

Anne Dorteia B. Austevoll

# Tegning i matematisk resonnering

En kvalitativ undersøkelse av elever på 3. trinn

Masteroppgave i matematikdidaktikk

Veileder: Kristin Krogh Arnesen

Mai 2021



Anne Dorthea B. Austevoll

# **Tegning i matematisk resonnering**

En kvalitativ undersøkelse av elever på 3. trinn

Masteroppgave i matematikdidaktikk

Veileder: Kristin Krogh Arnesen

Mai 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap

Institutt for lærerutdanning



Kunnskap for en bedre verden





# Sammendrag

Studien fokuserte på barns bruk av tegning i matematisk resonnering. Hensikten med studien var å si noe om hvordan elever på 3. trinn bruker tegning i matematisk resonnering, og da spesielt i arbeid med problemløsning. Problemstillingen for studien har dermed vært;

*Hvordan bruker elever tegning i matematisk resonnering i arbeid med problemløsning?*

Studien er en kvalitativ studie av elever på 3. trinn og deres bruk av tegning i matematisk resonnering. Metodene som ble brukt for å hente inn datamateriale var observasjon og intervju. Datamateriale består av tre elevgruppers arbeid med to problemløsningsoppgaver, hvor besvarelser ble tatt vare på og det ble tatt taleopptak av samtalen elevene hadde da var i arbeid. I tillegg til taleopptak og besvarelser, noterte jeg observasjoner gjennom hele innsamlingsprosessen.

Da datamaterialet skulle analyseres ble det brukt allerede eksisterende rammeverk og teori på temaene matematisk resonnering og tegning. Rammeverket til Lithner (2008) handler om å identifisere matematisk resonnering i elevers arbeid i matematikk. Han tar for seg ulike typer resonnering og gir et rammeverk som kan brukes på alle trinn i skolen. Rammeverket hans ble brukt for å identifisere hvilken resonneringstype elevene brukte da de arbeidet. Saundry & Nicol (2006) sitt rammeverk ble brukt for å kategorisere tegningene elevene hadde produsert. Elevenes besvarelser ble delt inn i de kategoriene som var tilgjengelig fra rammeverket til Saundry & Nicol. Til slutt ble analysen av den matematisk resonnering og tegningene sett på sammen, da stilte jeg meg tillegsspørsmål som hjalp meg å finne et svar til problemstillingen:

- a. Når i resonneringsprosessen brukes tegning?
- b. Hva slags funksjon har tegningene i resonneringsprosessen, i lys av spørsmål a?

Funnene mine viser at det er en korrespondanse mellom mine resultat og tidligere forskning på matematisk resonnering. Den resonneringstypen som er mest fremtredende er algoritmisk resonnering, mens kreativ matematisk resonnering er ikke like fremtredende. I analysen fant jeg også ut at den tegne-kategorien som var mest fremtredende var *tegning som støtte for system*, og at de resterende tegningene var i kategorien *tegning som manipulativ*. Resultatene mine viser også at elever brukte tegning aktivt i resonneringsprosessen, da mest i det som heter implementeringsfasen. Funksjonen til tegningene i elevenes matematiske resonnering var at tegningen ble en støtte for resonneringen. Uavhengig av hvilken type resonnering elevene tok i bruk ble tegningen en støtte for resonneringen.

# Abstract

This study has focused on children's use of drawing within mathematical reasoning. The purpose of the study was to be able to say something about how students in 3rd grade use drawing within mathematical reasoning, especially in work with problem solving. The problem for the study has thus been;

*How do students use drawing in mathematical reasoning when working with problem solving?*

The study is a qualitative study of students in 3rd grade and their use of drawing in mathematical reasoning. The methods used to retrieve data material were observations and interview. The data material consists of three groups of students' work with two problem-solving tasks, where answers were kept and conversations the students had while they were working were recorded. In addition to voice recordings and answer sheets, I wrote down my observations throughout the entirety of the data collection process

When the data material was to be analyzed, pre-existing frameworks and theory were used on the topics of mathematical reasoning and drawing. The framework of Lithner (2008) identifies mathematical reasoning in students' work in mathematics. He addresses different types of reasoning and provides a framework that can be used at all grade levels. His framework was used to identify the type of reasoning the students used when working with mathematics. Saundry & Nicol's (2006) framework was used to categorize the drawings the students had produced. The students' answers were divided into categories that were available from the framework of Saundry & Nicol. Finally, the analysis of the mathematical reasoning and the drawings were looked at together, then I asked myself additional questions that helped me find an answer to the problem:

- a. When in the reasoning process is drawing used?
- b. What kind of function does the drawings have in the reasoning process, in light of question a?

My findings show that there is a correspondence between my results and previous research on mathematical reasoning. The type of reasoning that is most prominent is algorithmic reasoning, while creative mathematical reasoning is not as prominent. In the analysis, I also found that the drawing category that was most prominent was *drawing as support for the system*, and that the remaining drawings was in the category *drawing as manipulative*. My results also show that students used drawing actively in the reasoning process, mostly in what is called the implementation phase. The function of the drawings in the students' mathematical reasoning was that the drawing became a support for the reasoning. Regardless of the type of reasoning the students used, the drawing became a support for the reasoning.

# Forord

Denne masteren markerer slutten på mitt 2-årige masterstudium i matematikdidaktikk ved NTNU Kalvskinnet. Gjennom de første semestrene ble det undervist i en rekke ulike temaer. Et av de temaene var matematisk resonnering. I undervisningen kom det frem ulike måter begrepet matematisk resonnering ble brukt på. Til tross for undervisning om temaet har jeg alltid syntes at begrepet matematisk resonnering har vært tvetydig. Det blir brukt i mange sammenhenger, uten å bli ordentlig definert. Matematisk resonnering er et viktig tema og en av byggesteinene i faget. Derfor følte jeg det var viktig å finne en definisjon og forståelse for temaet jeg selv kan ta i bruk når jeg starter å arbeide på barneskolen. I tillegg syntes jeg temaet tegning var et interessant og viktig tema. Jeg fant fort ut at jeg ville skrive en master, hvor tegning og matematisk resonnering var temaer. Tiden som har gått til forarbeid med masteren, skriving og etterarbeid har gått i berg og dal baner. Det har vært alt fra demotiverende til motiverende til tider, og veldig lærerikt.

Det er flere som har hjulpet meg å komme gjennom masteroppgaven, og som jeg vil overrekke en stor takk til. Først vil jeg takke 3. klassen som ville delta i studien min. Uten dem, og det gode samarbeidet med kontaktlæreren, hadde det ikke blitt noe av masteren min.

Jeg vil også takke mannen min som har holdt ut med meg i tider med klaging og frustrasjon. Du har vært en klippe gjennom, til tider, tunge perioder med sykdom. Samtidig vil jeg takke familie som har heiet meg gjennom hele masterløpet.

Noen andre som har hjulpet mye i de periodene det har vært tungt, og ikke like motiverende å fortsette arbeidet, er den gode gjengen på lesesalen (you know who you are). Pauser med kortspilling, rom for å diskutere problem som dukket opp i arbeidet og mange timer med latter, har vært godt. Vi har bygget hverandre opp, hjulpet hverandre når vi har stått fast og heiet på hverandre.

Jeg må også overrekke en stor takk til dere som har hjulpet med å lese korrektur på hele oppgaven. At dere har gitt meg av deres personlige tid er jeg evig takknemlig for.

Sist, men ikke minst vil jeg også gi en stor takk til veilederen min, Kristin Krogh Arnesen, som har hjulpet meg med både små og store problemer. Jeg setter pris på dine konkrete og konstruktive tilbakemeldinger, og forståelse for perioder med sykdom. Tusen, tusen takk.

*Trondheim, mai 2021*

Anne Dorthea B. Austevoll



# Innholdsfortegnelse

<i>Figurer</i> .....	<i>xi</i>
<i>Tabeller</i> .....	<i>xi</i>
<i>Forkortelser</i> .....	<i>xii</i>
<b>1. Innledning</b> .....	<b>1</b>
1.1 Bakgrunn for oppgaven.....	1
1.2 Studiens formål og problemstilling.....	2
1.3 Struktur på oppgaven.....	3
<b>2. Teori</b> .....	<b>4</b>
2.1 Matematisk resonnering.....	4
2.2 Lithner sitt rammeverk.....	6
2.2.1 Imiterende resonnering.....	7
2.2.2 Kreativ resonnering.....	10
2.3 Resonnering i grupper.....	11
2.4 Tegning.....	12
<b>3. Oppgavene</b> .....	<b>14</b>
3.1 Valg av oppgaver.....	14
3.2. Oppgavene og løsningsforslag.....	15
3.2.1 Fotballcup.....	15
3.2.2 Sneglen Nils.....	16
3.2.3 På vei til skolen.....	17
<b>4 Metode</b> .....	<b>18</b>
4.1 Valg av kvalitativ forskningsmetode.....	18
4.1.1 Observasjon.....	18
4.1.2 Intervju.....	20
4.3 Datainnsamlingsprosessen.....	21
4.3.1 Forarbeid.....	22
4.3.2 Innsamling.....	22
4.3.3 Etterarbeid.....	23
4.4 Analyseverktøy.....	23
4.5 Forskningens troverdighet.....	25
4.5.1 Troverdighet i observasjon.....	26
4.5.2 Troverdighet i intervju.....	26
4.6 Etisk hensyn.....	27
<b>5. Analyse</b> .....	<b>29</b>

5.1 Resonnering .....	29
5.1.1 Gruppe A .....	30
5.1.2 Gruppe B .....	34
5.1.3 Gruppe C .....	38
5.2 Tegning .....	43
5.2.1 Tegning som støtte for system.....	43
5.2.2 Tegning som manipulativ.....	45
5.3 Resonnering og tegning sett sammen.....	46
5.3.1 Tegning og AR.....	46
5.3.2 Tegning og CMR.....	49
<b>6. Diskusjon.....</b>	<b>51</b>
6.1 Oppsummering av funn og tidligere forskning.....	51
6.2 Pedagogiske implikasjoner av studien.....	53
6.3 Studiens begrensninger og metodekritikk.....	53
<b>7. Avslutning.....</b>	<b>55</b>
<b>8. Referanseliste .....</b>	<b>57</b>
<b>9. Vedlegg .....</b>	<b>61</b>
Vedlegg 1: Samtykkeskjema .....	62
Vedlegg 2: Søknad til NSD.....	65
Vedlegg 3: Godkjennelse fra NSD.....	70
Vedlegg 4: Intervjuguide.....	73

## Figurer

Figur 1: Opphavet for resonnering (Lithner, 2008, s.256, min oversettelse).....	6
Figur 2: Alseth, Kirkegaard & Rosseland, 2006, s.107 .....	10
Figur 3: Oversikt over Lithner sitt begrepsapparat (2006, s 5).....	11
Figur 4: Mal for klasseroms observasjon .....	22

## Tabeller

Tabell 1: En sammenligning av metoder for å lære matematikk (Ernest, 1991, s. 296, min oversettelse) .....	15
Tabell 2: Observasjon generelt og i min studie .....	20
Tabell 3: Transkripsjonsnøkler .....	23
Tabell 4: Hvordan analysen blir presentert .....	24
Tabell 5: Oversikt over datamaterialet, resonnering.....	30
Tabell 6: Resonneringssekvens for gruppe A .....	33
Tabell 7: Resonneringssekvens for gruppe B .....	36
Tabell 8: Resonneringssekvens for gruppe C .....	42
Tabell 9: Oversikt over datamaterialet, tegning .....	43
Tabell 10: Resonnering og tegning .....	46

## Bilder

Bilde 1: Mari sin tegning .....	30
Bilde 2: Odd sin tegning .....	30
Bilde 3: Isak sin tegning .....	30
Bilde 4: Lea sin tegning .....	34
Bilde 5: Hans sitt svar .....	34
Bilde 6: Ivar sin tegning .....	34
Bilde 7: Hans sin tegning, markert hvor det er visket bort et firetall. ....	37
Bilde 8: Erik sin tegning .....	38
Bilde 9: Erna sin tegning .....	38
Bilde 10: Inge sin tegning .....	38
Bilde 11: Hans sin tegning, oppgave 3 .....	43
Bilde 12: Erna sin tegning, oppgave 2 .....	43
Bilde 13: Inge sin tegning, oppgave 3 .....	44
Bilde 14: Mari sin tegning, oppgave 2 .....	44
Bilde 15: Ivar sin tegning, oppgave 3.....	45
Bilde 16: Hans sin tegning, oppgave 2 .....	45
Bilde 17: Ivar sin tegning, oppgave 2.....	47
Bilde 18: Isak sin tegning, oppgave 3 .....	47
Bilde 19: Inge sin tegning, oppgave 3 .....	48
Bilde 20: Erna sin tegning, oppgave 3 .....	48
Bilde 21: Erik sin tegning, oppgave 2 .....	49
Bilde 22: Mari sin tegning, oppgave 2 .....	49

# Forkortelser

IR	Imiterende resonnering
CMR	Kreativ matematisk resonnering
AR	Algoritmisk resonnering
Kjent AR	Kjent algoritmisk resonnering
Avgrensende AR	Avgrensende algoritmisk resonnering
Veiledet AR	Veiledet algoritmisk resonnering
MR	Memorert resonnering
LK20	Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020



# 1. Innledning

I denne oppgaven tar jeg for meg temaene matematisk resonnering og tegning gjennom forskning med barn i grupper på 3. trinn. Formålet er å finne ut hvordan elever bruker tegning i matematisk resonnering. I de følgende delkapitlene presenterer jeg bakgrunn for hvorfor jeg har valgt dette forskningsfeltet, hva formålet med studien er, problemstillingen for oppgaven og til slutt en struktur over resten av oppgaven.

## 1.1 Bakgrunn for oppgaven

Matematisk resonnering er viktig og er et av de sentrale verdiene i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Det er viktig fordi matematisk resonnering er en grunnleggende ferdighet i faget. Ross (1998) forklarer både viktigheten og hvordan man kan oppnå at matematisk resonnering blir en grunnleggende ferdighet hos elever:

One of the most important goals of mathematics courses is to teach students logical reasoning. This is a fundamental skill, not just a mathematical one. To accomplish this, teachers need to recognize mathematics as a lively, exciting, vibrant field of study that must have a primary role in every child's education throughout the school years (s.153).

Begrepet matematisk resonnering er for det meste brukt blant matematikklærere og forskere uten en klar definisjon. Det ligger en implisitt og universell forståelse av ordet og hva det innebærer, men ingen eksplisitt definisjon (Yackel og Henna, 2003). Som fremtidig lærer for 1.-7. trinn, er det viktig å kunne identifisere og videreutvikler elevers matematiske resonnering. Utdanningsdirektoratet (2020a) påpeker i sin nye læreplan at «matematikk skal bidra til at elevene utvikler et presist språk for **resonnering**, kritisk tenkning og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering (s. 2)». Da må man som lærer vite hva matematisk resonnering er og hvordan elever kan komme til å uttrykke matematisk resonnering i praksis. Matematisk resonnering blir også ofte sett i sammenheng med begrep som bevis og argumentasjon, hvor matematisk resonnering er en del av bevis og argumentasjon, som for eksempel i forskningen til Stylianides og Ball (Stylianides, 2007; Stylianides & Ball, 2008). Jeg ønsker i denne studien å se spesifikt på matematisk resonnering på barneskolen og vil definere begrepet matematisk resonnering slik Lithner (2008) definerer i sin forskning:

*...reasoning* is the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions in task solving. It is not necessarily based on formal logic, thus not restricted to proof, and may even be incorrect as long as there are some kinds of sensible (to the reasoner) reasons backing it (s. 257).

Med andre ord ser Lithner på resonnering som en prosess. Lithner sin definisjon av resonnering er en bred og god definisjon å ta utgangspunkt i, om man vil forske på alle trinn i skolen (Lithner, 2006). Det er også rammeverket til Lithner som er ett av to rammeverk som er brukt i analysen for denne studien. Det tar for seg hvordan man kan se etter matematisk resonnering elevers arbeid. Ved å bruke Lithner (2008) sitt rammeverk vil jeg kunne identifisere når elever tar i bruk matematisk resonnering. Siden matematisk resonnering er en tankeprosess elever går gjennom, er ikke resonneringen noe jeg som forsker kan få fullstendig innsikt i eller forståelse for. Å observere og reflektere om tankeprosesser er noe jeg derimot kan gjøre (Lithner, 2008).

Hvordan kan man som lærer få elever på barneskolen til å uttrykke sine matematiske resonneringer? I tidlig barnealder og skolealder er ikke alltid det matematiske vokabularet så utviklet, som hos et voksent menneske (Arksey & Knight, 1999, s.116, i Cohen et al., 2015). Vygotsky (1978) har forsket på hvordan barn kommuniserer og påstår at tegning er en preliminær fase for å utvikle et skriftlig språk.

...we see that drawing is graphic speech that arises on the basis of verbal speech. The schemes that distinguish children's first drawings are reminiscent in this sense of verbal concepts that communicate only the essential features of objects. This gives us grounds for regarding children's drawing as a preliminary stage in the development of written language (Vygotsky, 1978, s. 112-113).

Vygotsky skriver i denne sammenhengen om barn, og deres skriftlige språk. Denne sitatet kan sees i lys av det matematiske skriftspråket. Tegning blir dermed en preliminær fase for å kommunisere det skriftlig matematiske språket. Woleck (2001) skriver at tegning kan være et verktøy for elever til å oppdage og kommunisere resonnering. Saundry & Nicol (2006) skriver om tidligere forskning som konkluderer at blant annet tegning ikke kan atskilles fra elevenes matematiske resonnering. «Drawing can be a window into the mind of a child» skriver Woleck (2001, s.215). Det Woleck formidler at tegning ikke bare er et verktøy for eleven, men lærere også. Lærere arbeider for å kunne forstå hva elevene har forstått og ikke forstått i hvert enkelt fag. Den eneste som kan bekrefte om eleven har forstått noe, er eleven selv. Tegning kan synliggjøre elevens forståelse og gjøre resonneringen eksplisitt for lærere. Problemet er at det er begrenset med forskning på både tegning og matematisk resonnering, i tilknytning til Lithner sitt rammeverk, på barneskolen. Det etterlyses også mer utarbeidende forskning på tegning i lys av matematisk resonnering (Saundry & Nicol, 2006). Det er mangelen og etterspørselen etter mer forskning på matematisk resonnering og tegning som er grunnen til at jeg har valgt å forske på disse to temaene. Derfor håper jeg, med å forske på tegninger i matematisk resonnering, at jeg vil kunne finne ut hvordan elever bruker tegningen.

## 1.2 Studiens formål og problemstilling

Problemet jeg har valgt å forske nærmere på, handler om hvordan elever bruker tegning i matematisk resonnering. Problemet har blant annet sin forankring i at det er etterlyst mer forskning på matematisk resonnering, i lys av tegninger. For å kunne svare på problemet, er rammeverket til Lithner (2006) og Saundry & Nicol (2006) valgt for min studie. Lithner (2008) sitt rammeverk handler om elevens resonnering og Saundry & Nicol (2006) sitt rammeverk handler om hva som kategorisere elevens tegninger. Rammeverkene som er tatt i bruk har også begrenset forskning innen en norsk skolekontekst, som også har sin forankring i problemområdet mitt. Fordi det er lite forskning på matematisk resonnering og tegning i norsk skolekontekst, blir min forskning et bidrag i norsk kontekst. Problemstillingen jeg har formulert ut fra problemområdet lyder følgende:

*Hvordan bruker elever tegning i matematisk resonnering i arbeid med problemløsning?*

For å kunne svare på problemstillingen har jeg valgt å lage noen tilleggsspørsmål. De tilleggsspørsmålene er;

- a. Når i resonneringsprosessen brukes tegning?
- b. Hva slags funksjon har tegningene i resonneringsprosessen, i lys av spørsmål a?

Datamaterialet som er samlet inn til denne studien, består av tegninger elever har produsert ut fra oppgaver og transkripsjoner fra observasjon og intervju. Det er elever på 3. trinn som har deltatt i innsamlingen av data. Min intensjon er å prøve å flette sammen Lithner (2008) sitt rammeverk sammen med Saundry & Nicol (2006) sitt rammeverk, for å ta del i å utvide forskningsfeltet og kunne se sammenhenger mellom ulike rammeverk. Et annet argument for å ha matematisk resonnering og tegning som problemområde og problemstilling, er at den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020a) har et større fokus på ferdigheter som matematisk resonnering og kommunikasjon. Noe som indikerer at alle lærere også trenger kompetanse om og hvordan man identifiserer og arbeide med matematisk resonnering.

### 1.3 Struktur på oppgaven

I kapittel 2 presenteres tidligere forskning og rammeverk som tar for seg temaene matematisk resonnering, resonnering i grupper og tegning. Kapitlet er delt inn i ulike delkapitler, blant annet matematisk resonnering og tegning, for å holde oversikt over de ulike rammeverkene og teorien.

I kapittel 3 blir det begrunnet hvilke typer matematiske oppgaver som ble tatt i bruk i metoden. Siden studien også går ut på å gi elever på småtrinnet problemløsningsoppgaver, vil det komme litt teori om hva denne studien definerer som en problemløsningsoppgave og eksempler på noen. Oppgavene som ble gitt til elevene under datainnsamlingen vil også bli presentert og analysert.

Kapittel 4 er et metodekapittel hvor forskningsmetoden og innsamling av dataen vil bli introdusert. Metodekapitlet starter med redegjørelse og begrunnelse for valg av metode. Deretter blir datainnsamlingsprosessen og valgene som ble gjort underveis presentert. Videre blir det forklart hvordan datamaterialet har blitt analysert, oppgavens troverdighet og etisk rammer som måtte tas hensyn til.

I Kapittel 5 vil datamaterialet blir presentert og analysert i henholdt til litteratur og rammeverk presentert i kapittel 2. Resultatene vil ha en struktur hvor resonnering vil bli presentert først, deretter tegning og til slutt resultat fra når de to rammeverkene for matematisk resonnering og tegning ble satt opp mot hverandre.

Kapittel 6 er et diskusjonskapittel hvor det vil bli presentert en kort oppsummering av funn og hvordan funnene relaterer seg til problemstillingen. Videre blir funnene satt opp mot tidligere forskning, hvilke pedagogiske implikasjoner studien har hatt, studiens begrensinger og metodekritikk.

Kapittel 7 fungerer som en avslutning på studien. Her vil hele studien bli kort oppsummert før det kommer forslag til videre forskning på bakgrunn av denne studien.

## 2. Teori

Teorikapittelet er delt inn i forskjellige underkapitler for å få en fin oversikt. Først vil tidligere forskning på matematisk resonnering bli lagt frem, generell teori om matematisk resonnering og hva matematisk resonnering i denne avhandlingen vil være definert som. Rammeverket til Lithner (2008) blir presentert. Etter rammeverket til Lithner vil teori om resonnering i grupper bli presentert. Deretter er teori om tegning presentert. Her vil generell teori være fokus før det går over til rammeverket til Saundry & Nicol (2006). Gjennom hele teorikapittelet blir også relevante begrepet definert.

### 2.1 Matematisk resonnering

Det finnes mye forskning på området *matematisk resonnering*. Et eksempel er Stylianides (2008) som skriver mye om bevis og bevisføring. Han har utarbeidet et analytisk rammeverk hvor han bruker begrepet *resonnering* og *bevis*. Han presiserer at resonnering og bevis er en overordnet aktivitet som involveres i (1) identifisering av mønster, (2) å lage hypoteser, (3) gi bevis og (4) gi argument som ikke er bevist. I artikkelen blir det ikke satt mye lys på hva resonnering egentlig er, men resonnering og bevis blir derimot sett i sammenheng. Videre har vi studier som bruker begrepet *resonnering*, som i likhet med Stylianides, ikke egentlig definerer hva det er. Et annet eksempel er forskningen til Lannin (2005) som også har samme tilfellet hvor hovedfokuset er på generalisering og begrunnelse. Lannin skriver at målet for studien er å undersøke resonneringen til noen 6.klassinger. Det som kommer frem i forskningen til Lannin er at resonnering kan være rekursiv og eksplisitt. Lannin sin forskning er spesifikt knyttet til oppgaver rundt figurmønster og funksjonstenking.

Fordi forskningsfeltet kan virke tvetydig, i hva som ligger i begrepet *resonnering*, er det blir gjort grundige forsøk på å definere hva resonnering faktisk er. Jeannotte & Kieran (2017) har prøvd å finne ut hvordan ulike forskere bruker begrepet matematisk resonnering. Det har de gjort med å samle inn alt fra blant annet bøker, artikler og forskning for å få en oversikt over ulike måter begrepet *resonnering* blir brukt og definert. Begreper som går mye igjen for å forklare matematisk resonnering er ifølge Jeannotte & Kieran; generalisering, identifisering av mønster, lage hypotese, sammenligning, klassifisering, validering, rettfærdiggjøring, bevis og formelt bevis. Dette er begrep man også ser igjen i artiklene ovenfor (Stylianides, 2007; Lannin, 2005). Felles for mange av begrepene i forrige setning er at definisjonen av matematisk resonnering kan bli smal og streng for enkelte forskningsområder. Med smal og streng menes at resonnering for eksempel må være at man kommer frem til et svar som er riktig. Svaret må også begrunnes med argument og formelle bevis som er godkjent av det matematiske fagmiljøet man befinner seg i.

Siden det finnes mange definisjoner, meninger, forskning og kunnskap om matematisk resonnering blir det viktig for hver enkelt forsker å begrunne sine valg og definere begrepene som er viktig for forskning sin. Jeg velger å ha et bredt perspektiv og åpne krav for hva matematisk resonnering er og ikke er. Pólya (1954) forklarer poenget mitt ovenfor med ordene: «In strict reasoning the principal thing is to distinguish a proof from a guess, [...] In plausible reasoning the principal thing is to distinguish a guess from a guess, a more reasonable guess from a less reasonable guess.». Alt nytt man tilegner seg i verden, av kunnskap for eksempel, involverer plausibel resonnering. Man må være

nytenkende og kontroversiell (Pólya, 1954). Da må jeg finne et rammeverk som reflekterer mine valg.

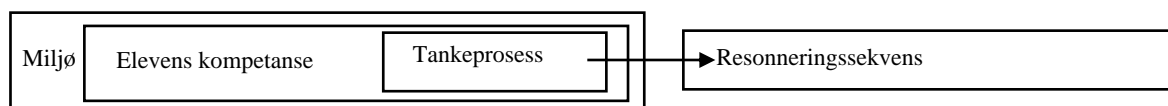
En forsker innenfor mine rammer er Lithner (2008). Rammeverket hans har en åpen og bred forståelse for hva matematisk resonnering er, og vil bli ytterligere forklare senere i kapitlet. I tillegg er det utviklet for å forske på trekk ved resonnering, noe som er sentralt i problemstillingen. Derfor kommer rammeverket til Lithner til å være sentralt i denne avhandlingen. Før rammeverket til Lithner blir presentert vil jeg se på tidligere forskning gjort med rammeverket. Lithner (2000b) undersøkte matematisk resonnering i oppgaveløsning. Da var hensikten å bygge på tidligere forskning. I studien fra 2000b beskriver Lithner to hovedgrupper av resonnering; *plausible reasoning (PR)* og *established experience (EE)*. PR går ut på å finne nye løsningsmetoder og EE går ut på å bruke allerede lærte strategier. Resultatene fra studien viser til at EE er mer brukt som resonnering, altså at elever bruker tidligere lærte strategier, regler og definisjoner til å løse oppgaver. Lithner (2006) videreutvikler rammeverket sitt fra å bruke begrepene PR og EE til henholdsvis begrepene kreativ matematisk resonnering og imiterende resonnering. De sistnevnte begrepene vil bli grundig forklart senere i teorien. Kort fortalt er kreativ matematisk resonnering noe man tar i bruk når man møter på et matematisk problem man ikke vet hvordan en skal løse, og må være kreativ for å finne frem til en løsningsmåte som kan fungere med de opplysningene man har fått tildelt fra problemet. Imiterende resonnering bruker man når man møter på oppgaver eller problem som virker kjent, og bruker løsningsstrategier man kjenner til eller vet noe om.

En annen studie (Bergqvist, 2007) forsker på hvilken type resonnering det trengs for at studenter som tar matematikk i hovedfag skal lykkes på eksamen. Undersøkelsen tar for seg eksamener, lærebøker og utdelt arbeid fra foreleser i ett og samme emne, fra fire ulike universitet. Etter å ha kategorisert alt av datamateriale, kommer Bergqvist frem til at ca. 70 % av oppgavene på eksamenene var løsbare ved bare å bruke imiterende resonnering. Alle eksamener utenom én, var mulig å få bestått karakter på ved å bare bruke imiterende resonnering. Bergqvist et al. (2008) kom ut med en studie på resonnering til elever som gikk på videregående, i arbeid deres med problemløsning. Studien til Bergqvist et al. brukte rammeverket til Lithner (2008) og resultatene indikerte at velbegrunnede matematiske betraktninger, altså kreativ matematisk resonnering, var sjelden. Imiterende resonnering var dermed den dominerende resonneringstypen i deres studie også. Jonsson et al. (2014) har også forsket på matematisk resonnering, hvor fokuset var på hvilken av kreativ resonnering og imiterende resonnering som hadde best effekt for læring. Det Jonsson et al. legger i *best effekt for læring*, er om undervisning som fremmer kreativ resonnering gir best utbytte for elevene, eller om det er undervisning som fremmer imiterende resonnering som gir best utbytte fra undervisning. Det er en studie med videregående elever som ble delt inn i ulike grupper. En gruppe elever hadde undervisning og læring med imiterende resonnering som fokus, og en gruppe elever hadde kreativ resonnering som fokus. Hver gruppe fikk først øvelsesoppgaver og deretter en test. Resultatene i Jonsson et al. sin studie viser at en gruppe gjorde det best på øvelsene og en annen på testene. Gruppen som hadde fokus på imiterende resonnering, utkonkurrerte gruppa med fokus på kreativ resonnering under øvelsene, og omvendt på testene. Analysen indikerer derfor at undervisning hvor kreativ resonnering vektlegges, gir bedre utbytte for elevene.

Det som går igjen i mange av studiene, som forsker på å identifisere matematisk resonnering, er at imiterende resonnering er mer utbredt enn kreativ resonnering. Noe annet tidligere forskning viser til, er at rammeverket til Lithner (2008) er et brukbart rammeverk når man skal forske på elevers resonnering. Dette er en grunn til hvorfor det er Lithner sitt rammeverk som kommer til å bli brukt i min studie. Mye av tidligere forskning er blitt gjort på høyere nivå enn barneskolen. En studie som har tatt i bruk rammeverket til Lithner er av Hershkowitz et al. (2016). De tar for seg delen om kreativitet fra Lithner (2008) sitt rammeverk med inn i deres forskning. Lithner (2006) sier selv at rammeverket kan bli brukt og relater til *phenomena across educational levels*. Lithner kommer med en hypotese om at det kanskje kan være en progresjon i resonneringen, hvor den på barneskolen omhandler overflateegenskaper, og videreutvikler seg etter hvert som elevene kommer i høyere trinn. Dette er enda en grunn til å ta i bruk rammeverket til Lithner (2008), som blir ytterligere forklart i neste delkapittel.

## 2.2 Lithner sitt rammeverk

Rammeverket til Lithner (2008) deler matematisk resonnering i to hovedgrupper: Imiterende resonnering (imitative reasoning, IR) og kreativ matematisk resonnering (Creative mathematical reasoning, CMR). Hver hovedkategori er delt inn i noen underkategorier igjen. Underkategoriene vil bli forklart etter hvert i de påfølgende delkapittel under. For en oversikt over rammeverket henvises det til figur 1 (side X). Før rammeverket blir presentert, er det noen begrep som skal defineres. Lithner (2008) skriver om «the origin of reasoning», som handler om hvor resonneringens opprinnelse kommer fra. Gjennom figur 1 vises det til at resonneringen man gjør avhenger av hvilket miljø man er i, kompetansen man har og tankeprosessen. Når man skal prøve å skille mellom ulike resonneringstyper, er det viktig å separere resonneringssekvensen fra tankeprosessen som skapte den.



Figur 1: Ophavet for resonnering (Lithner, 2008, s.256, min oversettelse)

*Resonneringssekvensen* er hva man må se på for å kategorisere hvilken type resonnering som blir gjort. I denne oppgaven vil dermed begrepet *resonnering* bli definert som en tankeprosess som blir brukt til å gi en påstand og nå en konklusjon til oppgaven. Oppgaver i skolen blir ofte sett på som repeterende aktiviteter elever gjør, for å nå et mål. Eksempler på slike oppgaver er  $5 + 5 =$  eller «sett ring rundt alle oddetall». Målet blir å kunne matematikken for å komme seg videre i faget. Mellin-Olsen (1996) forklarer målet ovenfor, om å komme seg videre i faget, med en metafor. Den går ut på at lærere ønsker å «kjøre» seg gjennom pensum med mange oppgaver for å kunne stå i oppkjøring(eksamen). I denne studien har begrepet *oppgave* en bred forståelse og kan bety alt fra rutineoppgaver, gruppearbeid, tester, problemløsning osv. Konklusjonen for en oppgave som er gitt kan være både riktig og galt. Så lenge man har kommet frem til en konklusjon er det foretatt en resonneringssekvens (Lithner, 2008).

Hele resonneringssekvensen den dermed deles inn i 4 steg:

1. Møtet: Eleven møter oppgave. Dersom løsningen ikke er åpenbar stå eleven ovenfor en problemsituasjon.
2. Strategivalg: Eleven velger en strategi for hvordan å løse oppgaven.
3. Strategiimplementering: Strategien blir implementert og prøvd ut.
4. Konklusjon: Eleven oppnår en konklusjon eller svar på oppgaven.  
(Lithner, 2000b; Lithner, 2008)

Resonneringssekvensen som er beskrevet ovenfor vil være en del av hvordan analysen vil bli gjort på datamaterialet for denne studien. Det er gjennom å se på en slik resonneringssekvens man finner ut hvilken type resonnering som er gjort. Hvordan studiens analyse vil bli utført og presentert kommer senere i metodekapittelet (se kapittel 4.4 Analyseverktøy).

Argumentasjon er et begrep som ofte blir nært knyttet til resonnering generelt, også i Lithner (2008) sitt rammeverk. Lithner (2006) beskriver argumentasjon som en del av resonneringen, hvor formålet er å overbevise seg selv eller andre at resonneringen som er blitt gjort er passende. Lithner (2008) forslår derfor to argumentasjonstyper sammen med rammeverket sitt. De to typene er forutseende argumentasjon og verifiserende argumentasjon. Hver av de to argumentasjonstypene kan bli sett i sammenheng med steg to og tre i resonneringssekvensen ovenfor. Forutseende argumentasjon støtter strategivalg og planlegging av hva som skal gjøres med problemsituasjonen. Man kan for eksempel stille seg selv spørsmålet: «Vil denne strategien hjelpe meg til et svar?». Verifiserende argumentasjon støtter opp om implementeringen og bekreftelse av strategien. Her kan man stille seg selv spørsmål som: «Hjalp denne strategien meg til å løse problemet?». Nå er overordnede sentrale begreper rundt resonnering i denne oppgaven beskrevet og definert. Videre beskriver jeg Lithner sine to hovedkategorier av resonnering; imiterende resonnering og kreativ resonnering.

### 2.2.1 Imiterende resonnering

Imiterende resonnering (IR) handler om resonnering som er kjent, automatisert og hvor man av og til kan få hjelp av noen. Det finnes flere underkategorier av IR som kan virke veldig like. Underkategoriene er ulike i form av hvor innarbeidet en løsningsstrategi er, hvor godt den blir husket og om man trenger hjelp. Empiriske studier (Bergqvist, 2007; Boesen et al., 2010; Lithner, 2008;) viser til resultat hvor imiterende resonnering (IR) kan bli delt inn i to underkategorier; *memorerende resonnering* (MR) og *algoritmisk resonnering* (AR). Når en elevs strategivalg er å gjenskape et memorert svar fra minne, og regelrett skrive det ned som svar, brukes MR. Dette kan man for eksempel se når man har prøver i gangetabellen, når tabeller skal reproduseres eller hvert steg i et bevis blir skrevet ned (Liljekvist, 2014; Lithner, 2008). Lithner har to betingelser som må være innfridd for at resonneringen kan kategoriseres som MR:

1. Strategivalget er basert på å huske et komplett svar.
2. Strategiimplementeringen består av å skrive ned det komplette svaret.

Eksempler fra barneskolen kan være «hva er 1 | i | dl?», «hva er  $6 * 6 = ?$ » eller «hva er et partall?». Enkelt forklart er det når man husker svaret på en gitt oppgave med en gang og skriver det ned.

AR går ut på å bruke en memorert, eller en tilgjengelig, prosedyre til å løse en oppgave. Ved å anvende AR blir det ikke skapt en ny løsningsmetode. Følgende betingelsene må være innfridd for at resonneringen kan kategoriseres som AR:

1. Strategivalget er å huske en løsningsalgoritme, hvor man ikke nødvendigvis trenger å lage en ny løsning.
2. Implementeringsfasen for løsningsalgoritmen er kritisk. Dersom eleven gjør en liten slurvfeil, kan det forhindre et svar å bli oppnådd (Bergqvist, 2007; Lithner, 2006; Lithner, 2008).

AR på barneskolen kan for eksempel være å huske de standardiserte regnealgoritmene, addering, subtrahering, multiplikasjon og divisjon. Eleven kan da huske hvert steg i prosedyren ved å for eksempel subtrahere 57 med 38, men en liten slurvfeil kan føre til at eleven ikke mestrer å komme frem til svaret. Et annet eksempel kan være en oppgave blir gitt i en oppgavebok med en lignende eksempelsoppgave med løsning. Innenfor AR deler Lithner (2008) inn i underkategoriene; *Kjent AR* (engelsk: familiar AR), *veiledende AR* (engelsk: guided AR) og *avgrensende AR* (Engelsk: delimiting AR). Alle de tre underkategoriene er resonnering basert på overflateegenskaper for en algoritme eller oppgave, noe som kan gjøre oppgaven og løsningen matematisk ustabil. Overflateegenskaper er egenskaper ved oppgaven som er utilstrekkelig å ta i betraktning for å løse en oppgave. For eksempel når man skal finne ut hvilken av brøkene  $9/15$  eller  $2/3$  som er størst, vil tallenes (9,15,2,3) størrelse være utilstrekkelig for å finne ut hvilke av brøkene som er størst. Man må se etter de iboende egenskapene (kvotienten i brøktilfellet) i oppgaven for å finne svaret (Boesen et al., 2010). Med andre ord kan det være at oppgaven kan bli misforstått fordi det blir tatt et strategivalg ut fra overflateegenskaper.

Kjent AR har som karaktertrekk at *nøkkelord* blir sett i sammenheng med strategier man kan. For eksempel ord som *mer* eller *mindre*, som kan korrespondere med strategi om å bruke addisjon eller subtraksjon. Det kan også være *regler* man har lært, som man husker (Boesen et al., 2010; Lithner, 2008). En resonneringssekvens blir definert som kjent AR når:

1. Grunnen for strategivalget er fordi oppgaven blir sett på som noe kjent/noe man har gjort før, og kan bli løst med en korresponderende algoritme man vet om fra før.
2. Algoritmen blir implementert.

Argumentet for at den som resonnerer blir i situasjoner hvor kjent AR oppstår, er ofte basert på tidligere lignende oppgaver. Det vil si tidligere erfaringer med oppgavesammenhengen, kontekst, symbol og/eller bilder. Ifølge Lithner (2008) er denne typen AR vanlig, for eksempel fant Lithner (2000a) at 33 av 46 universitets elever brukte kjent AR.

Avgrensende AR er den typen resonneringstype som blir mest brukt når ikke kjent AR virker, eller når eleven ikke har tilgjengelighet til å få veiledning (Lithner, 2008). Oppgaver som ikke er kjent for eleven, og hvor det er overflateegenskaper for oppgaven som står i fokus for valg av algoritme, er det ofte avgrensende AR som blir brukt. Bergqvist et al. (2008) har et detaljert eksempel på en elev som bruker avgrensende AR i sitt arbeid med en oppgave. Eleven, en jente, får i oppgave å finne største og minste verdi for funksjonen  $y = 7 + 3x - x^2$  på intervallet  $[-1, 5]$ . Hun går gjennom flere ulike



algoritmer, men blir ikke fornøyd med svaret sitt. I første forsøk bruker hun en algoritme for å finne minste og største verdi av funksjonen, hun finner da én verdi. Hun kaster dermed den løsningsmetoden, og går videre til en annen oppgave før hun prøver seg på oppgaven igjen. Denne gangen prøver hun å skrive inn funksjonen på en kalkulator for å finne minste og største verdi. Det fungerer ikke, og denne løsningen blir også kastet. Videre prøver hun å sette alle verdiene inn i en tabell for å finne største og minste verdi for intervallet som er gitt. På sitt første forsøk av oppgaven fikk hun en annen verdi for høyeste enn i tabell-utformingen sin, noe som førte til at hun forkastet denne løsningen også.

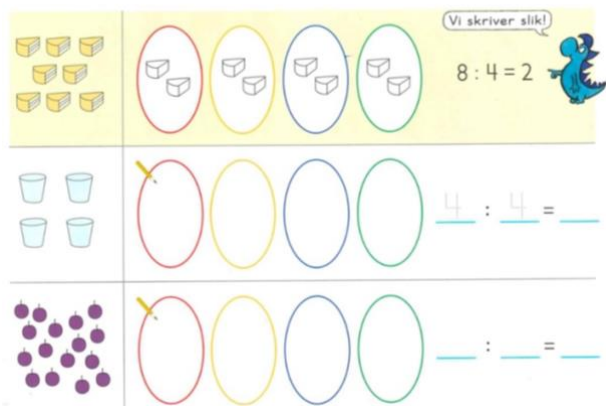
Det vi ser går igjen i løsningssekvensen til eleven er at det blir prøvd ut en løsningsmetode, når den ikke fungerer på første forsøk, blir den forkastet. Løsningsmetodene blir valgt ut på grunnlag av oppgavens og algoritmens fellestrekk i overflateegenskaper. Noe Bergqvist et al. (2008) påpeker i tilfeller med avgrensede AR, avhenger av to faktorer. For det første må algoritmen som bli valgt ut, kunne løse oppgaven. For det andre må eleven kunne utføre algoritmen med suksess. En resonneringssekvens blir definert som avgrensede AR når:

1. En algoritme blir valgt, som er avgrensede for eleven på grunn av algoritmens og oppgavens fellestrekk i overflateegenskaper. Utfallet for løsningen er ikke forutsett.
2. Implementeringen av strategien gjennomføres ved at algoritmen blir fulgt. Valg av algoritmen blir ikke verifisert av noe argumentasjon, og trengs heller ikke. Hvis implementeringen ikke fører til en tilfredsstillende konklusjon for den som resonnerer, blir den forkastet og en annen algoritme blir prøvd ut. (Bergqvist et al., 2008; Lithner, 2008)

Kort fortalt prøver eleven ut ulike løsningsmetoder, som er innarbeidet og som eleven tror kan hjelpe til med å nå frem til et svar. Eleven velger algoritmen ut fra overflateegenskapene i oppgaven og prøver ut en algoritme som håndterer overflateegenskapene.

Når verken kjent AR eller avgrensede AR fungerer for den som resonnerer er det en tredje kategori av AR som heter *veiledende AR*. Dette er en type AR hvor det blir søkt ekstern hjelp, enten fra læreboken eller en person som kan vite svaret og veilede (for eksempel en lærer eller assistent). I mange lærebøker og oppgavebøker blir det ofte forklart hvordan man kan løse et sett med oppgaver med et eksempel først. Det kan da være alt fra eksempeloppgaver, løsningsforslag, regler, definisjoner osv. Det handler om at den som resonnerer leter etter sammenhenger mellom det læreboken forteller og hva oppgaven spør etter. For eksempel som i denne multi-grunnboken for 3. trinn

Del like mange på hvert fat. Lag et regnestykke.



Figur 2: Alseth, Kirkegaard & Rosseland, 2006, s.107

I figur 2 ser vi et eksempel, øverst på figuren, på hvordan oppgavene kan løses. Møter elevene på lignende oppgaver i fremtiden eller senere i boken, kan det være at de husker informasjonen fra eksempeloppgaven og dermed prøver å gjenkalle minnet til å løse lignende regnestykker. Bruker en elev veiledet AR gjennom lærebok så trengs det ikke noe verifiserende argument for implementeringen av strategien. Når en elev søker ekstern hjelp fra for eksempel en lærer, vil det innebære at læreren hjelper eleven gjennom løsningsprosessen. Gjennom denne prosessen trengs det verken å forekomme forutseende eller verifiserende argumenter fra læreren. I studier er det blitt indikert at veiledende AR med lærebok er den mest dominerende typen for resonnering i læringssituasjoner (Lithner, 2006).

### 2.2.2 Kreativ resonnering

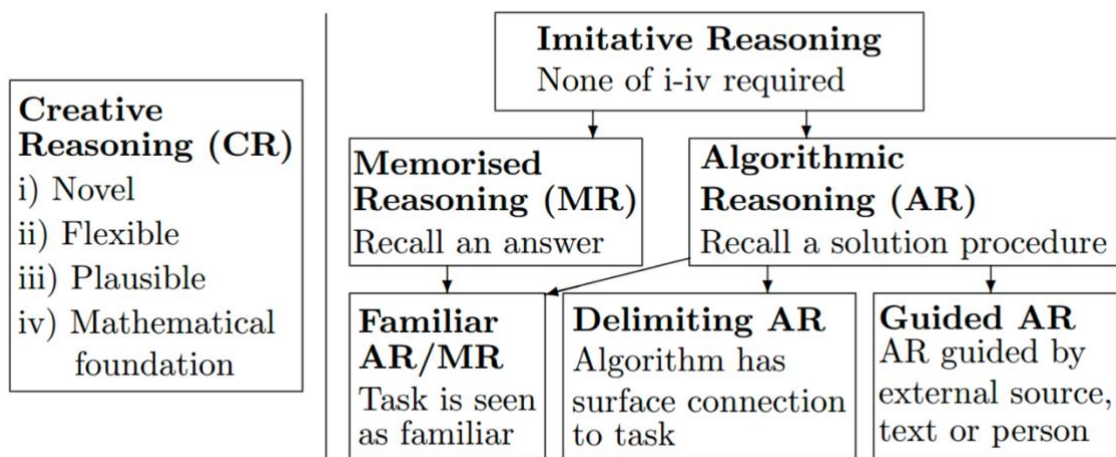
Videre finnes en annen hovedkategori av matematisk resonnering; kreativ resonnering (Creative mathematical reasoning, CMR). I min studie vil CMR bli sett på som en type resonnering man gjør når man skal løse en oppgave eller problemsituasjon, og som ikke er en rutine for den som resonnerer. Resonneringen blir dermed et produkt av *kreativ matematisk tenkning* (Bergqvist, 2007; Bergqvist et.al., 2008). Dette synet på CMR har flere andre forskere definert CMR som, blant annet Bergqvist et.al. (2008) & Hershkowitz et al., (2017). Kreative matematiske resonnering er, ifølge Lithner (2008), assosiert med at eleven danner nye og vel-resonnerte løsninger til oppgaver som eleven møter. Det er viktig å presisere at kreativ tenkning og CMR i denne sammenheng ikke handler om at resonnementet må argumenteres eller bevises på en faglig måte. Så lenge eleven er fornøyd med arbeidet sitt og har et svar, så er det et resonnement. Det trengs ikke noe enighet i det matematiske fagmiljøet for metoden som blir brukt, eller svaret eleven kommer med. Premissene for om resonneringen er godkjent eller ikke, er opp til den som selv gjør resonneringen. Noe som betyr at man trenger ikke være voksen eller være eksepsjonelt god i matematikk for å ha brukt CMR.

I likhet med IR har CMR også noen punkter som må være innfridd for at resonneringen kan bli kalt CMR (Bergqvist, 2007; Bergqvist et.al., 2008; Lithner 2006; Lithner, 2008):

1. Nytenkning: En ny resonneringssekvens blir funnet opp, eller en glemt blir husket og gjenopptatt. Alle premisser står på den som resonnerer. Det vil si at en kjent løsningsmetode/resonnering for meg kan være ny for deg.

2. **Fleksibilitet:** Er ikke bundet til én bestemt strategi, men benytter forskjellige tilpasninger og tilnærminger slik at strategien fungerer på situasjonen.
3. **Rimelighet:** Argumentasjonen som støtter eller motiverer strategivalget eller implementering av strategi blir sett på som rimelig, sann og akseptabel.
4. **Matematisk forankring:** resonneringens argumentasjon er forankret i de matematiske egenskapene til komponentene som er involvert i resonneringen.

Et eksempel på CMR i barneskolen kan være i startfasen av et nytt tema, eller i startfasen av å lære strategier innenfor algoritmene. Elevene kan for eksempel få tildelt oppgaver før de har hatt noe undervisning, og skal prøve å komme frem til et svar. Et annet eksempel er i arbeid med multiplikasjonstabellene hvor elever kan oppdage mønster i de ulike gangetabellene. Figur 3 viser en oversikt over rammeverket til Lithner. I noen artikler blir det nevnt tre punkter for resonneringstypen CMR, mens i andre blir det nevnt fire. Jeg har valgt å bruke alle fire i min studie.



Figur 3: Oversikt over Lithner sitt begrepsapparat (2006, s 5).

### 2.3 Resonnering i grupper

Lithner (2008) undersøkte enkeltelever og deres resonnering i sin forskning. I senere tid har rammeverket til Lithner blitt prøvd ut på et bredere plan enn bare individuelle elevers resonnering. Hershkowitz et al. (2017) kombinerer sitt eget forskningsarbeid med Lithner (2008) sitt rammeverk. Hershkowitz et al. (2017) ser på kreativ resonnering sammen med hvordan kunnskap skifter fra elev til elev. Deres eget rammeverk handler om «the shift of knowledge to exhibit the travel of ideas» (s. 25) og går ut på at ideer elever har, kan ha ringvirkninger på medelevers kunnskap. Tidligere kjent kunnskap kan bli fornyet, bedre forstått, eller at elever innser hva man ikke har forstått tidligere. Levenson (2011) bruker ikke Lithner (2008) i sin forskning og ser heller på at kreativitet skjer i et fellesskap og ikke nødvendigvis hos enkeltindivider. Selv om Levenson ikke bruker rammeverket til Lithner (2008), bruker Levenson (2011) og Lithner (2008) noen av de samme ordene for å definere kreativitet i artiklene sine. Levenson (2011) skiver blant annet at kreativitet i matematikk handler om fleksibilitet og nytenkning, likt som Lithner (2008). Sumper & Hedefalk (2015) bruker deler av Lithner (2008) sitt rammeverk for å styrke studien sin, hvor de ser på felles matematisk resonnering hos barn når de er ute og har frilek i barnehagen. Cobb et al. (2010) skriver også om deltagelse i matematikklasserom. De analyserer episoder i klasserom hvor det skjer felles læring, altså i klasseromsmiljøet elevene befinner seg i. Cobb et al. ser på individuelle elevers

deltagelse i et felles klassemiljø, individuelle elevers påvirkning på klassemiljøet og grupper i et fellesskap.

Rammeverket (Lithner, 2008) som skal brukes til å analysere datamaterialet i denne avhandlingen, kan virke som har et kognitivt læringssyn. Selv om Lithner flere ganger kan uttrykke at resonneringsprosessen er kognitivt, sier Lithner at det er sosiokulturelle aspekter ved resonnering i sin forskning også. Det kan derfor virke som at Lithner verken utelukker det ene eller det andre mulige aspektet ved resonnering. Jeg velger å ha et sosiokulturelt syn likt som forskerne over (Cobb et al., 2010; Hershkowitz et al., 2017; Levenson, 2011; Sumpter & Hedefalk, 2015). Innsamlingen av datamaterialet vil skje i elevgrupper. Derfor vil et sosiokulturelt syn på læring og resonnering være naturlig. Jeg mener det sosiokulturelle miljøet og elevens kompetanse kan dermed ha ringvirkninger på tankeprosessen.

## 2.4 Tegning

Vygotsky (1978) forsket mye på unge barn, blant annet utvikling av skriftlig språk. Han beskriver at prosessen skjer gjennom flere forstadier. Et av forstadiene er tegning. Vygotsky skriver at «we see that drawing is graphic speech that arises on the basis of verbal speech» (1978, s. 112). Det Vygotsky sier her er at elevers bruk av tegning kan være en støtte eller hjelp for elever til å kommunisere hva de tenker om oppgaver i matematikk. Å engasjere elever til å presentere hva de visualiserer i matematikk kan ha flere fordeler (Whitin & Within, 2001). Gjennom elevers visualiserende representasjoner av hva og hvordan de tenker, kan lærere, forskere og foreldre få et innsyn i elevers matematiske tenkning, forståelse og læring. Woleck (2001) beskriver at elevers tegning, altså representasjoner, kan være en viktig faktor for å oppdage og uttrykke forståelse. Tidligere forskning viser blant annet til at tegning kan spille en viktig rolle i problemløsningsprosesser (Dahl, 2019). Den viser også at romlig forståelse og skjematisk tegninger henger tett sammen når det kommer til prestasjon innenfor problemløsning (Edens & Potter, 2007), og at tegninger elever produserer i møte med oppgaver kan bli kategorisert i ulike kategorier (Saundry & Nicol, 2006).

Det er gjort litt forskning på feltet om tegning og matematikk, men det ønskes mer. Blant annet etterspør Saundry & Nicol mer forskning om tegning som representasjonsmiddel i matematisk tenkning. Som en konsekvens av sin forskning, klarer Saundry & Nicol å produsere et rammeverk for å organisere tegninger inn i ulike kategorier, som de uttrykker har mangler og trengs mer forskning på. De etterlyser blant annet hvordan man kan identifisere trekk av matematisk resonnering i elevers tegninger. Det er derfor min intensjon å prøve å flette sammen Lithner (2008) sitt rammeverk sammen med Saundry & Nicol (2006) sitt rammeverk. Slik kan jeg ta del i og utvide forskningsfeltet. I tillegg vil jeg kunne se sammenhenger mellom ulike rammeverk. Saundry & Nicol sitt rammeverk vil derfor bli presentert i neste delkapittel. Det er et uferdig rammeverk, hvor forfatterne selv uttrykker «med mangler». Rammeverket er oversiktlig og lett å analysere med. Målet er å flette sammen de to rammeverkene til slutt.

Saundry & Nicol undersøkte i 2006 hvordan unge 2. klassinger arbeidet med problemløsningsoppgaver. Det som stod i fokus i studien deres var hvordan elever responderte på matematisk problem, hvilke typer tegninger de produserte, og hva de tenkte når de tegnet. Det var også fokus på hvordan lærere kan være en støtte for å

utvikle elevers ferdigheter til å bli bedre matematiske problemløsere. Tegning kan for noen barn være en prosess og et produkt. For andre barn handler det om å tegne noe som representerer oppgaven (Saundry & Nicol, 2006). Førstnevnte elevgruppe kan bli plassert innenfor en kategori som heter ikonisk-tegning, mens den andre elevgruppen kan bli plassert innenfor billedlig-tegning. En slik inndeling har flere forskere benyttet seg av tidligere (Edens & Potter, 2007; Woleck, 2001; Dahl, 2019). Studien til Saundry & Nicol (2006) resulterte i et rammeverk, som er uferdig ifølge dem, som ser på fire trekk ved elevers tegning:

1. *Tegning som manipulativ.*
2. *Tegning som støtte for system.*
3. *Grad av sofistikerthet i tegningen.*
4. *Visualisering – å se for seg.*

Tegning som *manipulativ* er når elevene regner som om de skulle brukt fysiske representasjoner. Det elever kan gjøre med konkrete i den fysiske verdenen (flytte på, legge til og legge bort), gjør elever i tegningene sine også. Derfor kan elever, som bruker tegning som manipulativ, komme til å måtte flytte på objektene i tegningen sin. De må kanskje eliminere objekt og legge til objekt ved å bruke for eksempel piler eller ringer. Det kan tenkes at noen elever må viske ut, tegne på nytt eller sette streker for å markere endringer.

*Tegning som støtte for system* handler om at elever bruker tegningen som en støtte for å få oversikt over detaljene i oppgaven de har fått tildelt. Elever som bruker tegning som støtte for system, har en tendens til å måtte telle over flere ganger og sjekke om tegningen og/eller svaret er riktig. Støtten kan også bli brukt til å teste ut ulike måter å løse problemet på.

*Grad av sofistikerthet* i tegning er det tredje trekket og kan variere mye. I studien til Saundry & Nicol (2006) var det noen barn som tegnet detaljrike og flotte tegninger, mens noen tegnet enkle tegninger med ikoner som representerte detaljer fra oppgaven. Det matematiske aspektet ved oppgaven gikk bort for enkelte elever fordi de ble så fokusert på selve tegningen. Andre elever tegnet seg selv «inn» i oppgaven for å forstå den. Hvordan denne graden av sofistikerthet avgjøres er noe som er vanskelig å tolke ut fra forskningsartikkelen. Jeg kommer til å tolke at tegninger som inneholder detaljer om oppgaven, kan gå innenfor denne kategorien, sammen med tegninger som er enkle og mer detaljrike.

*Visualisering* handler om at noen elever ikke tegner ned på arket med det første, andre tegnet ikke i det hele tatt. Ved første øyekast kan det se ut som slike elever sliter med problemet fordi de ikke produserer noe tegning eller symboler. Det kan i slike tilfeller hende at de egentlig ser for seg bilder av hvordan de løser oppgaven i hodet. Istedenfor å tegne ned på papiret, foregår alt inni hodet til elevene. Mange ender opp med å bare produsere svaret sitt ned på arket (Saundry & Nicol, 2006, s.5).

### 3. Oppgavene

I forkant av innsamlingen av datamateriale lagde jeg tre oppgaver som ble utdelt. For å få en oversikt i kapitlene, har jeg valgt å ha et eget kapittel for bare oppgavene, hvorfor de ble valgt og løsningsforslag. Første oppgaven fikk hele klassen i starten av innsamlingsprosessen, hvor målet var å avdekke hvem som tok tegning i bruk som løsningsmetode. De resterende oppgavene ble gitt til elever som brukte tegning og som jeg videre observerte og intervjuet i mindre grupper. Gjennomføring av innsamlingsprosessen vil komme mer detaljert i neste kapittel.

#### 3.1 Valg av oppgaver

Det var viktig at oppgavene ble konstruert for å oppnå et sett med rikt datamateriale. Det var blant annet viktig at oppgavene stimulerte til bruk av tegning. Slik hadde jeg noe å gå ut fra med tanke på problemstillingen, hvor tegning og resonnering er det viktigste. Jeg konstruerte oppgaver som hadde gjenstander som var lett å tegne, eventuelt var lett å generalisere til en enkel tegning. Gjenstander er for eksempel biler og blader. Jeg måtte også bestemme hvilke typer oppgaver jeg skulle gi med tanke på *elevens rolle* (se tabell 1).

Ernest (1991) skriver om ulike metoder en lærer kan henvende seg til elevene på når man underviser i matematikk; ledet oppdagelse, problemløsning og utforskning. Førstnevnte går ut på at læreren presenterer en oppgave, eller velger en oppgave ut fra et ønsket læringsmål, i baktanke og for så å guide elevene gjennom oppgaven. Elevene sin rolle vil da bli å sitte stille og følge læreren. I slike oppgaver vil ikke resonnering være nok eksplisitt synlig i et eventuelt datamateriale. Da følger elevene læreren. Derfor ville jeg ikke bruke oppgaver av den typen under innsamlingen. Da sto valget mellom problemløsningsoppgaver og undersøkende oppgaver. Begrepene kan gå litt over i hverandre i hverdagssamtaler, som tabellen under viser (Tabell 1) så er det en liten forskjell. Metoden om problemløsning passet best til mitt formål av flere grunner. For det første er løsningsmetoden opp til elevene selv. At elevene selv velger å ta i bruk tegning som løsningsmetode er viktig for studien min. For det andre er lærerens oppgave å gi et problem med flere svaralternativ og flere måter å løse på (Ernest, 1991). For det tredje ville ikke en utforskende metode fungert. I denne metoden er intensjonen at læreren velger en situasjon, og elevene skal selv komme frem til et problem, og løse det. Det kan være utfordrende for elever på 3. trinn å komme frem til et egendefinert problem og løse det. Derfor endte jeg opp med problemløsningsoppgaver.

Metode	Lærerens rolle	Elevens rolle
<b>Ledet oppdagelse</b>	Presenterer problemet eller kommer med en situasjon med et mål. Leder elevene mot svaret eller målet.	Følger lærerens ledelse.
<b>Problemløsning</b>	Presenterer problemet. Metoden for å oppnå et svar er åpen.	Finner på egenhånd en metode for å løse problemet.
<b>Utforskning</b>	Velger startsituasjon (eller godkjenner elevenes valg av situasjon).	Definerer selv, innenfor rammene av situasjonen, problemet. Prøver å løse problemet på egenhånd.

Tabell 1: En sammenligning av metoder for å lære matematikk (Ernest, 1991, s. 296, min oversettelse)

Oppgavene jeg gav til elevene er en samling som er hentet fra ulike forskningsartikler, og to andre masteroppgaver om tegning på småtrinnet, og som er skrevet tidligere. Da visste jeg at oppgavene var utfordrende nok og kunne stimulere til tegning hos elevene. Én av oppgavene har jeg selv hatt erfaring med å gi til en gruppe elever i praksis. Da oversatte jeg oppgaveteksten direkte fra engelsk til norsk. Den ble hentet fra Woleck (2001, s. 219) hvor originaloppgaven er følgende:

«Twenty witches must travel on 8 brooms to a convention in California. They will have to «broom pool». No broom may carry more than 4 witches. No broom may carry fewer than 2 witches. How can they do it? »

Elevene gikk da på 2. trinn og oppgaven ble litt for utfordrende for dem, noe som førte til at jeg måtte hjelpe dem litt på vei for å komme i gang med oppgaven. Etter litt forandring av kontekst mente jeg at oppgaven ble fin for elever på 3. trinn.

## 3.2. Oppgavene og løsningsforslag

I følgende delkapittel vil oppgavene som ble gitt til elevene på 3. trinn i studien min, bli fremstilt. Deretter vil løsningsforslagene og hva jeg forventet å få som svar fra elevene. Det vil til sammen da komme mer enn ett løsningsforslag per. oppgave. Da oppgavene ble delt ut til elevene fikk de oppgavearket og gråblyant.

### 3.2.1 Fotballcup

Oppgaven ble inspirert av Woleck (2001) sin hekseoppgave, som ble referert til ovenfor. Den ble også brukt i Alseth (2019) sin master om tegning. Alseth omskrev oppgaveteksten til norsk og endret konteksten til fotballcup. Den ble omskrevet til å handle om å reise til en fotballcup, fordi det kunne være mer virkelighetsnært og realistisk for elevene. Jeg har selv erfart at en direkte oversettelse til norsk av hekseoppgaven til Woleck (2001) førte til forvirring hos elevene. Da virket

#### Oppgave 1: Fotballcup

20 barn skal på fotballcup. Det er 8 foreldre som skal kjøre. I bilene må det være minst 2 barn, men det kan ikke være mer enn 4 barn. Hvordan kan barna fordeles på bilene?





denne omskrivingen til en fotballcup fornuftig. Det er enklere å snakke om biler og passasjerer.

Det er tre løsninger på oppgave 1:

1. 4 biler med 3 barn + 4 biler med 2 barn (3,3,3,3,2,2,2,2)
2. 2 biler med 4 barn + 6 biler med 2 barn (4,4,2,2,2,2,2,2)
3. 1 bil med 4 barn + 2 biler med 3 barn + 5 biler med 2 barn (4,3,3,2,2,2,2,2)

Oppgaven var en kombinasjonsoppgave som gav elevene muligheten til å komme frem til ulike og flere svar. Oppgaven var bygd opp slik at det ikke var mulig at alle gruppene var likt fordelt, noe som kan ha vært nytt og en problemsituasjon for elevene. I oppgaveteksten kom det mye informasjon og flere tall, noe som også kan ha vært problemskapende for elevene. Oppgaven gav elever mulighet til å komme med flere løsningsforslag, noe som var interessant å se om de oppdaget. Det var også mulig å tegne besvarelsen som både *støtte for system* og *som manipulativ*. Når det kommer til hvordan elevene ville respondere med sine svar, så jeg for meg flere tilfeller. Kanskje noen tegnet alle de åtte bilene først? Bilene kunne kanskje da komme til å være alt fra detaljerte biler, firkanter eller sirkler. Deretter kan det være elevene fordeler de 20 barna; en og en, to og to, tre og tre eller fire og fire, på hver av de syv bilene. En slik besvarelse ville vært en tegning som støtte for system. Et eksempel på hvor tegning ville blitt brukt som manipulativ er hvis alle de 7 bilene ble tegnet, og alle de 20 barna ble tegnet først. Deretter ble det satt strek fra ett og ett barn opp mot hver sin bil, helt til de 20 barna var «brukt opp». Jeg så for meg at elevene kunne utforme det som skulle representere barna på fotballcup, på mange ulike måter. Det kunne være alt fra streker til strekmenn eller mer utfyllende tegninger. Noen elever ville kanskje fylt opp én og én bil til maksimumsgrensen (4 barn), for så å innse at det ikke gikk opp, og må starte på nytt eller viske bort og finne en annen løsning. I slike situasjonen kunne det også hende at noen mente de var ferdig med oppgaven og ikke trengte å gjøre mer. Jeg så da for meg kommentarer som «det trengs bare 5 biler» eller «5 biler er nok. Da kan de spare bensin». Et annet scenario jeg så for meg var at noen elever ikke fullførte oppgaven, men satt og tegnet objekter ut fra oppgaveteksten og glemte matematikken.

### 3.2.2 Sneglen Nils

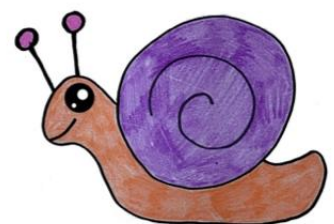
Oppgave 2 er hentet fra en tidligere master (Kleven, 2019) som forsket på tegning. Kleven fikk tegninger som besvarelser på oppgaven når hun forsket selv.

Dette gjorde at jeg valgte å bruke den samme oppgaven. Det er en åpen kombinatorikkoppgave som byr på mange svaralternativ. Et svaralternativ kan være:

Dag 1: 7 blader      Dag 2: 2 blader  
Dag 3: 4 blader      Dag 4: 4 blader

#### Oppgave 2: Sneglen Nils

Snegle Nils har spist 17 blader på 4 dager. Hvor mange blader kan sneglen ha spist hver dag de siste fire dagene?



Det kan også være at sneglen Nils spiser 17 blader på dag en og ingen de resterende tre dagene. Jeg så for meg mange ulike besvarelser på denne oppgaven, for eksempel at noen elever bestemte seg for å fordele alle bladene likt på alle dagene, for så å innse at



det ikke gikk an å fordele helt likt på alle de fire dagene. Jeg så også for meg at elever ville knekke koden med at oppgaven har mange løsningsforslag, og at det har ingenting å si hvor mange blader som blir spist hver dag. Det eneste som var viktig var å passe på at det til sammen var 17 blader som ble spist på de fire dagene. Da Kleven (2019) gav denne oppgaven til sine elever, fikk hun tegninger hvor noen elever glemte matematikken i oppgaven og kom ikke frem til noe svar. Tegningen inneholdt elementer fra selve oppgaven, men ikke noe klart svar på selve problemet. Jeg så for meg det kunne også skje når jeg skulle samle inn datamateriale til analysen min. Noen elever kom kanskje til å tegne alle 17 bladene og sneglen på svararket sitt, mens noen brukte tall og andre brukte streker for å manipulere tegningene sine.

### 3.2.3 På vei til skolen

Oppgave 3 har inspirasjon fra en oppgave i Woleck (2001) og ble også brukt i masteroppgaven til Kleven (2019). I Kleven sin masteroppgave handler oppgaven om en gutt som har leker med til sammen har 16 hjul. Elevene skulle finne ut hvor mange, og hvilke leker gutten kunne ha.

Originaloppgaven fra Woleck

(2001) handler om en far som ser tre barn gå til skolen. Elevene skulle finne ut hvilke transportmiddel som ble brukt av barna og hvor mange hjul det ble til sammen. Jeg valgte å omskrive oppgaven slik at elevene lettere kunne sette seg selv inn i situasjonen og med noen begrensninger med tanke på antall hjul. Mange barn ser både sparkesykler, biler, lastebiler, busser, rulleskøyter osv. på sin vei til skolen. Ved å bruke ord som «du» håpet jeg det ble enklere for eleven å sette seg selv inn i den situasjonen. Denne oppgaven er også en åpen kombinasjonsoppgave med mange løsninger. Jeg så for meg at elevene kom til å legge merke til tallet 22, og at det er et fint og enkelt tall å håndtere med tall som 2, 4 og 6. Det kunne føre til at enkelte elever kom frem til et svar raskt. Det var spennende å se om elevene så denne egenskapen med oppgaven eller om de tenkte ut avanserte tallkombinasjoner som enhjulssykler (tallet 1) og trehjulssykler (tallet 3).

På figur 4 har jeg tegnet to løsningsforslag til hva jeg tror elever kan komme til å tegne. Første løsningsforslag er av tre biler sett fra undersiden og fem sykler. De tre bilene har til sammen 12 hjul, fem sykler har til sammen 10 hjul og  $12+10=22$ . Løsningsforslag nummer to er et par rulleskøyter som har 6 hjul til sammen, tre sparkesykler med 6 hjul, en sykkel med 2 hjul og to biler med 8 hjul til sammen:  $6+6+2+8=22$ .

#### Oppgave 3: På vei til skolen

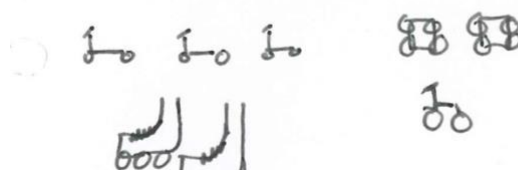
Du er på vei til skolen en mandags morgen. På veien ser du til sammen 22 hjul på ulike gjenstander. Hvilke gjenstander kan du ha sett på vei til skolen?



#### Løsningsforslag 1:



#### Løsningsforslag 2:



Figur 4: Løsningsforslag til oppgave 3

## 4 Metode

I det kommende kapittelet vil det bli gjort rede for hvilke forskningsmetoder som ble brukt til innsamlingen av data, utvalg av informanter og datainnsamlingsprosessen. Hvordan datamaterialet ble behandlet og analysert vil også bli redegjort for. Deretter vil studiens validitet og reliabilitet bli diskutert før det til slutt blir redegjort for etisk ansvar og hensyn.

### 4.1 Valg av kvalitativ forskningsmetode

Innenfor forskning kan man ta i bruk kvalitative forskningsmetoder, kvantitative forskningsmetoder eller en blanding av kvalitativ og kvantitativ. Forsker man på et begrenset antall individer eller data, foretar man en kvalitativ metode. Da ser man etter spesielle kvaliteter og egenskaper ved datamaterialet sitt, noe jeg gjorde i min studie. Formålet med denne studien har vært å undersøke matematisk resonnering i elevers tegninger i møte med problemløsning. Derfor ble det viktig å ta i bruk fleksible metoder, hvor deltagere hadde mulighet til å komme med utfyllende detaljer om arbeid sitt. Matematisk resonnering er et sentralt begrep som ble forsket på. Derfor ble det naturlig å ta i bruk en metode hvor det kunne oppstå en samtale mellom individer. På bakgrunn av mine kriterier og hva formålet med studien min er, ble de kvalitative metodene observasjon og intervju tatt i bruk.

#### 4.1.1 Observasjon

Christoffersen & Johannessen (2012) påpeker at observasjon egner seg om det er ønske for en direkte tilgang til det som skal undersøkes. Observasjon er en metode som varierer med ulike typer, fra høyt strukturert observasjon og semi-strukturert observasjon til ikke-strukturert observasjon. En strukturert observasjon handler om at mye er forberedt og klart på forhånd av observasjonen. Man har et skjema man følger, spesifikke hendelser som skal observeres og dokumenteres på skjemaet. Forskeren har på forhånd planlagt slik at hendelser som inntreffer, eller stemningen i rommet, har forhåndsbestemte symboler. På den måten blir det minst mulig å skrive på skjemaet og lettere å bare fylle inn (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Semi-strukturert observasjon har et forhåndsbestemt tema og hendelser som skal observeres. Til forskjell fra høyt strukturert observasjon, at observasjonsskjema kanskje ikke like fast bestemt eller tenkt ut på forhånd (Cohen, et al., 2018). En ustrukturert observasjon er mye mer åpen og ubestemt enn de to forrige observasjonsvariantene. Ved en ustrukturert observasjon kan det være man har en ide om hva som skal observeres. Det er dog ikke sikkert at man som observatør vet bestemt tema eller hendelse som skal observeres. Situasjonen man observerer påvirker hva forskeren ender opp med å observere. Selv om en ustrukturert observasjon skiller seg mye fra de to andre variantene, finnes det fellestrekk mellom semi-strukturert og ustrukturert observasjon. Begge variantene blir brukt for å få frem en hypotese av det man observerer. I motsetning til en høyt strukturert observasjon, som ofte blir brukt for å teste ut en hypotese man har lagt seg i forkant av observasjonen (Cohen et al., 2018). Før man skal samle inn datamaterialet er det dermed en fordel å planlegge på forhånd hvilken av de tre variantene av observasjon man vil ta i bruk. For min studie ble semi-strukturert observasjon tatt i bruk. En høyt strukturert observasjon hadde ikke passet like godt fordi da måtte jeg hatt alle notert ned alt som skulle observeres på et observasjonsark, i forkant av selve observasjonen. Det lot seg ikke gjøre da jeg skal

observere resonneringen til eleven. Resonnering hos elever er noe som kan være vanskelig å forestille seg på forhånd, da resonneringen er noe som skjer der og da, i det øyeblikket. Det var derfor et behov for å ha en observasjonstype hvor jeg hadde frihet til å notere mer utfyllende under observasjonen.

Når man skal være observatør, er det også viktig å forhåndsbestemme hvilken type observatør man vil være. Fullstendig deltagende, deltagende observatør, fullstendig observatør eller observerende deltager er hva man kan velge mellom (Cohen, et al. 2018; Christoffersen & Johannesen, 2012). Er man en *fullstendig deltager* blir man som forsker et medlem av det miljøet man forsker på, oftest er forskers identitet og formål for deltagelse i miljøet uvisst aktørene (de som bli observert). Man kan også være *fullstendig observatør*. Da har man en rolle å bare observere og er ikke i kontakt med gruppen miljøet eller aktørene som skal forskes på (Cohen, et al., 2018). Cohen, et al. skriver at en *deltagende observatør* er medlem av gruppen og hvor forholdet mellom observatør og aktører kan være nært. Eksempel på deltagende observatør kan være en kollega som observerer undervisningen til en medkollega, eller er i klasserommet til en medkollega for å observere klassemiljøet. Observatøren eller forskeren i denne sammenhengen vil da være kjent for elevene og læreren. Som *observerende deltager* er man ikke kjent for gruppen eller aktørene man observerer. Rollen som forsker er klar for alle aktører og man kan gjerne som observatør delta litt i aktivitetene som skjer.

Å ta rollen som en fullstendig deltager passer ikke for formålet for min studie fordi elevene kommer til å vite hvem jeg er, og hvorfor jeg er i klasserommet deres (Christoffersen & Johannesen, 2012). Heller ikke rollen som fullstendig observatør passet fordi jeg måtte være til stede i klasserommet for å observere, og rollen min deretter ble veldig tydelig for elevene. Det var de to siste rollene som ble mest relevant for min studie. Side jeg ikke var kjent med verken læreren eller elevene på forhånd, ble ikke rollen som deltagende observatør riktig. Dermed ble det rollen *observerende deltager* som passet best for min studie fordi jeg ikke kjente til elevgruppen eller læreren og fordi min rolle som forsker i klasserommet ble formidlet til alle aktører (Cohen, et al., 2018).

Det finnes flere sentrale begreper knyttet til observasjon som en forsker må ta stilling til før man setter i gang med observasjonen; felten, settingen og analyseenheten (Christoffersen & Johannesen, 2012). I tabell 2 kan man se hva de ulike begrepene betyr generelt, og hva de betyr i forhold til studien i denne oppgaven.

	<b>Generelt</b>	<b>I min studie</b>
<b>1. Observatør</b>	Den som forsker og utfører observasjonen	Meg i rollen som observerende deltager
<b>2. Observasjon</b>	Hvilken type observasjon skal tas i bruk?	Semi-strukturert observasjon
<b>3. Felten</b>	Fenomenet som er gjenstand for observasjonen	Skolen
<b>4. Settingen</b>	Hvor observasjonen skal ta plass	Klasserommet
<b>5. Analyseenheten</b>	Enhetene som skal observeres	Aktører: Elever Handling 1: hvem bruker tegning som løsningsstrategi Handling 2: hvem som tegner hva, når og hvordan

Tabell 2: Observasjon generelt og i min studie

I min studie brukte jeg observasjon for å finne ut hvem av elevene som tok tegning i bruk som løsningsstrategi i en problemløsningsoppgave, og deretter for å observere elevgrupper på tre og tre. Jeg valgte å ta i bruk observasjonsdelen av metoden før intervjudelen av innsamling. For det første ville jeg at elevene skulle selv bestemme løsningsstrategi på oppgavene de fikk. Det var viktig at strategien elevene tok i bruk kom fra dem selv og minimalt med ytre påvirkninger (meg eller lærer). For det andre ville ikke jeg, som forsker, påvirke elevenes resonnering på noen slags måte. Det ble observert i to omganger. Først fikk hele klassen en oppgave de skulle løse. Da elevene arbeidet observerte jeg og noterte ned hvem som tegnet. Deretter valgte jeg ut tre og tre elever som jeg hadde observert brukte tegning, vi gikk inn på et annet rom og gjorde flere oppgaver. Etter elevgruppene var ferdig med oppgavene hadde jeg rom for å stille spørsmål og intervju dem.

#### 4.1.2 Intervju

Kvale & Brinkmann (2015, s.20) skriver at forskningsintervjuer blir brukt for å vite hvordan folk «beskriver opplevelsene sine eller artikulere handlingsvalgene sine». Det vil si at man bruker intervju som metode for å utforske hvorfor og hvordan mennesker presenterer idéene sine. Kvale & Brinkmann viser til to metaforer i forskningsintervjuer, hvor man kan være en *gruvearbeider* eller en *reisende*. Metaforene som Kvale & Brinkmann (2015) refererer til i boken sin, er ikke helt adskilte metaforer og handler om hvorvidt man vil innhente eller konstruere kunnskap. Intervjuer som *gruvearbeider* handler om å grave etter skjult kunnskap som om man graver etter verdifullt metall i en gruve, og får det frem i dagslys. Faktaene renskes gjennom transkripsjon fra muntlig til skriftlig form. I sammenheng med studien min, definerer jeg meg selv som en *gruvearbeider*, som graver litt i kunnskapen til elever på 3. trinn. Et intervju har alltid en bestemt mening med seg, en hensikt. Det kan for eksempel være å få mer utfyllende eller dypere forståelse for noen resultater man har tilegnet seg fra en annen metode. Intervju kan være med å tilføre validitet til datamaterialet (Cohen, et al., 2018). Formålet med at jeg har valgt å ta i bruk intervju, er å få den dypere forståelsen for hva elevene gjør, og for å få utfyllende svar fra elevene etter de har arbeidet i grupper og resonnert. Under observasjonen dukket det opp spørsmål jeg ønsket å stille elevene, som måtte vente til elevene var ferdig med arbeidet rundt oppgaven. Under observasjonen

måtte jeg vente med disse spørsmålene siden det kunne forstyrre elevenes matematiske resonnering, og minske troverdigheten for hele studien. Derfor var det nødvendig å planlegge på forhånd at jeg kunne ha et lite intervju med elevene etter all observasjonen var ferdig.

Jeg utarbeidet en intervjuguide som jeg brukte til utgangspunkt etter observasjonen var ferdig. I intervjuguiden skrev jeg opp noen spørsmål som kunne være til hjelp om det var deler av gruppearbeidet som var uklart, for eksempel hva elevene hadde gjort. Spørsmålene ble også brukt for å finne ut mer om den prosessen elevene hadde vært gjennom. I intervjuguiden ble følgende spørsmål skrevet ned:

- Hva tegnet du her?
- Hvordan hjalp dette deg med å finne svaret?
- Hva gjorde du her?
- Hvorfor tegnet du denne?
- Jeg så du tenkte lenge og visket ut det første du tegnet, kan du fortelle meg hva som skjedde?
- Hvis du skulle forklart noen andre i klassen hvordan du gjorde det, hva ville du sagt da?
- Kan du si/vise det en gang til for meg?

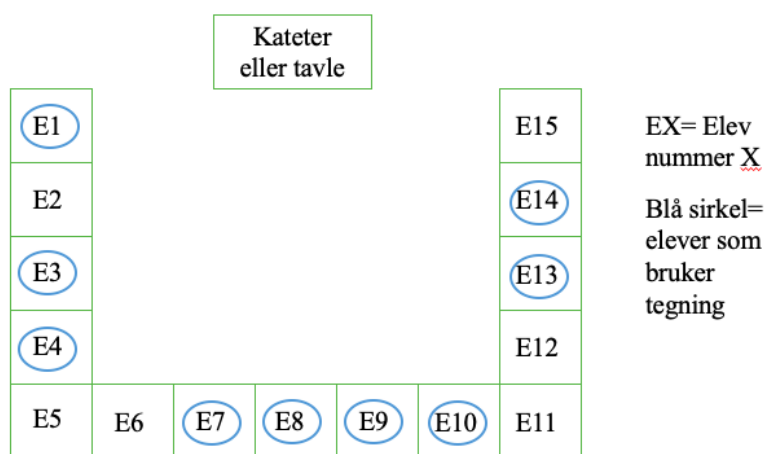
For hele intervjuguiden henviser jeg til vedlegg 4. Når man som forsker skal hente ut kunnskap gjennom intervju av barn, er det forhåndsregler og ansvar man må ta. Meningen med å intervjuer er å tilegne seg kunnskapen elevene besitter. Dette må skje på barnas premisser og er et etisk ansvar. Det kommer mer om etisk ansvar senere i delkapittelet 4.6. For å nevne ett så er førsteprioritet å ikke gjøre noe som helst skade – *Primum non nocere* – «first, do no harm» (Cohen, et al., 2018, s.528). Å bli intervjuet er ukjent for elever. Det er ikke noe de er med på i hverdagen. Flere forskere (Cohen, et al., 2018; Kvale & Brinkmann, 2015) anbefaler at intervju med barn blir utført i naturlige omgivelser. De anbefaler også å tilpasse spørsmålene til hvem man intervjuer og at en ikke fremstår som en autoritær person. Derfor valgte jeg at innsamlingen skjedde på skolen, i skoletid og på et kjent rom for elevene. Jeg møtte opp i hverdagsklær for å minske risikoen for å fremstå som autoritær, og for å skape en trygg og behagelig stemning for elevene. Alle spørsmål ble tenkt gjennom før jeg stilte dem. Jeg ville ikke være påtrengende eller påvirke resonneringen deres. Jeg valgte i tillegg å ta elevene ut i grupper da det blir anbefalt av flere forskere (Cohen, et al. 2018; Kvale & Brinkmann, 2015) og jeg lot elevene få tid til å tenke. Det er lett å føle at det blir ubehagelig når ingen svarer. Barn trenger mer tid (Cohen et al., 2018), noe jeg gav elevene.

### 4.3 Datainnsamlingsprosessen

I følgende delkapittel forklarer jeg hvordan hele innsamlingsprosessen gikk, alt fra forarbeid til selve innsamlingen og alt etterarbeidet. Dette er for å gi en oversikt over hvordan innsamlingen ble gjennomført. Bestemmelser og avgjørelser i forhold til gjennomførelsen har begrunnelser med tanke på både etisk hensyn og troverdighet. Begrunnelsene vil ikke være fokuset i dette delkapittelet, da det vil komme i senere delkapitler (4.5 & 4.6).

### 4.3.1 Forarbeid

Før innsamlingen søkte jeg om godkjenning (Vedlegg 2) for å gjennomføre forskningen til Norsk senter for forskningsdata (NSD). Til søknaden lagde jeg et samtykkeskjema, en datahåndteringsplan og en intervjuguide. I vente på godkjenning fra NSD, startet arbeidet med å utarbeide problemløsningsoppgaver som skulle brukes. Da godkjenningen kom tilbake (Vedlegg 3), startet arbeidet med å få tak i skoler som kunne tenke seg å delta på studien min. Flere skoler ble kontaktet. Grunnet Covid-19 var det vanskelig å få tak i skoler som ville delta. I januar 2021 fant jeg en skole med et 3. trinn som ville delta. Jeg hadde også fått godkjenning fra NSD til å gjennomføre forskningsprosjektet mitt. Før innsamling hentet jeg ut lydopptaker og minnepinne fra NTNU, og skrev ut alle oppgavene og intervjuguiden. Jeg planla også hvordan første del av observasjonen skulle bli dokumentert (se figur 5 for mal). Kontaktlærer til trinnet jeg skulle besøke informerte meg om at alle de tre gruppene satt i hestesko.



Figur 5: Mal for klasseroms observasjon

### 4.3.2 Innsamling

Jeg besøkte et 3. trinn med 37 elever, fordelt på tre grupper. Opplegget ble gjennomført på alle tre gruppene, på ulikt tidspunkt i løpet av dagen. Først var jeg inne hos hver gruppe, hvor alle elevene fikk tildelt oppgave 1 (Kapittel 3.2.1). Jeg leste oppgaven høyt for elevene. Da de hadde fått høre oppgaven og startet arbeide sitt, fikk de lov å snakke med sidemannen. Elevene fikk også beskjed om at et svar måtte ned på deres eget ark. Imens elevene arbeidet med oppgaven, gikk jeg rundt og observerte hvem som tok tegning i bruk som strategi. Da brukte jeg figur 5 som mal og satte ring på de elevene som brukte tegning. Alle de tre gruppene på trinnet fikk arbeide med oppgave 1, men det ble bare tatt ut en elevgruppe for hver trinn-gruppe for ytterligere observasjon og intervju. Da klassene var ferdig med oppgave 1, plukket jeg altså ut en elevgruppe på tre elever fra hver klasse. Da elevgruppene var ferdig gikk jeg inn i til en ny klasse delte ut oppgave 1, observerte hvem som tegnet og valgte ut en ny elevgruppe. Denne prosessen ble gjort tre ganger.

Elevgruppene og jeg gikk inn på et annet rom og gjorde flere oppgaver. Jeg startet likt som da jeg var inne i hele klassen; leste oppgaven høyt og de fikk oppgavearket. Jeg sa til dem at jeg skulle bare sitte å observere, og at de kunne snakke sammen om oppgaven dersom de lurte på noe. Da jeg observerte dem, noterte jeg hva elevene gjorde, hva de tegnet, når de visket bort noe og startet på nytt. Jeg observerte også stemningen, hvordan eleven satt i forhold til hverandre og hvem som snakket med

hvem. I tillegg tok jeg lydopptak av den matematiske samtalen som oppsto blant elevene. Jeg prøvde minst mulig å forstyrre eller blande meg inn i arbeidet deres. Det var ett tilfelle hvor en elev satt så fast at det måtte mer veiledning til. På grunn av et etisk ansvar ovenfor elevene og deres totalopplevelse av hele innsamlingsprosessen, derfor fikk en medelev forklare hva eleven kunne gjøre. Under observasjonen notere jeg også ned spørsmål jeg ville stille dem etter de var ferdig med oppgaven. Da alle elevene var ferdig med oppgaven fikk jeg mulighet til å stille spørsmålene og dekke over mangler i observasjonsnotatene mine. Denne delen tok jeg også lydopptak av. Gjennom hele innsamlingsprosessen prøvde jeg å ikke blande meg for mye, spesielt i observasjonsfasene. Da jeg var ferdig med en og en elevgruppe, tok jeg meg tid til å notere ned hendelser som kunne være interessant å huske.

### 4.3.3 Etterarbeid

Etter innsamlingen startet jeg arbeidet med transkripsjonen, som handler om å få muntlig opptak over til skriftlig tekst. For å skape mening i transkripsjonen, lagde jeg noen transkriberingsnøkler som viser til hendelser som skjedde ofte. Eksempler på dette kan være korte pauser eller når elever gjorde en handling. Alle transkriberingsnøklerne ser man i tabell 3. Navn som ble brukt i transkriberingen er fiktive navn, kjønnet er reelt. Grunne til fiktive navn, er hensynet til personvernet og fordi det er pålagt fra NSD. Lydfilen ble overført til en kryptert minnepinne som ble trygt oppbevart. Samtykkeskjemaer ble låst inne i et sikkert skap med kodet hengelås. Der ble også tegningene oppbevart når de ikke lenger var i bruk. Da transkriberingen var ferdig, og alle sikkerhetsprosedyrer var gjennomført, fortsatte jeg videre med å analysere datamaterialet.

...	Pause på mellom 1-10 sek.
(...)	Lang pause, mer enn 10 sek.
<b>Tykk skrift</b>	Handlinger gjort av elevene, observasjoner jeg gjorde.
AD	Meg, Anne Dorthea.

Tabell 3: Transkripsjonsnøkler

## 4.4 Analyseverktøy

Analysen av datamaterialet ble gjort i flere omganger. Først ble Lithner (2008) sitt rammeverk tatt i bruk for å identifisere resonneringssekvensen og hvilken kategori av resonnering elevgruppene brukte. Jeg lagde en tabelloversikt for alle resonneringstypene som kom til syne i transkripsjonen, og det arbeidet elevene gjorde. Datamaterialet som ble brukt for å kategorisere resonneringen, var transkripsjonene, besvarelsene og notater fra innsamlingen. Analyseringen ble gjennomført ved å gå gjennom transkripsjonene for å se etter resonneringssekvensen:

1. Problemsituasjon
2. Strategivalg
3. Strategiimplementering
4. Konklusjon



Transkripsjon, linjenummer i transkripsjonen og resonneringssekvensen ble satt inn i en tabell som ser slik ut:

Linjenr.	Transkripsjon	Resonneringssekvens
1	Elev 1: Hei	Problemsituasjon
2	Elev 2: Hva skal vi gjøre?	
...		
10	Elev 1: Vi kan plusse dem sammen	Strategi
11	Elev 2: Da plusser vi syv med fem.	Strategiimplementering
12	Elev 1: Det blir 12.	Konklusjon

Tabell 4: Hvordan analysen blir presentert

Under selve analyseprosessen ble alt av datamateriale analysert. Gjennom å se på resonneringssekvensen som kom frem i tabell 4, fant jeg ut hvilken resonneringstype de forskjellige gruppene hadde brukt. Med støtte fra besvarelsene og notater jeg gjorde under innsamling, lagde jeg en tabelloversikt over resonneringen gruppene gjorde. Noen plasser i den høyre kolonnen ble det markert når elever brukte argument, og hvilken tegning som tilhører hver enkelt elev. Dette ble gjort for å eventuelt oppdage sammenhengen mellom argument og resonneringstypen CMR, da argument er et sentralt trekk for CMR. Innsamlingen av datamaterialet ble gjort i grupper på tre og tre elever. Derfor ble resonneringen analysert som gruppe og tok ikke for seg enkeltelever. Dette er noe annerledes enn tidligere forskning, hvor det som oftest blir sett på enkeltelever. Siden elevene arbeidet sammen, snakket sammen og resonnerte sammen i grupper, ble det ikke gunstig for resultatene eller analysen at elevenes resonnering ble analysert hver for seg. Dette fordi selv om de kanskje i enkelttilfeller utførte oppgaven selv og på egen hånd, så har samtalen som foregikk påvirke resonneringen til alle. Derfor ble resonneringene analysert ut fra det gruppen gjorde og sa sammen. De resonneringstypene som ble sett etter i analyseprosessen var MR, AR og CMR. Dersom AR inntraff, ble også underkategoriene (kjent AR, veiledende AR og avgrensende AR) vurdert. I tilfeller hvor elever søkte veiledning hos medelever, ble dette ikke regnet som veiledende AR da all resonnering ble sett på som en grupperesonnering og ikke hver enkelt elevs resonnering.

I analysekapittelet vil det bli presentert tre kontekster fra analyseprosessen til denne første delen; én kontekst for hver av gruppene A, B og C. Utvalget er basert på hvilken av transkripsjonene som best viser funnene fra analysen. For eksempel har jeg ikke dokumentasjon på resonneringen elevene gjorde da de arbeidet med oppgave 1. Jeg har bare det de har fortalt meg i ettertid da vi satt i grupper og hadde taleopptaker med oss. Derfor vil ikke oppgave 1 være blant utvalget som blir presentert videre i denne avhandlingen.

Videre i analyseprosessen (del to) så jeg på Saundry & Nicol (2006) sitt rammeverk opp mot besvarelsene elevene produserte til de ulike oppgavene. I denne delen ble hver besvarelse først delt inn etter om de var tegninger eller ikke. Besvarelsene som ble kategorisert som tegning gikk videre til neste steg hvor tegningen ble analysert opp mot rammeverket til Saundry & Nicol. Da alle tegningene var blitt plassert innenfor de ulike kategoriene, lagde jeg en tabelloversikt over kategoriseringen. Ingen av elevene hadde *visualisering* som karakteristisk trekk når de tegnet, så den delen av rammeverket til Saundry & Nicol er ikke med i tabelloversikten. Det samme gjelder for *sofistikerhet*, fordi alle tegninger har en viss grad for sofistikerhet. Rammeverket til Saundry & Nicol gir mulighet til å analysere en konkret tegning. Derfor analyserte jeg tegningene hver for



seg. Alle elevene produserte egne tegninger og ikke én felles gruppetegning. I analysekapittelet vil tabelloversikten bli presentert først for å få en oversikt over alt datamaterialet. Deretter vil det komme eksempler på tegninger som ble analysert til å være kategoriene *støtte for system* eller *tegning som manipulativ*. På noen av besvarelsen er det elementer i tegningen som er streket over med blyant. Dette må ikke forveksles med at tegningen er manipulert. Det var mangel på viskelær når noen gjorde feil. Derfor var det ofte lettest å bare streke over med blyanten.

I del tre av analyseprosessen så jeg på de to rammeverkene sammen. Det ble gjort for å se etter sammenhenger, ulikheter og om de kanskje kunne komplementere hverandre. For å kunne svare på problemstillingen ble følgende tilleggsspørsmål brukt:

- a. Når i resonneringsprosessen brukes tegning?
- b. Hva slags funksjon har tegningene i resonneringsprosessen, i lys av spørsmål a?

Jeg så på alle tegningene opp mot resonneringssekvensen som ble gjort i del 1 av analyseprosessen. Det ble her notert hvordan tegnerekkefølgen var når tegningen startet, og hvilken funksjon tegningen hadde for resonneringen. Ut fra all innsamlet data ble det gjort noen funn, som vil komme i analysekapittelet (kapittel 5).

## 4.5 Forskningens troverdighet

Forskningens troverdighet er kritisk for å få det endelige resultatet av en studie validert (Cohen, et al., 2018). Når jeg sier godkjent, mener jeg hvorvidt forskningens analyse av datamaterialet er til å stole på og om datamaterialet er til å stole på. Guba (1981) skriver om troverdighet i forskning og skiller mellom to ulike undersøkelser; *Naturalistisk* og *rasjonalistisk*. Rasjonalistisk undersøkelse (RU) holder ofte fokus på en og en realitet om gangen, hvor forskere og deltagere har et mindre tett forhold enn i naturalistisk undersøkelse (NU). NU er den typen undersøkelse jeg skal bruke i denne studien. NU kjennetegnes blant annet for at man undersøker på opptil flere realiteter og hvor både deltager og forsker forhold påvirker hverandres oppførsel og svar.

Guba (1981, s. 79–80) nevner fire viktige spørsmål man må tenke over når det kommer til troverdighet i forskning og NU. De engelske uttrykkene er de generelle aspektene ved troverdighet som omfatter forskning, både for RU og NU. De norske uttrykkene er hvordan begrepene blir brukt i NU.

1. Truth value/ kredibilitet: Hvordan kan man etablere sikkerhet i **kredibiliteten** av funnene man oppdager i datamaterialet man har samlet inn?
2. Applicability/overførbarhet: Hvordan kan man, bestemme i hvor stor grad funnene man oppnår, kan anvendes i andre situasjoner og på andre respondenter?
3. Consistency/avhengighet: Hvordan kan man garantere at funnene man finner i sin studie, på bakgrunn av metodevalg, også kan forekomme om noen andre utfører samme metode med samme prinsipper? Er det mulig å **etterprøve** metoden?
4. Neutrality/bekreftbarhet: Hvordan kan man fastslå at datamaterialet man har samlet inn har en utelukkende funksjon for det som faktisk skal undersøkes og ikke er påvirket av forskers egne motivasjoner, interesser, forespørsler og antagelser?

#### 4.5.1 Troverdighet i observasjon

Cohen et al. (2018) påpeker at kredibilitet er en sterk side ved metoden observasjon. Man får tilgang til rikt datamateriale uten at omgivelsene og datamaterialet blir påvirket på en dårlig måte. I mange observasjonssituasjoner følger det med en risiko for å påvirke datamaterialet. Jeg måtte derfor tenke ut hva som kunne være ytre påvirkninger for kredibiliteten av datamaterialet mitt. Derfor bestemte jeg meg for å si minst mulig når elevene var i resonneringsprosessen. Når de stilte spørsmål direkte til meg, satt jeg og noterte i forsøk på å få dem til å snakke med hverandre uten at det ble foreslått av meg. For mange ytre påvirkninger går ut over studiens bekreftbarhet og avhengighet. For å sikre kredibilitet ovenfor studien min og metoden, planla jeg klare, retningslinjer som gjorde at forskningsproblemet blir undersøkt på en troverdig, rettferdig og operasjonalisert måte. Jeg bestemte at elevene skulle arbeide i gruppe på 3. Gruppene fikk to oppgaver, i tillegg til den som ble gjort sammen med hele klassen. Mellom oppgavene kunne de forklare og jeg stille spørsmål. Elevene ble observert på samme måte. De fikk like spørsmål, ble analysert ut fra samme kriterier og ble ikke tolket ulikt. Retningslinjene måtte jeg følge for å øke avhengigheten til datamaterialet, slik at det kan etterprøves eller brukes av andre forskere, og at de får noenlunde likt datamateriale.

Jeg tok også i bruk lydopptaker for å øke kredibiliteten til datamaterialet. Ved å bruke lydopptaker fikk jeg muligheten til å transkribere og analysere alt som elevene sa i etterkant av innsamlingen. Dermed var ikke kvaliteten til datamaterialet avhengig av at jeg måtte huske alt som skjedde under innsamlingen. I tillegg kunne jeg da konsentrere meg om å observere når elevene startet å tegne og når de stoppet å tegne. Jeg kunne også observere når de satt stille hvem som snakket mest og minst blant annet. Løsningsmetoden elevene tok i bruk ønsket jeg skulle komme bare fra dem, og med minst mulig ytre påvirkning. Ved å observere hvilken metode elevene tok i bruk da de fikk tildelt en oppgave, var det lettere for meg å velge ut enkeltelever til videre observasjon og intervju. I tillegg ble datamaterialet mer innholdsrikt og nyttig med tanke på analysen jeg brukte. Hadde jeg tatt ut et utvalg tilfeldige elever, uten å observere hvilken metode som ble tatt i bruk, hadde det vært større sannsynlighet for at elevene brukte andre løsningsstrategier. Det kunne da blitt tatt i bruk løsningsmetoder jeg ikke kunne tatt i bruk til min forskningsstudie. Det ville ha påvirket studiens kredibilitet og bekreftbarhet på en negativ måte.

#### 4.5.2 Troverdighet i intervju

Kvale & Brinkmann (2015) skriver om avhengighet, kredibilitet og overførbarhet i sin bok om intervjuforskning. De definerer avhengighet som forskningens konsistens og pålitelighet. Man kan få henholdsvis samme resultat om metoden utføres på nytt, på et annet tidspunkt og av en annen forsker. Videre definerer de (Kvale & Brinkmann, 2015) kredibilitet som styrken og gyldigheten til fenomenet man forsker på. Altså gir metoden man bruker tilgang til det datamateriale som trengs for å svare på studiens forskningsspørsmål og problemstilling. Med overførbarhet menes det hvorvidt resultatene i en situasjon kan overføres til andre situasjoner. Da jeg intervjuet elevene som hadde besvart arbeidet med oppgavene i grupper, fikk de som oftest de samme spørsmålene. Dette var med på å øke avhengigheten av metoden min. Siden jeg skulle undersøke blant annet resonneringen elevene gjorde, var det viktig å stille opp med gjennomtenkte spørsmål og være føre-var på hva jeg spurte elevene om. Jeg ville ikke påvirke elevenes resonnering. Hadde jeg påvirket for mye, kunne det ha gått ut over kredibiliteten av datamaterialet.

Transkripsjon av lydopptak og intervju var en stor og viktig del av innsamlingsprosessen til datamaterialet mitt. Kvale & Brinkmann forklarer at å oversette et intervju fra muntlig språk til skriftlig språk (transkribering) er umulig uten å skrive om et intervju på en objektiv måte. Jeg måtte derfor stille meg selv spørsmål om hva som kunne bli nyttig transkripsjon for min studie. Jeg valgte å ha med transkripsjonsnøkler som viste korte og lange pauser. Elevenes dialekter ble skrevet om til bokmål for å holde elevene anonymisert. Talemåten og rekkefølgen på ordene lot jeg stå. Dette var med på å sikre kredibiliteten av datamaterialet fordi i en resonneringsprosess er det viktig å få med seg alt eleven gjør, og ikke gjør. At noe er overførbart vil jo si at man kan anvende noe til en annen situasjon eller respondent og få noenlunde det samme resultatet (Kvale & Brinkmann, 2015). Å få samme resultat ville nok være vanskelig, men å bruke samme metode og spørsmål er alltid overførbart. Min studie er konstruert for elever på 3. trinn. Å gi elever på 10. trinn andre problemløsningsoppgaver og fortsatt ha samme rekkefølge i innsamlingsprosessen vil man oppnå resultater, men ikke nødvendigvis de samme. Dermed kan man si at intervjuet har en viss grad av overførbarhet med seg.

#### 4.6 Etisk hensyn

Før man starter med innsamling av data er det etiske og lovpålagte handlinger som må gjennomføres. Norsk senter for forskningsdata, heretter kalt NSD, er en personvernstjeneste som arbeider for at forskning blir gjennomført på en måte som verner om menneskers sikkerhet og personvern i Norge. Skal man ha et forskningsprosjekt som omhandler andre mennesker enn seg selv, er det alltid behov for å finne ut om man må søke for godkjenning hos NSD. På nettsidene til NSD finnes det enkle tester man kan gjennomføre for å se om en studie må godkjennes eller kan gjennomføres uten godkjenning. En persons stemme, en samtale som blir tatt opp og lagret, inneholder personopplysninger. Man kan høre sinnsstemningen til personen, hvor han kommer fra og språklige evner, som kan være personidentifiserende faktorer i et lydopptak (Datatilsynet, 2020). Siden jeg skal ta lydopptak av barn, måtte jeg sende inn søknad til NSD (søknad og vurdering fra NSD er i vedlegg 2 og 3). I tillegg til samtykke fra foreldrene, ble alle elever som var til interesse for videre observasjon, stilt spørsmålet om de ville eller ikke. Elevene hadde full rett til å si nei om de ikke ville. Som forklart i etterarbeidet av innsamlingsprosessen (se delkapittel 4.3.3), ble det viktig å gjøre all data anonymt, kryptere minnepinnen med lydfilene og låse alt av samtykkeskjemaer og tegninger inne.

Christoffersen & Johannessen (2012) sammenfatter *Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora* etiske retningslinjer i tre typer hensyn en forsker må tenke gjennom: (1) informantens rett til selvbestemmelse og autonomi, (2) forskerens plikt til å respektere informantens privatliv og (3) forskerens ansvar for å unngå skade. Informantens rett til selvbestemmelse og autonomi (1), overført til min studie, handlet om at elevene fikk mulighet til å bestemme selv om de ville være med å bli observert mer, og at foreldre fikk skrevet under det aktuelle samtykkeskjema. Dette ble gjort og nøye tilrettelagt. Jeg hadde en dialog med kontaktlærer. Hun hadde en liste over de elevene som hadde fått lov å delta. Før jeg spurte de elevene jeg ville observere mer, sjekket vi over listen til læreren om det samsvarte med foreldres ønske. Da var det opp til elevene å komme med sitt samtykke der og da.

Forskerens plikt til å respektere informantens privatliv (2), overført til min studie, handlet om at alle involverte (elever, foreldre, kontaktlærer) var klar over hvordan opplysninger ble behandlet og låst inne, slik at ikke noen personopplysninger skulle komme på avveie. Derfor ble alle skjemaer og materiale med opplysninger låst inne og trygt oppbevart. Forskerens ansvar for å unngå skader (3) handler om at de som deltar i et forskningsprosjekt ikke skal bli belastet på noe slags måte, verken fysisk eller psykisk. Overført til min studie handlet det om å passe på at ingen av elevene følte seg presset til å snakke når jeg stilte spørsmål eller når elevene arbeidet med oppgavene. Det skjedde i ett tilfelle hvor en jente ikke snakket så mye. Da jeg spurte om hun ville forklare det hun hadde gjort, sa jeg at hun ikke trengte å si noe om hun ikke ville og kunne da bare høre på klassekameratene sine. Da fikk jeg et høflig nikk tilbake på og et smil. Etter dette lot jeg være å spørre henne mer om denne oppgaven og heller ikke senere i innsamlingen. Jeg passet også på at elevene følte seg viktig, takket for samarbeidet og for hjelpen jeg hadde fått av dem.

## 5. Analyse

I dette kapitlet presenteres resultatene fra datamaterialet som er analysert. Målet for kapitlet er å kunne svare på problemstillingen for denne oppgaven som lyder følgende: *hvordan bruker elever tegning i matematisk resonnering i arbeid med problemløsning?* Analysen har teorigrunnlag fra rammeverket til Lithner (2008) og Saundry & Nicol (2006), presentert tidligere i kapittel 2. Presentasjonen av funn blir delt inn i tre deler. I første del presenterer jeg en oversikt over resonneringstypene elevgruppene tok i bruk og en forklaring av tabell 5. Videre vil resonneringen elevene har gjort bli presentert systematisk og på følgende måte:

1. Presentasjon av konteksten elevene er i, og oppgaven de holder på med.
2. Tegningene elevene tegnet på den aktuelle oppgaven.

Alt datamateriale blir ikke presentert i analysekapitlet. Det var noen deler av transkripsjonen og samtalen elevene hadde som gruppe, som ikke fikk tydelig frem resonneringssekvensen. Derfor har jeg valgt ut transkripsjonsbiter fra datamaterialet som viser resonneringssekvensen tydelig. De stedene det er gjort «hopp» i transkripsjonen, er det markert med tre prikker (...) i kolonnen med linjenummer.

3. Tabell med utklipp fra transkripsjonen med resonneringssekvens blir vist i høyre kolonne. Resonneringssekvensen i transkripsjonen vil bli presentert av følgende fire punkter:
  - a. Problemsituasjon: Felles for alle gruppene er at første problemsituasjonen de møter på er selve oppgaven.
  - b. Strategivalg
  - c. Strategiimplementering
  - d. Konklusjon
4. Identifiserende trekk ved resonneringen. Kriteriene som brukes her, er definisjonene av hver enkel resonneringstype som ble presentert i teorien (kapittel 2). Den måten resonneringssekvensen er analysert på er blitt fortalt i metodekapitlet (kapittel 4).

I del to blir funnene fra analysen av tegningene til elevene presentert, hvor jeg tok i bruk rammeverket til Saundry & Nicol (2006). Jeg lagde en oversikt over tegningene og hvilken kategori de ble analysert til. Denne oversikten presenterer jeg også i analysen (tabell 9). Deretter vil det bli vist til noen enkelte tegninger som ble produsert av elevene, og hvorfor hver enkelt tegning har fått tildelt den kategorien de har fått. I del tre blir det presentert funn relatert til sammenhengen mellom tegningene og resonneringen til elevene.

### 5.1 Resonnering

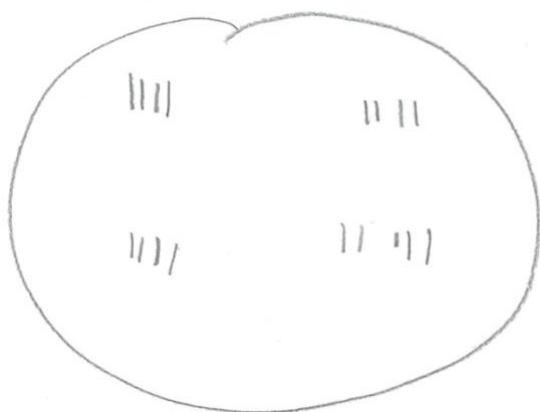
Siden det bare er utdrag av datamaterialet som kommer til å bli presentert ytterligere lagde jeg en tabell for å gi en oversikt over alt datamaterialet. Tabellen viser at 5 av 6 grupper (ca. 83%) tok i bruk AR. Av underkategoriene var det nok så lik spredning, der kjent AR ble brukt i tre grupper og avgrensede AR i to grupper. Av alle gruppene var det altså bare én gruppe som brukte CMR. Som eksempel på datamaterialet, er det valgt ut én fremvisning av resultat for hver av resonneringstypene CMR, kjent AR og avgrensede AR.

	CMR	MR	AR	KAR	AAR	VAR
<b>Oppgave 2</b>						
Gruppe A	X					
Gruppe B			X	X		
Gruppe C			X		X	
<b>Oppgave 3</b>						
Gruppe A			X	X		
Gruppe B			X	X		
Gruppe C			X		X	

Tabell 5: Oversikt over datamaterialet, resonnering

### 5.1.1 Gruppe A

I første analysekontekst arbeider elevene i gruppe A (Mari, Isak og Odd) med oppgave 2 (se kapittel 3). Den handler om sneglen Nils som har spist 17 blader på 4 dager. Tegningene elevene produserte til oppgaven var følgende:



Bilde 1: Mari sin tegning



Bilde 2: Odd sin tegning



Bilde 3: Isak sin tegning

Første problemsituasjonen elevene i gruppe A møter på er selve oppgaven. Det er den de skal finne svaret på og ikke vet hvordan de skal løse. Noen elever møter på nye problemer relatert til oppgaven etter de har arbeidet litt også. Deretter går elevene inn i en gjentagende sirkel mellom å prøve ut forskjellige gangetabeller for å se om det «går opp» i tallet 17. Til slutt kommer gruppe A frem til en konklusjon.

Linjenr.	Transkripsjon	Resonneringssekvens
27	Isak: Nils har spist 17 blader på 4 dager, hvor mange blader kan sneglen ha spist hver dag de siste fire dagene ...?	Problemsituasjon
28		
29	AD: Ja, så sneglen har spist 17 blad	
30	Odd: 17 delt på fire	Strategivalg
31	AD: På fire dager	
32	Odd: 17 delt på fire da	
...		
38	Mari: Prøv med 4-gangen.	Strategivalg
39	Odd: En. Fire ganger 4	Strategiimplementering
40	Alle: 8, 12, 16, 18	
41	Mari: Åååå, det ... det må jo gå opp da 4, 8, 12, 16.	
42	Isak: 3-gangen. 3- gangen fordi da	Strategivalg
43	Mari: Jaa.	
44	Isak: Har gått ned fra 20 og da endte jeg opp med 17	
45	Mari: 3, 3, 6,	Strategiimplementering
46	Odd: Det er ikke mer	
47	Mari: Nei, da blir det tatt ned	
48	Odd: det er ikke 5 gangen da?	
49	Isak: 3, 6, 9	Strategiimplementering
50	Mari: 12, 15, 17 nei 18.	
51	Odd: Det er to gangen da.	Strategivalg
52	Mari: Men man må trekke fra.	
53	Odd: 2-gange, siden da blir det jo 15 puss 17.	Strategivalg
54	Mari: 2, 4, 6, 8, nei.	Strategiimplementering
55	Isak: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14	
56	Mari: Det må jo gå opp	Strategivalg
57	Isak: 16	Strategiimplementering
58	Odd: åårh	
59	Mari: Går det an å ha med sånn halve blad da? (Spør meg, jeg reagerer med å se henne i øynene å si «jeg vet ikke»).	Strategivalg
60		
...		
72	<b>Mari starter å tegne (Tegning A1 oppgave 2)</b>	Bilde 1
73	Mari: OK! Så hvis vi gjør sånn her da: Sneglen Nils har spist 17 blader	
74	Isak: Jaa.	
75	Mari: Da sier vi sånn, en to, en to, en to, en to. Da her jeg åtte. Sånn sånn sånn sånn.	Strategiimplementering
76	Odd: Åh, nå skjønner jeg. <b>Starer å tegne: tegning A2 oppgave 2. Tegner først den nederste.</b>	Bilde 2
77		
78	Mari: Hva har vi her?	Problemsituasjon
79	Isak: veink, veink, veink. <b>(starter å tegne. Når</b>	Bilde 3

	<b>han seier «veink» setter han en strek på tegningen sin)</b>	
80	Mari: 6 + 6	
81	Odd og Isak: 12	
82	Mari: så hvis vi tar	
83	Isak: 12 pluss. Så hvis vi tar fire, hvis vi tar..	
84	Mari: Kan det vær forskjellig mengde han har spist hver dag?	Strategivalg
85	AD: Les oppgaven.	
86	Mari: For da er det jo easy da, hvis det er forskjellig mengde hver dag. <b>Mari</b>	Strategiimplementering
87	<b>teller høyt over samtalen til</b>	
88	<b>guttene: 1, 2, 3, 4, 5, 6,7 , 8, 9, 10, 11, 12, 13.. 13, 15, 16, 17 (legger ned blyanten),</b> jeg er ferdig.	
...		
143	AD: Okay, emm. Du her (Odd). Kan du forklare den tegningen til meg?	
144	Odd: Det er en, det er sånn der <b>(viser på Mari sin tegning)</b> bare at det er en sånn i hver.	Konklusjon (Bilde 2)
145		
146	Mari: Men da blir det ikke fordelt på fire dager, Odd.	Problemsituasjon Problemsit. Forts.
147	Odd: Det er sant	
148	Isak: Nei	
149	...	
150	Isak: Jo,jo, se. 1,2,3,4,5, mellomrom, 1, 2, 3,4 ... mellomrom, 1, 2, 3, 4, 5 ... <b>(stille litt)</b>	Strategi
151	... 1,2, 3 ... Det går opp det. Man kan bare legge en ting ned på den andre <b>(Han mener å ta ene streken fra en femmergruppe over til gruppen med tre streker. Dette viser han med å peke på tegningen til Odd)</b>	
152		
153		
154	Odd: Mellomrom det er her, og sånn <b>(tegner en horisontalstrek på nederste rekke med streker for å markere et mellomrom der)</b>	Strategiimplementering
155		
156	Isak: Ja	
147	AD: Ja, stilig, har du lyst å forklare din (Mari)?	
158	Mari: 4,4,4,5	Konklusjon (Bilde 1)
...		
163	AD: Hvordan ville dere vist hvordan dere tenkte.	
...		
168	Isak: Jeg hadde vist sånn at, da jeg testet, jeg testet liksom på hvor mange, hvordan det kan passe. Alt på hver. Hvordan alt kan passe på hver. For eksempel: nå har jo jeg	Konklusjon (Bilde 3)
169		



170		kommet frem til 4, 4, 4, 5 ( <b>peker på arket sitt hvor 4, 4, 4, 5 er</b> ). Da kan jeg jo bare sjekke: 1,2,3 for eksempel, eller 1,2,3,4	
171		...1,2,3,5 ...1,2,3,5. Det er jo også et svar.	
172		For da kan man egentlig bare minus på en så kan man plusse på en annen.	
173			
...			
185	Odd:	Det er ganske enkelt når man først fant ut hva det handler om.	
186	Mari:	Ja, når vi fant ut liksom hvor mye, hvor mye den liksom skulle ha. Og at det ikke trengte å være likt. For vi satt jo og tenkte det skulle være likt, så vi hadde sittet å regne helt likt i hver dag.	Argument
187			
188			

Tabell 6: Resonneringssekvens for gruppe A

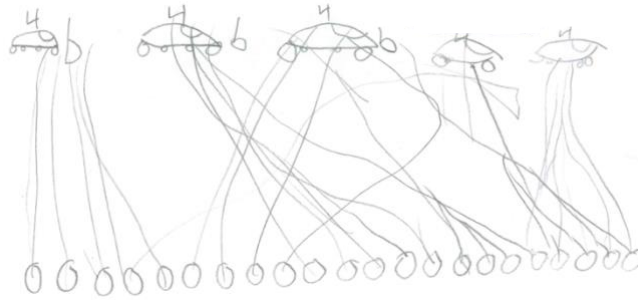
Ut fra analysen er gruppe A sin resonnering til oppgave 2 kategorisert som CMR. CMR kan kjennetegnes med fire punkter; *nytenkning*, *fleksibilitet*, *rimelighet* og *matematisk forankring*. Resonneringen til gruppe A er *nytenkende* fordi strategien om at det «må gå opp» (linjenummer 41, 56) ikke fungerer. Nytenkningen observeres når Mari spør om det går an å bruke halve blader (linjenummer: 59), og om man kan fordele ulikt pr. dag (linjenummer 84). Gruppe A er fleksibel fordi de ikke holder seg til én strategi. Elevene støtter hverandre og gir hverandre argumenter gjennom hele arbeidsprosessen (for eksempel linjenummer 43, 44, 53, 74 og 146), noe som tilføyer *rimelighet* til resonneringen de gjør. Det er opp til hele gruppen å bli enig i om strategivalg og strategiimplementeringer er rimelig, sann og akseptabel. Dette ser vi når noen elever kommer med forslag til en ny strategi på bakgrunn av noe de har regnet sammen. Da sier de andre «ja», og strategien blir testet ut. Her er et eksempel fra transkripsjonen ovenfor. Isak kommer med et forslag til hvordan de kan løse oppgaven og hvordan han kom frem til løsningen. Mari aksepterer forslaget og starter å prøve det ut.

- 42 Isak: 3-gangen. 3- gangen fordi da  
43 Mari: Jaa.  
44 Isak: Har gått ned fra 20 og da endte jeg opp med 17.  
45 Mari: 3, 3, 6,

Det siste punktet for CMR er *matematisk forankring*. Det handler om at argumentasjonen er forankret i de matematiske egenskapene til oppgaven. Gruppe A behandler alltid de matematiske komponentene i oppgaven. De holder fokus på at det er 17 blader som er blitt spist på 4 dager. De er først lenge innom å få delt alle 17 bladene likt på de fire dagene. Etter å ha lest oppgaveteksten og premissene som kommer frem i den, oppdager de at det ikke er nødvendig og dele likt. Deretter kommer løsningsforslagene. Et konkret eksempel er på linjenummer 186 hvor Mari svarer på om oppgaven var enkel: «Ja, når vi fant ut liksom hvor mye, hvor mye den skulle ha. Og at det ikke trengte å være likt. For vi satt jo og tenkte det skulle være likt, så vi hadde sittet å regne helt likt i hver dag». Gruppe A er kreativ i sin fremgangsmåte og resonnering, og bruker resonneringstypen CMR for oppgave 2.

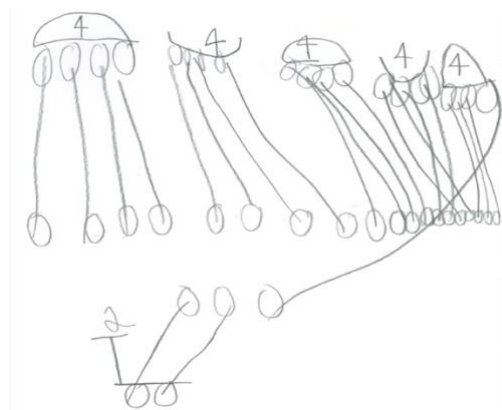
### 5.1.2 Gruppe B

Gruppe B består av Hans, Lea og Ivar som arbeider med oppgave 3. Oppgaven går ut på å finne ut hvilke gjenstander man kan ha sett på vei til skolen som til sammen har 22 hjul. Besvarelsene elevene produserte til oppgaven var følgende:



Bilde 4: Lea sin tegning

Sk      b      Sy      Sp  
 4      4      2      2  
 4      4      2      2  
 4      4      2      2



Bilde 6: Ivar sin tegning

Bilde 5: Hans sitt svar

Elevene møter på få problemsituasjoner i denne resonneringssekvensen. Elevene snakker lite sammen og tenker for det meste for seg selv. Ivar prøver å søke samtale med medelevene sine og får liten respons. I transkripsjonen og resonneringssekvensen er det byttet mellom kursiv og understreking. Da blir det tydelig hva som korresponderer til hva mellom transkripsjons-kolonnen og resonneringssekvensen-kolonnen.

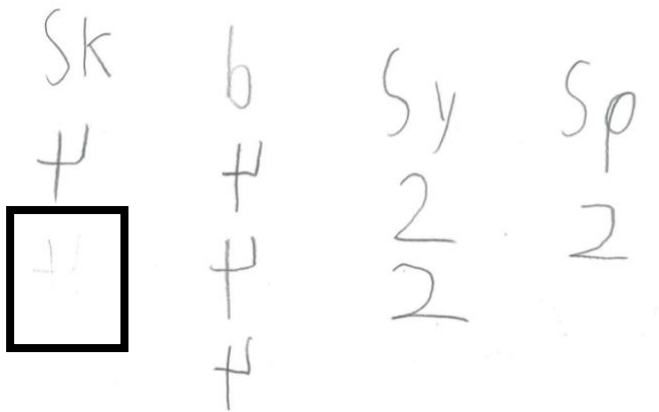
Linjenr.	Transkripsjon	Resonneringssekvens
484	AD: heheh, det går fint, jeg forstår at det er et	Problemsituasjon
485	tretall ... ok, dette er siste oppgaven før det	
486	er friminutt tror jeg. Så her står det: Du er	
487	på vei til skolen en mandags morgen. På	
488	veien ser du til sammen 22 hjul på ulike	
488	Ivar: hvor mange typer?	Strategivalg
489	AD: Dere får snakke litt sammen.	
490	<b>Alle leser oppgaven en gang til høyt for seg selv</b>	
491	Ivar: Skal man liksom skrive sånn, ee, en sykkel,	
	en ...	

492	<b>Hans begynner å skrive bokstaver: b, sy, sp, sk</b>	Strategiimplementering
493	Hans: skateboard, 4	
494	<b>Lea tegner en liten bil, men ser mye på de to andre elevene.</b>	
495	Ivar: Sånn, betyr det at man kan liksom tegne en	Strategivalg
496	bil og så skriver man fire der. Og så regner man med liksom skateboard fire hjul?	
497	AD: Dere kan prøve dere frem	
498	<b>Ivar tegner 22 hjul nede på arket sitt.</b>	Strategiimplementering
499	Ivar: Først en bil, den har fire hjul. Og sånn ... Sånn...	Strategiimplementering
500	<b>Tegner så fire biler med hjul på og setter strek mellom hjulene på bilen og hjulene på 22-rekken.</b>	Strategiimplementering
501		
502	(...)	
503	Ivar: Sånn.	
504	Hans: 22 hjul da ... en, en, to.	Strategiimplementering
505	Ivar: Jeg gjør egentlig det samme hele tida.	
506	Hans: To og to, som da blir åtte, tolv. Tolv og så ... tolv og så, det blir tjue. Og så..	Strategiimplementering
507	Ivar: og så 10	
508	Hans: Sånn!	
509	<b>Lea begynner å tegne lik tegning som Ivar. Starter å tegne 22 hjul nede og fem biler.</b>	Strategiimplementering
510		
511	Hans: Må bare skrive bokstavene. Altså tre biler, to skateboard, to sykler og en sparkesykkel.	Konklusjon
512		
513	Ivar: Å takk, du gav meg en ide til et kjøretøy, det var en sparkesykkel. Oki, jeg har og funnet frem til et svar.	Strategivalg
514		
526	AD: Ja, men da kan vi begynne her da.	
527	Ivar: Jeg hadde forklart at først kan dere tenkt på <i>hvor mange hjul er det som har fire, hva er det vanligste å se på skoleveien din. Er det biler, er det sparkesykler, er det skateboard, og da kan dere ta det dere tror.</i>	Strategivalg
528		
529	<u>Og så da tok jeg fem som hadde fire hjul og det var tre biler og to skateboards.</u> For det hender noen gonger at det er noen som, jeg ser noen som tar å, eller gjør lit skate-triks på siden av skolen. Og så er det noen biler. Og så er det noen som og holder på med sparkesykkel, men der er bare på sommeren da. <i>Så da tenkte jeg tre biler, og tre ... skateboard på grunn av det blir det, alle de har fire og det blir 20. og så er det en sparkesykkel igjen da, sånn at, som blir to, så da blir det 22.</i>	Strategiimplementering
530		
531		
532		
533		
534		Konklusjon (Bilde 6)
535		

536	AD: Ja. Og så ser jeg hva er det du har tegnet her? ( <b>peker på den øverste rekken av kjøretøy på tegningen til Ivar</b> )?	
537		
538	Ivar: De her?	
539	AD: Mhm?	
540	Ivar: der er en bil og der er et skateboard, det er bil og det er skateboard og det er bil. Og her er liksom hjulene som er på dem. Så tegnet jeg streket fra de hjulene til det hjule, sånn liksom ( <b>viser</b> ) ...	Strategivalg
541		
542		
543	AD: Ja, hvordan hjalp det der deg med å finne svaret da?	
544	Ivar: Det som hjalp meg med å finne svaret var egentlig bare å tenk på hva jeg bruker å se noen ganger til skoleveien og hvor mange hjul det jeg ser har.	Strategivalg
545		
559	AD: Du vet ikke heilt. Men jeg ser, har du lyst å forklare hva du har skrevet her da?	
560	Hans: Altså, bare sånn tenker på hva. Eller det er liksom det samme som Ivar da, <i>altså tenke på hva man ser og så kan man skriv ned sånn her hva man tror man ser mest av. Men det er en som jeg vil endre litt på.</i>	Strategivalg Strategiimplementering
561		
562		Strategivalg
563	AD: Ja, du må bare endre. Skal vi se ...	
564	Ivar: Jeg har viskelær	
565	AD: Der er det viskelær	
566	Hans: Du tok med viskelær du	
567	AD: Det var lurt	
568	<b>Hans visker vekk et firetall.</b>	Strategiimplementering
...		
571	AD: Hva var det du forandret nå da?	
572	<b>Peker på firetallet han har visker litt bort</b>	
573	AD: Ja, og hva står, kan du forklare meg hva disse bokstavene står for?	
574	Hans: Skateboard, bil, sykkel, sparkesykkel	
575	AD: JA, så hvor mange av de så du på veien da?	
576	Hans: liksom, jeg føler liksom at hvis jeg ser et skateboard så trur jeg at det mest er ett skateboard og ikke flere.	Konklusjon (Bilde 5)
577		
578	AD: Okei, ja. Så ett skateboard	
579	Hans: Siden det er veldig sjeldent at jeg ser skateboard. Og så føler jeg at det kanskje er tre biler, to sykler og en sparkesykkel.	Konklusjon fortsetter
580		

Tabell 7: Resonneringssekvens for gruppe B

I analysen har gruppe B sin resonnering blitt kategorisert som kjent AR. Gruppe B bruker AR fordi strategivalgene deres er basert på tall som er kjente og som går opp i tallet 22. De tallene som blir behandlet gjennom resonneringen, er 2 og 4. Tallene er lette å arbeide med fordi flere kombinasjoner av dem vil «gå opp» i tallet 22. Det er viktig å være nøye i implementeringsfasen, da en liten feil kan gjøre at elevene ender opp med feil svar. Det skjedde blant annet med Hans. Han hadde tegnet for mange skateboard da han skulle forklare oppgaven og måtte gjøre en forandring. Vi ser på tegningen at et fire-tall er blitt visket bort (tallet er markert med en firkant, bilde 7).



Bilde 7: Hans sin tegning, markert hvor det er visket bort et firetall.

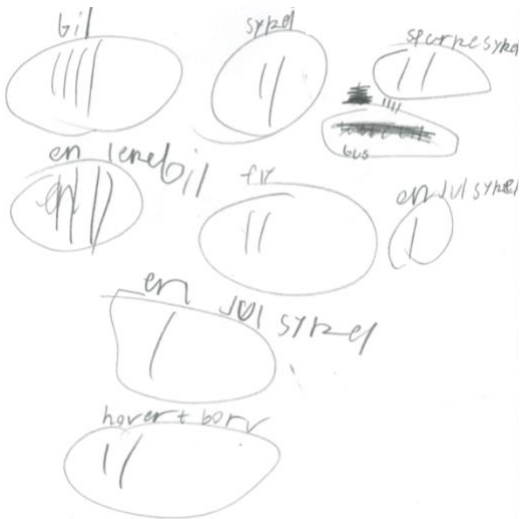
Denne feilen kommer også frem i transkripsjonen «**Hans visker vekk et firetall.**» (linjenummer 568). Tidlig i transkripsjonen ser man også at gruppen behandler tallene som et addisjonsstykke:

- 504 Hans: 22 hjul da ... en, en, to.  
 505 Ivar: Jeg gjør egentlig det samme hele tiden.  
 506 Hans: To og to, som da blir åtte, tolv. Tolv og så ... tolv og så, det blir tjue. Og så..  
 507 Ivar: og så 10

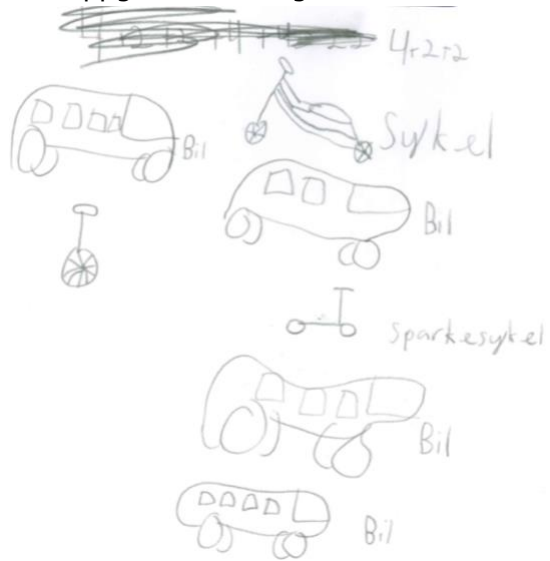
Addisjon er noe som er kjent for gruppen og de behandler oppgaven som at tallene de behandler skal til sammen bli 22. Det at gruppe B behandler tallene som et addisjonsstykke, viser at de bruker kjente algoritmer for å komme frem til et svar. Gruppen vet at utfallet skal ende på 22 hjul. Derfor bruker gruppe B kjent AR i sin resonnering.

### 5.1.3 Gruppe C

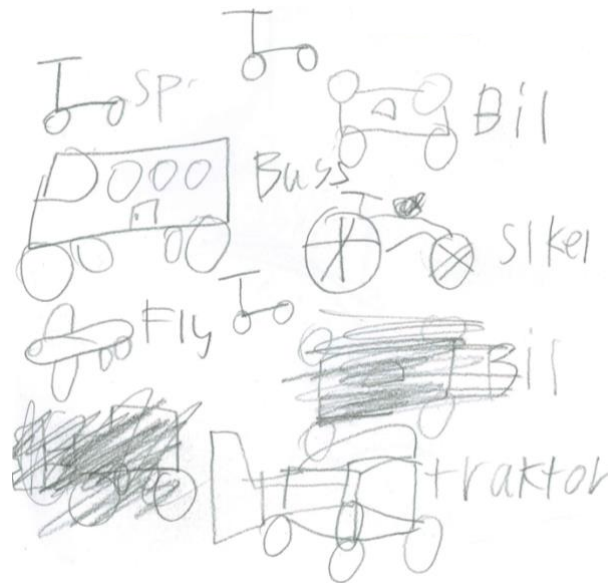
Erik, Inge og Erna er elevene i gruppe C. Oppgaven er den samme som i forrige kontekst (oppgave 3). Besvarelsene elevene produserte til oppgaven var følgende:



Bilde 8: Erik sin tegning



Bilde 9: Erna sin tegning



Bilde 10: Inge sin tegning

Elevene møter noen få problemsituasjoner underveis i arbeidet. I tillegg til selve oppgaveteksten, er problemsituasjonene relatert til spørsmål rundt selve oppgaven; hva ulike gjenstander har av antall hjul, og at de oppdaget at det var blitt gjort var feil underveis.

Linjenr.	Transkripsjon	Resonneringssekvens
752	AD: Mmm. Skal vi se. Her er siste oppgaven, så skal jeg lese oppgaven; på vei til skolen. Du er på vei til skolen en mandags morgen. På veien ser du til sammen 22 hjul på ulike gjenstander. Hvilke	Problemsituasjon
753		
754		

	gjenstander kan du ha sett på vei til skolen?	
755	Erna: 22 hjul	
756	Erik: Å wow ... Men kan det være de samme tingene?	strategivalg
757	AD: Dere får prøva dere frem. Snakke med hverandre.	
758	Erna: <i>Okei, vi ser jo fire hjul på en bil da. Til vanlig, så da 4. <b>(begynner å skrive tallet 4 i tallrekken øverst på oppgavearket sitt).</b></i>	<i>Strategivalg</i> <u>Strategiimplementering</u>
759		
760	Erna: Emm...	
764	Erna: <i>2, en sykkel kan han ha sett.. men må det være på bildet? (ser først på meg, men jeg gir ingen reaksjon, ser dermed på Erik som nikker nei) ... Okei. Da blir det 4, så, det her er hvert fall.. emmm. Og så blir det to, fire ... en sykkel.</i>	<i>Strategivalg</i>
765		<u>Strategiimplementering</u>
766		
769		
770	Erik: 8 ... OK ... emmmm	
771	Erna: Emmm	
772	Erik: Åhh	
773	Inge: Mmmmm	
774	Erik: Ok, jeg må ha fler... Åh. <b>Det er mye stillhet denne perioden. Alle tegner og tenker for seg selv: når Erna tenker og skriver tegner både Erik og Inge på arkene sine. Erik starter med å tegne en sirkel med fire streker inni → en sirkel med to streker inni → så enda en sirkel med fire streker inni → sirkel med to streker inni → sirkel med en strek → sirkel med fire steker → sirkle med 2 streker → Sirkel med 2 streker → sirkel med 1 strek. Inge tegner først en bil → sykkel → bil → sparkesykkel → stryker over bil en av bilene → sparkesykkel → sparkesykkel → buss → fly → traktor → traktor → stryker over ene traktoren)</b>	Strategivalg
775		<u>Strategiimplementering</u>
776		
777		
778		
779		
780		
781		
782		
...		
790	Erna: <u>Okei, 4 + 2 + 4 blir 12, nei 18. Da har jeg 18, jeg mangler 4.</u>	<u>Strategiimplementering</u> Problemsituasjon
791	Inge: Sånn, sånn, en to tre fire fem seks ... <i>Kan det være i lufta?</i>	<i>Strategivalg</i>
...		
796	Inge: Har en fly 2 ...?	Problemsituasjon
797	Erik: Ja, hjul.	
798	Inge: Har en fly fire hjul?	
799	Erik: Nei to.	
800	Inge: Åja, okei.	
801	Erna: De her blyantene er så dårlige de jeg får.	

802	Inge: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,	Problemsituasjon
803	Erik: Åh, 17?	
804	Inge: 13, 14, 15, 16, 17, 18.	
...		
808	Erik: Hvor mange hjul kan en lastebil ha?	Problemsituasjon
809	Erna: Jeg har bare en to tre fire fem ting jeg	
810	Erik: Den kan ha 6 eller 7	
...		
814	Erik: Det er jo seks. Er det ikke seks?	Strategivalg Strategiimplementering
815	Erna: Ja, jeg tror det.	
816	Erik: Det er noen som har seks.	
817	Erna: For det kan ikke være fire, liksom fremfor	
818	og bak, for det er jo litt tungt for bagasjen.	
819	Inge: <i>Åååh, åja, jeg vet hvordan. Åå, søren</i> <b>(stryker over ene traktoren sin)</b>	
820	Erik: <b>(Erik teller over Inge sine hjul)</b> 1 2 3 4 5 6 7 8 9	
821	Erna: Jeg teller over selv jeg.	
822	Erik: 10 11 12 13 14 15 16 17 ... 18 19 20 21 22 23 ... 24 25 26 27?	
823	Inge: Har traktor seks?	
824	Erik: 27? skulle det være 27 hjul da?	Problem forts.
825	Erna: Det skulle være 22 hjul. Ikke sant?	
826	Inge: Okei, jeg tenkte bare.	
827	Erna: Jeg har regnet på det og har kommet frem til ett svar.	
828	Erik: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22. Men det er 5 hjul.	
829	AD: På hva?	
830	Erik: Det er 23 hjul.. da blir det 23, vent litt- jeg treng viskelær	Problemsituasjon
831	AD: Jeg veit ikke om vi har viskelær.	
832	Erik: <i>Jeg kan bare gjøre slik</i> <b>(stryker over</b> <b>lastebilen sin)</b> . Så kan jeg skrive lite	Strategivalg og Strategiimplementering
833	under	
834	AD: Oki	
835	Inge: 13, 14, 15, 16,	
836	Erik: 4 ... og da mangler jeg ett.	
837	Inge: Jeg mangler bare to?	
838	Erik: Har du.. Erna? Har du en ting som er ett hjul?	Problemsituasjon
839	Erna: Enhjulssykkel	Strategivalg
840	Erik: Den har jeg tatt	Problemsituasjon
841	Erna: Det går an å ta flere ting to ganger og flere ganger	Strategivalg
842	Inge og Erik: Hæ?	
843	Inge: Går det?	Strategivalg
844	Erna: Ja. Står det noe i oppgaven om at det ikke går?	Strategivalg
845		



846	<b>Erik og Inge leser oppgaven en gang til. Deretter tegner Erik en siste enhjulssykkel og blir ferdig.</b>	Strategiimplementering
847		Strategivalg
848	Erna: Det står ikke noe i oppgaven at det ikke går, så da må det jo gå.	
849	Erik: Ferdig ... Jeg skal bare telle over: 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	
850	Inge: Hehehehe.	
851	Erna: Skal vi skrive sånn 1, 2, 3 igjen? <b>(jeg bekrefter med et «ja»)</b>	
852	Erik: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 19, 20, 21, 22 ... ja..	
...	AD: Er alle sammen ferdig da?	
856		
...	AD: Vi går tilbake til oppgaven.	
864		Konklusjon (Bilde 9)
865	Erna: Okei, en sykkel. Det er, har, eller en sykkel har to hjul. En bil har fire. En sparkesykkel har to. Enda en bil har fire. Enda en bil har også fire. $4 + 2 + 2 + 4 + 4 = 22$ .	
866		
...		
871	Erik: <b>(legger ned arket slik at jeg ser)</b> En bil har fire hjul, en sykkel, to hjul. En sparkesykkel har to hjul. En, en lekebil har fire. Et fly har to. En enhjulssykkel har en. En enhjulssykkel har en. Og et hoverboard har to.	Konklusjon (Bilde 8)
872		
873		
...		
879	Inge: Jeg så ... 2 ... det.. to sparkesykkel, det blir til sammen 4. Og en buss som har fire hjul. Og så en fly som har to hjul. Og en bil som har fire hjul. Sykkel to hjul. Det blir sammen til 22. <b>(det han har forklart her blir egentlig 16 hjul).</b>	Konklusjon (Bilde 10)
880		
881		
882	AD: Ja.	
883	Inge: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.. Århh	Problemsituasjon
884	<b>Jeg så han telte hjulene feil, han hoppet over ene sparkesykkelen sin. Deretter teller vi sammen alle gjenstandene hans og får 22 hjul.</b>	Konklusjon
885		
886	Erik: Talte du med den? <b>(peker på bil eller traktor)</b>	
887	Inge: Nei, den har jeg streket over.	
888	AD: Okei, men hvis dere skulle forklart dette til noen inni klasserommet deres da. Hvordan hadde dere forklart det da?	
889		
890	Erna: Da hadde jeg. Jeg hadde forklart 4..mm, hjul, fordi en bil har fire hjul, og så to fordi en sykkel har to hjul. Og enda, og pluss 2,	
891		

892	fordi enda en, fordi en sparkesykkel har to	
893	hjul. og så, em, enda en bil har jo også fire	
	hjul, og så pluss enda en bil det blir også	
	fire. Og så blir det da $4 + 2 + 2 + 4 + 4 +$	
	4, det er 22.	
894	AD: Ja	
895	Erna: Fordi $2+2$ det er jo fire ... Og så da blir det	Problemsituasjon
896	sånn, 4 ... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	
	12, 13, 14. Vent!	
897	Erik: Jeg må si en ting.	Problem forts.
898	Erna: Åja, 15, 16.. hæ? ... Det var rart..	
899	AD: Hmm ... Hva som skjedde der?	Problem forts.
900	Erna: Okei, når Jeg telte hjulene så var det ikke	
	riktig?	
901	AD: Å, hva var det du hadde da?	
902	Erik: 16	Problem forts.
		<i>Strategi</i>
903	Erna: Jeg vet ikke ... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,	
904	11, 12, 13, 14, 15, 16 ... <i>jeg kan jo legge</i>	
	<i>på..</i>	
905	Erik: en buss	<i>Strategi</i>
906	Erna: <i>Jeg kan legge på en bil og så to</i>	<u>Strategiimplementering</u>
907	<i>enhjulssykler (Erna tegner på en</i>	Konklusjonen til Erna er
	<b><u>ekstra bil og to enhjulssykler).</u></b>	bilde 9

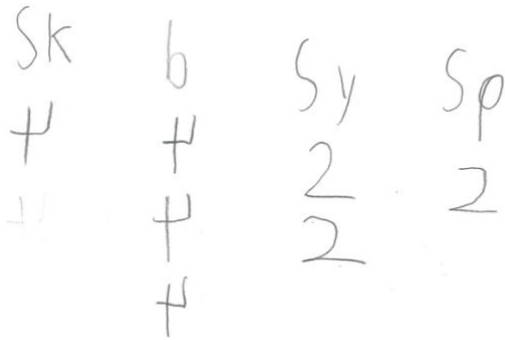
Tabell 8: Resonneringssekvens for gruppe C

Gruppe C bruker avgrensede AR som resonneringstype. Strategivalgene til elevene går ut på å få antall hjul på ulike gjenstander til å gå opp i tallet 22. Elevene i gruppe C tar i bruk addisjon gjennom arbeidsprosessen for å oppnå en konklusjon. Dette er noe som er kjent for dem. Bruk av addisjon ser vi når elevene teller over hjulene sine (linjenummer 764, 802, 822 og 883), og når de forklarer tegningene sine (linjenummer 864, 871 og 879). Gjennom transkripsjonen ser man tegn til at elevene har en del slurvefeil gjennom arbeidet sitt, noe som fører til at det oppstår problemsituasjoner flere ganger (Linjenummer 803, 822, 830 og 895). Resonneringen til gruppen er kategorisert som AR fordi strategivalg er basert på algoritmer som addisjon, og fordi strategiimplementeringen til elevene må være nøye for å oppnå et svar.

Når elevene bruker kjent AR blir algoritmen, eller strategien, som er valgt implementert. Når det er gjort, er oppgaven ferdig og løst. Dette skjer ikke i resonneringen til gruppe C. Som tidligere vist, møter de på problemsituasjoner som følge av slurvefeil i tellingen. Algoritmen gruppe C tar i bruk er basert på overflateegenskaper i oppgaven. Det er tallet 22, gjenstander og hvilke gjenstander de selv faktisk kunne sett på vei til skolen. Selv om elevene aldri kaster bort et strategivalg, må de korrigere seg og rette på strategien sin for å få et tilfredsstillende svar. På bakgrunn av valg av strategi og slurvefeil, er det avgrensede AR gruppe C har brukt. Lithner (2006) sier også at avgrensede AR ofte kan bli utført i ett steg (én strategi).

## 5.2 Tegning

Det ble produsert totalt 18 besvarelser i elevgruppene A, B og C. Rammeverket til Saundry & Nicol (2006), som jeg presenterte i teorikapittelet (kapittel 2), er blitt brukt for å kategorisere tegningene til de tre elevgruppene. Ut fra de 18 svarene var det bare to elever som ikke brukte tegning. Deres svar bestod av bokstaver og tall. Her er hva de to elevene produserte:



Bilde 11: Hans sin tegning, oppgave 3



Bilde 12: Erna sin tegning, oppgave 2

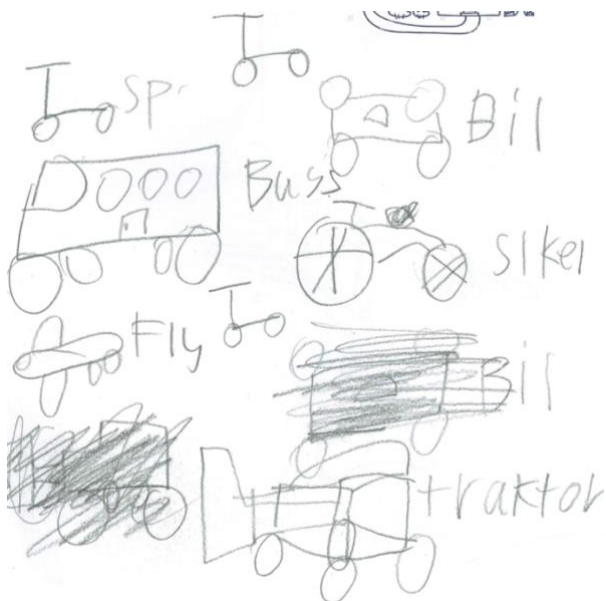
De to tegningene (Bilde 11 og 12) ble ikke tatt med i kategoriseringen av tegningene og vil ikke bli tatt med i prosentregningen som kommer. Dette fordi det ikke var tegninger. Ut fra de 16 besvarelsene som brukte tegning var det 5 av 16 (ca. 31 %) som tok i bruk tegning som manipulativ. 11 av 16 (ca. 69 %) brukte tegning som støtte for system. Tabell 9 viser en oversikt over datamaterialet.

	Oppgave 2	Oppgave 3	Totalt
<b>Brukte tegning</b>			16
<b>Brukte ikke tegning</b>	1	1	2
<b>Manipulativ</b>	3	2	5
<b>Støtte for system</b>	5	6	

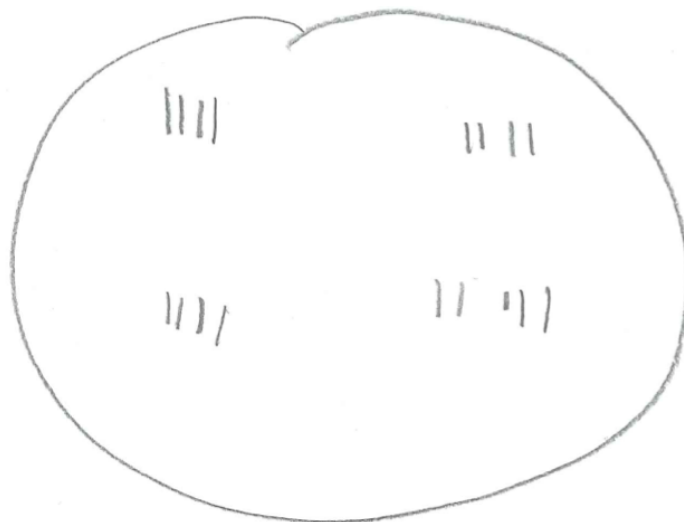
Tabell 9: Oversikt over datamaterialet, tegning

### 5.2.1 Tegning som støtte for system

Tegninger med typen *støtte for system* er mest fremtredende blant alle gruppene. Totalt er 11 av 16 (ca. 69 %) tegninger blitt klassifisert som *støtte for system*. Som eksempeltegninger har jeg valgt ut én tegning for oppgave 2 og én fra oppgave 3. Det er tegningene til Mari og Inge som er eksempler.



Bilde 13: Inge sin tegning, oppgave 3



Bilde 14: Mari sin tegning, oppgave 2

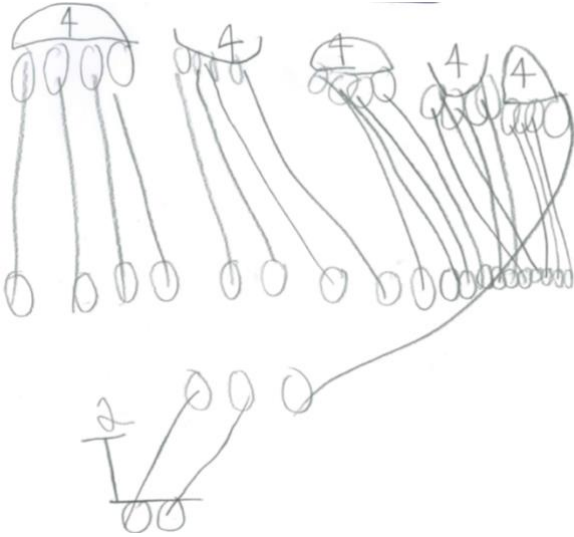
Felles for alle tegningene og besvarelsene er at de viser en sammenheng mellom oppgavetekst og konklusjon. Konklusjonen kommer ikke eksplisitt frem i tegningen. Man må telle over for å se om tegningen stemmer overens med oppgaven. Tegningene er ikke blitt manipulert på den måten at det er piler, sirkler eller streker. Tegningene blir også en støtte for elevene i møte med oppgavene fordi de kan telle over og sjekke om løsningen stemmer overens med oppgaven. Det er når tegning møter samtale at man ser verdien i tegningen (Within & Within,). Det ser vi når man sammenligner Inge sin tegning (bilde 13) med forklaringen han har av konklusjonen sin:

- 879 Inge: Jeg så ... 2 ... det.. to sparkesykkel, det blir til sammen 4. Og en buss som  
 880 har fire hjul. Og så en fly som har to hjul. Og en bil som har fire hjul.  
 881 Sykkel to hjul. Det blir sammen til 22. **(det han har forklart her blir egentlig 16 hjul).**
- 882 AD: Ja.
- 883 Inge: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.. Århh  
 884 **Jeg så han telte hjulene feil, han hoppet over ene sparkesykkelen**  
 885 **sin. Deretter teller vi sammen alle gjenstandene hans og får 22 hjul.**

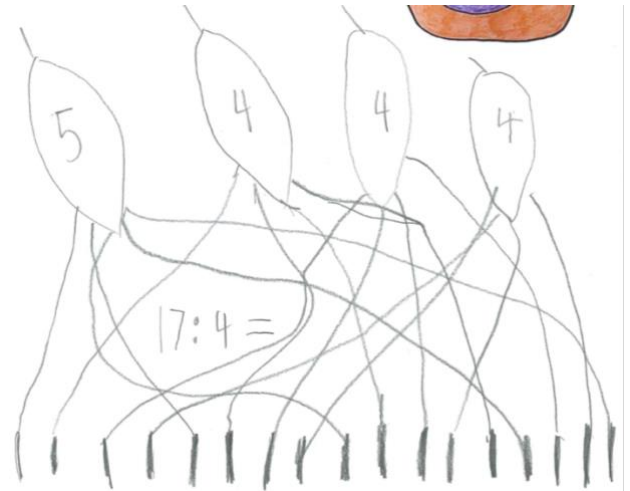
Inge bruker tegningen sin som en støtte til å vise svaret sitt. Fordi Inge sjekket om det er rett antall hjul, førte det til at han måtte gjøre endringer i tegningen sin for å nå en konklusjon. Mari sin tegning (bilde 14) er også kategorisert som *tegning som støtte for system* på grunn av rekkefølgen hun tegnet på. Hun starter med å tegne to streker som skal forestille blader, på fire forskjellige plasser på arket. Deretter teller hun seg oppover til 17 mens hun systematisk setter en ekstra strek på hver plass etter tur. Det kommer også frem i transkripsjonen på linje 75: «Da sier vi sånn, en to, en to, en to, en to. Da har jeg åtte. Sånn, sånn, sånn, sånn». Når hun kort tid etterpå innser at bladene ikke trengs å fordeles likt for hver av de fire dagene, sier hun: «For da er det jo easy da, hvis det er forskjellig mengde hver dag. **Mari teller høyt over samtalen til guttene: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.. 13, 14, 15, 16, 16 (legger ned blyanten),** jeg er ferdig» (linjenummer 86).

### 5.2.2 Tegning som manipulativ

Når tegning som støtte for system ikke kom til syne i tegningene til elevene var det *tegning som manipulativ* som ble brukt. 5 av 16 tegninger (ca. 31%) ble kategorisert som tegning som manipulativ. Som eksempeltegninger har jeg valgt ut én tegning for hver av de to oppgavene her gruppene gjorde på grupperom. Det er tegningene til Hans og Ivar som er eksempler.



Bilde 15: Ivar sin tegning, oppgave 3



Bilde 16: Hans sin tegning, oppgave 2

Felles for tegningene til Ivar og Hans er at man ser hvordan elevene har manipulert tegningene sine. For eksempel i tegningen til Ivar (bilde 15) ble det først tegnet opp 22 hjul (sirkler på bilde 15). Deretter tegnet han en og en gjenstand med hjul (bil, skateboard, bil, skateboard, bil og sparkesykkel). Til slutt satt han strek mellom gjenstandenes hjul og de 22 hjulene han tegnet først. I transkripsjonen leser man også at måten han tenker ut løsningen på er konkretiseringsbevisst, på den måten at han tenker over hvilke gjenstander han kan se mest av i hverdagen sin.

- 527 Ivar: Jeg hadde forklart at først kan dere tenkt på hvor mange hjul er det som  
528 har fire, hva er det vanligste å se på skoleveien din. Er det biler, er det  
529 sparkesykler, er det skateboard, og da kan dere ta det dere tror. Og så da  
230 tok jeg fem som hadde fire hjul og det var tre biler og to skateboards. For  
231 det hender noen ganger at det er noen som, jeg ser noen som tar å, eller  
232 gjør lit skate-triks på siden av skolen. Og så er det noen biler. Og så er  
233 det noen som og holder på med sparkesykkel, men der er bare på  
233 sommeren da. Så da tenkte jeg tre biler, og tre ... skateboard på grunn av  
234 det blir det, alle de har fire og det blir 20. og så er det en sparkesykkel  
235 igjen da, sånn at, som blir to, så da blir det 22.

Hans sin tegning (bilde 16) er også manipulert. Det er satt streker mellom blader (17 små streker nederst på bilde) og til hver sin dag. Jeg spurte Hans hva de fire bladene var, og det skulle forestille de fire dagene sneglen hadde spist bladene på.

- 461 Hans: Jeg har liksom tegnet like mange streker og så har jeg tatt strek og så har  
462 jeg telt de strekene og skrevet de tallene der.  
463 AD: Ja, og hva er dette her da?  
464 Hans: Blader, men liksom på dagene da.

Man ser i tegningen til Hans at han har streket et blad til hver sin dag etter tur. På den måten var det enkelt for Hans å telle hvor mange streker som lå inntil de fire bladene/dagene øverst på tegningen.

### 5.3 Resonnering og tegning sett sammen

Problemstillingen for studien er: *hvordan bruker elever tegning i matematisk resonnering i arbeid med problemløsning?* For å finne et svar til problemstillingen min stilte jeg følgende tilleggsspørsmålene:

- a) Når i resonneringsprosessen brukes tegning?
- b) Hva slags funksjon har tegningene i resonneringsprosessen, i lys av spørsmål a)?

Tabell 10 viser en oversikt over datamaterialet fra Lithner (2008) sitt rammeverk og Saundry & Nicol (2006) sitt rammeverk sammen. Ved å se på del 1 og del 2 av analyseprosessen og funnene sammen, brukte alle elever på gruppe B tegning som manipulativ og hadde kjent AR som resonneringstype. Gruppe C brukte bare tegning som støtte for system og fikk resonneringstypen avgrensede AR. Gruppe C brukte bare tegning som støtte for system og fikk ulike resonneringstyper for de to ulike oppgavene. Noe som kan bety at det ikke finnes én bestemt type tegning man bruker for de ulike resonneringstypene (CMR, IR & AR).

	<b>Gruppe A</b>	<b>Gruppe B</b>	<b>Gruppe C</b>
<b>Resonneringstype</b> (Lithner, 2008)	Oppg. 2: CMR Oppg. 3: Kjent AR	Oppg. 2: Kjent AR Oppg. 3: Kjent AR	Oppg. 2: Avgrensede AR Oppg. 3: Avgrensede AR
<b>Tegningstype</b> (Saundry & Nicol, 2006)	Tegning som støtte for system på begge oppgavene.	Tegning som manipulativ på begge oppgavene.	Tegning som støtte for system på begge oppgavene.

Tabell 10: Resonnering og tegning

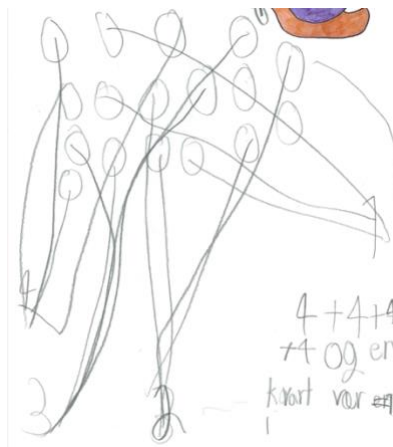
#### 5.3.1 Tegning og AR

Alle tegningene analyserte jeg opp mot resonneringssekvensen. Det førte til svar på spørsmål a: «Når i resonneringsprosessen brukes tegning?» Ett av funnene er at 15 av 16 elever starter å bruke tegning i det strategiimplementeringen skjer. Funnet er uavhengige av hvilken type resonnering gruppene brukte. Det vil si at grupper som brukte både CMR, kjent AR og avgrensede AR, startet å tegne i implementeringsfasen. De to første eksemplene er Ivar (gruppe B) og Isak (Gruppe C) sine tegninger til henholdsvis oppgave 2 og 3. Begge gruppene brukte kjent AR. Ivar uttaler at han forstår hva han må gjøre. Han har med andre ord funnet en strategi han mener kan fungere. Ivar starter å tegne i det han implementerer strategien sin som vi ser fra linjenummer 432-436:

Ivar: Åkei ... nå skjønner jeg den, okei. Der er en, to, tre, fire, fem, seks, syv, åtte, ni, ti, elleve, tolv, tretten, fjorten femten, seksten, sytten. Sånn. **(tegner 17 blader og teller alle bladene han trenger.)**

Ivar: Sånn **(deretter skriver han tallene 1- 4 på forskjellige områder på arket sitt og starter å streke hvert blad til hver av dagene etter tur).**

Når Ivar sier «nå skjønner jeg den», har han kommet frem til en strategi han vil prøve ut. Den strategien implementerer Ivar med å starte å tegne. Det kommer derfor frem i datamaterialet over at det er i strategiimplementeringen tegningen starter (spørsmål a).



Bilde 17: Ivar sin tegning, oppgave 2

Gruppen til Isak sitter litt og snakker før de starter å tegne. I samtalen før tegning kommer strategien til guttene frem ved at de sier at det går opp om man bruker masse biler, linje nummer 208-214 viser samtalen videre:

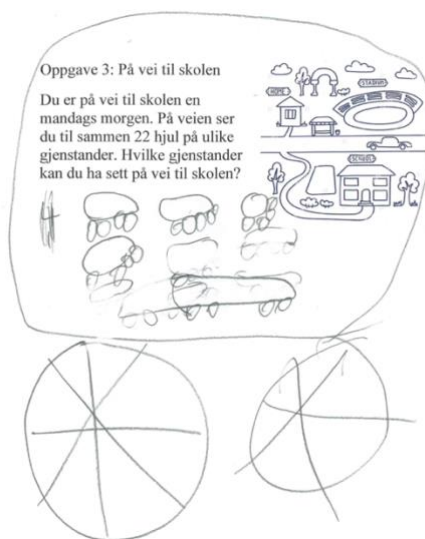
Isak: Jaaa. Det går opp med, det går opp med alle sammen helt til vil har, utenom en som er sykkel.

**Mari starter på sin tegning**

Odd: Nei, det går an med 4, 4, 4. Eller  $4+4=8$ , så 12, så 16 så 20.

Isak: Men det er 22 ... da må vi ha en sykkel også.

**Mens guttene snakker og begynner tegningene sine, teller Mari lavt for deg selv fra 1 til 12.**



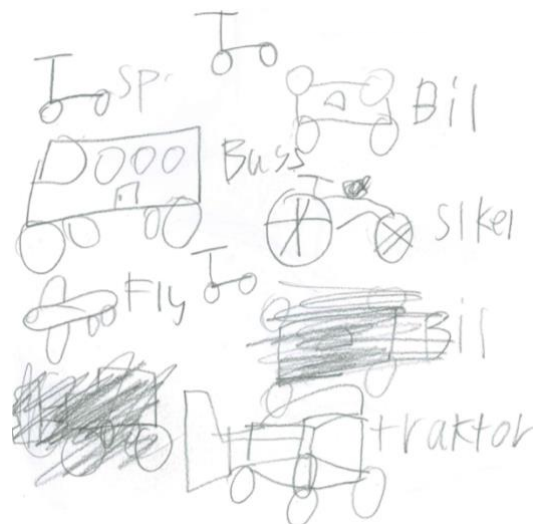
Bilde 18: Isak sin tegning, oppgave 3

Det er vist til to ulike typer tegninger ovenfor; Ivar sin er tegning som bruk av manipulativ mens Isak sin er støtte for system. Begge viser at tegningen starter i det strategien blir implementert. Felles for begge fremgangsmåtene, og for flere av elevene, er at svaret er fortsatt uvisst når de starter å tegne. Ivar vet ikke hvor mange blader han kommer til å ende opp med for hver av de 4 dagene. Isak vet ikke hvor mange biler og sykler han trenger. Funksjonen til tegningen (spørsmål b) blir derfor en støtte for strategiimplementeringen.

Hvilken resonneringstype elevene bruker, har lite å si for hvor i resonneringssekvensen tegningen starter. Jeg valgt ut to eksempler fra gruppe C som brukte avgrensede AR som resonneringstype. De to neste eksemplene er Inge og Erna sine tegninger til oppgave 3. Det kommer frem i datamaterialet at Inge er mye stille før han starter å tegne. Det eneste han sier før han starter å tegne er «mmmm».



På linjenummer 780-782 blir det forklart i hvilken rekkefølge Inge starter å tegne. Det kommer ikke frem noen eksplisitt strategi før han starter å tegne: **Inge tegner først en bil → sykkel → bil → sparkesykkel → stryker over bil en av bilene → sparkesykkel → sparkesykkel → buss → fly → traktor → traktor → stryker over ene traktoren).**



Bilde 19: Inge sin tegning, oppgave 3

Etter han har startet tegningen sin, uttrykker han «Ah, okei, jeg skjønner» (linjenummer 790) og fortsetter tegningen sin. Det kommer frem ovenfor at tegningen ble brukt i implementeringsfasen av resonneringen (spørsmål a).

Senere i transkripsjonen teller Inge over tegningen sin flere ganger (linjenummer 802, 804, 835 & 883). Det betyr at tegningen til Inge hadde en funksjon som støtte for system i resonneringsprosessen (spørsmål b).

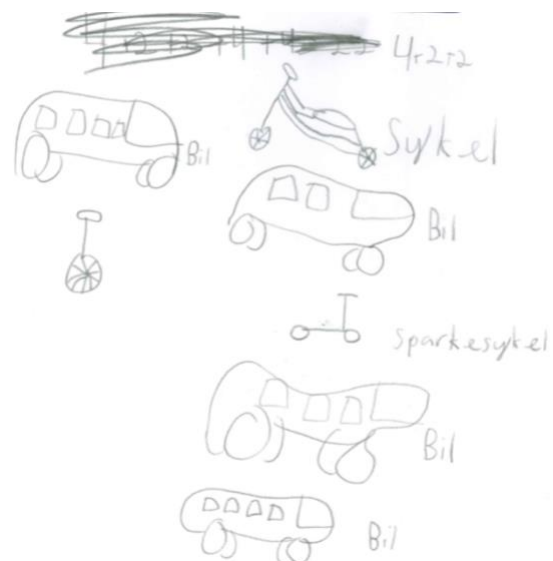
Erna, som også brukte resonneringstypen avgrensende AR, tok i bruk tegning i implementeringsfasen (spørsmål a). På linjenummer 758-766, uttaler hun strategien før hun starter å tegne:

Erna: *Okei, vi ser jo fire hjul på en bil da. Til vanlig, så da 4. (begynner å skrive tallet 4 i tallrekken øverst på oppgavearket sitt).*

Erna: Emm...

...

Erna: *2, en sykkel kan han ha sett.. men må det være på bildet? (ser først på meg, men jeg gir ingen reaksjon, ser dermed på Erik som nikker nei) ... Okei. Da blir det 4, så, det her er hvert fall.. emmm. Og så blir det to, fire ... en sykkel.*



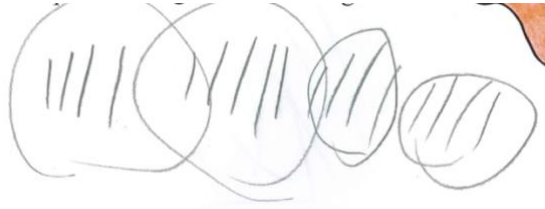
Bilde 20: Erna sin tegning, oppgave 3

I datamaterialet over kommer det frem at under strategiimplementeringen har tegningen en støttende funksjon for implementeringen og derfor også resonneringen (spørsmål b).

Som jeg sa tidligere, så brukte 15 av 16 elever tegningen sin i implementeringsfasen. Erik (gruppe C) var den ene av de 16 elever som ikke brukte tegning under implementeringsfasen. Etter jeg har lest oppgaven for elevene 2. gang, kom Erik med kommentaren «Jeg har funnet det ut jeg.» (linjenummer 659) og ville vise løsningen sin. Det han sier i transkripsjonen er ikke det samme som hva tegningen viser, det er fordi han teller videre på noe han allerede har begynt å tegne idet han starter forklaringen (linjenummer 665-666).



Erik: Jeg har funnet det med en gang jeg. Først tar vi fire (**starter å tegne**). Så tre, så fire og så tre ... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 (**Tegner streker og sirkler**).

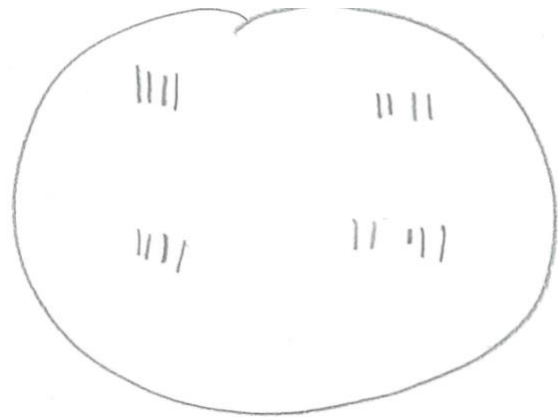


Bilde 21: Erik sin tegning, oppgave 2

Forskjellen mellom Erik sin fremgangsmåte og de forrige eksemplene er at Erik vet svaret før han starter å tegne. Jeg vet at Erik kan svaret fordi han selv uttrykker «Jeg har funnet det ut jeg», etter jeg har lest oppgaveteksten for hele gruppen for 2. gang. Opplesningene skjedde rett etter hverandre og da ingen ennå hadde startet å tegne. Derfor blir tegningen en støtte for Erik i sin konklusjon og kommer derfor inn i konklusjonsfasen av resonneringssekvensen. Funksjonen til tegningen (spørsmål b) blir en støtte for konklusjonen til Erik og en beskrivelse av strategien hans.

### 5.3.2 Tegning og CMR

Gruppen A, som resonnerte med CMR på oppgave 2, brukte tegning som støtte for system på begge oppgavene sine. I oppgave 2 startet alle tre elevene å tegne samtidig. Alle tegningene til gruppe A var så og si identiske. Derfor har jeg valgt ut tegningen til Mari som eksempeltegning for gruppe A.



Bilde 22: Mari sin tegning, oppgave 2

Etter hele gruppen har testet ut forskjellige gangetabeller for å se om «det går opp», sier Mari (linjenummer 59 & 67-68): «(59) Går det an å ha med sånn halve blader da? (67-68). For det er eneste måten det kan gå opp på tror jeg». Denne strategien fører til at Mari og resten av gruppen starter å tegne. Dette viser at tegningen brukes i implementeringsfasen av resonneringsprosessen (spørsmål a). På linjenummer 72-79 er det vist når og i hvilken rekkefølge hver enkelt i gruppen starter med sin tegning.

### Mari starter å tegne (Tegning A1 oppgave 2)

Mari: OK! Så hvis vi gjør sånn her da: Sneglen Nils har spist 17 blader

Isak: Jaa.

Mari: Da sier vi sånn, en to, en to, en to, en to. Da her jeg åtte. Sånn sånn sånn sånn.

Odd: Åh, nå skjønner jeg. **Starter å tegne: tegning A2 oppgave 2. Tegner først den nederste.**

Mari: Hva har vi her?

Isak: veink, veink, veink. (**starter å tegne. Når han seier «veink» setter han en strek på tegningen sin**)

Fordi de starter implementeringen av strategi, førte det til spørsmålet, «Kan det være forskjellig mengde han har spist hver dag?» (linjenummer 84, Mari). Funksjonen til tegningen (forskningsspørsmål b) var at tegningen førte dem videre til en konklusjon. Noe som støtter at tegningene deres ble kategorisert som *støtte for system*.

I oppgave 3 bruker gruppe A også tegning som støtte for system. De starter å tegne i implementeringsfasen av resonneringssekvensen (forskningsspørsmål a). Tegningen har som funksjon at den hjelper elevene å holde oversikt over gjenstandene de tegner. De vet at de kommer til et svar ved å bruke biler og sykler. Tegningen er en støtte for å holde system i antall gjenstander som skal tegnes.

## 6. Diskusjon

I forrige kapittel ble funnene fra datainnsamlingen og analyseprosessen presentert med eksempler fra analysen. Kapittel 6 er diskusjon og drøfting av ulike ting relatert til hele forskningsprosessen. Først vil jeg bruke funnene til å gi et svar på problemstillingen. Deretter vil funnene bli sett i lys av tidligere forskning. Videre vil jeg ta opp pedagogiske implikasjoner av studien og funnene. Til slutt setter jeg studiens metode i et kritisk lys. Her vil feilkilder og mulige endringer som kanskje kunne bli gjort, blir presentert.

### 6.1 Oppsummering av funn og tidligere forskning

Problemstillingen for mitt forskningsprosjekt har vært: *Hvordan bruker elever tegning i matematisk resonnering i arbeid med problemløsning?* For å svare på PS ble innsamlet data sett opp mot to rammeverk, Saundry & Nicol (2006) sitt rammeverk om tegning og Lithner (2008) sitt rammeverk for resonnering. Datamaterialet ble analysert i hvert av rammeverkene. Først ble de analysert hver for seg, så ble de sett på sammen. Funnene fra analysen hvor rammeverkene blir brukt separat, viser at 5 av 6 (ca. 83%) av elevgruppene tok i bruk AR som resonneringstype. For resonneringstypen AR finnes det tre underkategorier og det ble registrert to underkategorier i funnene; kjent AR og avgrensede AR. Kjent AR ble brukt av 60 % (3 av 5) av gruppene, mens avgrensede AR ble brukt av 40 % (2 av 5) av gruppene. Det var bare én gruppe som tok i bruk CMR. Det ble totalt levert inn 18 besvarelser fra de tre elevgruppene. Av de 18 besvarelsene var det 16 elever som tegnet (ca. 89 %) og 2 som ikke tegnet (ca. 11 %). Jeg fordelte alle tegninger inn i to kategorier, støtte for system og tegning som manipulativ. 11 av 16 tegninger ble kategorisert som støtte for system og gjenværende tegninger ble kategorisert som tegning som manipulativ. For å relatere funnene opp mot problemstillingen, lagde jeg noen tilleggs spørsmål til problemstillingen:

- a. Når i resonneringsprosessen brukes tegning?
- b. Hva slags funksjon har tegningene i resonneringsprosessen, i lys av spørsmål a?

Jeg fant ut at tegning for det meste ble brukt under strategiimplementeringen i resonneringsprosessen. Et unntak var en elev som tok i bruk tegning etter han hadde funnet en løsning. Det var Erik (bilde 21, side 49) og for han ble tegning en måte å kommunisere konklusjonen sin på. Jeg ser en usikkerhet rundt når elevene startet å tegne, for det er ikke alltid like tydelig om det skjer i implementeringsfasen eller strategivalgfasen. Et eksempel på dette er når Inge arbeider med oppgave 3. Han sier ingenting før han starter å tegne. Fordi Inge (Bilde 19, side 48) ikke uttrykker noe om hva hans strategi er eller om han har en strategi, er det vanskelig å vite om han tegner for å finne en strategi eller om han tegner for å implementere strategien sin. Det er noen elever som uttrykker hva strategien er eller sier ord som indikerer at de har en strategi. Eksempler på slike ord er «nå skjønner jeg» eller «jaa». For alle funn som var relatert til når elevene startet å tegne, ser jeg at tegning var en støtte for elevenes resonnering. Støtten var uavhengig av om det var i problemfasen, strategivalgfasen, implementeringsfasen eller konklusjonsfasen av resonneringen tegningen ble tatt i bruk. Tegning som støtte for system ble brukt i alle resonneringstypene som kom frem, altså både for kjent AR, avgrensede AR og CMR. Tegning som manipulativ ble bare registrert hos gruppe B, som brukte kjent AR som resonneringstype. Derfor ser jeg ikke noe forskjell mellom den gruppen som brukte CMR og de andre gruppene.

Funnene fra del I og del II av analyseprosessen, hvor rammeverkene ble brukt hver for seg, har vist korrespondanse med tidligere forskning. Flere av Lithner (2006) sine tidligere studier viser til at IR er den mest dominerende av de to hovedtypene for resonnering i rammeverket hans. Lithner sin forskning stemmer overens med resultatene fra min studie hvor 5 av 6 grupper tok i bruk resonnering innenfor kategorien IR, spesifikt kjent og avgrensede AR. Tidligere forskning sier også at CMR er en resonneringstype som sjelden oppstår og blir brukt i møte med oppgaver og problemløsning i matematikk. Resultat fra tidligere forskning er likt med min studies resultater, hvor bare én gruppe brukte CMR. En ting som har vært en gjennomgående usikkerhet for meg, og som ikke kommer tydelig frem i forskning om og rundt rammeverket til Lithner (2008), er om det er mulig å bevege seg mellom ulike resonneringstyper i en og samme resonneringssekvens. Altså om rammeverket til Lithner kan ha en dynamisk tolkning, hvor for eksempel elever kan starte å resonnerer med kjent AR, men senere i resonneringsprosessen gjøre en vending som gjør at de ender opp med å bruke CMR. Dette var et spørsmål jeg selv tenkte over da jeg analyserte gruppe A, som jeg har analysert til å bruke CMR. Fordi de starter med noe de kjenner, gangetabellen og at noe skal gå opp. Siden dette ikke fungerer for dem, så må de gjøre endringer på måten de tenker og ender derfor opp med å tenke mer CMR.

Det er også blitt gjort relativt lite forskning med Lithner (2008) sitt rammeverk på barneskoleelever. Om dette har noe å si for resultatene i denne studien er vanskelig å si. Jeg spør meg selv om min studie vil ha samme statistiske resultat som tidligere forskning, som oftest er blitt gjort på elever fra ungdomstrinnet og oppover. Siden det er mangel på forskning med Lithner sitt rammeverk på barneskolen, er det positivt at jeg nå er med på å tilby resultater fra en studie på barneskolen. Studien min er også et bidrag til forskning på matematisk resonnering, spesielt rettet mot elever i den norske barneskolen. Lithner sitt rammeverk har også for det meste blitt gjennomført og analysert på enkeltelever. Den sosiokulturelle praksisen blir mer og mer tatt i bruk i Norge. Det blir pålagt fra overordnet del i læreplanen at skolen skal legge til rette for sosial læring og utvikling (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Det blir derfor viktig med mer forskning på matematisk resonnering i grupper og klasseromsetninger, dette er noe min studie bidrar med.

I analysen viste jeg til to tilfeller av elevbesvarelser (Bilde 11 og 12, side 43) som ikke ble kategorisert som tegninger i min studie. Selv om de ikke ble det finnes det fortsatt elementer i begge tegningene som kan sees i lys med Saundry & Nicol (2006) sitt rammeverk. I besvarelsen til Hans ser man både en støtte for system (bokstavene som viser hvilken gjenstand det gjelder) og at tegningen er blitt manipulert med at noe er visket bort. Dette viser at Hans sin tegning kan ha en flytende overgang mellom to kategorier i selve rammeverket som er interessant. Dette viser at det finnes ikke bastante besvarelser som er enten eller. Hovedfunnet for studien er at tegning kan være en støtte for elevers resonnering og kan inntreffe når som helst i resonneringssekvensen. Min studie viser spesielt at tegning blir mest brukt i implementeringsfasen av resonneringen. At tegning blir brukt som støtte for å kommunisere, oppdage og uttrykke hva elever tenker, er allerede vist i tidligere forskning (Whitin & Whitin, 2001; Woleck, 2001; Saundry & Nicol, 2006). I tillegg bekrefter analysen og funnene at det er når man studerer samtalen elevene har at resonneringen kommer til syne (Woleck, 2001).

## 6.2 Pedagogiske implikasjoner av studien

I denne studien er det blitt brukt to ulike rammeverk som er helt forskjellig fra hverandre for å se om man kan finne sammenhenger mellom elevers tegninger og resonneringen de gjør i matematikk. De to rammeverkene har ikke blitt sammenlignet i min studie fordi det ikke ligger innenfor problemstillingens rammer, men jeg ser at rammeverkene kan utfylle hverandre. Lithner (2008) sitt begrepsapparat om resonnering hos elever gir lærere mulighet til å identifisere ulike resonneringstyper i elevers arbeid. Dette er viktig for alle lærere fordi en av de viktigste oppgaver lærere har, er å hjelpe elever å resonnerer godt. For at lærere skal kunne hjelpe til med det, må man som lærer vite hva som er god resonnering og resonnering som kan diskuteres med hele klassen. Når man som lærere kan oppdage når elever tar i bruk kreativitet i møte med problemer i matematikk, kan lærere dra nytte av å ha en samtale rundt de kreative løsningsmetodene. Å resonnerer kreativt eller imiterende kan begge to være gode måter å resonnerer på, men som tidligere forskning viser så har elever best utbytte av undervisning som fremmer kreativ resonnering (Jonsson et al., 2014). Derfor er det en god egenskap å kunne identifisere når elever gjør kreativ resonnering (CMR).

Tegninger, som besvarelser, er en god samtalestarter i alle klasserom. Lærere kan ta i bruk elevers tegninger i en samtale med klassen og dermed vise hvordan forskjellige elever har løst en og samme oppgave. Dette kan være med på å utvide klassen sitt perspektiv på flere løsningsmetoder. Slike samtaler kan også være nyttig for å vise enklere og mer brukbare løsningsmetoder, og slik gi større forståelse til elever som tenker komplisert eller har matematikkvansker. En lærer kan også forklare at tegning kan være en støtte for elever som ikke kommer seg videre med en oppgave. Tegning kan altså være en støtte for å både komme seg videre, teste ut og feile på strategier og få kommunisert hva man tenker. Den viktigste pedagogiske implikasjonen en lærer burde ta med seg fra denne forskningen, er at det er i samtalen som skjer, mellom elever eller elever og lærere, hvor lærer ser resonnering og hvilken funksjon en tegning har hatt for den resonneringen. Dette belyser og bekrefter det Woleck (2001) sier om at det er viktig som lærer å føre samtaler med elevene, slik at både lærere og medelever i klasserommet kan dra nytte av hva enkeltelever har arbeidet med.

## 6.3 Studiens begrensninger og metodekritikk

Det er dukket opp flere faktorer som har virket begrensende på studien og faktorer jeg skulle ønsket å ha gjort eller gjennomført i forkant av både innsamling og planlegging. En faktor jeg tenkte mye på under analyseringsprosessen var at jeg analyserte resonneringen i grupper mens tegningene ble analysert individuelt. Noe som førte til at da jeg skulle se rammeverkene i lys av hverandre, måtte jeg stoppe opp og tenke nøye over hvordan og hva jeg faktisk hadde av datamateriale. Problematikken med å se på gruppe vs. individer var at jeg følte det kunne ha en viss påvirkning på hele studiens kredibilitet. Samtidig er dette realiteter man møter som lærer i praksis. Derfor ser jeg på analyseprosessen som noe lærerikt med tanke på at jeg skal ut i læreryrket selv. Gjennomførelsen av innsamlingen kan også ha begrensninger. Det er blant annet ytre faktorer som en ikke kan forutse. Dessuten hadde ikke jeg, som forsker, nok erfaring med å observere. For eksempel kan det ha vært at jeg påvirket elevenes resonnering uten at det var min intensjon. Ytre faktorer som kan ha virket begrensende på studien er lyder elevene hørte da de satt og arbeider, andre personer som kom inn på rommet under innsamling eller noe elevene oppdaget i rommet. Min studie var heller ingen

langtidsstudie og jeg hadde begrenset med tid til hver gruppe som ble observert og intervjuet.

Noe jeg ville gjort annerledes, om jeg hadde hatt muligheten, er å ha gjennomført et pilotprosjekt. Jeg trodde ikke det var behov for det siden jeg hadde erfaring fra praksis når det kom til tegning, problemløsning og intervju. Observasjon var noe jeg hadde lite erfaring med, men tenkte det ville gå bra. Studien har gitt resultater, men jeg hadde kanskje vært mer forberedt om et pilotprosjekt hadde vært gjennomført. Det kunne også ha vært en positiv faktor når det gjelder studiens troverdighet. Andre praktiske ting jeg kanskje hadde oppdaget ved et pilotprosjekt, er at det lager mye lyd når elevene sitter og tegner på et tynt A4-ark på en pult. Da hadde jeg gjort meg erfaringer med de forstyrrende lydene og kanskje tatt med noe underlag eller en tegneblokk til elevene. En siste erfaring som jeg kanskje også hadde fått, er tidsperspektivet av å ha gruppeobservasjon og intervju av elever i grupper på tre. Tiden gikk fort under innsamlingen, noe som gjorde at det ikke var rom for å komme med så utdypende spørsmål som jeg kanskje hadde ønsket. Dette kan også ha vært en fordel med tanke på at jeg ikke fikk tid til å påvirke deres resonnering eller forklaringer.

## 7. Avslutning

I denne studien har jeg sett på hvordan elever bruker tegning i matematisk resonnering i arbeid med problemløsning. Jeg har observert hele klasser for å finne ut hvem som tar i bruk tegning, for så å ta med tre grupper med tre elever for videre observasjon og intervju. Datamaterialet, som består av tegninger, lydopptak og notater jeg selv har skrevet, har blitt analysert opp mot Lithner (2008) sitt rammeverk og resonnering og Saundry & Nicol (2006) sitt rammeverk om tegninger. Ved å se på elevenes resonneringssekvens og tegningene separat og deretter sammen, håpet jeg på å finne en sammenheng mellom resonneringen og tegningene. Samtidig ville jeg vise hvordan det var mulig å bruke to rammeverk sammen for å besvare problemstillingen. Følgende tilleggsspørsmål har vært stilt opp mot problemstillingen: (a) *Når i resonneringsprosessen brukes tegning?* (b) *Hva slags funksjon har tegningene i resonneringsprosessen, i lys av spørsmål a?* Funnene mine viser at elevene brukte tegning som en aktiv del av resonneringsprosessen. De fleste tok i bruk tegning når de hadde funnet en strategi og ville implementere den eller prøve den ut. Det var ett unntak hvor en elev brukte tegning for å kommunisere konklusjonen sin, han brukte da tegning i konklusjonsfasen av resonneringssekvensen.

I etterkant av analysen og resultatene er det en annen ting jeg har reflektert over. Det er viktigheten med å la elever resonnere sammen i grupper og deretter ha en samtale om hva de har gjort. For å kunne knytte resonnering og tegninger elever konstruerer, må man som lærer vite hvilken funksjon tegningen har hatt. Her spiller det muntlige språket og det sosiokulturelle miljøet en viktig rolle både for lærere, hele klassen og enkeltelever.

Underveis i forskningsprosessen har det dukket opp spørsmål og ønsker for videre forskning. En problematikk som dukket opp flere ganger, var at jeg analyserte både enkeltelever og grupper med elever. Det hadde derfor vært spennende å se resultatene av en studie som holdt seg til en av delene. Altså enten elever som resonnerer sammen i grupper og tegner en felles tegning, eller enkeltelevers resonnering og tegning. Min studie er også en kort studie. Jeg skulle gjerne hatt mye lengre tid med både elevene, og forske videre med flere datainnsamlinger. Da kunne jeg fått mer datamateriale å analysere på. Jeg mener en langtidsstudie om elever resonnering og tegning hadde vært spennende og viktig av flere grunner. En grunn er at man kan kanskje se en utvikling av tegning og resonnering over lengre tid. Forandres resonneringstype og type tegning over tid? Bli tegningene mer detaljerte eller blir de enklere? Har det ringvirkninger på resonneringen? Det er gjort mye forskning med Lithner (2008) sitt rammeverk på elever fra ungdomsskolen og høyere utdanning, og lite når det kommer til forskning med Lithner sitt rammeverk på barneskoler. Jeg mener det hadde vært en fordel med mer forskning med det rammeverket på barneskoler. Det kan finnes statistiske forskjeller mellom utdanningsnivåene som ikke er blitt oppdaget fordi trykket av forskning har foregått på høyt nivå. Med dette mener jeg at det er blitt vist gjennom tidligere forskning at AR forekommer mer hyppig enn CMR. Statistiske resultatet kan være forskjellig på barneskolen hvor barn fortsatt er leken og, kanskje har mer fantasi og er kreative enn når de har vært i skolesystemet over en lengre periode.

Jeg mener det burde være forsket videre på kreativ resonnering i norsk barneskole, med utgangspunkt i Lithner (2008) sitt rammeverk. En studie hvor det blir forsket på hvordan en lærer kan bruke elevs kreativitet som et verktøy i klasserommet, kan være til fordel for mange elever. Det er blitt gjort noen lignende studier tidligere, da med andre

rammeverk. Det hadde vært interessant å se om det var mulig med Lithner sitt rammeverk. Jeg håper denne studien kan være med å sette søkelys på mer forskning på resonnering og tegning i barneskolen og at det er nyttig for lærere å kunne samtale og kjenne igjen resonnering i elevene sine tegninger. Resultat av studien viser at for den gruppen som jeg forsket på, var AR mer fremtredende enn CMR. Det kan være andre resultater vil dukke opp om det blir gjort mer forskning spesielt rettet mot elever på barneskolen.



## 8. Referanseliste

- Alseth, I. (2019). *Med blanke ark og farjestifter tel: En kvalitativ studie om tre andreklassingers bruk av tegning i problemløsningoppgaver.* [Masteroppgave, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet]. Ntnuopen.  
<https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/bitstream/handle/11250/2610454/no.ntnu%3Ainspera%3A2309759.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(4), 348–370.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.11.001>
- Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International journal of mathematical education in science and technology*, 39(1), 1–12. <https://doi.org/10.1080/00207390701464675>
- Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational studies in mathematics*, 75(1), 89–105. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9242-9>
- Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2010). Participating in classroom mathematical practices. I A. Sfard, K. Gravemeijer, & E. Yackel (Red.), *A journey in mathematics education research* (s. 117–163). Springer, Netherlands.  
[https://doi.org/10.1007/978-90-481-9729-3\\_9](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9729-3_9)
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational psychologist*, 31(3–4), 175–190. <https://doi.org/10.1080/00461520.1996.9653265>
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (Eighth edition). Routledge.
- Dahl, H. (2019). "He's so fast at drawing" – Children's use of drawings as a tool to solve word problems in multiplication and division. In *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.
- Datatilsynet. (2020, 28. mars). *Lydopptak av samtaler*. Hentet 14. februar 2022 fra <https://www.datatilsynet.no/personvern-pa-ulike-omrader/overvaking-og-sporing/lydopptak/>
- Edens, K., & Potter, E. (2007). The relationship of drawing and mathematical problem solving: Draw for math tasks. *Studies in art education*, 48(3), 282–298.  
<https://doi.org/10.1080/00393541.2007.11650106>
- English, L. D. (Red.). (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. L. Erlbaum Associates.
- English, L. D. (2004). *Mathematical and analogical reasoning of young learners*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Ernest, P. (1991). *Investigation, problem solving and pedagogy* (s. 295–310). Routledge.
- Ernest, P. (2002). *[The] Philosophy of mathematics education*. Taylor and Francis.
- Guba, E. G. (1981). ERIC/ECTJ annual review Paper: Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational communication and technology*, 29(2), 75–91.
- Hershkowitz, R., Tabach, M., & Dreyfus, T. (2017). Creative reasoning and shifts of knowledge in the mathematics classroom. *ZDM*, 49(1), 25–36.  
<https://doi.org/10.1007/s11858-016-0816-6>

- Jeannotte, D & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational studies in mathematics*, 96(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The journal of mathematical behavior*, 36, 20–32. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003>
- Jäder, J., Sidenvall, J., & Sumpter, L. (2017). Students' mathematical reasoning and beliefs in non-routine task solving. *International journal of science and mathematics education*, 15(4), 759–776. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9712-3>
- Kleven, A. (2019). *Tegning som verktøy i matematikk: en kvalitativ undersøkelse av 23 elevers bruk av tegning i problemløsning*. [Masteroppgave, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet]. Ntnuopen. <https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/handle/11250/2610300>
- Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M., & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju*. Gyldendal akademisk.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical thinking and learning*, 7(3), 231–258. [https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703\\_3](https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3)
- Levenson, E. (2011). Exploring collective mathematical creativity in elementary school. *The journal of creative behavior*, 45(3), 215–234. <https://doi.org/10.1002/j.2162-6057.2011.tb01428.x>
- Liljekvist, Y. (2014). *Lärande i matematik: om resonemang och matematikuppgifters egenskaper*. [Doktoravhandling, Karlstad universiry studies, Sverige]. kau. <http://kau.diva-portal.org/smash/get/diva2:696528/FULLTEXT01.pdf>
- Lithner, J. (2000a). Mathematical reasoning and familiar procedures. *International journal of mathematical education in science and technology*, 31(1), 83–95. <https://doi.org/10.1080/002073900287417>
- Lithner, J. (2000b). Mathematical reasoning in task solving. *Educational studies in mathematics*, 41(2), 165–190.
- Lithner, J. (2006). A framework for analyzing creative and imitative mathematical reasoning. <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.466.7119&rep=rep1&type=pdf>
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational studies in mathematics*, 67(3), 255–276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Lithner, J. (2015). Learning mathematics by creative or imitative reasoning. I S. J. Cho (Red.), *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (s. 487–506). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6\\_28](https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_28)
- Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskurs. *Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning* 7(2), 9–15
- Polya, G. (1954). *Introduction and analogy in mathematics: Volume 1 of mathematics and plausible reasoning*. Princeton university press, New Jersey
- Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American mathematical monthly*, 105(3), 252–255. <https://doi.org/10.1080/00029890.1998.12004875>
- Rienecker, L., Stray Jørgensen, P., Skov, S., & Landaas, W. (2013). *Den gode oppgaven håndbok i oppgaveskriving på universitet og høyskole*. Fagbokforl.

- Saundry, C. & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures. I *proceedings of the 30<sup>th</sup> conference of the international group for psychology of mathematics education*. International group for psychology of mathematics education, Prague.
- Sterner, G., Wolff, U., & Helenius, O. (2020). Reasoning about representations: Effects of an early math intervention. *Scandinavian journal of educational research*, 64(5), 782–800. <https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1600579>
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal of research in mathematics education* 38(3), 289-321.
- Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning and proving. *For the learning of mathematics*, 28(1), 9-16
- Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of mathematics teacher education*, 11(4), 307–332. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9>
- Sumpter, L., & Hedefalk, M. (2015). Preschool children's collective mathematical reasoning during free outdoor play. *The Journal of mathematical behavior*, 39, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.03.006>
- Utdanningsdirektoratet. (2020a). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn* (MAT01.05). <https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-1k20/MAT01-05.pdf?lang=nob>
- Utdanningsdirektoratet. (2020b). *Overordnet del - verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. <https://www.udir.no/1k20/overordnet-del/>
- Yackel, E & Henna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 227-249). National council of teachers of mathematics
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard university press, Cambridge, MA.
- Whitin, P. & Whitin, D. (2001) Using literature to invite mathematical representations. I A. A. Cuoco & R. R. Curcio (Red.), *the roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook* (s. 228-237). National council of teachers of mathematics.
- Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. I A. A. Cuoco & R. R. Curcio (Red.), *the roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook* (s. 215-227). National council of teachers of mathematics.



## 9.Vedlegg

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Vedlegg 2: Søknad til NSD

Vedlegg 3: Godkjennelse fra NSD

Vedlegg 4: Intervjuguide

# Vil du delta i forskningsprosjektet

## «*Matematisk resonnering i matematikk*»

Dette er et spørsmål til deg om å la barnet ditt delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se etter matematisk resonnering i elevers arbeid med problemløsning. I dette skrevet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

### **Formål**

Formålet med studien er å se om man kan identifisere matematisk resonnering i det elever produserer i møte med problemløsningsoppgaver. Dette kan være tegninger, tabeller, tekster, tall og lignende. Studien er en masteravhandling for siste året på lærerutdanningen.

### **Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**

NTNU er ansvarlig for prosjektet.

### **Hvorfor får du spørsmål om å delta?**

Jeg ønsker å undersøke matematisk resonnering hos elever på 3. trinn og hva de produserer i møte med problemløsningsoppgaver, jeg trenger derfor et utvalg elever og kontaktet din matematikklærer for å høre om å få gjennomført undersøkelsen min i deres klasse.

### **Hva innebærer det for deg å delta?**

Dersom du velger å la ditt barn delta i denne studien, innebærer det at jeg først gjennomfører en observasjon av hele klassen for å se hvilke metoder elevene tar i bruk i møte med problemløsningsoppgaver. Ut fra observasjonen vil jeg kunne velge ut enkeltelever til en gruppeobservasjon og eventuelt gruppeintervju (2-3 elever). Det er dermed ikke 100% sikkert at det er ditt barn som deltar når det blir tatt taleopptak. Under første observasjonen (hele klassen) vil det ikke bli tatt vare på noe elevarbeid. Under gruppeobservasjonen og intervjuet vil det bli tatt lydopptak og de produserte metodene vil bli tatt vare på (dvs. tegninger, tabeller, tekster osv.). Personopplysninger av ditt barn og skolen det går på vil bli anonymisert. Dersom foreldre ønsker å mer informasjon ang. deltagelse finnes kontaktinformasjon på neste side av dokumentet.

Barna vil før en eventuell observasjon og intervju bli spurt om de vil delta, de velger selv om de vil eller ikke. Så selv om foreldre har samtykket til deltagelse kan fortsatt eleven velge å ikke delta.

### **Det er frivillig å delta**

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du og barnet ditt velger å delta, kan dere når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alt barnet har vært med å produsere vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller barnet hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke deres samtykke.

## **Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrevet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Navnet og kontaktopplysningene dine (underskrift på samtykkeskjema) vil bli erstattet med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data, datamaterialet vil bli kryptert og oppbevart innelåst.

## **Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?**

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er ved utgangen av mai 2021. Personopplysninger og lydopptak vil bli sletter og materiale som er produsert og samtykkeskjemaer vil bli makulert.

## **Dine rettigheter**

Så lenge du eller barnet ditt kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

## **Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**

Vi behandler opplysninger om deg og barnet ditt basert på ditt og barnets samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

## **Hvor kan jeg finne ut mer?**

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Anne Dorthea B. Austevoll ([anned@ntnu.no](mailto:anned@ntnu.no))
- NTNU ved Kristin Krogh Arnesen ([kristin.arnesen@ntnu.no](mailto:kristin.arnesen@ntnu.no))
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost ([personverntjenester@nsd.no](mailto:personverntjenester@nsd.no)) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

*Kristin Krogh Arnesen*  
(Forsker/veileder)

Anne Dorthea B. Austevoll

# Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Matematisk resonnering i matematikk*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at barnet mitt kan:

- delta i gruppeobservasjon/gruppeintervju med lydopptak
- ikke delta i gruppeobservasjon/gruppeintervju med lydopptak

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

-----  
(Signert av prosjektdeltakers forelder, dato)



# NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

## Meldeskjema 594424

### Sist oppdatert

01.10.2020

### Hvilke personopplysninger skal du behandle?

---

- Navn (også ved signatur/samtykke)
- Lydopptak av personer

### Type opplysninger

---

### Skal du behandle særlige kategorier personopplysninger eller personopplysninger om straffedommer eller lovovertrедelser?

Nei

### Prosjektinformasjon

---

#### Prosjekttittel

Matematisk resonnering i elevers tegninger

#### Prosjektbeskrivelse

Formålet med studien er å undersøke hvordan man kan se etter matematisk resonnering i elevers tegninger, hvor jeg skal prøve å utarbeide rammeverket til Saundry & Nicol (2006). Studien vil være en kvalitativ studie av elever på 3.trinn. Nåværende problemstillingen er: Hvordan kan man se etter indikatorer for matematisk resonnering i 3.-klassingers tegninger?

#### Begrunn behovet for å behandle personopplysningene

Jeg har tenkt å burke lydopptak under oppgaveintervju med elever på 3. trinn. For at dette intervjuet skal bli mest naturlig for elevene vil jeg ha fokus på å være i samtale med dem og slippe å tenke på å notere ned hva de sier. I tillegg trenger jeg å samle inn navn for å vite hvem som har samtykket til at barnet deres kan delta i studien min.

### **Ekstern finansiering**

#### **Type prosjekt**

Studentprosjekt, masterstudium

#### **Kontaktinformasjon, student**

Anne Dorthea B. Austevoll, anned93@gmail.com, tlf: 93483162

### **Behandlingsansvar**

---

#### **Behandlingsansvarlig institusjon**

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) /  
Institutt for lærerutdanning

#### **Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)**

Kristin Krogh Arnesen, kristin.arnesen@ntnu.no, tlf: 73412948

#### **Skal behandlingsansvaret deles med andre institusjoner (felles behandlingsansvarlige)?**

Nei

### **Utvalg 1**

---

#### **Beskriv utvalget**

Elever på småtrinnet.

#### **Rekruttering eller trekking av utvalget**

Først vil jeg foreta en observasjon av en hel klasse. Læreren vil da gi elevene en problemløsningsoppgave de skal løse på en selvvalgt måte. Her kan jeg observere hvem av elevene som tar tegning i bruk som metode. Ut fra de observasjonene kan jeg ta elever i grupper på 3 og 3 ut til et oppgaveintervju.

#### **Alder**

5 - 8

#### **Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?**

Nei

#### **Personopplysninger for utvalg 1**

- Navn (også ved signatur/samtykke)
- Lydopptak av personer

### **Hvordan samler du inn data fra utvalg 1?**

#### **Gruppeintervju**

#### **Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger**

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

#### **Hvem samtykker for barn under 16 år?**

Foreldre/foresatte

#### **Informasjon for utvalg 1**

#### **Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?**

Ja

#### **Hvordan?**

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

#### **Tredjepersoner**

---

#### **Skal du behandle personopplysninger om tredjepersoner?**

Nei

#### **Dokumentasjon**

---

#### **Hvordan dokumenteres samtykkene?**

- Manuelt (papir)

#### **Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?**

Samtykket kan trekkes ved å kontakte veileder eller student på mail eller tlf. Selv om foreldre har samtykket for barna sine bestemmer eleven selv om å delta eller ikke i undersøkelsen.

#### **Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet opplysninger om seg selv?**

De registrerte kan få tilgang til transkripsjoner av lydopptak.

**Totalt antall registrerte i prosjektet**

1-99

**Tillatelser**

---

**Skal du innhente følgende godkjenninger eller tillatelser for prosjektet?**

**Behandling**

---

**Hvor behandles opplysningene?**

- Mobile enheter tilhørende behandlingsansvarlig institusjon

**Hvem behandler/har tilgang til opplysningene?**

- Prosjektansvarlig
- Student (studentprosjekt)

**Tilgjengeliggjøres opplysningene utenfor EU/EØS til en tredjestat eller internasjonal organisasjon?**

Nei

**Sikkerhet**

---

**Oppbevares personopplysningene atskilt fra øvrige data (koblingsnøkkel)?**

Ja

**Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?**

- opplysningene krypteres under lagring
- Adgangsbegrensning

**Varighet**

---

**Prosjektperiode**

01.09.2020 - 31.05.2021

**Skal data med personopplysninger oppbevares utover prosjektperioden?**

Nei, alle data slettes innen prosjektslutt

**Vil de registrerte kunne identifiseres (direkte eller indirekte) i oppgave/avhandling/øvrige publikasjoner fra prosjektet?**

Nei

**Tilleggsopplysninger**

---



## **NSD sin vurdering**

### **Prosjekttittel**

Matematisk resonnering i elevs tegninger

### **Referansenummer**

594424

### **Registrert**

22.09.2020 av Anne Dorthea B. Austevoll - annedb@stud.ntnu.no

### **Behandlingsansvarlig institusjon**

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) /  
Institutt for lærerutdanning

### **Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)**

Kristin Krogh Arnesen, kristin.arnesen@ntnu.no, tlf: 73412948

### **Type prosjekt**

Studentprosjekt, masterstudium

### **Kontaktinformasjon, student**

Anne Dorthea B. Austevoll, anned93@gmail.com, tlf: 93483162

### **Prosjektperiode**

01.09.2020 - 31.05.2021

### **Status**

02.10.2020 - Vurdert

### **Vurdering (1)**

---

#### **02.10.2020 - Vurdert**

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet



02.10.2020 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

#### MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

[https://nsd.no/personvernombud/meld\\_prosjekt/meld\\_endringer.html](https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html)

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

#### TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.05.2021.

#### LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna/elevne. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som foresatte kan trekke tilbake. Barna/elevne vil også samtykke til deltakelse.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

#### PERSONVERNPRINSIPPER

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

#### DE REGISTRERTES RETTIGHETER

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

#### FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

#### OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen  
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)



# Intervjuguide

Elevene kommer til å få tildelt problemløsningsoppgaver som de, forhåpentligvis, vil løse med tegning som metode. For å få en forståelse av hva elevene selv legger i tegningene sine, og for å høre hvordan de beskriver matematikken(resonneringen) i tegningene, kommer jeg til å stille utdypende spørsmål rundt hva de gjør.

Om elevene sitter fast, og ikke komme noen vei, er dette eksempler på spørsmål som kan få dem i gang. Før disse spørsmålene kommer vil jeg gi elevene tid til å tenke gjennom oppgaven selv og prøve å komme frem til en metode uten min påvirkning.

- Les oppgaven for dere selv en gang til.
- Hva er viktige informasjon i oppgaven?

Spørsmål som kan stilles etter elevene er ferdig med en oppgave:

- Hva tegnet du her?
- Hvordan hjalp dette deg med å finne svaret?
- Hva gjorde du her?
- Hvorfor tegnet du denne?
- Jeg så du tenkte lenge og visket ut det første du tegnet, kan du fortelle meg hva som skjedde?
- Hvis du skulle forklart noen andre i klassen hvordan du gjorde det, hva ville du sagt da?
- Kan du si/vise det en gang til for meg?

