiverende faktor for læring, ved at det øker elevenes interesse og engasjement for et tema (Jankvist, 2009). Et annet argument som Jankvist (2009) trekker frem er at matematikken kan virke mindre skremmende på elevene. Utfordringer historiens matematikere har støtt på, er ofte også utfordringer som elevene strever med (Bakker & Gravemeijer, 2006). Gulikers og Bloom (2001) trekker frem at for å lære og mestre matematikk, må en gå gjennom de samme stegene som matematikere har gjort gjennom historien. For læreren kan kunnskap om matematikernes steg og utfordringer de har støtt på, bidra til å forberede og utvikle en hypotetisk læringsbane (Jankvist, 2009). En hypotetisk læringsbane inneholder læringsmål, en plan for læringsaktiviteter og lærerens forestilling om hvilke læringsprosesser elevene kan ha (Simon, 1995). Historien kan også virke som et kognitivt verktøy, ved at det støtter læring av matematikk. Eksempelvis ved at det gir forskjellige vinklinger og representasjoner av en matematisk presentasjon (Jahnke, 2001). En epistemologisk refleksjon rundt utviklingen av ideer i MH, kan bidra til en didaktisk berikelse, ved at en får innsikt i ulike måter å tilegne seg kunnskap (Dorier & Rodgers i Fauvel & van Maanen, 2000).

2.1.2 Matematikkens historie som mål

Det å benytte MH som mål, handler om at læring av MH har et formål i seg selv (Jankvist, 2009). Jankvist (2009) poengterer at det ikke handler om kunnskap om MH som et uavhengig tema, men fokuset er å lære om evolusjonære aspekter ved matematikk som disiplin. Eksempelvis er det et viktig mål å vise elevene at matematikk er noe som eksisterer og utvikler seg gjennom tiden. Gjennom å benytte MH som mål skal elevene få en forståelse for at matematikk er en disiplin som har gått gjennom en utvikling, og ikke noe som har blitt oppfunnet ut av ingenting (Philippou & Christou, 1998). I tillegg skal de få kunnskap om at matematikk har utviklet seg gjennom mange forskjellige kulturer gjennom historien, og at disse kulturene har hatt påvirkning på utformingen av matematikk (Gulikers & Bloom, 2001). Kunnskap om MH er ikke primært et verktøy for å lære matematikk bedre og grundigere, selv om det også kan være en positiv konsekvens (Jankvist, 2009).

En annen måte å beskrive benyttelsen av historie som mål, er at en lærer noe om meta-aspekter og meta-problemer om matematikk (Jankvist, 2009). Altså ved å se på hele disiplinen matematikk. Niss (2010) gir eksempler på spørsmål en kan diskutere, for å undersøke et metaperspektiv på matematikk. Han oppgir følgende spørsmål; hvordan utvikler matematikk seg over tid? Hvilke krefter og mekanismer er til stede gjennom utviklingen? Er matematikk avhengig av kultur, samfunn, tid og sted? Er gammel matematikk også utdatert matematikk? Historie som mål handler om å skape diskusjon omkring hva matematikk er, hvordan det ble utviklet, og hvilke mekanismer som har påvirket utviklingen (Jankvist, 2009). Historien som verktøy skiller seg fra en meta-tilnærming, ved at det handler om indre problemer av matematikk. Det er mer relatert til matematiske konsepter, teorier, disipliner og metoder. Eksempelvis å lære om tallgrupper. Jankvist (2009) skriver at en ikke nødvendigvis trenger å velge mellom å benytte historien som mål eller som verktøy. En kan også benytte begge.

2.1.3 Tre tilnærminger

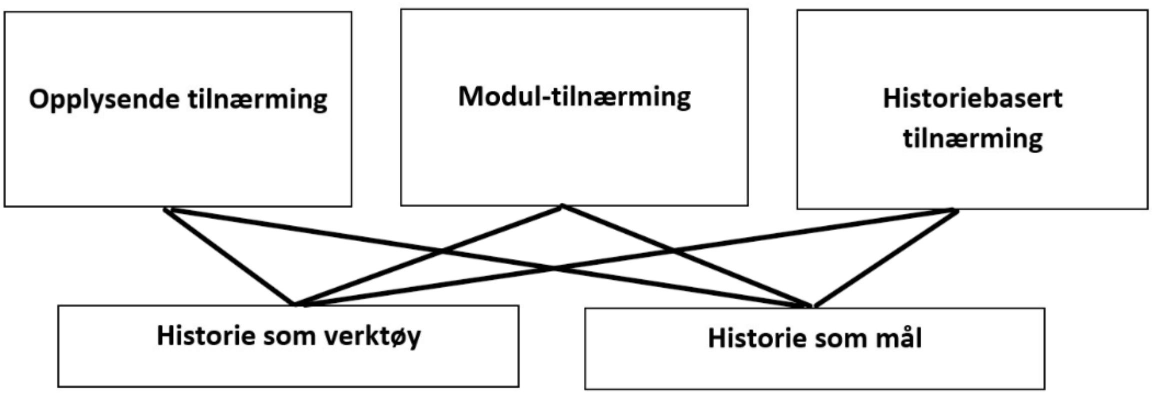
Jankvist (2009) beskriver tre mulige tilnærminger for å benytte MH i matematikkundervisningen. De ulike tilnærmingene er en *opplysnings-tilnærming*, en *modul-tilnærming* og en *historie-basert tilnærming*. Opplysnings-tilnærmingen handler om å benytte historien som «krydder» i matematikkundervisningen. Den historiske informasjonen blir benyttet som et supplement til undervisningen, for å skape interesse. Supplementene kan variere i omfang og størrelse, der de minste kan være navn, datoer, biografier, berømte verk, hendelser, problemer eller spørsmål. Den mest omfangsrike opplysnings-tilnærmingen er historiske epiloger. Termen er hentet fra Lindstrøm (1995) som ved slutten av hvert kapittel har en historisk epilog. En historisk epilog er en seksjon hvor MH presentert i kapitlet, blir utdypet med navn, datoer, motiverende problemer, referanser til originale verk, utviklingsprosess osv. Hvis originale kilder skal bli benyttet innenfor opplysnings-tilnærmingen, er en historisk epilog plassen å gjøre det på. Gjerne i form av små tillegg.

Modul-tilnærmingen baserer seg ofte på caser (Jankvist, 2009). Termen *modul* er hentet fra Katz og Michalowicz (2004), der poenget er at læreren gjennom å benytte eldgamle problemer, kan gi elevene god kompetanse innenfor et tema. Modul-tilnærmingen varierer i størrelse og omfang (Jankvist, 2009). De minste modul-tilnærmingene er hva Tzanakis og Arcavi (2000) refererer til som en kolleksjon av materialer, som er fokusert på mindre tema og med sterk tilknytning til læreplanen. Det er passende for to eller tre klasseroms-perioder. På midten av skalaen finner vi moduler som varer mellom 10-20 økter. Lengre moduler trenger å bli tilknyttet matematiske temaer i læreplanverket, samtidig som de tilbyr muligheten til å studere grener av matematikk, som ikke er gitt i læreplanverket på et gitt trinn (Jankvist, 2009).

Jankvist (2009) trekker frem at måtene å innføre både mindre og større moduler er mange og varierte. De kan eksempelvis innføres gjennom tekstbok-studier, lesing av originale kilder, eller gjennom elevprosjekter. Andre måter kan være gjennom historiske spill, internett, oppgaveark, historiske problem eller mekaniske instrumenter (Fauvel & van Maanen, 2000). De mest omfangsrike modul-tilnærmingene er fulle kurs eller bøker, om MH innenfor et matematisk program (Jankvist, 2009). Et slikt kurs, bok eller program, kan inkludere en samling av historiske data, historien til konseptuelle utviklinger, eller noe imellom. Det kan basere seg på primær- og/eller andrehåndskilder avhengig av nivået på historiestudiet (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Den siste kategorien er en historiebasert tilnærming, der en er direkte inspirert av eller baserer seg på historien og utviklingen av matematikk (Jankvist, 2009). Det er en indirekte tilnærming som ikke direkte er knyttet til MH. Den historiske utviklingen blir ikke diskutert åpent, men setter ordenen for hvordan og i hvilken rekkefølge matematiske temaer blir presentert. Jankvist (2009) trekker frem et eksempel; hvis vi ser på utviklingen av tallgruppene, vil de naturlige tallene være de første som blir lært bort. Videre de positive rasjonale tallene, og deretter positive irrasjonale tall. Til sist vil komplekse tall bli lært bort. Matematikken blir en integrert del i tilnærmingen i seg selv.

Jankvist (2009) fremmer en modell (Figur 1) som illustrerer seks mulige kombinasjoner mellom de ulike tilnærmingene og rollene MH kan ha i matematikkundervisningen. Hver tilnærming kan tilknyttes både historie som verktøy, og historie som mål. Det er også mulig å ha en tilnærming som både har historien som mål, og benytter den som verktøy.



Figur 1: Kombinasjoner mellom de ulike tilnærmingene og de to rollene MH kan ha i matematikkundervisningen (Jankvist, 2009, s. 251)

Studien har benyttet en modul-tilnærming der MH benyttes som verktøy i matematikkundervisningen. Katz og Michalowicz (2004) gir eksempler på ulike moduler, der en av dem handler om lineære likninger. Kjernen i modulen behandler likninger med hensyn til en ukjent og introduserer ulike løsningsmetoder. Eksempelvis den egyptiske metoden for «falsk posisjon», som er basert på estimering og korreksjon. Studien har tatt utgangspunkt i Katz og Michalowics forslag til en modul om lineære likninger, med egypternes metode «falsk posisjon» som historisk element. Deres forslag til modul ble imidlertid kun benyttet som et utgangspunkt, for utviklingen av undervisningsopplegget i studien. MH er ikke et enkelt tema å benytte som verktøy i undervisningen (Barbin, Jankvist & Kjeldsen, 2015). Gulikers og Bloom (2001) skriver at det å analysere og forstå opprinnelige tekster er utfordrende. Læreren må identifisere og rekonstruere problemet slik at det passer til klasseromsettingen. De trekker frem at det er viktig å finne passende spørsmål, slik at elevene blir involvert i den historiske konteksten og problemet. Modulen benyttet i studien tok utgangspunkt i kompetansemålene i LK20, og arbeidsoppgavene ble utarbeidet av forsker for å passe utvalget i studien, som var 10.trinn. Varigheten til modulen var på 2 undervisningstimer (90 min), og ble planlagt ved bruk av teorien om RME.

2.2 Realistisk matematikkundervisning (RME)

Realistisk matematikkundervisning (RME) er en instruksjonsteori, utviklet av tyske forskere (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Hans Freudenthal, som er kjent som videreutvikler av RME, kritiserte tradisjonell matematikkundervisning, og kalte det for en antididaktisk inversjon, hvor sluttresultatet til matematikeres arbeid ble benyttet som startpunkt for matematikkundervisningen (Freudenthal, 1973). Som et alternativ fremmet han at matematikk skal være en aktivitet, og ikke et ferdiglaget system (Freudenthal, 1971, 1973, 1991). Kjernen i RME er at matematikk må anses som en menneskelig aktivitet, der en lærer matematikk ved å aktivt matematisere verden (Freudenthal, 1983). Det henger sammen med at måten menneskeheten utviklet matematisk kunnskap gjennom historien, er den samme som hvordan individer bør utvikle sin matematiske kunnskap (Freudenthal, 1991). Det å lære matematikk karakteriseres som kognitiv vekst, og ikke en prosess av å samle opp biter av ferdig kunnskap (Doorman & Gravemeijer, 2009).

2.2.1 Didaktisk fenomenologi

Freudenthal (1983) introduserte begrepet «didaktisk fenomenologi», der hovedtanken er at matematikkens fenomenologi skal bli ansett fra et didaktisk perspektiv. Fenomenologi beskriver matematiske konsept, strukturer eller ideer som objekter, som settes i relasjon til, samt organiserer, den fysiske, sosiale og mentale verden (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Didaktisk fenomenologi handler om å beskrive matematiske konsept, strukturer og ideer i relasjon til fenomenet de ble skapt i. Freudenthal (1983) fremmer at i stedet for å få ferdiglaget matematikk, bør elevene være aktivt deltakende i læringsprosessen ved å utvikle matematiske verktøy og forståelse selv. Van den Heuvel-Panhuizen (2014) trekker frem flere positive aspekter ved å benytte didaktisk fenomenologi i matematikkundervisningen. Blant annet kan didaktisk fenomenologi informere om hvordan en kan undervise matematikk, samt om hvordan matematiske objekter kan hjelpe med å organisere og strukturere fenomener i virkeligheten. Det kan gi informasjon om hvilket fenomen som kan bidra til å utvikle et spesifikt matematisk konsept, hvordan elever kan komme i kontakt med konseptene, hvordan fenomener kan bli organisert av matematikk, samt hvordan elever kan bli løftet til høyere nivåer. Freudhental's teori om didaktisk fenomenologi kan virke som en grunnsten i utviklingen av undervisningsopplegg. Freudenthal mente at didaktisk fenomenologi kan gi lærere gode situasjoner, hvor elevene kan tre inn i den historiske læringsprosessen til menneskeheten (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014).

RME og didaktisk fenomenologi henger nøye sammen, ved at rike og realistiske situasjoner gis en viktig posisjon i læringsprosessen (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). «Realistisk» blir betegnet som en situasjon, eller kontekst, som oppleves som meningsfull for elevene, og som inviterer til delaktighet. Konteksten elevene introduseres for trenger ikke nødvendigvis å være tatt fra deres liv, men kan være en oppfunnet verden som elevene har erfaring med, kan leve seg inn i, og gi mening til. Et viktig poeng er at oppgavesituasjonen skal oppleves som ekte for elevene (Gravemeijer, 1999). Gravemeijer og Doorman (1999) trekker frem at formålet med undervisningen er å skape optimale muligheter for å utvikle formell matematisk kunnskap. Konteksten som blir valgt skal fungere som et startpunkt for at elevene skal gjenoppdage matematikken selv. I studien ble det benyttet en historisk kontekst som startpunkt, der elevene jobbet med reelle problemer fra oldtidens Egypt.

2.2.2 Veiledet gjenoppdaging

Freudenthal ser på elevenes aktivitet som en måte å gjenoppdage matematikken (Doorman & Gravemeijer, 2009). Det er imidlertid ikke forventet at elevene skal gjenoppdage matematikken av seg selv. Freudenthal (1991) snakker om «*guided reinvention*», som handler om at læreren skal legge til rette for at elevene gjenoppdager matematikken. Elevene skal samtidig føle at det de lærer er kunnskap som de selv har vært ansvarlig for å lære. For at elevene med veiledning skal gjenoppdage matematisk kunnskap må noen normer være på plass (Gravemeijer & Doorman, 1999). Eksempelvis lærer man ikke matematikk ved å gjette hva læreren tenker på, men ved å aktivt finne ut av ting selv. I en tilnærming der gjenoppdaging av matematikk er sentralt, spiller valg av kontekst en viktig rolle (Doorman & Gravemeijer, 2009). Doorman og Gravemeijer (2009) trekker frem at velvalgte kontekster tilbyr muligheter for elevene å utvikle uformelle, og kontekstspesifikke strategier. De uformelle strategiene kan videre fungere som katalysatorer for å avgrense, formalisere og generalisere. Viktige spørsmål som planleggeren av undervisningen kan stille seg er: «hvordan kunne jeg gjenoppdaget dette?». Læreren tar i betraktning sin egen kunnskap og læringserfaring. I tillegg kan en benytte MH som kilde til inspirasjon, og stille spørsmål om: «Hvilke steg gikk matematikkens historikere for å utvikle matematikken?». Gjenoppdaging handler om at elevene skal gå de samme stegene som historiens matematikere, og selv gjenoppdage matematikken gjennom matematisering (Gravemeijer & Doorman, 1999).

En tilnærming til matematikkundervisning der det legges opp til kontekstarbeid hvor elevene skal forsøke å gjenoppdage matematikken, skiller seg fra andre tilnærminger (Doorman & Gravemeijer, 2009). I RME handler det om å utforme en hypotetisk læringsbane for hvordan elevene kan gjenoppfinne formell matematikk. Doorman og Gravemeijer (2009) fremmer at, ideelt sett, utfolder den faktiske læringsbanen seg på en slik måte at den formelle matematikken dukker opp gjennom elevenes matematisering. Gravemeijer (1999) skriver at formell matematikk er noe som vokser frem gjennom elevenes aktivitet. Elevene utvikler formell matematikk gjennom å matematisere deres egne uformelle matematiske aktivitet. For elevene oppleves det ingen forskjell mellom formell og uformell matematikk. Det henger sammen med det Freudenthal (1991) skriver om at matematikk starter og slutter med sunn fornuft. Fornuften utvikler seg sammen med matematikken, siden matematikken er en del av fornuften. Gravemeijer (1999) trekker videre frem at en kan skille mellom formell og uformell matematikk, ved å betegne «formell matematisk resonnering» som en form for resonnering, som bygger på argumenter tilknyttet den matematiske virkeligheten. Uformell og formell matematikk er et relativt skille, som en observatør kan sette i henhold til et bestemt tema.

Undervisningsopplegget utført i studien har tatt utgangspunkt i kompetansemålet «lage, løse og forklare likningsett knyttet til praktiske situasjoner», og det er laget konkrete læringsmål (se planleggingsskjema) som elevene skal jobbe mot. Det er utarbeidet et oppgavehefte som elevene skal arbeide med for å nå læringsmålene for opplegget. Gjennom arbeidet med oppgavene, og med veiledning fra lærer, er målet med undervisningen at elevene skal gjenoppdage den formelle matematikken som utgjør læringsmålene. Formell matematikk som handler om å resonnere innenfor den matematiske verden, vil komme til uttrykk når elevene generaliserer, og benytter algebraisk notasjon til å tolke og løse oppgavene i oppgaveheftet.

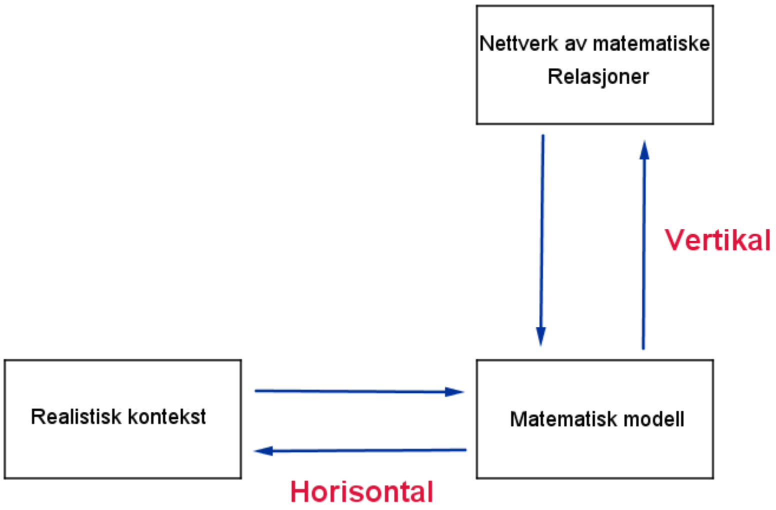
2.2.3 Matematisering

Matematisering handler om å organisere og studere enhver type virkelighet med matematiske midler (Jupri & Drijvers, 2016). Freudenthal (1971) skriver at matematisering involverer både matematisering av hverdagslig innhold og matematisering av matematisk innhold. Det er ingen fundamental forskjell mellom de to, og derfor kan matematikkundervisningen begynne med å matematisere innhold fra den virkelige verden. Med matematisering oversetter man realistiske problemer til den symbolske, matematiske verdenen og omvendt. I tillegg reorganiserer og rekonstruerer man innenfor matematikkens verden. Matematisering kan deles inn i to kategorier; horisontal- og vertikal matematisering (Doorman & Gravemeijer, 2009). Doorman og Gravemeijer (2009) trekker frem at undervisning bør planlegges med tanke på å lage en serie av prosesser med både horisontal og vertikal matematisering, som sammen resulterer i en gjenoppdaging av matematikken man sikter mot.

Doorman og Gravemeijer (2009) beskriver horisontal matematisering som en prosess der man beskriver et kontekst-problem med matematiske termer, for videre å løse problemet med matematiske verktøy. Horisontal matematisering overfører det realistiske problemet til et matematisk problem gjennom observasjon, eksperimentering og induktiv resonnering (Jupri & Drijvers, 2016). Aktiviteter som karakteriseres som horisontal matematisering er eksempelvis å identifisere matematikk i en generell kontekst, skjematisering, formulere og visualisere et problem på forskjellige måter, samt å oppdage relasjoner og sammenhenger. Jupri og Drijvers (2016) trekker frem at det å løse tekstoppgaver og oppgaver som kombinerer symbolske uttrykk og naturlig språk, hører til under horisontal matematisering.

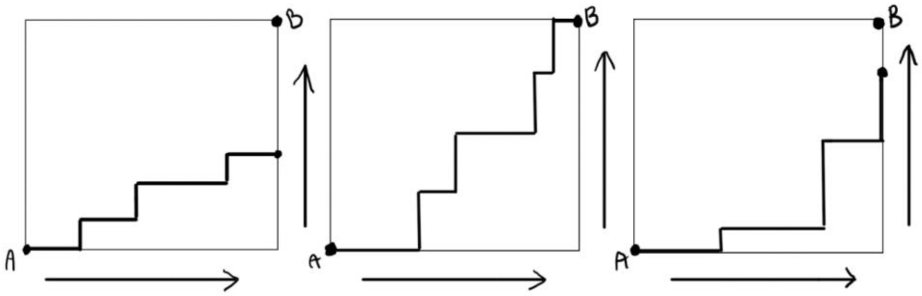
Vertikal matematisering handler om å matematisere sin egen matematiske aktivitet (Doorman & Gravemeijer, 2009). Gjennom vertikal matematisering når elevene et høyere nivå av matematikk. Jupri og Drijvers (2016) skriver at vertikal matematisering er aktivitet der man reorganiserer og rekonstruerer innenfor verdenen av symboler. Det inkluderer å løse problemer, generalisere løsninger og videreføre formaliseringer. Aktiviteter som karakteriseres som vertikal matematisering er eksempelvis manipulering og raffinering av matematiske modeller, benytte ulike modeller, kombinere og integrere modeller, og generalisering (Jupri & Drijvers, 2016). Freudenthal (1991) påpeker at vertikal matematisering inkluderer både mekanisk-autonome prosedyrer, samt omfattende aspekter ved omorganisering og (om-)konstruering innenfor symbolverdenen. Symboler blir formet, reformet og manipulert mekanisk, omfattende og reflektert.

De to formene for matematisering er tett knyttet til hverandre og har lik verdi (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). I alle fasene av matematikklæring utfyller de to typene matematisering hverandre (De Lange, 1987). Det er i en prosess, kalt progressiv matematikk, som inneholder både horisontale og vertikale komponenter at elevene konstruerer og gjenoppdager ny matematikk (Doorman & Gravemeijer, 2009). Drijvers (2003) beskriver en modell for horisontal og vertikal matematisering (Figur 2), der horisontal matematisering går vannrett og er i sammenheng med den realistiske konteksten og en matematisk modell. Vertikal matematisering går oppover og løfter matematikken til et høyere nivå ved å benytte et nettverk av matematiske relasjoner.



Figur 2: Horisontal og vertikal matematisering (Drijvers, 2003, s. 54)

De Lange (1987) trekker frem at et viktig aspekt ved matematisering, er at matematiserings-prosessen foretatt av elever, er personlig og kan ta forskjellige ruter avhengig av elevenes oppfatning av den realistiske situasjonen, deres evner, og deres problemløsningsferdigheter. I stedet for å forvente at elevene går samme læringsrute fra «A» til «B», kan rutene variere og ikke nødvendigvis ende opp på samme sted. Ruten kan inkludere mange horisontale steg og lite vertikale, eller omvendt (De Lange, 1987). Figur 3 viser ulike ruter for matematisering som elevene kan gå. Vannrette steg illustrerer horisontal matematisering, og steg oppover illustrerer vertikal matematisering.



Figur 3: Forskjellige ruter for matematisering (De Lange, 1987, s. 45)

De Lange (1987) sin modell over matematiseringsruter er benyttet i analysen av datamaterialet, for å illustrere elevenes horisontale- og vertikale matematisering i undervisningsopplegget gjennomført i studien. «A» er elevenes startpunkt, mens «B» illustrerer målene for timen. Om elevene ikke når helt opp til «B», kan de likevel ha nådd flere mål for undervisningen, og gjenoppdaget formell matematikk.

2.3 Tidligere forskning om MH i læring og undervisning av matematikk

Det er et anerkjent gap mellom forskning og praksis om temaet MH i læring og undervisning av matematikk (Wang et al. 2018). Flere praksisnære studier behøves på området, for at MH sin relevans i undervisning og læring av matematisk, skal nå en allmenn aksept. Det er utført flere studier om temaet, og min studie vil være et ytterligere bidrag for å tette gapet mellom forskning og praksis. Nedenfor, i tabell 1, er en oversikt over tre forskningsartikler som handler om MH i matematikkundervisningen. Alle tre artiklene har en praksisnær forskningsmetode, der de undersøker hvordan MH kan inkluderes i matematikkundervisningen. Artiklene har imidlertid ulik innfallsvinkel til temaet, der det er benyttet forskjellig rammeverk, utvalg, datainnsamlingsmetode og historiske elementer.

Studie	Formål	Teoretisk Rammeverk	Historiske elementer	Metode og data	Resultat
Weng (2008)	- Inkludere MH i matematikkundervisningen - Undersøke om en metodologi som inkluderer MH bidrar til at elever utvikler sine holdninger mot matematikk.	- "intellektuelle sprang" - "historiske sprang" - "psykogenetiske mekanismer". - "sourcing"	- Kinesiske tallsystem fra oldtiden - Livshistorien til den glemsomme Sylvester - "The invariant subspace Problem" - Descartes' hemmelige notatbok.	- Aksjonslignende case studie der lærer også var forsker - Utvalg: studenter - studentenes log - undersøkelse - planleggingsskjema og log	historisk tilnærming var positiv med tanke på elevenes oppfatning og holdning mot matematikk. - Tro - Utholdenhet - Motivasjon
Jahnke og Habank-Eichelsbacher (1999)	- Undersøke hvordan elever arbeider med originale kilder fra historien	- Bygger på det Jahnke et al. (2000) skriver om hvordan originale kilder fra MH kan benyttes i matematikkundervisningen	- Historien om Samos-tunellen	- Design-studie - Utvalg: 9.trinn - Elevers skriftlige beskrivelse	- Positivt å jobbe med originale kilder fra historien - elevene utvikler ferdigheter i å beskrive matematiske ideer og metoder med egne ord.
Panaoura (2017)	- Undersøke lærerens kunnskap og holdninger om å benytte MH i inquiry-basert undervisning - Undersøke hvilke utfordringer en står ovenfor i implementeringen av MH i matematikkundervisningen.	- Inquiry-basert undervisning	- Det egyptiske tallsystemet fra oldtiden - Multiplikasjon ved dobling, slik egypterne utførte i oldtiden	- Case-studie - Utvalg: 5.trinn - Spørreskjema - Observasjon - Semistrukturert intervju med læreren	- lærer hadde dårlig kunnskap om den kulturelle, politiske og økonomiske konteksten som matematikken oppsto i. - Læreren møtte mange utfordringer - lærere trenger mer kunnskap og trening.

Tabell 1: Oversikt over et utvalg studier

Weng (2008) har utført en aksjonsbasert case-studie, der forsker også var lærer i en planlagt undervisningsøkt. Formålene til Weng (2008) var å finne ut hvordan MH kan inkluderes i matematikkundervisningen, samt undersøke om en metodologi som inkluderer MH bidrar positivt på elever holdninger mot matematikk. «Holdninger» innebærer interesse og verdsettelse, tro, selvtillit og utholdenhet. Weng (2008) benyttet et didaktisk rammeverk som handlet om at elever må ta «intellektuelle sprang», mens menneskeheten tar «historiske sprang». De intellektuelle sprangene blir identifisert gjennom «psykogenetiske mekanismer». Historiske mekanismer blir tilknyttet de psygogenetiske, og identifiseres gjennom de historiske poengene som mekanismene var ment å løse. Å identifisere gode historiske poeng betegnes som «scourcing», og handler om å søke i litteraturen og diskutere med kolleger. Studien foregikk over 12 uker, og temaet var lineær algebra. De historiske elementene som ble inkludert var det kinesiske tallsystemet fra oldtiden, Livshistorien til den glemsomme Sylvester, *The invariant subspace Problem* og Descartes' hemmelige notatbok. Deltakerne i studien var studenter fra linjen «Certificate and Engineering Mathematics» (CEM) ved Singapore Polytechnic. Det ble utført en kvalitativ analyse av datamaterialet, som besto av studentenes logg, som ble skrevet etter hver leksjon, en studentundersøkelse, samt lærers planleggingsskjema og logg. Resultatene viser at en historisk tilnærming var positiv med tanke på elevenes oppfatning og holdning mot matematikk. Det var positivt for studentenes tro, utholdenhet og motivasjon. Inkludering av MH i undervisningen ga studentene en ny tilnærming som endret deres syn på matematikk, og ga en sterkere kulturforståelse.

Jahnke, Arcavi, Furinghetti og Idrissi (2000) skriver om hvordan originale kilder fra MH kan benyttes i matematikkundervisningen, og har gjennomført studier der de har forsket på hvordan elever arbeider med originale kilder. I Jahnke et al. (2000) blir den originale kilden presentert autentisk for elevene. Jahnke et al. (2000) trekker frem en design-studie utført av Jahnke og Habank-Eichelsbacher (1999). Jahnke og Habank-Eichelsbacher (1999) gjennomførte, ved ulike skoler i Bielefeld (Tyskland), et undervisningsopplegg, med utgangspunkt i historien om Samos-tunnelen. Heron fra Alexandria (40-120 E. K.) skrev en tekst der han behandlet problemet: «Kutte gjennom fjell i en rett linje hvis åpningen i tunnelen er kjent». Elevene gikk på 9.trinn, og fant kilden utfordrende å jobbe med, men allikevel motiverende. Undervisningsopplegget besto av tre leksjoner, der 1.leksjon var en introduksjon av MH og historien om Samostunnelen. 2. leksjon handlet om problemet, og hvordan retningen på tunnelen ble bestemt. 3. leksjon handlet om å analysere kilden. Dataene som ble samlet inn var elevenes skriftlige beskrivelse av hvordan Herons metode fungerte. Det viste seg at flere elever forsto metoden og klarte å utrykke den med sine egne ord. Resultatene viser at ved å jobbe med en primærkilde, utviklet elevene ferdigheter i å beskrive matematiske ideer og metoder med egne ord.

Et moment som flere forskere trekker frem i henhold til MH i matematikkundervisningen, er at læreren trenger god kunnskap om MH, for å kunne legge opp til gode undervisningsopplegg. Uten god kunnskap er det utfordrende å velge ut gode historiske elementer, samt legge opp til aktiviteter som kan utvikle elevenes forståelse for matematiske konsepter (Gulikers & Bloom, 2001). Panaoura (2017) har utført en case-studie, der undervisningen til en «typisk» lærer ble analysert. Studiens formål var å undersøke lærerens kunnskap og holdninger om å benytte MH i et inquiry-basert rammeverk, samt avsløre hvilke utfordringer en står ovenfor i implementeringen av MH i matematikkundervisningen. Studien undersøkte undervisningspraksisen i et autentisk klasserom. Læreboka inneholdt et inquiry-basert undervisningsopplegg med en historisk tilnærming, og formålet var å undersøke hvordan læreren underviste. Undervisningen ble observert, og det ble gjennomført spørreskjema i forkant, samt utført et semistrukturert intervju der de diskuterte undervisningen. De historiske elementene som ble inkludert var egypternes tallsystem, samt deres metode for å multiplisere ved dobling. Resultater viser at elevene ble engasjerte og løste oppgavene. Det kom imidlertid frem at lærer hadde dårlig kunnskap om den kulturelle, politiske og økonomiske konteksten som matematikken oppsto i. Læreren møtte mange utfordringer i å inkludere MH i en inquiry-basert undervisningstilnærming. Konklusjonen var at lærere trenger mer kunnskap og trening.

Min studie har i likhet med de nevnte studiene, et formål om å undersøke hvordan MH kan inkluderes i matematikkundervisningen. Jeg har imidlertid benyttet en annen tilnærming til temaet. Jeg har i min studie tatt utgangspunkt i Jankvist (2009) sin teori om MH sin rolle og tilnærming til matematikkundervisning. MH ble benyttet som et didaktisk verktøy, gjennom en modultilnærming på to undervisningstimer. Det teoretiske rammeverket var RME, og det ble benyttet til å planlegge og analysere et undervisningsopplegg, der temaet var algebra og likninger. Undervisningsopplegget ble tilpasset 10.trinn i den norske skolen, og tok utgangspunkt i LK20. Jeg har i likhet med Jahnke og Habank-Eichelsbacher (1999) benyttet en original kilde fra MH, men i større grad tilpasset den til utvalget som var en 10.klasse. Det historiske elementet jeg valgte, var forskjellig fra de nevnte studiene, der jeg valgte egypternes metode, «falsk posisjon», for å løse praktiske problemer tilknyttet lineære likninger. For å tette gapet mellom forskning og praksis er det viktig med studier som viser ulike tilnærminger til å inkludere MH i undervisningen. Min studie er et bidrag til forskning om temaet «MH i læring og undervisning av matematikk», ved at det gjennom en praksisnær forskningsmetode, har blitt undersøkt på hvilken måte elever på 10.trinn gjenoppdager den formelle matematikken, innenfor temaet algebra og likninger, i en undervisningsøkt med en historisk tilnærming.

2.4 Valg av tema og historiske elementer

I TIMSS-undersøkelsen 2015, kom det frem at norske elever har lavest score i emneområdet algebra (Utdanningsdirektoratet, 2016). Algebra blir ofte i skolen behandlet som et eget emne, som handler om å manipulere bokstaver og symboler for å løse likninger og forenkle algebraiske uttrykk (NCTM 2000 i Blanton, 2008). Dienes (1961) trekker frem at det ser ut til at elever bruker lang tid på overgangen fra konkrete tall, nummer og eksempler til formell algebraisk notasjon. Ifølge Bills, Ainley og Wilson (2016) er det krevende å utvikle pedagogiske situasjoner, der elever mestrer overgangen til algebraisk notasjon. Jeg har i studien derfor valgt temaet algebra og likninger, der jeg undersøker om en historisk tilnærming kan være en god måte for elevene å oppnå følgende kompetansemål etter 10.trinn; «lage, løyse og forklare likningssett knytte til praktiske situasjonar» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Kompetansemålet innebærer at elevene skal sette opp en likning ut ifra en praktisk situasjon, forklare likningen og videre løse den. Elevene skal kunne benytte algebraisk notasjon hensiktsmessig, og forstå hvorfor en benytter det for å løse et praktiske problemer.

Metoder som ble benyttet tidligere i historien for å løse lineære likninger, kan bidra til bedre forståelse for de metodene vi benytter i dag. Ved å gå historikernes steg, for å gjenoppdage matematisk kunnskap, blir elevene involvert i en aktivitet der de gjør matematikk og selv har mulighet til å komme frem til den formelle matematikken. Den historiske perioden jeg har valgt er oldtidens Egypt. Egypterne i oldtiden løste praktiske problemer med matematikk, som blant annet var tilknyttet fordeling av loff, eller mengde korn for å lage øl (Burton, 2011). De utviklet en metode for å løse lineære likninger som var tilknyttet praktiske problemer, der det de skulle finne ble generalisert og omtalt som «*mengde*». Metoden heter «falsk posisjon», og den ble benyttet til å løse likninger uten kjennskap til algebraisk notasjon som vi kjenner i dag. De forenklet problemer med å gjette en verdi for den ukjente, og benyttet deretter feilen til å løse problemet. De gjettet en verdi som gjorde utregningene lettere å jobbe med. For mange elever er det som nevnt utfordrende å benytte algebraisk notasjon, og sette opp likninger ut ifra praktiske situasjoner. Egypternes metode kan bidra til at elevene lærer hvordan man gjennom å resonnere kan løse likninger. Det kan videre lede frem til en forståelse for hvilken betydning variabler har, og hvordan en løser likninger med de mer formelle metodene vi benytter i skolen i dag.

Den nye læreplan LK20 beskriver ulike kjerneelementer som skal være gjeldende i matematikkundervisningen. Kjerneelementene er modellering og anvending, utforsking og problemløsing, abstraksjon og generalisering, resonnering og argumentasjon og representasjon og kommunikasjon. Problemer som egypterne jobbet med, og deres metode for å løse likninger kan imøtekomme kjerneelementene. Et praktisk problem som var reelt i sin tidsepoke, kan invitere til utforsking og problemløsning. Metoden åpner også for muligheter til å modellere og generalisere, ved at elevene setter opp problemet som en likning. «falsk posisjon» er en metode som stimulerer til resonnering og argumentasjon. Metoden kan videre abstrakteres og elevene kan skape en egen algoritme, for å løse praktiske problemer med å sette opp likninger. I tillegg til å handle om å løse lineære likninger og praktiske problem, innbyr egypternes metode til å se sammenhenger mellom multiplikasjon og divisjon. Den inkluderer brøkregning, faktorisering og forståelse for likhetstegnet. «Falsk posisjon» kan virke som en inngang for elevene til å generalisere og ta i bruk matematisk notasjon i form av en ukjent; eksempelvis *m* eller *x* for å representere *mengden*. Arbeid med flere metoder for å løse likninger kan bidra til å gi elever, som synes likninger og algebra er utfordrende, en metode for å kunne løse problemer tilknyttet lineære likninger. Samtidig vil arbeid med flere metoder imøtekomme elever som mestrer det å sette opp likninger og løse dem, ved at det utfordrer de til å se sammenhenger mellom flere metoder, samt forklare hvorfor egypternes metode fungerer. Det å inkludere metoden «falsk posisjon» kan dermed bidra til å tilpasse undervisningen samt vanskegraden for elevene.

Arbeidet med egypternes metode imøtekommer også samtlige av de «grunnleggende ferdighetene», som skal arbeides med i alle fag. Ved å få et matematisk problem representert som en oppgavetekst, øves elevenes leseferdigheter ved at de må tolke og trekke ut tekstens informasjon. Elevenes muntlige ferdigheter stimuleres ved at de jobber i grupper og må diskutere med hverandre. I tillegg vil lærer gå rundt og utfordre elevene til å sette ord på sine tanker. Den grunnleggende ferdigheten «å regne», blir stimulert ved at elevene møter matematiske problemer, som krever ulike former for utregninger. Skriftlige ferdigheter blir også utfordret, ved at elevene må skrive ned sine løsningsmetoder og tanker.

2.4.1 Egypternes metode- Falsk posisjon

Det meste av kunnskap om matematikk fra oldtidens Egypt kommer fra to kilder; «*Rhind Papyrus*» og «*Golenischev/Moscow Papyrus*» (Burton, 2011). «*Rhind Papyrus*» ble laget rundt år 1650 f.Kr, og inneholder mange praktiske problemer. Et eksempel på et problem er «*Rhind 24*»:

Figur 4: Rhind 24 (Eisenlohr, 1877, s. 61)

«*En mengde og dens syvendedel adderes, og det blir 19*».

Med dagens algebraiske symboler kan problemet stilles opp som en likning; $x+\frac{x}{7}=19$ eller $\frac{8x}{7}=19$ og videre løses. Egypternes metode, falsk posisjon, handler om å gjette en verdi for *mengden*, som det er lett å jobbe med. I henhold til *Rhind 24* settes verdien for *mengden* lik 7. Man får da;

$7+1=8$

$8\neq 19$

Videre benyttes feilen for å finne det riktige svaret. Man finner det tallet en må multiplisere med 8 for å få 19. Det vil da være $\frac{19}{8}$. Videre multipliserer man $\frac{19}{8}$ med tallet man gjettet var verdien til *mengden*. Svaret blir da;

$$\frac{19}{8}\cdot 7=\frac{133}{8}\approx 16{,}63$$

Et viktig poeng er at egypterne ikke skrev $\frac{19}{8}$ men $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. De opererte med stambrøker. Svaret som de skrev ble derfor; $7\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.

For å tilpasse studiens utvalg, som er 10.trinn, samt beholde fokuset på valgte kompetansemål og læringsmål, vil det ikke bli lagt vekt på at elevene skal benytte stambrøker i sine beregninger. Fokuset vil ligge på selve metoden.

Metoden kan generaliseres ved å sette $x=a$, der *a* er en gjetning av verdien til *mengden*.
Vi får da uttrykkene;
$a+\frac{a}{7}=b$ og $bc=19$
c er tallet en multipliserer med *b* for å få 19.
b er feilsvaret man får ved å sette inn en gjetning (*a*) for *x*.
videre får man at;
$\left(a+\frac{a}{7}\right)\cdot c=bc=19$

Metoden var mye brukt i Midtøsten, og den ble lært bort videre til europeerne og var en fast del av europeisk matematiske tekster fra *Liber Abaci* av Fibonacci og til aritmetikken på 1500-tallet. Når algebraisk notasjon ble utviklet, forsvant metoden fra de mer avanserte verkene (Burton, 2011). I studien undersøkes det om metoden igjen kan gjøres aktuell, og bidra til at elever gjenoppdager formell matematikk tilknyttet temaet algebra og likninger.

3 Metode

Metodekapitlet begynner med en redegjørelse for valg av metode i studien. Videre beskrives metodologien til den kvalitative metoden aksjonsforskning, og forskningsdesignet, der jeg gjør rede for hvordan jeg har forsket. Før jeg forklarer undervisningsopplegget, presenteres studiens utvalg og datainnsamling. Deretter gjøres det rede for analysemetode. Avslutningsvis kommer refleksjoner rundt forskningens validitet og troverdighet i de ulike fasene av aksjonsforskning, samt etiske betraktninger i studien.

3.1 Metodevalg og metodisk overblikk

Ifølge Christoffersen og Johannessen (2012) må man anvende samfunnsvitenskapelige metoder, når man skal forske på det som skjer i skolen. Samfunnsvitenskapelige metoder handler om hvordan en kan gå frem for å få informasjon om den sosiale virkeligheten, hvordan informasjonen kan analyseres, og hva den forteller oss om samfunnsmessige forhold og prosesser. For å finne svar på forskningsspørsmålet, valgte jeg å ta i bruk en kvalitativ metode. Bakgrunnen for valget er at kvalitativ forskning frembringer en detaljert og dyp forståelse omkring meninger, handlinger, fenomener, holdninger og intensjoner (Cohen, Manion & Morrison, 2018). I kvalitativ forskning er forsker en del av den naturlige settingen som det blir forsket på. Dataene som blir samlet inn blir sosialt situert og forsker er nøkkelperson i utførelsen av studien. Kvalitativ forskning legger konstruktivistiske premisser til grunn for hva kunnskap er. Mennesker blir ansett som deltakende og meningsskapende vesener som aktivt konstruerer deres egne meninger og forståelse av situasjoner og verden Det finnes ikke en enkelt sannhet som kan generaliseres. Virkeligheten blir forstått ut ifra flerfoldige, konstruerte og holistiske tolkninger som er unik for hver enkelt deltaker (Cohen et al. 2018).

Kvalitativ metode er et vidt begrep som inneholder mange ulike forskningstyper (Cohen et al. 2018). Studien har bakgrunn i et ønske om å forske på og utvikle egen undervisningspraksis i matematikkfaget. Valget på kvalitativ metode ble derfor aksjonsforskning der lærer også er forsker. Aksjonsforskning er en praksisnær metode som imøtekommer studiens formål, som handler om å undersøke hvordan MH kan inkluderes i matematikkundervisningen. Gjennom å være til stede i forskningsfeltet blir virkeligheten synlig og man kan betrakte situasjonen fra flere perspektiver (Denzin & Lincoln, 2011).

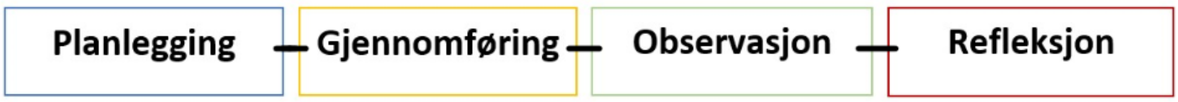
3.2 Metodologi

Aksjonsforskning har en metodologi for forskere og lærere, for å frembringe kunnskap om undervisningspraksis og dens kompleksitet (McAteer, 2013). Aksjonsforskning er praksisbasert, hvor hovedmålet er å forbedre praksis (Elliot, 1991). En kan benytte aksjonsforskning i nesten alle mulige settinger som involverer folk, oppgaver eller prosedyrer som trenger en løsning eller hvor endring er ønsket (Cohen et al. 2018). Det er en metodologi som er egnet til å bringe forskning og praksis tettere sammen, gjennom aktiv utprøving i praksis (Somekh, 1995). Hva aksjonsforskning konkret innebærer har blitt debattert over flere år, og det har oppstått mange variasjoner og ulike retninger

(Moksnes Furu i Brekke & Tiller, 2013). Aksjonsforskning anses oftest som en gruppeaktivitet (Kemmis & McTaggart, 1992), men aksjonsforskning kan like gjerne utføres individuelt (Cohen et al. 2018).

Studien er utført av en individuell forsker, i samhandling med en veileder, hvor det er tatt utgangspunkt i Stenhouse (1975) sin bevegelse «*teacher as researcher*». I norsk pedagogisk litteratur oversettes «*teacher as researcher*» til «*lærer som forsker*» (Brekke & Tiller, 2013). Forsker i studien var både lærer og forsker i egen undervisningspraksis. I motsetning til klassisk aksjonsforskning, fokuserer den undersøkende «lærer som forsker»-bevegelsen på at individuelle lærere utvider sin egen kunnskapsbase, gjennom prosesser av refleksjon og etterforskning (Johnston, 1994). Det legges ikke begrensninger for måten læreren skal utføre sin forskning på. Bevegelsen «lærer som forsker» støtter mangfold og fundamenteres på verdien av lærere som samler inn data, og forsker for å forstå og utvikle egen praksis (Cochran-Smith & Lytle, 1990).

Det finnes flere modeller for hvordan aksjonsforskning kan gjennomføres (Cohen et al. 2018). Studien benyttet Lewin (1948), og senere Carr & Kemmis (1986), sin modell for aksjonsforskning. Modellen kan deles inn i de fire hovedfasene; planlegging, gjennomføring, observasjon og refleksjon.



Figur 5: Aksjonsforskningens fire faser

Planleggingsfasen handler om å formulere et problem, vurdere ulike tilnærminger til problemet, samt legge en plan med fastsatte kriterier (Cohen et al. 2018). Aktuelle spørsmål en kan stille er; hva skal jeg utvikle? hvorfor skal jeg utvikle dette? hvordan skal jeg gjennomføre utviklingsprosessen? (Moksnes Furu i Brekke & Tiller, 2013). Planleggingsfasen hvor man vurderer ulike tilnærmingsmetoder, er en avgjørende fase i forskningsprosessen (Cohen et al. 2018). Første fase setter rammen for hele forskningsprosjektet, og et viktig moment er at mål, formål og antagelser må tydeliggjøres for de involverte og leseren av studien. Det er viktig i den første fasen, at en har god kunnskap om temaet det skal forskes på (Moksnes Furu i Brekke & Tiller, 2013).

Den andre fasen innebærer å gjennomføre intervensjonen som er planlagt (Moksnes Furu i Brekke & Tiller, 2013). I henhold til studien innebærer gjennomføringsfasen å utføre undervisningsopplegget som er planlagt for studien. Tredje fase, observasjon, handler om å samle inn data omkring det som skjer i klasserommet. Observasjon er å systematisk notere informasjon om personer, hendelser, oppførsel, settinger, artefakter, rutiner eller andre ting (Cohen et al. 2018). Det å benytte observasjon som datainnsamlingsmetode, bidrar til at en får førstehånds data fra naturlige, sosiale situasjoner, hendelser eller relasjoner i et klasserom (Germeten & Bakke i Brekke & Tiller, 2013). I studien innebar observasjonsfasen også å benytte lydopptaker, samt innsamling av skriftlige elevbesvarelser.

Siste fase i aksjonsforskning er refleksjon, og handler om å reflektere over og tolke resultatene i forskningsprosjektet. I psykologisk og filosofisk tradisjon betyr refleksjon at en vender bevisstheten mot seg selv. Forsker/lærer må være bevisst sin egen fortolkningsramme, som en benytter i vurderingen av egen undervisning. Aktuelle spørsmål en kan reflektere over er; Hvordan kan jeg forstå disse resultatene? På hvilken måte har det skjedd en forbedring av praksis? (Moksnes Furu i Brekke & Tiller, 2013). Det er viktig å bemerke at aksjonsforskning er en syklisk prosess, med ingen tydelig begynnelse og slutt. En runde i syklusen kan etterfølges av flere runder (Piggot Irvine, Rowe & Ferkins, 2015). Med bakgrunn i studiens begrensninger i omfang er det kun utført en runde i syklusen. I diskusjonskapitlet er det diskutert hva som kunne vært forbedret og gjort annerledes i en neste runde i aksjonssyklusen.

3.3 Forskningsdesign

Forskningsprosessen begynte med å velge et interessant og relevant tema å forske på. Valget falt på MH i læring og undervisning av matematikk, med bakgrunn i at jeg tror en historisk tilnærming kan være en god måte å variere undervisningen, samt at det gir nye interessante problemer for elevene å arbeide med. For å få tilstrekkelig kunnskap om temaet, og for å velge problemområde og forskningsspørsmål, benyttet jeg publiseringskanalen til NSD, og søkte opp vitenskapelige tidsskrifter på nivå 2. Jeg benyttet stort sett *Educational Studies in Mathematics,* og søkte opp forskningsartikler tilknyttet temaet MH. Etter at problemområde og forskningsspørsmålet kom på plass, begynte jeg å sette meg inn i teoretiske rammeverk som kunne være passende for studien og forskningsspørsmålet. Valget falt på RME med bakgrunn i at det naturlig henger sammen med MH i læring og undervisning av matematikk. Det gir også en mulighet til å analysere elevenes matematisering, og med det kunne vurdere om en historisk tilnærming er en god måte å undervise i matematikk.

Med bakgrunn i at studien har som formål å teste en undervisningsform, falt valget på en praksisnær forskningsmetode. Valget falt på aksjonsforskning, der lærer også er forsker i egen undervisningspraksis. Etter valget av metode, vurderte jeg passende datainnsamlingsmetode. Observasjon henger naturlig sammen med aksjonsforskning, og jeg valgte i tillegg å samle inn skriftlige elevbesvarelser og lydopptak av elevdiskusjoner. Flere datainnsamlingsmetoder ble valgt for å skape et bredere og mer fyldig datamateriale. Med bakgrunn i at jeg skulle benytte en kvalitativ forskningsmetode, ble det også valgt en kvalitativ analysemetode, der rammeverket RME skulle benyttes. Utvalget av studien ble valgt med hensyn til det historiske elementet valgt til undervisningen. Temaet for undervisningen var algebra og likninger og det historiske elementet var egypternes metode «falsk posisjon». 10.trinn ble valgt for at tema og vanskegrad skulle passe til valgt trinn. Planleggingsfasen innebar også å utforme undervisningsopplegget, ved bruk av teorien om RME.

I gjennomføringsfasen handlet det om å kontakte en ungdomsskole og få komme og låne en 10.klasse. Jeg kontaktet en skole hvor jeg kjente til klassen fra før. Undervisningsopplegget ble gjennomført i en dobbeltime. Elevene fikk informasjon om studien på forhånd, og skrev under på samtykkeskjemaet. Grunnet koronapandemien var det utfordrende å finne tidspunkt for gjennomføring, samt få tilstrekkelig med timer. Det var ønskelig med to dobbeltimer, men jeg fikk kun en. Gjennomføringen av datainnsamlingen gikk etter planen, og elevene jobbet aktivt med de historiske problemene. Underveis i undervisningen skrev jeg ned observasjonsnotater, og satte på en lydopptaker på ett av gruppebordene. På slutten av timen samlet jeg inn elevenes skriftlige besvarelser.

I refleksjonsfasen bearbeidet jeg datamaterialet, og valgte utdrag som skulle presenteres i analysedelen. Dataene ble tolket med tanke på didaktisk fenomenologi, veiledet gjenoppdaging og matematisering. Elevenes matematisering ble skjematisert, og noen av elevenes matematiseringsruter ble valgt for å fremstilles mer detaljert. Analysen hadde som formål å fremstille datamaterialet fra studien på en oversiktlig, helhetlig samt detaljert måte, for å fremme relevante funn. Refleksjonsfasen handlet også om å diskutere analysens funn opp imot teori og tidligere forskning, vurdere studiens kvalitet, samt forsøke å svare på studiens forskningsspørsmål.

3.3.1 Oversikt over forskningsprosessen

Planlegging
- Valg av tema: MH - Valg av relevant litteratur om MH - Utvikle et problem, og forskningsspørsmål med bakgrunn i forskningslitteratur - Valg av teoretisk rammeverk: RME - Vurdering og valg av en egnet forskningsmetode: Kvalitativ metode → Aksjonsforskning → lærer som forsker - Vurdering og valg av datainnsamlingsmetode, og hvilken type data som var passende for studien: Observasjon + muntlige og skriftlige elevbesvarelser - Vurdering og valg av analysemetode: RME og kvalitativ analysemetode - Vurdering og valg av utvalg for studien: 10.trinn - Planlegging av undervisningsopplegget: Historie som verktøy → Modultilnærming → Algebra og likninger → «Falsk posisjon»
Gjennomføring
- Gjennomføring av undervisningsopplegget i 10.klasse - Lærer og forsker
Observasjon/Datainnsamling
- Skrive observasjonsnotater - Samle inn lydopptak av elevdiskusjoner - Samle inn skriftlige elevbesvarelser
Analyse/refleksjon/diskusjon
- Analysere data: didaktisk fenomenologi, veiledet gjenoppdaging og matematisering. - Skjematisere elevenes matematiseringsruter - Trekke frem relevante sitater fra elevdiskusjoner - Trekke frem relevante elevbesvarelser - Tolke og reflektere over resultatene - Diskutere funn opp imot teori og tidligere forskning - Vurdere studiens kvalitet - Konklusjon: forsøke å svare på forskningsspørsmål - Forslag til videre forskning

Tabell 2: Oversikt over forskningsprosessen

3.4 Datainnsamling

Med utgangspunkt i at studien handlet om å gjennomføre et undervisningsopplegg i skolen, var det hensiktsmessig å gjennomføre et strategisk utvalg. Strategisk utvelging baserer seg på at forskeren velger ut personer som har egenskaper eller kvalifikasjoner som er relevante i forbindelse med forskningsspørsmålet (Thagaard, 2018). Med bakgrunn i at studien tok sikte på å forske på egen undervisningspraksis, er det naturlig at utvalget var en klasse i ungdomsskolen. Utvalget var en gruppe elever på 10.trinn fra en skole i Trøndelag fylke. Temaet for undervisningen var algebra og likninger, og for å være sikker på at gruppa jeg gjennomførte studien i hadde nok forkunnskaper omkring temaet, falt valget på 10.trinn. Elevgruppa besto av 9 elever, og var en heterogen gruppe bestående av jenter og gutter med ulike forutsetninger, kunnskapsnivå og ferdighetsnivå. To elever i klassen er fremmedspråklige, og noen av elevene har konsentrasjon-, lese- og skrivevansker. Jeg kjente elevgruppa fra før. Det å ha kjennskap til elevene gjorde at undervisningen i prosjektet ble mer reell og naturlig, enn om jeg hadde gjennomført det i en klasse jeg ikke har truffet før.

Dataene som ble samlet inn ble generert ut ifra datainnsamlingsmetoden observasjon. I tillegg ble det samlet inn skriftlige elevbesvarelser, samt gjort lydopptak av elevenes muntlige diskusjoner. Forsker/lærer skrev observasjonsnotater underveis i undervisningen, der fokuset var på elevenes matematisering. Det ble gjort klart et skjema for observasjonsnotatene på forhånd Det ble også skrevet notater rett etter undervisningsøkten. Ressursene som ble benyttet var notatark for observasjon, egne oppgaveark til deltakerne og en lydopptaker.

3.5 Undervisningsopplegget

Undervisningsopplegget ble utformet i et planleggingsskjema som inneholder mål, organisering, didaktisk fenomenologi, veiledet gjenoppdaging og matematisering. Under «mål» gjøres det rede for kompetansemålet som er lagt til grunn, kjerneelementer, grunnleggende ferdigheter samt mer konkrete læringsmål. «Organisering» viser en oversikt over hvordan undervisningsøkten ble gjennomført i praksis. Eksempelvis hvor lang tid som ble benyttet, organisering av grupper og lærerens rolle underveis. «didaktisk fenomenologi» gjør rede for hvordan opplegget gir elevene en realistisk situasjon, hvor de finner mening og matematiserer. «Veiledet gjenoppdaging» omhandler lærerens rolle, og viser hvilke spørsmål det kan være aktuelt å stille elevene underveis i arbeidet. Under «matematisering» gjøres det rede for hva som kan være horisontal og vertikal matematisering innenfor oppgavene som ble gitt til elevene.

3.5.1 Planleggingsskjema

Mål	
Kompetansemål: - lage, løse og forklare likningssett knyttet til praktiske situasjoner **Læringsmål:** - Kunne tolke et praktisk problem, og forklare hva oppgaveteksten gir av informasjon. - Kunne benytte egypternes metode for å løse lineære likninger tilknyttet praktiske problemer. - Kunne sette opp en likning ut ifra en praktisk situasjon ved bruk av algebraisk notasjon, for deretter å løse den. - Vite hva algebraisk notasjon i form av en ukjent er, og hvorfor det benyttes til å løse praktiske problemer.	**Kjerneelementer:** - modellering og anvendelse - utforsking og problemløsing - abstraksjon og generalisering - resonnering og argumentasjon - representasjon og kommunikasjon

- Kunne undersøke om egypternes metode fungerer på andre typer likninger enn de presentert i tekstoppgavene - Kunne forklare hvordan egypternes metode fungerer - Kunne sammenlikne egypternes metode med det å sette opp likning og løse	**Grunnleggende ferdigheter** Skrive, regne, lese og muntlig

Organisering

- Tid: 90 min
- Gruppearbeid: 2-3 elever per gruppe – strategisk satt sammen i samråd med faglærer, ut ifra hvem som arbeider godt sammen
  - Gruppe 1 (elev 1 og 2)
  - Gruppe 2 (elev 3, 4 og 5)
  - Gruppe 3 (elev 6 og 7)
  - Gruppe 4 (elev 8 og 9)
- Går gjennom oppgavene felles (konkretisering) ved bruk av PP. Tar en og en oppgave. Elevene diskuterer i grupper og skriver ned sine besvarelser og tanker på et utdelt oppgaveark. Spør også om hva de har svart muntlig, slik at de må forklare hva de har tenkt.
- Lærer/forsker går rundt og veileder samt skriver observasjonsnotater
- Starter lydopptakeren fra elevene begynner å jobbe med oppgavene.
- Samler inn elevbesvarelser og lydopptak på slutten av timen

Didaktisk fenomenologi

- Reell kontekst fra historien. Problemer som oldtidens egyptere jobbet med.
- Matematikk som oppsto ut ifra et praktisk behov (finne riktig mengde korn for å lage øl).
- Delaktighet: Kontekst som elevene kan leve seg inn i og finne mening til.
- Beskrive matematiske konsept, strukturer og ideer i relasjon til fenomenet de ble skapt i.
- Elevene vil være aktivt deltakende i læringsprosessen ved å utvikle matematiske verktøy og forståelse selv.
- Begynne med et praktisk problem → tolke problemet → regne/resonnere/undersøke/sammenlikne/generalisere/kommunisere/argumentere

Veiledet gjenoppdaging

Hva kan være utfordrende for elevene?

- Tolke problemet: forstå hva en «*mengde*» er og sette opp regnestykket som teksten presenterer.
  - Har en diskusjon i starten for hva de tror en *mengde* kunne vært, for så å snakke om hva en mengde representerte for egypterne
- Innføre algebraisk notasjon og sette opp problemet som en likning for deretter å løse den.
- Forstå metoden for falsk posisjon og kunne anvende den på andre liknende problemer
- Finne ut hva man må multiplisere med 16 for å få 19.
- Forklare hvordan egypternes metode fungerer, og sammenlikne den opp imot metoden vi benytter i dag.
- Undersøke om metoden fungerer på andre type likninger

Aktuelle spørsmål lærer kan stille:

oppgave 1:

- Hva betyr «en fjerdedel av *mengden*»?
- Hva betyr «adderes»?
- Hva betyr det når det står «Det blir til sammen»?
- Hvordan vil du gå frem for å finne ut hvor stor *mengden* er?
- Elevene kan benytte ulike metoder (sette opp likning, resonnere, prøve seg frem); stille spørsmål der de må forklare hva de gjør og hva de har tenkt.

oppgave 2 og 3:

- Hva betyr «halvparten av *mengden*»?
- Hva betyr det når det står «halvparten av *mengden* og *mengdens* tredjedel adderes med *mengden*»?
- Hvis du gjetter et tall for *mengden*. Hvilket tall vil gjøre regnestykket enklest mulig?
- Du har fått et feilsvar. Hvordan kan du benytte det til å finne ut hvor stor *mengden* er?
- For å sette opp en likning av problemet; hvordan kan vi i regnestykket representere *mengden*?
- Du har satt opp en likning: hvordan kan du gå frem for å løse den? Hva betyr «=»?

Oppgave 4:

- Hvorfor fungerer egypternes metode til å løse likninger på denne formen?
- Vil det alltid fungere? Finnes det noen tilfeller det ikke fungerer?
- Prøv metoden på ulike typer likninger. Fungerer metoden alltid like godt?
- Hvordan er egypternes metode sammenliknet med den metoden dere har lært fra før?

Matematisering

Oppgavene har en praktisk tilnærming og åpner opp for både horisontal og vertikal matematisering. Det er ulike matematiseringsruter elevene kan gå. Nedenfor er det beskrevet hvordan horisontal og vertikal matematisering kommer til uttrykk innenfor de ulike oppgavene.

Oppgave 1:
Horisontal matematisering:

- Utforsker og tolker oppgaveteksten. Henter ut informasjon
- Resonnerer seg frem til et svar.
- Prøve/feile-metoden
- Lager en ekte situasjon der «*mengde*» blir omgjort til noe konkret innenfor virkeligheten. Eksempelvis sum av penger, kg korn eller varer. Problemet blir deretter løst ved å resonnere, regne eller prøve seg frem. Praktisk forståelse av problemet sammen med noen matematiske symboler blir benyttet til å løse problemet.

<u>Eksempel:</u>
Mengde = kg korn
Vi har noen kilo korn.
$\frac{1}{4}$ av kornet + alt kornet = 15 kg korn
Vi har 12 kg korn fordi $\frac{1}{4}$ av 12 er 3 og 12 + 3= 15
<u>*Mengden* er 12</u>

Vertikal matematisering:

- Generaliserer problemet og benytter matematiske symboler til å sette opp en likning. Løser så likningen og finner ut hva *mengden* er.

<u>Eksempel:</u>
x = mengden

$$x + \frac{x}{4} = 15$$
$$4 \cdot x + 4 \cdot \frac{x}{4} = 4 \cdot 15$$
$$4x + x = 60$$
$$5x = 60$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$$
$$x = 12$$

<u>*Mengden* er 12</u>

Oppgave 2 og 3:
Horisontal matematisering:

- Utforsker og tolker oppgaveteksten. Henter ut informasjon.
- Benytter egypternes metode, og resonnerer
- Prøve/feile-metoden

Vertikal matematisering:

- Generaliserer problemene ved å sette opp likninger og løse. Benytter algebraisk notasjon.

Oppgave 4:
Horisontal matematisering:

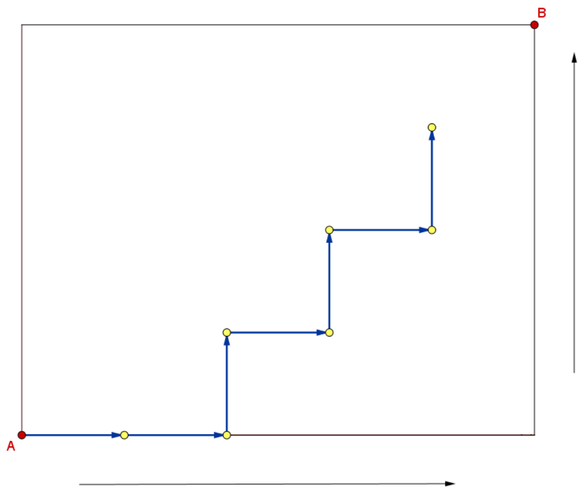
- Forklarer hvorfor egypternes metode fungerer ved å benytte ett eller flere eksempel.
- Undersøker om egypternes metode fungerer for andre typer likninger.

Vertikal matematisering:

- Generaliserer egypternes metode og viser hvorfor den fungerer for alle slike likninger.
- Klarer å si noe generelt omkring egypternes metode sammenliknet med vanlig metode for å løse likninger.

3.6 Bearbeiding og analyse av datamaterialet

Observasjonsnotatene ble som nevnt tidligere, skrevet ned underveis i gjennomføringen av studien, samt rett etterpå. Observasjonsnotatene ble strukturert og skrevet inn i et dokument for å gi oversikt og et helhetlig, men samtidig detaljert, overblikk over det som ble observert i klasserommet. Lydopptaket fra undervisningen ble umiddelbart etter gjennomføring transkribert i et dokument på datamaskinen, og deretter slettet fra diktafonen. De skriftlige elevbesvarelsene ble samlet inn ved slutten av undervisningen, og deretter skannet inn på datamaskin og lagret. Datamaterialet ble lagret på en kryptert ekstern harddisk. For å få en helhetlig oversikt over fenomenene som fant sted i klasserommet, ble dataene nøye gjennomgått og skjematisert i et dokument, der hver elevbesvarelse ble satt sammen med observasjonsnotater og transkripsjon. Hver elevbesvarelse ble tolket og utregninger ble skrevet med «formeleditor» ved siden av. Datamaterialet består av ulike typer, og de supplerer hverandre i tolkningen av hvilke fenomener som kom til syne i gjennomføringen. For å illustrere elevenes matematisering, ble det tegnet matematiseringsruter for hver elev. Matematiseringsrutene ble tegnet i det digitale verktøyet GeoGebra. Figur 6 er et eksempel på hvordan en matematiseringsrute ser ut.



Figur 6: Eksempel på en matematiseringsrute

«A» representerer startpunktet, mens «B» representerer undervisningens matematiske mål. Hver horisontal pil illustrerer et steg med horisontal matematisering, mens hver vertikal pil illustrerer elevens vertikale matematisering. De gule prikkene mellom hver pil viser sluttpunkt og startpunkt for hvert steg.

3.7 Analysemetode

Kvalitativ dataanalyse handler om hvordan en benytter datamaterialet til å oppnå forståelse, forklaring og tolkning av fenomenet det forskes på (Taylor & Gibbs, 2010 i Cohen et al. 2018). Det involverer å organisere, beskrive, forstå, forklare data, gi mening til data og oppdage mønstre. Det er ingen bestemt måte å utføre en analyse av kvalitative data. Hvordan det gjøres er avhengig av typen data og formålet til studien. Formålet med analysemetoden er å utforske og gi mening til data, eksempelvis gjennom å organisere og kategorisere dataene inn i nøkkelkonsept. For å illustrere mangfoldet i datamaterialet, og for å fange essensen rundt fenomenet det ble forsket på, ble det hentet ut utdrag fra datamaterialet (Tjora, 2012). Analysen inkluderer utvalgte utdrag fra feltnotater fra observasjoner, skriftlige elevbesvarelser og transkripsjoner fra lydopptak av elevdiskusjoner.

Studiens teoretiske rammeverk var RME, og fokuset var rettet mot didaktisk fenomenologi, veiledet gjenoppdaging og elevenes matematisering. Med tanke på studiens forskningsspørsmål ble det trukket frem utdrag fra datamaterialet som illustrerte hvordan elevene matematiserte innenfor undervisningsopplegget. De Langes (1987) eksempel på skjematisering av matematiseringsruter ble benyttet for å illustrere hvordan deltakerne i studien matematiserte. I tillegg ble matematiseringrutene underbygget av utdrag fra observasjonsnotater, skriftlige elevbesvarelser og transkripsjon av elevdiskusjoner. Elevenes matematisering kan vise om de lyktes med å gjenoppdage den formelle matematikken, og om undervisningsopplegget benyttet i studien er en god måte å gjennomføre matematikkundervisning med en historisk tilnærming.

3.8 Forskningens validitet og troverdighet

Det er flere utfordringer tilknyttet forskningens validitet og troverdighet, når lærer også er forsker i egen undervisningspraksis. I den første fasen er det spesielt to utfordringer tilknyttet forskningens validitet og troverdighet. Den første handler om å ha god nok kunnskap om temaet og feltet en skal forske på (Moksnes & Furu i Brekke & Tiller, 2013). En må kunne innhente og behandle teori og forskning, for videre å danne en logisk problemstilling i egen studie (Kvale & Brinkmann, 2018). For å imøtekomme viktigheten av et godt kunnskapsnivå, har jeg benyttet NSD sin publiseringskanal for å finne vitenskapelige tidsskrift med et høyt akademisk nivå. Jeg har i hovedsak benyttet tidsskrift på nivå 2, og da spesielt *Educational Studies in Mathematics.* Temaet i studien er MH i læring og undervisning av matematikk, og det ble dermed søkt etter artikler som omhandlet det temaet. Rammeverket som er benyttet i studien har også et kjent vitenskapelig opphav. Kunnskap om RME er hentet fra Freudenthal's egne verk, samt forskningsartikler som handler om realistisk matematikkundervisning i praksis.

Et annet moment som ikke bare gjelder i første fase, men alle faser i aksjonsforskningsprosessen, er at forskerens forforståelser kan prege forskningsprosessen (Kvale & Brinkmann, 2018). Spesielt når lærer er forsker i egen praksis, ligger det et engasjement for temaet det skal forskes på. Som Tjora (2013) bemerker; hvis en ikke er bevisst egne forforståelser, følelser, motiver og intensjoner tidlig i forskningsprosessen, kan hele prosessen bli farget av dette. Et av de metodologiske argumenter for at lærer også skal være forsker, er imidlertid at læreren har tilgang til sine egne intensjoner, motiver, tanker og følelser på en måte som en observatør ikke har (Hammersley, 1993). Læreren har også erfaring med arenaen som det skal forskes på. I tillegg har en lærer en dyp forståelse av sin egen oppførsel. Utfordringen i å sikre forskningens validitet og troverdighet ligger i det å evne å være åpen, og grunngi overfor leseren i hvilken grad ens egen posisjon kan prege forskningsarbeidet (Cohen et al. 2018). Forskerens forkunnskaper og engasjement kan virke som en styrke for forskningen, dersom en klarer å være åpen om sin påvirkning underveis i forskningsprosessen (Tjora, 2013). Jeg er lærerstudent samtidig som jeg jobber som matematikklærer på videregående skole. Studiens tema og praksisnære metode har sitt opphav i mitt ønske om å forbedre egen undervisningspraksis, lære mer om hvordan MH kan benyttes i undervisningen, samtidig som at det åpner opp for at andre kan sette seg inn i mitt arbeid og diskutere det. Jeg har studert MH og RME, og mener det kan ha en positiv påvirkning på elevenes læring i matematikk. Jeg forsøker å være åpen og ærlig om valg gjort i studien, samt omkring forskningsprosessen i sin helhet.

I gjennomføringsfasen er det utfordringer tilknyttet forskningens validitet og troverdighet, som handler om forskerens relasjon og påvirkning på deltakerne (Teusner, 2016). Forskeren må passe på at forskningen ikke påvirker deltakerne i negativ grad. I tillegg må en være bevisst om forholdet en har til deltakerne kan påvirke forskningen. Hoel (2000) trekker frem at det er viktig når lærer også er forsker, at læreren er bevisst sin egen relasjon til elevene, der lærer har et omsorgs- og ansvarsforhold for alle elever. Mitt forhold til deltakerne i studien var at jeg har vært lærervikar for klassen, og dermed kjenner dem fra før. Jeg har en relasjon til deltakerne, noe som gjorde at gjennomføringens forløp ble mer reell, enn om jeg ikke hadde kjent klassen. En lærer kjenner gjerne sine elever og har opparbeidet seg en god relasjon til dem, for å best mulig planlegge god og tilpasset undervisning. Jeg var påpasselig med å informere om når forskningen skulle finne sted, og at alle deltakerne var positive til å delta. Ingen skulle føle at de ble tvunget til å delta, eller at det påvirket i negativ grad.

En annen utfordring tilknyttet gjennomføringsfasen, er å innta ulike tolkningsposisjoner når lærer og forsker er samme person (Moksnes Furu & Tiller, 2013). Det stilles ulike krav til lærer og forsker, der begge rollene må ivaretas i gjennomføringen, og redegjøres i studien. Utfordringen ligger i om man kan innta en utenfra-posisjon når man har et innenfra-perspektiv (Hoel, 2000). Ulempen med at man befinner seg i kjent kultur, er at man ikke setter ord på det som blir tatt for gitt, og blir «hjemmeblind» (Wadel, 1991). I henhold til studien, lå utfordringen i å distansere seg i tilstrekkelig grad til å kunne gjennomføre undervisningen på en god måte, samtidig som man inntar forskerrollen der man observerer og reflekterer over fenomener som utspiller seg (Cohen et al. 2018). Om jeg som forsker har lyktes i å innta to ulike tolkningsposisjoner samtidig kan diskuteres. Jeg var bevisst rollen som lærer og forsker i undervisningssettingen, og forsøkte etter å være en lærer som ivaretar og veileder elevene, samtidig som at jeg var forsker og samlet inn data.

Et viktig moment i henhold til studiens troverdighet er om dataene som er valgt, er representative for forskningsprosjektet (Cohen et al. 2018). Det som gjør observasjon passende for aksjonsforskning er at det gir mulighet for førstehånds data fra naturlige sosiale settinger (Germeten & Bakke i Brekke & Tiller, 2013). For at forskningen skal være troverdig må det være en tydelig sammenheng mellom formålet med forskningen, samt hvilke aspekter observasjonen vil være fokusert på. I studien var formålet å undersøke hvordan en kan inkludere MH i matematikkundervisningen, og forskningsspørsmålet var: På hvilken måte gjenoppdager elevene den formelle matematikken innenfor temaet algebra og likninger, i en undervisningsøkt med en historisk tilnærming? Fokuset for observasjon var dermed rettet mot elevenes matematisering, for å kunne si noe om hvilke måter de gjenoppdager den formelle matematikken.

Ved å benytte observasjon som datainnsamlingsmetode, er det viktig å være bevisst at en observatørs dype involvering kan påvirke dømmekraften i forskningen. Hva vi observerer avhenger av hvor vi ser, hva vi ser på, hvem vi ser på, hvordan vi ser, hva vi tenker vi ser, hva som er i hodet vårt under observasjon og hva som er våre egne interesser og erfaringer (Cohen et al. 2018). Det er derfor viktig at en lærer som også er forsker og observatør, fokuserer like mye på hver enkelt elev og elevgruppe. En utfordring vil være balansegangen mellom veiledning og observasjon. Noen elever trenger mer veiledning enn andre, og kan dermed bli viet mer tid. Cohen et al. (2018) trekker frem at observasjon er en sårbar datainnsamlingsmetode, fordi hvis observatør er uoppmerksom et øyeblikk kan en gå glipp av et viktig øyeblikk. I gjennomføringen noterte jeg derfor underveis i undervisningen, samt rett etterpå. Det er flere utfordringer ved datainnsamlingsmetoden observasjon, og Denzin (1989) foreslår en triangulering av datakilder og metoder, for å sikre forskningens validitet og troverdighet. Ved å benytte andre datainnsamlingsmetoder i tillegg til observasjon, vil man få muligheten til å gi en enda fyldigere beskrivelse av situasjonen, eller fenomener som oppstår i gjennomføringen (Moksnes Furu i Brekke & Tiller, 2013). Studien hadde dermed ikke bare observasjon som datainnsamlingsmetode, men også innsamling av skriftlige elevbesvarelser, og lydopptak av elevenes verbale diskusjoner. Flere innsamlingsmetoder og større data, bidro til fyldigere resultater og et mer korrekt bilde på elevenes aktivitet og matematisering.

I den fjerde fasen av aksjonsforskning, refleksjon, handler validitet om hvordan forsker tolker dataene (Hammersley & Atkinson, 1983). Teusner (2016) stiller spørsmål ved om forskerens stilltiende kunnskap om deltakerne kan bidra til å feiltolke data, skape mistolkninger, eller gå glipp av viktig informasjon. En lærer innehar mange opplysninger og kunnskap om deltakerne i forskningsprosessen, som han/hun ikke kan benytte eller dele i studien. Som lærer og forsker var jeg bevisst mitt kjennskap til elevene, og hvordan kunnskap jeg hadde om dem kunne påvirke tolkningen av data. Jeg kjenner elevene fra før, og har noe erfaring med hvordan de jobber i matematikktimene. Et viktig moment som jeg har forsøkt å utføre gjennom forskningsprosessen er å være åpen om mitt forhold til deltakerne, min egen kunnskap, engasjement samt hvordan min involvering kan påvirke forskningen.

Hammersley (1993) skriver at ingen forskningsposisjon garanterer gyldig kunnskap. Hver forskningsmetode og vitenskapsteoretisk posisjonering har klare fordeler og ulemper, avhengig av omstendigheter og formålet med forskningen. Hammersley og Atkinson (1983) poengterer at det viktigste i en forskningsprosess er at forsker er så ærlig som mulig i egen rapporteringen av forskningen. Kvale (1997) oppsummerer godt hva som er viktig for å bevare forskningens validitet og troverdighet i aksjonsforskning, der lærer er forsker i egen undervisningspraksis. Han skriver at det viktigste handler om at en leser som inntar samme perspektiv som forskeren har uttrykt, kan se det forskeren har sett, uavhengig om man er enig eller ikke. Jeg har derfor gjennom hele prosessen vært bevisst på viktigheten av å begrunne og forklare hva som er tenkt, utført og tolket, slik at andre kan sette seg inn i studien og hele dens prosess.

3.9 Etikk

I forkant av studiens gjennomførelse ble den vurdert og godkjent av NSD. Studien har tatt utgangspunkt i og fulgt NSD sine etiske retningslinjer for forskningsprosjekter og datahåndtering (nsd.no). Det ble i forkant av studiens gjennomføring informert muntlig samt levert ut et informasjonsskriv og samtykkeskjema til hver deltaker. Studiens utvalg var 10.trinn og deltakerne var over 15 år, og samtykket selv om de ønsket å delta eller ikke. Samtykkeskjemaet ga spesifikk og tydelig informasjon om hva elevene deltok på, og det kom tydelig frem at det var frivillig, og at de som ikke deltok ikke skulle bli skadelidende. Et viktig moment var at det ikke skulle komme frem noen tvetydigheter, og at det var like lett for deltakerne å trekke samtykket tilbake som å samtykke. Alle elevene i klassen samtykket til å delta og for at det var i orden at forsker samlet inn de skriftlige besvarelsene. I tillegg samtykket alle deltakerne til at det var i orden at en lydopptaker ble plassert på et gruppebord i klasserommet.

Samtykkeskjemaene ble lagret som originaler gjennom hele prosjektet og oppbevart i en låst skuff. Det skriftlige datamaterialet (observasjonsnotater og elevbesvarelser) ble samlet inn av forsker og oppbevart i en låst skuff utenom bruk. De skriftlige besvarelsene ble skannet og sendt til datamaskin. Skannede dokumenter og transkripsjoner ble lagret på en kryptert, ekstern harddisk med krav om passord. Minnepennen ble holdt innelåst utenom bruk. Det er kun forsker og veileder som har hatt innsyn i datamaterialet som ble samlet inn. Alt av data ble anonymisert. De skriftlige besvarelsene omtales som besvarelse 1,2,3 osv. Observasjonsnotater omtaler elevgruppen som helhet, og omtaler gruppene og elevene med tall (gruppe 1, gruppe 2, elev 1, elev 2 …). Det ble lånt en sikret, ekstern diktafon fra Nord universitet. Lydopptaket ble umiddelbart transkribert, og deretter slettet. I transkripsjonen ble elevene anonymisert og omtalt som elev 1, elev 2 osv. Alt datamateriale ble tatt vare på av meg inntil prosjektet var ferdig. Deretter ble det slettet med ekstra sikring, og skriftlige dokumenter ble makulert.

Spørsmålene omkring forskningens påvirkning på elevene, fremmer ikke bare et metodisk problem, men også etiske. Personvernombudet gir klare retningslinjer for hvordan en som forsker skal forholde seg til deltakerne, hvilke retningslinjer en må følge, samt hvilke momenter en må være bevisst på (NSD). Forsker må sikre at deltakerne frivillig er med i studien, og at de ikke blir skadelidende hvis de ikke deltar. Et viktig moment er at lærer/forsker ikke utnytter seg av opplysninger en har, eller får, i forkant om elevene, og overfører de til egen forskning. I tillegg har lærer taushetsplikt, og kan ikke dele opplysninger som kommer frem under forskningen. Personvernombudet trekker også frem at når lærer også er forsker har han/hun en dobbeltrolle. Et viktig moment er at en klarer å skille mellom rollen som lærer og rollen som forsker. Samtidig må det være tydelig for deltakerne når en er i hvilken rolle, og når en samler inn data (NSD).

4 Analyse

For å imøtekomme studiens forskningsspørsmål som var: *På hvilken måte gjenoppdager elevene den formelle matematikken innenfor temaet algebra og likninger, i en undervisningsøkt med en historisk tilnærming?* Er analysen strukturert ut ifra det teoretiske rammeverket RME. Analysen er delt inn i kategoriene «didaktisk fenomenologi», «veiledet gjenoppdaging» og «matematisering». Innenfor kategorien «didaktisk fenomenologi» beskrives det hvordan elevene ble aktivisert i undervisningsopplegget, og om de ble engasjert og fant mening i den historiske konteksten. I kategorien «veiledet gjenoppdaging» blir det fremmet hvilke utfordringer elevene møtte, og hvordan, samt hvor mye, lærer veiledet underveis. Under kategorien «matematisering» presenteres først en tabelloversikt som viser elevenes ulike matematiseringsruter og type matematisering. Deretter blir fire matematiseringsruter trukket frem og beskrevet nærmere. Analysens struktur og kategorier er utformet med tanke på at datamaterialet skal fremme et helhetlig bilde, på hvordan elevene ble engasjert og matematiserte innenfor undervisningsopplegget.

4.1 Didaktisk fenomenologi

Undervisningen begynte med en felles oppstart, der lærer snakket om den historiske tidsepoken, oldtidens Egypt. Elevene ble engasjerte og diskuterte hvilken matematikk som fantes på den tiden. De trakk spesielt frem pyramidene. Videre presenterte lærer det matematiske temaet for timen som var algebra og likninger. I tillegg fortalte lærer at elevene skulle jobbe med flere problemer som egypterne jobbet med, samt lære deres metode for å løse likninger. Første problem ble presentert felles, og lærer la opp til en diskusjon rundt hva en «*mengde*» konkret kunne være. Elevene deltok aktivt i diskusjonen og kom med forslag om steiner, slaver, vann, grus, sand og mat. Det ble avslørt at når egypterne benyttet ordet «*mengde*», handlet det om å beregne riktig mengde korn for å lage øl. Elevene uttrykte at det var interessant, og satte raskt i gang med å forsøke å løse første problem. Elevene benyttet stort sett ordet «*mengde*», som var formulert i oppgaveteksten, når de jobbet med problemene.

Gjennom hele undervisningsøkten var det stor elevaktivitet. Elevene jobbet med oppgavene, diskuterte og spurte om hjelp hvis de ikke fikk det til. Elev 3 uttrykte at oppgavene var gøy å jobbe med, og han opplevde mestring ved at han både klarte å benytte falsk posisjon, i tillegg til å sette opp likning. Elev 3 sa til lærer:

> «Syntes det var veldig bra. Fikk det til etter hvert, og syntes det var gøy. Kunne regnet videre og videre faktisk.»

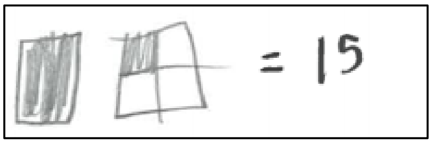
Flere uttrykte at det var interessante oppgaver, og greie timer. Elev 5 var imidlertid mer umotivert og brukte lang tid på å komme i gang med oppgavene. Eleven viste lite interesse i å samarbeide med de andre på gruppa, og trengte en god del oppmuntring og veiledning for å komme i gang.

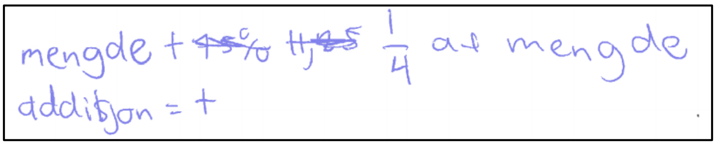
Lærer gikk gjennom egypternes metode felles på tavla. Elevene stilte få spørsmål, og satte i gang arbeidet etterpå. Noen klarte å benytte egypternes metode for å løse problemene raskt og selvstendig mens andre trengte veiledning for å komme i gang. Elevene jobbet i grupper, og noen av gruppene fungerte godt der de diskuterte og støttet seg på hverandre. Grupper som jobbet godt sammen var gruppe 1 (elev 1 og 2) og gruppe 4 (elev 8 og 9). Ved de andre gruppene jobbet elevene mer selvstendig med oppgavene. Elevene arbeidet og løste oppgavene i ulikt tempo. Lærer var påpasselig med å gå gjennom hver oppgave og påse at alle visste hva de skulle gjøre, og at de skulle notere ned sine tanker og utregninger på oppgavearket. Det at det var en forskningssituasjon påvirket undervisningen på den måten at det ble litt oppstykket. Elev 1 og 2 måtte vente litt til de andre var ferdige med første oppgave, før lærer forklarte egypternes metode felles og de alle kunne jobbe videre med problemene i sitt eget tempo. I tillegg ble elevene spurt om å forklare sine resonnementer en ekstra gang, slik at lærer skulle få notert det ned.

Elev 1 og 2 utrykte at de likte å benytte likninger i stedet for egypternes metode, og mente det var best. De reflekterte imidlertid over at det kan være nyttig for andre å jobbe med en annen metode. Elev 1 skrev følgende i sin skriftlige besvarelse: «Vanlig er enklere for meg. Egypternes metode kan være enklere for andre.» Oppgave 4 var mest utfordrende for elevene. Det ble i tillegg litt dårlig tid for noen elever å ordentlig sette seg inn i spørsmålene og undersøke om egypternes metode fungerte for andre type likninger, samt forklare hvordan den fungerer.

4.2 Veiledet gjenoppdaging

Elevene møtte flere utfordringer underveis i arbeidet med oppgavene. En utfordring som noen av elevene møtte var å tolke problemet og oppgaveteksten. Det var utfordrende å trekke ut hva teksten forklarte, samt oversette det til matematisk språk. For noen elever hjalp det veldig at lærer leste problemet høyt, med tydelig trykk på hver del. Spørsmål som lærer stilte samtlige elever, var: «Hva betyr en fjerdedel av *mengden*?», «hva betyr det når det står adderes?», «Hva betyr det når det står det blir til sammen?» Jeg oppfordret i tillegg elevene til å forsøke å få det ned på arket hva hver del betydde og hvordan regnestykket ville bli. Utfordringene med å tolke problemet og oppgaveteksten var mest tilstedeværende ved de første to oppgavene. Etter hvert falt det mer naturlig å tolke problemet del for del, og skrive ned hvordan regnestykket blir. Nedenfor ser vi to eksempler på hvordan elevene tolket oppgaveteksten og satte opp problemet.





På elevbesvarelsen til venstre benyttet eleven en arealmodell, der det først er tegnet en hel, som representerer hele *mengden*, og deretter en fjerdedel av hele *mengden*. Til sammen ble det 15. Til høyre ser vi et eksempel der en annen elev presenterte problemet ved å skrive «mengde + $\frac{1}{4}$ av mengde».

En annen utfordring som noen elever møtte, var å benytte og forstå egypternes metode, falsk posisjon. Noen elever mestret den raskt og uten veiledning fra lærer, mens andre trengte en ekstra gjennomgang samt noen veiledende spørsmål for å mestre metoden. Veiledende spørsmål som lærer stilte, var; «hvis vi skal gjette et tall for *mengden*, hvilket tall vil gjøre regnestykket enkelt?» I henhold til oppgave 2a, responderte en elev med å foreslå å gjette at *mengden* var 8. Lærer sa da at eleven kunne forsøke, og se om regnestykket ble enkelt å løse. Eleven fant raskt ut at det ble utfordrende å finne en tredjedel av 8. Lærer stilte spørsmålet «hvilket tall kan både deles på 2 og 3?» Noen elever kom med forslag om at de kunne sette *mengden* som 6, mens andre benyttet 12 som sin gjetning. Etter at elevene hadde valgt en verdi for *mengden*, gikk det grei for alle elevene å utføre utregninger og finne et feilsvar. For noen ble det en utfordring å benytte feilsvaret til å finne riktig verdi for *mengden*. Eksempelvis var oppgave 3a utfordrende. Noen elever gjettet at *mengden* var 7, mens andre gjettet at *mengden* var 14. Setter vi *mengden* lik 14 blir regnestykket $14 + \frac{14}{2} = 16$. Det ble en utfordring for noen elever å finne ut hva man må multiplisere med 16 for å få 19. Veiledende spørsmål som lærer stilte var «hvordan kan vi finne ut hva vi må multiplisere med 16 for å få 19?», «hvilken sammenheng er det mellom multiplikasjon og divisjon?». Noen elever responderte med å si at man kan dividere 19 på 16 for å finne det ut. Elevene benyttet kalkulator for å benytte divisjon til å finne ut hva de må multiplisere med feilsvaret for å få riktig svar.

Noe som også var utfordrende for noen elever, var å sette opp problemet som en likning ved bruk av algebraisk notasjon. Spørsmål som lærer stilte til flere elever handlet først og fremst om hva oppgaveteksten forteller oss. Hvilken informasjon får vi og hvordan kan vi skrive det opp. Når de hadde fått oversikt over problemet, spurte lærer samtlige elever «hvordan kan vi enkelt representere *mengden* i regnestykket du har satt opp?» Noen elever kom med forslag om «*m*» eller «*x*». De forsøkte deretter å bytte ut ordet *mengde* med *m*, og en elev skrev eksempelvis opp:

$$\frac{m}{2} + \frac{m}{3} + m = 44$$

Da elevene lyktes i å sette opp problemet som likning, oppsto det, for noen elever, nye utfordring tilknyttet det å løse den opp. Lærer stilte spørsmål som: «hvordan kan du gå frem for å finne *mengden* ut ifra likningen du har her?», Elevene ble bedt om å tenke og selv komme med forslag om neste steg. Noen responderte med at de måtte multiplisere med felles nevner slik at det ble enklere. Noen elever fant ut at de kunne multiplisere alle ledd på begge sider av likhetstegnet med 6 for å komme videre i løsningen. Andre elever benyttet en fremgangsmåte der de utvidet brøkene og adderte de, før de videre multipliserte alle ledd med brøkens nevner. En veiledende kommentar som lærer kom med til samtlige elever handlet om likhetstegnets betydning, og at de måtte passe på at hvis de gjorde noe på den ene siden, måtte de også gjøre det på den andre siden.

Oppgave 4 var, som forutsett, en utfordring for elevene. Flere elever undersøkte om egypternes metode fungerte for andre type likninger, samtidig som at de utforsket om de fikk samme svar ved å løse likningen på «vanlig» måte. Det som ble en utfordring, og som ingen kom helt i mål med var å gi en tilstrekkelig forklaring på hvordan egypternes metode fungerer. Det var tilløp til verbal forklaring fra noen elever, og en elev gjorde et forsøk på å generalisere. Eksempelvis skrev den ene eleven «$m : 7 = a \quad og \quad a + m = x \cdot b = 19$» i arbeidet med oppgave 3b, og forsøkte å jobbe videre med det i oppgave 4.

$$m \div 7 = a$$
$$a + m = x \cdot b = \underline{\underline{19}}$$

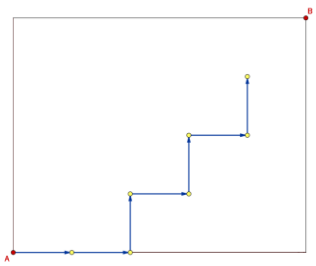
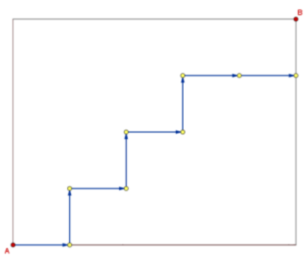
$$m \div 7 = a$$
$$a + m = x \cdot b = X$$

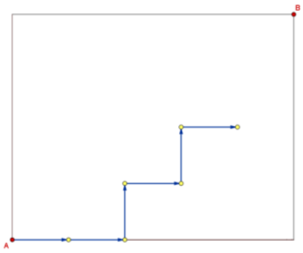
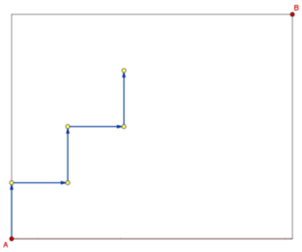
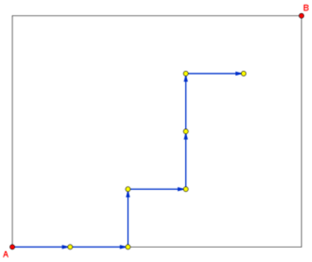
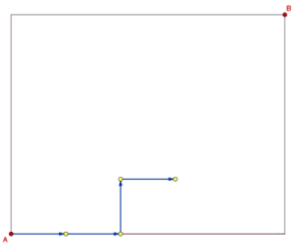
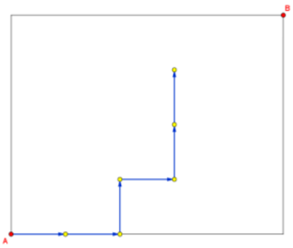
Lærer rakk ikke å veilede eleven som har skrevet elevbesvarelsene vi ser ovenfor, eller å stille spørsmål omkring hva eleven har tenkt. Det sto ingen videre forklaring på oppgavearket, eller ble diskutert høyt med det andre gruppemedlemmet. For de elevene lærer rakk å veilede ble det stilt spørsmål som «vil egypternes metode alltid fungere, uavhengig hvilken type likning det er?», «hvordan kan du finne det ut?», «en god begynnelse er å undersøke om det stemmer, forsøk å benytte egypternes metode for å løse likningene som står her». Flere elever observerte at det fungerte og at de fikk likt svar uavhengig metode de benyttet. Det var imidlertid vanskelig å forklare hvorfor. En av elevene fremmet at det kom til å være mer utfordrende å benytte egypternes metode hvis det var enda mer kompliserte likninger. Noen elever fikk dårlig tid til å besvare spørsmålene på oppgave 4.

4.3 Matematisering

Det var totalt 9 elever som deltok i undervisningen. Elevenes matematisering ble gjennomgått, og det ble tegnet matematiseringsruter som illustrerer deres steg i arbeidet med oppgavene. Elev 1 og 2, samt elev 8 og 9, samarbeidet tett og har felles matematiseringsruter. Resten av elevene jobbet selvstendig og har en individuell rute. I tabell 3 nedenfor ser vi til venstre en skisse over elevenes ulike matematiseringsruter. De to neste kolonnene beskriver kort elevenes horisontale og vertikale matematisering. Tabellen ble laget med den hensikt å gi et oversiktlig og helhetlig bilde på hvilke ruter elevene gikk, og hvordan de matematiserte innenfor undervisningsøkten. Fra tabell 2 har jeg valgt ut fire matematiseringsruter, som blir beskrevet detaljert og underbygget med skriftlige besvarelser, muntlige diskusjoner samt observasjon. De fire rutene som er valgt er forskjellige, og bidrar til å fremme detaljer samt variasjoner i elevenes matematisering.

4.3.1 Tabelloversikt over matematiseringsruter og type matematisering

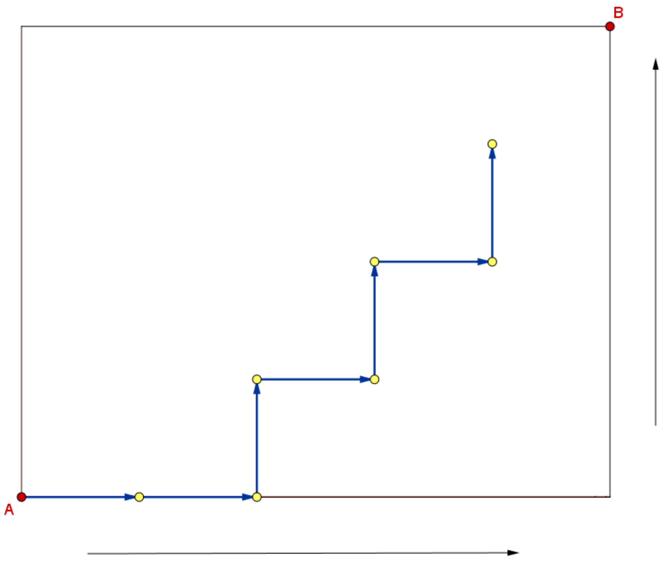
Matematiseringsruter	**Horisontal matematisering**	**Vertikal matematisering**
1 (Elev 1 og 2)  	- Tolker problemene/oppgaveteksten og resonnerer seg frem til *«mengdens»* verdi - Benytter egypternes metode for å finne *«mengden»* - Undersøker om egypternes metode fungerer på likninger på en annen form	- Generaliserer problemet og setter opp en likning, ved bruk av algebraisk notasjon - Løser likninger med hensyn på *x*, der *x* representerer *«mengden»* - Løser likninger med hensyn til *x*, der likningen ikke er tilknyttet et spesifikt problem
2 (Elev 3)  	- Tolker problemene/oppgaveteksten - Benytter egypternes metode for å finne *«mengden»* - Forsøker å forklare hvordan egypternes metode fungerer - Undersøker om egypternes metode fungerer for likninger på en annen form	- Generaliserer problemet og setter opp en likning, ved bruk av algebraisk notasjon - Løser likninger med hensyn på *x*, der *x* representerer *«mengden»* - Løser likninger med hensyn til *x*, der likningen ikke er tilknyttet et spesifikt problem

3 (Elev 4) 	- Tolker problemene/oppgaveteksten - Benytter egypternes metode for å finne *«mengden»*	- Generaliserer problemet og setter opp en likning, ved bruk av algebraisk notasjon - Løser likninger med hensyn på *m*, der *m* representerer *«mengden»*
4 (Elev 5) 	- Tolker problemene/oppgaveteksten - Benytter egypternes metode for å finne *«mengden»*	- Generaliserer problemet og setter opp en likning, ved bruk av algebraisk notasjon - Løser likninger med hensyn på *m*, der *m* representerer *«mengden»*
5 (Elev 6) 	- Tolker problemene/oppgaveteksten - Benytter en enkel arealmodell for å representere problemet, samt finne *«mengden»* - Benytter en kombinasjon av egypternes metode, og arealmodell for å finne *«mengden»*	- Generaliserer problemet og setter opp en likning, ved bruk av algebraisk notasjon - Løser likninger med hensyn på *x*, der *x* representerer *«mengden»* - Løser en likning med hensyn til *x*, der likningen ikke er tilknyttet et spesifikt problem
6 (Elev 7) 	- Tolker problemet/oppgaveteksten, og representerer *«mengde»* som *«mengde grus»* - Benytter en enkel arealmodell for å representere problemet, samt finne *«mengden»*	- Generaliserer problemet og setter opp en likning, ved bruk av algebraisk notasjon - Løser likningen med hensyn på *x*, der *x* representerte *«mengden»*
7 (Elev 8 og 9) 	- Tolker problemet/oppgaveteksten - Prøver og feiler for å finne riktig verdi for *«mengden»* - Benytter egypternes metode for å finne *«mengden»*	- Forsøker å generalisere egypternes metode, både i tilknytning til et spesifikt problem, samt uavhengig av et problem

Tabell 3: Oversikt over elevenes matematiseringsruter

4.3.2 Matematiseringsrute 1

Matematiseringsrute 1 i figur 7 tilhører elev 1 og 2. De samarbeidet godt ved at de diskuterte oppgavene og løste de sammen. De løste oppgavene raskt, og mestret både egypternes metode og det å sette opp en likning og løse den. De behøvde lite veiledning, men ble utfordret til å forklare sin tankegang. Elevene har fire horisontale steg, og tre vertikale steg.



Figur 7: Matematiseringsrute 1

Horisontal matematisering

Steg 1, 2, 4 og 6 i matematiseringsrute 1 er horisontale. 1. steg representerer elevenes arbeid med oppgave 1. Elevene matematiserte horisontalt ved at de utforsket og tolket problemet. De diskuterte oppgaveteksten og resonnerte seg frem til hva en *mengde* kunne være. Nedenfor ser vi elev 1 sin skriftlige besvarelse.

$15:5 = 3 \cdot 4 = 12$

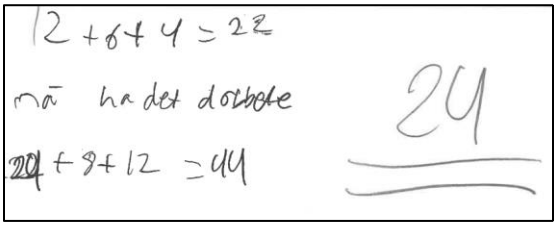
$15:3 = 3 \cdot 4 = 12$

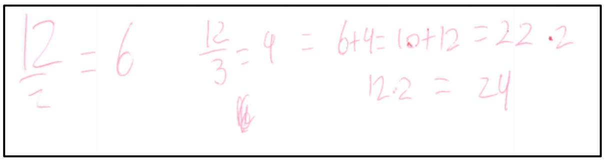
Elev 2 forklarte deres fremgangsmåte på følgende måte:

> «Jeg tok. Eller jeg visste at fire fjerdedeler er en hel, og så skal vi plusse på en fjerdedel og det blir 5. Og så er det til sammen 15, og da ble det 15 delt på 5 som blir 3, og så ganger vi med 4 siden det er fire fjerdedeler som da blir 12.»

Deres resonnement gikk ut på at de tenkte at en hel mengde er fire fjerdedeler. De adderte deretter en fjerdedel, og fikk 5 fjerdedeler. De dividerte videre 15 på 5 og fikk at en fjerdedel av *mengden* er 3. De multipliserte videre 3 med 4 siden en hel *mengde* er fire fjerdedeler. De fant med det ut at *mengden* er 12. Elevene resonnerer godt, men det kan bemerkes at elevene ikke her benytter likhetstegnet på korrekt måte, men benytter det mellom ulike regnestykker.

Elevenes 2. steg er også horisontal matematisering, og viser deres arbeid med oppgave 2a. De benyttet metoden falsk posisjon og løste problemet ved å gjette en verdi for *mengden*, regne ut et feilsvar, og deretter benytte feilsvaret for å finne *mengden*. Til høyre nedenfor ser vi elev 2 sine utregninger, og til venstre ser vi elev 1 sine utregninger.





$$12 + 6 + 4 = 22$$

«må ha det dobbelte»

$$24 + 8 + 12 = 44$$

$$24$$

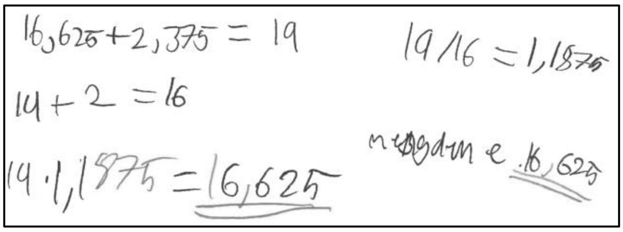
$$\frac{12}{2} = 6 \qquad \frac{12}{3} = 4$$

$$= 6 + 4 = 10 + 12 = 22 \cdot 2$$

$$12 \cdot 2 = 24$$

Elevene gjettet at *mengden* var 12, og adderte det med $\frac{12}{2}$ som er 6, og med $\frac{12}{4}$ som er 4. Til sammen ble det 22. De så at de trengte det dobbelte av 22 for å få 44, og multipliserte derfor gjetningen med 2. De fant dermed ut at riktig verdi for *mengden* var 24. Elev 2 viser også at det å doble hvert ledd gir riktig sum, som er 44.

Elev 1 og 2 sitt 4. steg er horisontalt, og illustrerer arbeidet med oppgave 3a, der de benyttet egypternes metode for å løse problemet og finne *mengden*. Nedenfor ser vi først elev 2 sine utregninger, og deretter elev 1 sine utregninger.



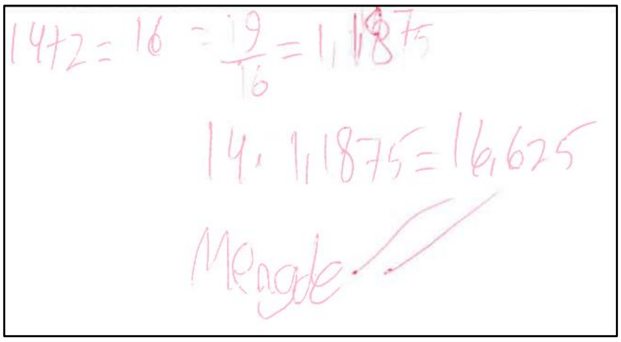
$$16{,}625 + 2{,}375 = 19$$

$$14 + 2 = 16$$

$$\frac{19}{16} = 1{,}1875$$

$$14 \cdot 1{,}1875 = 16{,}625$$

Mengden er 16,625



$$14 + 2 = 16$$

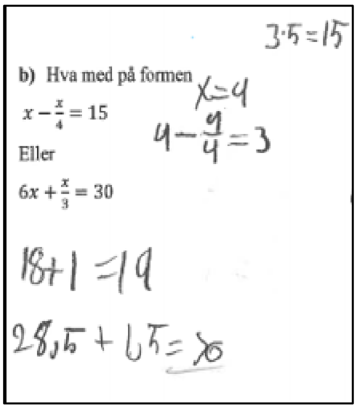
$$\frac{19}{16} = 1{,}1875$$

$$14 \cdot 1{,}1875 = 16.625$$

$$= mengde$$

Elevene gjettet at *mengden* var 14. De skrev $14 + 2 = 16$, der 2 kommer fra utregningen $\frac{14}{7} = 2$. For å finne ut hva de måtte multiplisere med 16 for å få 19, delte de 19 på 16 og fikk 1,1875. Videre multipliserte de 1,1875 med gjetningen som var 14, og fant at *mengden* var 16,625. Elev 2 har i tillegg regnet ut hva $\frac{16{,}625}{2}$ er for å se at det stemmer med oppgaveteksten; $mengde + \frac{mengde}{2} = 19 \quad \rightarrow \quad 16{,}625 + 2{,}375 = 19$. Elevene viser at de behersker egypternes metode, og har funnet en uformell måte å føre utregningene.

6.steget i matematiseringsruten illustrerer noe av elevenes arbeid med oppgave 4. De forsto ikke hvordan de skulle forklare hvordan egypternes metode fungerer, men de undersøkte om egypternes metode ville fungere for andre typer likninger, som ikke var tilknyttet noe praktisk problem. De diskuterte også om hvorvidt egypternes metode ville fungere for andre type likninger enn de presentert på oppgavearket. Nedenfor ser vi deres utregninger. Elev 2 sin besvarelse er til høyre, og elev 1 sin besvarelse er til venstre.



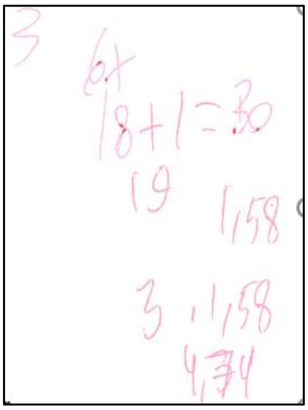
$$x = 4$$

$$4 - \frac{4}{4} = 3$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$18 + 1 = 19$$

$$28{,}5 + 1{,}5 = 30$$



$$3$$

$$6x$$

$$18 + 1 = 30$$

$$19$$

$$1.58$$

$$3 \cdot 1.58$$

$$4{,}74$$

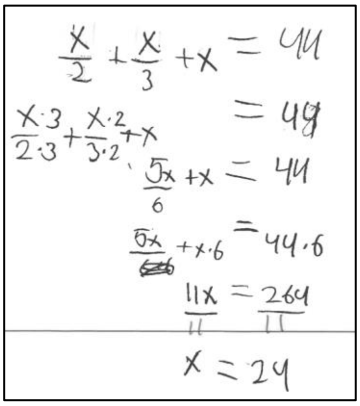
For å løse likningen $x - \frac{x}{4} = 15$, gjettet Elev 2 at $x = 4$. Eleven fikk da regnestykket $4 - \frac{4}{4} = 3$. Eleven ytret videre muntlig: «fem gange fire er tjue, så *x* er tjue». For likningen $6x + \frac{x}{3} = 30$, gjettet både elev 1 og 2 at *x* var 3. De fikk da $18 + 1 = 19$. For å finne ut hva de må multiplisere med 19 for å få 30, utførte de divisjonen $\frac{30}{19} = 1{,}58$. Videre multipliserte de gjetningen, som var 3, med 1,58, og fikk til svar at $x = 4{,}74$. Elev 2 sjekket om svaret de fikk stemte, ved å sette $x = 4{,}74$ inn i likningen. Om hvorvidt egypternes metode ville fungere for alle typer likninger, sa elev 2:

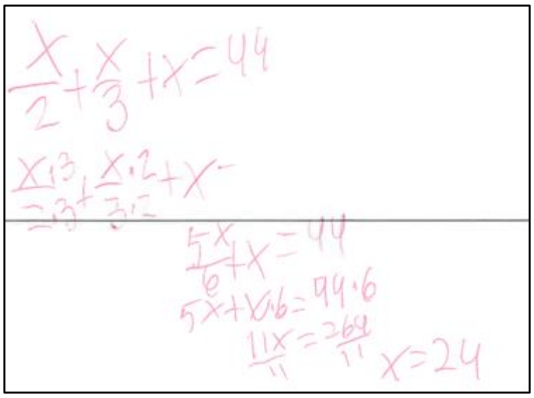
> «tror egypternes metode vil bli vanskelig når det blir mer kompliserte likninger. Jeg synes uansett det er lettere med likning. Men jeg forstår at kanskje egypternes metode er lettere for noen på sånne enkle likninger.»

Elev 1 var enig med elev 2, der de begge tenkte at for vanskeligere likninger, ville egypternes metode bli mer komplisert, og det ville være enklere å løse likningen på vanlig måte. De uttrykte at selv likte de å løse likninger på vanlig måte fordi de syntes det var enkelt, men de kunne forstå at andre syntes det var enklere med egypternes metode.

Vertikal matematisering

Elevene matematiserte vertikalt på det 3. 5. og 7. steget i matematiseringsrute 1. På det 3. steget matematiserte elevene vertikalt i arbeidet med oppgave 2b. De generaliserte problemet og satte opp en likning ved at de benyttet algebraisk notasjon. De benyttet variabelen *x* for å representere *mengden* i regnestykket. Til høyre nedenfor ser vi elev 2 sine utregninger, mens til venstre ser vi elev 1 sine utregninger.





$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+x=44$$

$$\frac{x\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{x\cdot 2}{3\cdot 2}+x=44$$

$$\frac{5x}{6}+x=44$$

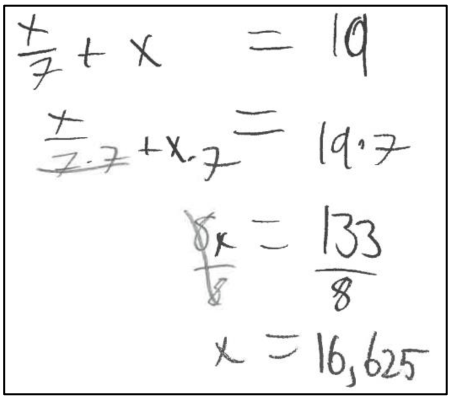
$$\frac{5x}{6}\cdot 6+x\cdot 6=44\cdot 6$$

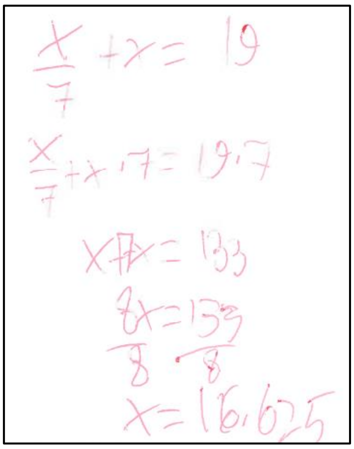
$$\frac{11x}{11}=\frac{264}{11}$$

$$x=24$$

Elevene begynte med å utvide brøkene slik at de fikk 6 i nevner. Deretter adderte de $\frac{3x}{6}$ og $\frac{2x}{6}$ og fikk $\frac{5x}{6}$. Videre multipliserte elevene alle ledd med 6 for å bli kvitt brøken i regnestykket. De sto da igjen med $11x = 264$. Elevene delte deretter begge sider av likhetstegnet med 11, og fant at $x = 24$. Elevene så at svaret de fikk ved å løse opp likningen, var det samme som når de benyttet egypternes metode.

Det 5.steget i matematiseringsruten er også vertikalt, og illustrerer elevenes arbeid med oppgave 3b. Elevene generaliserte og satte opp problemet som en likning, for deretter å løse den med hensyn på *x*. Nedenfor ser vi elevenes utregninger, der elev 2 er til høyre og elev 1 er til venstre.





$$\frac{x}{7}+x=19$$

$$\frac{x\cdot 7}{7}+x\cdot 7=19\cdot 7$$

$$x+7x=133$$

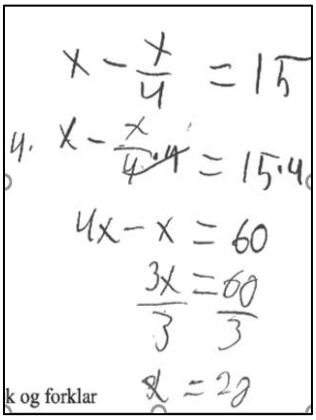
$$8x=133$$

$$\frac{8x}{8}=\frac{133}{8}$$

$$x=16.625$$

Elevene begynte med å multiplisere alle ledd med 7, slik at de fikk $x + 7x = 133$. Deretter adderte de *x* og *7x*, og fikk $8x = 133$. Videre dividerte de begge sider med 8, og fikk at $x = 16{,}625$. Verdien de fikk for *mengden* ved å sett opp likning og løse den, var lik den de fant ved å benytte egypternes metode.

Det 7.steget illustrerer elevenes arbeid med oppgave 4. Tidligere ble det beskrevet at de undersøkte om egypternes metode fungerte på andre type likninger. For å se om egypternes metode ga riktig svar, løste de opp likningene med hensyn på *x*.



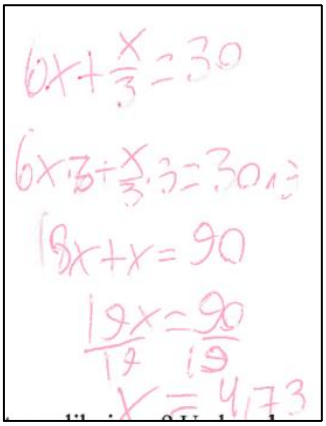
$$x - \frac{x}{4} = 15$$

$$4x - \frac{x}{4} \cdot 4 = 15 \cdot 4$$

$$4x - x = 60$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{60}{3}$$

$$x = 20$$



$$6x + \frac{x}{3} = 30$$

$$6x \cdot 3 + \frac{x}{3} \cdot 3 = 30 \cdot 3$$

$$18x + x = 90$$

$$19x = 90$$

$$\frac{19x}{19} = \frac{90}{19}$$

$$x = 4{,}73$$

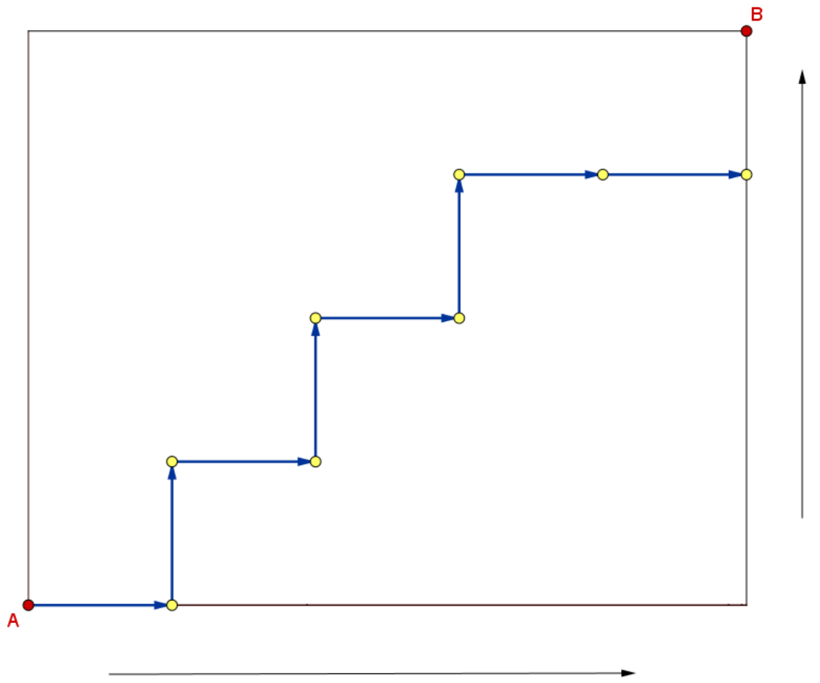
Elev 2 sin besvarelse er til venstre, og illustrerer hvordan eleven løste likningen $x - \frac{x}{4} = 15$. Eleven multipliserte alle ledd med 4, og fikk $4x - x = 60$. Eleven trakk sammen $4x - x$ til *3x*, og delte deretter begge sider av likhetstegnet på 3. Eleven fikk at $x = 20$. Besvarelsen til høyre viser elev 1 sine utregninger i arbeidet med likningen $6x + \frac{x}{3} = 30$. Eleven multipliserte alle ledd med 3, for å få bort brøken, og trakk deretter sammen $18x + x$, og fikk $19x = 90$. Eleven delte videre begge sider av likhetstegnet på 19, og fikk at $x = 4{,}73$.

Gjenoppdaget de den formelle matematikken?

Elevene matematiserte progressivt, der det var sammenheng mellom horisontal og vertikal matematisering. De matematiserte horisontalt ved at de tolket de praktiske problemene, samt forklarte hva oppgaveteksten ga av informasjon. Videre benyttet de først en uformell metode der de resonnerte, før de tok i bruk egypternes metode, og deretter generaliserte problemet ved å sette opp en likning og løse den. Elevene viste at de behersket å benytte algebraisk notasjon, samt vet hva variablene representerte i likningene. De undersøkte hvordan egypternes metode fungerer på andre type likninger, og reflekterte over hvordan den ville fungere ovenfor mer kompliserte likninger. På matematiseringsrute 1 ser vi at elevene ikke har nådd helt opp til sluttpunktet (B). Elevene har nådd nesten alle læringsmål for timen, men fant det utfordrende å forklare hvordan egypternes metode fungerer. For å gå det siste steget opp, kunne de generalisert egypternes metode, og benyttet det til å forklare hvordan den fungerer.

4.3.3 Matematiseringsrute 2

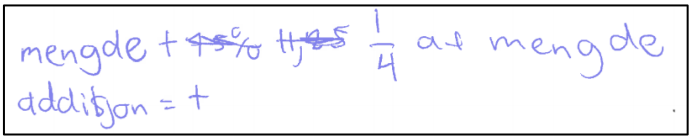
Elev 3 jobbet individuelt med oppgavene. Eleven var engasjert i arbeidet med problemene og benyttet både egypternes metode, samt å sette opp likning og løse. Eleven matematiserte både horisontalt og vertikalt. Nedenfor i Figur 8 ser vi elev 3 sin matematiseringsrute, hvor steg 1, 3, 5, 7 og 8 er horisontale, og steg 2, 4 og 6 er vertikale.



Figur 8: Matematiseringsrute 2

Horisontal matematisering

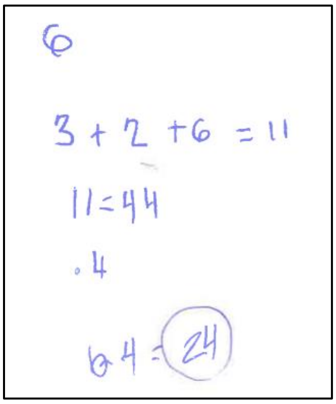
1. steg i matematiseringsrute 2 illustrerer elevens arbeid med oppgave 1. Eleven begynte med å undersøke og tolke problemet, og hente ut den informasjonen som oppgaveteksten ga. Eleven skrev opp problemet på følgende måte som vi ser nedenfor.



$$mengde + \frac{1}{4} av\ mengde$$

Eleven omformulerte problemet, ved å sette inn noen matematiske symboler. «Addere» ble byttet ut med «+», og «en fjerdedel av *mengden*», ble omformulert til «$\frac{1}{4}$ $av\ mengde$». Eleven fikk satt opp problemet på en mer oversiktlig måte, som inkluderte de regneoperasjonene som ble oppgitt i oppgaveteksten.

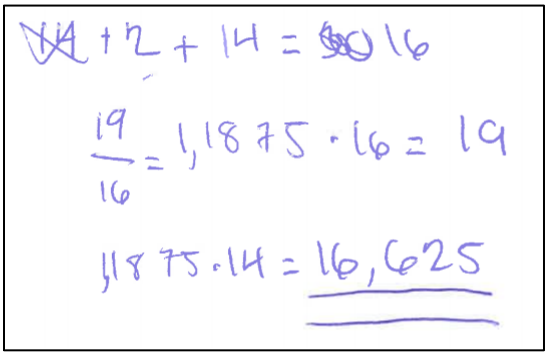
Det 3. steget i matematiseringsrute 2 viser til elevens arbeid med oppgave 2a. Eleven matematiserte horisontalt ved å benytte egypternes metode til å løse problemet. Det ble gjettet en verdi for *mengden* og regnet ut et feilsvar. Videre ble feilsvaret benyttet for å finne riktig verdi for *mengden*. Nedenfor ser vi elevens skriftlige utregninger i arbeidet med problemet.



$$6$$
$$3 + 2 + 6 = 11$$
$$11 = 44$$
$$\cdot 4$$
$$6 \cdot 4 = 24$$

Eleven gjettet først at *mengden* var 6. Videre regnet eleven ut at halvparten av 6 er 3, og en tredjedel av 6 er 2. Eleven adderte 3 og 2 med *mengden*, som er 6, og får 11. Videre fikk eleven at $11 = 44$, noe som ikke stemmer. Eleven ser så at 11 må multipliseres med 4 for at det skal bli 44. 4 blir videre multiplisert med 6, som var gjetningen for *mengden*. Eleven fant da at den riktige verdien for *mengden* var 24.

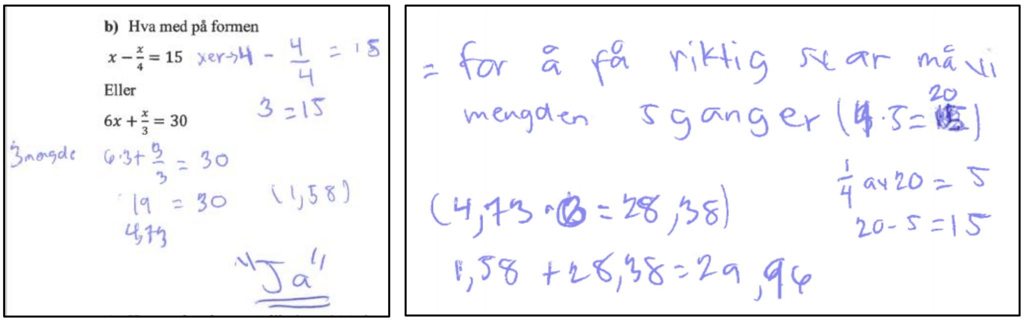
På steg 5 i matematiseringsrute 2 matematiserte også eleven horisontalt, ved å benytte egypternes metode for å løse problemet i oppgave 3a. Elevens skriftlige besvarelse ser vi nedenfor.



$$2 + 14 = 16$$
$$\frac{19}{16} = 1{,}1875 \cdot 16 = 19$$
$$1{,}1875 \cdot 14 = 16{,}625$$

Eleven gjettet at *mengden* var 14, og adderte 14 med en syvendedel av 14, som er 2. Eleven fikk da 16. For å finne ut hva som må multipliseres med 16 for å få 19, dividerte eleven 19 med 16, og fikk 1,1875. Eleven multipliserte så 1,1875 med gjetningen, som var 14, og fikk at *mengden* var 16,625. Det kan bemerkes at eleven her ikke benyttet likhetstegnet på riktig måte, der det blir benyttet mellom ulike regneoperasjoner, $\frac{19}{16} = 1{,}1875 \cdot 16 = 19$, som ikke har lik verdi.

Det syvende steget i matematiseringsrute 2 illustrerer elevens arbeid med oppgave 4, der det blir undersøkt om egypternes metode fungerer på likninger med en litt annen form enn de presentert i problemene. Eleven matematiserte horisontalt ved å utforske og undersøke om metoden fungerer. Eleven fører utregningene på en uformell måte. Nedenfor ser vi elevens skriftlige besvarelser for oppgave 4b.


b) Hva med på formen

$x - \frac{x}{4} = 15$ x er→4 − $\frac{4}{4}$ = 15

Eller

$6x + \frac{x}{3} = 30$ 3 = 15

3mengde 6·3 + $\frac{3}{3}$ = 30

19 = 30 (1,58)

4,73

"Ja"

= for å få riktig svar må vi mengden 5 ganger (4·5 = 20)

(4,73·6 = 28,38)

$\frac{1}{4}$ av 20 = 5

20 − 5 = 15

1,58 + 28,38 = 29,96

3 mengde

$$6 \cdot 3 + \frac{3}{3} = 30$$

$$19 = 30$$

$$1{,}58$$

$$4{,}73$$

$$4{,}73 \cdot 6 = 28{,}38$$

$$1{,}58 + 28{,}38 = 29{,}96$$

$$x = 4$$

$$4 - \frac{4}{4} = 15$$

$$3 = 15$$

«For å få riktig svar må vi *mengden* 5 ganger $(4 \cdot 5 = 20)$»

$$\frac{1}{4}\, av\ 20 = 5$$

$$20 - 5 = 15$$

For å løse likningen $x - \frac{x}{4} = 15$, gjettet eleven at *x* var 4 og satte inn 4 for *x* i likningen. Eleven fikk da $3 = 15$, noe som ikke ble riktig. Eleven konkluderte med at for å få riktig svar måtte *mengden* multipliseres med 5. Eleven fant at $x = 20$, og sjekket om det var riktig ved å finne $\frac{1}{4} av\ 20$, som er 5, og subtraherte fra 20, slik at det ble 15. For å løse likningen $6x + \frac{x}{3} = 30$, gjettet eleven at $x = 3$, og satte inn 3 for *x* i likningen. Eleven fikk da $19 = 30$, som ikke var riktig. Feilsvaret ble videre benyttet til å finne det riktige svaret, ved at eleven dividerte 30 på 19, for å finne hva som må multipliseres med 19 for å få 30. $\frac{30}{19}$ blir 1,58, og eleven multipliserte videre 1,58 med gjetningen, som var 3, for å finne riktig verdi for *x*. Eleven fant at $x = 4{,}73$, og sjekket svaret ved å sette det inn i likningen. Elevens avrundinger i utregningene gjorde at svaret ble omtrent riktig. Ut ifra at egypternes metode fungerte for disse to likningene, konkluderte eleven med at metoden ville fungere for alle typer likninger.

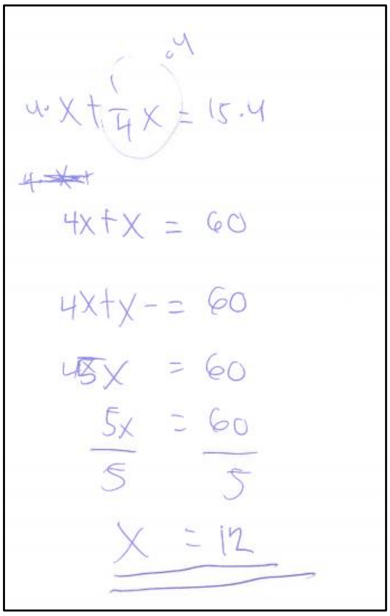
På det 8. steget i matematiseringsrute 2, diskuterer eleven sammenhenger mellom egypternes metode og det å sette opp likning og løse. Eleven skrev:

> «Ja, siden *x* er samme som *mengden* som vi ikke vet. Vi kan bruke *x* i stedet for å gjette som egypterne gjorde før i tiden»

Eleven matematiserer horisontalt, ved at eleven diskuterer og forsøker å forklare sammenhenger mellom egypternes benyttelse av *mengde,* og benyttelsen av variabelen *x* i likninger. Eleven ser en sammenheng med at ordet *mengde* kan byttes ut med *x*, og at det vil fungere hvis man finner *x.* Lærer spør eleven muntlig om å forsøke å forklare hvorfor egypternes metode fungerer. Eleven sa: «det er vanskelig å forklare hvorfor, men jeg skjønner det, skjønner du?». Selv om eleven ikke klarer å sette ord på hvordan metoden fungerer, påpekes det imidlertid flere sammenhenger mellom egypternes metode, og det å sette opp likning og løse. Eleven utrykker at «det er egentlig det samme da. Men at i stedet for *mengde*, så bruker vi *x*, som egentlig er enklere».

Vertikal matematisering

Steg 2, 4 og 6 i matematiseringsruten 2 illustrerer elevens vertikale matematisering. Steg to er en fortsettelse av arbeidet med oppgave 1, der eleven gikk fra å tolke oppgaveteksten og systematisere problemet, til å generalisere og sette det opp som likning, der *mengden* representeres med variabelen *x*. Elevens skriftlige besvarelse ser vi nedenfor.



$$mengde + \frac{1}{4} \text{ av } mengde$$

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

$$4 \cdot x + \frac{1}{4}x \cdot 4 = 15 \cdot 4$$

$$4x + x = 60$$

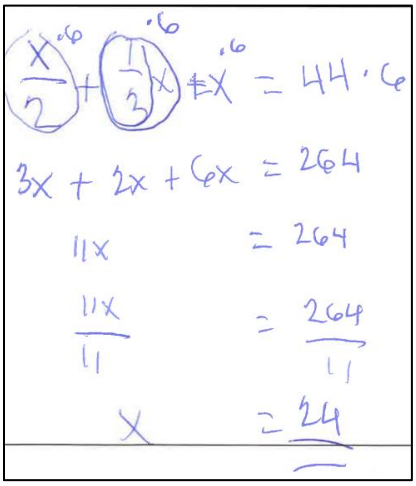
$$5x = 60$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$$

$$x = 12$$

Eleven begynte med å skrive $mengde\ +\ \frac{1}{4} av\ mengde$, og benyttet det som utgangspunkt for å sette opp likningen $x + \frac{1}{4}x = 15$, der *x* representerer *mengden*. Eleven løste videre likningen ved å multiplisere alle ledd med 4, og deretter trekke sammen ledd, slik at det ble $5x = 60$. Videre delte eleven leddene på begge sider av likhetstegnet med 5, og fant at $x = 12$. Eleven sjekket om verdien for *mengden* stemte, ved å sette inn 12 i likningen. Eleven utførte utregningene og forklarte muntlig. Eleven sa: «12 pluss en fjerdedel av 12. en fjerdedel av 12 er 12 delt på fire som er 3, og ja det blir til sammen 15. 12 pluss 3 er 15. så det stemmer».

Det 4. steget i matematiseringsrute 2, illustrerer elevens arbeid med oppgave 2b. Eleven matematiserte vertikalt ved at problemet ble generalisert. Det ble satt opp en likning ved å benytte algebraisk notasjon. Nedenfor ser vi elevens skriftlige utregninger.



$$\frac{x}{2}+\frac{1}{3}x+x=44$$

$$\frac{x}{2}\cdot 6+\frac{1}{3}x\cdot 6+x\cdot 6=44\cdot 6$$

$$3x+2x+6x=264$$

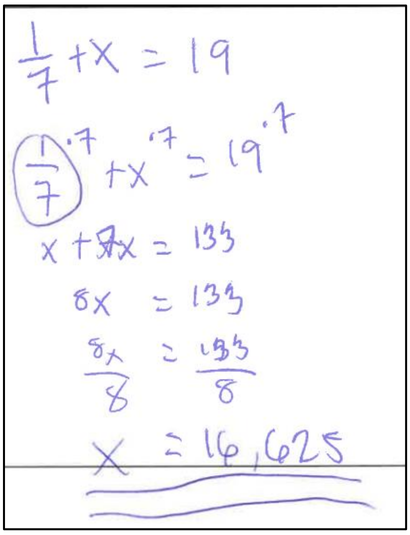
$$11x=264$$

$$\frac{11x}{11}=\frac{264}{11}$$

$$x=24$$

Eleven satte opp likningen $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}x+x=44$, der *x* representerer *mengden*. $\frac{x}{2}$ representerer halvparten av *mengden*, og $\frac{1}{3}x$ representerer en tredjedel av *mengden*. For å løse likningen begynte eleven med å multiplisere alle ledd med 6. Deretter trakk eleven sammen leddene på venstre side og fikk $11x=264$. Neste steg eleven utførte var å dividere begge sider av likhetstegnet med 11. Eleven fant da at $x=24$. Eleven påpekte muntlig at svaret stemte overens med den verdien *mengden* fikk da egypternes metode ble benyttet.

Det 6. steget viser elevens vertikale matematisering i arbeidet med oppgave 3b. I likhet med det 4. steget, generaliserte eleven problemet og satte opp en likning ved å benytte algebraisk notasjon. Nedenfor ser vi elevens skriftlige utregninger.



$$\frac{x}{7}+x=19$$

$$\frac{x}{7}\cdot 7+x\cdot 7=19\cdot 7$$

$$8x=133$$

$$\frac{8x}{8}=\frac{133}{8}$$

$$x=16{,}625$$

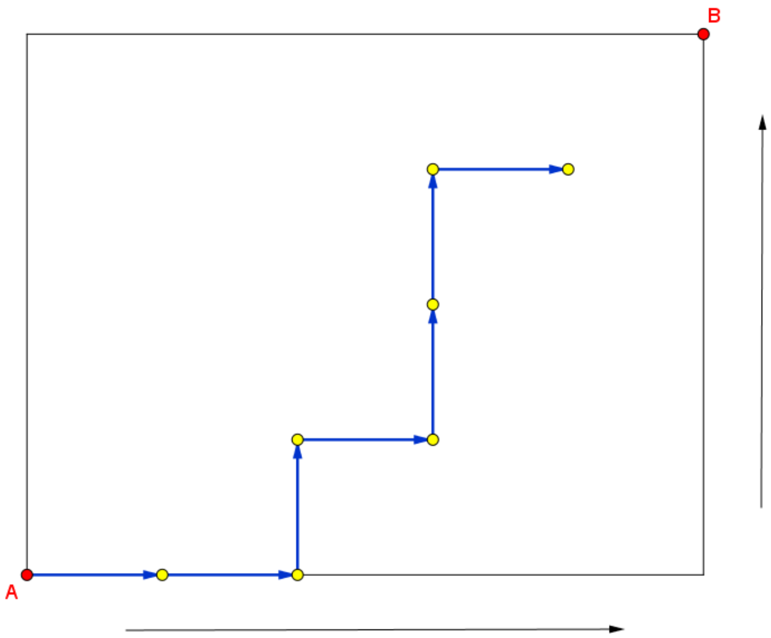
Eleven satte opp likningen $\frac{1}{7}+x=19$. Ser vi lengre ned i utregningene, hvor $\frac{1}{7}\cdot 7\ blir\ til\ x$, mente eleven antageligvis å skrive $\frac{1}{7}x+x=19$. For å løse likningen multipliserte eleven alle ledd med 7, og trakk sammen leddene på venstre side, slik at det ble $8x=133$. Eleven dividerte videre leddene på begge sider av likhetstegnet med 8, og fant at $x=16{,}625$. Eleven sammenliknet svaret med verdien som ble funnet for *mengden* i oppgave 2a, og så at det ble lik verdi for *mengden*.

Gjenoppdaget eleven formell matematikk?

Eleven matematiserte progressivt, der det var sammenheng mellom horisontal og vertikal matematisering. Det ble matematisert horisontalt ved at eleven undersøkte og tolket de praktiske problemene, og forklarte hvilken informasjon oppgaveteksten ga. Videre benyttet eleven både uformelle og formelle metoder for å løse problemene. Eleven benyttet egypternes metode for å finne *mengden*, og eleven generaliserte og satte opp problemet som en likning og fant *mengden* ved å løse opp likningen. Ved å generalisere problemene og sette opp likninger, viser eleven en forståelse rundt hva variablene representerer i likningene, samt en beherskelse av å benytte algebraisk notasjon. Eleven undersøkte hvordan egypternes metode fungerte på andre likninger, og sammenliknet egypternes metode med det å sette opp likning og løse. På matematiseringsrute 2 ser vi at eleven ikke nådde helt opp til sluttpunktet (B). Eleven nådde flere læringsmål for timen, men manglet det siste steget opp. For å gå det siste steget kunne eleven generalisert egypternes metode, og forklart nærmere og mer presist hvordan den fungerer.

4.3.4 Matematiseringsrute 5

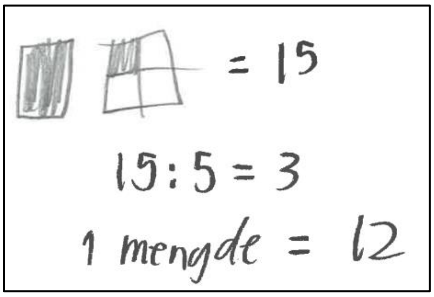
Matematiseringsrute 5 tilhører elev 6. Elev 6 arbeidet individuelt med oppgavene. Eleven matematiserte både horisontalt og vertikalt, ved å benytte både uformelle og formelle metoder i arbeidet med oppgavene. I Figur 9 ser vi eleven sin matematiseringsrute, hvor steg 1, 2, 4 og 7 er horisontale, og steg 3, 5 og 6 er vertikale.



Figur 9: Matematiseringsrute 5

Horisontal matematisering

1. steget er horisontalt og illustrerer elevens arbeid med oppgave 1. Eleven matematiserte horisontalt, ved å utforske og tolke oppgaveteksten, samt resonnere seg frem til et svar. Eleven benyttet en enkel arealmodell for å presentere problemet, og finne ut hvor stor *mengden* var. Nedenfor ser vi elev 6 sine skriftlige utregninger.



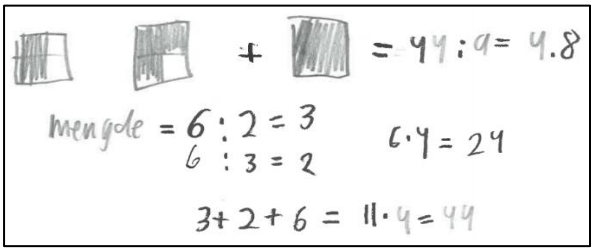
«en hel mengde» og *«en fjerdedel av mengden»* $= 15$

$15 : 5 = 3$

$1\, mengde = 12$

Eleven har tegnet to firkanter, der den første representerer «hele» *mengden*, mens den andre representerer «en fjerdedel» av *mengden*. Til sammen ble det 15. Eleven tenkte antagelig at en hel vil ha fire skraverte ruter, mens en fjerdedel har en skravert rute. Til sammen blir det 5 skraverte ruter. Det er en figurativ måte å fremstille $\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$. Siden det ble fem ruter, delte eleven summen, 15, på fem for å finne ut hvor mye «*en del*» var. 15 delt på 5 ble 3. Eleven benyttet antagelig det videre til å finne ut at *mengden* måtte være 12. Eleven kan ha tenkt at siden en hel *mengde* er fire deler, og «*en del*» har verdien 3, vil *mengden* være 4 multiplisert med 3 som blir 12.

Steg 2 i matematiseringsrute 5 er også horisontal, og viser til elevens arbeid med oppgave 2a. Eleven fortsatte å benytte sin enkle arealmodell, samtidig som at eleven forsøkter å benytte egypternes metode. Nedenfor ser vi elevens besvarelse.



$$\frac{2}{4} av\ mengden + \frac{3}{4} av\ mengden$$
$$+ \frac{4}{4} av\ mengden = 44 : 9$$
$$= 4{,}8$$

$$mengde = 6 : 2 = 3$$

$$6 : 3 = 2$$

$$3 + 2 + 6 = 11 \cdot 4 = 44$$

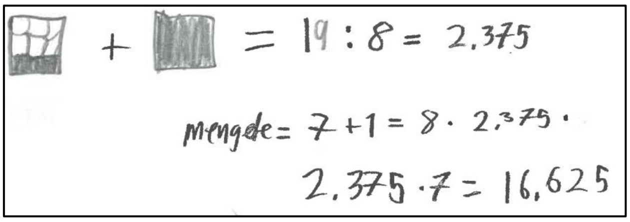
$$6 \cdot 4 = 24$$

Eleven begynte med å benytte en arealmodell for å løse problemet. Eleven tegnet tre firkanter som hver var delt inn i 4 ruter. Den første representerer $\frac{2}{4} av\ mengden$, som tilsvarer halvparten av *mengden*. Den andre firkanten representerer $\frac{3}{4} av\ mengden$. Her har eleven tolket oppgaveteksten feil, hvor det egentlig skulle vært $\frac{1}{3} av\ mengden.$ Den tredje firkanten representerer hele *mengden*, altså $\frac{4}{4} av\ mengden.$ Eleven regnet sammen «delene», og fant at det var 9 deler til sammen. Eleven dividerte videre 44 på antallet deler, som var 9, og fikk 4,8. For at elevens metode skulle blitt riktig, måtte firkantene vært delt inn i eksempelvis 6 deler, hvor den første var $\frac{3}{6} av\ mengden$, den andre var $\frac{2}{6} av\ mengden$, og den siste var $\frac{6}{6} av\ mengden$ (hele *mengden*). Det ville da blitt 11 deler. 44 delt på 11 er 4. 4 kunne deretter blitt multiplisert med 6 (som tilsvarer antallet deler i hele *mengden*), som blir 24.

Eleven ble veiledet inn på å benytte egypternes metode, der eleven gjettet et tall for *mengden* som gikk opp i både 2 og 3. Eleven gjettet at *mengden* var 6, og regnet ut hvert ledd som oppgaveteksten presenterte. Eleven delte først 6 på 2, som ble 3, og deretter delte eleven 6 på 3 og fikk 2. Eleven adderte videre de tre leddene, $2 + 3 + 6$, og fikk 11. Eleven så at for å få 44 måtte 4 multipliseres med 11. Eleven multipliserte videre 4 med gjetningen, som var 6, og fant at *mengden* var 24.

Lærer spurte eleven om å sammenlikne sine to metoder, og se hva som ikke ble riktig med den første metoden. Eleven påpekte at det hadde blitt gjort en feil i representasjonen av «en tredjedel av mengden», og at det kunne vært delt opp i flere deler.

Det 4. steget i matematiseringsrute 5 illustrerer elev 6 sitt arbeid med oppgave 3a. Nedenfor ser vi elevens skriftlige utregninger.



$$\frac{1}{7} av\ mengden\ +\ hele\ mengden$$

$$= 19 : 8 = 2{,}375$$

$$Mengde = 7 + 1 = 8 \cdot 2{,}375$$

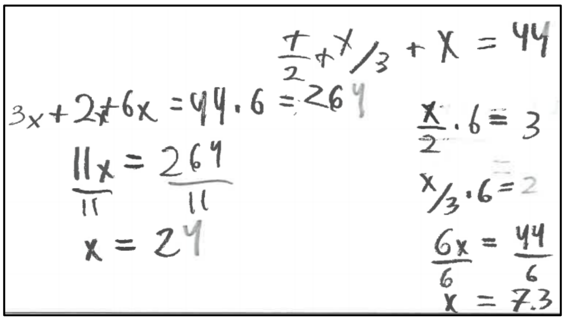
$$2{,}375 \cdot 7 = 16{,}625$$

Eleven videreutviklet arealmodellen og tegnet først opp $\frac{1}{7} av\ mengden$. Det kunne se ut som eleven hadde tegnet $\frac{3}{9}$, men da lærer spurte, var det syv deler til sammen og en av dem var fargelagt. Den andre firkanten representerte hele *mengden*, altså $\frac{7}{7} av\ mengden.$ Til sammen ble det 19. Eleven hadde videre dividert 19 på antallet deler, som var 8, og fikk 2,375. 2,375 er altså verdien til «en del» av hele *mengden*. Eleven multipliserte videre 2,375 med 7 og fikk at *mengden* var 16,625. Lærer spurte eleven om hvilken sammenheng dette hadde med egypternes metode, og da svarte eleven at gjetningen er 7. Eleven fortalte videre at en syvendedel av syv er 1, og hele *mengden* er 7. Det bli 8, akkurat som antallet deler.

Det 7. steget viser til elevens arbeid med oppgave 4. Eleven matematiserte horisontalt, ved å forsøke å forklare hvordan egypternes metode fungerer, samt om den vil fungere for andre typer likninger. Eleven skrev følgende på oppgave 4a: «Ja, hvis x er *mengde* og $\frac{x}{4}$ er en fjerdedel av *mengde*.» Om metoden alltid ville fungere skrev eleven «ikke som jeg vet om, men skal tro det.» Eleven syntes det var vanskelig å forklare hvorfor den fungerte, men refererte til at den fungerte for problemene tidligere i oppgavearket. Om egypternes metode generelt syntes eleven at det var litt vanskelig å komme i gang, men at den var grei å jobbe med. Eleven skrev: «Det kan være litt vanskelig å komme i gang.»

Vertikal matematisering

Steg 3 i matematiseringsrute 5, viser til elevens vertikale matematisering i arbeidet med oppgave 2b. Eleven generaliserte problemet og satte opp en likning, ved å benytte algebraisk notasjon. Det å løse opp likningen var litt utfordrende for eleven, og lærer stilte noen veiledende spørsmål. Nedenfor ser vi elevens skriftlige utregninger.

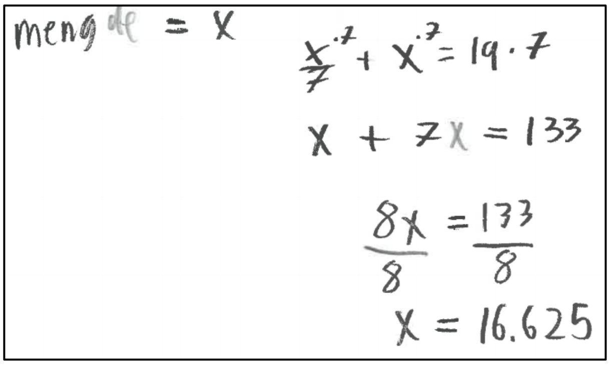


$$3x + 2x + 6x = 44 \cdot 6 = 264$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{264}{11}$$
$$x = 24$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + x = 44$$
$$\frac{x}{2} \cdot 6 = 3$$
$$\frac{x}{3} \cdot 6 = 2$$
$$\frac{6x}{6} = \frac{44}{6}$$
$$x = 7{,}3$$

Eleven begynte med å sette opp likningen $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + x = 44$. Eleven fikk veiledning av lærer, hvor det ble spurt om hvordan vi kan forenkle skrivemåten, uten å bruke ordet *mengde*. Eleven kom med forslag om «*m*» eller «*x*». Lærer spurte om hver del av oppgaveteksten, og hvordan det da kunne skrives enkelt, hvis det ble representert med en valgfri variabel. For «*halvparten av mengden*», kom eleven med forslag om $\frac{x}{2}$, og for «*en tredjedel av mengden*», kom eleven med forslag om $\frac{x}{3}$. Lærer ba også eleven om å se likningen i sammenheng med arealmodellen som ble benyttet i forrige deloppgave. Eleven forsøkte å løse opp likningen, ved å multiplisere 6 med hvert ledd. Eleven multipliserte $\frac{x}{2}$ med 6 og fikk 3. 6 multiplisert med $\frac{x}{3}$ ble 2. *x* multiplisert med 6, ble *6x*, og eleven sto igjen med $6x = 44$. Eleven delte begge sider av likhetstegnet med 6 og fikk at *mengden* var 7,3. Eleven sammenlignet svaret sitt med verdien for *mengden* som eleven fikk i oppgave 2a, og konkluderte med at noe var feil. Eleven spurte lærer om hjelp, og fikk veiledning om å se på utregningene $\frac{x}{2} \cdot 6 = 3$ og $\frac{x}{3} \cdot 6 = 2$ en gang til. Lærer spurte; «hva skjer med *mengden*, eller *x* her? Forsvinner den bare når vi multipliserer med 6?». Eleven tenkte seg om og fant ut at det ble mer fornuftig at $\frac{x}{2} \cdot 6$ ble $3x$, siden 6 delt på 2 er 3, og at $\frac{x}{3} \cdot 6$ ble *2x*, siden 6 delt på 3 er 2. Eleven fikk da at $3x + 2x + 6x = 44 \cdot 6 = 264$. Eleven trakk sammen leddene på venstre side og fikk videre at $11x = 264$. Eleven dividerte deretter begge sider med 11, og fikk at $x = 24$.

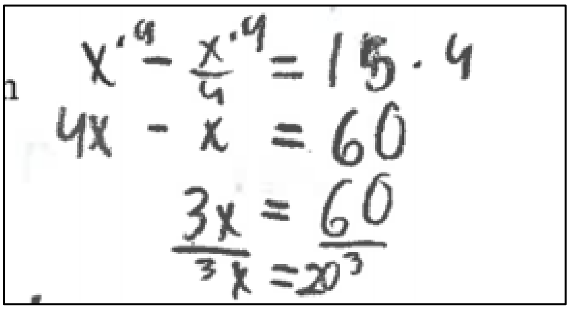
Steg 5 i matematiseringsrute 5, viser til elevens vertikale matematisering i arbeidet med oppgave 3b. Eleven representerte *mengden* med variabelen *x*, og satte opp likningen $\frac{x}{7} + x = 19$. Nedenfor ser vi elevens utregninger.



$$\frac{x}{7} + x = 19$$
$$\frac{x}{7} \cdot 7 + x \cdot 7 = 19 \cdot 7$$
$$x + 7x = 133$$
$$8x = 133$$
$$\frac{8x}{8} = \frac{133}{8}$$
$$x = 16{,}625$$

Eleven satte opp likningen uten veiledning, og løste den selvstendig. Første steg i å løse opp likningen var å multiplisere 7 med alle ledd. Videre trakk eleven sammen leddene på venstre side, og fikk at $8x = 133$. Eleven dividerte videre begge sider av likhetstegnet med 8, og fant at *x*, eller *mengden*, er 16,625.

Steg 6 i matematiseringsrute 5, viser til elevens vertikale matematisering i arbeidet med oppgave 4. Oppgaven spurte blant annet om egypternes metode ville fungere for likninger på formen $x - \frac{x}{4} = 15$. Eleven misforsto antagelig oppgaven, og løste den opp på «vanlig» måte.



$$x - \frac{x}{4} = 15$$

$$x \cdot 4 - \frac{x}{4} \cdot 4 = 15 \cdot 4$$

$$4x - x = 60$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{60}{3}$$

$$x = 20$$

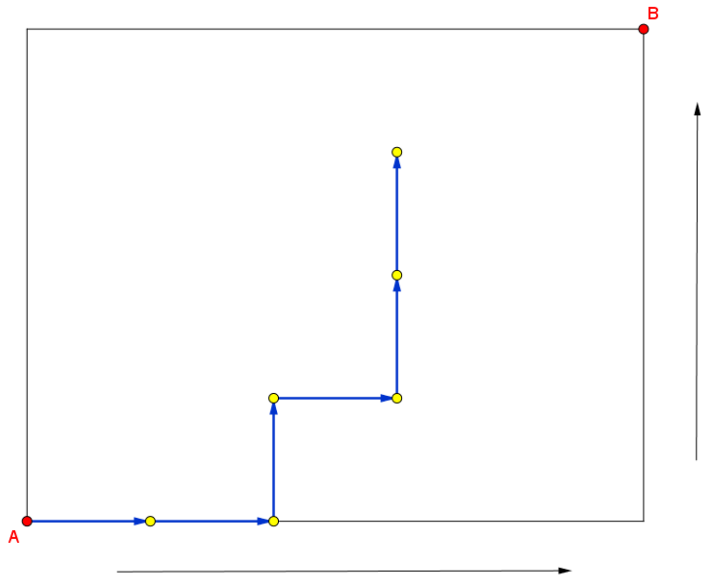
Eleven begynte med å multiplisere alle ledd med 4. Deretter ble leddene på venstre side trukket sammen, og eleven fikk $3x = 60$. Eleven dividerte videre begge sider av likhetstegnet på 3, og fant at $x = 20$.

Gjenoppdaget eleven formell matematikk?

Eleven matematiserte progressivt, der det var sammenheng mellom horisontal og vertikal matematisering. Eleven begynte med horisontal matematisering, der eleven tolket oppgaveteksten og representerte informasjonen med en uformell arealmodell. Eleven benyttet videre arealmodellen til å løse første problem. Videre utviklet eleven arealmodellen og knyttet den sammen med egypternes metode for å finne *mengden*. Eleven matematiserer vertikalt ved å generalisere problemene ved å sette opp likninger, og innføre variabelen *x* som representant for *mengden*. Underveis i arbeidet sammenliknet eleven sine metoder, og påpekte hvordan de henger sammen. Eleven reflekterte litt over om egypternes metode alltid ville fungere. Eleven nådde flere mål for timen, men manglet noen steg for å komme opp til sluttpunktet (B). Eleven kunne undersøkt om egypternes metode fungerer for andre likninger, samt forsøkt å generalisere og forklare hvordan egypternes metode fungerer. En må ta i betraktning her at det ble litt dårlig tid på slutten, for at eleven ordentlig fikk forsøkt å forklare egypternes metode.

4.3.5 Matematiseringsrute 7

Matematiseringsrute 7 (Figur 10) tilhører elev 8 og 9. Elevene samarbeidet tett, ved at de diskuterte og løste oppgavene sammen. De har derfor lik matematiseringsrute. Elevene matematiserte både horisontalt og vertikalt, der steg 1, 2 og 4 er horisontale, og steg 3, 5 og 6 er vertikale.



Figur 10: Matematiseringsrute 7

Horisontal matematisering

Det første steget er horisontalt og viser til elevenes arbeid med oppgave 1. Elevene matematiserte horisontalt ved at de utforsket og tolket oppgaveteksten, samt benyttet «prøve-feile-metoden» til å løse problemet og finne *mengden*. Elevene begynte med å forsøke å tolke oppgaveteksten. Nedenfor er et utdrag fra deres diskusjon:

Elev 8: en fjerdedel av *mengden*
Elev 9: en fjerdedel av den skal plusses på den igjen
Elev 8: en fjerdedel av *mengden* pluss *mengden* er lik 15
Elev 9: Ja
Elev 8: Hva er det vi skal finne ut da?
Elev 9: Det er det vi skal finne ut. Hva er *mengden*
Elev 8: Det blir jo 15 da
Elev 9: Nei svaret er 15
Elev 8: Åja. Hva er *mengden* for å få til å, at det til slutt er 15
Elev 9: Vi skal finne ut *mengden* og hva en fjerdedel av den *mengden* er å adderes også skal vi få svaret til å bli 15.

Elevene diskuterte frem og tilbake hva hvert ledd betydde, samt hva det var de egentlig skulle finne svar på. Elev 8 trodde først at *mengdens* verdi var summen 15, men elev 9 forklarte at det var nettopp *mengden* de skulle finne. Elev 9 oppsummerte oppgaveteksten og dens informasjon ved å si; «vi skal finne *mengden* og hva en fjerdedel av *mengden* er å adderes også skal vi få svaret til å bli 15». Det viser at de forsto at *mengden* og dens fjerdedel skulle adderes, og at det til sammen ble 15. For å finne *mengden* prøvde de seg frem, med ulike verdier for *mengden*. Nedenfor er et utdrag fra deres diskusjon.

Elev 9: Okei, da er det bare å prøve seg frem da.
Elev 8: Ja, da ser vi her at hvis du tar 15 delt på 4, så 3,75…
Elev 9: Okei, da vet vi at det ikke er 15. Vi prøver 8 da.
Elev 8: 8 delt på 4 er lik 2
Elev 9: 8 pluss 2, da har vi 10. Vi prøver 10 da.
[…]
Elev 9: Hvis vi tar 12 da, delt på 4
Elev 8: 3
Elev 9: Å! Svaret det er 12. Skal vi se. 12 delt på 4 det er 3

Elevenes diskusjon viser at de begynte med å teste om *mengden* kunne være 15. De delte 15 på 4, og fant ut at *mengden* ikke kunne være 15, siden 15 addert med et tall ville bli større en 15. Videre satte de inn 8 for *mengden*. De delte 8 på fire og fikk to. Deretter adderte de 2 med 8, og fikk 10. Det stemte ikke, og de gjettet videre at *mengden* var 10. Det stemte heller ikke med svaret de skulle få, og de prøvde deretter med at *mengden* er 12. De delte 12 på 4 og fikk 3. Deretter adderte de 3 med 12, og fikk 15. De fant dermed ut at *mengden* måtte være 12. Nedenfor ser vi elevenes skriftlige besvarelser, der elev 9 sin besvarelse er til venstre, og elev 8 sin besvarelse er til høyre.

$12 \div 4 = 3 \quad 12 + 3 = \underline{\underline{15}}$

Mengden er $\underline{\underline{12}}$

$12 : 3 = 2$

$12 + 3 = 15$

Mengden er 12

$12 : 4 = 3$

$12 + 3 = \underline{\underline{15}}$

De skrev ned at 12 delt på 4 er 3, og at 12 + 3 er 15. *Mengden* var dermed 12.

Det andre steget i matematiseringsrute 7 er også horisontalt, og illustrerer elevenes arbeid med oppgave 2a. Elevene begynte med samme metode som på oppgave 1, der de prøvde seg frem, men ble oppfordret av lærer til å forsøke å benytte egypternes metode. Lærer ba de gjette en verdi for *mengden*, som gjorde utregningene enkle. Nedenfor er et utdrag av elevenes diskusjon.

Elev 8: m er lik 12. Halvparten av *mengden* og *mengdens* tredjedel adderes, ok. Halvparten er jo 6 da. Og så en tredjedel er 4. Vent da vent da.
[…]
Elev 8: Nei, du ser her. Du har halvparten, det er 6. En tredjedel er 4. De to i lag er 12. 12 pluss 12 er jo ikke det. Det er jo ikke 44 men. 24 da. Det er nære. Hvis du har 24 pluss 12 igjen så får du ikke 44 men da..
[…]
Elev 9: Det vil si at svaret er 24.
Lærer: Hvorfor?
Elev 9: Fordi at her har vi fått til å regne halvparten, så hvis vi regner det samme en gang til så får vi 24.
Elev 8: Jeg skjønner ikke.
Lærer til elev 9: Kan du forklare?
Elev 9: Dette er en ting. Dette er en ting. Og det der er en ting. Her er ting nummer en som er halvparten av *mengden*.
Elev 8: Ja det er 6
Elev 9: Ja, og så finner vi 12 sin tredjedel som er 4. Så skal vi plusse sammen det vi har funnet her og det vi startet med.
Elev 8: ja
Elev 9: Det blir 6 pluss 4 pluss 12. Og det ble 22. Og da har vi funnet halvparten. Som vil si at hvis vi plusser på her igjen
Elev 8: Halvparten av hva? Åja halvparten av hele greia ja
Elev 9: Halvparten av hele ja. Fordi vi skal ha 44. Så hvis vi tar 24 her i stedet og deler det på 2 og så får vi summen. Og så tar vi 12, eller 24 og deler det på 3 og får summen. Så blir det 44 når vi plusser sammen alt.

Elevene gjettet at *mengden* var 12, og regnet ut hvert ledd. Først delte de 12 på 2 og fikk 6, og deretter fant de en tredjedel av 12 som er 3. Videre adderte de 12, 6 og 3 og fikk 22. Elev 9 så da at svaret måtte være 24. Eleven forklarte at *mengden* er 24, fordi de måtte doble *mengden* de gjettet. Det dobbelte av 12 er 24. De doblet *mengden*, fordi svaret de fikk, da *mengden* var 12, ble halvparten av svaret de egentlig skulle få. Nedenfor ser vi elevenes skriftlige besvarelser (elev 9 til venstre, og elev 8 til høyre), som også støtter opp under deres diskusjon og fremgangsmåte for å finne *mengden*.

$m = 12 \div 2 = 6$
$12 \div 3 = 4$
$6 + 4 + 12 = 22$

$\underline{\underline{24}}$

Vi fant halvparten
Som vil si $12 + 12 = \underline{\underline{24}}$

$12 : 2 = 6$
$12 : 3 = 4$
$6 + 4 + 12 = 22$

Det fjerde steget i matematiseringsrute 7 viser til elevenes arbeid med oppgave 3a. Elevene matematiserte horisontalt ved at de benyttet egypternes metode for å løse problemet og finne *mengden*. Nedenfor ser vi deres skriftlige besvarelser, der elev 9 sin besvarelse er øverst, og elev 8 sin besvarelse er nedenfor.

$m = 14 \div 7 = 2 + 14 = 16 \cdot 1{,}1875 = \underline{\underline{19}}$

$14 : 7 = 2$
$14 + 2 = 16$
$16 \cdot 1{,}1875 = \underline{\underline{19}}$

$14 \cdot 1{,}1875 = 16{,}625$

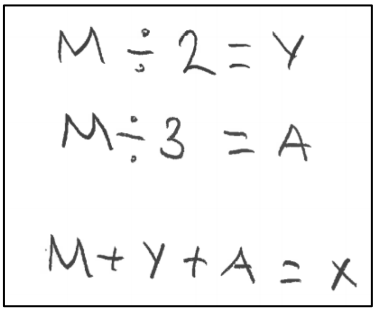
Besvarelsene viser at elevene gjettet at *mengden* var 14. Deretter delte de 14 på 7, og fikk 2, som de adderte med 14. De fikk da 16. Elevene fant ut at for å få 19 måtte de multiplisere 1,1875 med 16. Deretter multipliserte de 1,1875 med gjetningen, som var 14, for å finne riktig verdi for *mengden*, som var 16,625. Elevene fikk en utfordring underveis der de måtte finne ut hva en må multiplisere med 16 for å få 19. Nedenfor er et utdrag fra deres diskusjon omkring problemet.

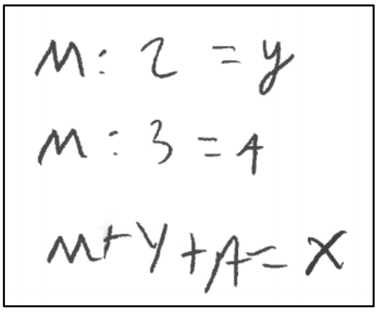
Lærer: Hva gjettet dere *mengden* er?
Elev 9: 14
Elev 8: 14 delt på 7 er 2.
Elev 9: Ja det er 2.
Elev 8: 14 pluss 2 er 16.
Elev 9: Ja egypterne de gjettet seg frem.
Lærer: Hva må vi gange med 16 for å få 19?
Elev 9: Det går jo ikke.
Elev 8: Joda, det går.
Elev 9: Hvis vi ganger 16 med 2 da?
Elev 8: Hva med 16 gange 0,2
Elev 9: 1,1. 0,02 da
Elev 8: 16 gange 0,02
Elev 9: 1,02 mener jeg.
Elev 9: Vi får bare 19,2
Lærer: Hva er sammenhengen mellom ganging og deling?
Elev 8: 16 gange 1, …
Elev 9: ta 19 delt på 16
Elev 8: 1,875. Så hvis vi tar … Der har vi den.

Elevene begynte med å prøve seg frem, for å finne ut hva en må multiplisere med 16 for å få 19. Lærer veiledet ved å spørre etter sammenhengen mellom divisjon og multiplikasjon. Elev 9 kom da på at en kunne dividere 19 med 16 for å finne ut hva en må multiplisere med 16 for å få 19. Videre løste elev 8 problemet, ved å multiplisere 1,875 med gjetningen, som var 14.

Vertikal matematisering

Steg 3 i matematiseringsrute 7 er vertikal, og elevene matematiserte vertikalt ved å gjøre et forsøk på å sette opp en likning. Nedenfor ser vi deres skriftlige besvarelser, der elev 8 er til høyre og elev 9 er til venstre.





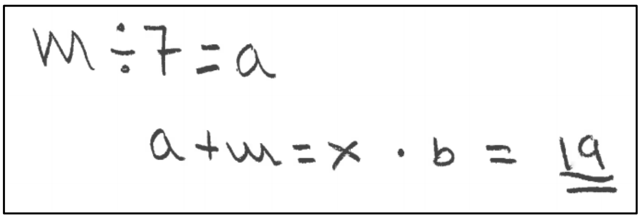
$$M : 2 = Y$$

$$M : 3 = A$$

$$M + Y + A = x$$

I stedet for å sette opp en likning de kan løse opp, har de generalisert hvert ledd og innført flere variabler. Første ledd «halvparten av *mengden*», ble generalisert ved at *mengden* ble kalt *M*, og $M : 2$ var lik et tall *Y*. Andre ledd, «en tredjedel av *mengden*», ble generalisert ved at *mengden* ble kalt *M*, og $M : 3$ ble kalt A. *M* + *Y* + *A* ble til sammen summen *x*, der *x* var et vilkårlig tall. Elevene har generalisert problemet, men ikke satt opp en likning som de klarte å løse opp slik at de fant *mengdens* verdi. Lærer rakk ikke å veilede elevene til å sette opp en enklere likning som de kunne løse opp med hensyn på en variabel.

Steg 5 illustrerer elevenes arbeid med oppgave 3b. Elevene matematiserte vertikalt ved at de generaliserte egypternes metode. Elevenes matematisering er en videreføring av den løsningen de presenterte i oppgave 2b. Nedenfor ser vi elev 9 sin skriftlige besvarelse.



$$M : 7 = a$$

$$a + M = x \cdot b = 19$$

I stedet for å sette opp en likning som eleven kunne løse med hensyn til en variabel, har elevene generalisert egypternes metode. Først innførte de variabelen *M* for å representere *mengden*. Videre generaliserte de leddet «*mengdens* syvendedel», ved å skrive at $M : 7 = a$. Eleven innfører altså variabelen *a*, for å representere *mengdens* syvendedel. Videre setter elevene at $a + m = x \cdot b = 19$. Her innførte elevene to nye variabler, *x* og *b*. *x* representerer feilsvaret en får når en adderer *a* og *m*. *b* representerer tallet man må multiplisere med feilsvaret, for å finne riktig sum. I henhold til problemet i oppgave 3, skulle summen bli 19, og derfor har de skrevet inn 19 i uttrykket.

Det 6. steget i matematiseringsrute 7 er vertikal matematisering, ved at elevene tar generaliseringen av egypternes metode til en ny form. Nedenfor ser vi elev 9 sin skriftlige besvarelse.

$$m \div 7 = a$$
$$a + m = x \cdot b = x$$

$$M : 7 = a$$
$$a + M = x \cdot b = x$$

Elevene har forsøkt å innsette enda en variabel for summen av utrykket. Eleven har benyttet variabelen *x* enda en gang. Det at elevene benytter *x* for summen av utrykket i tillegg til at *x* blir benyttet for feilsvaret, gjør at utrykket ikke stemmer. Hadde elevene benyttet en annen variabel for summen, ville det blitt korrekt. Det er allikevel vertikal matematisering, ved at de forsøker å ytterligere generalisere egypternes metode, der summen av et problem også kan variere.

Gjenoppdaget de den formelle matematikken?

Elev 8 og 9 matematiserer progressivt ved at det er sammenheng mellom deres horisontale og vertikale matematisering. De begynner med horisontal matematisering, der de diskuterer for å tolke problemet og benytter «prøve-feile-metoden», for å finne riktig verdi for *mengden*. I arbeidet med problemene i oppgave 2 og 3 benytter de egypternes metode, for å finne *mengden*. De når ikke læringsmålene som handler om at de skal kunne generalisere et praktisk problem, og sette opp en likning og løse. De viser imidlertid at de kan å benytte algebraisk notasjon ved at de generaliserer hvert ledd i det ene problemet, og videre generaliserer egypternes metode ved å innføre variabler. For å komme til sluttpunktet (B), kunne elevene i større grad forklart deres generalisering av egypternes metode, og hvordan metoden fungerer. I tillegg kunne de forsøkt å sette opp likninger for problemene, der de innførte en variabel som representerte *mengden*, og deretter løst den opp. Elevene kunne dermed også sammenliknet egypternes metode, med det å sette opp en likning og løse den.

5 Diskusjon

Med utgangspunkt i studiens forskningsspørsmål har formålet vært å undersøke på hvilken måte elever på 10.trinn, gjenoppdager den formelle matematikken innenfor temaet algebra og likninger, i en undervisningsøkt med en historisk tilnærming. I diskusjonskapittelet er funn fra analysen diskutert i lys av teori og tidligere forskning. Diskusjonen har tatt utgangspunkt i de tre kategoriene som er beskrevet i teorien, og benyttet i analysen: «didaktisk fenomenologi», «veiledet gjenoppdaging» og «matematisering». Studiens funn er i tillegg diskutert opp imot, og sammenliknet med liknende forskningsartikler. Det er også gjort en vurdering av studien, som omhandler metodologiske utfordringer, utfordringer tilknyttet gjennomføring, samt hva som kunne vært gjort annerledes i en neste aksjonssyklus.

5.1 Didaktisk fenomenologi

Et viktig moment innenfor didaktisk fenomenologi, er at det må velges en rik og realistisk situasjon, som oppleves som ekte, meningsfull og engasjerende for elevene, slik at de blir aktivt deltakende i læringsprosessen (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Studien viser at den historiske tilnærmingen, ved å benytte oldtidens Egypt som kontekst, reelle problemer fra epoken, samt deres metode for å løse problemene, fungerte som et godt startpunkt og situasjon for elevene å matematisere innenfor. Elevene opplevde problemene som reelle for epoken, og deltok aktivt i læringsprosessen ved å matematisere. De benyttet ulike metoder og strategier for å løse problemene, og noen elever utviklet sine metoder underveis. Det at noen elever utviklet sine løsningsmetoder, ved å begynne med samme metode som egypterne tilbake til oldtiden, sammenfaller med det Freudenthal (1991) skriver om at individet bør utvikle sin matematiske kunnskap på samme måte som matematisk kunnskap ble utviklet gjennom historien.

Jupri og Drivjers (2016) skriver at det å løse problemer i form av en tekst er blant det mest utfordrende for elever innenfor temaet algebra. I undervisningsopplegget ble egypternes metode «falsk posisjon» benyttet for å gi elevene en metode for å løse praktiske problemer tilknyttet lineære likninger. Funn fra analysen peker på at det virket som at ved å først arbeide med egypternes metode, ble det lettere å sette opp en likning som representerte problemet. De som for eksempel kalte *mengden* «*x*», fikk en bedre forståelse for hva «*x*» representerte, og hvorfor vi benytter den. Det kan se ut til at elevene forsto at algebraisk notasjon blir benyttet for å forenkle, og gjøre et problem mer oversiktlig og lettere å løse. Det er i tråd med tanken om at elevene selv skal utvikle forståelse, og matematiske verktøy for å løse problemer (Freudenthal, 1983). Elevene utviklet matematiske verktøy, ved at de tok i bruk algebraisk notasjon for å forenkle oppgaveteksten. I tillegg ble generalisering benyttet som et verktøy for å forenkle problemet ytterligere ved å sette det opp som en likning.

Et viktig moment ved didaktisk fenomenologi, er at matematiske fenomener skal anses med et didaktisk blikk (Freudenthal, 1983). Det kan virke som en grunnstein i utviklingen av undervisningsopplegg, og vise læreren hvordan elevene kan tre inn i læringsprosessen til menneskeheten (Hauvel-Panhuizen, 2014). I henhold til matematikkdidaktikk, virker det som at MH er en god kilde til matematiske fenomener som kan benyttes i undervisningen. Ved at elevene utviste forståelse for bruken av algebraisk notasjon, utviklet sine metoder og generaliserte ved å sette opp problemene som likninger, kan det se ut til at den historiske konteksten elevene arbeidet innenfor, var en god situasjon der de kunne tre inn i «læringsprosessen til menneskeheten» og gjenoppdage formell matematikk. Det er i tråd med det Gulikers og Bloom (2001) skriver om at MH er en god kilde til interessante kontekster, problemer og metoder som gir mulighet til å utvikle elevenes metoder og løsningsstrategier.

5.2 Veiledet gjenoppdaging

Et viktig moment innenfor veiledet gjenoppdaging, er å reflektere over hvilke steg historiens matematikere har gått, og se det i sammenheng med hvilke steg elevene kan gå i læringsprosessen (Doorman & Gravemeijer, 2009). I forkant av gjennomføringen av undervisningsopplegget ble det utformet en hypotetisk læringsbane der utfordringer elevene kan møte, spørsmål lærer kan stille, samt hvilke steg de kan ta i henhold til matematisering ble skissert. Funn fra studien viser at den hypotetiske læringsbanen samsvarte bra med hvordan undervisningsopplegget utspilte seg i praksis. Flere av de anslåtte utfordringene var reelle utfordringer for noen av elevene. Utfordringer som dukket opp i gjennomføringen var å tolke problemet/oppgaveteksten, benytte egypternes metode, sette opp problemene som likning, løse likningene og kunne forklare hvordan egypternes metode fungerer.

I henhold til egypternes metode var det spesielt en utfordring å benytte feilsvaret til å finne riktig verdi for *mengden*. Eksempelvis ble det en utfordring å finne ut hva en må multiplisere med 16 for å få 19. Det henger antagelig sammen med at elevene ikke helt har utviklet sin forståelse for brøkregning, samt sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon. Det er kjent fra forskning at forståelse for brøkregning, samt sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon kan være spesielt utfordrende for elever (Van de Walle & Thompson, 1984). Det kommer også frem i elevbesvarelsene at elevene foretrekker å jobbe med desimaltall heller enn brøk. Det kommer spesielt frem i deres løsninger av oppgave 3a og 4b, hvor svarene er skrevet som desimaltall. Eksempelvis i oppgave 4b skulle elevene løse likningen $6x + \frac{x}{3} = 30$. Elev 1, 2 og 3 gjettet at *mengden* var 3 og fikk at $19 = 30$. I stedet for å multiplisere 19 med $\frac{30}{19}$, utførte elevene divisjonen $30{:}19$ og fikk 1,58 som er et avrundet tall. Svaret de fikk da de multipliserte 1,58 med gjetningen, ble dermed unøyaktig. Elev 3 avrundet i tillegg svaret feil og fikk 4.73 for *x*. Eleven satte inn 4.73 for *x* i likningen og fikk til svar 29,96, noe som viser at det ble et unøyaktig svar. En annen observasjon er at Elev 1 og elev 2 fikk at *x* var 4.74 ved å benytte egypternes metode og 4.73 da de løste likningen på vanlig måte. Av det lærer observerte, diskuterte ikke elevene at de fikk forskjellig svar, eller at det var unøyaktig. Det kan imidlertid hende de diskuterte det mens lærer var ved et annet gruppebord. Elevenes benyttelse av desimaltall henger trolig sammen med deres mangel på brøkforståelse og hva et eksakt svar er.

Det å forklare hvordan egypternes metode fungerte, var det mest utfordrende med oppgavene. Noen elever forsøkte å forklare, og andre forsøkte å generalisere. Det var imidlertid ingen som kom helt i mål med å forklare hvordan metoden fungerer. Elevene viste at de klarte å generalisere de praktiske situasjonene ved å sette opp likninger, og videre benytte algebraisk notasjon til å løse dem. Det kommer imidlertid frem at det å utvikle en god forståelse for generalisering, og benytte det som verktøy til å forklare hvordan en metode fungerer er tidkrevende og utfordrende. Det er i tråd med forskning som peker på at generalisering er utfordrende for elever, og de bruker lang tid på overgangen fra konkrete tall, nummer og eksempler til formell algebraisk notasjon (Dienes, 1961).

Et viktig poeng innenfor veiledet gjenoppdaging er at elevene ikke nødvendigvis overkommer utfordringene selv, og gjenoppdager den formelle matematikken på egen hånd. Elevenes gjenoppdaging skjer ved hjelp av veiledning fra lærer (Freudenthal, 1991). I gjennomføringen forsøkte lærer å veilede på en slik måte at elevene selv skulle se sammenhenger og utvikle sine metoder. For elever med lese/skrivevansker var det god hjelp i at lærer leste opp problemet, og spurte hva hvert ledd betydde. Lærer hjalp noen elever med å komme i gang med å benytte egypternes metode, mens andre trengte mest veiledning når de skulle sette opp og løse likningene. I henhold til elevenes benyttelse av desimaltall heller enn brøk, ble det ikke av lærer veiledet med tanke på at de skulle utvikle sin forståelse tilknyttet brøk. Veiledningen ble rettet mot bruken av de to ulike metodene, og spesielt mot benyttelsen av algebraisk notasjon. En betraktning som kan ses i sammenheng med didaktisk fenomenologi, er at flere elever spurte om hjelp hvis de sto fast. Det kan tyde på at de var engasjert i arbeidet, og ønsket å løse problemene samt lære de ulike metodene.

5.3 Matematisering

Gravemeijer og Doorman (2009) skriver at det ideelle er hvis den faktiske læringsbanen utfolder seg på en slik måte, at den formelle matematikken dukker opp gjennom elevenes matematisering. Oppgavene ble utformet på en slik måte at elevene gjennom ulike problemer skulle benytte både egenvalgt metode, egypternes metode samt sette opp likning og løse. Læringsbanen som ble planlagt hadde den hensikt at elevene skulle utøve progressiv matematikk, der den horisontale og vertikale matematiseringen utfylte hverandre og bidro til at elevene konstruerte og gjenoppdaget den formelle matematikken. Funn fra analysen viser at elevene gikk forskjellige matematiseringsruter som alle innebar en blanding av horisontal og vertikal matematisering. Det er i tråd med det De Lange (1987) skriver om at elevene kan gå ulike matematiseringsruter avhengig av deres oppfatning av den realistiske konteksten, deres evner og problemløsningsferdigheter. Elevenes matematiseringsruter viser at de gikk horisontale og vertikale steg om hverandre, og at de utfylte hverandre på veien mot den formelle matematikken. Det henger trolig sammen med oppgavearkets oppbygning, der elevene i 1. oppgave selv kunne velge løsningsmetode. I første oppgaven kunne både horisontal og vertikal matematisering finne sted. I 2. og 3. oppgave ble de spesifikt spurt om å først benytte egypternes metode i a), og deretter sette opp likning og løse i b). Det ledet elevene til å begynne med horisontal matematisering, og deretter vertikal der de generaliserte og satte opp likning. På oppgave 4 var det mulighet for både vertikal og horisontal matematisering.

Elevenes horisontale matematisering omhandlet å tolke problemene/oppgaveteksten, og resonnere seg frem til *mengdens* verdi. Det omhandlet også å representere problemene med en arealmodell, og benytte arealmodellen og egypternes metode til å løse problemene. Det ble også matematisert horisontalt, ved at elevene undersøkte om egypternes metode ville fungere på andre typer likninger enn de representert i problemene. Noen elever matematiserte horisontalt ved å forsøke å forklare hvordan egypternes metode fungerer. Elevenes vertikale matematisering var at de generaliserte problemene og satte opp likninger, ved å benytte algebraisk notasjon. Noen elever løste likninger med hensyn på x, mens andre benyttet m som variabel for å representere *mengden*. To av elevene matematiserte vertikalt ved at de forsøkte å generalisere egypternes metode, ved å innføre flere variabler.

Det kan se ut til at samtlige elever gjenoppdaget formell matematikk, ved at de tok i bruk algebraisk notasjon, satte opp likninger og løste dem. Elevenes utregninger og forklaring underveis underbygger at de tilga variablene, og likningene de satte opp mening tilknyttet de praktiske problemene. Det var ingen av elevene som kom helt i mål med å forklare hvordan egypternes metode fungerer, men samtlige oppnådde kompetansemålet om å sette opp, tolke og løse likninger tilknyttet et praktisk problem.

5.4 Studien sammenliknet med tidligere forskning

Resultater fra Weng (2008) viser at en historisk tilnærming var positiv med tanke på elevenes oppfatning og holdning mot matematikk. Det var positivt for studentenes tro, utholdenhet og motivasjon. Studien til Weng (2008) viser at en inkludering av MH i undervisningen, ga studentene en ny tilnærming som endret deres syn på matematikk, og en sterkere kulturforståelse. Weng (2008) skiller seg fra min studie ved at det ble benyttet andre historiske elementer, samt at utvalget besto av studenter og ikke ungdomsskoleelever. En kan imidlertid ane en sammenheng mellom resultatene. Min studie fokuserte ikke på holdninger slik som Weng (2008), men undervisningsopplegget som ble gjennomført engasjere elevene til å aktivt matematisere. Elevene spurte om hjelp fra lærer, som viser at de var interessert i å løse problemene. Funn viser at elevene fant mening i problemene og opplevde dem som reelle. En av elevene uttrykte at undervisningen med en historisk tilnærming var gøy og at han kunne regnet videre hele dagen, noe som kan vise til økt engasjement og utholdenhet i arbeid med matematikk. Det er ikke mulig å generalisere noe med tanke på om undervisningsopplegget i min studie bidro til å utvikle elevenes holdninger mot matematikk, men en kan anta noen positive effekter angående holdninger, ved at elevene aktivt ble engasjert i undervisningen. Det samme kan en ane fra Jahnke og Habank-Eichelsbacher (1999) og Panaoura (2017) sine studier, som heller ikke fokuserte på holdninger, men allikevel viser at elevene var engasjerte og arbeidet aktivt innenfor deres undervisningsopplegg.

Jahnke og Habank-Eichelsbacher (1999) viser til en litt annen måte å arbeide med en original kilde fra historien, enn den presentert i min studie. I Jahnke og Habank-Eichelsbacher (1999) får elevene kilden autentisk og jobber med å tolke og forstå den. I min studie ble den originale kilden, i form av praktiske problemer og løsningsmetode, tilpasset 10.trinn og integrert i et undervisningsopplegg tilpasset den norske læreplanen LK20. Selv med en variasjon i tilnærmingsmåten av den originale historiske kilden, kommer det frem i begge studiene at det var positivt for elevene å arbeide med en original kilde. Funn fra min studie viser at arbeidet med de originale problemene fra oldtidens Egypt, bidro til at elevene gjenoppdaget formell matematikk ved å generalisere og benytte algebraisk notasjon for å løse problemene. Funn fra Jahnke og Habank-Eichelsbacher (1999) viser at elevene utviklet sine ferdigheter i å beskrive matematiske ideer og metoder. Det er imidlertid ingen selvfølge at arbeid med en original kilde fra historien er positivt for elevenes læringsprosess. Gulikers og Bloom (2001) skriver at det å analysere og forstå originale kilder er utfordrende. Enten man velger å benytte kilden autentisk, eller gjøre tilpasninger. Gulikers og Bloom (2001) skriver at det er utfordrende for læreren å identifisere og rekonstruere problemet, slik at det passer til klasseromsettingen.

Resultater fra Panaoura (2017) viser at den tilfeldige læreren som var med i studien, hadde dårlig kunnskap om den kulturelle, politiske og økonomiske konteksten som matematikken oppsto i. Læreren møtte mange utfordringer med å inkludere MH i en inquiry-basert undervisningstilnærming. Eksempelvis klarte ikke læreren å svare på spørsmål når elevene spurte om konteksten som matematikken oppsto i. Det at både Weng (2008), Jahnke og Habank-Eichelsbacher (1999) og min studie viser positive effekter av MH, kan ha en sammenheng med at det ligger et engasjement for temaet, samt kunnskap bak utførelsen av undervisningsoppleggene. Læreren i Panaoura (2017) var ikke spesielt engasjert i MH, og undervisningsopplegget ble tatt ut fra elevenes lærebok. Det var ikke læreren selv som har utformet det. Konklusjonen til Panaoura (2017) var at lærere trenger mer kunnskap om MH og trening i å inkludere MH i undervisningen. Studier om hvordan MH kan inkluderes i undervisningen, der det blir benyttet ulike tilnærminger og historiske elementer, er derfor et viktig bidrag for å utvikle god kunnskap omkring problemområdet, samt teste ut og evaluere ulike undervisningsopplegg.

5.5 Vurdering av studien

I studien var det kun en klasse på 9 elever som deltok, og det er ikke mulig å generalisere resultatene fra studien til å gjelde andre elever og klasser. Generelt for kvalitativ forskning, er at en ikke kan generalisere en enkelt sannhet (Cohen et al. 2018). Virkeligheten blir forstått ut ifra flerfoldige, konstruerte og holistiske tolkninger som er unik for hver enkelt deltaker. Studiens funn er dermed et bidrag til forskning ved at det viser i detaljert form hvordan et utvalg elever matematiserer innenfor en historisk kontekst. Formålet med studien var å, gjennom elevenes aktivitet og matematisering, undersøke hvordan en kan gjennomføre matematikkundervisning med en historisk tilnærming. Undervisningsopplegget gjennomført i studien kan virke som en inspirasjon, samt være gjenstand for diskusjon for eksempelvis andre lærere. Studien viser et forslag på hvordan MH kan inkluderes i undervisningen tilknyttet fagfornyelsen i temaet algebra og likninger. Det fremmes et eksempel på hvordan undervisning med en historisk tilnærming kan planlegges, gjennomføres, samt vurderes.

Hammersley (1993) skriver at ingen forskningsposisjon garanterer gyldig kunnskap. Hver forskningsmetode og vitenskapsteoretisk posisjonering har klare fordeler og ulemper, avhengig av omstendigheter og formålet med forskningen. Et av de metodologiske argumenter for at lærer også skal være forsker i egen undervisningspraksis, er at en lærer har erfaring med arenaen det forskes på (Hammersley, 1993). I tillegg har læreren forståelse for egen oppførsel, intensjoner, motiver, tanker og følelser. Det er imidlertid en utfordring å både være observatør og veileder for elevene samtidig. En utfordring underveis i undervisningen var å nå alle elevene, og gi tilstrekkelig veiledning. I analysen av datamaterialet ser en at ved flere anledninger kunne lærer vært mer til stede i veiledningen. Eksempelvis i arbeidet til elev 8 og 9, der de forsøkte å generalisere egypternes metode. Lærer kunne her gått inn og spurt hva de har tenkt, og forsøkt å veilede dem videre til en forståelse for hvorfor metoden fungerer. Angående datainnsamling, fungerte det godt å triangulere datainnsamlingsmetoder. Observasjon ville ikke vært tilstrekkelig alene, med bakgrunn i at lærer også var veileder. Innsamling av skriftlige besvarelser, samt lydopptak av elevenes diskusjon bidro til å gi et mer fyldig datamateriale.

Et moment ved aksjonsforskning er at det er en syklisk prosess, der en runde i syklusen kan etterfølges av flere (Piggot Irvine et al. 2015). Med bakgrunn i studiens begrensninger i omfang, ble det kun utført en runde i syklusen. For forskningens del ville det vært ideelt og benyttet første runde i syklusen til å utarbeide en ny runde, der en tar i betraktning vurderinger og refleksjoner tilknyttet første syklus. Det var flere faktorer som kunne vært utført annerledes i en neste syklus. Med bakgrunn i at noen av elevene ikke fikk god nok tid til å svare på alle spørsmålene i oppgave 4, ville det vært mer ideelt med bedre tid. Modulen kunne vært utvidet til 4 undervisningstimer heller enn 2. Med utvidet undervisningstid kunne undervisningsopplegget blitt utvidet til at elevene kom frem på tavlen og presenterte sine løsninger. I analysen av elevbesvarelsene ser vi at elevene benyttet varierte metoder, og utførte egypternes metode samt løste likninger på forskjellig måte. Elevene kunne da fått innblikk i flere metoder, samt sett sammenhenger mellom andres og sin egen metode. Lærer og elevene kunne stilt spørsmål og diskutert løsningsmetodene felles. Det var ingen av elevene som kom i mål med å forklare hvordan egypternes metode fungerer. Det var imidlertid en gruppe som generaliserte metoden. Det kunne vært gjenstand for en felles diskusjon der elevene som generaliserte, kunne forklart hva de har tenkt og hva variablene sto for, samtidig som at diskusjonen kunne utviklet seg til en felles forståelse for hvordan metoden fungerer. Et annet moment som også kunne vært gjenstand for felles diskusjon og videre arbeid, er elevenes benyttelse av desimaltall heller enn brøk. I tillegg kunne det vært først en diskusjon omkring sammenhengen mellom divisjon og multiplikasjon.

6 Konklusjon

Forskningsspørsmålet i studien var: *På hvilken måte gjenoppdager elevene den formelle matematikken innenfor temaet algebra og likninger, i en undervisningsøkt med en historisk tilnærming?* Elevene gjenoppdaget den formelle matematikken, ved å utøve progressiv matematisering. Det var sammenheng mellom horisontal og vertikal matematisering, og samtlige elever gjenoppdaget den formelle matematikken innenfor temaet algebra og likninger, ved at de generaliserte og viste forståelse for bruken av, og formålet med, algebraisk notasjon. En historisk tilnærming bidro til å gi elevene en læringssituasjon der de steg inn i menneskehetens læringsprosess og utvikling av matematiske verktøy og forståelse. Samtlige elever benyttet algebraisk notasjon og generalisering som verktøy for å sette opp de praktiske problemene som likninger, og deretter løse dem. Elevene kom ikke i mål med å forklare hvordan egypternes metode fungerer, men samtlige mestret metoden og benyttet den som en inngang til å forstå bruken av algebraisk notasjon.

Studien tok utgangspunkt i at MH skulle benyttes som et didaktisk verktøy gjennom en modul-tilnærming (Jankvist, 2009). En slik tilnærming, tilknyttet teorien om RME, fungerte som et godt utgangspunkt og verktøy til å planlegge og vurdere matematikkundervisningen. MH kan se ut til å kunne bidra positivt i elevenes gjenoppdaging av formell matematikk, ved at en historisk tilnærming ga en god situasjon for elevene å finne mening til og aktivt matematisere innenfor. Situasjonen som ble planlagt i studiens undervisningsopplegg var et godt sted der elevene kunne tre inn i læringsprosessen til menneskeheten, og gjenoppdage matematikk ved å gå de stegene som historiens matematikere har gått.

Forskning om MH i læring og undervisning av matematikk, viser at det er utfordrende for lærere å gjøre gode fagdidaktiske valg i tilknytning til MH, og lage gode undervisningsopplegg (Gulikers & Bloom, 2001). Det er anerkjent at det finnes et gap mellom forskning og praksis (Wang et al. 2018), og det trengs derfor mer forskning innenfor temaet. Masterstudien som er gjennomført, er kun et lite bidrag i forskning på temaet MH i læring og undervisning av matematikk. Med tanke på videre forskning kunne det vært interessant og gjennomført en tilnærmet lik studie, men med et bredere utvalg. Eksempelvis i flere klasser og på ulike trinn. I tillegg kunne det vært interessant med en studie der modulen har vært utvidet, til ikke bare å inkludere ett historisk element, men også flere. Eksempelvis Al Khowarizmi's metode for å løse likninger. Flere ulike temaer og historiske tilnærminger kan utforskes videre. Det kunne også vært en mulighet å benytte samme datamateriale, men analysert med en annen vinkling. Fokusområder kunne eksempelvis vært motivasjon, holdninger eller lærerrollen. Et annet teoretisk rammeverk kunne også blitt benyttet for å se datamaterialet i et annet lys. Eksempelvis kunne Bussi og Mariotti (2008) sin sosiokulturelle teori om semiotikk vært benyttet. Med et slikt rammeverk kunne det historiske elementet virket som en artefakt i sentrum av undervisningen. Elevenes læring kunne blitt identifisert gjennom en endring av tegn. Det kunne også vært hensiktsmessig å benytte et rammeverk som i større grad retter fokuset mot undervisningspraksisen. Wang et al. (2018) beskriver et rammeverk for å integrere MH i undervisningen (IHT). De beskriver en syklisk modell med fem steg, som har som formål å tette gapet mellom forskning og praksis, ved å adressere utfordringer og forbedre undervisning der MH er inkludert.

Referanser

Bakker, A. & Gravemeijer, K. P. E. (2006). A historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 149-168.

Barbin, E., Jankvist, U. T. & Kjelden, T. H. (2015). *History and Epistemology in Mathematics Education*. Aarhus: Danish School of Education.

Bills, L., Ainley, J. & Wilson, K. (2006). Modes of algebraic communication: Moving from spreadsheets to standard notation. *For the learning of Mathematics*, 26(1), 36-41.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom*. Portsmouth: HEINEMANN.

Brekke, M. & Tiller, T. (Red.). (2013). *Læreren som forsker: Innføring i forskningsarbeid i skolen.* Oslo: Universitetsforlaget.

Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics: An introduction*. New York: McGraw-Hill.

Bussi, M. G. B. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. I English, L., Bussi, B., Jones, G., Lesh, R. & Tirosh, D. (Red.). *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* (s. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Carr, W. & Kemmis, S. (1986). *Becoming Critical: education, knowledge and action research*. Geelong: Deakin University Press.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt Forlag.

Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S., Tzanakis, C. & Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. I Radford, L., Furinghetti, F. & Hausberger, T. (Red.). *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (s. 135-179). Montpellier: IREM de Montpellier

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. (1990). Research on teaching and teacher research: the issues that divide. *Educational Researcher*, 19(2), 2-11.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8. utg.). Storbritannia: Taylor & Francis Group.

De Lange, J. (1987). *Mathematics insight and meaning*. Utrecht: OW & OC.

Denzin, N. K. (1989). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Methods* (3. utg.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2011). *The SAGE handbook of Qualitative Research*. California: SAGE Publications, Inc.

De Vittori, T. (2018). Analyzing the use of history in mathematics education: issues and challenges around Balacheff's cK¢ model. *Educational Studies in Mathematics,* 99, 125–136.

Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard educational Review*, (3), 289-301.

Doorman, L. M. & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: Discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM*, 41(1–2), 199–211.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CD-B Press.

Eisenlohr, A. (1877). *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter*. Leipzig: J. C. Heinrichs' Buchhandlung.

Elliot, J. (1991). *Action Research for Educational Change*. Buckingham, UK: Open University Press.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Red.). (2000). *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3(3), 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education-China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1), 111-129.

Gulikers, I. & Bloom, K. (2001). A historical angle: a survey of recent literature on the use and value of the history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics.* 47, 223-258.

Hammersley, M. (1993). On the Teacher as Researcher. *Educational Action Research*, 1(3), 425-445.

Hammersley, M. & Atkinson, P. (1983). *Ethnography: Principles in Practice*. London: Routledge.

Hoel, T. L. (2000). Forskning i eget klasserom. Noen praktisk-metodiske dilemma av etisk karakter. *Nordisk Pedagogik*, 20(3).

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's cardinal and ordinal infinies: An epistemological and didactic view. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 175-197.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., Idrissi, A. E. I., Silva da Silva, C. M. & Uker, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. I Fauvel, J. & van Maanen, J. (Red.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI Study* (s. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic.

Jahnke, H. N. & Habdank-Eichelsbacher, B. (1999). Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen. I Selter, C. & Walther, G. (Red.). *Mathematikdidaktik als design science*: *Festschrift für E. Chr. Wittmann* (s. 94-104). Leipzig/Stuttgart/Düsseldorf: Klett.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the «whys» and «hows» of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 235-261.

Johnston, S. (1994). Is action research a 'natural' Process for teachers?. *Educational Action Research*, 2(1), 39-48.

Jupri, A. & Drijvers, P. (2016). Student Difficulties in Mathematizing Word Problems in Algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(9), 2481-2502.

Katz, V. J. & Michalowicz, K. D. (Red.). (2004). *Historical modules for the teaching and learning of mathematics*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Kemmis, S. & McTaggart, R. (1992). *The Action Research Planner* (3. utg). Geelong, Victoria: Deakin University Press.

Kvale, S. (1997). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Ad Notam Gyldendal.

Kvale, S. & Brinkman, S. (2018). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Lewin, K. (1948). *Resolving Social Conflicts*. New York: Harper.

Lindstrøm, T. (1995). *Kalkulus*. Oslo: Universitetsforlaget.

McAteer, M. (2013). *Action Research in Education*. London: Sage.

Niss, M. (2010). Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. I Lesh, R., Galbraith, P., Haines, C. R. & Hurford, A. (Red.). *Modeling students' mathematical competencies* (s. 43-59). New York: Springer.

NSD. Norsk senter for forskningsdata. Hentet fra Norsk senter for forskningsdata | NSD

Panaoura, A. (2017). Inquiry-based teaching approach in mathematics by using the history of mathematics: A case study. *CERME 10*. Dublin, Ireland. ⟨hal-01938806⟩

Piggot Irvine, E., Rowe, W. & Ferkins, L. (2015). Conceptualizing indicator-domains for evaluating action research. *Educational Action Research*, 23(4), 545-566.

Philippou, G. N. & Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 189–206.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematicspedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Somekh, B. (1995). The contribution of action research to development in social endeavours: a position paper on action research methodology. *British Educational Research Journal*, 21(3), 339-355.

Stenhouse, L. (1975). *An introduction to Curriculum Research and Development*. London: Heinemann.

Teusner, A. (2016). Insider research, validity issues, and the OHS professionals: one person's journey. *International Journal of Social Research Methodology*, 19(1), 85-96.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitative metoder* (5.utg.). Oslo: Fagbokforlaget.

Tjora, A. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Tjora, A. (2013). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. I Fauvel, J. & van Maanen, J. (Red.). *History in mathematics education: The ICMI Study* (s. 201–240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Utdanningsdirektoratet. (2016, 29.november). Hovedresultater fra TIMSS 2015. Hentet fra https://www.udir.no/contentassets/7b41d7e958ad41cc8596f58dfd4838d1/timss_2015_hoved resultater.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn (MAT01-05)*. Hentet fra Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05) (udir.no)

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Didactical Phenomenology (Freudenthal). I Lerman S. (Red.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014) Realistic Mathematics Education. I Lerman S. (Red.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Van de Walle, J. & Thompson, C. S. (1984). Let's Do it: Fractions with Fraction Strips. *The Arithmetic Teacher*, 32(4).

Wadel, C. (1991). *Feltarbeid i egen kultur: En innføring i kvalitativt orientert samfunnsforskning*. Flekkefjord: SEEK.

Wang, K., Wang, Xq., Li, Y. & Rugh, M. S. (2018). A framework for integrating the history of mathematics into teaching in Shanghai. *Educational Studies in Mathematics,* 98, 135-155.

Weng, K. H. (2008). *Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore*. Singapore: RICE.

Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgavehefte

Vedlegg 2: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vedlegg 3: Godkjenning fra NSD

Vedlegg 1: Oppgavehefte

Egypternes metode for å løse likninger

Lenge før man begynte å benytte algebraiske symboler (x eller y), løste folk likninger. Vi skal se nærmere på hvordan oldtidens Egypt løste likninger med en metode kalt **falsk posisjon**. De **gjettet** et svar, og benyttet **feilen** til å finne riktig svar.

Her er et eksempel på et problem fra Oldtidens Egypt ca. 1650 år f.Kr.

Vi har en **mengde.** **En fjerdedel** av mengden **adderes** med mengden. Det blir til sammen 15.

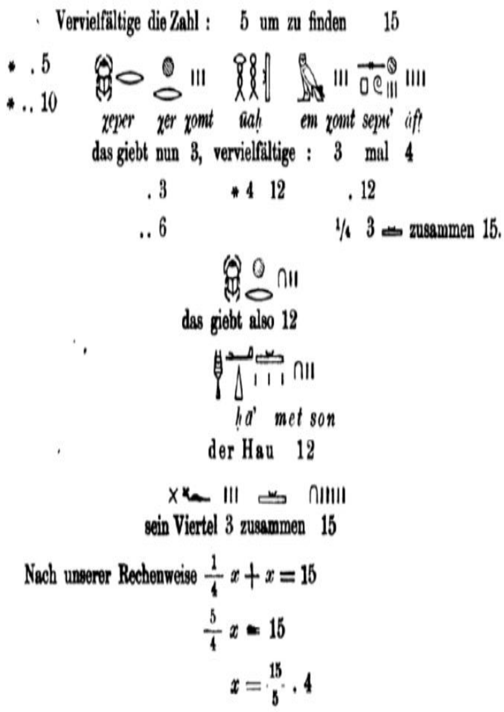
Oppgave 1

a) Hva kan en mengde være?

b) Finn ut hvor stor mengden er med selvvalgt metode

Egypterne visste ikke hvordan en stilte opp likninger og løste de på den måten vi benytter i dag. De løste likningen med å **gjette** en verdi for mengden, som gjorde regnestykket lett å jobbe med. De benyttet så **feilen** til å løse problemet.

Egypternes metode:



Gjetter at mengden er **4**, fordi 4 er et lett tall å regne med.

får da:

$$\mathbf{4 + \frac{1}{4} \text{ av } 4 = 15}$$

4 + 1 = 15

5 = 15

Benytter feilen til å løse problemet:

Hva må jeg multiplisere 5 med for å få 15? $\rightarrow$ $5 \cdot 3 = 15$

multipliserer 3 med **gjetningen** $\rightarrow$ $\mathbf{3} \cdot \mathbf{4} = 12.$

Svaret er at mengden er 12

Oppgave 2

Her er et annet problem fra gamle Egypt.

Vi har en **mengde**

halvparten av mengden og mengdens tredjedel **adderes** med mengden.

Det blir til sammen 44.

a) Benytt egypternes metode for å finne ut hvor stor mengden er.

b) Sett opp problemet som en likning, og løs den.

Oppgave 3

Et annet problem de jobbet med var:

Vi har en **mengde** **En syvendedel** av mengden adderes med mengden Det blir til sammen 19

a) Benytt egypternes metode for å finne mengden

b) Sett opp problemet som en likning og løse den.

Oppgave 4

a) Vil metoden til Egypterne alltid fungere for likninger på formen $x + \frac{x}{4} = 15$?

Forklar hvorfor/hvorfor ikke

b) Hva med på formen

$x - \frac{x}{4} = 15$

Eller

$6x + \frac{x}{3} = 30$

Hva med andre typer likninger? Undersøk og forklar

c) Sammenlikn egypternes metode med det å sette opp en likning og løse. Hva er forskjellig/likt? Hvilke styrker og svakheter har de ulike metodene?

Vedlegg 2: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vil du delta i forskningsprosjektet «Matematikkens historie i læring og undervisning av matematikk»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan en kan gjennomføre matematikkundervisning med en historisk tilnærming. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Jeg, Hanne Hegerberg, er masterstudent ved institutt for lærerutdanning ved NTNU i Trondheim, og dette prosjektet er min masteroppgave i matematikkdidaktikk. Temaet for oppgaven er **matematikkens historie i læring og undervisning av matematikk.** Problemområdet som studien vil gå inn på er hvordan matematikkens historie kan inkluderes i undervisningen på ungdomsskolen. Det vil bli utarbeidet og gjennomført ett undervisningsopplegg som inkluderer matematikkens historie. Fokuset vil rettes mot elevenes deltakelse og matematisering i møte med oppgaver innenfor en historisk kontekst.

Din deltakelse

Du får spørsmål om å delta fordi ditt arbeid er sentralt for å kunne si noe om undervisningen som blir gjennomført. Din deltakelse vi gå ut på at du ved samtykke deltar i ett undervisningsopplegg (2 undervisningstimer), som blir gjennomført av meg. Det vil bli skrevet observasjonsnotater av meg underveis i undervisningen om din delaktighet og ditt arbeid med oppgavene.

Det er **frivillig** å delta i prosjektet, slik at du deltar bare hvis du selv samtykker til å være med. Du samtykker ved å skrive under nederst i dokumentet, og krysser av for om det er i orden for deg å delta i undervisningsopplegget, om det er greit at jeg samler inn dine skriftlige besvarelser og om det er i orden at jeg tar lydopptak av at du snakker med dine medelever. Du trenger ikke å samtykke for alt. Hvis du for eksempel bare vil være med i undervisningsopplegget, men ikke vil bli tatt opp på lydopptak eller at jeg samler inn din skriftlige besvarelse, krysser du kun av for å delta i undervisningen. Hvis alle som samtykker til å delta i undervisningsopplegget også samtykker til å bli tatt opp på lydopptak, blir det satt opp lydopptakere på gruppebordene i klasserommet. Hvis bare noen samtykker til lydopptak blir de tatt ut av klasserommet på et grupperom, slik at ingen som ikke samtykker blir med på et lydopptak.

De som samtykker vil bli tatt med ut fra ordinær undervisning, og bli med meg på et klasserom og deltar på undervisningen som er tilknyttet prosjektet. Hvis du velger å ikke delta i prosjektet, følger du ordinær undervisning med din faglærer. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun meg og veileder som har innsyn i dataene som samles inn. Alt av data vil bli anonymisert. De skriftlige besvarelsene vil omtales som besvarelse 1,2,3 osv. Notater gjort av lærer vil omtale elevgruppen som helhet, og omtale gruppene og elevene med tall (gruppe 1, gruppe 2, elev 1, elev 2…). Lydopptak vil øyeblikkelig bli transkribert og deretter slettet. Elever bli omtalt som elev 1, elev 2 osv. Transkripsjoner lagres på en kryptert minnepinne. Besvarelser og notater vil bli låst inne utenom bruk.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Alt datamateriale blir tatt vare på av meg inntil prosjektet er ferdig den 25.mai 2021. Deretter blir det slettet med ekstra sikring, og skriftlige dokumenter blir makulert. Hvis du gir samtykke til at datamaterialet kan benyttes til annen forskning, vil det bli sendt videre til NSD ved prosjektslutt.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- Innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- Å få rettet personopplysninger om deg
- Å få slettet personopplysninger om deg
- Å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke. På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Personvernombud ved NTNU: Thomas Helgesen, e-post: thomas.helgesen@ntnu.no, tlf. 93079038
- Datatilsynet: Se https://www.datatilsynet.no/om-datatilsynet/kontakt-oss/
- Norsk senter for forskningsdata: Se https://nsd.no/om/
  e-post: personverntjenester@nsd.no, telefon: 55 58 21 17.

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på e-post (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Ansvarlige for studien

Masterstudent, Hanne Hegerberg, e-post: hegerbergh@gmail.com, tlf: 93230121

Veileder, Iveta Kohanova, iveta.kohanova@ntnu.no, tlf: 73412883

Med vennlig hilsen

Hanne Hegerberg, masterstudent ved NTNU

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet ***matematikkens historie i læring og undervisning av matematikk***, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ Å delta i undervisningsopplegget

☐ At mine skriftlige besvarelser blir samlet inn

☐ At det blir tatt lydopptak av gruppearbeidet

☐ At mine personopplysninger anonymiseres og lagres etter prosjektslutt, der formålet er å benytte det til annen forskning.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3: Godkjenning fra NSD

NSD personvern

21.10.2020 11:00

Følgende vurdering er gitt

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 21.10.2020 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

Meld vesentlige endringer

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: Melde endringer i meldeskjema | NSD

Du må vente på svar fra NSD før endringer gjennomføres

Type opplysninger og varighet

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 25.05.2021

Lovlig grunnlag

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personvernopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. Personvernordningen art 6 nr. 1 bokstav a.

Personvernprinsipper

NSD vurderer den planlagte behandlingen av personopplysninger ifølge prinsippene i personvernforordningen om:

- Lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen.
- Formålsberegning (art. 5.1 b), ved at personvernopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenelige formål
- Dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er advekate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- Lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

De registrertes rettigheter

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: Åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav i form og innhold, jf. Art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis registrerte tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

Følg din institusjons retningslinjer

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1 f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

Oppfølging av prosjektet

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen Tlf. Personverntjenesten: 55 58 21 17 (tast 1)

NTNU

Kunnskap for en bedre verden