Masteroppgave

Mai, 2021

Kristian Sandland

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns - og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Kristian Sandland

Cuisenairestaver i arbeidet med brøk

En kvalitativ studie av 5. trinn elever tolkninger av cuisenairestaver i arbeidet med brøk

Mai 2021

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Cuisenairestaver i arbeidet med brøk

En kvalitativ studie av 5. trinn elever tolkninger av cuisenairestaver i arbeidet med brøk

Kristian Sandland

Matematikkdidaktikk (1-7)
Innlevert: Mai 2021
Hovedveileder: Kristin Krogh Arnesen

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for lærerutdanning

Forord

Etter 6 år på lærerutdanningen til NTNU i Trondheim, markerer denne mastergradavhandlingen avslutningen på studietiden. Jeg vil se tilbake på disse seks årene av mitt liv som svært lærerike, fylt med glede og mestring. Gjennom denne tiden har jeg utviklet meg både faglig og personlig. I arbeidet med mastergradavhandlingen har jeg ikke bare opparbeidet meg kompetanse omkring brøk, konkretiseringsmateriell og læring i matematikk generelt, men også faglig kompetanse omkring hvordan et forskningsarbeid kan utføres. Denne kompetansen anses som nyttig i min fremtidige karriere som matematikklærer. Totalt sett ser jeg tilbake på de siste årene som en periode der jeg har hatt en bratt læringskurve. Jeg har opparbeidet meg erfaringer og motivasjon for fremtiden.

Det er mange rundt meg som fortjener en takk for støtten jeg har mottatt i løpet av studieløpet. Først og fremst vil jeg takke min veileder Kristin Krogh Arnesen for konstruktive tilbakemeldinger, disse har blitt mottatt med stor takknemmelighet.

Jeg vil også takke min familie som har vært støttende gjennom perioden. En ekstra takk går til min bror Åsmund som alltid er behjelpelig med sine gode råd og erfaringer, og min samboer Julie som har vært med på en emosjonell berg og dalbanen de siste årene i studieløpet.

Avslutningsvis vil jeg også takke for alle de gode vennskapene som jeg har fått i studietiden. Vi har vært gjennom mye i denne perioden, både sportslig og utenomsportslig.

Mange takk!

Kristian Sandland
Trondheim, mai, 2021

Sammendrag

Brøk er et emne det knyttes store utfordringer til både blant elever og lærere. Et hjelpemiddel som har vist god effekt for å gjøre brøk generelt mer forståelig, er konkretiseringsmateriell. Konkretiseringsmateriellet er fysiske gjenstander som har som hensikt å konkretisere den abstrakte brøken. Denne studien undersøker elevers arbeid med ett spesifikt konkretiseringsmateriell, cuisenairestaver, i arbeidet med brøk. Hensikten med studien er å undersøke spekteret av ulike tolkninger som forekommer når elever utnytter cuisenairestaver i arbeidet med brøkoppgaver. Denne studien er orientert rundt forskningsspørsmålet:
«Hvordan tolker 5. trinns elever konkretiseringsmaterialet cuisenairestaver i arbeid med brøk?».

Mastergradsavhandlingen tar leseren gjennom et kvalitativ forskningsstudie som benytter observasjon og intervju som forskningsmetoder. Totalt seks elever, fordelt i grupper på tre, ble observert under deres arbeid med et matematisk oppgavesett. Oppgavene var begrenset til brøkoppgaver, og var formulert slik at bruk av cuisenairestaver ble oppfordret. Elevene ble intervjuet individuelt i etterkant av disse observasjonsrundene. Dette ga elevene mulighet til å utdype nærmere om resonnementer fra oppgaveløsningen som forskeren anså som uklare. Alt datamateriale fra intervjuer og oppgaveløsning ble deretter analysert. Analyseprosessen ble vinklet rundt studiens forskningsspørsmål, og resulterte i diverse uttalelser og observasjoner fra elevene om hvordan de resonnerte i brøkoppgavene da konkretiseringsmateriellet ble brukt til å representere et forhold.. Dette fremlegges som utdrag i avhandlingen, og brukes til å diskutere og konkludere forskningsspørsmålet. Dataanalysen er gjort i en tredelt kodeprosess, bestående av *åpen koding*, *aksial koding* og *selektiv koding*. Dette fremprovoserte ulike hovedkategorier og koder under analysering, herunder «Enheten» og «Referanseenheten».

Resultatene er klare på at elevene tolket cuisenairestavene på mangfoldige måter, og at elevens tolkning i stor grad påvirket deres oppfattelse av brøk. Studien fremlegger resultater som tyder på at cuisenairestavene ble benyttet med størst suksess i situasjoner hvor stavene representerte et forhold seg imellom. Særlig da stavene representerte et forhold, klarte elevene å relatere materiellet til det abstrakte konseptet som brøk er. At elever mestret anvendelse av mangfoldige tolkninger av stavene, og kunne veksle mellom disse for å benytte den best egnede tolkningen til det spesifikke problemet, viste seg å være en egenskap som kom godt til nytte i oppgaveløsningen. De fleste deltakerne mestret denne egenskapen, men enkelte av elevene

holdt seg kun til én tolkning. Studiens resultater indikerer også at elevens tolkninger av cuisenairestaver i arbeid med brøk, påvirkes av tidligere erfaringer med materiellet. Tidligere arbeid med cuisenairestaver og multiplikasjon samt relatering til den symbolske brøknotasjonen, var faktorer som kom til syne i elevens arbeid. Slike eksisterende faktorer i elevenes resonneringsprosesser betraktes i denne studien som en hindring i utviklingen av brøkforståelsen.

Abstract

Fraction is a mathematical subject which both students and teachers seems to find challenging. Adoption of physical materials when solving fraction-related mathematical problems, clearly contributes to fractions being more understandable for the student. Such physical material aims to concretize the abstract subject which fractions really are. This Master's Thesis presents a research where elementary school pupils are examined and observed in a learning environment. The pupils solves mathematical fraction problems using a physical material we call cuisenaire rods. Motivation for this study, is to examine the variation of students' interpretations of such cuisenaires, while utilizing them to solve fractions. The thesis aims to solve the research problem:

"How do 5th grade students interpretate cuisenaire rods while solving mathematical fractions?»

To answer this problem, this study uses a qualitative approach, where observations and interviews are used to collect data. Six students in total, separated in groups of three, were observed while solving fraction-related mathematical problems using cuisenaire rods. Subsequently to these observations, all pupils got interviewed individually by the researcher. This allowed the researcher to dig deeper into observations that was not fully clear and understandable. After the prosess of collecting data was finished, the data was analyzed thoroughly. All analyses were oriented such that solving the research problem was the main goal in all results. Reasonings stated by the students, and observations noted by the researched resulted from this process. Such material is presented in this thesis, and will be used to discuss, answer and conclude the research process. The actual process of analyzing material, was performed in the threes steps of *open coding*, *axial coding* and *selective coding*. This process emerged into the categories «the unit» and «the reference unit», referring to how the difference cuisenaires are interperated by the student, and are categories that will be discussed throughout the thesis.

Results in this research indicates that students tend to interpret cuisenaire rods in various approaches, and that the chosen interpretation have a great impact on their understanding of fractions as an abstract mathematical concept. The cuisenaire rods were most often used correctly when two rods together represented a relationship reflecting the fraction. When the rods represented such a relationship, the students most often managed to link the pair of physical cuisenaires up to an abstract fraction. This thesis present that connecting different

cuisenaire rod interpretations together, and being able to transform between such interpretations, is a major strength for understanding and solving fractions. Most of the students in this research managed to transform and link interpretations of the cuisenaires. Findings in this study supports the assumption that former experiences with cuisenaire rods from other subjects will affect a students interpretation when adopting these rods to solving mathematical fractions. For example, the well established notation of fractions, utilizing numerators and denominators, did have an impact on students interpretations when solving the mathematical problems given in this research. This was discussed to be a threat when developing and learning fractions as a mathematical concept.

Innholdsfortegnelse

FIGUROVERSIKT

TABELLOVERSIKT

LISTE AV UNDERSØKELSESUTDRAG

1.0 INNLEDNING

1.1 BAKGRUNN FOR OPPGAVEN

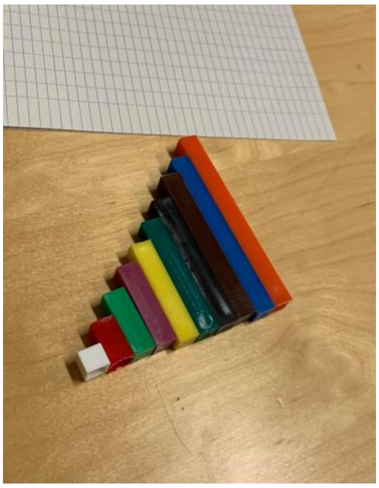
Brøk er et matematisk emne det knyttes mye hodebry til. Lamon (2012) fastslår at det lenge har vært et faktum at mange elever og lærere har utfordringer tilknyttet brøkundervisningen på skolen. Dette kommer også til syne i norske elevers prestasjoner i internasjonale undersøkelser (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). Undersøkelsen TIMSS[1] (Trends in International Mathematics and Science Study), som måler elever fra 4. trinn og 8. trinn sine generelle kompetanser i matematikk og naturfag, viser at norske 4. trinns elever gjør det godt sammenlignet med de nordiske landende. Allikevel viser resultatene i undersøkelsen at kategorien «tall», som også omhandler brøk, er den kategorien hvor elever gjør det svakest. Å mestre brøk anses som en forutsetning for å mestre mer avansert matematikk som følger i elevens utdanningsløp, og mangelfull brøkkunnskap kan derfor begrense en persons karrieremuligheter på sikt (Lamon, 2012). Gode brøkferdigheter kommer også til god nytte i en rekke hverdagslige situasjoner. At brøk er et emne mange norske elever strever med er bekymringsverdig, og gjør det betimelig å undersøke brøkforståelsen til norske elever nærmere.

Det er ingen ensidig forklaring på hvorfor elever synes brøk er vanskelig. De mange misoppfatningene kommer av kompleksiteten rundt begrepet brøk, eller brøkbegrepet som blir benevnelsen i denne avhandlingen. En av årsakene til elevers utfordringer med brøk er, i følge Lamon (2012), det store kognitive spranget i overgangen fra heltall til rasjonale tall. Ved dette sceneskiftet blir de tidligere, veletablerte, regnereglene ikke lenger gyldige, og en rekke nye regler må etableres. I tillegg til at nye regler skal etableres, er skrivemåten og uttrykksformen til rasjonale tall annerledes fra heltall. For eksempel, refererer tallet «1» ikke lenger til ett konkret objekt, men kan bestå av mer enn ett objekt. Brøken $\frac{1}{2}$ kan beskrive en halv fotballbane, men det kan også beskrive en-todel av en kortstokk bestående av 52 kort, der en-todel inkluderer 26 kort eller objekter. Dermed blir brøk et abstrakt begrep, fordi tallene sier noe om et forhold. En konsekvens av denne tankegangen er, i følge Bondø (2018), at eleven tenker at «jo større nevneren er, jo større er tallet» (s.3). En annen utfordring med brøker, er at selve begrepet kan referere til mange ulike betydninger. Eksempler på slike betydninger og bruksformer for brøk

[1] Norsk nettside TIMSS: https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/timss/2019/timss-2019-kortrapport.pdf

er: del-helhet, måling, kvotient, forhold, operator (Kieren, 1976). En tredje årsak til elevers brøk-utfordinger, diskuteres å være at brøkundervisningen tradisjonelt sett har vært algoritme-orientert, ikke læring hvor selve forståelsen står i fokus (Mack, 2001). Lamon (2012) tilføyer at en konsekvens ved «å gjøre», fremfor «å forså», vil ikke bare påvirke elevens ferdigheter i emnet, det vil også ha direkte innvirkning på elevens holdninger og motivasjon i faget. Utfordringer med brøkbegrepet oppstår også på grunn av at representasjonsformene som tradisjonelt har vært brukt i brøkundervisningen, har vært lite varierte, som fører til at elever sliter med å se sammenhengen i ulik faglitteratur, og relatere brøk til dagligdagse situasjoner (Bondø, 2018). Disse nevnte utfordringene, og problematikken rundt elevers forståelse av brøk, er motivasjonen bak temaet i denne avhandlingen. Formålet ved denne studien er å utforske en arbeidsform som kan hjelpe elever til å forstå dette komplekse emnet, som brøker viser seg å være.

Læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2019[2]) trekker frem «representasjoner og kommunikasjon» som viktige kjerneelementer i arbeidet med brøk. I denne mastergradsavhandlingen, er det representasjoner av disse to kjerneelementene som danner grunnlaget for videre forskning. En «representasjon» er en måte å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på. Eksempler på representasjonsformer kan være tabeller, tegninger, figurer, tekstoppgaver, symboler og funksjoner. Representasjoner kommer altså i ulike former, de kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske (Utdanningsdirektoratet, 2019).



Figur 1 Konkretiseringsmateriellet «cuisenairestaver» i ulike lengder og farger. Disse kan kombineres for å representere en rekke brøker.

[2] Læreplan i matematikk for 5. trinn: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv19?lang=nob

Representasjonsformene til brøken «en-todel», ofte omtalt som «en halv», kan konkretiseres som følger: Brøken $\frac{1}{2}$ er gitt ved en symbolsk representasjon, altså via tallene og brøkstreken. Brøken kan også representeres på andre måter. Ett eksempel på en slik alternativ representasjon, er regnefortellingen: «Per og Kari delte en kake i to like store deler, hvor stor del fikk hver av de?». En tredje måte å representere brøken på, er gjennom bruk av *konkretiseringsmateriell.* Matematikksenteret ved NTNU definerer konkretiseringsmateriell som «utstyr som er laget for å hjelpe eleven til å forstå nye begreper, og logikken begrepene er bygd opp rundt.» (Matematikksenteret, u.å.). Et eksempel på konkretiseringsmateriell er Cuisenairestaver, som visualisert i Figur 1 og Figur 2. Når en mengde er definert, kan den hvite og den lilla staven (ref. Figur 2) være en representasjon av brøken $\frac{1}{5}$ der den hvite staven utgjør en fem-del av helheten.

Figur 2 Brøken en femdel representert ved bruk av cuisenairestaver

Som konstatert tidligere, er brøk et abstrakt matematisk fenomen. Å tilgjengeliggjøre og konkretisere den abstrakte matematikken er viktig for å skape forståelse av brøkbegrepet (Rau & Matthews, 2017). Ifølge Rau & Matthews tilbyr konkretiseringsmateriell nettopp denne egenskapen. Smith (2009) beskriver konkretiseringsmateriell som fysiske objekter som brukes som praktiske verktøy for læring av matematikk. Cuisenairestaver (Figur 1) er en type konkretiseringsmateriell som egner seg godt for å konkretisere brøk, samt at stavene er et nyttig redskap for å starte diskusjon rundt relasjoner mellom størrelser (Lamon, 2012). Betraktes to staver opp mot hverandre, skapes ett forhold mellom stavene som igjen kan relateres til brøk. Tatt dette i betraktning, vurderes stavene sitt potensiale for bruk i brøkundervsining som stort.

1.2 OPPGAVENS FORMÅL OG OPPGAVEFORMULERING

Denne studien sitt formål er først og fremst å undersøke hvilke tolkninger elever gjør av konkretiseringsmaterialet cuisenairestaver i arbeid med brøk. Forskningsspørsmålet er et styringsredskap og skal fungere som en rød tråd i studien (Rienecker & Jørgensen, 2013). Forskningsspørsmålet i denne studien blir derfor:

Forskningsspørsmål 1: *«Hvordan tolker 5. trinns elever konkretiseringsmaterialet cuisenairestaver i arbeid med brøk?»*.

Til grunne for denne masteroppgaven ligger et ønske om å forstå elevers oppfattelse av konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver. Stavene er et redskap som tilbyr egenskapen til å diskutere relasjoner mellom størrelser, og egner seg derfor godt til å forstå brøk som relative størrelser (Lamon, 2012). Denne studien undersøker hvilke tolkninger elever gjør av cuisenairestaver, og resultatet i studien vil danne et bilde på kompleksiteten rundt det å tolke konkretiseringsmateriellet. For å danne et bilde av elevenes generelle evner til å tolke brøker, undersøkes noen elevers tolkninger av cuisenairestaver i arbeid med brøkoppgaver. Elevene blir bedt om å utdype sine besvarelser underveis i arbeidet. Dette bidrar til å kartlegge elevenes tolkninger. Motivasjonen for denne tilnærmingen er å undersøke de ulike måtene elever oppfatter og forstår ett og samme konkretiseringsmaterial. At det vil eksistere ulike tolkninger i et slikt studie er et faktum, i følge Thompson (1994). Thompson hevder at elevens oppfattelse av objektene vil variere ut i fra hvilket fokus som tilegnes objektene. Det som illustreres oppfattes altså individuelt av eleven. Watanabe (2002) definerer i sin studie to måter å representere brøk ved bruk av cuisenairestaver. Rammeverket inkluderer de to måtene å representere cuisenairestaver i arbeid med brøk, *Brøk som sammenlikning* og *Brøk som del-av-hel.* Rammeverket danner utgangspunktet for oppgavene som elevene blir presentert i dette studiet. Disse gjøres redere for i seksjon 2.3.1. Hovedforskjellen i Watanabe (2002) sine representasjoner, er hvordan relasjonen mellom delen og det hele oppfattes. Rammeverket for brøk som sammenlikning går ut på å bruke to staver som separate konstruksjoner, der de to stavene tildeles hver sin definerte rolle som enten del og hel. Den andre modellen: Brøk som del-av-hel inkluderer delen i det hele ved at to cuisenairestaver sammen danner helheten. Watanabe refererer her til to måter å representere brøk ved bruk av konkretiseringsmateriell. De to brøk-representasjonene til Watanabe (2002), sier da at brøker kan tolkes på ulike vis, som igjen fører til ulike besvarelser. Altså er det mulig å tolke cuisenairestaver på en rekke ulike måter avhengig av hvordan delen og helheten oppfattes. Dette studiet tar for seg elevers tolkninger i arbeidet med oppgaver innenfor sammenliknings- og del-av-hel-representasjonen (Watanabe, 2002).

Det er gjort en rekke studier som presiserer viktigheten av konkretiseringsmateriell i brøkundervisningen. Slike studier er eksempelvis dokumentert i Smith (2009), Thompson, (1994), Rau & Matthews (2017) og Watanabe (2012). Det knyttes også stor kompleksitet til hvordan effekten av konkretiseringsmateriellet kan optimaliseres i undervisningen. Det er gjort mangfoldige studier på dette. Disse bidrar til teorien som ligger til grunn for denne studien og avhandlingen, og den nysgjerrige leser oppfordres til å fordype seg i slike studier. Slike studier er for eksempel dokumentert i Herman, et al. (2004), Moyer (2010), Boggan, et al. (2010), Meira (1998), Clements (1999) og Goldin & Shteingold (2001). Ett interessant aspekt ved disse, er at selv om elever klarer å komme frem til rett, svar er det ikke gitt at de klarer å vise svaret med konkretiseringsmateriellet. Herman et al. (2004) konkluderte, i sitt studie av konkretiseringsmateriell i arbeidet med addisjon av brøk, at de fleste elever klarte å finne summen av to brøker ved å anvende standardalgoritmen, men at de ikke kunne representere selve addisjonsprosessen ved hjelp av konkretiseringsmateriell. Det som gikk igjen var at deltakerne prøvde å tilpasse representasjonene til symbolregningen de allerede hadde utført. De representerte addendene hver for seg, summen for seg, men klarte ikke å visualisere selve addisjonen. Ifølge forfatterne antyder resultatene at deltakerne betrakter addisjon av brøk som en prosess bare på symboler (Herman et al., 2004). Tatt dette i betraktning, eksisterer det en diskrepans rundt konkretiseringsmateriell sin posisjon i undervisningen.

For å utforske Forskningsspørsmål 1, vil jeg undersøke aspekter ved både brøkbegrepet og konkretiseringsmateriell. Seks 5. trinns elever deltar i studien. For å få et innblikk i elevenes tolkninger av cuisenairestaver blir elevene observert mens de arbeider med brøkoppgaver. Avhandlingens forfatter vil fungere som forsker i studiet, og ta rolle som en *deltakende observatør*. I tillegg til å benytte observasjoner som forskningsmetode, benyttes også intervjuer i dette studiet. Intervjuene gjennomføres i etterkant av observasjonene. Hensikten med intervjuene er å komme i dybden på deltakernes resonnementer. Ved å velge to metoder som bidrag til forskningen, minimeres risikoen for å overse eller utelate funn. Studien gjennomføres på elever som forskeren allerede kjenner godt. Det vil si at en oppfattelse av elevenes faglige kompetanse allerede eksisterer til en viss grad hos forskeren. Samtidig, kan kjennskap til elevens personlighet kanskje bidra i analysen av deres resonnementer og tankemåter. Elevene observeres samtidig som de arbeider med brøkoppgaver. Oppgavene går hovedsakelig ut på å definere forhold og sammenlikne størrelser. Det legges et stort fokus på å stille oppfølgingsspørsmål, og deltakerne oppfordres og motiveres til å begrunne egne svar, for at forfatteren skal kunne ta del i elevenes tankeprosess. Kapittel 2, som tar for seg gjeldende teori og tidligere relevant forskning, vil etablere et teoretisk rammeverk for dette studiet. Resultatene av datainnsamlingen blir analysert i lys av dette teorigrunnlaget, med den hensikt å besvare Forskningsspørsmål 1.

1.3 AVHANDLINGENS OPPBYGNING

Kapittel 1 tar for seg formaliteter, samt en introduksjon til studiens gjennomføring, hensikt, og hovedmotivasjon. Påfølgende kapittel, kapittel 2, fokuserer på kjent teori og forskning. Særlig interessant relevant forskning vektlegges. Kapittelet innledes med en redegjørelse av brøkbegrepet. Videre presenteres konkretisering i matematikkfaget, med et spesielt fokus på konkretiseringsmateriell i undervisning. Store deler av kapittelet tar for seg ulike tolkninger av cuisenairestaver i arbeidet med brøk.

Kapittel 3 dokumenterer forskingsmetodene som er brukt i denne Mastegradsavhandlingen. Her beskrives metodologi og metodiske valg studiet og oppgaven. Kapittelet forklarer hvordan gjennomføringen av arbeidet med den empiriske undersøkelsen foregår. Data fra disse undersøkelsene presenteres i påfølgende kapittel, kapittel 4. I kapittel 3, redegjøres det for studiets teoretiske og metodiske tilnærming, i tillegg er studiets kontekst blant tidligere studier beskrevet. Forarbeidet til dette studiet presenteres, med en diskusjon av valg av deltagere og matematiske oppgaver. En pilotundersøkelse har også blitt utført som del av studiet, denne gjøres rede for her. Analyseprosessen er også forklart i dette kapittelet, før etiske valg og forskningens troverdighet diskuteres.

Som allerede introdusert, vil kapittel 4 ta for seg datafunnene og en analyse av elevers matematiske arbeid. Transkripsjoner av lydopptak av intervjuer og observasjonsrunder, samt elevarbeid og bilder av elevarbeid, danner grunnlaget for datamaterialet som analyseres. Kapittelet sikter mot å ryddig analysere og trekke slutninger om elevers tolkninger av cuisenairestaver i arbeidet med brøk.

Observasjoner og funn som blir gjort i kapittel 4, blir diskutert nærmere i kapittel 5. Funnene diskuteres opp mot aktuell teori for å besvare forskningsspørsmålet. Avslutningsvis i dette kapittelet, diskuteres hvordan ulike tolkninger av cuisenairestaver kan påvirke matematikkundervisningen, og hvilke momenter læreren burde ta hensyn til ved bruk av cuisenairestaver i brøkundervisningen.

Kapittel 6 oppsummerer studiet og avhandlingen. Her trekkes konklusjoner på bakgrunn av forskningsspørsmålet som ble etablert ved innledning. I kapittelet presenteres også en drøfting av metodevalg. Her rettes et kritisk blikk mot metodiske valg som er gjort i dette studiet. Avslutningsvis presenteres en seksjon der potensiell videre forskning blir presentert. Denne delen belyser emner for forskning ved en eventuell forlengelse av dette studiet.

2.0 TEORI- BRØK OG KONKRETISERINGSMATERIELL

Forskningsspørsmålet: *«Hvordan tolker 5. trinns elever konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver i arbeid med brøk?»* vil diskuteres opp mot eksisterende teori og forskning på fagfeltet. Dette kapittelet har som formål å danne et slikt grunnlag for en slik videre analyse og diskusjon. Innledningsvis i gjeldende kapittel, presenteres det overordnede temaet for denne studien; brøk. Her gjøres det rede for generell brøkteori. Deretter kommer en teoretisk gjennomgang av konkretiseringsmateriell der eksempler på hvordan cuisenairestaver kan brukes i arbeidet med brøk presenteres. I denne seksjonen presenteres blant annet Watanabe (2002) sin studie som viser hvordan cuisenairestaver kan tolkes på ulike måter avhengig av hvordan forholdet mellom delen og det hele oppfattes. Dette kapittelet kan derfor anses som en samling av de tre seksjonene: brøk, konkretiseringsmateriell og cuisenairestaver.

2.1 BRØK

Brøk har, i følge Neagoy (2017), ingen universal matematisk definisjon. I snever betydning defineres brøk som «en del av noe», der brøk består av tre elementer: teller, brøkstrek og nevner, hvor brøkstreken er det samme som et deletegn (Matematikk.net, u.å.). Neagoy legger til at grunnskolen gjerne referer til brøk som positive rasjonale tall på formen $\frac{a}{b}$ der *a* kalles *teller* og *b* kalles *nevner*. Elementære eksempler her er telleren 1 og nevneren 2 i brøken $\frac{1}{2}$, eller telleren 4 og nevneren 9 i brøken $\frac{4}{9}$. En forutsetning for å skrive brøk som rasjonale tall, er at *a* og *b* er positive heltall, og $b \neq 0$ (Neagoy, 2017). Brøk er rasjonale tall, allikevel forklarer Lamon (2012) at det er viktig å ikke anse brøk og rasjonale tall som ekvivalenter. Dette fordi at alle tall som skrives på brøkform ikke nødvendigvis er rasjonale. Brøken $\frac{\pi}{2}$ er eksempel på et irrasjonalt tall, altså en brøk som ikke er rasjonal. Ettersom irrasjonale tall kommer på siden av dette studiets og denne mastergradsavhandlingens omfang og fokusområde, vil ikke irrasjonale tall studeres eller omtales videre.

2.1.1 RELATIV TENKING

Lamon (2012) skriver i sin publikasjon, at det er en utfordring for elever å forstå brøk på formen $\frac{a}{b}$. Det er derfor viktig å legge vekt på at brøker må forstås som tall, som en del av undervisningen. En naturlig tilnærming for dette, er ved å betrakte brøk som én mengde fremfor å fokusere på de tre elementene som utgjør brøken på papiret (Neagoy, 2017). For å forstå brøkbegrepet som noe mer enn en notasjon, er det avgjørende at eleven utvikler *relativ forståelse* (Lamon, 2012). Betegnelsen relativ forståelse beskriver hvordan å forstå en mengde. Relativ tenking i brøk, går dermed ut på å forstå relasjonen mellom tallene der en må se sammenhengen mellom størrelsen på del (teller) og antall deler (nevner). Lamon (2012) forklarer at det er relasjonen mellom tallene i brøken som utgjør brøkens tallverdi. For å forklare betydningen av relativ tenking i brøk, trekker Lamon (2012, s. 41) frem et eksempel om slanger som vokser like langt. Slange 1 er 4 cm lang, mens Slange 2 er 5 cm lang. I løpet av to år har begge slangene vokst 3 cm, Slange 1 er nå 7 cm, mens Slange 2 har vokst til en størrelse på 8 cm. Ser man på slangenes vekst har de begge vokst 3 cm, altså har de vokst like mye i løpet av de to årene. En annen måte å forstå slangenes vekst er å betrakte veksten relativt til slangenes utgangspunkt. Med relativ tenking kan en oppdage at Slange 1 har vokst mer enn Slange 2. Slange 1 vokser 3 cm, eller $\frac{3}{4}$ av dens opprinnelige lengde. Slange 2 vokser 3 cm, eller $\frac{3}{5}$ av dens opprinnelige lengde. Relativ forståelse vil hjelpe eleven til å oppdage at Slange 1 har størst vekst, da $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$. Viktigheten av å kunne veksle mellom de to tilnærmingene belyses i publikasjonen, men det konstateres at ingen av perspektivene er galt eller riktig. Begge perspektivene er nyttige, men den relative forståelsene inneholder i større grad abstrakt tenking.

2.1.2 FORSTÅELSE AV BRØKBEGREPET

Brøk kan tolkes og forstås på en rekke ulike måter. Kompleksiteten rundt brøkbegrepet er en av faktorene som gjør dette så utfordrende for elever (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). I følge Kieren (1976), må brøk forstås som mer enn én enkel konstruksjon. Det presenteres at brøk består av flere tolkninger, hvor fem konkrete tolkninger for brøk etableres i publikasjonen. Disse fem tolkningene legges frem som: del-hel, forhold, operator, kvotient og måling. Eksempelvis, kan brøken $\frac{3}{4}$ typisk beskrives som følger, for de ulike tolkningene fra denne teorien:

- Del-hel: Tre av totalt fire like deler.
- Kvotient: 3 dividert på 4.
- Operator: trekvart av mengden.
- Forhold: Brøken *utgjør* 3 deler mot 4 deler.
- Måling: Hver av delene beskriver en lengde.

Helhetlig brøkforståelse avhenger, i følgende denne teorien, av at en utvikler forståelse innenfor samtlige av de fem tolkningene. Det vil si at et ensidig fokus på enkelte av tolkningene vil resultere i mangelfull forståelse. Tradisjonelt i matematikkundervisning har enkelte tolkninger fått mer plass enn andre. Behr et al. (1983) hevder at brøk som forhold, måling og operator får for liten plass i undervisningen. Siden hver av tolkningene tilbyr ulike dimensjoner ved brøkbegrepet, burde brøkundervisningen ha som hensikt å bygge robust forståelse for samtlige tolkninger (Behr et al., 1983). Ut i fra Kieren (1976) sine tolkninger av brøkbegrepet, dannet Behr et al. (1983) en teoretiske modell som knyttet Kieren sine ulike tolkninger til brøk til operasjoner, ekvivalens, og problemløsing. Utgangspunktet for denne modellen er at tolkningen av brøk som del-hel underbygger de andre dimensjonene. Altså skal ikke brøk som del-hel forståes kun som en egen tolkning, men et fundament for alle tolkningene (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). I de neste seksjonene vil to av tolkningene som Kieren (1976) presenterte i hans studie undersøkes nærmere. De to tolkningene *brøk som del-hel* og *brøk som forhold* er viktige fundamenter for arbeidet med brøk og cuisenairestaver. De to tolkningene danner grunnlaget for Watanabe (2002) sin teori om tolkninger av cuisenairestaver, som blir studert nærmere i seksjon 2.4.1, og er brøk-tolkningene vi nå skal se nærmere på.

2.1.3 BRØK SOM DEL-HEL

Lamon (2012) definerer tolkningen av brøk som *del- hel* ved at *delen*[3] er resultatet når det *hele*[4] deles inn i like store fordelinger eller mengder. I denne sammenhengen har «like store» betydningen: samme tall, sammen lengde, eller samme areal. Dette avhenger av brøkens hentydning; om mengder skal telles, måling av lengder eller områder, eller tilsvarende. Et eksempel på en slik tolkning kan være en kake som skal deles i fire like store deler, der tre av kakestykkene skal pyntes med glasur. Området som dekkes av glasur defineres som $\frac{3}{4}$ av kaken. Gjennom del-hel tankegangen beskriver *a* antall deler og må settes i sammenheng med helheten *b*. Brøken formuleres da matematisk på formen $\frac{a}{b}$ (Lamon, 2012). Hver del er heller ikke bundet til å presentere kun ett naturlig tall. For eksempel kan delen bestå av et sett med 22 fotballkort. I et slikt fremstilling vil $\frac{1}{11}$ utgjøre 2 fotballkort som sammen utgjør 11 like store deler. Elever har som regel en god forståelse av brøk som del-hel (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Dette gjør at del-hel er et godt utgangspunkt å starte begynneropplæringen i brøk på grunnskolen.

Å forstå brøk som del-hel forutsetter noen viktige oppdagelser som må ligge til grunn hos elevene. For det første understreker Lamon (2012) viktigheten av at delene er like store. Skal

[3] Med «del» siktes det til telleren i brøk.
[4] Med «hel» siktes det til nevner i brøk.

man for eksempel fordele en kake på fire personer nytter det ikke å dele stykkene i ulike størrelser. Et økende antall deler betyr at størrelsen på delene blir mindre. Desto færre deler mengden består av, dess større er hver del. For eksempel vil $\frac{1}{5}$ av en kake utgjøre en større bit enn $\frac{1}{9}$ av en kake.

En annen viktig oppdagelse er at brøk med ulike benevnelser fortsatt kan vise til samme mengde. Likeverdige brøker er to individuelle brøker som representerer den samme mengden (Lamon, 2012). Brøkene $\frac{1}{4}$ og $\frac{4}{16}$ representerer den samme relative mengden, og er derfor likeverdige.

En tredje forutsetning for å forstå brøk som del-hel er å identifisere enheten (Lamon, 2012). Å definere en enhet er spesielt viktig når man jobber med konkretiseringsmateriell. Får eleven utdelt for eksempel cuisenairestaver, brøkstolper eller brøkbrikker, er det avgjørende å definere enheten. Hvis den grønne cuisenairestaven på 6 cm og den røde cuisenairestaven på 2 cm defineres som enheten er det viktig at eleven gjennomgående opererer med denne enheten. Stavene kan først tolkes som brøk når enheten er definert.

Avslutningsvis, trekkes kunnskap om modeller frem som en avgjørende faktor for elevens forståelse av brøk som del-hel (Lamon, 2012). Det er viktig at elever lærer å bruke varierte modeller slik at flere modeller assosieres til brøk, fastslås i publikasjonen. I grunnskolens lærerbøker, er det hovedsakelig tre modeller som går igjen: lengde-, mengde- og areal-modellen (Watanabe, 2012). For å få en allsidig forståelse av brøkbegrepet, oppfordrer Lamon (2012) til variert bruk av ulike modeller slik at eleven blir bevisst på likheter og forskjeller ved de ulike modellene. Tradisjonelt har sirkulær arealmodell skapt sterke assosiasjoner mellom brøk som del-hel og pizzastykker. Lamon legger til at ensidig bruk av modeller fører til mangelfull forståelse. Brøkstriper, brøksirkler, rektangulære kaker og pizzaer, cuisenairestaver og mønsterbrikker er alle arealmodeller som egner seg godt for å lære brøk som del av helhet.

2.1.4 BRØK SOM FORHOLD

Gjennom tolkningen av brøk som forhold referer brøken til forholdet mellom to størrelser Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Sammenlikningen mellom størrelser kan enten skje på grunnlaget av en situasjon der en del av størrelsen sammenliknes med helheten. For eksempel i en klasse med 16 elever bestående av 6 gutter og 10 jenter, vil guttene utgjøre $\frac{6}{16}$ av hele klassen. Eller så kan brøk som forhold være del-del, i en slik tolkning vil eksempelvis brøken $\frac{3}{5}$ referere til forholdet mellom to mengder. I eksempelet med klassen bestående av 6 gutter og 10 jenter er forholdet *gutter til jenter* 6 av 10, som igjen er ekvivalent med $\frac{3}{5}$. For hver tredje gutt er det fem jenter.

Tokle og Bondø (2018) hevder at tolkning av brøk som del-hel og forhold er relatert til hverandre og har derfor mange likheter.

2.2 KONKRETISERING

Begrepet konkretiseringsmateriell, som er nok et sentralt begrep i denne studiens fokusområde, vil være fokus i denne seksjonen. Innledningsvis i seksjonen vil representasjoner bli presentert. Videre går seksjonen i dybden på representasjonsformen til konkretiseringsmateriell. Før selve materiellet konkretiseringsmateriell blir forklart, er det hensiktsmessig å se på konkretisering som et overordnet begrep. Når konkretiseringsmateriell blir introdusert, vil det være med et særlig fokus på bruken av slikt materiale i undervisningen.

2.2.1 REPRESENTASJONER

Goldin and Shteingold (2001) definerer brøkens representasjoner som «tegn, symboler eller objekter som kan stå for (symbolisere, beskrive, kode eller representere) noe annet enn seg selv» (s. 3). En representasjon er altså i følge Goldin og Shteingold ett tegn, symbol eller objekt som representerer noe annet enn seg selv. Goldin og Kaput (1996) skiller mellom interne- og eksterne representasjoner. Disse to distinksjonene utgjør to svært viktige fundamenter i læring og undervisning av matematikk. Interne representasjoner brukes av Goldin og Kaput som en betegnelse på mentale prosesser som skjer i problemløsingsprosessen. En persons interne representasjoner er subjektive og bygger på tidligere erfaringer. De interne representasjonene kan ikke måles direkte, da dette er noe som skjer individets kognitive prosesser. Måten slike representasjoner typisk måles er ved å observere individets ytre adferd. Den interne representasjonen anses som viktig for hvordan individet oppfatter matematikk. I kontrast til interne representasjoner, står de eksterne representasjonene. Disse kommer fysisk utrykk og er dermed mulige å observere. Ord, grafer, bilder, likninger og artefakter er eksempler på eksterne representasjoner. For eksempel kan to cuisenairestaver representere forholdet $\frac{3}{5}$ dersom de settes i system. Elever kan produsere eksterne representasjoner og de kan pekes på i klasserommet. Tallet 5 er en representasjon for fem mengder, men det kan også være en lengde på 5 mm. Tallet 5 står ikke alene, det er blant annet en del av mengden av naturlige heltall, og utvikler seg til posisjonssysteme med tiere og hundrere også videre. Systemer for eksterne representasjoner struktureres ut i fra konvensjoner eller regler (Goldin & Shteingold, 2001). Det er sammenhengen mellom de interne og eksterne representasjonene som er særlig interessante da de eksterne baserer seg på de interne representasjonene.

Som fastslått tidligere, eksiterer en rekke ulike eksterne representasjoner. Hver av representasjonene kan få frem ulike perspektiver ved et matematisk problem (Bahr, Lesh & Post, 1981). Bahr et al. skiller mellom fem forskjellige representasjonsmoduser: virkelighetsnære kontekster, bilder, skrevne kontekster, konkretiseringsmateriell og symboler. Representasjonsmodusen konkretiseringsmateriell vil bli gjort rede for videre i dette kapittelet.

2.2.2 KONKRETISERING

Konkretisering i seg selv handler, naturligvis, om mer enn materielle konkreter (Kirfel, 2010). Kirfel presenterer de fire sentrale aspekter som kan lede i ulike retninger og innby forskjellig innsikt: materalisering, eksemplifisering, konkretisering og visualisering. Disse fire aspektene vil nå legges frem.

Materialisering går ut på å gjøre det abstrakte til noe konkret ved bruk av fysisk materiell. Materialisering innebær alt av konkrete fysiske objekter der hensikten er å skape et internt bilde av en prosess i hjernen. Slikt materiell er spesielt utbredt i matematikkundervisning i grunnskolen. Eksempler på slikt materiell er tellebrikker, brøksirkler og cuisenairestaver. Gjenstandene kan manipuleres, flyttes rundt og ordnes på bestemte måter. Hjernen skaper mentale bilder på prosesser og målet er å kunne gjenta prosessene uten det konkrete å forholde seg til (Kirfel, 2010).

Det andre aspektet er *eksemplifisering.* Ikke alltid er det noe konkret som er utgangspunktet for læring. Arbeider man med abstrakte matematiske tema må eleven håndtere en rekke prosedyrer. Hvis elevene for eksempel skal lære om likeverdige brøker, er det nødvendig å eksemplifisere for å kunne danne en forståelse. Generelle formler vi kjenner for brøk, som $\frac{a}{b}$ vil få sin spesielle utforming når eksempler brukes. Å konkretisere brøkene $\frac{2}{10}$ og $\frac{4}{20}$ ved bruk av et konkretiseringsmateriell, vil føre til at brøk-formlene konkretiseres gjennom eksempler (Kirfel, 2010).

Kontekstualisering er det tredje aspektet ved konkretisering (Kirfel, 2010). Dette aspektet handler om å skape en kontekst som gir mening til matematikken. Uten en kontekst vil det være vanskelig å kjenne igjen regnearter og andre matematiske utrykk. Målet med å tilby egnede kontekster til matematiske problemstillinger, er å hjelpe eleven til å kjenne igjen konteksten slik at mening skapes til matematikken. I arbeidet med brøk, har «pizzabrøk»[5] utviklet seg som et utrykk på en kontekst som omhandler del-hel tolkning av brøk gjennom bruk av sirkulær arealmodell. Det et dermed naturlig å tenke at brøker ofte kontekstualiseres på denne måten hos mange elever.

Visualisering er det siste av Kirfel (2010) sine aspekter. Visuelle hjelpemidler, herunder bilder, tegninger og modeller, har den egenskapen at de hjelper eleven til å fatte lange tankerekker. Visuelle hjelpemidler beskriver abstrakte matematiske fenomener. Dersom, for eksempel, matematikken bak arealmodellen skulle blitt forklart med ord, ville det blitt omfattende og komplisert for mottakeren av budskapet.

2.2.3 KONKRETISERINGSMATERIELL

Som introdusert under avhandlingens innledning, er konkretiseringsmateriell et viktig hjelpemiddel for å konkretisere og tilgjengeliggjøre abstrakt matematikk (Rau & Matthews, 2017). Konkretiseringsmateriell har mange ulike former. Matematikksenteret ved NTNU definerer konkretiseringsmateriell som «utstyr som er laget for å hjelpe eleven til å forstå nye begreper, og logikken begrepene er bygd opp rundt» (Matematikksenteret, u.å.). I følge National Council of Teachers of Mathematics (NCTM[6]) kan konkretiseringsmateriell brukes i undervisning om de fleste temaer i matematikk, og anses som viktig for å utvikle ferdigheter i problemløsing, kommunikasjon, resonnering, evnen til å se sammenhenger, og estimering (referert i Wong & Evans, 2008). Konkretiseringsmateriell er spesielt viktig for å forstå det abstrakte matematiske fenomenet brøk (Rau & Matthews, 2017). Eksempler på konkretiseringsmateriell i brøkundervisningen er cuisenairestaver, brøkstiper, brøksirkler og dottpapir. Smith (2009) påpeker at konkretiseringsmateriellet har til hensikt å bygge bro mellom uformell og formell matematikk, gjennom å tilby et konkret redskap. Elever har ofte ikke den mentale modenheten og kapasiteten som skal til for å forstå alle matematiske emner som kun

[5] Med «pizzabrøk» henviser jeg til brøk representert i sirkulær arealmodell
[6] NCTM: Nasjonalt råd for matematikklærere. Verdens største organisasjon for matematikkundervisning. Organisasjonen har fem årlige publikasjoner.

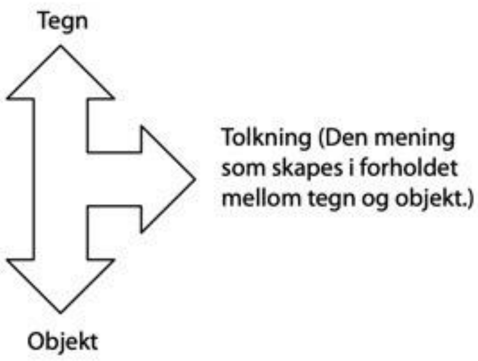
presenteres som symboler og ord (Moyer, 2001). Moyer trekker frem konkret materiale som en forutsetning for at læring skal oppstå.

2.2.4 KONKRETISERINGSMATERIELL OG SYMBOLER

Konkretiseringsmateriell har egenskapen til å danne et konkret bilde på symboler og ord. I følge Kaufmann (2010) må det skapes forbindelser mellom tegn, objekt og tolkningen som gjøres. Kaufmann trekker frem en prosess fra Peirce (1998) sin studie, der denne prosessen kan illustreres i en modell. Denne modellen er visualisert i Figur 3. Prosessen innebærer at et hvert objekt i seg selv er universalt, og at meningen påvirkes av situasjonen det brukes i. Pierce beskriver forbindelsen gjennom en tredeling der den symbolske representasjoner er et produkt av et tegn og et objekt som presenteres. Tolkningen av den symbolske representasjonen kan være forskjellig hos ulike individer. Selv om tegnet er felles for alle, vil altså forskjellige individer stå for ulike tolkninger.

Meningen som skapes hos eleven i arbeidet med cuisenairestaver påvirkes av situasjonene konkretiseringsmateriellet brukes i. Benyttes cuisenairestavene i arbeidet med regneoperasjonen addisjon, vil prosessene være annerledes enn om cuisenairestaver benyttes i arbeidet med brøk.

Kaufmann (2010) legger til at selv om læreren kjenner igjen de matematiske forbindelsene i konkretiseringsmateriellet, er det viktig å være bevisst på at disse har kommet som en konsekvens av lærerens tidligere matematiske erfaringer. Eleven vil kun ta inn over seg det konkrete materialet. Tatt dette i betraktning, er det mulig at oppfatningen hos eleven er annerledes fra det som var tiltenkt fra underviser. Objekter og symboler kommer ikke med en integrert forståelse av matematiske ideer og begreper, dette må læres gjennom bruk og undervisning.



Figur 3 Koblingen mellom tegn, objekt og tolkning. Peirce (1998) sin modell. Hentet fra Kaufmann (2010)[7].

Brøk sin symbolske presentasjon i form av teller, nevner og brøkstrek er med på å skape utfordringer i arbeidet med brøk (Ni, 2001). Ulike grafiske fremstillinger skaper ulike utfordringer. En utfordring som ofte oppstår er i følge Ni at enheten blir delt inn i flere deler. En brøk kan ofte bli behandlet som to mengder. Ta for eksempel brøken $\frac{2}{3}$, håndteres denne som *dobbel telling*, som er «2» og «3» isteden for en samlet enhet, snakker man ikke lenger om et forhold. Tolkningen dobbel telling er et eksempel på hvordan elevenes tolkning av brøknotasjonen kan være påvirket av symbolenes forbindelse til heltalls-resonnering

2.2.5 KONKRETISERINGSMATERIELL I UNDERVISNING

Thompson (1994) understreker at det å bruke konkret materiell i seg selv ikke er tilstrekkelig for å garantere suksessfull læring. En må betrakte læringsmiljøet i sin helhet for å forstå effektiviteten av konkret materiell. For å utnytte potensialet til konkreter i matematikkundervininingen, er det motiverende å reflektere over spørsmålet: «Hva er det ønskelig at elevene skal lære?». Det viser seg at det nevnte spørsmålet, uheldigvis, ofte erstattes med spørsmålet: «Hva skal jeg få elevene til å lære å gjøre?» (Thompson, 1994, s.1). At konkretiseringsmateriell virkelig forstås av brukeren, er som introdusert tidligere, en viktig forutsetning for om slike midler burde brukes i undervisningen. «Det er ofte utfordrende å se de matematiske ideene som ligger i det konkrete materialet. Selv om materialet er konkret, så betyr det ikke at ideen om hvordan den brukes kommer ikke eksplisitt frem i materialet. Det du ønsker at eleven skal forstå er måten å forstå materialet og hvordan å håndtere det.» (Thompson, 1994, s. 3). Brukere må altså føle nært eierskap til konkretiseringsmateriellet for at det skal ha

[7] Pierce (1998) sin modell. Hentet fra Kaufmann (2010)

effekt. Det er først når elevene mestrer anvendelse av konkreten at det blir mulig å studere elevenes resonneringsevner.

Materiellet er et hjelpemiddel for å utvikle matematisk kompetanse, men det er ingen selvfølge at konkretiseringsmateriellet brukes effektivt (Moyer, 2001). Det å bruke konkreter er ikke i seg selv en suksessfaktor for læring. Som et hvert annet redskap, kreves riktig bruk (Baroody, 1989). Baroody (1989) legger til at dersom konkretiseringsmateriell brukes uten kunnskap om bruken, vil det trolig ikke føre til læring. I verste fall vil det skape forvirring og misoppfatninger. En rekke forskning er gjort på hvordan å inkludere konkretiseringsmateriell i undervisningen på en effektiv måte. Eksempler på slik forskning er dokumentert i for eksempel Moyer (2010), Boggan, Harper og Whitmire (2010), Meira (1998), Clements (1999) og Goldin & Shteingold (2001). Momentene for hvordan å inkludere konkretiseringsmateriell i undervisning vil nå bli presentert.

En forutsetning for at konkretiseringsmateriellet skal medføre økt læringsutbytte, er at eleven kjenner til materiellet slik at selve bruken går naturlig. «For det første, kan en ikke anta at matematiske konsepter kan 'leses av' konkretiseringsmateriellet.» (Clements, 1999, s. 46). Moyer (2001) presiserer at en må være klar over at konkretiseringsmateriellet i seg selv kun er en gjenstand som er produsert på en fabrikk. Gjenstanden kommer med visse muligheter til å representerer utvalgte matematiske begreper i ulike kontekster, men ingen kunnskap følger eksplisitt med konkreten, det må læres gjennom erfaring. For eksempel vil ikke cuisenairestavene i seg selv gi mening før enheten defineres (Lamon, 2012). Meira (1998) forklarer potensialet ved et konkretiseringsmateriell ved å bruke begrepet *transparent*. Med transparent mener Meira at konkreten i seg selv er gjennomsiktig uten noe særlig meningsinnhold. Meningen, kunnskapen og aktivitetene som ligger bak konkreten blir først synlig for brukeren når de rette erfaringene i det rette læringsmiljøet er etablert. Konkreten er transparent, og en må observere hvordan elever bruker konkreten for å kunne konstatere om mening oppstår. Mening til konkretiseringsmateriellet oppstår hver gang det brukes i kontekster der materiellets mening kommer til rette. Det er avgjørende at eleven reflekterer over bruken av redskapet, først da vil de matematiske ideene i det fysiske materialet blir synlig, fastslår Meira.

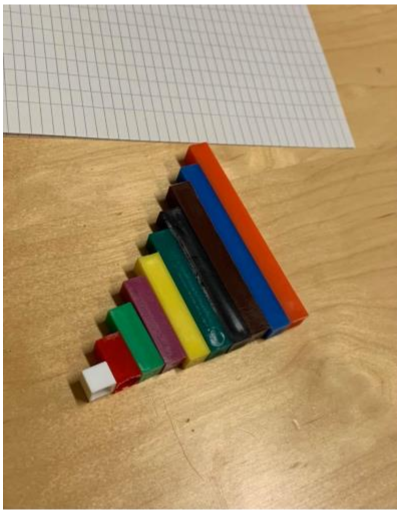
En annen forutsetning for effektiv bruk av konkret materiell er, i følge Moyer (2001), at eleven forstår det matematiske begrep som ligger implisitt i konkretiseringsmateriellet. Dette skal være avgjørende for læringsutbyttet. Dersom eleven ikke er kjent med det matematiske fenomenet, er det en fare for at konkretiseringsmateriellet ubevisst flyttes rundt. Moyer (2001) presiserer at den fysiske handlingen ved å flytte objekter ikke medfører læring.

Ulikt konkretiseringsmateriell egner seg for ulike kontekster (Boggan et al., 2010). Utvalget av konkretiseringsmateriell er enormt, så en må være bevisst på hvilken læring som kommer ut av det spesifikke materiellet. For eksempel vil tellebrikkene egne seg godt i telleopplæringen for å lære kardinaltall, ordinaltall og en-til-en korrespondanse. Det er helt andre manipulativ som egner seg, for eksempel cuisenairestaver, dersom brøk er temaet for læring. Boggan, et al. (2010) understreker at en hver lærer må besitte kompetanse for å avgjøre hvilke kontekster som egner seg til ulikt konkretiseringsmateriell. Cuisenairestaver har gjerne god korrespondanse til å lære addisjon og subtraksjon av brøk, og for å oppdage og forstå likeverdige brøker (Boggan, et al., 2010). Brøksirkler korresponderer bedre til å lære brøk som del-hel.

2.3 CUISENAIRESTAVER

Så langt i avhandlingen har konkretiseringsmateriell vært i fokus, og cuisenairestaver er et materiell som har blitt nevnt en rekke ganger. Slike staver, og deres bruksområde, vil i denne seksjonen bli forklart i detalj.

I følge Lamon (2012), er Cuisenairestaver et nyttig redskap for å oppdage relasjoner mellom størrelser. Cuisenariestaver er tredimensjonale lengdemodeller. Eksempel på hvordan cuisenairestaver kan se ut, og hvordan de kan sammenlignes, er visualisert i Figur 4. Som regel er stavene laget av tre eller plast. I figuren består stavene av deler i lengder fra en til ti, der størrelsene stiger gradvis fra 1 cm til 10 cm (henholdsvis hvit og oransje i Figur 4). Hver lengde er tildelt en farge slik at den spesifikke lengden er lettere gjenkjennelig. I arbeidet med brøk er det i midlertid ikke verdien av hver enkelt cuisenairestav som er av betydning. Her er det forholdet mellom to staver som knytter konkretiseringsmateriellet opp mot en brøk. Cuisenariestaver er spesielt nyttig for å underbygge ideen om at brøk viser forholdet mellom delen og den hele. Det er altså ikke lengden på staven i seg selv som representerer verken delen eller det hele. Van de Walle et al. (2014) gjør oppmerksom på at, som påstått tidligere i avhandlingen, det viktig å definere stavenes enhet når disse brukes i brøkundervinsingen. For eksempel kan den lilla staven velges til å representere «enheten». Da vil den hvite staven utgjør $\frac{3}{4}$, av enheten (utrykket via lilla stav).

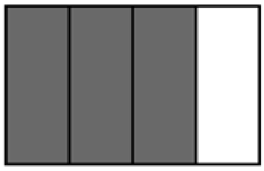


Figur 4 Konkretiseringsmateriellet «cuisenairestaver» i ulike lengder og farger. Disse kan kombineres for å representere en rekke brøker.

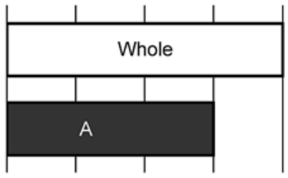
2.3.1 ULIKE MÅTER Å TOLKE BRØK VED BRUK AV CUISENAIRESTAVER

Cuisenairestavene er en samling av objekter som kan brukes i arbeidet med brøk. Først når to staver settes i forhold til hverandre vil de kunne relateres til brøk (Lamon, 2012). Velger man ut to staver fra figur 4 kan forholdet tolkes på ulike måter avhengig av hvor fokuset legges. Setter man for eksempel en grønn stav og en rød stav ved siden av hverandre, er det mange måter å tolke relasjonen på. De to stavene kan representere en rekke ulike brøker, herunder $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$, avhengig av hvordan eleven velger å oppfatte og definere helheten. I påfølgende avsnitt presenteres to særskilte tolkninger av cuisenairestaver.

I seksjon 1.2 ble det introdusert at Watanabe (2002) viser til to måter å representere brøk: (1) *del-av-hel* og (2) s*ammenlikning*. De to representasjonene avhenger av hvilken modell en bruker i arbeidet med brøk. Hovedforskjellen på de to representasjonene er relasjonen mellom delen og det hele.

 [8]

Figur 5 Del-av-hel metoden for representasjon av brøken tre fjerdedeler



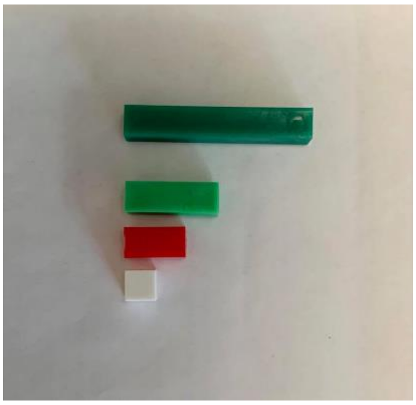
Figur 6 Sammenlikningsmetoden for representasjon av brøken tre fjerdedeler

Figur 5 og Figur 6 forsøker å visualisere disse to tilnærmingene for brøk-representasjon. Figur 5 viser hvordan 3 deler kan ses i sammenheng med de totalt 4 delene i brøken $\frac{3}{4}$. Dette er *del-av-hel* representasjonen. Representasjonen tar utgangspunkt i arealmodellen gjennom at markerte områdene definerer del og helhet. Figur 5 viser til tre av fire deler eller en av fire som er markert, avhengig av hva som definerer delen. At det er mulig å tolke figuren tvetydig resulterer i at én og samme figur kan tolkes til en rekke ulike brøker, noe som støtter opp om Kieren (1976) sin teori om at brøk ikke kan forstås som én enkel konstruksjon (seksjon 2.1.2). Gjennom del-av-hel representeres brøk som forholdet mellom delen og det hele, den ene uten den andre vil gjøre representasjonen meningsløs. Benyttes derimot *sammenlikning* for representering, utgjør delen og det hele to separate konstruksjoner. Figur 6 viser hvordan lengden 3 måler seg opp mot og kan sammenlignes med en lengde på 4 i brøken $\frac{3}{4}$. Dette er sammenlingnings-representasjonen, at de to lengdene skal sammenlignes for å skape assosiasjoner til brøken. Brøken representeres nå gjennom relasjonen mellom staven som måler «det hele», og målet som fastslår antall «deler». Brøken $\frac{3}{4}$ representeres i figuren, ved et forhold mellom mengdene til det hele som består av 4 og delen som består av 3. Watanabe (2002) presiserer at sammenliknings-representasjonen er spesielt godt egnet for å forstå brøk som forhold, da fokuset normalt rettes mot nettopp forholdet mellom delen og det hele (Watanabe, 2002). Cuisenairestaver som lengdemodell er i følge Watanabe (2002) et svært godt hjelpemiddel for å sammenlikne brøker. Dersom en benytter cuisenairestaver gjennom sammenlikningsrepresentasjonen for å sammenlikne to brøker, vil stavene på en naturlig måte hjelpe eleven til å se behovet for felles nevner. Eleven vil implisitt bli nødt til å komme frem til en felles nevner under resonneringen.

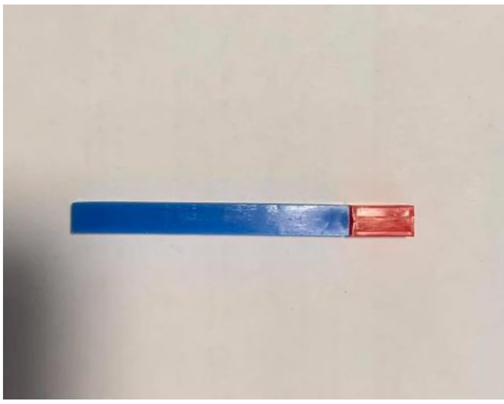
Watanabe (2002) viser til hvordan ulike konkretiseringsmateriell egner seg til de to ulike metodene for å representere brøk. Cuisenairestaver trekkes av Watanabe frem som et naturlig

[8] Figur 5 og 6 er hentet fra Wong og Evans (2008)

redskap for å forstå både sammenlikning- og del-av-hel. Cuisenairestavene finner sin naturlige plass i arbeid med sammenliknings-representasjonen, da to staver på en naturlig måte kan representere det hele og delen. I Figur 7 presenteres noen representasjoner av sammenlikningsmodellen. Hvis den mørk grønne staven representerer det hele vil den rød representerer $\frac{1}{3}$ av det hele, hvit representerer $\frac{1}{6}$ og lys grønn representerer $\frac{1}{2}$ av det hele. Skal man derimot bruke cuisenairestavene for å forstå brøk gjennom del-av-hel representasjonen er det viktig at brøkdelene inkluderes i den hele. Watanabe beskriver det som å «laget et tog» ved å plassere to staver med endene inntil hverandre. Figur 8 viser hvordan en rød og en blå stav sammen danner et forhold på $\frac{9}{11}$, der den blå representerer 9 av totalt 11 deler, men også at de et forhold på $\frac{2}{11}$, der den røde staven representerer 2 av totalt 11 deler.



Figur 7 Mørk grønn cuisenairestav definerer helheten i *sammenlikningsmodellen*. Hvit stav representerer en seksdel av helheten, rød representerer en tredel av helheten, og lys grønn representerer en todel av helheten.



Figur 8 Blå og Rød cuisenairestav representerer helheten gjennom *del-av-hel modellen*. Forholdet ni ellevedeler representeres når blå stav defineres som delen, mens to ellevedeler representeres når rød stav defineres som delen.

Watanabe (2002) retter oppmerksomheten mot noen utfordringer ved del-av-hel representasjonen. Når brøk representeres på denne måten, vil brøkdelene få to forskjellige roller på en gang. Delen er både én enhet i seg selv, men samtidig en del av den større enheten. Figur 8 viser at den blå staven har lengden 9, totalt sett utgjør den 9 av 11. Mange elever møter, i følge Wanatabe (2002), utfordringer ved å forstå hvordan en enhet kan spille to roller. Derfor er det viktig å forstå brøk som tall på siden av dette. Å forstå brøk som tall er svært viktig for å beherske for eksempel brøkoperasjoner og likeverdige brøker.

Hvilken *referanseenhet* en tillegger cuisenairestavene vil være avgjørende for hvilken oppfatning man har av forholdet mellom stavene (Wong & Evans, 2008). Med referanseenhet sikter Wong og Evans til hvordan delen og helheten defineres. For å demonstrere, vil noen eksempler på hvordan cuisenairestavene i Figur 7 og Figur 8 kan tolkes på forskjellige måter avhengig av referansepunktet, nå fremlegges. Figur 8 kan tolkes som at den blå staven utgjør $\frac{9}{11}$ av helheten dersom helheten er begge stavene. Endres derimot referanseenheten slik at den røde staven defineres som delen, tolkes figur 8 nå som $\frac{2}{11}$. Figur 7 kan også tolkes på en rekke ulike vis, avhengig av referanseenheten. Hvis vi ser for oss at lys grønn defineres som helheten og rød defineres som delen, vil de to stavene representere forholdet $\frac{2}{3}$. Endres derimot referanseenheten slik at den røde staven er helheten og lys grønn er delen representeres forholdet $\frac{3}{2}$. Altså kan denne representasjonen også tolkes som brøk større enn 1. I følge Wong og Evans er det svært viktig å være oppmerksom på at ulike referanseenheter skaper ulike kognitive prosesser, og at operasjoner med de ulike prosessene resulterer i ulike besvarelser. Å forstå at brøk må ha et referansepunkt, men at hva dette referansepunktet defineres til kan variere, er et viktig fundament i utviklingen av brøkbegrepet (Wong & Evans, 2008). Wong og Evans har observert at elever ofte kan bytte referansepunkt underveis i samme resonneringsprosess. Videre peker de på viktigheten av å være nøyaktig, spesielt under måle-arbeid eller lignende. Wong og Evans har også observert at utfordringer ofte oppstår på bakgrunn av at elever er unøyaktige i prosessen hvor inndeling og oppmåling foregår.

At det eksisterer ulike tolkninger vil alltid påvirke undervisningen med cuisenairestaver. Thompson (1994) presiserer at målet ikke er å lære bort den «korrekte» måten, men å tillegge kunnskap om det varierte spekteret av tolkninger. For læreren sin del er det også avgjørende å vite om de ulike tolkningene slik at en ikke gjør antakelser på feil grunnlag. Kommunikasjonen mellom lærer og elev kan enkelt briste dersom læreren ikke klarer å oppfatte det eleven ser. Thompson legger også til viktigheten av at elever kan konstruere mangfoldige tolkninger av materiell. At elever kan identifisere og relatere til ulike tolkninger vil gjøre det mulig å velge ut en aktuell tolkning til en gitt situasjon.

3.METODE

Denne studien utforsker elevers tolkninger av cuisenairestaver i arbeid med brøk. En kvalitativ tilnærming av forskningsmetode er bukt i studien. Den metodiske oppbyggingen av enhver forsking er i følge Rienecker og Jørgensen (2013) svært avgjørende, da selve kjernen i vitenskap handler om systematikk og metoder. Dette kapittelet vil beskrive forskningsmetodiske valg som er brukt underveis i prosjektet. Innledningsvis, presenteres forskningsdesign og valg av forskningsmetode. Hvorfor kvalitativt forskningsdesign er hensiktsmessig for å besvare studiens forskningsspørsmål vil her bli redegjort. Videre begrunnes valg av forsøksobjekter og de matematiske problemstillingene som er benyttet. Deretter beskrives prosessen for datainnsamling. Her redegjøres det for hvordan datamaterialet er bearbeidet. Deretter følger metoder for dataanalyse. Avslutningsvis diskuteres etiske betraktninger i forskningsarbeidet, behandling av personopplysninger, og til slutt forskningens troverdighet.

3.1. KVALITATIV FORSKNINGSMETODE

Kvalitativ forskning er en mye anvendt metode for oppbygging av en studie og dens datagrunnlag. Kvalitativ forskningsmetode går i hovedsak ut på hente ut mye data fra få forsøksobjekter. Kvalitativ forskning tilbyr dermed en unik innsikt og forståelse av et fenomen, i dette tilfellet elevers arbeid med cuisenairestaver og brøk. Forskeren undersøker spesielle kvaliteter og egenskaper ved fenomenet (Tjora, 2013). Metoden kjennetegnes av åpen interaksjon mellom forsker og informant, og at datamaterialet som regel består av utdypende tekst, ikke analytiske tall (Tjora, 2013). Forskeren og objektene, eller deltakerne, er altså i tett interaksjon med hverandre. Datamaterialet baseres i kvalitativ forskning på deltakerne sine egne handlinger (Johnson & Onwuegbuzie, 2004). Slik kan materialet som analyseres tilby kunnskap om et bestemt fenomen. Det er objektet som setter ord på fenomener som oppstår, og det er forskerens oppgave å fange dette og studere det videre. Tjora (2013) legger til at ulike individer kan ha fullstendig ulik oppfatning av samme fenomen. Derfor er det interessant å gå i dybden på det individuelle plan for å få et detaljert innblikk i elevens handling og prosesser som ligger bak handlingen. Samtidig må en være oppmerksom på at dette medfører at forskeren ikke kan ta resultatene som absolutte sannheter, nettopp fordi det er vanskelig å gjøre generaliseringer. Likevel vil funnene representere den gitte situasjonen og derfor gir det et innpass til å forstå fenomenet bedre.

Formålet med dette studiet er å undersøke hvordan 5. trinns elever tolker cuisenairestaver i arbeidet med brøk. Arbeidsoppgavene elevene jobbet med er innenfor kategorien sammenlikning av brøk. Valg av kvalitativ forskningsmetode i et slikt studie, åpner for muligheten til å få innsikt og forståelse av elevens arbeid. Studien vil hovedsakelig undersøke to fenomener: brøk og konkretiseringsmateriell. Senere vil det forklares at o*bservasjon* er det primære bidrag for datagrunnlaget i denne studien. Metoden observasjon kjennetegnes ved at forskeren deltar åpent eller skjult i folks liv for samle inn datamateriale for et gitt forskningsområde (Tjora, 2013). For å fange opp elevenes tolkninger underveis i observasjonen forutsetter det at forskeren har kjennskap til teori om konkretiseringsmateriell og brøk. Forberedelser til studien og observasjonen var dermed hovedsakelig preget av teori-innhenting, samt å danne et bilde av tidligere relevant forskning, for å skape en tilstrekkelig oversikt i forkant. Selve undersøkelsen gjennomføres under to sesjoner med observasjon. Under observasjons-sesjonene ble elevene satt i mindre grupper, med tre elever i hver. Observasjonene ble gjennomført i undervisningstid på et avlukket grupperom, for at hver elev skulle få ro til konsentrasjon og tenking. I etterkant av observasjonene, ble elevene fulgt opp med individuelle intervjuer. Disse ga elevene mulighet til å gå i dybden på funn som ble gjort under observasjoner.

3.1.1 OBSERVASJON SOM KVALITATIV FORSKNINGSMETODE

Å bruke observasjon som kvalitativ forskningsmetode tilbyr muligheten til å samle inn første-hånds data fra situasjoner der en handling naturlig oppstår. Observasjon som kvalitativ forskningsmetode benyttes av mange forskere da det kan være uoverensstemmelser mellom hva forskningsobjektet påstår det gjør og tenker, og hva det faktisk gjør. Metoden gir en førstehånds virkelighetssjekk av fenomenet (Cohen et al., 2018). Metoden går ut på å gjøre systematiske eller usystematiske notasjoner av hendelser, der forskeren bruker egne sanser for å ta i mot og observere alle mulige inntrykk (Tjora, 2013).

Dette studiet ble gjennom ført i to etapper, med to observasjonsgrupper. To grupper med tre elever i hver dannet studiets forskningsdeltakere. Videre utdypning av deltakerne presenteres i seksjon 3.2.1, mens begrunnelse for antall deltaker presenteres i seksjon 3.2.2. I dette studiet inntok forskeren en rolle som deltakende observatør. En slik rolle kjennetegnes ved at forskeren er en åpenbar observatør, og at forskningsobjektene er dette bevisst (Tjora, 2013). Forskeren var her til stede i samme rom under observasjonen, og leste og forklarte matematikkoppgavene. Forskeren fungerte også delvis som en lærer, og var disponibel til å svare på spørsmål. En granskende rolle hvor deltakerne ble stilt spørsmål underveis, ble inngått av forskeren, med et mål om å fremprovosere elevenes ord på deres handlinger. Spørsmål som «Kan du beskrive hva du tenkte når du kom frem til det svaret?» og «Hva gjorde du der?» var gjentakende spørsmål underveis i sesjonen. Hensikten med dette, var å få elevene til å reflektere rundt egne handlinger. Barn sine handlinger er ikke alltid bevisste og deres ordforråd og refleksjonsevne kan sette begrensninger på formidlingen. Det var derfor viktig at forskeren deltok som observatør for å kartlegge og nøste opp i elevens handlinger. I tillegg fungerte forskeren/observatøren som ordstyrer. Dette innebærer å passe på at kun en elev snakker om gangen, og å disponere tid og rom for hver elevs deltakelse i diskusjoner.

3.1.2 INTERVJU SOM KVALITATIV FORSKNINGSMETODE

Som introdusert tidligere, er «intervju» den andre av de to forskningsmetodene som benyttes i dette studiet. Intervju som kvalitativ forskningsmetode tilbyr forskeren muligheten til å grave i oppdagelser som omhandler det som ble sagt og sett. I tillegg tilbyr denne forskningsmetoden muligheter for å fange opp det som ikke har blir direkte uttalt (Cohen et al., 2018). Ved å være årvåken og påskrudd har forskeren, i følge Cohen et al. (2018), mulighet til å bemerke seg interessante hendelser og dermed dykke ned i emner underveis i en undersøkelse. Det er derfor viktig å fange opp og gå i dybden på et hvert utsagn for å kartlegge elevenes tolkning. Kontakten mellom intervjuer og intervjuobjekt er avgjørende for om datainnsamlingen skal bli verdifull (Kvale & Brinkmann, 2009). Kvale & Brinkmann presiserer at god kontakt mellom intervjuer og intervjuobjekt (subjekt) oppstår når intervjuer er en oppmerksom lytter, viser interesse, forståelse og respekt for subjektet, samt at intervjuer er klar og tydelig på hva han er ute etter å undersøke. Forskningsobjektene i denne studien er forskerens egne elever[9], hvilket gjorde det mulig å håndplukke elever hvor relasjonen mellom lærer og elev allerede er stabil. Rollen som deltakende observatør innebærer også å møte elevens utsagn og uttalelser med nysgjerrighet. Dette kan nås for eksempel ved å hyppig stille oppfølgingsspørsmål.

Semi-strukturert intervju er benyttet i dette studiet (Tjora, 2013). Cohen et al. (2018) beskriver kjennetegn ved semi-strukturert intervju gjennom en mal med forberedte spørsmål, og fleksibiliteten til å videre utforske emner utover disse konkrete spørsmålene. Intervjuformen egner seg i denne studien fordi slike intervjuer tilbyr en bred fleksibilitet til å tilpasse

[9] Avhandlingens forfatter har det siste året fungert som kontaktlærer for en 5. klasse. Elevene som er brukt som forskningsobjekter under datainnsamlingen i denne studien tilhører denne klassen

individuelle spørsmål til hvert forskningsobjekt med hensyn til de ulike benyttede oppgavene. Dette gjør semi-strukturerte intervjuer til en passende metode for datainnsamlingen i dette studiet.

Denne studien utnytter barn som intervjuobjekter. Å intervjue barn behøver en noe annerledes tilnærming enn ved studier på andre modne voksne, i følge Cohen et al. (2018). Forskjellen mellom barn og voksene, er hovedsakelig at barnet ikke er fullstendig utviklet når det kommer til kognitivitet, lingvistikk, mangel på oppmerksomhet, konsentrasjonsevner, evner til å memorere, og livserfaringer (Cohen et al., 2018). Intervjueren må derfor tre inn i barnets verden og forstå og tolke situasjonen gjennom barnets øyne. For at intervjuet skal bli vellykket, må altså rammene være tydelige og oppfattes som trygge. Forskeren sin rolle blir primært å være en god samtalepartner. Seksjon 3.2 redegjør nærmere for studiets deltakere. Her fremkommer det også hvorfor de valgte elevene ble ansett som en egnet gruppe for å danne et ønsket datagrunnlag i studien.

3.2 DATAINNSAMLINGSPROSESSEN

3.2.1 UTVALG DELTAKERE

Deltakerne i undersøkelsen er elever hentet fra 5. trinn på en barneskole i Trondheim. Forskeren kjenner elevene godt, og har fungert som deres lærer i en periode på ett år før studien ble gjennomført, men praktiserer ikke som deres lærer i faget matematikk. Relasjonen til elevene tilbyr enkelte fordeler til forskningsarbeidet. Kunnskap om elevenes konkrete ferdigheter innenfor ulike temaer i matematikk, innehar ikke forskeren i særlig grad. Selektering av elever til bruk i undersøkelsen er da blant annet gjort på bakgrunn av elevenes resultater på de nasjonale prøvene i faget. Nasjonale prøver i matematikk har som formål å gi kunnskap om elever fra 5.-, 8.- og 9.-trinns sine grunnleggende ferdigheter i regning (Utdanningsdirektoratet, 2019)[10]. Prøvens resultater gir en karakter fra 1 til 3, hvor 3 er best skår. Det bør nevnes at prøven i seg selv gir et relativt snevert bilde på elevenes faktiske ferdigheter i faget. Dette fordi oppgavene det testes i omfatter en liten del av matematikkfaget, og resultatet kan være påvirket av elevens dagsform. Allikevel gir prøven en pekepinn og en indikator for elevens matematiske ferdigheter som anses som tilstrekkelig ved selektering av denne studiens forsøksobjekter. To av deltakerne i studien resulterte på nivå 1, to deltakere på nivå 2 og to deltakere på nivå 3, etter de nasjonale prøvene i matematikk. For å anonymisere deltakerne, tildeles de herved

[10] Hva er nasjonale prøver: https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/nasjonale-prover/om-nasjonale-prover/

pseudonymer for videre bruk i avhandlingen. I den første observasjonsgruppen deltok elevene Britt (nivå 3), Trine (nivå 2) og Gaute (nivå 1), i den andre observasjonsgruppen deltok Per (nivå 3), Ole (nivå 2) og Pia (nivå 1). Studiens deltakere består dermed av totalt 6 elever. Hvor antall gutter og jenter er likt representert. Hensikten med spredningen i kjønn og nivå på nasjonale prøver er gjort på bakgrunn av ønsket om et bredt datamateriale som representerer mangfoldet i en elevgruppe. Et annet kriterie for utvalget av elever, er elevenes evne til å resonnere, og uttrykke og ordlegge seg. Dette samsvarer med Wong & Evans (2008) som i sin studie hevder at elever som er i en prosess der brøkferdigheter utvikles, kan være i stand til å utføre enkle brøkoppgaver, men har ofte utfordringer med å forklare eller argumentere for egen tenking. Derfor var det viktig velge ut deltakere på bakgrunn av deres evne til å ordlegge seg. Observasjoner og intervjuer ble alt lagret med en lydopptaker under undersøkelsene. Det var derfor viktig å prioritere og selektere elever som var flinke til å reflekter og sette ord på deres tanker.

3.2.2 PILOTUNDERSØKELSEN

I forkant av undersøkelsen, ble det gjennomført en pilotundersøkelse. Denne pilotstudien ble gjennomført på fire 5. trinns elever. Deltakerne Trine, Gaute, Ole og Pia deltok i pilotundersøkelsen. Oppgavene som ble gitt i pilotundersøkelsen var hentet fra Cramer, Wyberg & Leavitt (2008) sin artikkel, der temaet for oppgavene var sammenlikning av størrelser og addisjon av brøk (Vedlegg 2). Pilotundersøkelsen ble innledet med en kort innføring i cuisenairestaver, hvor det også ble skissert eksempler på hvordan forholdet mellom to cuisenairestaver kan representere brøk. Alle deltakere ble presentert med hvordan å bruke sammenliknings-representasjonen og del-av-hel representasjonen (begge beskrevet i seksjon 2.4), før de i felleskap med lærer konstruerte forholdene $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{7}$ med stavene. Elevene ble hele veien oppfordret til å løse oppgavene ved hjelp av cuisenairestaver. Det viste seg at elevene allerede hadde kjennskap til cuisenairestavene som konkretiseringsmateriell fra tidligere arbeid med heltall. Deltakerne hadde nemlig erfaring med cuisenairestavene fra multiplikasjonsundervisning tilbake på 3. trinn, så stavene var ikke helt fremmed.

Pilotstudien hadde hovedsakelig to formål. Det første formålet med å gjennomføre pilotundersøkelsen var å teste ut om observasjon som forskningsmetode fungerte som forventet, og om det ville være en god forskningsmetode for å hente ut den nødvendige og interessante dataen til hovedstudien. Underveis i pilotundersøkelsen ble det gjort refleksjoner rundt forskerens rolle under undersøkelsen. Det viste seg blant annet å være utfordrende å få innblikk i alle elevenes tanker. Selv i et observasjons-studie med kun fire deltakere, var det utfordrende å fange opp tilstrekkelig observasjoner av alle forskningsobjektene. Flyten ble påvirket av at alle elevene skulle få komme til ordet og utdype sine resonnementer. Justeringer måtte gjøres for at observatøren skulle kunne fange opp riktige observasjoner og skape flyt, og dermed sørge for troverdighet i studien. En justering som ble gjort fra pilotstudien var å tilpasse gruppestørrelsen. Gruppene ble nedjustert fra fire til tre deltakere per observasjonsgruppe. I tillegg ble det vurdert som hensiktsmessig å gjøre intervjuer av deltagerne i etterkant av observasjonene. Dermed ble studiens omfang utvidet til å benytte både observasjon og intervju som forskningsmetoder. Hensikten med to forskningsmetoder er å dypdykke i materien, samt å ha muligheten til å fange momenter som ellers ville gått tapt dersom kun en forskningsmetode ble benyttet.

Det andre formålet til pilotstudien var å få innsikt i elevens evne til å håndtere cuisenairestaver i arbeidet med brøk. Temaet addisjon av brøk med lik nevner ble valgt. Dette var et tema som elevene jobbet med i matematikktimene parallelt med undersøkelsen. Å arbeide med brøk med lik nevner lå derfor friskt i minne. Når det gjaldt elevens ferdigheter med cuisenairestaver i arbeidet med addisjon av brøk, viste resultatet av pilotundersøkelsen at elevene hadde lite erfaring med cuisenairestaver. Det så ut til at elevene forsøkte å tilpasse arbeidet med cuisenairestavene til addisjonsalgoritmen. Cuisenairestavene ble i noen sammenhenger brukt til å representere symbolene likhetstegnet og brøkstrek. Det totale inntrykket var at regneoperasjonen var et for komplisert sted å introdusere cuisenairestavene til brøkbegrepet. Det kan derfor se ut til at konkretiseringsmateriellet fungerte mot sin hensikt. Oppdagelsen av at elevene må lære å kjenne konkretiseringsmateriellet før det kan fungerer som et hjelpemiddel (beskrevet i seksjon 2.2.5) førte til noen tilpasninger av studien. I forkant av hovedstudien ble det satt av to undervisningstimer hvor elevene jobbet med cuisenairestaver i ulike brøk-kontekster. I tillegg ble studiens problemstilling, og dermed dens fokusområde og motivasjon, modifisert noe. Studien endret fokus fra addisjon av brøk ved bruk av cuisenairestaver, til å ta for seg ulike tolkninger av cuisenairestaver. Modifiseringen ble gjort på bakgrunn av at addisjon av brøk er en direkte regneoperasjon, noe som anses å kreve en mer kompleks forståelse av brøken. Operasjoner inneholder flere prosedyrer og komponenter som kan gjør slike tankeprosesser mer komplekse og dermed mer utfordrende å observere, fange opp og analysere (Lamon, 2012). Matematikkoppgavene i hovedstudien fokuserer på forhold mellom cuisenairestavene, og elevenes tolkninger ble dermed det videre fokuset i forskningen.

3.2.3 UNDERVISNINGSØKTER MED CUISENAIRESTAVER

For å sikre en viss basiskunnskap om cuisenairestavene i forkant av selve datainnsamlingen, ble det i forkant gjennomført to undervisningsøkter, hver på to gange 45 minutter. Hensikten med øktene var å gjøre eleven kjent med cuisenairestavene i arbeidet med brøk. Som fastslått tidligere, hadde elevene noe kjennskap til cuisenairestaver da de hadde brukt slike i kontekster med multiplikasjon. Selv om elevene hadde noe kjennskap til konkretiseringsmateriellet i arbeid med heltall, var det hensiktsmessig å gi en introduksjon av hvordan stavene også kunne brukes i arbeidet med brøk. Dette hadde relevans fordi meningsinnhold og bruk av cuisenairestavenes endrer seg betraktelig fra heltalls-tenking til resonnering med rasjonale tall.

Den første undervisningsøkten gikk med til at elevene ble kjent med konkretiseringsmateriellet. Elevene lagde forhold som en to-del, tre-del, fire-del og ti-del. Elevene gikk senere sammen i par hvor de konstruerte liknende matematikkoppgaver til hverandre. Siste halvdel av denne undervisningsøkten gikk med til arbeid med sammenliknings-representasjoner og del-av-hel representasjoner. Disse representasjonsformene er gjort rede for i seksjon 2.4.

Den andre undervisningsøkten skjedde to dager senere. Timen ble innledet med repetisjon av viktige momenter fra første økt. Deretter fulgte et undervisningsopplegg skissert av Lamon (2012), om hvordan å inkludere cuisenairestaver i undervisningen. Hovedmomentet ved opplegget skal være, i følge Lamon, at cuisenairestaver er et konkretiseringsmateriell som egner seg for å lære om forholdet mellom del og helhet. Undervisningen har derfor som budskap å poengtere nettopp en slik bruk av stavene. Som forklart i kapittel 2, vil ikke stavene i seg selv ha noen verdi før dens enhet er definert. Først etter dette vil det være mulig å gjøre sammenlikning. Dette gjør at opplegget egner seg for å arbeide med både sammenlikning- og del-av-hel representasjonen. Oppgavene som egner seg for introduksjon av cuisenairestaver (Lamon, 2012, s.74) skisseres som følger:

1.

Hvis svart cuisenairestav er enheten, så betyr det at grønn stav er $\frac{3}{7}$

2.

Hvis gul cuisenairestav er enheten, hva er forholdet mellom gul og grønn stav?

3.

Er forholdet mellom lilla og mørk grønn det samme som forholdet mellom rød og lilla stav?

4.
Er forholdet mellom lilla og blå stav det sammen som forholdet mellom rød og gul stav? (Lamon, 2012, s. 74)

Oppgaven tilbyr muligheten til å koble stavene til referansebrøker som en hel og en halv, og diskutere begreper som «større en» og «mindre enn». Underveis i arbeidet med oppgavene ble elevene introdusert i hvordan å bruke begge representasjonene til Watanabe (2002), og de ble oppfordret til å ta i bruk begge disse tolkningene. De to undervisningsøktene var lagt opp til samarbeidsoppgaver og diskusjon. Ett av fokusområdene var å bevisst veksle mellom sammenliknings- og del-av-hel representasjonene (Watanabe, 2002), samt å diskutere en elevs besvarelser i felleskap.

3.3 ELEVENES MATEMATIKKOPPGAVER I STUDIEN

Under observasjonen fikk elevene utdelt fire matematikkoppgaver. Disse oppgavene er listet i Vedlegg 1. Enkelte av oppgavene i oppgavesettet besto av deloppgaver. Innledningsvis i observasjonen ble oppgavesettet utdelt til alle deltakerne. Hver oppgave ble innledet med en introduksjon fra forskeren. Den observante leser husker trolig at forskeren bak denne studien også fungerte som en lærer under undersøkelsene. Innledningen besto som regel av at elevene skulle ta frem to staver for å beskrive et forhold. For å ikke legge noen føringer som kunne lede til tolkninger fikk elevene kun oppgitt stavenes fargekode. De måtte så plassere stavene på en hensiktsmessig måte[11]. Denne tilnærmingen gjorde det mulig å observere hvordan elevene tolket forholdet mellom cuisenairestavene. Etter hver innledning jobbet deltakerne individuelt med problemet, etterfulgt av en felles diskusjon hvor deltakerne la frem sine resonnementer. Når en oppgave var ferdig diskutert ble neste oppgave introdusert og påbegynt, der den samme prosedyren fulgte. Arbeidet med oppgavesettet tok omlag 45 minutter. Alle oppgavene var formulert som tekstoppgaver, og oppgavene oppfordrer elevene til å vise svaret ved bruk av cuisenairestaver.

[11] Måten cuisenairestavene blir plassert(av eleven beskriver elevens tolkning. Ulike måter å tolke cuisenairestavene er beskrevet i seksjon 2.3.1.

3.3.1. OPPGAVE 1

Oppgave 1a: Hvilke forhold ser du i klossene? (lilla og brun stav)

Oppgave 1b: Kan du forstå disse klossene som noe annet enn $\frac{3}{5}$*?*

Både Oppgave 1a og Oppgave 1b er inspirert av publikasjonen til Evans og Wong (2008). Wong og Evans (2008) gjennomførte en studie av 646 tredje- til femte-trinn elever sine ferdigheter i brøk som måling. Som nevnt i seksjon 2.4, viser deres forskning til hvordan ulikt referansepunkt vil føre til ulik tolkning av forholdet mellom cuisenairestavene. Formålet med Oppgave 1a og Oppgave 1b er å kartlegge hvordan deltakerne tolker cuisenairestavene, og hvilken referanseenhet elevene tilegner stavene. Eksempler på tolkninger her er jo sammenliknings- og del-av-hel representasjon vi nå er godt kjent med. Om man sammenlikner en stav med en annen stav, hvor en stav staven utgjør delen og den andre utgjør helheten, kan tolkningen knyttes til representasjonen som Watanabe kaller sammenliknings-representasjonen. Om stavene settes sammen til én enhet der begge stavene utgjør helheten og én av stavene utgjør delen, kan tolkningen knyttes opp mot del-av-hel representasjonen. Disse representasjonene ble blant annet introdusert i seksjon 2.4.

3.3.2. OPPGAVE 2

Oppgave 2a

Hvis denne staven er enheten (lilla stav), hvilken stav kan legges til for å få forholdet $\frac{3}{4}$*?*

Oppgave 2b

Disse stavene har samme forhold. Finn den manglende staven x (rød og gul til x og oransje).

Oppgave 2 er også inspirert av Wong og Evans (2008) sin studie av elevers ferdigheter i brøk som måling. I deres studie svarte og resonnerte 45% av deltakerne riktig på Oppgave 2a. Oppgaven går ut på å finne cuisenairestaven som tre fire-deler av det hele. Staven som vises frem til eleven er lilla, som medfører at elevene blir bedt om å finne frem til den røde staven. Denne oppgaven vil avdekke om elevene kan identifisere forholdet mellom to cuisenairestaver. En forutsetning for å oppdage forholdet mellom stavene er å behandle de to stavene som én enhet, ikke to separate mengder som kan være naturlig i heltall-tenking. Denne oppgaven inviterer til å tolke brøk gjennom sammenliknings-metoden fordi den lilla staven allerede er definert som helheten. Oppgaven spør altså etter en stav som kan sammenliknes opp mot den lilla ved bruk av Watanabe sin sammenlikningsmetode.

Oppgave 2b har to ulike innfallsvinkler, avhengig om en tolker stavene som sammenlikning eller del-av hel. Tolkes stavene som sammenlikning, vil rød og gul stav vise til et forhold på $\frac{2}{5}$. Tolkes stavene gjennom del-av-hel metoden, kan stavene tolkes som enten $\frac{2}{7}$ eller $\frac{5}{7}$. Svaret på oppgaven vil her bli lilla stav uansett om stavene tolkes som sammenlikning eller del-av-hel. Denne oppgaven er inspirert av Charalambous & Pitta-Pantazi (2007, s. 314). En forutsetning for å klare Oppgave 2b er å forstå at delen må øke i takt med det hele. Forholdet mellom de to konstruksjonene skal være identisk.

3.3.2. OPPGAVE 3

Oppgave 3

Bruk cuisenairestavene til å avgjøre om forholdet mellom parene er det samme eller ikke. Begrunn svaret ditt.

a. *Gul til oransje; oransje til grønn*
b. *Hvit til grønn; grønn til mørk grønn*
c. *Mørk grønn til blå; grønn til lilla*
d. *Brun til oransje; lilla til gul*
e. *Grønn til blå; hvit til rød*

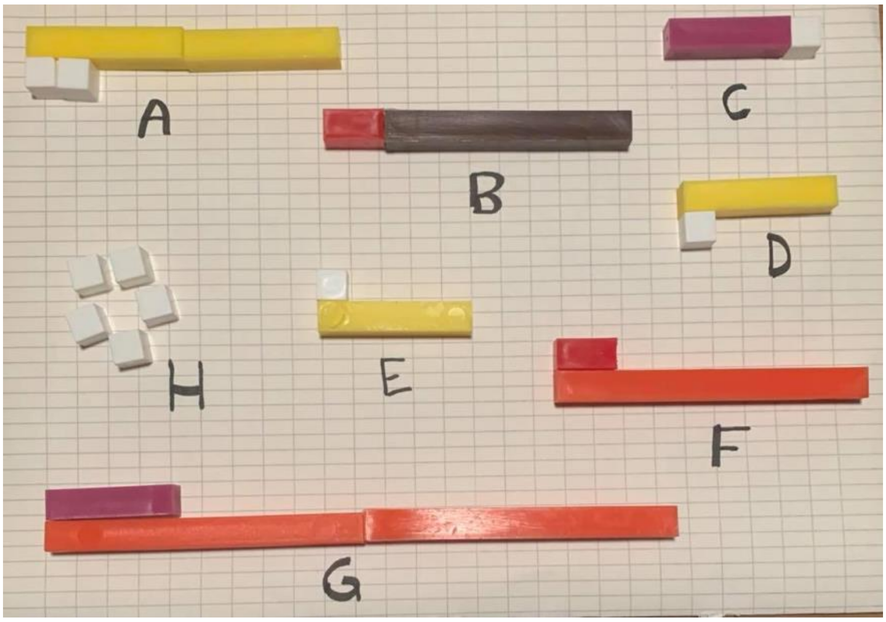
Oppgaven, som er hentet fra Lamon (2012, s. 86), går ut på å sammenlikne størrelser. Kunnskap om likeverdige brøk, halve-, kvarte og tredjedels størrelser er en forutsetning for å sammenlikne størrelsene. Enkelte av oppgavene kan løses gjennom resonnering ut i fra begrepene som nylig er blitt nevnt. Andre oppgaver løses ved hjelp av måling og identifisering av forholdene. Også i denne oppgaven vil det være avgjørende om cuisenairestavene tolkes gjennom sammenliknings- eller del-av-hel metoden. Ta for eksempel Oppgave 2c, hvor eleven skal finne ut om forholdet mellom mørk grønn og blå er det samme som forholdet mellom grønn og lilla. Tolkes stavene gjennom sammenliknings-metoden, vil mørk grønn og blå stav kunne tolkes som et forhold på $\frac{6}{9}$, mens grønn og lilla stav representerer forholdet $\frac{3}{4}$. Legges derimot stavene etter hverandre som et tog og tolkes gjennom del-av-hel metoden, kan forholdene tolkes som henholdsvis $\frac{6}{15}$ eller $\frac{9}{15}$ for mørk grønn og blå, og $\frac{3}{7}$ eller $\frac{4}{7}$, avhengig av hvordan delen defineres[12]. Forskjellen på de ulike tolkningene avhenger av hvilken stav som defineres som delen i del-av-hel metoden. Til felles har alle størrelsene at de har verdi et sted mellom en halv og tre fire-deler. Det er dermed ikke en selvfølgelighet å bedømme om forholdene er identiske eller ei. En må være bevisst på at oppgavene kan tolkes på ulike måter og forholdet mellom stavene vil variere avhengig av tolkningen. Et annet eksempel på dette kommer til syne når de to metodene benyttes for å løse Oppgave 2a. Ved å benytte sammenliknings-metoden vil den gule og den oransje staven representere et forhold som tilsvarer $\frac{5}{10}$, likeverdig med $\frac{1}{2}$, mens forholdet mellom den oransje og den grønne staven tilsvarer $\frac{3}{10}$. Benyttes derimot del-av-hel metoden vil forholdet mellom stavene bli annerledes. Da vil den gule og den oransje staven vise til forholdet $\frac{5}{15}$, likeverdig med $\frac{1}{3}$, men grønn og oransje har forholdet $\frac{3}{10}$. Forholdet mellom gul og oransje stav kan altså representere både $\frac{1}{2}$ (sammenliknings-representasjon) og $\frac{1}{3}$ (del-av-hel representasjon), mens forholdet mellom grønn og oransje stav kan både representere $\frac{3}{10}$ (sammenliknings-representasjon) og $\frac{3}{13}$ (del-av-hel representasjon). Gjennom denne observasjonen betyr det at forholdet mellom den gule og den oransje staven vil vokse betraktelig i forhold til grønn og oransje stav dersom sammenlikningsrepresentasjon benyttes fremfor del-av-helrepresentasjon. Ser en videre på Oppgave 2d, hvor forholdet mellom stavene er identisk, vil valg av metode påvirke størrelsen på forholdet mellom stavene. De to figurene vil likevel bevare det samme forholdet til hverandre, henholdsvis $\frac{5}{9}$.

3.3.3. DEN FJERDE OPPGAVEN

Oppgave 4

Hvilken av disse figurene kan illustrere forholdet $\frac{1}{5}$?

[12] Her kan det være hensiktsmessig å ta en titt på beskrivelsen av sammenlikning- og del-av-hel representasjonene (figur 7 og 8) til Watanabe (2002) i avhandlingens seksjon 2.3.1.



Figur 9 Oppgave 4 i oppgavesettet. Hvilke av figurene illustrerer forholdet en femdel? Figurene A-G kan alle tolkes som en femdel.

Oppgaven er inspirert av Ni (2001, s. 415) sin studie av 5.- og 6. trinn elever sine ferdigheter i likeverdig brøk. Elevene fikk se et brett (figur 9) med ulike representasjoner der oppgaven gikk ut på å identifisere figurene som kunne illustrere $\frac{1}{5}$. Oppgave 4 går ut på at elevene skal betrakte åtte sett med staver og tolke hvilke av dem som kan representere et forhold på $\frac{1}{5}$.
Alle stav-settene i Figur 9, bortsett fra sett H, kan tolkes som $\frac{1}{5}$ så oppgaven vil hovedsakelig undersøke hvor mange ulike former for en fem-del eleven klarer å finne. For å finne alle de ulike representasjonene, er eleven avhengig av å forstå at $\frac{1}{5}$ beskriver forholdet mellom cuisenairestavene.

På brettet er det presentert en rekke varianter av del-av-hel- og sammenliknings-representasjon (Watanabe, 2002). Selv om disse representasjonsmetdoene ble introdusert i kapittel 2, og er blitt trukket frem en rekke ganger igjennom denne avhandleingen, anses det nå som hensiktsmessig med en kort repetisjon og presisering av disse tolkningene. I sammenlikningsrepresentasjon utgjør det hele og delen to separate konstruksjoner, der forholdet mellom to cuisenairestaver utgjør brøk. Brøk representeres gjennom relasjonen mellom stavene der en av staven representerer helheten, mens den andre representerer delen (Watanabe, 2002). Del-av-hel representasjon handler om å betrakte de to cuisenairestavene som en samlet enhet gjennom at brøkdelen er inkludert i det hele. Her representeres stavene som forholdet mellom delen og det hele ved at stavene plasseres etter hverandre. Oppgaven gir innblikk i om det er del-av-hel- eller sammenliknings-representasjon som er mest intuitiv for eleven.

I figur 9, er stav-settene B og C presentert gjennom del- av- hel representasjon, og A, D, E, F og G er presenter via sammenliknings-representasjoner. Sett H er det eneste settet som ikke illustrerer forholdet $\frac{1}{5}$. Alle settene er laget for å undersøke spesifikke egenskaper ved elevens brøkforståelse. De består av ulike lengder og plasseringer der hensikten er å fange opp svakheter i elevenes tolkning. I den kommende seksjonen beskrives de ulike stav-settene med en oversikt over egenskaper og potensielle tolkninger:

A: Settet er sammensatt av to gule og to hvite staver i sammenlikningsrepresentasjon. Hensikten med settet er å undersøke om lengden påvirker elevens forståelse av forholdet. De gule stavene er plassert ovenfor de hvite. Det blir dermed særlig interessant å observere om eleven tolker dette som en brøkverdier større enn 1 ved å knytte stavene til eksisterende kunnskap om at den analytiske notasjonen av brøk innebærer teller over nevner. Cuisenairestavene representerer i midlertid kun forholdet mellom stavene, så plasseringen til stavene burde derfor ikke påvirke forholdet.
B: Settet er del-av-hel fremstilling der en rød og en brun stav er plassert etter hverandre. At eleven tolker figuren som $\frac{1}{5}$ avhenger av hvilken stav som utgjør delen og det hele.
C: Settet er likedann som figur B. Settet er en del-av-hel fremstilling der lilla og hvit stav er plassert inntil hverandre som et tog. At eleven tolker figuren som $\frac{1}{5}$ avhenger av hvilken stav som utgjør delen og det hele. Sett C er annerledes fra sett B da den største staven er plassert først i rekken.
D: Settet er sammensatt av en gul og en hvit stav som sammenliknings-representasjon. I likhet med figur A er den største staven plassert ovenfor den minste. Dermed må eleven tolke forholdet mellom stavene fremfor å fokusere på plassering. En mulig tolkning er som en brøk større enn 1 der den gule staven representerer delen og den hvite representerer helheten. Denne tolkningen vil gi et forholdet $\frac{5}{1}$, ikke $\frac{1}{5}$.Tolkningen av cuisenairestaver som brøk større enn 1 har felles trekk med den symbolske brøknotasjonen som består av komponentene teller, nevner og brøkstrek.
E: Settet er sammensatt av en gul og en hvit stav som sammenliknings-representasjon.

F: Settet er sammensatt av en rød og en oransje stav som sammenliknings-representasjon. Settets struktur er på mange måter likt sett A, men stavene har doble lengder. Stavenes størrelse har til hensikt å utfordre elevens bruk av strategi.

G: Settet er sammensatt av en lilla og to oransje staver som sammenliknings-representasjon. Stavene har til hensikt å utfordre elevenes tolkning når det kommer til større størrelser. Forholdet mellom stavene er $\frac{1}{5}$, men lengden forutsetter at eleven har en strategi til grunn for å tolke forholdet mellom de to stavene.

H: Sett H viser fem individuelle cuisenairestaver i en mengdemodell. Figuren illustrerer i midlertid ikke et forhold på $\frac{1}{5}$. Ettersom stav-settet består av fem objekter, kan trolig enkelte deltakerne tolke figuren som $\frac{1}{5}$. Forholdet $\frac{5}{5}$ anses som mer treffende.

3.4 BEARBEIDING OG ANALYSE AV DATA

3.4.1 TRANSKRIPSJON

Lydopptakene av alle observasjoner og intervjuer ble de påfølgende dagene transkribert. Dette er i følge Tjora (2013) en sensitiv fase hvor det er mye datamateriale som kan gå tapt. Dette begrunnes ved at det ikke finnes noen objektiv og entydig oversettelse fra muntlig til skriftlig form. Det ble derfor lagt fokus på å gjengi det eksakte innholdet fra samtalene. Dermed var det lagt til rette for å senere ta materialet opp igjen for å denne et inntrykk av elevenes antatte forståelse. Bilder av elevenes besvarelser ble også gjort underveis for å berike datamaterialet og forankre den nedskrevne samtalen. Tjora (2013) understreker at det som oppfa

ttes som nyttig av observatøren i den konkrete situasjonen kan forandre seg underveis i studie og analyse-prosessen. Nye viktige temaer og innvendinger om hva som må utforskes på detaljnivå kan oppstå underveis i forskningsarbeidet (Tjora, 2013). Derfor var det viktig å notere ned eksakt hva som ble sagt underveis, med et spesielt fokus på pauser, nøling og fomling med ord. I følge Tjora (2013) er detaljer som pauser, nøling eller vanskeligheter for å ordlegge seg tegn på usikkerhet, og vil derfor være av betydning i analysen.

Følgende tegnsetting og koder ble brukt under transkriberingsprosessen for å markere nøling, pauser og trykk på ord:

Tegn/kode	Betydning
...	Nøling under 3 sekunder
(...)	Kort pause over 3 sekunder
Tekst i kursiv	Legger trykk på ordet
(Tekst i Parentes)	Beskrivelse av utført handling

Tabell 1 Tegn/kode og betydning i transkripsjon

Observatøren omtales som «Lærer» i transkribtet. Dette gjør det tydelig å skille mellom hva observatør/forsker og deltakere uttaler i teksten. Samtalene er delt inn i *Undersøkelsesutdrag* nummerert fra 1 til 10. Dermed blir det enklere å referere til spesifikke samtaler senere i teksten.

3.4.2 ANALYSEPROSESSEN

Analyseverktøyet som er brukt i denne studien består av en tredelt kodeprosess. Metoden er en systematisk prosedyre der selve analyseprosessen skjer i de tre stegene: Åpen koding, aksial koding og selektiv koding. Denne analyseprosedyren er inspirert av Postholm & Jacobsen (2018). Kodingen handler om å kategorisere datamaterialet slik at det blir strukturert ved hjelp av begreper. I delkapittel 3.4.3 presenteres en Tabell 2 der kategorier og under-kategorier systematiseres.

I fasen med åpen koding blir datamaterialet studert, sammenliknet, satt begrep på og kategorisert. Hovedpoenget med åpne koding er i følge Postholm og Jacobsen (2018) skille ut kategorier fra et stort antall koder. Slik blir hovedkategorier utviklet. Hovedpoenget med åpne koding er i følge Postholm og Jacobsen (2018) å skille ut kategorier fra et stort antall koder. Denne prosessen skjedde i flere ulike nivåer. Innledningsvis ble transkripsjonen gjennomgått og kodet, for så å grupperes inn i kategorier kalt konsepter. Konseptene besto nå av en mengde koder som passet i kategorien. I denne fasen handlet det hovedsakelig om å sortere funnene for å se om det fantes none mønstre som skulle videre utforskes. Konseptene fikk foreløpige navn som hadde til hensikt å skille funnene, vel vitende om at navnene kom til å måtte tilpasses. Ofte var det vanskelig å avgjøre hvor kodene skulle plasseres fordi en og samme kode passet inn i flere konsepter.

I fasen med aksial koding blir hovedkategorier og underkategorier utviklet (Postholm & Jacobsen, 2018). Denne fasen innebærer en ytterliggere strukturering av datamaterialet gjennom å lage koblinger mellom kategori og underkategorier. Arbeidet startet med å markere funnene med ulike farger for å selektere datamaterialet. Det var her tydelig at enkelte funn kunne relateres til andre og noe som gjorde at kodene kunne settes i system til hverandre, det dannet seg et mønster. I dette arbeidet ble det synlig at elevene tolket forholdet mellom cuisenairestavene på svært ulikt vis, og tolkningene egnet seg i ulike situasjoner. Koder som tok for seg hvordan oppfattet Enheten ble kategorisert i underkategoriene Én enhet og Separate enheter, de to underkategoriene skilles i hvor vidt tolkningene tar utgangspunkt i brøk-egenskaper eller ei[13]. Det ble også gjort en rekke funn som tar for seg ulike Referanseenheter eller fokusområder som tilegnes cuisenairestavene. Kodene som var kategorisert i Del-av-hel, Sammenlikning og Brøkverdier større enn 1, ble satt i system som subkategorier til hovedkategorien Referanseenheten. Disse dannet en viktig kategori for denne studien ettersom at kategoriene forteller noe om at ett og samme cuisenairestav-par kan representeres på ulike måter, som igjen resulterer i ulike besvarelser. Kategoriene beskrives i seksjon 2.4.3.

I fasen med selektiv koding settes bitene sammen til en helhet gjennom å relatere alle kategoriene til hverandre (Postholm & Jacobsen, 2018). I denne fasen var det tid for å analysere hver enkelt tolkning som elevene hadde. Det ble undersøkt hva slags påvirkning tolkningen hadde for valg av strategi, samt hvilke muligheter og begrensninger tolkningen tilbød. På dette tidspunktet var det tid for å bruke kategoriene til å bygge en historie. Noen kjerneelementer ble viktigere enn andre, blant annet var funn som knyttet cuisenairestavene til Brøkverdier større enn 1, og tolkninger av stavene som Separate enheter mer interessante enn andre fordi disse funnene sa noe om utfordringene ved bruk av cuisenairestaver. I den selektive kodingsprosessen ble det også valgt bort funn som var mindre konstruktive for historien. For eksempel ble det gjort funn der elevene brukte cuisenairestaver som byggeklosser for å lage likhetstegnet og brøkstreken. Disse kodene ble valgt bort fordi studien fokuserer på hvordan elevene betrakter forholdet mellom stavene. I neste seksjon beskrives kategoriene som ble til i arbeidet med kodingen.

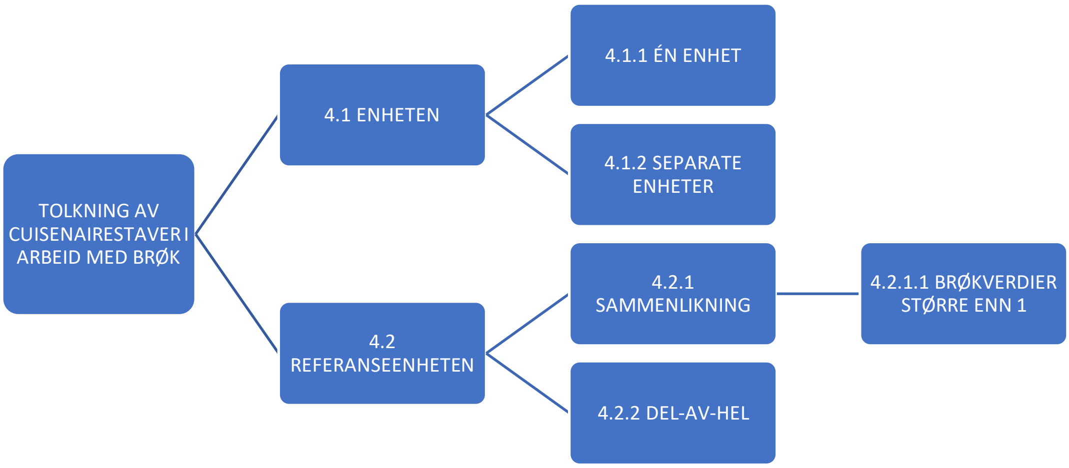
Siden dette er en kvalitativ studie presenteres tolkningene med en eller flere eksempler fra datamaterialet. Tolkninger som inneholder flere enn ett utdrag inneholder enkelte nyanser som skiller seg ut. Før hvert funn presenteres hyppigheten av funnene. Om funnene skjer èn eller flere ganger vil være beskrevet eksplisitt. I studien vil det både være interessant å ha med funn

[13] Hovedkategorier og underkategorier utdypes nærmere i seksjon 2.4.3.

som forekommer ofte fordi det gir et bilde av flertallet av deltakerne sine. Funn som forekommer én eller få ganger vil også være av relevans for denne studien fordi variasjon av elevtolkninger beskriver omfanget.

2.4.3 BESKRIVELSE AV KATEGORIER

I tabell 2 illustreres hovedkategorier og underkategorier. Påfølgende vil kategoriene utdypes nærmere.



Tabell 2 Oversikt over analysekapittelets kategorier

Den første av de to hovedkategoriene fikk navnet «Enheten». Denne kategorien sier noe om hvordan elevene betrakter samspillet mellom cuisenairestavene. Som regel i denne studien opptrådde cuisenairestavene i par, der forholdet mellom stavene kobler konkretiseringsmateriellet til brøk. Cuisenairestavene i seg selv er kun noen fysiske brikker bestående av ulike lengder og farger, først når de anvendes i en passende kontekst vil mening oppstå. Hvordan Enheten ble tolket viste seg i midlertid å variere fra elev til elev. Enkelte elever brukte konkretiseringsmateriellet aktivt i sin argumentasjon om forhold, mens andre elever behandlet cuisenairestavene nærmest som separate verdier gjennom behandling som heltall. Underkategorien Én enhet tar for seg tolkninger der elever betrakter forholdet mellom cuisenairestavene. Separate enheter er den andre underkategorien av Enheten. Funn i denne kategorien omfatter tolkninger der stavene behandles som individuelle mengder. Denne tolkningen kan anses som en kontrast til kategorien Én enhet fordi funn i denne kategorien viser en svært lav korrespondanse mellom cuisenairestaver og brøk, selv i arbeidet med brøkoppgaver. Kategorien Separate enheter viser til funn der elever omtaler cuisenairestavene gjennom ikke-brøk-relaterte egenskaper, og er derfor mindre heldig da cuisenairestavene knyttes til brøk når de blir brukt til å representere et forhold.

Den andre av de to hovedkategoriene fikk navnet «Referanseenheten». I denne kategorien gjøres de et dypdykk i hvordan elevene oppfatter forholdet mellom stavene. Forholdet mellom stavene kan tolkes på ulikt vis avhengig av hvordan delen og helheten i figuren oppfattes (Wong & Evans, 2008). Kategorien tar utgangspunkt i forskningen til Watanabe (2002) og Thompson (1994) som viser til en rekke ulike måter å tolke konkretiseringsmateriell i arbeid med brøk. Forskningen viser til funn der identisk konkretiseringsmateriell kan tolkes til en rekke ulike brøk. Funn i denne kategorien bygger på at helheten defineres, og at dette kan skje på to måter, enten at begge stavene utgjør helheten (del-av-helrepresentasjon) eller en av stavene utgjør helheten (sammenlikningsrepresentasjon). Deretter defineres stavene som del og helhet. Disse representasjonene dannet underkategoriene Sammenlikning og Del-av-hel. Kodene er basert på Watanabe (2002) sin teori som er presentert i delkapittel 2.4 i teoridelen. Underkategorien Del-av-hel presenterer funn der de to cuisenairestavene som en samlet enhet gjennom at brøkdelen er inkludert i det hele. Kategorien representerer brøk som forholdet mellom delen og det hele ved at ved at stavene plasseres inntil hverandre som et tog. Funn i denne kategorien viser til to måter å tolke som del-av-hel. De to tolkningene avhenger av hvilken av stavene som utgjør delen. Presenteres en hvit og en rød stav som Del-av-hel kan figuren både tolkes som $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$ avhengig av om hvit eller rød stav tolkes som delen. Funn i kategorien Sammenlikning kjennetegnes av en tolkning der stavene utgjør to separate enheter, en av stavene representerer delen og den andre helheten. Som navnet sier sammenliknes de to stavene opp mot hverandre for å beskrive forholdet. En underkategori til Sammenlikning ble utviklet og fikk navnet Brøkverdier større enn 1. Funn som presenteres i denne kategorien kjennetegnes av at cuisenairestavene tolkes som Brøkverdier større enn 1. Tolkningen forekom i situasjoner der cuisenairestavene ble plassert som sammenlikningsrepresentasjon (delkapittel 2.4) der den lengste av de to stavene plasseres ovenfor den korteste. Situasjonene der cuisenairestaver ble tolket som brøk større enn 1 forekom utelukkende i sammenheng med sammenlikningsmetoden, derfor utgjør det en underkategori. Denne tolkningen er i stor grad basert på den symbolske brøknotasjonen der brøken er uekte dersom teller har høyere verdi enn nevner. Felles for alle kategoriene i Referanseenheten er at de beskriver ulike måter å tolke cuisenairestavene i brøkkontekster. Det videre arbeidet gikk ut på å undersøke hvordan tolkningene ble tatt i bruk.

3.5 FORSKNINGSETIKK OG BEHANDLING AV PERSONVERNOPPLYSNINGER

En forsker må forholde seg til en rekke etiske betraktninger i sitt arbeid med en studie. I etikklære stilles spørsmål om hva som er godt og dårlig, riktig og galt (Cohen et al., 2018). Generelle etiske betraktninger som tillitt, konfidensialitet, gjensidighet og respekt vil påvirke kontakten mellom forskeren og studiens deltakere (Tjora, 2013). I forskningsarbeidet er det en rekke etiske aspekter som må tas hensyn til, både før, underveis og etter datainnsamlingen er gjennomført. All forskning som foretas i Norge skal skje i henhold til regelverket, prosjektet ble derfor meldt inn til Norsk senter for forskningsdata (NSD). Før forskningsarbeidet startet ble prosjektet godkjent av NSD (se vedlegg 5). Neste steg var å få samtykke fra deltakerne, skjema ble sendt ut til alle deltakerne (se vedlegg 4). Ettersom at alle deltakerne i prosjektet er under 18 år var det nødvendig med samtykke fra barnas foresatte. I brevet var det lagt ved informasjon om studien, i tillegg var det påpekt at elevene ville anonymiseres. Det var opplyst om deltakerne mulighet til å trekke seg fra studiet. Avslutningsvis var det lagt ved kontaktinformasjon til meg og veileder, der det ble oppfordret til å ta kontakt om deltakerne hadde spørsmål. Samtykkebrevet ble sendt ut i februar 2021.

I tillegg til at elevene ble opplyst om studiens innhold gjennom informasjonsbrevet, ble elevene samlet for en muntlig gjennomgang av brevet. Her ble detaljer utdypet og elevene fikk mulighet til å stille spørsmål om studiens innhold direkte til meg. I tillegg ble begge observasjonsrundene innledet med en kort presentasjon av studiet og muligheten for å stille spørsmål. Å ufarliggjøre situasjonen var viktig for meg for å skape en naturlig atmosfære i selve gjennomføringen.

Som nevnt tidligere ble eleven anonymisert, dette ble gjort for å sikre elevens rett til personvern. Elevene fikk fiktive navn for å skjule deres identitet. Opplysninger om skolen er også holdt tilbake, annet enn at det er en skole i Trondheim. Lydopptakene som ble gjort under observasjoner og intervjuer ble transkribert over på papirformat innen én uke. Lydopptakene ble slettet umiddelbart etter transkripsjon.

3.6 FORSKNINGENS TROVERDIGHET

I dette delkapittelet vil jeg diskutere denne studiens kvalitet og troverdighet. En rekke betraktninger må gjøres når en forsker på barn. I tillegg ble observasjoner og intervjuer tatt opp via lydopptaker. Tatt dette i betraktning må forskeren være bevisst på faktorer som styrker og svekker studien. Som kvalitativ forsker er mitt mål å produsere en studie som gir ett rett bilde av studiens design og innhold. En viktig spesifikasjon ved kvalitativ forskning er at leseren skal ha mulighet til å følge og gjenta undersøkelsen dersom de samme premissene er fulgt (Rienecker & Jørgensen, 2013). Fremgangsmetoder og prosedyrer i masteravhandlingen må derfor være nøye redegjort slik at en likedan studie senere kan repeteres ved å følge samme rammeverk. Tjora (2013) trekker frem to kriteriene som måler en studies kvalitet: Validitet og reliabilitet. Videre vil blir denne studien vurdert opp mot de to kriteriene.

3.6.1 VALIDITET OG RELIABILITET

I forskingsarbeidet blir materien påvirket av subjektet, subjektet kan være forskeren, men det kan også være deltakerne i studien (Cohen, et al., 2018). Som forsker må jeg derfor være observant på at resultatene i undersøkelsen vil påvirkes av mine holdninger og handlinger. Min oppfatning av situasjonen er subjektiv noe som betyr at en annen person kan oppleve den samme situasjonen, men gjennom et annet individuelt perspektiv. I dette delkapittelet vil jeg redegjøre for momenter som har gjort denne studien valid eller gyldig, før jeg vil presentere studiens reliabilitet eller pålitelighet.

Studiens validitet handler om at man har gjennomført en studie der forskeren måler det han har tenkt å måle (Jacobsen, 2005). Studiets interne validitet er knyttet til studiens gyldighet gjennom å stille spørsmål til studiens datamateriale. For å sikre intern validitet i denne studien ble det lagt mye vekt på oppgavene som er presentert i studien. Ettersom at brøkbegrepet er omfattende må en være bevisst på hva man ønsker å måle i studien. Prosessen tilknyttet valg av oppgaver i studiet var derfor ekstra varsom. Alle oppgavene er hentet fra forskningsartikler som har benyttet konkretiseringsmateriell i sine studier. I tillegg er oppgavene hentet fra flere ulike kilder noe som gjør at oppgavesettet er håndplukket til denne studien. Selv om oppgavene tidligere ikke er brukt til å måle det eksakt samme som i denne studien vil oppgavene tilby sikkerhet og variasjon.

«Alle kvalitative undersøkelser er kun så gode som de dataene de klarer å samle inn i de første fasene» (Jacobsen, 2005, s. 216). Dermed er utvalg av deltakere spesielt viktig for å sikre de ønsket datamateriale. Valg av informanter og antall informanter var ett av de første stegene jeg tok for å sikre studiens validitet. Studiens deltakere er valgt ut fordi de er flinke til å ordlegge seg. Deltakernes matematikkferdigheter er varierte, noe som er ønskelig for å sikre variasjon i datamaterialet. For å tilpasse gruppestørrelse til observasjonsrunden var pilotundersøkelsen ett hjelpemiddel. For å få økt oversikt og bedre kontroll på elevenes tolkninger senket jeg observasjonens gruppestørrelse fra fire deltakere i piloten til å bli tre deltakere i denne studien. Dermed var det lettere å fange opp og gå i dybden på tolkningene. Nettopp det å gå i dybden på elevenes tolkninger var viktig i denne studien. I følge Cohen et al., (2018) er en vanlig fallgruve ved observasjonsstudier at forskeren bruker for mye ressurser på én av deltakerne. Et rikt datamateriale oppnås først når forskeren evner å fokusere på alle deltakerne. Derfor var det viktig å sette av nok tid og gi rikelig plass til alle deltakere. En annen faktor som kan påvirke studiens gyldighet er hvor friskt elevene har brøk i minne. Brøk som undervisningsemne ble planlagt å gå samtidig med denne studien. Dermed kunne jeg forsikre meg om at kunnskapen som kom frem i studien var i tråd med elevenes aktuelle ståsted, ettersom at noe kunnskap er ferskvare. I tillegg til elevens brøkkompetanse stiller denne studien krav til elevenes evne til å benytte konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver. I følge Thompson (1994) er det avgjørende at elevene har nok kjennskap til konkretiseringsmateriellet slik at de kan prosessere materiellet og gjøre det til sitt eget. Derfor var det hensiktsmessig med noen undervisningstimer der elevene jobbet med cuisenairestaver i ulike brøksituasjoner slik at de kunne bli kjent med konkretiseringsmateriellet og koble det til brøkbegrepet. Disse undervisningsøktene er nærmere beskrevet i seksjon 3.2.3.

Studiets reliabilitet eller pålitelighet trekkes mot spørsmålet om studiens resultater ville blitt de samme dersom studiet hadde blitt gjennomført av en annen forsker (Tjora, 2013). Tjora bruker ordet «støy» for å betegne faktorer som potensielt kan påvirke en studies resultater. Likefullt presiseres det at kvalitativ forskning heller ikke kan være nøytral fra forskerens påvirkning. En påvirkende faktor som må diskuteres er forskerens relasjon til studiens deltakere. Min rolle som kontaktlærer for elevene gjør at relasjonen allerede er etabler, dermed kan eleven føle seg trygge på meg og rammene rundt datainnsamlingen kan føles tryggere. For å skre påliteligheten i studiet må det reflekteres rundt etiske problemstillinger knyttet til at jeg er elevenes kontaktlærer (Fangen, 2004). I studien vil min rolle som forsker være annerledes enn min rolle som kontaktlærer. Dette vil skape et kunstig forhold på grunn av at forskerrollen er mindre behjelpelig, men mer granskende.

En studies pålitelighet kan måles i om det er mulig for andre forskere å reprodusere resultatlistene dersom samme studiedesign brukes (Postholm & Jacobsen, 2018). Lester (2005) kritiserer forskning innenfor utdanning for å være såkalte «randomiserte eksperimenter». Budskapet ved denne kritikken er at forskningsfeltet i stor grad påvirkes av ulike faktorer som kan svekke forskningen eller på ulike måter gjør den situasjonsbestemt. En studie kan altså i stor grad påvirkes av forskeren. I kvalitative forskning er dette en utfordring nettopp fordi utvalget deltakere og samspillet med forskeren påvirker hvert enkelt studie (Postholm & Jacobsen, 2018). Det er dermed betimelig å stille spørsmålstegn til om det i det hele tatt er mulig å måle reliabilitet på en sånn måte i kvalitative studier innenfor utdanningsforskning der det forskes på mennesker. Det er i midlertid noen måter å måle studiets pålitelighet, en indikator er om det er trekk ved studiet som har ført til studiets resultater (Jacobsen, 2005). Valg jeg har tatt for å sikre dette er valg av representativt utvalg deltakere og oppgaver, være oppmerksom og forberedt på under observasjon og intervju, samt prøve å påvirke informantene minst mulig.

Andre faktorer som kan påvirke studiens pålitelighet er for eksempel om informantene har fått god nok informasjon på forhånd av datainnsamlingen (Cohen et al., 2018). Deltakerne mottok ett informasjonsskriv i forkant av studien, i tillegg var det satt av god tid i forkant av observasjonen slik at deltakerne kunne stille spørsmål. Det er også viktig at forskingen ikke blir personavhengig. Skjevhet kan eksempelvis forårsakes av at forskeren iherdig tar stolthet i arbeidet innen dens fagområdet (Kloosterman & Lester, 2004). Dette medfører en personavhengig forskning, heller enn en objektiv forskning. Denne betraktningen gjør at forskeren må være sikker på sine valg og ta høyde for hver minste detalj som kan påvirke forskingen i ulike retninger. Dette eksemplifiserer viktigheten av teoribasert og godt dokumentert forskning.

4.0 STUDIENS FUNN OG ANALYSERING

Analyse-delen av denne studien har som hensikt å belyse ulike tolkninger elever har av konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver, når slike staver anvendes i arbeidet med brøk. Analysen vil ta en tydelig vinkling mot Forskningsspørsmål 1: «Hvordan tolker 5. trinns elever konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver i arbeid med brøk». Kapittelet er organisert i hovedinndelingene: «Enheten» og «Referanseenheten», som igjen består av videre inndelinger. I Tabell 2, presentert i kapittel 3, presenteres en oversikt over analysens kategorier . Analysen er strukturert ved at hvert funn innledes med en kort beskrivelse av funnet, etterfulgt av et utdrag fra transkripsjonen som relaterer til funnet. Til slutt finnes en grundigere analyse av tolkningen som presenteres. Noen av funnene vil bestå av flere sekvenser, dette fordi nyansene i besvarelsene er forskjellige. Datamaterialet som analyseres består av transkripsjoner av lydopptak som ble utført i de to observasjonsrundene, samt under elevintervjuene. Bilder av det konkrete elevarbeidet er også en del av datamaterialet som analysen baseres på. Gjennom hele denne seksjonen vil det være referert til oppgavenummer fra oppgavesettet. Som nevnt tidligere er samtalene delt inn i «Undersøkelsesutdrag», hensikten er å enklere kunne referere til bestemte samtaler. Leseren oppfordres derfor til å ha oppgavesettet tilgjengelig. Oppgavesettet kan lokaliseres i Vedlegg 1.

Innledningsvis er det passende å nevne at elevene deltok aktivt i diskusjoner, og at alle oppgavene ble besvart av samtlige elever. De aller fleste besvarelser var gode, men enkelte besvarelser var mangelfulle og svake. Besvarelser som tilsynelatende var mangelfulle så ut til å skyldes elevenes feiltolkning av cuisenairestavene. Dette vil undersøkes nærmere i påfølgende seksjoner.

4.1 ENHETEN

Å betrakte et forhold mellom to cuisenairestaver forutsetter forståelsen av at de to stavene opptrer som én enhet. Som nevnt i kapittel 2, er det relasjonen mellom tallene som utgjør verdien i brøk (Lamon, 2012). Denne observasjonen innebærer at cuisenairestavene må betraktes i forhold til hverandre for at stavene kan kunne knyttes opp mot en brøk. I denne studien presenteres både funn der stavene betraktes som *Én enhet*, og funn der stavene behandles som *Separate enheter*. Flesteparten av deltakerne forholdt seg utelukkende til den førstnevnte tolkningen, men to av deltakerne så ut til å veksle mellom tolkningene avhengig av oppgaven som ble gitt. Deltakerne i studien benyttet seg altså oftest av tolkningen *Én enhet*. I de neste seksjonene presenteres disse to tolkningene, med eksempler fra observasjonsøktene.

4.1.1 ÉN ENHET

Tolkningen Én enhet har fått navnet på bakgrunn av elevens evne til å betrakte cuisenairestaver som én enhet. Tolkningen baserer seg på at den ene cuisenairestaven måles opp mot den andre, gjennom en slags del-hel sammenlikning (Kieren, 1976). En slik tolkning er ønskelig ettersom tolkningen i stor grad dreier seg om brøk med dens fokus på forholdet mellom stavene. Tolkningen er kontekstnær fordi cuisenairestavene dannet utgangspunktet for den videre diskusjonen under undersøkelsene, og deltakerne refererte gjennomgående til forholdet mellom stavene, et eksempel på dette presenteres i utdraget under. Tolkningen var ofte observert i sammenheng med at deltakerne fysisk flyttet stavene for å gjøre oppmålinger. Tolkningen kan derfor igjen anses å være kontekstnær, ettersom konkretiseringsmateriellet var utgangspunkt for elevens tolkingen. I studien var tolkningen Én enhet den mest fremtredende, da samtlige av deltakerne på ulike tidspunkt brukte denne tolkingen.

Vi skal nå se nærmere på et utdrag fra undersøkelsen hvor bruken av denne tolkningen er særlig tydelig. Utdraget er hentet fra Oppgave 2B, hvor elevene er bedt om å finne den manglende staven som sammen med oransje stav skulle utgjøre et forhold identisk med gul og rød stav (ref. Figur 4). Pia finner frem den lilla staven og legger frem følgende argument for at forholdet mellom de to figurene kan tolkes som identisk, altså $\frac{2}{5}$.

Undersøkelsesutdrag 1: Tolkning én enhet. Oppgave 2B.

Pia: Jeg tenkte at hvis man flytter den røde så går den to og en halv gang i den (Peker på gul stav). Også når man flytter den lilla så gå den to og en halv i den oransje. Begge er to femtedeler.

Lærer: Okey, interessant at du flyttet brikkene! Men hvordan kom du til to femtedeler?

Pia: Det er vel to femtedeler, er det ikke?

Lærer: Det stemmer det.

Pia: fordi...fordi.... det bare er to femtedeler.

Tolkningen går ut på å sammenlikne delen og det hele opp mot hverandre. Pia finner ut at i den ene figuren går den lilla staven to og en halv gang opp i den oransje, samtidig går den røde to og en halv gang opp i den gule. Tolkningen går ut på å kartlegge de to figurene individuelt for så å gjøre en sammenlikning mellom figurene. Pia finner ut at begge figurene inkluderer staver der den ene er to og en halv gang lenger enn den andre og konstaterer derfor at forholdene er like. Pia kobler på egenhånd figurene til $\frac{2}{5}$. Implisitt argumenterer Pia for at delen utgjør to femdeler av helheten, men klarer ikke eksplisitt å argumentere for at figurene representerer forholdet $\frac{2}{5}$. Den fysiske oppmålingen som skjer bygger på multiplikativ tenking gjennom at delen forflyttes eller multipliseres opp mot helheten. Tolkningen er forankret i konteksten gjennom at stavene aktivt brukes i argumentasjonen. Pia refererer til «den røde», «den lilla» og «den oransje» i hennes argumentasjon. Tolkningen er preget av brøk som måling gjennom at Pia refererer til å «flytte» stavene som en fysisk oppmåling for å sammenlikne forholdet. Dette utdraget er et god eksempel på en situasjon der cuisenairestavene blir tolket som én enhet fordi forholdet mellom stavene blir definert gjennom at stavene får definerte roller som del og helhet, og at stavene brukes aktivt i tolkningen.

4.1.2 SEPARATE ENHETER

Tolkningen Separate enheter går hovedsakelig ut på at elevene betrakter cuisenairestaver som heltall. Her representerer ikke cuisenairestavene lenger et forhold. I stede blir cuisenairestavene behandlet individuelt som separate enheter. Cuisenairestavenes egenskaper tilknyttet brøk er ikke lenger i fokus, men kommer heller som en bieffekt. En gjentakende tolkning blant elevene var å dele opp stavene ved å omtale stavene som heltall. Tolkningen Separate enheter ble observert flere ganger hos flere av deltakerne. I det kommende avsnittet presenteres et eksempel der en deltaker omtaler cuisenairestavene som heltall. Også dette utdraget er hentet fra Oppgave 2B, der Gaute argumenterer for at lilla stav (ref Figur 4) sammen med oransje stav vil representere et forhold som er tilsvarende forholdet til gul og rød stav, nemlig$\frac{2}{5}$:

Undersøkelsesutdrag 2: Tolkning separate enheter. Oppgave 2B

Lærer:	Gaute, hva er det som gjorde at du valgte lilla?
Gaute:	Jeg så litt på denne her... Hvis man tar to enda en gang også halvparten av det igjen. Da tar jeg fire og fire også halvparten av fire. Så får man flyttet begge brikkene en og en halv gang.

Figur 10 Gaute sin besvarelse av Oppgave 2B. Gaute benytter sammenlikningsmetoden for å illustrere at gul og rød, og lilla og oransje stav representerer forholdet to femdeler.

Tolkningen gikk hovedsakelig ut på å dele opp forholdet for å omtale brikkene individuelt. I tillegg til å omtale stavene som individuelle enheter ble stavene tilegnet tellenavn ut i fra hvor lange stavene var. Gaute omtaler rød stav som «to» og lilla stav som «fire», cuisenairestavene omtales nå som heltall. Her er tolkningen i stor grad knyttet til symboler fremfor konteksten ettersom tallene «to» og «fire» er fungerende representasjoner for cuisenairestavene.

Som argument for at forholdet mellom rød og gul stav er identisk med forholdet mellom lilla og oransje stav sier Gaute at den røde staven går to og en halv gang opp i den gule, som også er direkte overførbart til lilla og oransje, henholdsvis. Strategien i seg selv gjør det enklere å danne et forhold med stavene fordi delen måles opp mot helheten. Til tross for at Gaute omtaler cuisenairestaven som heltall forankres hans strategi i relativ tenking. Dette fordi han i begge figurene måler forholdet mellom delen og helheten opp mot hverandre. Gaute konstaterer i utdraget at delen går ekstra halvannen gang opp i helheten. Selv om Gaute tolker stavene som Separate enheter ved å tilegne tellenavn, klarer han å betrakte forholdet mellom de to cuisenairestavene. I påfølgende avsnitt presenteres et utdrag der Separate enheter også ble benyttet av andre deltakere. I dette utdraget er er avstanden til bruk av cuisenairestaver for å definere et forhold enda større.

Britt og Trine diskuterer samme oppgave som i utdraget over. Situasjonen utspiller seg i etterkant av Gaute sin besvarelser. Både Britt og Trine er enige i at cuisenairestavenes forhold er likt, altså at den lilla staven er nødvendig for å utgjøre forholdet $\frac{2}{5}$. Sekvensen er tatt med på grunn av kontrasten i Trine og Britt sin besvarelse, der Britt sin besvarelse har mange likheter med eksempelet vi så tidligere.

Undersøkelsesutdrag 3: Tolkning separate enheter. Oppgave 2B

Britt:	Siden fem og fem er ti så tenkte jeg at jeg måtte doble denne her også (peker på rød stav). Og to pluss to er fire.
Lærer:	To pluss to er fire, ja, bra! Hva med deg Trine?
Trine:	Jeg gjorde nesten det samme. Jeg tror også at de er like mye fordi den lilla er dobbelt så lang som den røde, og den er dobbelt så lang som den (peker først på oransje, så på gul)

Britt og Trine tolker cuisenairestavene på ulikt vis. Britt betrakter stavene individuelt. Cuisenairestavene tilegnes heltall-representasjoner da gul stav omtales som «fem», oransje stav som «ti», rød stav som «to» og lilla stav som «fire». Britt sin heltalls-tenking blir mer tydelig når hennes tolkning betraktes opp mot Trine sin tolkning som er forankret i Èn enhet.
Trine sin tolkning er i større grad forankret i konkretene fordi cuisenairestavene er sentrum av hennes argumentasjon. Trine omtaler stavene ut i fra fargekoder, ikke heltallsnavn. Både Britt og Trine sine løsningsstrategier tar går ut på å sammenlikne de to figurene. Delen sammenliknes med delen, mens det hele sammenliknes med det hele. Der Trine argumenterer for at lilla er dobbelt så lang som rød og oransje dobbelt så lang som gul, argumenterer Britt for at fem og fem er det samme som ti og to, og at to er det samme som fire. De to deltakerne argumenterer for samme sak, forskjellen er at Trine i større grad snakker om konkretene gjennom å referere til fysiske egenskaper ved stavene, mens Britt argumenterer for at heltallene er doble størrelser av hverandre. Britt har tilsynelatende utviklet en strategi der hun tar utgangspunkt i algoritmen for likeverdige brøker. Resonnementene hennes kan ligne på hvordan delen og det hele multipliseres med en og samme faktor som i en likeverdig brøk.

4.2 REFERANSEENHETEN

Tidligere i avhandlingen har det gjentatte ganger blitt konstatert at en referanseenhet må etableres som en tidlig del av problemløsningen, når en løser matematikkoppgaver ved bruk av cuisenairestaver. Viktigheten, utfordringer og metoder for en slik etablering er blitt nevnt. Denne seksjonen vil presentere konkrete funn av ulike referanseenheter som ble gjort i undersøkelsene. I denne kategorien ser vi nærmere på hvordan elevene oppfatter forholdet mellom stavene. Cuisenairestavene må forståes i forhold til hverandre for å kunne tolkes som brøk. To identiske staver kan altså tolkes til en rekke ulike brøker avhengig av hvordan referanseenheten fastsettes. Som nevnt i seksjon 3.4.3, tar denne kategorien utgangspunkt i Watanabe (2002) sin studie som viser til to representasjoner for cuisenairestaver i arbeidet med brøk: sammenlikning- og del-av-helrepresentasjon. Det neste funnet som nå vil bli presentert viser til elevens evne til å betrakte kontekstens referanseenhet. Funn som presenteres er både innenfor ulike referanseenheter, men også evnen til å skifte mellom referanseenheter. Evnen til å analysere hvilke begrensinger som kan oppstå ved enkelte tolkninger, vil også være sentral i funnene. Under observasjonene ble det identifisert to hovedkategorier av tolkninger: *Sammenlikningsmetoden* og *Del-av-hel metoden.* I studien kom det frem at deltakerne som regel har én foretrukket tolkning. Dette medførte at ingen frivillige bytter mellom tolkninger forekom. Men flertallet av deltakerne viste i midlertid evnen til enten å lokalisere eller veksle mellom flere enn én tolkning. Videre presenteres de to tolkningene.

Elevene hadde altså en foretrukken tolkning, og byttet ikke frivillig mellom representasjoner. De besvarte oppgavene gjennomgående ved å bruke denne foretrukne tolkningen, med mindre lærer fremprovoserte andre tolkninger. Sammenlikningsmetoden gikk oftest igjen blant forsøksobjektene i denne studien, og hadde denne som sin intuitive tolkning. Det fleste klarte å skifte mellom ulike representasjoner, som for eksempel fra del-av-hel metoden til sammeneliknings-metoden eller en mengdemodell ved brøk som forhold. Totalt 4 av 6 deltakere klarte å lokalisere del-av-hel metoden, samt å veksle mellom sammenliknings-metoden og del-av-hel metoden.

4.2.1 SAMMENLIKNING

Sammenlikningsmetoden var altså den tolkningen som forekom hyppigst i denne studien. Som nevnt under presentasjon av studiens metoder i seksjon 3.4.3, kjennetegnes denne tolkningen ved at to cuisenairestaver representerer et forhold gjennom å sammenlikne stavens definerte del opp mot staven definert som helhet. Siden samtlige av deltakerne i denne studien hadde sammenlikningsmetoden som sin primære tolkning, bærer også alle oppgavebesvarelsene preg av denne tolkningen. Transformasjoner til andre tolkninger forekom først når elevene ble spurt av lærer om de kunne andre måter å tolke stavene på. I det påfølgende utdraget presenteres Oppgave 2A. I oppgaven blir elevene presentert den lilla staven og blir videre bedt om å lage forholdet $\frac{3}{4}$. Samtlige av deltakerne besvarer oppgaven ved å vise til den lys grønne staven. Dermed tar elevene standpunktet til å tolke stavene som sammenlikning i det de selv velger å vise til denne lys grønne staven. I utdrag 4 vil vi se at Ole argumenterer for at den lilla klossen er helheten, og den grønne klossen sammenliknes opp mot helheten ved å tolke stavene gjennom sammenlikning.

Undersøkelsesutdrag 4: Tolkning sammenlikning. Oppgave 2A

Lærer:	Dere har tatt fram lilla og grønn alle mann alle. Ole, da kan du forklare her. Hvorfor er den lilla tre fjerdedeler av den grønne?
Ole:	Fordi det er den tredje i rekka. Og den lilla er den fjerde i rekka....
Lærer:	jaha?
Ole:	Så hvis du tar denne her så blir det hele den lilla. Derfor er det tre fjerdedeler (legger til en hvit kloss til den grønne).

Ole har definert lilla stav som helheten og grønn stav som delen. Han argumenterer for at den grønne staven er $\frac{3}{4}$ av den lilla. Argumentet går ut på at den grønne staven mangler en hvit stav eller $\frac{1}{4}$ for å «bli hele den lilla». Ole tolker nå cuisenairestavene ved å ta i bruk sammenlikningsmetoden. Dette kommer frem fordi delen og helheten måles opp mot hverandre som to separate enheter, hvor delen i Ole sin argumentasjon utgjør $\frac{3}{4}$ av helheten.

4.2.1.1 BRØKVERDIER STØRRE ENN 1

Som en underkategori til Sammenlikningsmetoden oppsto kategorien «Brøk med verdi større enn 1». Funnene hadde til felles at de forekom i situasjoner der den lengste cuisenairestaven ble plassert ovenfor den korteste. Tolkningen kan derfor anses å ha tilknytning til symbolsk brøknotasjon. Denne sammenligningen oppstod på grunn av at klossenes plassering så ut til å påvirke om brøken ble tolket som en brøk større enn 1. Altså, dersom den største mengden er plassert ovenfor den minste mengden, tolkes forholdet som brøk større enn 1. Dermed kan cuisenairestavene tilsynelatende fungere som erstatninger til teller og nevner, i elevenes resonnementer. En slik tolkning kan fort bli en misoppfatning dersom elevene ikke er bevisst på at det er forholdet mellom de to stavene som er av betydning, ikke plasseringen. Videre presenteres to ulike sekvenser. Per er involvert i begge disse. I den første sekvensen viser Per hvordan kunnskap om brøk større enn 1 kan bidra til en alternativ tolkning for å berike repertoaret av hvordan å tolke cuisenairestavene. I den andre sekvensen ser det ut til at tolkningen blir en begrensing da han utelukkende tolker et sett med staver som brøk større enn 1. Per skal i arbeidet med Oppgave 1B diskutere om gul og grønn stav kan forstås som noe annet enn $\frac{3}{5}$. I forkant av sekvensen har Per vist hvorfor figuren kan tolkes som $\frac{3}{5}$ ved å henvise til at den grønne staven utgjør $\frac{3}{5}$ av gul stav. Når Per tolker sammensetningen som brøk større enn 1, byttes i midlertid stavene rolle, slik at grønn stav er helheten og gul er delen.

Undersøkelsesutdrag 5: Tolkning brøkverdi større enn 1. Oppgave 1B

Per: Ja! Eller så kan det være uekte brøk. Altså fem av tre.

Lærer: Jaha? Fem av tre. Nå la du den gule oppå den grønne.

Per: Mhm.

Lærer: Hvorfor gjorde du det?

Per: Mest for at nevnerne står nederst og tellerne står øverst

Per kobler her tydelig cuisenairestavene opp mot symbolsk fremstillingen av brøk ved å referere til «teller» og «nevner». Han plasserer den gule staven oppå den grønne, og dermed blir sammenlikningen mer lik den symbolske brøknotasjonen. Per er i stand til å forstå sammensetningen av de to stavene på fler enn én bestemt måte, gjennom å rokkere på rollene til cuisenairestaven.

Per forstår cuisenairestavene som brøk større enn 1. Det er i midlertid viktig at Per er bevisst på at stavene kan tolkes som brøk større enn 1 dersom den største av stavene tolkes som delen. Denne tolkningen kan fort bli en begrensing for elevenes problemløsning ved bruk av stavene. Det er først og fremst relasjonen mellom cuisenairestavene som skaper forholdet, ikke posisjoneringen, så det er avgjørende at elevene er bevisst på dette for at tolkningen skal benyttes med hell. På et senere tidspunkt i observasjonene kom det frem at cuisenairestavenes posisjonering var til hinder for Per sin forståelse. Tolkningen av cuisenairestaver brøk større enn 1 ble en misoppfattelse for Per da han i de senere oppgavene tolket alle forhold som at den lengste staven var plassert øverst som brøk større enn 1. Et eksempel på en slik feilaktig problemløsninger legges frem i avhandlingens kommende seksjon. I eksempelet skal Per forsøke å tolke stav-sett D i Oppgave 4 som $\frac{1}{5}$. Figuren er utfordrende for Per fordi den gule staven er plassert ovenfor den hvite (ref. stav-sett D i Figur 9). I oppgaven skal elevene identifisere alle figurene som kan tolkes som $\frac{1}{5}$. Per tolker i midlertid ikke figuren som $\frac{1}{5}$, men som $\frac{5}{1}$. Utdraget fra problemløsningen av Oppgave 4 lyder som følger:

Undersøkelsesutdrag 6: Tolkning verdi større enn 1. Oppgave 4.

Lærer: Okey, hva med den der da (peker på D)

Per: Det er jo fem av en. Det er uekte brøk.

Lærer: Hvorfor det?

Per: Den hvite er nederst, den burde vært øverst.

Vi ser her nok et eksempel på at Per er opptatt av stavenes plassering i forhold til hverandre. I motsetning til Undersøkelsesutdrag 5, hvor Per argumenterer for at grønn og gul stav kan tolkes som $\frac{3}{5}$, men også som brøk større enn 1, ser vi her at Per kun forstår figuren som brøk større enn 1. Han tolker sett D i Oppgave 4 utelukkende som $\frac{5}{1}$ ved å definere den hvite staven som helheten, og den gule staven som delen. Per sin strategi tar utgangspunkt i den symbolske representasjonen av brøk, der plasseringen av teller, nevner og brøkstrek er avgjørende for utfallet, også i likhet med hans argumentasjon. Han argumenterer med å si at den hvite burde vært øverst, med dette bekrefter han sine forventninger om at posisjonering er avgjørende for forholdet mellom størrelsene. Per står dermed fast på at figurer som er posisjonert på denne måten skal tolkes som brøk større enn 1. En tvetydighet i oppgaven er nettopp at stavene kan tolkes på ulike måter og at det er forholdet mellom stavene som skal være utslagsgivende, ikke posisjoneringen. Dermed vurderes Per sin forståelse i denne oppgaven som noe begrenset.

4.2.2 DEL-AV-HEL

Cuisenairestaver som brøk gjennom bruk av Del-av-hel-modellen vil være den tolkningen det fokuseres på i denne seksjonen. Tolkningen er også nærmere beskrevet i seksjon 3.4.3. Funni denne kategorien kjennetegnes ved at chisenairestavene er plassert diagonalt inntil hverandre som et «tog». Fire av seks deltakere klarte å lokalisere del-av-hel metoden samt skifte mellom sammenliknings-modellen og del-av-hel meodellen. Del-av-hel ble derimot ikke benyttet umotivert og automatiske av noen av elevene, og forekom kun i situasjoner der læreren aktivt etterspurte tolkningen. I den påfølgende seksjonen forekommer to ulike måter å forstå cuisenairestaver gjennom del-av-hel- metoden. Britt og Trine diskuterer Oppgave 1B, der de skulle finne ut om den grønne og den gule staven kunne tolkes som noe annet enn $\frac{3}{5}$. For å tolke staven som $\frac{3}{5}$ forutsetter det at eleven benytter sammenliknings-metoden. For å gjøre ytterligere tolkninger, innebærer det at referanseenheten må endres. Britt tolker den grønne og den gule staven til å utgjøre henholdsvis $\frac{3}{8}$ og $\frac{5}{8}$.

Undersøkelsesutdrag 7: Tolkning del-av-hel. Oppgave 1B.

Britt: fire av ni, eller fem av ni

Lærer: fire av ni eller fem av ni? Hva mener du?

Britt: Eller jeg mener fire nideler eller fem nideler.

Trine: Tre av åtte.

Lærer: Britt, kan du gjenta det du sa også kan du Trine forklare etterpå.

Britt: Man kan ta fire nideler eller fem nideler.

Lærer: OK, hvorfor det da?

Britt: Siden til sammen... åja, nei det er tre... (ler). Det blir åtte da, ikke ni. Så det er tre åttedeler og fem åttedeler.

Britt tolker stavene på to forskjellige måter og får dermed to ulike forhold, henholdsvis $\frac{3}{8}$ og$\frac{5}{8}$. Blitt legger stavene fysisk etter hverandre som et tog, der den definerte helheten utgjør begge stavene. Referanseenheten er nå endret fra å være en av stavene til å gjelde totalen av de to stavene, altså gul og grønn stav. Hennes to tolkningene avhenger av hvilken av stavene som utgjør delen. Når grønn stav utgjør delen tolkes figuren til å være $\frac{3}{8}$, men når gul stav utgjør delen tolkes figuren til å være $\frac{5}{8}$. Innledningsvis knoter Britt til forholdet gjennom å forveksle verdien av den grønne staven og derfor omtaler referanseenheten, eller det totale, som ni. Denne feiltolkningen vurderes til å ha lite betydning ettersom hun stoler på sin egen tolkning .Dette blir tydelig da det i slutten av sekvensen går opp for henne at helheten er åtte, ikke ni.

Det var ikke alle elevene som tolket cuisenairestavene som del-av-hel. I den kommende sekvensen presenteres et eksempel fra en diskusjon der en av elevene forsøker å overbevise de andre om hvorfor stav-sett C i Oppgave 4 (ref. Figur 9) kan tolkes som $\frac{1}{5}$. En av elevene, Ole, har låst seg fast i en bestemt tolkning av cuisenairestavene. Dette resulterer i at Ole tolker stav-settet til en rekke ulike forhold. Han tolker settet til å utgjøre forholdene $\frac{1}{4}$, $\frac{0}{5}$ og 0. Per forsøker å overbevise Ole om at stav-settet også kan tolkes som $\frac{1}{5}$ dersom referanseenheten endres til å omfatte begge stavene. Denne tolkningen innebærer at Ole benytter del-av-hel metoden, noe som viser seg å være utfordrende. Eksempelet lyder som følger:

Undersøkelsesutdrag 8: Tolkning del-av-hel. Oppgave 4.

Ole: Her mener jeg at det er en fjerdedel, for hvis du plusser på den så blir det fem, men vi har ingen flere enere. Så det betyr at det bare blir fem... eller null femdeler?

Lærer: Du har ikke noe å sammenlikne med?

Per: Jeg mener at jeg har riktig, for her har jo læreren lagt opp noen som for eksempel... denne her. Man ser jo at den blir sammenlikna, ikke sant? (Peker på figur C)

Pia: Ja.

Per: Og her er den ikke sammenlikna, men den er sammenlikna på en annen måte.

Lærer: Okey, interessant det Per. Hvordan er den andre måten? Hva skiller de to måtene å sammenlikne på, kan du prøve å forklare det?

Per: At denne her, hvis jeg legger den oppå denne her så måler vi hvor lange de er, mens når jeg legger den her, inntil liksom... så er det jo forskjellige farger, så er fasiten hele her. Vi har nå hele. (Peker på figur C).

Ole: Nei, jeg skjønte ikke

Lærer: Kan du prøve å forklare en gang til Per?

Per: Se her. Her har vi jo tre av ni. ikke sant?

Ole: Men det er jo...

Per: Jeg vet det. Her er liksom måten da. Den ene måten er å regne sånn her... man måler sånn her sånn at hele er fasiten. Det blå er fasiten og den grønne er det vi har. Også er det en annen måte, som liksom er.... At den grønne er.. at det hele er fasiten, men at det grønne er det vi har tatt da.

I Ole sitt forsøk på å tolke sett C som $\frac{1}{5}$ viser han evnen til å tilegne stav-settet en rekke ulike referanseenheter. Han sier selv at han tolker figuren som forholdene $\frac{1}{4}$, 5 og $\frac{0}{5}$. Tolkningen som gir $\frac{1}{4}$ får han ved å benytte sammenlikningsmetoden der den lilla staven er helheten og hvit stav er delen. Ettersom stavene er plassert inntil hverandre, og ikke over og under hverandre, har ikke Ole noe å sammenlikne med. Tolkningen av stav-settet som forholder 5 er et tegn på dette. Han sier selv at han ikke har «flere enere», og siden han ikke har noe å sammenlikne helheten med ender han opp med heltallet 5. Ole henviser også til at stavene har et forhold på $\frac{0}{5}$, denne tolkningen er ikke kartlagt, men i forlengelse av hans heltallstolkning kan det hende at Ole egentlig mente $\frac{5}{5}$. Ole godtar ikke Per sine argumenter fordi det ikke er «noe å sammenlikne med», dermed kan det tyde på at Ole forstår stavene utelukkende gjennom sammenliknings-metoden. Ole mangler tilsynelatende del-av-hel tolkningen som et verktøy for å angripe denne oppgaven, og tar dermed i bruk andre alternative tolkninger, som sammenliknings-modellen og heltall.

Per viser fleksibilitet ved at han klarer å sette seg inn i Ole sitt resonnement, samtidig som han viser evnen til å tolke stavene som $\frac{1}{5}$ gjennom del-av-hel metoden. Per forklarer at «det er sammenlikna på en annen måte», og henviser dermed til at en må endre referanseenheten. Per sin strategi går ut på å betrakte begge stavene som helheten, der den hvite klossen utgjør delen, eller $\frac{1}{5}$. Avslutningsvis i utdraget demonstrerer Per forskjellen i de to metodene der han forklarer og viser med eksempler. Først demonstrerer han sammenlikningsmetoden ved å måle klossene opp mot hverandre. Her sammenlikner han delen som han selv kaller «det vi har», med det hele som han kaller «fasiten». Han beskriver at man må legge stavene oppå hverandre og «måle» hvor lange stavene er. At Per referere til «måling» når han skal forklare sammenlikningsmetoden er et tegn på at hans tolkning er forankret i lengdemodellen siden han måler cuisenairestavene mot hverandre. I Per sitt andre eksempel, forklarer han del-av-hel metoden ved å legge stavene inntil hverandre. I sin forklaring er nå den definerte enheten, eller som han selv kaller «fasiten», helheten av begge stavene. Den grønne er «det vi har», altså delen. Med fasit mener han den definerte enheten, som nå er endret fra det forrige eksempelet. Gjennom bruk av eksempler forklarer Per forskjellen i de to metoden på en måte der han gjennom sitt eget språk refererer til nøkkelelementer som: måling, sammenlikning, det hele, referanseenhet og stavenes posisjon i forhold til hverandre.

I intervjuet som fulgte disse observasjonene, ble Ole oppfordret til å utdype strategien han benyttet da han forklarte sett C i Oppgave 4. Han ble vist stav-sett C på ny, og fikk derfra muligheten til å forklare strategien. For å utfordre strategien, fikk han tildelt nok en hvit stav som han la til i modellen sin. Hans demonstrering er vist i Figur 11. Den ekstra klossen fikk han utdelt fordi han forklarte at han manglet en hvit kloss for å skape forholdet $\frac{1}{5}$. Forklaringen utspiller seg slik:

Undersøkelsesutdrag 9: Tolkning del-av-hel. Oppgave 4

Ole: Jeg skjønte ikke bæret av det Per sa. Hvis den skulle vært en femdel mangla den jo en hvit. Det er en fjerdedel.

Lærer: Så hvis du hadde fått en hvit kloss ekstra så hadde det blitt en femdel? Ta denne her. (Legger frem en hvit kloss).

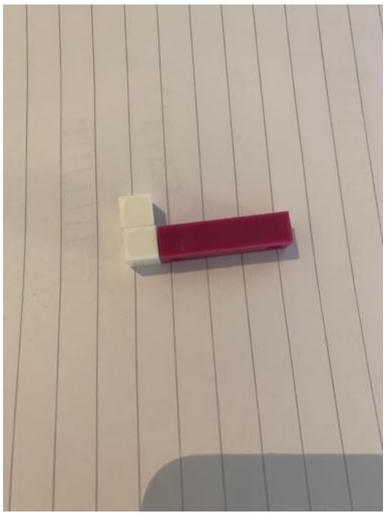
Ole: Ja, nå blir det. Her har vi en av fem. (Legger den hvite klossen parallelt med den hvite og lilla (figur 11).

Lærer: Ja, nå skjønner jeg hva du mener. Den hvite er en femdel av de to klossene som ligger under?

Ole: Ja.

Lærer: Hva hvis man flytter klossen ett annet sted da? Er det en femdel da? (legger alle klossene inntil hverandre som et tog)

Ole: Det er jo fortsatt en femdel, eller to femdeler... nei, jeg mener to fjerdedeler. To fjerdedeler eller en femtedel!



Figur 11 Oles representasjon av en femdel med sammenliknings tolkning

Ole viser her til to ulike tolkninger av Figur 11. Figuren inneholder en lilla stav, og to hvite staver, altså totalt tre komponenter. Ole forklarer at stavene kan tolkes som forholdene $\frac{1}{5}$ og$\frac{2}{4}$. Begge tolkningene tar utgangspunkt i sammenliknings-metoden: definerer Ole helheten til å være lilla pluss én hvit stav, får han forholdet $\frac{1}{5}$. Men er det kun lilla stav som utgjør helheten og de to hvite stavene er delen, tolker han figuren til $\frac{2}{4}$. Fortsatt tolker han figuren på samme måte som han gjorde i Undersøkelsesutdrag 8. Og stavenes plassering har tilsynelatende lite betydning for hva Ole tolker som del og helhet. Ole viser evne til å veksle mellom to forskjellige referanseenheter internt i sammenlikningsmetoden.

Fordi flesteparten av deltakerne hadde lettere for å identifisere de stav-settene fra Oppgave 4 som var modellert gjennom sammenlikningsmetoden, er det er tydelig at sammenlikningsmetoden var den mest intuitive metoden for flertallet av elevene. Videre presenteres nok et eksempel på en måte å tolke cuisenairestavene via del-av-hel metoden. Dette er også nok et eksempel hvor en elev argumenterer for endring av referanseenheten. Britt, Trine og Gaute diskuterer stav-sett B og C i Oppgave 4 (ref. Figur 9). I forkant av samtalen dokumentert i utdraget under, forklarer Gaute at han mener at sett B og C ikke kan tolkes som $\frac{1}{5}$ på bakgrunn av at han hadde tolket figurene med sammenliknings-metoden. Dette resulterer i at Britt legger frem sine argumenter for hvordan figurene kan tolkes som $\frac{1}{5}$ dersom referanseenheten endres. Dette fremkommer i følgende utdrag:

Undersøkelsesutdrag 10: Tolkning del-av-hel. Oppgave 4

Britt: Det med at Gaute ikke trodde det var B og C, Jeg tror jeg og Trine gjorde det litt annerledes. Jeg tror vi gjorde det sånn at vi la samme alle sammen slik at det ble to av ti.

Lærer: Stemmer det at det er slikt du også tenkte Trine?

Trine: Ja.

Lærer: At det er én hel lengde også blir det ti til sammen?

Britt: Ja, siden hvis det er sånn at det skal være en av fire der så må det bare være fire og den må stå over (peker på hvit).

Lærer: Henger du med på det Britt sier, Gaute?

Gaute: Ja litt. Det er akkurat som at man har en hel lilla også er den ytterste biten malt hvit.

Britt og Trine har oppdaget at for å forstå cuisenairestavene som del-av-hel må stavene kombineres slik at den definerte enheten utgjør den totale lengden av begge de to stavene. Britt sier hun «la sammen alle» slik at enheten består av brun og rød stav. Britt legger også frem et eksempel som refererer til Gaute sin tolkning av stavene, hvor Gaute hadde oppfattet de som 1 av 4 ved å betrakte stavene gjennom sammenliknings-metoden. Britt sier at stavene må flyttes slik at den ene hvite staven står over den lilla, ikke ved siden av. Metoden for å skille mellom de to tolkningene blir her stavenes posisjonering. Dette argumenterer Britt fint for. Argumentasjonen til Britt bygger på arealmodellen (ref. Figur 5, seksjon 2.3.1) ved at det hele måles opp mot delen gjennom at hun refererer til det hele som 10 og delen som 2. Gaute blir overbevist av Britt sin argumentasjon. Han viser at han har forstått at referanseenheten må endres ved å vise til et eksempel. I eksempelet forklarer han hvordan begge stavene må betraktes som det hele for å kunne tolke figuren som del-av-hel. Argumentasjonen går ut på å «male» den lilla staven slik at delen defineres.

Gaute sitt resonnement har tett relasjon til brøk som del av hel gjennom bruk av arealmodellen, der delen av det hele farges. Det merkes imidlertid en liten forskjell i Gaute sin tolkning, kontra Britt og Trine sin tolkning. Britt og Trine har en oppfatning av at når stavene settes etter hverandre som et tog, vil det hele utgjøre den definerte enheten. Gaute har heller en oppfatning om at den definerte enheten alltid vil være kun én stav. Begges stavene blir definert av Gaute som helheten først når de fysisk henger sammen, da kan deler av staven markeres. Gaute sin strategi er også forankret i arealmodellen og brøk som del av hel, ved at han skal male deler av enheten.

5.0 DISKUSJON

I begynnelsen av denne studien ble Forskningsspørsmål 1 stilt. Forskningsspørsmålet vil være av stort fokus, og vil bli forsøkt svart i dette kapittelet, og det er derfor passende å nå gjenta Forskningsspørsmål 1:

«Hvordan tolker 5. trinns elever konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver i arbeid med brøk».

I dette kapittelet vil funnene fra analysen, fremlagt i kapittel 4, bli diskutert i lys av aktuell teori for å danne et mer helhetlig perspektiv og fundament som er nødvendig for å besvare forskningsspørsmålet. Analyser gjort i kapittel 4 viser til ulike tolkninger som elever har gjort av konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver. I dette kapittelet vil studiets ulike funn og særlig interessante observasjoner og momenter bli diskutert. Hvordan en kan, og bør, bruke cuisenairestaver i brøkundervisningen vil også bli diskutert i dette kapittelet, basert på funnene som er gjort og diskutert.

I analysen så vi et bredt spekter av elevers tolkninger av cuisenairestaver i arbeid med brøk. Hovedfunnene kan oppsummeres som:

- Cuisenairestavene ble oftest benyttet med suksess i situasjoner der de representerte ett forhold.
- Cuisenairestaver som sammenlikning var elevers foretrukne tolkning.
- Noen elever skiftet mellom ulike tolkninger, men ikke alle klarte dette.
- Elevenes tolkning påvirkes av heltallstenking
- Elevenes tolkning påvirkes av den symbolske brøknotasjonen

I dette kapittelet vil forskeren diskutere hovedfunnene opp mot teori, med et spesielt fokus på didaktiske implikasjoner på at funnene kan ha innvirkning på utviklingen av brøkbegrepet og generell brøkundervisning. En diskusjon rundt funnene om *Én enhet* og *Separate enheter* og hva slags betydning de to tolkningene har å si for forståelsen av brøkbegrepet vil først bli gjort. Videre undersøkes det om det eksisterer noe system og mønstre i elevenes tolkninger. Her diskuteres tolkningene som forekom innen *sammenlikning* og *del-av-hel* tilnærmingene. Deretter diskuteres hvilken innvirkning heltallstenking og den symbolske brøknotasjonen kan ha for brøkarbeidet med cuisenairestaver. Avslutningsvis i inneværende kapittel, diskuteres funnene sin helhetlige betydning for selve brøkundervisningen. Dette gjøres under «Studiens didaktiske implikasjoner» i seksjon 5.5

5.1 CUISENAIRESTAVER TIL Å REPRESENTERE ET FORHOLD

En avgjørende faktor for at arbeidet med cuisenairestavene skal kunne kobles til brøkbegrepet, er at stavene representerer et forhold (Watanabe (2002). Hvordan elevene betrakter samspillet mellom cuisenairestavene vil ha stor betydning for om stavene brukes effektivt og gir utbytte. Funnene viser at tolkningene som elevene tok i bruk i arbeid med de fire oppgavene hovedsakelig kan separeres i kategoriene *én enhet* og *separate enheter* (som ble presentert i seksjon 4.1). De to kategoriene er fundamentalt ulike fordi tolkningen én enhet har grunnlag for brøktenking, mens separate enheter ikke har det. Resultatet viser at konkretiseringsmateriellet oftest ble benyttet med suksess når stavene ble behandlet som én enhet, og da ble bruk til å representere et forhold. Tolkningen av cuisenairestavene som én enhet der relasjonen mellom stavene utgjør forholdet, ble blant eksemplifisert gjennom Pia sin argumentasjon i seksjon 4.1.1 (ref. Undersøkelsesutdrag 1). Denne forståelsen tar utgangspunkt i en sammenlikning der forholdet oppstår gjennom å måle en definert del opp mot en definert helhet. Defineringen av enhet gjøres hovedsakelig ved å utnytte sammenliknings- eller del-av-hel representasjoner (Watanabe, 2002). Ett av kriteriene som gjorde denne tolkningen suksessfull var at den ofte ble observert i sammenhenger hvor det ble gjort en fysisk oppmåling der den definerte delen stegvis ble flyttet oppover den definerte helheten for å avgjøre forholdet mellom stavene, som vi så i eksempelet med Pia. Dette gjorde at cuisenairestavene dannet konteksten ved å bli flyttet rundt, og dermed implisitt skapte et forhold. Fysisk flytting av konkretiseringsmateriellet kan også relateres til multiplikativ tenking gjennom at forholdet ble identifisert gjennom måling av størrelser. Dette funnet er i tråd med materialiseringsprinsippet til Kirfel (2010), som går ut på å gjøre abstrakt matematikk til noe konkret gjennom å bruke fysisk materiell[14]. Cuisenairestavene blir dermed et verktøy for å diskutere relative mengder gjennom å betrakte forholdet mellom delen og helheten (Lamon, 2012).

Den andre kategorien av funn, Separate enheter, viser seg å ikke være like heldig for utviklingen av brøkbegrepet. Denne tolkningen av cuisenairestaver går ut på at stavene blir behandlet individuelt. Da opptrer ikke stavene som et par hvor et forhold uttrykkes. Eksempler på denne

[14] Det er også tydelig at ordet «konkretiseringsmateriell» beskriver et materiell som konkretiserer den abstrakte matematikken.

tolkningen kommer til syne som del av analysene, i seksjon 4.1.2 (ref. Undersøkelsesutdrag 2 og 3), der Gaute og Britt omtaler stavene som separate enheter gjennom å tilegne stavene heltallsnavn. Når elever omtaler stavene separat gjennom heltall, er det ikke lenger stavenes brøkegenskaper som er i fokus. Da er det ikke lenger forholdet mellom stavene som utgjør argumentasjonen. Dette byr på utfordringer for assosiasjonene til brøk, da det er først når stavene settes i sammenheng til hverandre at konkretiseringsmateriellet naturlig kan kobles til brøk (Lamon, 2012). Det er, i følge Lamon, utfordrende å forstå brøk på formen $\frac{a}{b}$. Og denne forvirringen med heltalls-tankegang kan være en konsekvens av at elevene forsøker å koble stavene til denne utfordrende notasjonsformen. Tolkningen til Gaute og Britt i seksjon 4.1.2 er i større grad basert på abstrakt tenking enn relativ tenking, da cuisenairestavene er erstattet med heltall. Tydelig bruk av cuisenairestavene medfører typisk en relativ tenkning.

Gaute argumenterer for at «fire og fire også halvparten av fire», mens Britt argumenterer for «fem og fem er ti...». Argumentasjonene deres anses som begrenset og mangelfulle fordi forholdet er forsøkt beregnet gjennom bruk av abstrakte mengder. Denne tolkningen kan relateres til brøk som kvotient (Kieren, 1976), noe som ikke er hensiktsmessig ettersom cuisenairestaver hovedsakelig er egnet for å lære brøk som forhold og brøk som del-hel (Watanabe, 2002). Og et hvert konkretiseringsredskap må brukes riktig for at det skal oppstå læring (Baroody, 1989).

5.2 ELEVENES SYSTEMATISKE TOLKNINGER OG RESONNEMENTER

Å sammenlikne cuisenairestavene mot hverandre var den tolkningen som forekom hyppigst under observasjonene i denne studien. Vi kjenner igjen denne måten å tenke på fra arbeidet til Watanabe (2002). At sammenlikning av staver er den tolkningen som gikk oftest igjen i elevenes arbeid, kan tyde på at denne tolkningen går for å være den mest intuitive fra forskningsobjektenes øyne. At akkurat denne tolkningen forekom hyppigst er, i følge Watanabe, ingen tilfeldighet. Han trekker frem cuisenairestavene som et konkretiseringsmateriell som er spesielt godt egnet for å lære sammenlikningsmodellen. I følge Watanabe kommer dette av at stavene på en naturlig måte retter fokuset mot forholdet mellom delen og helheten. Watanabe sitt arbeid samsvarer godt med funnene i denne studien, presentert blant annet i seksjon 4.2.1 som viser at cuisenairestavene ble benyttet med særlig stor suksess i situasjoner der stavene beskrev forholdet mellom del og hel når en av stavene ble definert som del og en som helhet.

Funnene belyser at en elevs arbeid med cuisenairestaver er tvetydig, og at det eksisterer en rekker ulike måter å tolke stavene på. At elevene har ulike måter å forstå kombinasjoner av cuisenairestavene er i tråd med Goldin og Kaput (1996) sin teori om at elevenes interne representasjoner er subjektive og bygger på tidligere erfaringer. I følge Kaufmann (2010), er det naturlig at elever vil gjøre individuelle tolkninger av et konkretiseringsmateriell. Dette skyldes at et hvert objekt i seg selv er generelt, og at den matematiske ideen ligger implisitt i konkreten som er opp til individet å tolke. Elever tilegner seg altså matematiske forbindelser til cuisenairestaver, der tolkninger og resonnementer konstrueres ut i fra tidligere erfaringer. I denne studien ble det gjort funn av ulike tolkninger i form av enten sammenliknings- eller del-av-hel-tilnærminger, med variasjon av referanseenheter (Wong & Evans, 2008). Kapittel 4 presenterer funn hvor elever behandlet opp til flere tolkninger og skiftet mellom disse tolkningene underveis i resonnementer. Et eksempel hvor en elev vellykket behersker flere tolkninger, hentet fra denne studiens datamateriale, er et utdrag fra Per sin problemløsning av Oppgave 4 presentert i Undersøkelsesutdrag 8. Per argumenterer for at han ønsker å «sammenlikne på en annen måte» for å kunne tolke stav-sett C i Oppgave 4 som $\frac{1}{5}$. Per skiller mellom de to tolkningene ved å argumentere for at «fasiten» er forskjellig. Når Per sier «fasiten», refererer han til at referanseenheten må endres for at stavene kan tolkes som $\frac{1}{5}$. Den ene tolkningen Per argumenterer for, er en del-av-hel tolkning der begge stavene utgjør referanseenheten. Den andre tolkningen er ved sammenlikning der kun én av stavene utgjør referanseenheten. Per beskriver hvorfor figuren kan tolkes som både $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{5}$, og viser dermed at han håndterer flere tolkninger og evner å veksle mellom tolkninger. Per viser tydelig at han har gode evner til å kunne lokalisere og håndtere ulike tolkninger av konkretiseringsmateriell i utdraget som presenteres i seksjon 4.2.2. Å forstå at brøk kan ha ulike referansepunkt er et viktig fundament i utviklingen av brøkbegrepet (Wong & Evans, 2008). Thompson (1994) anser også evnen til å tolke konkretiseringsmateriell på flerfoldige måter som et viktig mål å strekkes seg etter i matematikken.

Observasjoner i denne studien viser også til funn der elever låser seg fast til én bestemt tolkning. Eksempelet som ble trukket frem i foregående avsnitt, hvor Per skifter mellom sammenliknings- og del-av-hel representasjonen, er en av flere eksempler hvor elevene evnet å tolke konkretiseringsmateriellet på tvetydig vis. Riktignok hadde ikke alle forskningsobjektene en slik evne til fleksibel tenking. Ett eksempel på dette utspilte seg under undersøkelsene.

Eksempelet er presentert gjennom Undersøkelsesutdrag 9 i seksjon 2.2.2. Ole ikke klarer å koble stav-sett C i Oppgave 4 til brøken $\frac{1}{5}$ fordi han benyttet sammenlikningsmodellen i en situasjon hvor det var nødvendig å benytte del-av-hel modellen for å trekke de nødvendige slutningene i problemløsningen. Fra Ole sitt perspektiv, representerer figuren forholdet $\frac{1}{4}$. Først når han blir tildelt en ekstra kloss kan figuren tolkes som forholdet $\frac{1}{5}$. Resultatet i denne studien viser at noen elever i ulike sammenhenger hadde vanskeligheter med å løsrive seg fra tolkninger. Å forholde seg til kun én tolkning av konkretiseringsmateriellet, vil, i følge Thompson (1994), resultere i mangelfull forståelse. Han påpeker at det er avgjørende for eleven å ha kjennskap til det varierte spekteret av tolkninger. Prosedyren til Ole blir et utfordring i utviklingen av brøkbegrepet, nettopp fordi han ikke klarer å tolke figuren som $\frac{1}{4}$, slik oppgaven etterspør. Det er i midlertid ikke overraskende at Ole holder seg til en tolkning som gir mest mening for han. Ole er nok fornøyd med å ha funnet en måte å representere brøk ved bruk av cuisenairestaver; sammenlikningsmodellen. Denne strategien har han tidligere fått ros og anerkjennelse for, og det er naturlig at han gjentar denne tilnærmingen. Tolkningen kan være et resultat av mangel på erfaring. Dette er også i tråd med Meira (1998) sin teori om at konkretiseringsmateriellet i seg selv er transparent, og mening etableres gjennom bruk.

5.3 CUISENAIRESTAVER TOLKES SOM HELTALLSREPRESENTASJONER

Som tidligere nevnt i kapittelet, kan enkelte tolkninger kobles til heltallstenking. Under presentering av denne studiens oppbygging og metoder, mer spesifikt, i seksjon 3.2.2, introduseres en mulig forklaring på elevenes tolkning av cuisenairestaver som heltall: At elevene tidligere har benyttet cuisenairetsaver i arbeidet med heltallsoperasjonen multiplikasjon. Selv om det er flere år siden cuisenairestavene ble brukt i multiplikasjonskontekster av elevene, er det tydelig at meningene som skapes til objektet korresponderer med heltall. Dette kommer til syne i Undersøkelsesutdrag 4, der Gaute og Britt i hver sitt utdrag legger frem argumenter med en karakter som underbygger denne tilknytningen. De omtaler cuisenairestavene individuelt gjennom å tilegne stavene heltallsbenevninger. Ifølge Lamon (2012), er det uheldig å omtale cuisenairestaver som heltall fordi cuisenairestaver som konkretiseringsmateriell i arbeidet med brøk alltid er mest nyttig i situasjoner hvor stavene representerer et forhold seg i mellom. Dersom stavene omtales som heltall, er ikke stavene lenger et konkretiseringsmateriell for brøk, men for heltall. Stavene må forstås i forhold til hverandre for å gi mening. Lamon (2012) og Neagoy (2017) poengterer viktigheten av at brøken forstås som én enhet, fremfor å betrakte brøk som single heltall. Dette gjør at Gaute og Britt sin tolkning av konkretiseringsmateriellet trolig begrenser potensiale for å utvikle brøkbegrepet. I følge Moyer (2001) er det ingen selvfølge at konkretiseringsmateriellet brukes riktig. Baarody (1989) presiserer også at dersom konkretiseringsmateriell brukes uten ferdigheter, kan det i verste fall føre til vranglære og misoppfatninger. Tatt dette i betraktning, er det viktig å bruke dette konkretiseringsmateriellet på en måte som bidrar til økt forståelse av relasjonen mellom delen og helheten i brøk.

Heltallstenking kan som sakt ha kommet som en mulig konsekvens av tidligere erfaringer. Kaufmann (2010) diskuterer i sin artikkel at et hvert konkretiseringsmateriell er generelt og meningen som skapes til konkreten vil påvirkes av situasjonen det brukes i. Dette utsagnet støttes av funn i denne studien som sier at tolkningene er individuelle og at de påvirkes av tidligere erfaringer. Kaufmann legger til at meningen som skapes påvirkes av en tredeling der den symbolske representasjonen er et produkt av tegn og objekt. Selv om konkreten er felles for alle, vil forskjellige individer stå for ulike tolkinger. At elevene tolker cuisenairestavene som heltall i utdraget presentert i seksjon 4.1.2, kan derfor anses som et resultat av tidligere arbeid med cuisenairestaver og multiplikasjon.

5.4 CUISENAIRESTAVER OG PÅVIRKNINGEN AV SYMBOLSK NOTASJON

Funn i denne studien tyder på en sterk relasjon mellom konkretiseringsmateriellet og brøk på notasjonsformen $\frac{a}{b}$. I foregående seksjon, seksjon 5.3, diskuteres elevens bruk av heltall i arbeidet med cuisenairestaver. Slike tolkninger kan, i følge Ni (2001), komme som en konsekvens av at tolkningen er forankret i brøk sin symbolske notasjon. Ni forklarer dette med at det ofte oppstår utfordringer i situasjoner hvor elever skal koble brøk til konkreter. Gjentagende feil som oppstår i en slik prosess, er at enheten selv deles inn i flere deler. Da vil gjerne brøken bli behandlet som to separate mengder. Funn i denne studien støtter denne påstanden, og heltallstenkingen som er diskutert i seksjon 5.3 er et eksempel på dette. En mulig årsak til at cuisenairestavene påvirkes av brøknotasjonen $\frac{a}{b}$, kan være at koblingen mellom tegn og objekt vil påvirke ens tolkning (Kaufmann, 2010). Det er derfor mulig at elevenes tolkning av stavene vil være påvirket av brøknotasjonen. Når elever vet at de skal jobbe med brøkkontekster, vil det være naturlig at brøknotasjonen på formen $\frac{a}{b}$ har en innvirkning på deres tolkning. Det er også andre funn i denne studien som tyder på at brøknotasjonen påvirker elvenes tolkning. I Undersøkelsesutdrag 5 kommer det frem at elever henviser til «teller» og «nevner» i sine argumenter i arbeidet med cuisenairestavene. Altså, at den øverste staven representerer teller og den nederste staven representerer nevner. I situasjoner der den øverste staven er lenger enn den nederste vil stavene dermed tolkes som brøk større enn 1. Dette skjer også Undersøkelsesutdrag 4, oppgaven sier ikke eksplisitt noe om at referanseenheten må være enten øverst eller nederst. Dette er en tvetydighet i oppgavene som elevene må forholde seg til. Cuisenairestavene representerer først og fremst et forhold som kan tolkes på flere måter, og det er viktig at stavene ikke opptrer som erstatninger for tall som skal plasseres inn i notasjonen $\frac{a}{b}$.

5.5 STUDIENS DIDAKTISKE IMPLIKASJONER

I den innledende fasen av dette forskningsarbeidet, ble oppdaget en personlig motivasjon om å kunne forske på noe forskeren selv kunne dra nytte av som matematikklærer. Motivasjonen innebar i hovedsak å gjøre brøkundervisningen meningsfull for elevene. Forskningsarbeidet har påvirket en mengde faktorer ved forskeren i en rolle som matematikklærer. Ferdigheter i bruk av konkretiseringsmateriell i arbeid med brøk, oppgaveutforming knyttet til slikt arbeid, og en brennende interesse for å utforske elevresonnementer, er alle personlige faktorer som har blitt påvirket og akselerert hos forskeren under arbeidet med denne mastergradsavhandlingen.

I forskningsarbeidet har forskeren stadig blitt mer observant på hvor tvetydig arbeidet med cuisenairestaver er. Denne studien viser til en rekke ulike måter å tolke cuisenairestaver i arbeid med brøk. Som nevnt tidligere i inneværende kapittel, mestrer enkelte elever å veksle mellom ulike tolkninger, samtidig som andre etterstreber å kun forholde seg til bestemte tolkninger. Det var altså stor variasjon i hvordan elever oppfattet cuisenairestavene. Denne seksjonen presenterer noen didaktiske implikasjoner for cuisenairestaver i arbeid med brøk. I den sammenheng, er det betimelig å stille spørsmålet «Hva ønsker jeg at eleven skal *lære*», fremfor «Hva ønsker jeg at eleven skal gjøre» (Thompson, 1994, s.1). I følge Thompson er det en vesentlig forskjell på de to spørsmålene, og en lærer burde stille førstnevnte spørsmål for å kunne utnytte potensialet til konkreter i matematikkundervisningen. Med andre ord må undervisningen nyanseres til å ta for seg konkrete og spesifikke fokusområder. Ønsker læreren at elever lærer om cuisenairestaver gjennom sammenlikning, må undervisningen være bygget på dette. Er det derimot læren om ulike referanseenheter i del-av-hel tolkningen som står i fokus, må undervisningen formes annerledes.

I arbeidet med oppgavene, som danner grunnlaget for observasjonene i studien, var det tydelig at cuisenairestavene ble benyttet med suksess i situasjoner der de representerte et forhold. Dette forespilte seg særlig da stavene dannet *Én enhet* ved å settes i forhold til hverandre og definere del og helhet. Først når del og helhet er definert, kan stavene kobles til brøk som relative størrelser. I følge Lamon (2012), er det kritisk for utviklingen av brøkbegrepet at elever forstår brøk som relative størrelser. Undervisningen burde derfor legges opp til å definere delen og helheten. Observasjoner og funn denne studien tyder på at cuisenairestavene egner seg godt for å avgjøre størrelsen på delen og helheten i brøk. Stavene tilbyr muligheten til å forstå at ulike kombinasjoner av stavene fortsatt kan gi lik brøk-verdi. Betraktes for eksempel Oppgave 4 (vedlegg 1), ser en hvordan brøken $\frac{1}{5}$ kan representeres på ulike måter gjennom de ulike stav-settene i A-G (ref. Figur 9). Cuisenairestavene blir her et redskap som kan hjelpe elever til å oppdage at brøk er relative størrelser fordi de gir et konkret bilde på at én og samme brøk kan representeres på ulike måter. I Oppgave 4 (vedlegg 1) ser man hvordan brøken $\frac{1}{5}$ kan bestå av både lengre og kortere staver, hvor størrelsene på stavene varierer men forholdet forblir konstant.

Det var ført i oppgaver der referanseenheten ikke var definert, at det ble oppdaget begrensninger i elevers tolkninger. I oppgaver der elevene ikke fikk oppgitt en spesifikk referanseenhet, men at elevene selv fikk tolke hvilke sett med cuisenairestaver som kunne representere en bestemt brøk, var ofte bruken begrenset. Ved flere anledninger låste elevene seg fast til en bestemt tolkning. Funn i denne studien, og gjennomgått teori, viser til at det er mulig å tolke cuisenairestaver som *Sammenlikning* og *Del-av-hel*, og at det er igjen mulig å tolke disse modellene på ulike måter. Hvilken referanseenhet som tillegges stavene vil være avgjørende for hvordan en oppfatter forholdet mellom stavene. Dette tydeliggjør viktigheten av at læreren legger opp oppgaver med ulike referanseenheter, slik at elever har mulighet til å oppdage det varierte spekteret. Konsekvensen av å ikke ha kjennskap til ideen om at cuisenairestaver kan tolkes på ulike måter, og referanseenhetens betydning, vil føre til at to forskjellige elever får ulike besvarelser selv om de tilsynelatende har tolket forholdet mellom stavene riktig og på samme vis. Det anses altså som viktig å utvikle oppgaver som belyser diverse tolkninger av cuisenairestavene, som igjen er i tråd med det Thompson (1994) hevder om at målet ved undervisningen ikke er å lære bort en korrekt måte, men å tilegne seg kunnskap om det varierte spekteret av tolkninger. Dette krever at lærere sitter på en kompetanse om at brøk er et komplekst emne og arbeidet med konkretiseringsmateriell ikke er entydig.

En gjentakende utfordringen er at elever låser seg fast i spesifikke tolkninger som gjerne ikke er de tolkingene læreren alltid ønsker å fokusere på. I seksjon 4.2.2 presenteres funn hvor Ole ikke klarer å løsrive seg fra sammenliknings-tolkningen, og Per tolker cuisenairestavene som brøk større enn 1 i utdraget presentert i seksjon 4.2.1.1. De to funnene er eksempler på situasjoner hvor elever har funnet en strategi som de selv føler fungerer fint, og låser seg fast ved denne. I begge disse eksemplene viste en slik fastlåsning seg å være uheldig da tolkningene ikke var hensiktsmessig for å besvare den spesifikke oppgaven. Disse to tilfellene viser eksempler på at det er viktig at lærere er bevisst på utfordringene knyttet til å skifte mellom ulike tolkninger. At Ola og Per forholder seg til tolkinger som i tidligere situasjoner har vært fordelaktige for dere, er på mange måter naturlig. Vanligvis er det også heldig at de gjentar og forholder seg til enkelte og faste prosedyrer som de forstår. Men, i arbeidet med cuisenairestaver vil dette entydige fokuset sette begrensninger da elevene må være bevisst på spekteret av tolkninger for å kunne bruke stavene på en hensiktsmessig måte. I arbeidet må læreren være bevisst på at brøk består av flere tolkninger, og må forstås som mer enn én enkel konstruksjon (Kieren, 1976). Det er derfor viktig å eksponere elevene for ulike tolkninger slik at de selv blir bevisst på styrker og svakheter ved hver tolkning. Dette er i tråd med det Kaufmann (2010) sier om at meningen eleven skaper til konkretiseringsmateriellet påvirkes av situasjonen det brukes i. Dersom eleven alltid vil tolke stavene som brøk større enn 1 i situasjoner der den lengste staven er øverst i paret, er dette en forståelse som er påvirket av den symbolske brøknotasjonen. Det er da viktig å gjøre eleven bevisst på at cuisenairestavene ikke nødvendigvis følger samme oppsett som den symbolske brøknotasjonen, hvor brøken blir større enn 1 dersom telleren er større enn nevneren. Brukes cuisenairestaver i arbeid med brøk, er det forholdet mellom stavene som er av betydning (Lamon, 2012). Å tilpasse bruken av stavene til den symbolske notasjonen medfører begrensninger.

I undervisning med cuisenairestaver og konkretiseringsmateriell generelt, er det viktig å være bevisst på at bruken påvirkes av tidligere erfaringer. Funn i dette studiet samsvarer med Kaufmann (2010) sine uttalelser om at meningen som tilknyttes konkreten skapes individuelt, og at tolkningen skjer i en erfaringsprosess. I seksjon 5.3 ble det diskutert hvordan elevenes tolkninger kan ha blitt påvirket av tidligere erfaringer der cuisenairestavene har blitt bruk i arbeid med multiplikasjon. Heltallstenkingen anses i dette studiet som en stor svakhet for å forstå cuisenairestavene som brøk, og i verste fall kan det føre til vranglære og misoppfatninger

(Baarody, 1989). At læreren tidlig blir bevisst at elevenes tolkninger vil påvirkes av tidligere erfaringer, gjør læreren bedre rustet til å kunne veilede og sortere elevenes tolkninger.

Avslutningsvis i denne delen som omhandler diskusjon av studien og dens funn, er det passende å henvise til Kaufmann (2010). Han sier at læreren og eleven ofte har helt ulik forståelse av det konkrete objektet. Og at dette gjerne kommer av at gjenstanden er transparent (Meira, 1998). Lærerens kompetanse med konkretiseringsmateriellet kommer som en konsekvens av lærerens tidligere matematiske erfaringer. Elevene vil bare se det konkrete materialet. Det er derfor viktig at lærere en bevisst at elevenes tolkninger kan variere fra dens egne. Ergo må alle elevers handlinger undersøkes med seriøsitet for å kartlegge elevens tolkning. Hvis læreren stiller med forventninger om hvordan oppgavene skal besvares, vil det sannsynligvis oppstå en uoverensstemmelse i lærerens forventninger. Læreren burde heller møte elevene med en undersøkende praksis, hvor tanken er at alle besvarelser er forankret i en arbitrær tolkning. Dette krever at læreren har omfattende kunnskap om de ulike tolkningene for at antakelser ikke skal gjøres på feil grunnlag (Thompson, 1994).

6.0 KONKLUSJON

6.1 GJENOPPTAKELSE AV FORSKNINGSSPØRSMÅLET

I kapittel 1 ble Forskningsspørsmål 1 presentert. Dette spørsmålet har, gjennom ulike deler av denne avhandlingen, blitt diskutert opp mot relevant forskningslitteratur og studiens egne funn og bidrag. Hensikten med denne studien, har vært å utforske hvordan elever bruker cuisenairestaver i arbeidet med brøk. Motivasjonen for dette, var primært at brøk fremstår som et utfordrende emne for mange elever, etter hva forskeren har erfart. En av løsningene som skal bidra til at brøk blir mer forståelig blant elever, er bruken av konkretiseringsmateriell. Dette understrekes både læreplanen i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2019) og en rekke publiserte studier (ref. Kapittel 2.2.5). Flere studier peker i tillegg på utfordringene som medfølger ved bruk av konkretiseringsmateriell i undervisning. Derfor gjennomførte forskeren en studie hvor det var mulig å gi i dybden på elevers tolkninger av ett konkret konkretiseringsmateriell. I innledende del av studien, ble det utviklet et oppgavesett som primært bestod av oppgaver som skulle fungere for introduksjon av cuisenairestaver. Seks elever deltok i den kvalitative hovedstudien, som bestod av forskningsmetodene observasjon og intervju. Resultatet i undersøkelsen ga innblikk i elevenes ulike tolkninger, og skapte muligheter til å undersøke om det var sammenheng mellom tolkningene. Videre i inneværende kapittel, vil Forskningsspørsmål 1 bli forsøkt besvart kort og konsist. Målet er å gi leseren en kort oppsummering på hva forskingen har medført og resultert i. Kapittelet avsluttes med en drøfting av studiens metodevalg, potensielle teamer for videre forskning, samt studiens bidrag til forskningsfeltet.

En viktig del av analysene av elevers tolkninger av cuisenairestaver i arbeid med brøk, var hvordan elevene brukte stavene for å representere et forhold. Resultatet i studien viser at cuisenairestavene oftest ble brukt korrekt da de representerte et forhold, som funn i seksjon 4.1.1, seksjon 4.2.1 og seksjon 4.2.2. Dette innebar at stavene ble tolket som én enhet, der en av stavene representerte en del av den definerte helheten. Det viste seg at variasjonen i tolkninger var mangfoldig og varierte i stor grad fra deltaker til deltaker. Noen elever mestret å skifte mellom tolkninger, som for eksempel å tilegne ulike referanseenheter i del-av-hel tolkninger. Andre holdt seg til få og godt etablerte tolkninger. Funn der elever gjorde få tolkninger, ble vurdert som en begrensning da tolkningen gjerne ikke ga fleksibilitet nok til å løse alle oppgavene i oppgavesettet. Studien viser at alle elevene hadde sammenlikning-metoden som sin foretrukne tolkning. Denne tolkningen ble også oftest benyttet med hell. Resultater i studien viser også til at elevenes tolkninger ble påvirket av tidligere erfaringer. Elevenes erfaring med heltall, samt den symbolske brøknotasjonen på formen $\frac{a}{b}$, var begge påvirkende faktorer på elevenes tolkninger av cuisenairestavene. Allerede etablert kunnskap om matematiske symboler påvirket elevenes tolkninger av stavene, i den forstand at de forsøkte å tilpasse konkretiseringsmateriellet til å passe inn i brøknotasjonen. Dette stemmer overens med Herman et al. (2004) sin studie, som også ble innledet i kapittel 1, hvor elever tilpasser konkretiseringsmateriellet til symbolske algoritmer i arbeidet med addisjon av brøk og konkreter. Datamaterialet i denne studien støtter denne påstanden. Vi så blant annet i seksjon 4.2.1.1 at enkelte elever tolker cuisenairestavene som brøk større enn 1 og refererer til «teller» og «nevner». Konsekvensen av denne tankegangen har blitt diskutert til at cuisenairestavene behandles som Separate enheter, ikke Én enhet der stavene representerer et forhold. Med andre ord kan en si at elevens tolkninger i stor grad var farget av tidligere erfaringer med cuisenairestaver, heltallstenking og brøknotasjonen.

Det blir dermed betimelig å stille spørsmål ved om bruken av å ta i bruk cuisenairestaver i brøkundervisningen er fordelaktig. Utdanningsdirektoratet har tydelig ytret at de har troen på konkretiseringsmateriell i matematikkundervisningen. Forskeren sier seg primært enig i denne påstanden. Dette er fordi cuiseniarestaver spesifikt har et enormt læringspotensial når det kommer til relativ tenking og konkretisering av brøk. Allikevel, oppfordrer avhandlingens forfatter de mange lærere om å være bevisst omfanget det innebærer å ta i bruk et nytt konkretiseringsmateriell i undervisning. Konsekvensene av å ta i bruk cuisenairestaver uten kunnskap, kan i ytterste konsekvens være lærings*hemmende*. Funn i denne studien viser at det er et bredt spekter av metoder for å tolke cuisenairestavene i arbeid med brøk. For at undervisningen skal bli konstruktiv, er det gjennom avhandlingen presisert viktigheten av at læreren kjenner konkretiseringsmateriellet godt, og er bevisst dets fallgruver, før et nytt materiell adopteres undervisningen. For cuisenairestaver, er det først når elevene har tilegnet seg kunnskap om de varierte tolkningene av materiellet, at eleven kan selektere en passende tilnærming og bruke stavene på en hensiktsmessig måte.

Det er nå på tide å bruke studiens oppsummeringer og konklusjoner for å lukke Forskingsspørsmål 1: *«Hvordan tolker 5. trinns elever konkretiseringsmaterialet cuisenairestaver i arbeid med brøk?»*.

Det har gjennom denne studien, og dens observasjoner og funn, vist seg at det ikke finnes noen konkret fasit og fellesnevner på *hvordan* 5. trinns elever tolker cuisenairestaver i arbeidet med brøk. Det har imidlertid blitt studert *hvilke* slike tolkninger elevene gjerne foretrekker, og det viser seg at flesteparten av elevene anvendte cuisenairestavene til å representere et forhold ved å definere stavenes del og helhet, enten ved å tolke stavene som sammenlikning eller del-av-hel. Sammenlikningstolkningen forekom oftest i elevenes besvarelser, mens 4 av 6 elever klarte å tolke cuisenairestavene som del-av-hel. Noen elever klarte å veksle mellom tolkninger ved å tilegne forskjellige referanseenheter til ett og samme cuisenairestav-par, denne ferdigheten medførte fleksibilitet da elevene selv kunne benytte hensiktsmessige tolkninger til den gitte oppgavebeskrivelsen. Resultater i studiet viser også at elevenes tolkninger var påvirket av faktorer som heltall og brøknotasjonen.

6.2 DRØFTING AV METODE

Denne kvalitative studien er gjennomført i to små observasjonsgrupper, samt individuelle intervjuer. Funnene som er gjort i undersøkelsen har ikke som formål å figurere som generelle konklusjoner. Studiets omfang, der kun få elever deltok, og påvirkning av miljø og omgivelser kan ha påvirket funnene som er gjort. En slik påvirkning kan ha ført til at studien tok en retning hvor elevenes tolkninger ikke kom fullstendig til syne. Forskningsarbeidet vil alltid påvirkes av subjektet, subjektet kan være forskeren, men det kan også være deltakerne i studien (Cohen. et al., 2018). Som forsker i kvalitative studier, vil egne holdninger og handlinger være i stand til å påvirke resultatet av undersøkelsen. Forskeren sin oppfatning av situasjonen er også subjektiv. Dette medfører at en annen person ville opplevd den samme situasjonen gjennom et annet individuelt perspektiv. Når forskeren skal undersøke hvordan elevene benytter cuisenairestaver i arbeidet med brøk i denne studien, forsøker forskeren å være bevisst at den virkeligheten som oppfattes av forskeren er påvirket av en rekke subjektive faktorer. Slike faktorer kan komme som en konsekvens av egne og elevenes handlinger, eller andre eksterne faktorer. Likevel er hensikten med denne studien å undersøke et mindre utvalg elevers sine tolkninger av cuisenairestaver i arbeidet med brøk. Og de nevnte potensielle påvirkningsfaktorene er forskeren bevisst, men de anses ikke som noen hindring eller større utfordring i forskningen.

I etterkant av studien har det fremkommet at oppgavenes resultater er påvirket av elevenes tidligere erfaringer med cuisenairestaver. Stavene har tidligere blitt brukt i arbeidet med heltall, som her påvirket elevenes tolkninger. Dermed er det betimelig å stille seg spørrende ved om funnene kunne sett annerledes ut dersom elevene sine tidligere erfaringer med cuisenairestaver var relatert til arbeid med brøk. Totalt hadde elevene to undervisningsøkter og en pilotundersøkelse i forkant av gjennomføringen av observasjon- og intervjurunder. Hadde omfanget av tolkninger sett annerledes ut, og hadde elevene i større grad mestret å veksle mellom ulike tolkninger, dersom det hadde blitt lagt ned mer tid hos elevene i forkant? Trolig ville dette hatt en form for innvirkning på datamaterialet. Med studiets hensikt om å undersøke elevenes tolkninger av cuisenairestaver i arbeidet med brøk, ville uansett elevene hatt med seg et erfaingsgrunnlag som ville påvirket studien. I tillegg er behovet for flere undervisningstimer i forkant av datainnsamlingen i tråd med Kaufmann (2010) sin kritikk til konkretiseringsmateriell. Hans argument er nemlig at konkretiseringsmateriell er tidkrevende.

I etterkant er det blitt bemerket visse svakheter ved oppgavesettet som elevene arbeidet med i undersøkelsen. Dette gjelder Oppgave 2b: «Hvis denne staven er enheten (lilla), hvilken stav kan legges til for å få forholdet $\frac{3}{4}$?». Svakheten ligger i formuleringen. Den peker til hvilken representasjon som skal brukes. Dette burde ikke oppgaveteksten ta stilling til. I dette tilfellet er det Watanabe (2002) sin sammenlikningsrepresentasjon som er mest innlysende å bruke fordi den lilla staven er helheten og den ukjente staven vil derfor danne delen. En annen svakhet med Oppgave 2b er formuleringen «legges til». Utrykket kan assosieres med addisjon fordi det oppfordres til å bygge på eller legge sammen. Dette er spesielt ugunstig på grunn av elevenes tidligere erfaringer med cuisenairestaver og multiplikasjon, som var diskutert i kapittel 5. En alternativ oppgaveformulering kunne vært: «Kan du lage en representasjon som fremstiller forholdet $\frac{3}{4}$, der den ene av de to stavene skal være lilla?». En slik formulering vil la eleven velge hvilken rolle den lilla staven skal få.

Effekten ved bruk av intervju som metode kan også vurderes. Datamaterialet som ble samlet inn i intervjurundene var mindre nyttig enn først antatt. Utdrag fra en av seks intervjuer er trukket frem i oppgavens analysedel. Altså var fem av seks gjennomførte intervjuer mindre informative enn forskeren hadde forutsett. Informasjonen som kom frem i intervjuene hadde var allerede plukket opp i observasjonene. Intervjuene ga dermed ikke den ekstra dimensjonen som var ønsket, og som var motivasjonen ved å inkludere intervjuer som forskningsmetode. Intervjuene tilbydde allikevel muligheten til å bekrefte at inntrykkene forskeren satt igjen med etter observasjonene var korrekte.

6.3 VIDERE FORSKNING

Denne kvalitative studien er begrenset til seks deltakere, og har som formål å undersøke elevers tolkninger av konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver. Resultater viser at det eksisterer en rekke ulike måter å tolke stavene på. Medfølgende det brede spekteret av tolkninger, kommer det ikke som noe hemmelighet at tolkningene vil ha ulike fordeler i ulike situasjoner. Dette medfører igjen at begrensinger og misoppfatninger vil oppstå dersom elevene ikke allerede sitter på tilstrekkelig kunnskap om bruken av disse tolkningene. For å kartlegge og veilede elever i arbeidet med ulike tolkninger av konkretiseringsmateriell, er læreren selv nødt til å besitte bred kompetanse. Dette ble diskutert frem i kapittel 5. Men har lærere den kompetansen som er nødvendig for å kartlegge elevens tolkninger og veilede til riktig bruk? Med denne antagelsen som fundament, hadde det vært interessant å studere læreres kunnskap om ulike tolkninger. Eventuelt læreres egne tolkninger av konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver. Formålet med et slikt studie vil være å undersøke påstanden om at konkretiseringsmateriell er utfordrende, og om lærere egentlig besitter kompetanse nok til å ta i bruk cuisenairestaver i undervisning.

I seksjon 6.2 diskuteres spørsmålet om studiets omfang har påvirket resultatet. Her diskuteres det om enkelte funn i studien kan være farget av elevenes tidligere erfaringer med cuisenairestaver i arbeid med multiplikasjon. Det blir da betimelig å stille spørsmål ved om studiens funn ville sett annerledes ut dersom elevene hadde hatt lengre erfaring med cuisenairestaver i arbeid med brøk. En potensiell studie her, kunne vært at den samme elevgruppa som brukt i studiens nåværende undersøkelser hadde fortsatt å jobbe med cuisenairestaver i en periode etter denne studien, for så å gjennomføre en ny datainnsamling på et senere tidspunkt. Ville tolkningene sett annerledes ut? I seksjon 2.2 presenteres en rekke studier som viser til at elevenes erfaringsgrunnlag er avgjørende for hvordan konkretiseringsmateriellet brukes. Motivasjonen for et slikt studie ville være bygget på antagelse om at elever alltid har med seg en «bagasje» som vil påvirke elevens møte med konkretiseringsmateriell, og matematikk generelt. Denne studien kunne gitt en ny dimensjon til læreres personlige kunnskap om bruk av konkretiseringsmateriell.

6.4 STUDIENS BIDRAG

Denne studien plasserer teoretiske perspektiver om konkretiseringsmateriell i arbeid med brøk inn i en norsk kontekst. Den presenterer informasjon om seks norske 5. trinn elever sine tolkninger av cuisenairestaver i arbeid med brøkoppgaver. Studien bekrefter at både sammenlikning og del-av-hel (Watanabe, 2002) er vanlige måter å tolke cuisenairestavene, og at det eksisterer en rekke mulige tolkninger av disse to modellene. Dette korresponderer med tidligere forskning (Thompson, 1994). I tillegg tilbyr studien utvidet innsikt i elevens arbeid med konkretiseringsmateriell ved å presentere et variert spekteret av tolkninger. Resultatet i studien viser at elever tolker konkretiseringsmateriellet cuisenairestaver på en rekke ulike tilnærminger, som igjen kan være overførbart til andre typer konkretiseringsmateriell. Studiens resultater viser også at elevenes tolkninger er påvirket av tidligere erfaringer, noe som støtter opp om tidligere forskning i fagfeltet.

Studien er et bidrag til lærerstudenter og lærere som ønsker innsikt i elevers arbeid med konkretiseringsmateriell. I følge Thompson (1994), er der viktig å la elever utforske ulike tolkninger av konkretiseringsmateriell slik at de selv blir i stand til å anvende relevante tolkninger ut i fra gitte situasjoner. Funn i denne studien kan bekrefte fordelen av å kunne anvende ulike tolkninger for kunne bruke cuisenairestavene på en god måte i den gitte situasjonen. Samtidig har læreren en viktig rolle i arbeidet med å oppdage og utforske tolkninger. Informasjon i denne studien kan skape bevissthet rundt dette.

LITTERATURLISTE

Baroody, A. (1989). Manipulatives Don't Come with Guarantees. *The Arithmetic Teacher*, 37(2), 4-5. Hentet fra www.jstor.org/stable/41193747

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. I R. A. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91-126). New York: Academic Press.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag-Resultater og analyser fra TIMSS 2015* Universitetsforlaget.

Boggan, M.,Harper, S., Whitmire, A. (2010).Using Manipulative to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies.* Hentet fra: http://www.aabri.com/Manuscripts/10451.pdf

Bondø, A. (2010). Brøk - Er det noe problem da? *Tangenten*, 21(1), s. 35-38.

Charalambous, C.Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in mathematics, 64*(3), s. 293- 316.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2017). *Research methods in education* (8. utg.). NY: Routledge.

Clements, D.H.: 1999, ' "Concrete" manipulatives, concrete ideas', Contemporary Issuesin Early Childhood 1(1), s. 45–60.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education*.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representationsin fraction addition and subtraction. *Mathematics teaching in the middleschool,* 13, s. 490–496.

Fangen, K. (2004). *Deltakende observasjon*. Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Goldin, G. and Kaput, J.: 1996, 'A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics', in L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, and B. Greer (red.), *Theories of Mathematical Learning,* Erlbaum, Hillsdale, NJ, s. 397–430.

Goldin, G. and Shteingold, N.: 2001, 'Systems of representations and the development of mathematical concepts', in A.A. Cuoco and F.R. Curcio (eds.), *The roles of Representation in School Mathematics*, NCTM, Reston, VA, s. 1–23.

Herman, J., Ilucova, L., Kremsova, V., et al. (2004). Images of fractions as process and images of fractions in processes. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, s. 249–256). Bergen: PME.

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? - Innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (2 utg.). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: *A research paradigm whose time has come.* Educational researcher, 33(7), s.14-26.

Kaufmann, O. T. (2010). Bruk av konkreter. Tangenten (1), ss. 23-26. Hentet fra http://www.caspar.no/tangenten/2010/t-2010-1.pdfKirfel, C. (2010). Introduksjon. *Tangenten, 2*1(1), 1.

Kieren,T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. InR. A. Lesh(Ed.), *Number and measuremen* (s. 101-144). Columbus, OH: Ohio State University, ERIC,SMEAC.

Kirfel, C. (2010). Leder. *Tangenten,* 21(1), 52-53. Hentet fra: http://www.caspar.no/artikkel_pdf/1c_t2010-1.pdf

Kloosterman, P., Warfield, J., Wearne, D., Koc, Y., Martin, W. G., & Strutchens, M. (2004) Fourth-grade students´ knowledge of mathematics and perseptions of learning mathematics. In P.Kloosterman & F. K. Lester, Jr. (Eds.), *Results and interpretations of the 1990-2000mathematics assessment of the National Assessment of Education Progress* (s. 71-103). Reston, VA: NCTM.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). Interviews: Learning the craft of qualitative research interviewing. CA, SAGE

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3 utg.). Routledge.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translation among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s. 33 - 40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *Zdm, 37*(6), s. 457-467.

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in mathematics Education*, s. 267-295.

Matematikksenteret. (u.å.). Konkretiseringsmateriell. Hentet 20. februar fra: https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser/videreg%C3%A5ende/konkretiseringsmateriell

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity, *journal for Research in Mathematics Education, 29*, s. 121-142.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet?: How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), s. 175-197.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, 26, s. 400–417.

Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce, Selected philosophical writings*. Vol 2 (1893–1913). Indiana University Press: Bloomington.

Postholm, M. & Jacobsen, D. (2018). Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning. Oslo: Cappelen

Rau, M., & Matthews, P. G. (2017) How to make 'more' better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students' learning about fractions. *ZDM Mathematics Education.*

Rienecker, L., & Jørgensen, P. S.(2013). Den gode oppgaven. Håndbok i oppgaveskriving på universitet og høyskole. (4 utg.). Forlaget Samfunndslitteratur: Bergen

Smith, S.S. (2009). *Early Childhood Mathematics* (4 utg.) Boston: Pearson Education Using manipulatives (2009). Hentet fra: http://www.teachervision.fen.com/pro-dev/teaching-methods/48934.html

Thompson, P. W. (1994). Concrete materials and teaching for mathematical understanding. *Arithmetic Teacher*, 40, s. 556–558.

Tjora, A. (2013). *Kvalitative forskningsmetoder- i praksis* (2. Utg.). Gyldendal Norsk Forlag AS.

Tokle, O. D., Bondø, A. & Åsenhus, R. (2018). Misoppfatninger knyttet til tall. Hentet fra http://realfagsloyper.no/

Utdanningsdirektoratet. (2019). Kompetansemål og vurdering (MAT01-05). Hentet 10. mai 2021 fra: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv19?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2019). Kva er nasjonale prøver. Hentet 10. mai 2021 fra: https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/nasjonale-prover/om-nasjonale-prover/

Van de Walle, J.A., Karp, K.S. & Bay-Williams, J.M. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (8 utg.). Essex: Pearson Education Limited.

Watanabe, T. (2002). Representations in teaching and learning fractions. *Teaching Children Mathematics*, (April), s. 457-463.

Wong, M., & Evans, D. (2008). Fractions as measure. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Ed.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* MERGA Inc.

VEDLEGG 1: OPPGAVESETTET

Oppgave 1A

Cuisenairestaver kan forstås som brøk dersom man setter stavene i forhold til hverandre. Hvilke forhold ser du i klossene? (Lilla og brun)

Oppgave 1B

Går det an å tolke disse klossene som noe annet enn $\frac{3}{5}$?

Oppgave 2A

Hvis denne staven er enheten (lilla), hvilken stav kan legges til for å få forholdet $\frac{3}{4}$?

Oppgave 2B

Disse stavene har samme forhold. Finn den manglende staven (rød og gul til x og oransje)

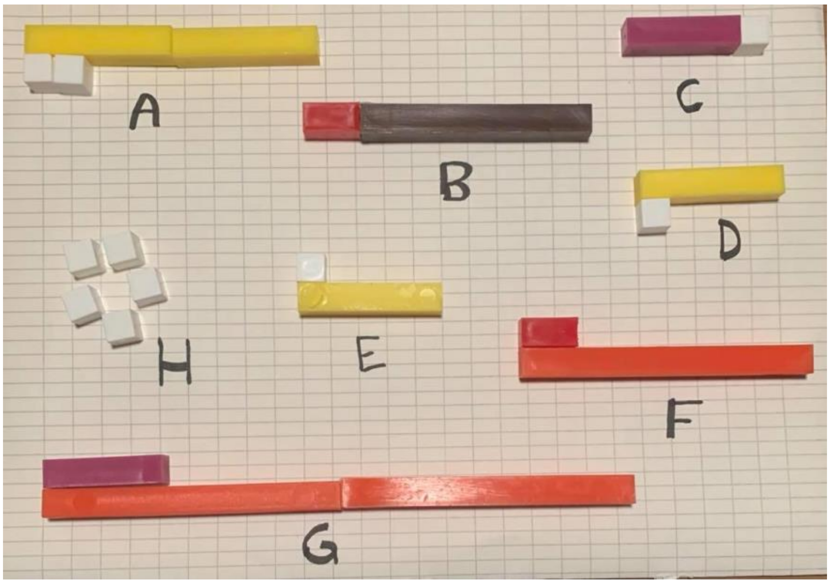
Oppgave 3

Bruk cuisenairestavene til å avgjøre om forholdet mellom parene er det samme eller ikke. Begrunn svaret ditt.

f. Gul til oransje; oransje til grønn
g. Hvit til grønn; grønn til mørk grønn
h. Mørk grønn til blå; grønn til lilla
i. Brun til oransje; lilla til gul
j. Grønn til blå; hvit til rød

Oppgave 4

Hvilken av figurene på brettet kan tolkes som $\frac{1}{5}$?


A
B
C
D
H
E
F
G

VEDLEGG 2: PILOTUNDERSØKELSEN

Gjennomføring

Introduksjon

- Snakke om cuisenairestaver.
- Elevene lager brøkene$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{10}$ både med sammenlikning og del-av-hel.

Oppgave 1

Hvilken brøk er størst av $\frac{3}{5}$og $\frac{3}{7}$

Oppgave 2

Regnefortelling

«Sunniva bakte to kaker i går, i den ene kaken var $\frac{1}{4}$ av en kopp sukker, mens i den andre kaken var det $\frac{2}{4}$ av en kopp sukker. Hvor mye sukker brukte Sunniva til sammen?»

Elevene løser oppgaven som de vil men blir bedt om å vise svaret med brøkstaver.

Oppgave 3

Sunniva skal i helgen bake to nye kaker de er planen å bruke $\frac{1}{5}$ av en kopp sukker i den ene oppskriften og $\frac{2}{5}$ av en kopp sukker i den andre oppskriften. Hvor mye sukker brukte Sunniva til sammen? Er det mindre enn ½ kopp eller mer enn ½ kopp? Er mengden mer eller mindre enn 1 kopp?

Oppgaven er hentet fra Cramer, Wyberg & Leavitt (2008)

VEDLEGG 3: INTERVJUGUIDE

Spørsmål 1

Kan du vise meg hva du tenkte da du svarte på oppgave x?

VEDLEGG 4: SAMTYKKESKJEMA

Vil du delta i forskningsprosjektet «Cuisenairestaver i arbeidet med brøk»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan elever tar i bruk cuisenairestaver i arbeidet med brøk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med prosjektet er å undersøke et emne innenfor matematikk som mange elever har utfordringer med, nemlig brøk. Ulik forsking peker på at det er enklere å forstå brøk som én mengde dersom brøk konkretiseres.I min masteroppgave skal jeg undersøke dette nærmere. 6 elever på 5. trinn vil i noen uker arbeide med konkretiseringsmaterialet cuisenairestaver. Formålet er å undersøke hvordan elevene anvender stavene. Undersøkelsen vil foregå ut mars, og vil danne grunnlaget for min masteroppgave som skal leveres våren 2021.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU- fakultet for lærer- og tolkeutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Deltakerne i studien er et tilfeldig utvalg av elever på 5. trinn.

Hva innebærer det for deg å delta?
Deltakelse i prosjektet består hovedsakelig i å svare på brøkoppgaver, både individuelt og gruppevis. Gruppeøktene vil foregå i matematikktimene. Elevene vil både få oppgaver som skal besvares på papir med blyant, men også muntlig. Observasjon underveis og påfølgende intervjuer kan bli aktuelt for å undersøke løsningsstrategier. Intervjuene blir tatt opp med lydopptaker og transkribert. Transkripsjonen anonymiseres og lagres elektronisk mens lydopptakene slettes samme dag som de spilles inn. Dersom det er ønskelig kan foresatte få tilgang til intervjuguide og oppgavesett på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.
Prosjektet kommer til å foregå parallelt med ordinær matematikkundervisning. De 6 elevene blir gruppevis tatt med ut på et grupperom der de i likhet med resten av klassen jobber med brøk. Forskjellen er at de utvalgte 8 vil hovedsakelig fokusere på cuisenairestaver i arbeidet med brøk. Prosjektet vil foregå omlag 30 minutter hver uke, ellers vil elevene følge ordinær brøkundervisning med resten av klassen.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Meg selv og veileder ved NTNU Ole Enge er de eneste som har tilgang på datamaterialet. Navnet og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data
Datamaterialet lagres på forskningsserver.

Alle opplysninger krypteres og ingen sensitiv informasjon blir publisert.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er juni 2021. Lydopptakene sletter fortløpende etter at de har blitt nedskrevet og anonymisert.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
å få rettet personopplysninger om deg,
å få slettet personopplysninger om deg, og
å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
NTNU- fakultetet for lærer- og tolkeutdanningen ved Kristian Sandland på telefon: 46425566, eller veileder Ole Enge på telefon 73559804.
Vårt personvernombud: Thomas Helgesen telefon: 93079038

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Ole Enge (Forsker/veileder)

Kristian Sandland (Forsker/student)

Samtykkeerklæring

Barnets navn/klasse:____

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *cuisenairestaver i arbeidet med brøk*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at:

Mitt barn kan gjennomføre oppgaver om brøk som er tilknyttet prosjektet. Alle personopplysninger blir anonymisert, barnet nevnes ikke og kan ikke identifiseres. Prosjektets publikasjon vil ikke kunne spores tilbake til barnet.
Mitt barn kan delta i intervjuer hvor det blir gjort lydopptak for transkribering og analyse. Lydopptakene skal ikke offentliggjøres men slettes fortløpende etter at de er nedskrevet og anonymisert.

Sted og dato:

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
Foresatte/foreldres underskrift

Vennligst lever skjemaet til Kristian Sandland så fort det er

Tusen takk!

VEDLEGG 5: GODKJENNING FRA NSD

NSD sin vurdering

Skriv ut

Prosjekttittel
Masteroppgave- Cuisenairstaver i brøkregning

Referansenummer
502344

Registrert
12.02.2021 av Kristian Harald Sandland - krisandl@stud.ntnu.no

Behandlingsansvarlig institusjon
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)
Ole Enge , Ole.enge@ntnu.no, tlf: 98483281

Type prosjekt
Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student
Kristian Sandland, krisandl@ntnu.no, tlf: 46425566

Prosjektperiode
01.11.2020 - 25.05.2021

Status
16.03.2021 - Vurdert

16.03.2021 - Vurdert
Det er vår vurdering at behandlingen vil være i samsvar med personvernlovgivningen, så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 12.02.2021 med vedlegg. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:
https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 25.05.2021.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 nr. 11 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse, som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

For alminnelige personopplysninger vil lovlig grunnlag for behandlingen være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen:

- om lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med pr
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet.

til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet.

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må prosjektansvarlig følge interne retningslinjer/rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

b248b8f7f