Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Nina Rokne Bye

"X'er og Y'er er ikke mer algebra enn noter på et ark er musikk" (Devlin,2011)

En kvalitativ studie om elevers handlinger knyttet til algebraisk tenkning i arbeid med generalisert aritmetikk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Anita Valenta
Mai 2020

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Nina Rokne Bye

"X'er og Y'er er ikke mer algebra enn noter på et ark er musikk" (Devlin,2011)

En kvalitativ studie om elevers handlinger knyttet til algebraisk tenkning i arbeid med generalisert aritmetikk

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Anita Valenta
Mai 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Sammendrag

Gjennom denne studien har jeg undersøkt hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk i arbeid med en oppgave innen generalisert aritmetikk. Valget av tema var basert på kunnskap om at algebra av mange blir oppfattet som et vanskelig matematisk emne, og at algebra tradisjonelt har blitt undervist med et abstrakt symbolfokus. Formålet med studien har vært å undersøke hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk, forut for undervisning i symbolsk algebra.

Studien baserer seg på kvalitative forskningsmetoder, der undersøkelsen ble gjennomført med to grupper av elever på 8.trinn. Elevene arbeidet med kvadrater i en kalender der formålet var å se etter mulige sammenhenger, strukturer og forhold mellom tall. Først undersøkte elevene kvadrater bestående av $2 \cdot 2$ ruter, deretter kvadrater med $3 \cdot 3$ ruter. I utgangspunktet jobbet elevene individuelt med sine kvadrater, men undersøkelsessituasjonen var lagt opp slik at de kunne snakke sammen, og dra veksler på hverandres oppdagelser. Elevene var oppfordret til å være muntlig aktive, for å få best mulig innblikk i hva de tenkte om egne handlinger. Det var ingen undervisning underveis. Min rolle var å observere elevenes arbeid med oppgavene, og som en deltakende observatør stilte jeg bevisstgjørende spørsmål for å føre undersøkelsessituasjonen framover. Datamaterialet besto av lydopptak fra undersøkelsene, samt elevenes notatark og kalenderutskrifter. Lydopptakene ble transkribert, og analysert gjennom en prosess inspirert av tematisk analyse. Funnene i datamaterialet kom som et resultat av åpen koding. Deretter kategoriserte jeg kodene i fire forhåndsdefinerte kategorier – fire praksiser innenfor algebraisk tenkning. De fire praksisene er basert på et rammeverk utviklet for å bygge opp et algebrapensum for undervisning på barnetrinn (Blanton et al., 2018). De fire praksisene innenfor algebraisk tenkning er *generalisere, representere generalisering, begrunne generalisering og resonnere med generalisering.*

Funnene i denne studien tyder på at elever tar i bruk flere ulike handlinger innenfor algebraisk tenkning i arbeid med en oppgave som legger til rette for å undersøke strukturer, sammenhenger og forhold mellom tall. Elevene i denne studien identifiserte strukturer og egenskaper, som de representerte, begrunnet og som de resonnerte videre med. Det indikerer at elevene er i stand til å generalisere aritmetikk på en måte som det er hensiktsmessig å bygge videre på, for å skape en bedre forståelse i overgangen til arbeid med symbolsk algebra.

Abstract

In this study I have investigated which actions related to algebraic thinking students use in their work with generalized arithmetic. The choice of topic was based on the knowledge that algebra is considered a difficult mathematical theme, and that it has traditionally been taught with an abstract symbolic focus. The purpose of the study has been to investigate which actions related to algebraic thinking students use, prior to teaching symbolic algebra.

This study is based on qualitative research methods and was conducted with two groups of students in the 8th grade. The students worked with squares in a calendar, and the purpose was to look for possible structures and relationships between numbers. Initially, the students examined squares of $2 \cdot 2$ squares, then squares of $3 \cdot 3$ squares. The students worked individually with their squares, but the situation was arranged so that the students could interact, and alternate on each other's discoveries. The students were encouraged to be orally active, for me to get insight into the students' thoughts about their work. There was no teaching during the session. My role was to observe the students' work with the tasks, and as a participating observer, I asked questions to guide the investigation situation forward. My data consisted of audio recordings from the sessions, as well as students' work sheets and calendar printouts. The audio recordings were transcribed and analyzed in a process inspired by thematic analysis. The findings in the data material were the result of open coding. Then I categorized the codes into four predefined categories - four practices in algebraic thinking. The four practices are based on a framework developed to build an early algebra curriculum (Blanton et.al, 2018). The four practices in algebraic thinking are generalizing, representing generalization, justifying generalization and reasoning with generalization.

The findings in this study suggest that students use several different actions related to algebraic thinking in their work with a task that facilitates the investigation of structures and relationships between numbers. The students in this study identified structures and properties, which they represented, justified and reasoned with. This indicates that students are able to generalize arithmetic in a way that is appropriate to build upon, to create a better understanding for further work with symbolic algebra.

Forord

Koronavåren 2020 nådde dette masterprosjektet sin ende, og det er på tide å se tilbake – og takke de som fortjener det.

Muligheten til denne videreutdanningen har jeg fått gjennom midler fra kompetansehevingsprosjektet til UDIR, og tanken om å gjennomføre et masterløp ble født da jeg gjennomførte en nødvendig oppgradering av matematikkompetansen min og studerte Matematikk 2, skoleåret 2016/2017. Jeg sender en takk til arbeidsgiveren min som har prioritert å gi ansatte mulighet til å fordype seg i fagfeltet sitt, og som har lagt til rette for at det skulle lykkes. Takk også til mine kolleger og deres elever, som stilte sin tid til disposisjon, slik at jeg fikk gjennomført undersøkelsen min. Håper jeg kan gi noe tilbake, utover det å være plagsomt opptatt av at algebra er mer enn X'er og Y'er!

Videre vil jeg dedikere et avsnitt i forordet til min gode kollega Dordi. Å dele kontaktlæreransvar med en deltidsstudent gjennom flere år, byr på mye ekstraarbeid. Periodevis har hun blitt alene om å ta tak i, og behandle alle elevhenvendelser, passe på all foreldreinformasjon ut, og hun har organisert alle hyggekvelder i flere år! Likevel har jeg blitt møtt av et stort smil og en god klem på kontoret, noe jeg har savnet dette skoleåret jeg har vært fulltidsstudent. Tusen takk for at du har fått dette merkverdige påfunnet til å føles bra!

En stor takk sender jeg også til min grundige veileder, Anita Valenta, som har engasjert seg i prosjektet og bidratt til framdriften med konkrete og konstruktive tilbakemeldinger. Jeg har lært utrolig mye av denne prosessen, og setter stor pris på at hun har tatt seg tid til å besvare alle små og større spørsmål fra en tidvis frustrert student.

Den største takken går til familien min, som gjennom flere år har forholdt seg til en periodevis stressa mamma og kone med tidsfrister. En mamma som har hatt fokus på helt andre ting enn familiens ve og vel, og til og med latt far i huset slippe til med matlaging. Takk for at jeg har fått lov til å gjøre dette! Nå er planen å rydde kjøkkenbordet for kontorutstyr, og ta minstemann på ordet: «gleder deg til du har levert den oppgaven, mamma, da skal vi henge!»

Levanger, mai 2020

Nina Rokne Bye

Innhold

1 Innledning

Denne studien tar sikte på å være et bidrag til den relativt omfattende forskning som allerede eksisterer på temaet algebra, og elevers arbeid med dette matematiske temaet. I særdeleshet skal studien prøve å gjøre rede for algebraisk tenkning, og hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk i arbeid med generalisert aritmetikk på grunnskolenivå. Gjennom en undersøkelse med elever på 8.trinn ønsker jeg å bidra med mer kunnskap om elevers algebraiske tenkning, og betydningen generalisert aritmetikk ser ut til å ha i overgangen mellom aritmetikk og symbolsk algebra.

Algebra er for mange ensbetydende med den delen av matematikkfaget der utregninger består av bokstaver i tillegg til tall, og tradisjonelt har algebraemnet på grunnskolenivå befattet seg med likninger, funksjoner og manipulasjon av bokstavuttrykk (Kieran, 1990). Manipulasjon av bokstavuttrykk er gjerne kjent gjennom uttrykk av denne typen $3x - (5y + 2x) + 2y$, der man bli bedt om å løse opp parentesen og trekke sammen. Gjennom min studie skal jeg prøve å belyse et syn der algebra er noe mer enn bruk av bokstaver. En av årsakene til at det er viktig å tydeliggjøre mangfoldet i algebra, er at begrepet ser ut til å være i en særstilling på flere måter.

Tradisjonelt har algebra hatt betegnelsen «*gatekeepe*r» og vært sett på som en inngangsport til høyere utdanning, spesielt i USA (Blanton, Stroud et al.,2019; Kaput, 2000; Sharpe, 2019; Stacy & Chick, 2004). Å mestre algebra på et visst nivå har vært en forutsetning for å komme videre i utdanningsløpet og arbeidslivet, særlig innenfor feltene vitenskap, teknologi, ingeniør eller matematikk (Sharpe, 2019). Et problem med en slik særstilling, er at mange elever opplever algebra som et vanskelig emne. Mason (2008) påpeker at algebra i lengre tid har virket som et matematisk vannskille, der møtet med algebra er avgjørende for om man anser seg selv for en person som kan mestre matematikk eller ei. Analyser fra TIMSS 2015 (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016) viser at norske ungdomsskoleelever skårer lavest av referanselandene (Sverige, England, USA) på temaet algebra. I tillegg skårer elevene i Norge svært lavt på algebra sammenlignet med de andre emneområdene de testes i. Det kan være problematisk at ett av områdene innenfor matematikk skal være utslagsgivende for både videre matematikkinteresse, og for utdannings – og jobbmuligheter.

For å bøte på problemene mange får i møte med algebra, bør man både se på hva som gjør at algebra er vanskelig for mange, og hvordan opplæringen kan legges til rette for å minske disse vanskene. Kieran (2007) peker på at studier har vist at den tradisjonelle ferdighetsbaserte algebraundervisningen, som vi kjenner som bruk av regler for å manipulere symboler og bruk av algebra som et redskap for å løse problemer, ikke har ført til økt kunnskap hos elever. Da blir det vesentlig å se på hva som kan være årsak til at man ikke lykkes med den ferdighetsbaserte innlæringen.

Flere studier (Blanton et al., 2018; Kaput, 2008; Sharpe, 2019) har oppmerksomheten rettet mot utfordringene relativt mange elever opplever knyttet til overgangen mellom aritmetikk og algebra. Aritmetikk omtaler vi gjerne som regning med konkrete tall, og hovedfokuset i barneskolen har tradisjonelt vært å øve opp elevene til å bli trygge på regning med aritmetiske uttrykk. Mengdetrening i å løse aritmetiske uttrykk innfor de fire regneartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon blir ofte vektlagt. Et pensum som legger opp til en «aritmetikk-så algebra-tilnærming,» har vist seg å være lite fruktbart (Blanton et al., 2018). Selv en del elever som har god kompetanse på å regne med tall, opplever at algebra blir vanskelig å mestre på en tilfredsstillende måte (Sharpe, 2019). Elever som har arbeidet bare innenfor det som er den kjente aritmetiske referanserammen, kan ofte ha vansker med å se mønstrene og strukturene i operasjonene de utfører, nettopp fordi de fokuserer på å regne ut riktig svar (Kieran, 2004a). Behandlingen av likhetstegnet er blant flere forskere (Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kieran, 1990; Knuth, Stephens, Blanton & Gardiner, 2016; Warren, 2003) trukket fram som en vanlig misoppfatning, som har samme opphav. Grunnet fokuset på utregninger og svar på de tidligste trinnene, har mange elever problemer med å oppfatte likhetstegnet som symbol for en relasjon mellom to like mengder.

På bakgrunn av vanskene elever opplever med å se på uttrykk som noe annet enn en operasjon, ser det ut til å være behov for at elevene får utforske og bli kjent med de generelle egenskapene til strukturene i aritmetiske uttrykk. Å gi elevene mulighet til å undersøke det generelle kan være med på å utvikle elevenes algebraiske tekning. Generalisering blir av Becker & Rivera (2006) beskrevet som selve kjernen til algebraisk tenkning. Generalisering dreier seg om å undersøke og gjenkjenne spesifikke trekk eller egenskaper som er felles for en rekke tilfeller. Det å mestre generaliseringsprosessen kan ses på som grunnleggende for å tenke algebraisk. Kaput (2008) presenterer i sin innholdsanalyse av algebra en inndeling i to kjerneelementer og tre innholdstråder. Han karakteriserer generalisering, og det å uttrykke generalisering, som et av kjerneelementene (Kjerneelement A) ved algebraisk tenkning. Blanton et al. (2018) har på bakgrunn av Kaput (2008) sin innholdsanalyse trukket ut fire praksiser de mener er grunnleggende innenfor algebraisk tenkning: generalisere, representere, begrunne og resonnere med generalisering.

Generalisert aritmetikk er en spesifikk generaliseringsprosess hvor man undersøker strukturene til aritmetiske uttrykk. Sharpe (2019) har gjennomført en studie med elever på 7.-9. trinn, om overgangen fra aritmetikk til algebra. Målet var undersøke om det å se på algebra som generalisert aritmetikk kan redusere vanskene med algebra. Tidligere forskning hadde argumentert for dette (Kaput, 1999; Lee & Wheeler, 1989), og Sharpe (2019) kom også i sin studie fram til viktigheten av å se på algebra som generalisert aritmetikk. Gjennom at elever engasjerer seg i å studere mønster, strukturer, identifisere og beskrive forhold, og gjøre antagelser som de begrunner, vil de kunne utvikle en dypere forståelse for aritmetikk (Russell, Schifter & Bastable, 2011a). Det kan i neste omgang gjøre dem bedre forberedt til å mestre generalisering i arbeid med algebra på høyere trinn.

Bakgrunnen for min studie er kunnskapen om at elever opplever vansker med algebra, og at norske elever scorer lavt på algebraområdet på internasjonale tester. Studien motiveres av det forskning har vist om elevers arbeid med generalisert aritmetikk, og med utprøving av algebra på lavere trinn. Gjennom å legge til rette for situasjoner der elevene kan utforske strukturer og egenskaper, tyder forskning på at elever er i stand til å se det generelle i aritmetikk, og at de tenker algebraisk. Gjennom studien ønsker jeg derfor å undersøke elevenes arbeid med en oppgave innen generalisert aritmetikk, for å se hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning de tar i bruk. Dette har resultert i følgende forskningsspørsmål:

Hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning tar elever i to grupper på 8.trinn i bruk i arbeid med en oppgave innen generalisert aritmetikk?

For å kunne svare på dette forskningsspørsmålet mener jeg det er hensiktsmessig å gjennomføre en kvalitativ undersøkelse. Undersøkelsen gjennomføres blant elever på 8.trinn. Undersøkelsen vil bestå av å observere hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elevene tar i bruk i arbeidet med en oppgave der de skal se på strukturer og forhold mellom tall. Gjennom oppgaveløsning og samtale ønsker jeg å undersøke om elevene generaliserer, representerer, begrunner eller resonnerer omkring generaliseringer, og hvilke handlinger knyttet til de fire praksisene innenfor algebraisk tenkning de tar i bruk. Funnene fra undersøkelsen skal analyseres ved hjelp av et rammeverk som henter inspirasjon fra Kaput (2008) og Blanton et al. (2018).

Det etterfølgende teorikapitlet skal forsøke å gi et innblikk i hva som ligger i begrepet algebraisk tenkning. Det blir spesielt lagt vekt på å belyse de siste tiårs forskning på hvordan man kan lette overgangen til arbeid med symbolsk algebra, og hva som er argumentene for en opplæring som inkluderer tidlig algebra. I USA har flere forskere (Blanton et al.,2018; Blanton & Isler-Baykal et al., 2019; Blanton & Stroud et al., 2019) arbeidet med prosjekt LEAP (Learning through an Early Algebra Progression), som er et helhetlig undervisningopplegg i algebra for 3.-5.trinn. Blanton et al. (2018) sitt rammeverk og koblingen til Kaput (2008) sin innholdsanalyse skal jeg derfor gi en oversikt over i teorikapitlet. Jeg utarbeider på bakgrunn av dette et rammeverk for analyse av datamaterialet.

I metodekapitlet skal jeg gjennom en oppgaveanalyse argumentere for hvorfor den utvalgte oppgaven er egnet til å gi svar på forskningsspørsmålet mitt. Jeg skal også forklare hvordan forskningsspørsmålet mitt påvirker utvalg av forskningsdeltakere, datainnhenting og analysemetode. Jeg skal også gjøre rede for betraktninger rundt etiske vurderinger og studiens validitet.

Deretter kommer et analysekapittel der jeg har tatt utgangspunkt i gruppenes gjennomføring av oppgaven. Analysen av datamaterialet er utført med en variant av tematisk analyse, som har innslag av både induktive og deduktive prosesser. Kodene jeg kom fram til i analyseprosessen skal belyses med utdrag fra transkripsjonen.

I diskusjonskapitlet kommer jeg til å drøfte noen av hovedfunnene i analysen, og diskutere dem i forhold til andre undersøkelser som har sett på noe av det samme. Avslutningsvis kommer jeg til å se på didaktiske implikasjoner av studien, og hvordan mine funn kan være grunnlag for videre forskning.

2 Teori

Algebra i skolen er gjerne forbundet med emner som likninger, funksjoner og manipulasjon av bokstavuttrykk (Kieran, 1990). Tradisjonelt sett har de nevnte emnene blitt introdusert for elevene på ungdomsskolen, under emneknaggen algebra. Da jeg valgte å gi denne studien navnet *«X'er og Y'er er ikke mer algebra enn noter på et ark er musikk,»* var det for å rette oppmerksomheten mot bredden innen algebra. Algebra er et felt som befatter seg med mer enn symboler i form av bokstaver og manipulasjon av disse.

Med bakgrunn i utvalgt litteratur har jeg undersøkt algebraisk tenkning hos elever, og hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning de tar i bruk. Gjennom teorikapitlet skal jeg presentere litteratur som argumenterer for at algebraisk tenkning forekommer også forut for det tidspunktet elevene blir introdusert for undervisning i symbolsk algebra. I tillegg skal jeg presentere teori og rammeverk som gjør det mulig å analysere datamaterialet mitt, med tanke på å finne svar på hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elevene tar i bruk i arbeid med generalisert aritmetikk. Jeg starter med en oversikt over den historiske utviklingen til algebra, og hvordan den historiske utviklingen og elevenes læringsprosesser har blitt koblet sammen.

2.1 Historisk utvikling av algebra

Sammenlignet med geometri tok utviklingen av algebra lang tid og er i historisk sammenheng en nokså ung gren innen matematikkfaget. Vansker som elevene opplever på ulike stadier i læringsprosessen, kan ligne de vanskene som en gang utfordret generasjoner av matematikere (Sfard, 1995). Dette er et syn som støttes av flere forskere. Blant annet sier Kieran (1990) at noen av de kognitive prosessene som må være til stede når man jobber med, og skal lære algebra, har sine røtter i den historiske utviklingen av algebra som symbolsystem. Grovt sett kan man dele denne utviklingen inn i tre ulike stadier: retorisk, synkopert og symbolsk algebra.

Retorisk algebra er det tidligste stadiet, og historisk knyttes retorisk algebra til perioden før år 250. Karakteristisk for dette stadiet er bruken av naturlig språk og fullstendige setninger for å forklare problem og sammenhenger, og fraværet av spesielle symboler eller tegn for å beskrive ukjente størrelser. Dagligtale som blir tatt i bruk for å beskrive forskjell på mengder, og sammenhenger mellom tall, er eksempler på handlinger som kan ses på som retorisk. Elevers bruk av dagligtale og muntlige representasjoner var også et vesentlig funn i min undersøkelse, som jeg senere skal belyse i analysekapitlet.

Stadiet med retorisk algebra etterfølges av synkopert algebra. Historisk plasserer det seg fra rundt år 250 fram til slutten av 1500-tallet, og har sitt utspring hos Diofantus. Han introduserte bruken av forkortelser for ukjente mengder (Kieran, 1990). Bokstaver ble utelukkende brukt for å uttrykke en ukjent mengde. Algebraikere som var aktive i denne perioden var opptatte av å finne den korrekte verdien til bokstaven(e), i etter hvert komplekse likninger, men det ble ikke gjort forsøk på å benytte bokstavene til å uttrykke generalitet (Harper, 1987).

På starten av 1600-tallet ble synkopert algebra etterfulgt av symbolsk algebra. Fremhevede trekk ved denne perioden er Vietas bruk av bokstaver for gitte mengder

(Kieran, 1990), og at man var kommet til at algebra kunne benyttes til å uttrykke generelle løsninger. Generelle løsninger forbinder vi gjerne med differensiallikninger, der løsningen ikke er en bestemt verdi, men en funksjon. Skillet mellom synkopert og symbolsk algebra kan illustreres ved å se på en likning, brukt som eksempel av Harper (1987):

«Du har to ukjente tall. Vis at du alltid kan finne ut hvilke to tall du har, hvis du får oppgitt summen og differensen til dem (min omskriving)»

Diofantus' løsning (Harper, 1987):	Vietas løsning (Harper, 1987):
«Anta at summen er 100 og differensen 40. Anta at det minste tallet er x, da må det andre tallet være $x+40$. Så $2x+40=100$ Så $x=30$. Så de to tallene er 30 og70»	"Anta at summen er a og differensen er b. La det minste tallet være x. Da er det største tallet $x+b$. Så $2x+b=a$ Så $x=(a-b)/2$ Så de to «tallene» er $(a-b)/2$ og $(a+b)/2$»

De to løsningene viser noe av forskjellene på synkopert og symbolsk algebra. Begge likningene bruker bokstaven x for en ukjent verdi. I Diofantus' løsning finner man en bestemt verdi for den ukjente, mens Vietas løsning er av en generell art. Den ukjente x blir uttrykt ved variablene a og b, og viser kraften i symbolspråket. Uttrykket blir generelt, gjelder uansett tall, og tar bort hindre som kunne ha oppstått ved bruk av «dialekter» med privatiserte ord og uttrykk. Det generelle kan også være en av ulempene med det symbolske språket, da det kan sies å være abstrakt og beskrevet som semantisk svakt (Kieran, 1990). At det er semantisk svakt betyr at sammenhengene i, og betydningen av det abstrakte språket blir uklart. Kieran (1990) beskriver symbolspråket som et språk som er generelt for å passe alle kontekster innenfor matematikk, og derfor blir det abstrakt og vanskelig å forholde seg til. Breiteig & Grevholm (2006) belyser elevers vansker med å forholde seg til symbolspråket, gjennom en norsk studie der de undersøkte hvordan førsteårselever på videregående løste samme problem som Diofantus og Vieta. Resultatet i Breiteig & Grevholm (2006) viser at få elever benytter symboler for å begrunne en generell løsning. Studier som blir referert av Sfard (1995) viser at elever, også de som har erfaring med symbolsk algebra, presterer bedre ved bruk av verbale enn symbolske metoder. Det kan være en forklaring på at elever velger retoriske metoder for å løse et problem, så lenge det ikke er påkrevd å benytte symbolsk algebra.

Flere forskere har foreslått at pensumet i matematikk må bygges opp i samme rekkefølge som matematikkens historiske utvikling, slik at elevene får gjenoppdage alle store steg matematikere har gjort gjennom historien (Harper, 1987). Motstand mot å trekke en klar parallell mellom algebraens historiske utvikling og elevenes kognitive evne til å lære innholdet, møter vi hos Lins & Kaput (2004). De påpeker at tanken om å utforme undervisningsløpet i algebra basert på et system med bestemte nivåer, var uhensiktsmessig, spesielt med tanke på at en slik organisering plasserte algebra sent i elevenes opplæringsløp. Lins & Kaput (2004) mener at deres observasjoner, som omhandlet yngre elevers evne til å tenke algebraisk, tyder på at en ikke kan være fastlåst i et bestemt mønster, men trenger å ha et fleksibelt syn på algebraundervisning.

Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest (2006) fremmer på sin side et nyansert synspunkt. De hevder at kunnskap om historisk utvikling i matematikk kan være viktig for å forstå hvilke vansker elevene kan møte. Samtidig har utvikling skjedd, ny matematikk og vitenskap har blitt systematisert til en kunnskap som ligger tilgjengelig for elevene, og dermed kan lette vanskene elevene møter i arbeid med algebra. For å forstå vanskene elevene kan møte, og hvordan man kan lette dem, er det også viktig med kunnskap om de kognitive prosessene knyttet til algebra. I den neste seksjonen skal jeg gjøre rede for algebraisk tenkning, og belyse den definisjonen som danner bakteppet for mitt rammeverk.

2.2 Algebraisk tenkning

For å kunne besvare forskningsspørsmålet mitt om hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk, er det behov for en forståelse av hva begrepet *algebraisk tenkning* innebærer. I litteraturen finner vi begrepene *algebraic thinking* og *algebraic reasoning* brukt om de kognitive prosessene knyttet til algebra. Det ser for meg ut til at forskere stort sett omtaler de samme prosessene, uansett hvilket begrep som brukes. Jeg har derfor valgt å se på *algebraic thinking og algebraic reasoning* som det samme, og videre i teksten bruker jeg *algebraisk tenkning*, uavhengig av opprinnelig engelsk begrep i kildene.

2.2.1 Ulike definisjoner på algebraisk tenkning

Det tilbys mange ulike definisjoner på hva algebraisk tenkning er, og syn på hvordan algebraisk tenkning utvikler seg hos elever. Radford (2010) oppsummerer hvordan forskere har stilt spørsmål omkring essensen av algebraisk tenkning, uten å komme til entydige svar eller en konsis definisjon av begrepet. Videre foreslår Radford (2010) at vanskene med å komme fram til en konsis definisjon kan bunne i at algebraisk tenkning skal utføres på mange ulike algebraiske objekter (eksempelvis likninger og funksjoner) og prosesser (eksempelvis forenkle uttrykk eller uttrykke en samvariasjon mellom mengder). I dette ligger det at algebraisk tenkning omkring likninger vil bestå av andre prosesser enn algebraisk tenkning i arbeid med funksjoner. På bakgrunn av dette hevder Radford (2010) at algebraisk tenkning vil ha forskjellig uttrykk, basert på konteksten den algebraiske tenkningen foregår i. Min studie har som formål å undersøke algebraisk tenkning i arbeid med generalisert aritmetikk. Videre skal jeg se på noen definisjoner av algebraisk tenkning som jeg anser som relevante for min studie.

I generalisert aritmetikk er algebraisk tenkning gjerne forbundet med evnen til å generalisere. Blanton & Kaput (2005) definerer algebraisk tenkning som prosessen der elever generaliserer matematiske ideer på bakgrunn av en rekke bestemte tilfeller. En slik prosess kan ifølge Strachota, Knuth & Blanton (2018) beskrives som en mental aktivitet, og i undervisningssammenheng blir det derfor relevant å stille spørsmål hvor i et barns utvikling en slik mental aktivitet vil være mulig.

Mason (2008) mener at kapasiteten som er nødvendig for å tenke algebraisk er medfødt. I det ligger det at mennesket er født med en evne til å gi mening til det man erfarer. Når denne medfødte evnen brukes i en kontekst som dreier seg om tall og forhold, beskriver Mason (2008) det som algebraisk tenkning. En slik tankegang kan virke noe uvant, men gjennom begrepene Mason (2008) bruker, skapes det en sammenheng til algebra. Blant evnene mennesket bruker for å gi mening til sine erfaringer, herunder erfaringer med tall, nevner Mason (2008) evnen til å samle, klassifisere, anta og generalisere. Det er begreper vi også kjenner fra algebra, og de kan blant annet ses på som nyttige aktiviteter i arbeid med generalisert aritmetikk.

Med denne definisjonen av algebraisk tenkning plasserer Mason (2008) seg sammen med andre forskere (Blanton et al., 2018, Carraher & Schliemann, 2007; Kaput 2000, 2008; Russell, Schifter, & Bastable, 2011b) som mener at det er både mulig og hensiktsmessig at elever blir introdusert for algebra på de lavere klassetrinnene. Kaput (2008), en framtredende forsker på tidlig introduksjon av algebra, har utarbeidet en innholdsanalyse av algebra. Innholdsanalysen kan ses på som et bidrag til forståelsen av algebra, og hvordan man kan arbeide med algebraisk tenkning gjennom hele skoleløpet.

2.2.2 Kaputs innholdsanalyse av algebra

En helhetlig beskrivelse av algebra og algebraisk tenkning finner vi hos Kaput (2008). Han presenterer en innholdsanalyse av algebra, som har resultert i en inndeling av to *kjerneelementer* (A og B) og tre *innholdstråder* (1-3). Kjerneelementene er essensielle og ligger til grunn for det øvrige innholdet i algebra, og beskriver to ulike måter å tenke algebraisk på. Innholdstrådene beskriver de ulike matematiske områdene hvor algebraisk tenkning kan oppstå. I de følgende avsnittene skal jeg presentere Kaput (2008) sin innholdsanalyse, med tanke på å skape en grunnleggende forståelse for viktige begreper som senere blir benyttet i mitt rammeverk for analyse.

Kjerneelement A er hos Kaput (2008) beskrevet som algebraisk tenkning i form av å komme fram til generaliseringer og å uttrykke generaliseringer gjennom et symbolsystem som blir stadig mer systematisk og konvensjonelt. Dette kan skje gjennom å avdekke og identifisere fellestrekk mellom flere tilfeller, og bli i stand til å representere dette utover det eller de spesielle tilfellene som blir behandlet (Kaput, 2000). Eksempel på en slik aktivitet kan være å jobbe med flere lignende uttrykk $47 + 78 - 78 = 47$, $56 + 67 - 67 = 56$, $94 + 79 - c = 94$, for så å kunne komme fram til en generell antagelse basert på oppdagelsene. I dette tilfellet vil en korrekt antagelse være at om man legger ett tall til et annet, for så å trekke fra det som ble lagt tid, da ender man med tallet man startet med. Hva som blir sett på som et adekvat språk for å kunne uttrykke slike generaliseringer endrer seg, og hos de yngste elevene er det naturlig språk som er gjeldende. Generalisering er en kontinuerlig aktivitet, som ikke starter og stopper i grunnskolen, men som også kan dukke opp på de mest sofistikerte nivåene av matematikk, eksempelvis algebraisk nummerteori eller avansert matematisk modellering, formidlet med et mer avansert symbolspråk (Kaput, 1995).

Kjerneelement B er algebraisk tenkning som syntaktisk styrte handlinger i et konvensjonelt symbolsystem (Kaput, 2008). Fokuset er på symboler, og de reglene man har for å manipulere dem og endre formen på dem (Kaput, 1995). Møtet med en lineær likning kan være et eksempel på dette. Likningen $3x - 2 = 10$ vil kunne løses, og x-verdien finnes, om man tar i bruk et bestemt sett med regler (addere 2 på begge sider, deretter dividere begge sider med 3). Da har man sett på symbolene som objektive enheter og reglene benyttes på systemet, uavhengig av hva symbolene står for. Kaput (2000) siterer Bertrand Russell som beskriver noe av den kraften man finner i algebra på følgende vis: «*Algebra allows you to think less and less about more and more.*» Det er innenfor dette kjerneelementet Kaput (2000) hevder at den tradisjonelle skolealgebraen har hatt sitt hovedfokus, og at det har vært på bekostning av de øvrige områdene. Fokuset på «*less and less,*» og innlæring av mange regler for symbolmanipulasjon har gått på bekostning av forståelse for hva symbolene står for (Kaput, 2000).

Innholdstråd 1 er algebra som studien av strukturer og system i aritmetikk og kvantitativ resonnering (Kaput, 2008). Dette rommer blant annet generalisering av aritmetiske operasjoner og deres egenskaper, og det er ifølge Kaput (2008) hjertet av algebra som generalisert aritmetikk. Her er oppmerksomheten vendt mot strukturene i de aritmetiske uttrykkene, heller enn å finne den eksakte verdien av regneoperasjonen. Eksempler på aktiviteter som hører til denne innholdstråden er blant annet å utforske summen av tre påfølgende tall, summen av to oddetall, se på regelmessigheter i 100-kart eller andre tabeller. Dette er generaliseringsaktiviteter som vi gjenkjenner som generalisert aritmetikk (Kaput, 2008).

Innholdstråd 2 er algebra som studien av funksjoner, forhold og variasjon. Her uttrykkes generalitet ved å beskrive hvordan en mengde forandrer seg i samsvar med endring i en annen, og utforsking av mønster og grafer er blant aktivitetene som nevnes som en inngang til denne tråden. Innholdstråd 3 er algebra som modelleringsspråk, både i og utenfor matematikken. Modellering blir av flere trukket fram som drivkraften til å lære algebra, og både kvantitativ resonnering, funksjoner og forhold kan ses på som modelleringsaktivteter (Kaput, 2000).

Min studie omhandler i hovedsak algebra slik den er beskrevet i innholdstråd 1, med hovedvekt på aritmetiske strukturer og algebra som generalisert aritmetikk. For å finne svar på mitt forskningsspørsmål er det nødvendig med en forståelse for generalisert aritmetikk, og koblingen til algebra og algebraisk tenkning. Flere forskere, deriblant Lins og Kaput (2004) ser for seg en tilnærming til algebra der elever lærer algebraisk tenkning først og fremst gjennom generalisert aritmetikk. I den neste seksjonen skal jeg derfor se nærmere på hva forskning sier om overgangen mellom aritmetikk og algebra, og hvilken funksjon generalisert aritmetikk kan ha når elever skal lære og få forståelse for algebra.

2.3 Generalisert aritmetikk i overgangen aritmetikk – algebra

Aritmetikk kan ses på som vitenskapen om tall, mengder og størrelser (Carraher & Schliemann, 2007). Vi forbinder gjerne aritmetikk med regneoperasjoner som utføres ved hjelp av de fire regneartene, med konkrete og kjente størrelser. Aritmetiske operasjoner kan ofte være resultatorienterte, der funnet av en bestemt numerisk verdi markerer at man har utført operasjonen.

Algebra kan man se på som et verktøy for å representere og å resonnere rundt generalitet (Strachota et al., 2018). Man kan resonnere rundt det generelle ved å undersøke strukturer i flere operasjoner eller tilfeller og videre kunne generalisere at strukturene er gyldig for alle lignende tilfeller. Eksempel på en overgang mellom aritmetikk og algebra finner vi i Russell et al. (2011a). Elever på 2.trinn arbeidet med uttrykk hvor verdien ble 15 $(eksempelvis\ 20-5,\ 5+5+5)$. En av elevene ble bedt om å finne et tilsvarende uttrykk som inneholdt både 15 og 0, og eleven presenterte følgende uttrykk $15-\ 0=15\ \ og\ 15+0=15$. I forklaringa etterpå gikk eleven utover det konkrete tallet 15 gitt i oppgaven, og sa at *et tall* blir det samme når man legger til eller trekker fra 0. Med det viste eleven at hun hadde generalisert og kommet fram til den grunnleggende egenskapen 0 har som identitetsmerke. Eksemplet viser en vellykket overgang mellom aritmetikk og algebraisk tenkning, men forskning peker på at denne overgangen ikke alltid er like uproblematisk.

2.3.1 Utfordringer i overgangen aritmetikk - algebra

Flere forskere (bl.a Demonty, Vlassis & Fagnant, 2018; Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 2007) peker på vanskene i overgangen mellom aritmetikk og algebra. Overgangen fra det konkrete, aritmetiske resonnement til den stadig mer komplekse, abstrakte algebraiske tenkning som kreves for matematikk på ungdomstrinn og oppover, viser seg å kunne være noe av utfordringen (Knuth, Stephens, Blanton, & Gardiner 2016). Det blir derfor viktig å finne arbeidsmåter hvor man legger til rette for algebraisk tenkning basert på kunnskap elevene allerede har. Flere peker på at aritmetikk har en algebraisk karakter (Blanton & Kaput, 2005; Carraher & Schliemann, 2007), og aritmetiske egenskaper kan ses på som en av de måtene som ligger lettest tilgjengelig for å utvikle algebraisk tenkning (Strachota et al., 2018).

Mange elever oppfatter aritmetikk som en serie utregninger (Carpenter et al., 2003; Schifter, 2018), der fokus er på å utføre en operasjon og finne en bestemt numerisk verdi. En av konsekvensene ved å utelukkende se på aritmetikk som utregninger, er at elevene går glipp av muligheten til å bli kjent med egenskapene til tallene og regneoperasjonene. Prosedyrene for likningsløsning og forenkling av uttrykk er basert på de samme egenskapene til tall brukt i aritmetikk. Det er en sammenheng elevene kan gå glipp av, ved ensidig fokus på utregning. Forskning har vist at elevers ensidige erfaring med aritmetikk kan representere et hinder for innlæringen av algebra. Det blir pekt på at fokuset i undervisning har vært på forskjellen mellom aritmetikk og algebra, snarere enn å gi elevene mulighet til å erfare sammenhengene mellom de to systemene (Warren, 2003). Med det mener Warren (2003) at elevene på de lavere klassetrinnene fratas muligheten til å bli kjent med måter å tenke matematikk på, som kan gjøre algebra høyere opp i klassene lettere tilgjengelig

Lee & Wheeler (1989) har undersøkt algebraisk tenkning hos elever i 15-16-årsalderen, og deres data tydet på at det er mange hinder på vegen fra aritmetikk til algebra. Gjennom sin undersøkelse konkluderer de med at hindrene de så hos elever, og for så vidt i undervisningen, er høyst reelle. De mener også at den tradisjonelle undervisningen ikke hjelper lærere til å hjelpe elever med å overkomme hindrene. Tradisjonell undervisning, med fokus på symbolmanipulasjon, er ikke tilstrekkelig for å bygge broen mellom aritmetikk og algebra.

Herscovics & Linchevski (1994) beskriver overgangen mellom aritmetikk og algebra som et kognitivt gap. De hevder at en mulig forklaring på elevens problem med algebra, kan være tempoet det blir innført i, og den formelle måten det blir presentert på. Lærebokforfattere, utviklere av andre læremidler og lærere er kanskje i for liten grad oppmerksomme på de kognitive utfordringene elevene opplever i møtet med algebra, og har for høye forventninger til elevenes evne til å tenke abstrakt. Konsekvensen av dette kan være at elevene får for lite tid til å forstå det grunnleggende innen algebra og derfor tilegner seg en overflatisk kunnskap om hvordan manipulering av uttrykk kan gjennomføres.

Til tross for mange studier som sier noe om vanskene med overgangen til algebra, og fokus på en undervisning som fostrer en overflatisk kunnskap som symbolmanipulasjon, finnes det også forskning som peker på mulige løsninger.

2.3.2 Muligheter i overgangen aritmetikk - algebra

Det kan være mulig å styrke elevenes forståelse for abstrakte algebraiske uttrykk ved å minske fokuset på utregninger. Russel et al. (2011a) argumenterer for et økt fokus rundt egenskapene til regneoperasjoner og matematiske strukturer. Videre mener de at kjernen i matematikk er å se på tvers av ulike eksempel for å finne mønster, legge merke til den underliggende strukturer, formulere antagelser om matematiske forhold og utforme og bevise generelle utsagn. Begreper som *egenskaper, strukturer* og *mønster* møter vi ofte i litteraturen, der intensjonen er å peke på fokusområder i overgangen mellom aritmetikk og algebra. Det eksisterer ulike definisjoner på hva som ligger i begrepene strukturer, egenskaper og mønster, og de er nært knyttet til hverandre. Jeg vil videre definere begrepene, og gi dem et innhold som gjør det mulig å benytte dem på en hensiktsmessig måte videre i min studie.

Matematisk strukturer kan knyttes tett til generaliseringsprosessen (Blanton, Levi, Crites & Dougherty, 2011), der det å generalisere ses på som å identifisere strukturer og forhold i matematiske situasjoner. Kunnskap om matematiske strukturer blir av Warren (2003) definert som kunnskap om *matematiske objekter*, forholdet mellom objektene og egenskapene til objektene. Definert på denne måten inkluderer begrepet matematiske objekter både tall og operasjoner. Videre peker Warren (2003) på at kunnskap om strukturene blant annet dreier seg om å avgjøre forhold mellom mengder (like store, mer eller mindre), og hvordan egenskapene til tall og operasjoner påvirker strukturen. Mason, Stephens & Watson (2009) kobler begrepene struktur og egenskaper nært til hverandre, og sier at matematisk struktur er generelle egenskaper som er til stede i en bestemt situasjon, som forholdet mellom objekter.

Egenskapene til aritmetiske operasjoner defineres gjerne som grunnleggende, og ligger til grunn for måten vi utfører operasjonene på. De grunnleggende egenskapene kjenner vi gjerne som kommutativitet, assosiativitet og distributivitet. I tillegg kommer egenskapene 0 og 1 har som identitetsmerke i addisjon og multiplikasjon, og forståelsen av at addisjon og subtraksjon er inverse operasjoner, slik også multiplikasjon og deling er (Warren, 2003). Carpenter et al. (2003) peker på at algebra også er basert på disse grunnleggende egenskapene, og at forståelse for grunnleggende egenskaper er viktig for å forstå både aritmetikk og algebra. En elev som tolker $3 + 8$ som $8 + 3$, og dermed forenkler utregningen for sin egen del, benytter seg av den kommutative egenskapen i addisjon $(3 + 8 = 8 + 3)$. Videre viser undersøkelser at elever kan utvikle forståelse for at den kommutative egenskapen er generell for alle tall $(a + b = b + a)$. Fuji og Stephens (2001) definerer bruk av tall for å uttrykke en generell struktur som bruk av kvasi-variable. Flere forskere (Britt & Irwin, 2011; Irwin & Britt, 2005; Warren & Cooper, 2002) støtter at det ligger et algebraisk potensial i aritmetikk. Gjennom å gjøre elever bevisst på grunnleggende egenskaper, slik som den kommutative, mener Carpenter et al. (2003) at man legger grunnlaget for å lære algebra med forståelse.

I likhet med det å legge merke til grunnleggende egenskaper og underliggende strukturer, blir det å finne mønster nevnt av Russel et al. (2011a) som en del av kjernen i matematikk. Mønster er ifølge Carraher, Schliemann & Schwartz (2008) ikke et matematisk objekt. Begrepet opptrer likevel nokså hyppig i matematikk. Blant annet er arbeid med figurmønstre en aktivitet som ofte knyttes til introduksjonen av funksjoner. Mønster blir også brukt innenfor arbeid med generalisert aritmetikk, og i den sammenheng velger jeg å tolke mønster som en del av det å rette oppmerksomheten mot regelmessigheter, og se etter hvordan noe er satt i system. For at elevene skal kunne kjenne igjen spesifikke trekk, og identifisere strukturer i arbeid med tall, må de se at det er noen egenskaper som gjentar seg i et system. Cuoco, Goldenberg & Mark (1996) viser til at lærere bør vekke elevenes glede i å finne skjulte mønstre, eksempelvis i tabeller, og at elevene alltid bør være på utkikk etter snarveier som kan oppstå fra mønstre i utregninger. I dette ligger det at elevene må gis muligheter til å utvikle sine evner som mønsterfinnere (eng: pattern-sniffers»).

Lærernes rolle er av stor betydning for å bidra til at elevene skaper en sammenheng mellom aritmetikk og algebra. Demonty et al. (2018) retter fokus mot lærernes matematiske kunnskaper når det kommer til å gjennomføre en undervisning som legger til rette for denne sammenhengen. I deres studie var det mønsteraktiviteter som ble undersøkt. Der peker funnene mot at barneskolelæreres kompetanse om det spesifikke faginnholdet var relativt lav/hadde hull. Hos lærere på ungdomstrinn fant man en høyere kunnskap om innholdet, men kunnskap om hvordan innholdet kunne formidles var ikke nødvendigvis i samsvar med det. Rollen til en lærer i et klasserom der en skal skape god algebraundervisning, må være at den er i stand til å gjenkjenne og nøre opp under kimer til algebraisk tenkning som kommer fram (Kaput, 2000, Blanton & Kaput, 2005). Algebraisk tenkning kan utvikles i arbeid med aritmetikk, allerede på de laveste trinnene i grunnskolen, men for at slike metoder skal være effektive er det vesentlig at lærere kan analysere metodene elevene bruker for å løse ulike problemer og dermed kunne veilede og oppmuntre til algebraisk tenkning (Demonty et al., 2018). Det er viktig å verdsette elevens mulige begrensning til algebraisk tenkning, men ikke tillegge dem grenser siden vi ikke kan forutse hva de er kapable til (Carpenter et al., 2003). Johanning (2004) underbygger Carpenter et al. (2003) sitt syn på at elever har en underliggende kapasitet til algebraisk tenkning. I en studie av elevers arbeid med problemoppgaver av algebraisk karakter fant Johanning (2004) eksempler på at elever benyttet seg av flere uformelle strategier for å løse problemene. Elevene hadde ikke gjennomgått undervisning i symbolsk algebra, men gjennom elevenes forklaring av sine strategier fant Johanning (2004) funn som tydet på at elevene hadde en strukturell forståelse av problemene.

Funnene fra flere undersøkelser har resultert i antagelsen om at det kan ha noe for seg å starte algebraundervisning på et tidligere tidspunkt i elevenes skolekarriere. Blanton et al. (2018) presenterer sågar et pensum for implementering av algebra på de lavere klassetrinnene, som skal presenteres grundigere senere i kapitlet. Forståelse tar lang tid å utvikle, og den matematiske tenkningen som skal til for å skape et grunnlag for å lære algebra må utvikle seg over en lengre periode, og starte i de lavere klassene. Kaput (2000) er tydelig på at algebra, som kan oppleves å ha et særegent språk, bør læres tidlig og det må være integrert i innlæringen av andre matematiske emner. Å lære algebra på småtrinnet innebærer å utvikle måter å tenke om aritmetikk på, som er mer i samsvar med de tenkemåtene de må utvikle for å lykkes med å lære algebra (Carpenter et al., 2003). Tidlig algebra betyr derfor ikke å erstatte tradisjonelt aritmetisk innhold med algebrainnhold. I stedet betyr det å utvide den aritmetikken som blir undervist på barneskolen, en algebraisering av allerede eksisterende innhold (Knuth et al., 2016). Akkurat de samme tankene finner vi hos flere forskere som har fokus på at dette dreier seg om tidlig algebra – ikke algebra tidlig (Carraher et al, 2008). Tidlig algebra introduserer ikke en dikotomi i skolematematikken (dvs. enten aritmetikk eller algebra), men er et middel for å bygge en dypere matematisk kunnskap med forståelse (Blanton et al., 2018).

I en studie utført i Frankrike og Belgia fant man at det hersker en skepsis til tanken om at algebraisk tenkning skal utvikles kontinuerlig gjennom barne- og ungdomsskole (Demonty et al., 2018). Spesielt var det blant disse pedagogene liten aksept og tro for at algebra kan separeres fra symbolismen og utvikle seg fra barneskolen av. En slik skepsis får motsvar fra Blanton & Isler-Baykal et al. (2019) og Blanton & Stroud et al. (2019) i deres rapporter fra prosjektet LEAP). Der har de målt effekten av tidlig algebraundervisning med elever på 3.-5.trinn, og bruk av symboler viste seg å være et felt elevene mestret godt.

Resultatene Blanton & Isler-Baykal et al. (2019) og Blanton & Stroud et al. (2019) viser til i forbindelse med LEAP, tyder på at en plan for å utvikle algebraisk tenkning hos elever fra tidlig grunnskolealder ser ut til å ha positiv effekt. Elever som blir undervist algebra, tilpasset sin alder, øker sin kompetanse. Bildet under viser den gjennomsnittlige elevprestasjonen på vurderingene de gjennomførte i løpet av prosjektet.

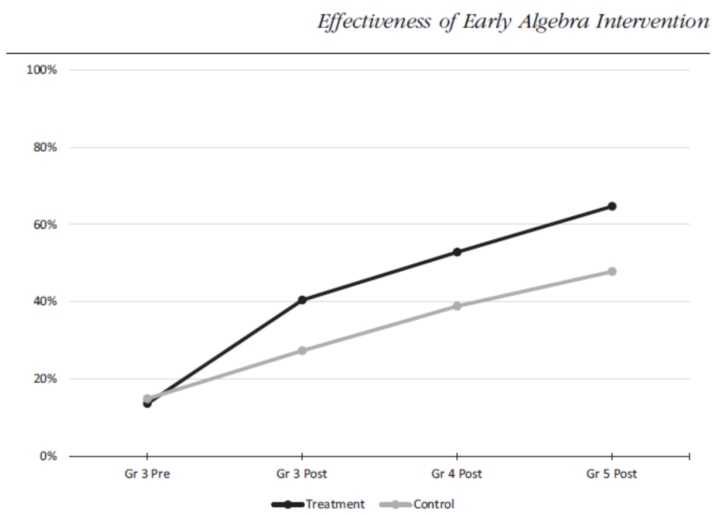


Figure 2. Comparison of overall correctness for common items on algebra assessments.

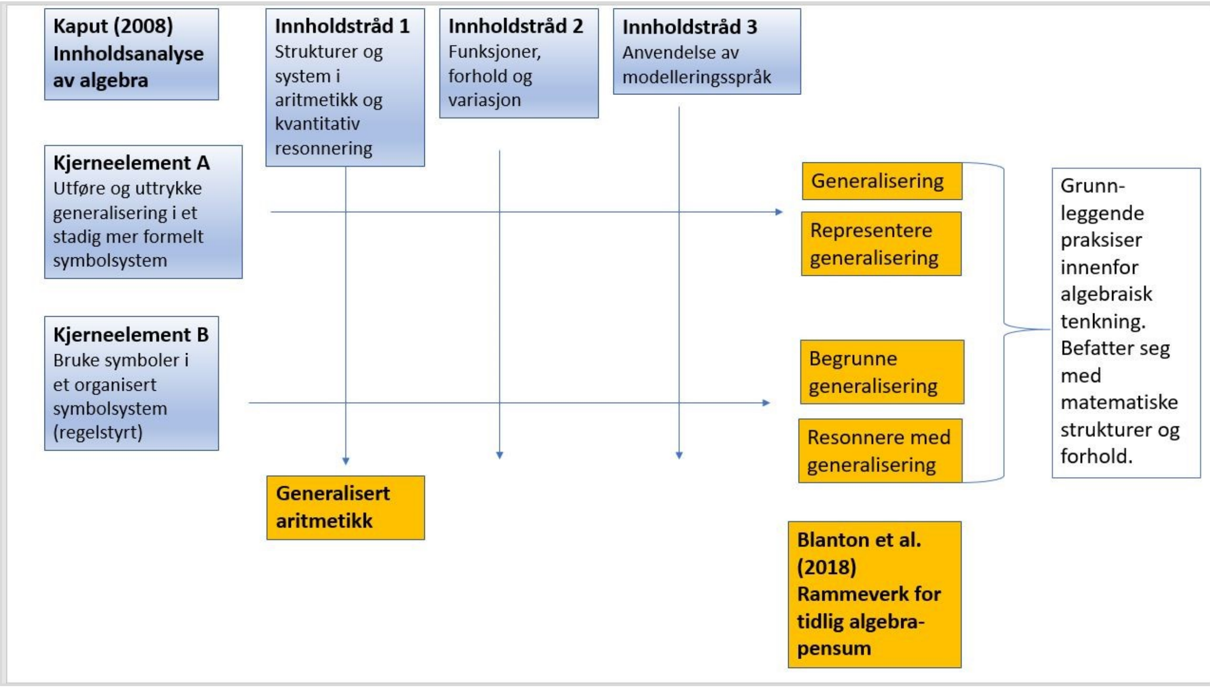
Figur 1: Algebraresultater fra prosjektet LEAP (Blanton & Stroud et al., 2019)

Resultatene som rapporteres i Blanton & Stroud et al. (2019) viser at 3.klassingene som skal delta i deres prosjekt og 3.klassingene som skal følge vanlig pensum og undervisning, lå på omtrent samme nivå før prosjektet starter. Dette ble undersøkt gjennom elevbesvarelser på varierte oppgaver innenfor algebraemnet. I løpet av det første skoleåret ser man en markant forskjell på disse to gruppene, etter at de har gjennomført en ettertest. Det blir et stort gap mellom prosjektelevene og kontrollgruppen. Videre holder gapet seg gjennom de to påfølgende skoleårene. I neste seksjon skal jeg beskrive deler av rammeverket Blanton et al. (2018) bygde prosjektet LEAP på, og vise hvordan jeg skal benytte det som et utgangspunkt for å besvare mitt forskningsspørsmål.

2.4 Rammeverk

Forskningsspørsmålet i denne studien er: *Hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning tar elever i to grupper på 8.trinn i bruk i arbeidet med en oppgave innen generalisert aritmetikk?* I denne seksjonen skal jeg beskrive rammeverket jeg har benyttet for å kunne svare på dette spørsmålet.

For å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt har jeg tatt utgangspunkt i Blanton et al. (2018) sitt arbeid med å bygge opp en læreplan, der målet med læreplanen var å systematisk utvikle algebraisk tenkning hos elever fra tidlig grunnskolealder. Blanton et al. (2018) baserer sitt læreplanarbeid på Kaput (2008) sin innholdsanalyse av algebra, og under presenterer jeg en figur som viser min tolkning av hvordan Blanton et al. (2018) og Kaput (2008) sine rammeverk henger sammen. Videre skal jeg forklare de ulike elementene i figuren, og koble Blanton et al. (2018) sitt rammeverk til formålet med min studie.



Figur 2: Min tolkning av sammenhengen mellom rammeverkene til Kaput (2008) og Blanton et al. (2018).

De blå boksene til venstre på figuren viser til Kaput (2008) sin innholdsanalyse, og viser to kjerneelementer (A og B) og tre innholdstråder (1-3). De oransje boksene til høyre viser til rammeverket Blanton et al. (2018) har lagt til grunn for utarbeidelsen av læreplaner for innføring av tidlig algebra. Jeg har valgt å legge til en boks for å vise at generalisert aritmetikk, som er gjenstand for undersøkelse i denne studien, hører til innholdstråd 1. Innholdstrådene viser de ulike matematiske områdene hvor algebraisk tenkning kan oppstå. Pilene som går fra hvert kjerneelement, viser at de to ulike måtene å tenke algebraisk på kommer til syne i en eller annen form på alle tre områder. (Kaput, 2008). Blanton et al. (2018) har også utviklet læreplaner som ivaretar de øvrige områdene innenfor algebra (eksempelvis likninger og funksjoner). De andre områdene er ikke en del av min studie, og er derfor ikke med på illustrasjonen.

Kjerneelement A og B har Blanton et al. (2018) videre delt opp, og de har trukket ut det de har kalt fire grunnleggende praksiser innenfor algebraisk tenkning. Fra kjerneelement A trakk de ut de to praksisene *generalisere* og *representere generalisering*. Fra kjerneelement B trakk de ut *begrunne generalisering og resonnere med generalisering*. Disse fire praksisene innenfor algebraisk tenkning mener Blanton et al. (2018) det må tilrettelegges for i undervisning, og det vises til hvordan de har benyttet praksisene i utarbeidelse av læringsmål for de ulike undervisningssekvensene i prosjektet (Blanton & Isler-Baykal et al. (2019).

Min studie er ikke en undervisningssekvens, men en undersøkelse der jeg ønsker å se hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk i arbeid med en oppgave innen generalisert aritmetikk. Gjennom å definere *praksiser* som noe som utøves eller anvendes, mener jeg at de fire kategoriene *generalisere, representere, begrunne og resonnere med generalisering*, vil være et nyttig rammeverk for å undersøke hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk. Under vil jeg presentere en oversikt over hver av de fire praksisene. Jeg skal definere hva som ligger i de enkelte praksisene, med spesielt fokus på generalisert aritmetikk.

Generalisere er ifølge Mason (1996) hjerteslaget i matematikk, og generalisering opptrer i ulike former. Blanton & Isler-Baykal et al. (2019) peker på at å generalisere handler om å analysere informasjonen som er tilgjengelig i en matematisk situasjon, for så å utvikle en antagelse. En slik antagelse kan også kalles en generalisering. Innenfor generalisert aritmetikk vil å generalisere kunne dreie seg om å identifisere matematiske strukturer (Blanton et al., 2011). Identifisering av strukturer kan gjøres på bakgrunn av gjentatte observasjoner av aritmetiske operasjoner, og hvordan operasjonene oppfører seg. Et eksempel på dette er observasjoner av addisjon der tallene 3 og 8 gir samme sum, uavhengig av rekkefølge utregningen blir gjort i. En generalisering av den kommutative egenskapen til addisjon kommer gjennom å gjøre tilsvarende observasjon med andre tall. Andre strukturer som også kan undersøkes og generaliseres, er egenskapene til tall. Elever som undersøker flere tilfeller av summene av et partall og et oddetall som adderes, og etter hvert antar at summen blir et oddetall i alle lignende tilfeller, er et eksempel på generalisering av tallenes egenskaper (Blanton et al., 2018).

Representere er nært knyttet til det å generalisere. Det er en måte å sette lys på, eller formidle den antagelsen man har kommet fram til gjennom den mentale generaliseringsprosessen (Blanton & Stroud et al., 2019). En representasjon skjer gjennom et språk eller notasjonssystem tilpasset alder og nivå, og Blanton & Kaput (2005) vektlegger at representasjoner bør skje på en stadig mer formell måte. Historisk utviklet algebra seg fra å benytte representasjoner på et retorisk nivå, via synkopert nivå, til det symbolske representasjonsnivået. Representasjoner kan derfor forekomme som naturlig språk, både muntlig og skriftlig, som grafer, tabeller eller tegninger. Generaliseringer kan også representeres med numeriske symboler som opptrer som kvasi-variable og som symbolnotasjon med variabler. En generalisering av egenskapene til par-og oddetall kan eksempelvis representeres muntlig, der elevene bruker sitt naturlige språk for å forklare at summen alltid blir et oddetall («Når vi legger sammen et partall og et oddetall, får vi alltid et oddetall). En annen aldersadekvat representasjon av samme generalisering kunne ha vært en tegning.

Begrunne generaliseringer er å utvikle matematiske argumenter for å validere eller forkaste en antatt generalisering (Blanton et al., 2018). Allerede i ung alder er elever i stand til å vurdere spørsmål om antagelsene deres gjelder for alle tall (Carpenter et al., 2003), og det er et steg på veien for å begrunne antagelsen de har kommet fram til. Målet med å begrunne er å overbevise andre om gyldigheten av en generalisering, og det kan skje gjennom en argumentasjon på ulike nivåer (Carpenter et al., 2003). Lannin (2005) presenterer i sitt rammeverk fem nivåer, der nivå 0 er at begrunnelser ikke forekommer. Videre mener han at begrunnelse skjer på følgende fire nivå: begrunne ved å henvise til ekstern autoritet, begrunne empirisk, begrunne med generisk eksempel og deduktiv begrunnelse. En elev som har kommet fram til en generalisering rundt egenskapene til par- og oddetall, kan begrunne generaliseringen empirisk ved å henvise til mange tilfeller med samme utfall.

Resonnere med generalisering vil si å behandle generaliseringen som et matematisk objekt i seg selv, og kan brukes til å løse andre problemsituasjoner (Blanton et al., 2018). Å resonnere med en generalisering innen aritmetikk kan innebære å ta i bruk generaliseringen, enten for å lage nye generaliseringer eller for å utføre beregninger. Blanton et al. (2018) vektlegger at det er viktig å utvikle denne praksisen for å lære seg å tenke algebraisk, da det å resonnere med generaliseringer markerer et sprang i begrepsdannelsen hos elevene. I eksemplet med summen til oddetall og partall, kan den generaliseringen eksempelvis bli brukt videre til å resonnere rundt hva som vil bli tilfelle om man legger sammen tre oddetall.

I neste kapittel skal jeg gjøre rede for hvilke metodiske valg jeg gjorde for å finne svar på forskningsspørsmålet mitt.

3 Metode

Mitt forskningsspørsmål i denne studien er: *Hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning tar elever i to grupper på 8.trinn i bruk i arbeid med en oppgave innen generalisert aritmetikk?* For å kunne svare på dette spørsmålet har jeg gjennomført en undersøkelse der elever har jobbet med en oppgave, i små grupper, med meg som forsker til stede. I dette kapitlet skal jeg redegjøre for hvilke metodiske konsekvenser forskningsspørsmålet har hatt for gjennomføring av undersøkelsen. Jeg skal beskrive og begrunne valgene som er gjort når det kommer til utvalg av forskningsdeltakere, valg av oppgave og analysemetode. Til slutt skal jeg ta for meg prosjektets etiske vurderinger, samt gjøre rede for studiens troverdighet.

3.1 Metodiske konsekvenser av forskningsspørsmålet

Formålet med en studie er retningsgivende for valg av metode, og når formålet er å undersøke handlinger knyttet til algebraisk tenkning, kan man se for seg ulike veivalg. Det er mulig å gå bredt ut, og samle et tallrikt datamateriale gjennom en kvantitativ undersøkelse. Brinkmann & Tanggaard (2012) påpeker at det i kvantitative undersøkelser fokuseres på å finne et mål for *hvor mye* av noe man kan identifisere i et datamateriale. Formålet med min studie er derimot ikke å tallfeste hyppigheten av hvor ofte den ene eller andre handlingen knyttet til algebraisk tenkning blir tatt i bruk. Jeg ønsker å avdekke *hvilke* handlinger knyttet til algebraisk tenkning elevene tar i bruk i sitt arbeid. Videre ønsker jeg å undersøke de ulike handlingene nærmere, og da vil det for denne studien være naturlig med en kvalitativ tilnærming.

Kvalitative forskningsmetoder kjennetegnes ved at forskningen er rettet mot få forskningsdeltakere, der målet for forskeren er å få detaljert kunnskap om et emne eller problem gjennom den eller de som deltar. Forskeren blir en del av deltakernes verden (Cohen, Manion & Morrison, 2018), og kvalitative forskningsmetoder går ut på å observere aktiviteter i sin naturlige setting (Postholm, 2010).

For å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt var derfor naturlig å oppsøke elevene i skoletida. For å kunne observere og dokumentere utsagn og handlinger på en tilfredsstillende måte var det hensiktsmessig at gruppen med deltakere ikke er for stor. Jeg planla ut fra en gruppestørrelse på tre elever, slik at det skulle være mulig å være oppmerksom på alle deltakere til enhver tid. Som et utgangspunkt håpet jeg å få med elever til fire grupper, for å sikre at jeg fikk tilstrekkelig med datamateriale. Jeg skal videre presentere de ulike overveiningene som ble gjort for å finne svar på hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk i arbeid med en oppgave innen generalisert aritmetikk.

3.2 Utvalg

Flere faktorer påvirker hvordan utvalget av forskningsdeltakere blir satt sammen, og forskeren har varierende grad av mulighet for kontroll og påvirkning på sammensetningen. Målet mitt var å undersøke hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tok i bruk i sitt arbeid, og jeg ønsket derfor ikke for store eller for mange grupper med deltakere. Dette av hensyn til å kunne skape gode observasjonssituasjoner, der det var mulig å være oppmerksom nok og følge opp elevenes utsagn underveis i undersøkelsen. I tillegg var det også et poeng å begrense datamengden noe, slik at etterarbeidet ble overkommelig.

Et trekk ved kvalitative studier er at utvalgene er målrettede (Miles, Huberman & Saldaña, 2014), hos Tjora (2012) blir de kalt strategiske eller teoretiske utvalg. Der kvantitative studier legger vekt på at utvalget skal være tilfeldig valgt, er det i kvalitative studier vesentlig at utvalget har tilhørighet til den konteksten som skal undersøkes. Valget om å rekruttere elever på 8.trinn til undersøkelsen var målrettet, og jeg baserte avgjørelsen på flere kriterier. I teorikapitlet har jeg beskrevet en tradisjonell inndeling, der man på barnetrinn i stor har fokusert på arbeid med aritmetikk, før algebra har blitt innført som begrep og matematisk emne på ungdomstrinn. Elevene på dette 8.trinnet hadde, på det tidspunktet undersøkelsen ble gjennomført, foreløpig ikke blitt undervist i algebra på ungdomstrinnet. Resultatet av min undersøkelse kunne derfor tenkes å være en pekepinn på hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elevene hadde erfaring med fra barnetrinn, og dermed si noe om hvilke handlinger det kan være fordelaktig å bygge videre på når elevene skal over i arbeid med mer avansert algebra. Et annet kriterium for utvelgelsen var at jeg ikke hadde kjennskap til elevene på dette trinnet fra før. Derfor hadde jeg heller ikke kunnskap om matematikk-kompetansen til elevene på forhånd, og jeg kunne gå inn i prosessen uten å være forutinntatt med tanke på hvem som ble med, og hva jeg kunne forvente av undersøkelsen.

Deltakelse i en undersøkelse baserer seg på frivillighet, noe jeg kommer nærmere inn på når jeg skal ta for meg de etiske vurderingene i prosjektet. Frivillighetsperspektivet gjør det umulig å forutse hvem som ønsker å delta, og dermed kan ikke forskeren ha full kontroll over hvem som ender opp som deltakere. Et problem med dette kan være at forskeren da ikke har kontroll over hva personer som ikke deltar i undersøkelsen ville ha sagt og gjort (Tjora, 2012), og hvordan det kunne ha påvirket resultatet om disse var med. Jeg kan ikke utelukke at noen av elevene som valgte å ikke bli med, ville ha løst oppgaven på en annen måte enn de som takket ja. Likevel mener jeg at studien er verdifull, all den tid elevene som deltok var med på å generere et datamateriale som hjalp meg å få svar på forskningsspørsmålet.

Rekruttering av deltakere foregikk på min egen arbeidsplass, på et trinn jeg ikke hadde vært lærer på. Jeg tok kontakt med ulike lærere på trinnet for å introdusere dem for prosjektet mitt og undersøke muligheten for å presentere det i klassene. Det var velvilje til det, og jeg avtalte tid i to klasser til å begynne med. Etter å ha sagt noen ord om rollen min som student og forsker, forklarte jeg innholdet i prosjektet og litt om elevens rolle. Jeg vektla viktige momenter som frivillighet, personvern og anonymisering, at det ikke ville påvirke vurderingen deres i faget og at alle som var interessert kunne bli med (karakterer var ubetydelig). Informasjonsskriv med samtykkeerklæringer ble delt ut til de som syns det virket interessant, og lærerne fikk noen flere kopier for å ha i bakhånd. Lærerne fikk også ansvar for å samle inn skjemaene, og vi satte frister for når de måtte være på plass. For å unngå eventuelle uheldige elevkonstellasjoner, ønsket jeg at lærerne som kjente elevene, skulle foreta sammensetning av gruppene. Jeg la få føringer, annet enn at jeg ønsket meg noen elever som var litt verbale på hver gruppe, for å sikre at det ble dialog rundt oppgaveløsningen.

I etterkant var det liten respons. Det var få elever som meldte seg i første runde, og det lå ikke an til å bli mer enn to grupper i første omgang. Da inviterte jeg meg inn i to klasser til og informerte på samme måte. Etter den siste runden meldte noen flere elever seg, og jeg endte med fem grupper til sammen. Hva årsaken til lav oppslutning kan være, er et interessant spørsmål som jeg ikke har et klart svar på. Det er nærliggende å tro at det er en kombinasjon av flere forhold. Elevene måtte fatte interesse for prosjektet og melde seg frivillig, og for noen 8.klassinger kunne det nok være vanskelig å ta inn over seg hva undersøkelsen faktisk gikk ut på. Noen kjente kanskje at det ble litt utrygt med en forsker som var ukjent for dem, selv om de syntes prosjektet virket interessant. I tillegg kunne det ligge noen fallgruver i forbindelse med samtykkeerklæringen. Den måtte først bli levert til foresatte, som skulle sette seg inn i hva forespørselen gjaldt, bli interessert og skrive under. Deretter måtte elevene huske å ta med erklæringen tilbake til skolen og levere til riktig tid og person. Jeg ble i ettertid informert om flere skjema som var med tilbake til skolen lenge etter at jeg avsluttet datainnsamlingen.

Gruppene ble i all hovedsak satt sammen klassevis, sett bort fra ei gruppe der det ble blanding fra to klasser. Der kjente elevene hverandre fra før, så de sa selv at det føltes trygt og greit. Analysen vil basere seg på data fra to av gruppene. Gruppene ble valgt ut til analysen fordi det var gruppene med mest muntlig aktivitet, og fordi jeg anså det som sannsynlig at jeg kunne finne svar på forskningsspørsmålet mitt gjennom elevenes aktivitet. I tillegg registrerte jeg noen fellestrekk i arbeidet deres. De identifiserte flere av de samme strukturene, noe kan være med på å styrke studiens validitet. Det var også noen ulikheter mellom gruppene som gjorde at de utfylte hverandre, og jeg kunne få innsikt i et bredere spekter av handlinger knyttet til algebra elevene tok i bruk.

3.3 Metode for datainnsamling - Observasjon

For å samle inn data som var relevant for forskningsspørsmålet mitt, var det naturlig å observere elevene da de arbeidet med, og snakket om det de gjorde i oppgaveløsning. Observasjon er mer enn bare det å se (Cohen et al., 2018), som kanskje er den hverdagslige betydningen de aller fleste legger i begrepet. Observasjon er å bruke alle sanser som kan påvirke opplevelsen, og dermed observasjonen (Postholm, 2010). I tilgjengelig litteratur er det få beskrivelser som er skreddersydd for den type undersøkelse jeg hadde planlagt, så valgene for datainnsamling ble tatt ut fra at undersøkelsessituasjonen skulle være komfortabel for elevene, samle så mye og relevant data som mulig, og på en slik måte at etterarbeidet kunne gi mening.

Videre planlegging tok da utgangspunkt i at observasjon var hovedmetode. Etter å ha valgt observasjon som metode var det fremdeles mange avveininger underveis i planleggingen. Jeg måtte ta stilling til hvilken type observasjon som var mest hensiktsmessig for mitt forskningsspørsmål, i tillegg til å vurdere min egen rolle og grad av delaktighet i observasjonen. Cohen et al. (2018, s. 543) gir en oversikt over kjennetegnene på de ulike typene observasjon, og de ulike rollene en forsker kan inneha i en observasjon. Hvilken type og rolle i observasjon man velger, legger også noen føringer for det praktiske arbeidet med observasjonen, både før, under og etter undersøkelsen.

Når man skal undersøke hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk i arbeid med en oppgave innen generalisert, er det naturlig at mye av interaksjonen i undersøkelsen styres av det eleven utfører og sier. På bakgrunn av det kan man se for seg en undersøkelsessituasjon med preg av ustrukturert samtale om en oppgave og et faglig tema, men for min undersøkelse var det en noe større planmessighet bak gjennomføringen. Jeg hadde utformet en kombinert samtaleguide/observasjonsskjema, der jeg hadde notert meg hvilke spørsmål det kunne være aktuelt å stille elevene underveis. Et vesentlig moment for en forsker i skolekonteksten er å unngå at spørsmålsstillinger blir så ladet at de kan oppfattes som et forsøk på undervisning. Det er vesentlig at eleven som forskningsdeltaker ikke får inntrykk av at undersøkelsen dreier seg om hva han ikke mestrer, eller egentlig kunne ha lært seg hvis forskeren fikk stille ledende spørsmål.

Forskeren må også vurdere hvilke verktøy det er formålstjenlig å benytte seg av for å dokumentere det som observeres i situasjonene. Etterarbeidet, og nøyaktigheten i den kommende analysen lettes av å ha dokumentert på flere måter, gjennom eksempelvis notater og video- og/eller lydopptak. Det er sjelden at hukommelsen er nok, men det er heller ikke et mål at man skal sitte igjen med uforholdsmessig mange opptak som skal transkriberes - nok en avveining forskeren må ta i forhold til sitt forskningsspørsmål. Kvale & Brinkmann (2009) peker på at notater kan være godt å støtte seg til i etterkant, men at det underveis i undersøkelsen kan virke distraherende og gå på bekostning av forskerens oppmerksomhet overfor forskningsdeltakeren. Forskeren må være bevisst på hva som gir best utbytte for videre arbeid, forskningens troverdighet og i tillegg ha en tanke for hva som gir forskningsdeltakeren den beste opplevelsen.

Jeg valgte å dokumentere undersøkelsen med lydopptaker. Vurderingene rundt hva som var best og mest praktisk gjorde at jeg valgte bort opptak med videokamera. Jeg vurderte sannsynligheten for at taleopptak av situasjonen kanskje virket minst unaturlig og forstyrrende for elevene som deltok. Taleopptakeren er liten av størrelse og skaper lite visuelt støy i undersøkelsessituasjonen, i tillegg til at levende bilder av en selv kan høres litt skummelt ut, og potensielt kan skape unaturlige situasjoner underveis i undersøkelsen. I min kombinerte samtaleguide/observasjonsskjema hadde jeg oversikten over det jeg burde huske å stille spørsmål om, samt egen rute for å notere elevrespons – og handlinger. Elevene ble bedt om å ikke skrive navn på papirene de benyttet, slik at jeg kunne samle inn dem. Videre benyttet jeg notatarkene som støtte i arbeidet med transkribering, og som en del av datagrunnlaget i analysen. Elevene hadde på forhånd fått informasjon om at notatarkene ville bli brukt videre i studien.

Til gjennomføringen hadde jeg satt av ei undervisningsøkt til hver gruppe, og booket et av grupperommene i tilknytning til lærerarbeidsplassene. Jeg vurderte at det var større sannsynlighet for å få arbeide uforstyrret ved å gjennomføre undersøkelsen litt adskilt fra elevarealet. I tillegg var rommet utstyrt med et stort rundt bord, som var praktisk for organiseringen. Siden ingen av elevene kjente meg på forhånd, var det viktig for meg å lage en atmosfære der de kunne føle seg så avslappet som mulig. Dette poengteres også av Nilssen (2012), som en forutsetning for å få god informasjon. Derfor satte jeg av litt tid helt i starten av økta der vi snakket litt mer om det som ventet, og elevene fikk anledning til å stille de spørsmål de måtte ha. Jeg understreket for dem at jeg ønsket at de sa alt de tenkte, og at det ikke var fokus på riktige eller gale svar. Som tidligere nevnt var det viktig at elevene ikke skulle oppleve situasjonen som en kartlegging av hva de mestret eller ikke, men heller som en mulighet til å sette ord på og formidle kompetansen sin. Lydopptakeren sto midt på bordet, og jeg ga tydelig beskjed da den ble startet. Det var lagt fram blyant og papir til hver elev, samt at det lå fremme viskelær og kalkulator, som de kunne benytte ved behov. Jeg poengterte for dem at kalkulatoren var fritt fram å bruke, siden det ikke var ferdighetene deres i regning som var det viktige i denne undersøkelsen.

3.4 Oppgaven til elevene

Formålet med denne studien er som tidligere nevnt å undersøke på hvilke måter algebraisk tenkning kommer til uttrykk i elevers arbeid med generalisert aritmetikk. Oppgaven som skulle presenteres for elevene måtte velges på bakgrunn av dette. For at oppgaven skulle være hensiktsmessig med tanke på studiens formål, måtte den tilfredsstille noen krav, med hensyn til blant annet åpenhet og vanskegrad. Det var viktig at oppgaven ikke la begrensninger for elevenes utforsking, men var av en åpen karakter slik at man kunne tenke seg mange ulike mønster, sammenhenger og forslag til løsninger fra elevenes side. I tillegg var det viktig å finne en oppgave med passende vanskegrad, gjerne med en kontekst som var kjent for elevene. I tillegg måtte oppgaven gi elevene muligheter for å identifisere strukturer, egenskaper ved og sammenhenger mellom tall, uavhengig av matematisk kompetanse.

Det var vesentlig at oppgaven inneholdt elementer som gjorde det mulig å identifisere algebraisk tenkning hos elevene, og at den inneholdt aritmetiske strukturer som kunne generaliseres. Oppgaven måtte åpne for at elevene oppdaget mønster eller forhold mellom tallene, og at de kunne gå videre fra den aritmetiske situasjonen over til en algebraisk situasjon. Kaput (2008) beskriver i sin innholdsanalyse av algebra hvilke aktiviteter som kan utgjøre basisen for hver av de tidligere beskrevne innholdstrådene. Generalisering av strukturer og system i aritmetikk hører til innholdstråd 1, og under den tråden plasserer Kaput (2008) blant annet aktiviteter der man arbeider med å finne, og uttrykke regelmessigheter i et 100-kart eller addisjons - og multiplikasjonstabeller. Dette dannet utgangspunktet for undersøkelsene rundt å finne en passende aktivitet og oppgave til min studie.

Inspirasjon til oppgaven ble hentet fra NRICH (NRICH, u.å., Calendar Capers), og tilpasset denne studiens formål. Elevene ble presentert for en kalender, som i utgangspunktet kan tenkes å være en kjent kontekst for de fleste av dem. Elevene fikk i oppgave å markere valgfrie kvadrat i kalenderen og utforske strukturer, mønster og sammenhenger mellom tallene.

Figur 3: Illustrasjon av kalender med kvadrater til utforsking (Timeanddate, u.å., Kalender for November 2019).

Oppgaven var dermed i utgangspunktet veldig åpen, og den ble presentert muntlig for elevene. Det samme ble oppfølgingsoppgaver- og spørsmål underveis i oppgaveløsningen. Ved å presentere oppgaven muntlig unngikk jeg at eventuelle brister i leseferdigheter ble et hinder for elevene. I tillegg fikk elevene mulighet til å stille spørsmål underveis, noe som sikret at elevene i stor grad oppfattet hva de skulle gjøre. Elevenes oppgave var å se etter strukturer, mønster og sammenheng mellom tallene de hadde i sitt kvadrat. Underveis stilte jeg spørsmål som kunne anspore elevene til å ta i bruk flere handlinger knyttet til algebraisk tenkning, innenfor de fire praksisene generalisere, representere, begrunne og resonnere med generalisering. Det var viktig for meg å fokusere på at spørsmålene jeg stilte underveis ikke skulle være ledende, eller at dialogen med elevene skulle bære preg av undervisning. Jeg var ute etter å få kunnskap om hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkningen elevene tok i bruk, og gikk derfor videre når de ga uttrykk for at de ikke visste hvordan de skulle løse problemformuleringen jeg ga dem.

Blanton & Kaput (2003) viser til følgende fire spørsmål som vesentlig for å få forståelse for elevers algebraiske tenkning (min omskriving):

- Fortell meg hva du tenker.
- Løste du denne på en annen måte?
- Hvordan vet du at dette er sant?
- Vil det bestandig virke?

Jeg tok i bruk varianter av slike bevisstgjørende spørsmål i situasjoner der jeg mente det var hensiktsmessig for å undersøke om elevene kunne ta i bruk flere handlinger knyttet til algebraisk tenkning.

Før oppstart av undersøkelsen gjennomførte jeg en pilotstudie, på elever som var året eldre enn deltakerne i studien min. Der ble elevene bedt om å starte opp med et kvadrat på $3 \cdot 3$ ruter som utgangspunkt, som var min opprinnelig plan for hovedundersøkelsen. Elevene hadde problemer med å komme i gang, det var lite respons og få forslag til sammenhenger. Det førte til at jeg ba dem skissere et kvadrat på $2 \cdot 2$ ruter, og da løsnet arbeidet i større grad. Erfaringen fra piloteringen gjorde at jeg valgte å starte med kvadrat på $2 \cdot 2$ ruter da jeg gjennomførte hovedundersøkelsen.

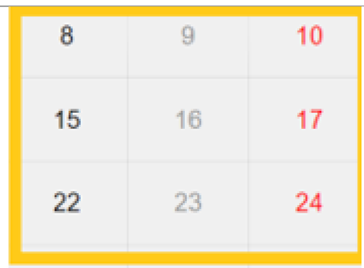
Siden oppgaven ble presentert muntlig til hver enkelt gruppe, finnes det ingen nedskrevet oppgavetekst, men jeg har i listen under skrevet inn de begrepene jeg hovedsakelig introduserte de ulike oppgavene med. Framdriften i oppgavene var som følger:

1) $2 \cdot 2$ ruter -Se på tallene i kvadratet, ser dere noen sammenhenger, mønster eller forhold mellom tallene?
2) $3 \cdot 3$ ruter – Se på tallene i kvadratet, ser dere noen sammenhenger, mønster eller forhold mellom tallene?
3) Finne summen av hjørnene i kvadratet på $3 \cdot 3$ ruter – Finner dere en sammenheng mellom summen av de fire hjørnene og tallene i kvadratet? Kan dere finne en snarvei som gjør at dere ikke trenger å legge sammen hjørnene for å finne summen?
4) Avslutningsvis fikk de i oppgave å tegne opp et kvadrat bestående av $3 \cdot 3$ ruter, for så å fylle ut det etter at de fikk oppgitt kun ett tall fra meg.

Det siste spørsmålet var ikke en del av den planlagte undersøkelsen, men kom til som en spontan aktivitet. Det spørsmålet tas derfor ikke med videre i arbeidet med analysen.

Jeg var bevisst på å bruke begreper jeg antok at elevene skjønte betydningen av i presentasjon av oppgaven. Dermed introduserte jeg dem ikke for begrepet struktur, da jeg var usikker på om det ville ha gitt mening for elevene.

Under følger en tabell der jeg presenterer en mulig løsning for elevenes arbeide med kvadratet som inneholdt $2 \cdot 2$ ruter. Tabellen viser de fire grunnleggende praksisene fra Blanton et al. (2018) sitt rammeverk. Hver praksis er definert, og jeg viser eksempel på handlinger elevene kunne tenkes å ta i bruk innenfor hver enkelt praksis.

Praksis	**Beskrivelse**	**Elevhandlinger**
Generalisere	Analysere informasjon for å utvikle en antagelse om aritmetisk forhold.	 -Analysere de 4 rutene, og identifisere at diagonalene har lik verdi. - Anta at strukturen er gjeldende for alle lignende kvadrater.
Representere	Representere den antatte generaliseringen gjennom ord og/eller variabler.	Muntlig representasjon: «Diagonalene har lik verdi» «$4+12$ er like mye som $5+11$
Begrunne	Undersøke argumenter for at antagelsen kan være sann.	Empirisk begrunnelse: «Diagonalen er alltid lik, fordi vi har prøvd i disse tre kvadratene, og det stemmer.»
Resonnere	Bruke generaliseringene om et aritmetisk forhold til å utføre andre beregninger eller resonnere om nye generaliseringer.	 «Diagonalene hadde lik verdi i det minste kvadratet. Det tror jeg det blir her også, fordi den eneste forskjellen blir at den går gjennom midten – og det tallet blir likt for begge.»

Tabell 1: Mulige løsninger på de ulike oppgavene i undersøkelsen

Tabellen viser bare et fåtall handlinger knyttet til hver praksis innenfor algebraisk tenkning, men gjennom å framstille den slik, mener jeg å vise at oppgaven er egnet for å kunne gi meg svar på mitt forskningsspørsmål. Kvadratet med $3 \cdot 3$ ruter, og tilhørende spørsmål om snarveien mellom hjørnesummen og de øvrige tallene, vil også kunne føre til elevhandlinger som kan være med å gi meg svar på hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning de tar i bruk. Jeg skal i den kommende seksjonen beskrive hvordan jeg gikk fram for å analysere datamaterialet basert på elevenes arbeid med kalenderoppgaven.

3.5 Metode for analyse

Nilssen (2012) hevder at alle forskere utvikler sin egen analysemetode, og at det ikke eksisterer oppskrifter eller regler for analyseprosessen. Denne metodefriheten finner vi også beskrevet hos Cohen et al. (2018), som presiserer at framgangsmåten må være tilpasset formålet med studien. Jeg har i analysen av mitt datamateriale brukt en variant av tematisk analyse (Braun & Clarke, 2006), med innslag av både induktive og deduktive prosesser. I seksjonen skal jeg først gjøre rede for typiske trekk ved kvalitativ analyse, med et spesielt fokus på tematisk analyse. Videre skal jeg beskrive min analyseprosess og begrunne de valg jeg har tatt.

3.5.1 Kvalitativ analysemetode - Tematisk analyse

Tematisk analyse er en fleksibel analysemetode for kvalitative data, og inneholder elementer som også går igjen i andre kvalitative analysemetoder. Typisk for kvalitativ analyse er en induktiv prosess, og induktiv analyse handler ifølge Patton (2002) om å finne mønster, koder og kategorier i datamaterialet. Det er mye av de de samme begrepene som Braun & Clarke (2006) benytter i sin introduksjon av tematisk analyse. De beskriver tematisk analyse som en metode for å identifisere, analysere og presentere mønstre eller tema i datamaterialet. Ordet *mønster* går igjen i en del av litteraturen som omhandler kvalitativ analysemetode. Kvalitativ analyse behandler ofte et omfattende datamateriale, der det kan være et behov for å sortere og finne mønstre som går igjen. En slik sortering av mønster kan blant annet gjøres gjennom koding. Å kode er å feste merkelapper på data som dreier seg om samme idé eller informasjon (Cohen et al., 2018). Kodene gjør det videre mulig for forskeren å sette sammen data, og se på dem opp mot et forskningsspørsmål (Miles et al., 2014). Kodingen blir også sett på som en del av selve analysearbeidet (Miles et al., 2014).

Kodingsprosessen er også en av de seks fasene i tematisk analyse, beskrevet i Braun & Clarke (2006) (min omskriving):

Fase 1:	Bli kjent med datamaterialet. Transkriber, les og noter ideer til datamaterialet.
Fase 2:	Kode datamaterialet på en systematisk måte.
Fase 3:	Søke etter temaer/kategorier. Samle all relevant data til samme tema.
Fase 4:	Gå gjennom på nytt, og revurder kategoriene. Sjekk kategoriene opp mot både utdrag fra data og hele datasettet.
Fase 5:	Definere og gi navn til kategoriene. Avgrens og lag klare definisjoner på hva kategorien inneholder. Kategoriene skal kunne brukes av andre forsker i senere studier.

Fase 6: Skrive rapport om funnene, og meningen med dem.

Braun & Clarke (2006) viser til flere valg forskeren står overfor i en tematisk analyse, der valgene tar forskeren i retning av enten en empirnær eller en mer teorinær prosess. Det tydeliggjør at tematisk analyse har mange varianter, da en kombinasjon av de to nevnte retningene også blir trukket fram som en mulig prosess. Min analyseprosess var sammenfallende med tematisk analyse i de tre første fasene, mens jeg valgte en deduktiv tilnærming i fase 4. Patton (2002) argumenterer for at det ikke er uvanlig at man etter en induktiv analyse er deduktiv senere i prosessen, med formål om å få bekreftet den tidligere analysen. I neste avsnitt skal jeg komme nærmere inn på min analyseprosess.

3.5.2 Analyseprosess

Lydopptakene fra undersøkelsene utgjorde hovedtyngden av datamaterialet i min studie. I arbeidet med analysen brukte jeg i tillegg elevenes notater på kladdeark og kalender, samt mine egne notater fra gjennomføringen. Det første steget i analyseprosessen var å få oversikt over datamaterialet. Kvalitative undersøkelser genererer ofte en nokså stor mengde data, og utfordringen i kvalitativ analyse ligger i å finne mening i det som er samlet inn (Patton, 2002). Etter at undersøkelsene var gjennomført startet jeg derfor med å lytte gjennom alle opptakene og organisere papirene. Ved å høre gjennom alle, kunne jeg gjøre meg opp en mening om hvilke opptak det var hensiktsmessig å transkribere. To av opptakene ble sjaltet ut i denne prosessen. Til transkribering valgte jeg ut opptakene der det var mest muntlig aktivitet, og dialogen lot til å kunne gi svar på forskningsspørsmålet mitt. Opptakene ble transkribert på bokmål, da det ikke var spesielle forhold som gjorde det hensiktsmessig å ivareta dialekt. Jeg la derimot vekt på å få med pauser og tidsbruk mellom spørsmål fra meg og svar fra elevene. Dette ble notert inn i transkripsjonen på flere måter. Jeg noterte tiden mellom mitt spørsmål og elevenes respons der jeg opplevde at det ble langvarig stillhet. I tillegg noterte jeg tidsbruk eller nøling i elevytringene som påfølgende prikker (…) eller bruk av ord som *eh, hmm, mm*. Jeg valgte å ta med dette i transkripsjonene fordi jeg ønsket å ha en induktiv tilnærming til data i analysearbeidet, og kunne ikke forutsi om disse pausene og nølingene ville være av betydning for analysen eller ei. Det samme gjaldt noe kroppsspråk, kontakt mellom elever, handlinger og uttrykk for følelser. Slike observasjoner noterte jeg inn i parenteser i transkripsjonen. Grunnlaget for videre analyse var datamaterialet fra to grupper, bestående av transkripsjoner og elevene skriftlige arbeid.

Videre hadde min analyseprosess flere likheter med tematisk analyse, men jeg tok også noen metodiske valg som gjorde at prosessen ikke samsvarte fullt ut med de seks fasene som ble beskrevet i Braun & Clarke (2006). For å komme fram til koder, var min tilnærming til datamaterialet av induktiv karakter. Jeg leste transkripsjonene flere ganger, noterte i margen og markerte i teksten. I tillegg hadde jeg et dokument der jeg skrev ned tanker om det som kom fram i datamaterialet, og et begynnende kodeskjema. Flere forskere, så også Braun & Clarke (2006), peker på viktigheten av å skrive underveis i hele prosessen, både for å huske og fordi den innledende kodingen også er en del av analysen. For å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt var det elevhandlingene og elevytringene i datamaterialet som ble grunnlaget for kodene. Jeg måtte prøve å forstå hva som skjedde i de ulike delene av undersøkelsen, og stilte spørsmålet «hva skjer her» underveis i lesningen. Deretter prøvde jeg å besvare spørsmålet med å lage koder som var beskrivende for situasjonen, og som i tillegg kunne være med å belyse forskningsspørsmålet mitt. Kodene endret seg noe underveis i arbeidet. I utgangspunktet tenkte jeg å skille på utsagn som sa noe om eleven identifiserte visuelle mønster eller identifiserte forhold mellom tall. Tanken var å skille ytringer som hovedsakelig pekte på plassering i kalenderen, fra ytringer som pekte på tallsammenhenger. Etter hvert ble det vanskelig å skille hva som var hva, og jeg slo dem sammen til koden *identifisere strukturer.*

I neste fase, utarbeiding av kategorier, avviker min analyseprosess fra tematisk analyse. I den tematiske analysen er det analyse av kodene som er grunnlaget for kategoriene. Kodene blir undersøkt med tanke på sammenhenger og fellestrekk. Videre undersøkes det hvilke koder som kan kombineres og settes sammen til et overordnet tema. De overordnede temaene blir deretter revurdert i neste fase, før de endelige kategoriene får navn i fase 5 (Braun & Clarke, 2006). Jeg tok ikke utgangspunkt i kodene mine for å identifisere kategorier. På forhånd hadde jeg definert de fire grunnleggende praksisene fra Blanton et al. (2018): *generalisere, representere, begrunne og resonnere*, som kategorier for de ulike handlingene elevene tok i bruk. Jeg mener at praksisene er grunnleggende for å kunne si noe om elevers handlinger knyttet til algebraisk tenkning, og dermed ble de fire kjennetegnene hensiktsmessige å benytte som kategorier i mitt datamateriale. Kodene jeg hadde kommet fram til gjennom induktive prosesser ble så tilordnet de forhåndsbestemte kategoriene. Kategoriseringsprosessen ble derfor delvis et teorinært og deduktivt arbeid. Det er også viktig å presisere at selv om man som forsker har en induktiv tilnærming til datamaterialet, vil det være umulig å forholde seg helt nøytral til det man forsker på (Tjora, 2012). Det er derfor rimelig å anta at teorien jeg hadde lest på forhånd var med på å farge kodingsprosessen underveis, selv om jeg var bevisst på å stille åpne spørsmål til datamaterialet.

Arbeidet med å komme fram til koder, og tilordningen til ulike kategorier var ikke et lineært arbeid. Transkripsjonene fra de to gruppene ble kodet hver for seg, og kodene ble etter hvert samlet i et skjema. Deretter gikk jeg gjennom hver transkripsjon på nytt flere ganger, for å se om det var relevante hendelser som ikke hadde blitt kodet. Jeg gikk også tilbake til datamaterialet flere ganger for å forsikre meg om at hendelser hadde fått hensiktsmessige koder.

Kodene som kom fram i analyseprosessen var:

Generalisere: *identifisere struktur* og *identifisere egenskaper*

Representere: *muntlig representasjon*, *representere ved algebraisk bruk av tall*, *visuell støtte, bruk av notatark*

Begrunne: *empirisk begrunnelse*, *begrunne med aritmetisk forkunnskap* og *begrunne med generisk eksempel*

Resonnere med generaliserin: *trekke inn nytt element*

For å gi mening til funnene analyserte jeg datamaterialet med rammeverkene til Blanton (2018) og Kaput (2008), i tillegg til annen relevant litteratur. Jeg går nærmere inn i analysen i neste kapittel.

3.6 Forskningsetikk og behandling av personopplysninger

Etikk er et spesielt og viktig område innenfor forskningsarbeidet, og hos Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsfag og humaniora (NESH, 2016, s.20), finner vi blant annet følgende retningslinjer når det gjelder barn:

«Barn og unge som deltar i forskning, har særlige krav på beskyttelse.»

«Barn er individer i utvikling og har ulike behov og evner i forskjellige faser. Forskeren må ha tilstrekkelig kunnskap om barn til å kunne tilpasse både metode for og innhold i forskningen til den aldersgruppen som skal delta.»

Dette fortalte meg at det var helt vesentlig for meg som forskere å skape gode og trygge rammer rundt undersøkelsene. For elevene var det kanskje ikke de formelle papirene de hadde skrevet under på som var av størst betydning. For eleven kunne det virke uvant å snakke med en fremmed person, i en situasjon der de skulle løse en matematisk oppgave. I tillegg kunne det kanskje knyttes noe ubehag rundt å vite at forskeren dokumenterte alt som ble sagt, i tillegg til å notere seg det som ble gjort. Jeg fokuserte derfor på åpenhet, og hadde fokus på å forklare grundig både før og underveis i undersøkelsen. For meg ble det vesentlig at elevene ikke skulle føle seg presset. Spesielt fokus hadde jeg på at elevene ikke skulle få følelsen av at jeg vurderte dem eller kompetansen deres i matematikk. Jeg satte også av tid etterpå, slik at elevene fikk anledning til å komme med tilbakemeldinger på hvordan de hadde opplevde situasjonen, og stille spørsmål de eventuelt måtte ha.

Som nevnt tidligere er det viktig at deltakelse i en undersøkelse som dette baserer seg på frivillighet. For å sikre dette ba jeg i samtykkeerklæringen jeg utarbeidet (vedlegg 1), om både elev og foresatte sin underskrift. Der informerte jeg også om hvilke rettigheter som gjelder i forhold til å trekke samtykke, og annen viktig informasjon om hvordan elevens deltakelse var tenkt brukt til videre i mitt arbeid. Jeg gjentok også disse opplysningene for gruppene i forbindelse med gjennomføringen av undersøkelsen.

Dokumentasjon som er personidentifiserende skal behandles med stor forsiktighet, og vesentlig at forskeren forholder seg til gjeldende retningslinjer og regelverk. Deltakerne skal være komfortable med det som blir dokumentert, og føle seg trygg på at det blir brukt på riktig måte videre i forskningsprosjektet. Siden mine undersøkelser ble dokumentert ved hjelp av lydopptak, hadde jeg først søkt godkjennelse for det hos NSD (Norsk senter for forskningsdata). Lydopptaker lånte jeg av NTNU, da personidentifiserende materiale ikke skal oppbevares på privat utstyr. Derfor ble opptaket overført til en kryptert minnepenn etterpå, da det er godkjent sikringstiltak. I transkripsjonen ble elevene anonymisert, slik at ingen skal kunne kjenne igjen dem i det materialet som blir brukt i masteroppgaven.

3.7 Troverdighet i kvalitativ forskning

I litteraturen presenteres mange ulike begrep som blir brukt i den hensikt å si noe om troverdigheten til kvalitativ forskning, og kvaliteten på de konklusjonene som er trukket. Kriterier for hvordan troverdigheten i kvalitativ forskning best kan ivaretas og vurderes varierer, og ulike forskere opererer med ulike standarder for hvor finmasket en slik vurdering bør være. Jeg skal videre synliggjøre noe av mangfoldet av standarder, før jeg argumenterer for mine valg og vurderer troverdigheten til egen studie.

Cohen et al. (2018) bruker begrepene validitet og reliabilitet, og viser videre til flere kriterier som det må argumenteres for innenfor hvert av de to begrepene. Validitet dreier seg kort sagt om forskningens gyldighet, hvorvidt studien har undersøkt det den hevder. Reliabilitet betyr pålitelighet, og dreier seg i forskningssammenheng om nøyaktigheten på undersøkelsen. Miles et al. (2014) løfter på sin side frem fem problemstillinger de hevder det er nødvendig å ta stilling til når det gjelder kvaliteten på kvalitativ forskning. Disse fem er (min oversettelse) objektivitet, reliabilitet, intern validitet, ekstern validitet og anvendbarhet. I Cohen et al. (2018) blir problemstillingen rundt ekstern validitet i kvalitativ forskning løftet. Det blir hevdet at ekstern validitet i mange tilfeller er irrelevant, siden intensjonen med kvalitativ forskning ikke er å generalisere, men å representere det fenomenet som blir undersøkt. Tjora (2012) peker også på diskusjonen omkring generalisering, men hevder på sin side på at generalisering er et eksplisitt eller implisitt mål innenfor forskning.

Basert på litteraturen om troverdighet i kvalitativ forskning, velger jeg videre å vurdere min studies validitet og reliabilitet. Tjora (2012) viser til at generaliserbarhet kan knyttes til forskningens gyldighet, og jeg behandler derfor problemstillinger rundt generaliserbarhet under avsnittet om validitet.

3.7.1 Validitet

Validitet kan oppsummeres som en vurdering av om studien undersøker det den hevder å gjøre. Det blir vesentlig å stille spørsmål omkring metoden undersøker det den er ment til å undersøke, og om funnene reflekterer de problemstillingene man ønsket å undersøke (Kvale & Brinkmann, 2015; Tjora, 2012).

Formålet med min studie var å undersøke algebraisk tenkning, og hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk i arbeid med en oppgave innen generell aritmetikk. Studien er basert på aktuell teori om aritmetikk og overgang til algebra. Oppgavetypen jeg brukte i undersøkelsen er også nevnt i teorien som hensiktsmessig for arbeid med generalisert aritmetikk. Rammeverkene som ligger til grunn for undersøkelse og analyse er forsøkt gjort rede for, og funnene synliggjort gjennom utdrag fra datamaterialet.

Funnene i studien baserer seg på få deltakere. Resultatene kan derfor ikke generaliseres, og direkte overføres som gyldig og sanne for alle elevgrupper på 8.trinn. Jeg mener likevel at resultatet har verdi. Utvalget elever var representativt, og funnene indikerer noen tendenser. Dermed kan resultatet være utgangspunkt for videre og mer omfattende undersøkelser av samme tema.

3.7.2 Reliabilitet

I kvalitativ forskning vil funnene være påvirket av konteksten undersøkelsen fant sted. Det er derfor viktig at forskeren gjør konteksten synlig, for å gjøre studien så pålitelig som mulig.

Kvalitative forskere gjennomfører ofte undersøkelser i egen kontekst, og får da innsidekunnskap gjennom en dobbeltrolle det er viktig å være bevisst. Denne dobbeltrollen ble også poengtert som noe å være bevisst på, i svaret fra NSD da jeg søkte om godkjennelse til datainnhenting. Jeg hadde ikke en maktposisjon overfor elevene som deltok i min undersøkelse, og jeg mener derfor at resultatet ikke ble nevneverdig påvirket av min dobbeltrolle.

En vurdering av studiens reliabilitet innbefatter også en gjennomgang av kategoriene som framkom i analysen. Jeg støttet meg på teori og benyttet forhåndsbestemte kategorier i min analyse, og har forsøkt å synliggjøre hvorfor dette var hensiktsmessig. Jeg har forsøkt å gjøre studien så transparent som mulig, gjennom å vise til episoder direkte fra datamaterialet og grundige beskrivelser. Jeg skal gå nærmere inn i analysen i neste kapittel.

4 Analyse

Forskningsspørsmålet i min studie er: *Hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning tar elever i to grupper på 8.trinn i bruk i arbeid med en oppgave innen generalisert aritmetikk?* I dette kapitlet skal jeg presentere analysen av to elevgruppers arbeid med kalenderoppgaven jeg introduserte i forrige kapittel.

Analysen baserer seg på gruppe A og B, den første og den siste jeg gjennomførte undersøkelsen med. Gruppene besto henholdsvis av tre og to elever. Elevene i gruppe A har fått navnene Liv, Signe og Per. Gruppe B består av Lone og Linus.

De fire kategoriene, *generalisere, representere, begrunne og resonnere med generalisering*, vil bli presentert i hver sin seksjon. Jeg vil bruke utdrag fra transkripsjonene for å belyse de ulike kodene jeg kom fram til gjennom analyseprosessen. For å skape oversikt har jeg gitt de episodene jeg benytter i analysen bokstavene A – Q, og ytringene er nummerert i den rekkefølge de kom i transkripsjonene. *Forsker* forkorter jeg til F fra ytring nummer 5. Handlinger som ikke kommer frem på lydopptaket er notert i parentes.

4.1 Generalisering

Generalisert aritmetikk dreier seg om å utforske og resonnere rundt strukturen til aritmetiske uttrykk, snarere enn å fokusere på verdien av et uttrykk. Elevene ble i min undersøkelse presentert for en oppgave der oppdraget var å se etter mønster, forhold og sammenhenger mellom tallene i kvadratene de hadde laget seg. Først i et kvadrat bestående av $2 \cdot 2$ ruter, deretter $3 \cdot 3$ ruter. I et regelmessig system, slik som kalenderen er, er det flere muligheter for å finne sammenhenger som kan uttrykkes aritmetisk og som videre kan generaliseres. I denne seksjonen skal jeg beskrive hvilke handlinger knyttet til generalisering elevene tok i bruk i arbeidet sitt med kalenderen, og det gjør jeg gjennom kodene *identifisere struktur* og *identifisere egenskaper*.

4.1.1 Identifisere strukturer

I datamaterialet fant jeg at elevene hadde identifisert flere strukturer i sine kvadrater. Noen strukturer ble identifisert og nevnt kort, mens andre ble identifisert og benyttet til videre generaliseringer. Med videre generaliseringer mener jeg at elevene gjorde forsøk på å forklare og begrunne strukturen de hadde identifisert, og at forklaringene ble gjort på en slik måte at det var rimelig å anta at elevene var på vei til å se på strukturen som gyldig for alle lignende situasjoner.

Episode **A** er hentet fra elevene i gruppe A, som hadde undersøkt diagonalene i kvadratene med $2 \cdot 2$ ruter på kalenderen.

12	Liv:	Hvis du plusser sammen de og de, så blir det samme svar (peker på diagonalene)
13	F:	Ja..
14	Per:	Det tror jeg det er på alle

Elevenes handlinger i episode A tydet på at de analyserte den informasjonen de hadde tilgjengelig i kvadratet, og gjennom observasjoner identifiserte de et mønster eller en regelmessighet som gjentok seg. Det så ut til at observasjonene førte til at elevene kom til en antagelse, også kalt generalisering. I ytring 14 viste Per at han antok at strukturen de hadde identifisert var gjeldende for *alle*, i dette tilfellet pekte han nok på diagonaler. Elevene så i denne episoden ut til å registrere at to uttrykk har lik verdi, og de identifiserte dermed et forhold mellom de matematiske objektene i kvadratet.

Gjennom tilsvarende analyse av informasjon, og undersøkelse av kvadratet med $3 \cdot 3$ ruter, identifiserte gruppe A flere forhold mellom matematiske objekt, slik som i episode **B**.

161	F:	Bra, hva er summen av de fire hjørnene og så er selvfølgelig neste spørsmål da, hvordan kan vi se, er det noen sammenheng mellom det tallet vi får der og tallene i… kvadratet? Og her er det bare å se på summen, se på tallene, utforske og se om dere finner noe som
162	Signe:	Ja!
163	F:	Ja! Der var du kontant
164	Signe:	Det blir, akkurat til meg da, så blir det 66 uansett hvordan du regner
165	F:	Mhm, diagonalene, eller?
166	Signe:	Nei, hos meg ble det her her og midten i alle fall (har ringet rundt både diagonalene, midterste rad og midterste kolonne).
167	F:	Mhm
168	Signe:	Jeg tar en kalkulator bare for å sjekke
169	F:	Jaja, det kan du gjøre
170	Liv:	Det samme med disse. Disse blir det samme. Nei, jo, de blir det samme og de blir det samme (peker på motstående hjørner 1-17, 3-15)

Her prøvde jeg i utgangspunktet å styre elevene mot den delen av oppgaven der de skulle lete etter en snarvei mellom hjørnesummen og tallene i kvadratet, men Signe utforsket andre strukturer i sitt kvadrat. Hun registrerte at mange av mønstrene hadde lik sum, og også her lot det til at likeverdige uttrykk var sentrale i generaliseringsprosessen. I ytring 170 bidro Liv til fokus rundt å identifisere addisjonsuttrykk med lik verdi, ved at hun pekte på summen av motstående hjørner i kvadratet.

Episode **C** viser gruppe B sitt arbeid med $3 \cdot 3$-kvadratet. Der var det ikke fokus på likeverdige uttrykk, men Lone identifiserte en annen type struktur.

139	Lone:	Nedover her plusses det på 8 (hennes kvadrat er 12-13-14-19-20-21-26-27-28). Fra 12 til 20 og til 28, og her plusses det på 6 nedover, fra 14 til 20 og til 26.
140	F:	Jah! Kan du si noe om, får du til å si noe mer konkret om hvor det øker?
141	Lone:	Ja, nedover på skrå.

Lone identifiserte en struktur langs diagonalene i sitt kvadrat ($12 - 13 - 14 - 19 - 20 - 21 - 26 - 27 - 28$), der hun fokuserte på en økning på 8 langs diagonalen fra venstre ned mot høyre, og med 6 langs diagonalen fra høyre ned mot venstre. Lone identifiserte forholdet mellom tall, også her knyttet til en regneoperasjon, slik som elevene i episode A og B gjorde. Det er verdt å merke seg at den strukturen det vises til i ytring 139, er nokså nær en struktur som kunne ha kommet som svar på problemstillingen i episode D.

Episode **D** er Lones antagelse om en sammenheng mellom hjørnesummen og tallene i kvadratet med $3 \cdot 3$ ruter.

178	Lone:	Det der er jo $\frac{1}{4}$ av 80 på en måte (peker på 20)
179	F:	Mhm. 20 er $\frac{1}{4}$ av 80. Da utfordrer jeg deg til å lage et kvadrat en annen plass og se om du får samme forholdet der mellom summen og tallet som… hvor ligger dette tallet?
180	Lone:	I midten
181	F:	I midten ja. Da prøver du bare å skissere et kvadrat til og ser om du får det samme.

Lone pekte her på en sammenheng, basert på et konkret forhold mellom to tall. Strukturen Lone viste til i ytring 139, kunne hun ha videreutviklet for å finne snarveien mellom hjørnesummen og tallene i kvadratet:

$$(x-8)+(x-6)+(x+6)+(x+8)=y$$

$$4\ x+0=y$$

Selv om det ikke så ut til at Lone bygget videre på strukturen fra episode C, ytring 139, kan jeg heller ikke utelukke at det hjalp henne på vei. Eksempelvis kan hun ha registrert at det midterste tallet fikk en spesiell posisjon.

Episodene over viser at elevene identifiserte flere strukturer i kvadratene, gjennom analyse av tilgjengelig informasjon og mønsterleting. I datamaterialet mitt fant jeg også funn av andre handlinger som kan knyttes til å generalisere, som jeg under skal presentere som funn i koden *identifisere egenskaper.*

4.1.2 Identifisere egenskaper

Elevene identifiserte tallgruppene partall og oddetall, og datamaterialet mitt tydet på at egenskapene til partall og oddetall var noe elevene trakk fram ved flere anledninger. Elevenes behandling av egenskapene til partall og oddetall så ut til å være et viktig bidrag for å gi svar på hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elevene tok i bruk i arbeidet med oppgaven.

Episode **E** viser en samtale i forbindelse med at elevene i gruppe A undersøkte totalsummen i kvadratet bestående av $2 \cdot 2$ ruter. De hadde funnet flere summer, basert på ulike kvadrater, og jeg la merke til at Signe hadde notert oddetall og partall på sitt notatark.

75	F:	Jeg ser du (til Signe) har skrevet oddetall og partall, og da er jeg litt spent på hva du tenker… tenker der. Hva er tanken din, hva er sammenhengen du er på jakt etter?
76	Signe:	Nei, jeg skulle, for det er jo slik på alle, for hvis du tar det slik (peker diagonalt på kalenderen), så er det jo dette partall og det oddetall
77	F:	Mhm
78	Signe:	Og det er alltid på en måte slik kryss det som er oddetall og partall
79	F:	Mhm, enn summen du fikk, hva er den?
80	Signe:	Summen på dette?
81	F:	Når du summerte de fire tallene, hva er den?
82	Signe:	32.

83 F: Er det et partall eller et oddetall, da?

84 Signe: Partall

85 F: Partall, ja. Og hva fikk du for noe? Du fikk? (til Per)

86 Per: 46

87 F: Som er?

88 Per: Et partall

89 Liv: Nesten er 40 og andre er 44, så det betyr at alle er partall

Signe lot til å ha sett et visuelt mønster, som hun beskrev som et kryss. Med det mente hun trolig at diagonalene besto av enten to partall eller to oddetall. Fra ytring 81 til 88 oppsummerte elevene totalsummene de hadde kommet fram, før Liv i ytring 89 kom med en antagelse om at totalsummen i alle kvadratene bestående av $2 \cdot 2$ ruter var partall. Denne episoden kommer jeg tilbake til i 4.3.2, der jeg skal vise hvordan de jobbet videre med å begrunne generaliseringen.

Episode **F** viser at Linus fra gruppe B gjorde en oppdagelse av at tallgruppene dannet et spesielt mønster i kalenderen hans.

164 Linus: Jeg har glemt av hva denne firkanten her blir kalt jeg, men oddetallene ordner en skrå firkant som jeg kaller det.

165 F: Det er faktisk et kvadrat, men når vi skråstiller den slik hender det vi kaller den en diamant også, at det er diamantform på den. Men det er et kvadrat ja, mellom 8-14-16 og 22. Mhm, og hvilke tall var det der?

166 Linus: Alle sammen er partall

I likhet med elevene fra gruppe A, identifiserte Linus partall og oddetall. Det lot også til at elevene identifiserte at egenskapene til tallgruppene påvirket hvordan tallene fordelte seg i kvadratene. Egenskapene så også ut til å være viktig da elevene begrunnet sine antagelser om generalisering, noe jeg skal se nærmere på i avsnittet om å begrunne. Før det skal jeg vise hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elevene tok i bruk for å representere antagelsene sine.

4.2 Representere

Vi kan betrakte det som en representasjon når elevene uttrykker sine antagelser om generalitet. Det kan skje på flere ulike måter, og med en representasjon som er tilpasset elevenes alder. Elevene som deltok i min undersøkelse fikk utdelt utskrift av kalender, et kladdeark med ruter og nødvendige skrivesaker. Jeg la i introduksjonen vekt på at elevene ikke måtte bruke for mye energi på å spekulere på om det de tenkte var riktig eller galt, men at det var viktig at de var muntlig aktive, slik at jeg fikk mest mulig innsikt i hvordan de tenkte. Gjennom analyse av datamaterialet fant jeg kodene *muntlig representasjon, representere ved algebraisk bruk av tall, visuell støtte og notatark* som utgjør kategorien *representere,* og i dette avsnittet skal jeg vise hvilke handlinger elevene tok i bruk i sitt arbeid.

4.2.1 Muntlig representasjon

Hovedsakelig var *muntlig representasjon* den mest fremtredende koden hos alle elevene. Antagelsene elevene hadde om strukturene og egenskapene i kalenderen la de fram muntlig. Mange av ytringene i episodene som er gjengitt i seksjonen om generalisering er eksempler på muntlig representasjon. Episode A, ytring 14 er et eksempel på hvordan Per representerte antagelsen sin ved å si at han *tror* strukturen de har identifisert gjelder alle.

I episode **G** kommer det fram hvordan elevene i gruppe A identifiserte sammenhengen mellom hjørnesummen og tallene i kvadratet med $3 \cdot 3$ ruter.

215	Signe:	Men hvis jeg deler summen på 88 delt på 4, så blir det 22 og den er i midten
216	Liv:	Heh? Si det igjen.
217	Signe:	Hvis jeg har 88 som er summen og deler på 4
218	Liv:	Hvorfor skal du dele på 4?
219	Signe:	Fordi det er 4 hjørner
220	Liv:	Ahh
221	F:	Ja, hva er det du får da?
222	Signe:	Da får jeg 22
223	F:	Jah
224	Signe:	og det er det som er i midten her
225	F:	Ja, skal vi se hva som skjer. Fordi det er 4 hjørner så vil du dele på 4?
226	Signe:	Mhm
227	F:	Mhm
228	Per:	Akkurat det samme skjedde til oss også
229	Liv:	Dingdingdingdingding!

Signe så ut til å ha identifisert en matematisk struktur, basert på forholdet mellom to tall, som hun representerte muntlig. Den muntlige representasjonen førte til en dialog rundt generaliseringen, og videre ble samme struktur identifisert i et annet kvadrat. Den muntlige representasjonen så ut til å være en pådriver i generaliseringsprosessen.

Gjennomgående brukte elevene sitt naturlige dagligspråk da de beskrev strukturer de identifiserte i kvadratene, og de brukte de begreper som *plusser, regner, svar, summen, skrå*. De holdt seg til kjente begreper og stort sett fullstendige setninger. Med tanke på den historiske utviklingen av algebra, er det mulig å plassere elevenes representasjonsform, muntlige antagelser, på det retoriske nivået. Det kjennetegnes også ved fraværet av symboler eller tegn for det ukjente. Ved noen anledninger la jeg inn forslag til tegning eller notasjon på papiret som alternative representasjonsmåter, eller jeg stilte direkte spørsmål om de kunne *vise* meg hvordan de tenkte. Det var ingenting i det skriftlige arbeidet til elevene, som ble samlet inn på slutten av undersøkelsen, som tydet på at elevene hadde notert generaliseringer uten at disse også ble formidlet muntlig.

4.2.2 Representere ved algebraisk bruk av tall

En av de muntlige representasjonene i datamaterialet skilte seg ut, og jeg valgte å kode den for seg selv, som *representere ved algebraisk bruk av tall.* Jeg oppfattet Liv sin representasjon av strukturene i $2 \cdot 2$-kvadratet, i episode H, som en handling innenfor denne koden.

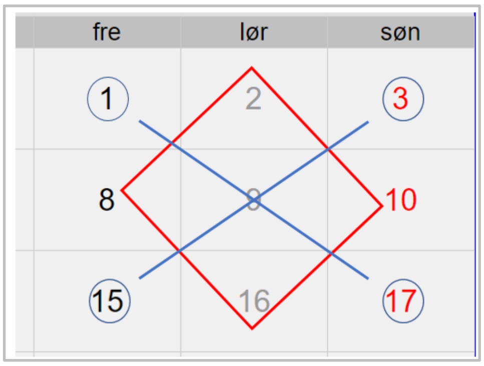
Episode **H**

16	Liv:	Ja! For hvis du ganger (mener nok legger sammen, siden det er det hun har gjort på papiret) på kryss , så bli.. den er større, den er ett hakk større enn den og den er ett hakk mindre enn den, så da blir det uansett det samme svaret.

Gruppe A hadde kommet fram til at diagonalene i kvadratet med $2 \cdot 2$ ruter hadde lik verdi. Liv representerte en generalisering av strukturen i kvadratet gjennom å poengtere at tallene var *ett hakk større og ett hakk mindre*. Som en del av argumentasjonen sin pekte hun på at det uansett blir samme svar, noe jeg tolket som at Liv hadde en forståelse for at diagonalene i et lignende kvadrat alltid vil ha lik verdi. Jeg tolket Liv sin representasjon av strukturen som en kvasi-variabel, der hun brukte konkrete tall fra sitt kvadrat for å fremheve en generell struktur.

4.2.3 Visuell støtte

Selv om elevene i stor grad benyttet muntlig representasjon, uten bruk av spesiell symbolnotasjon, var det flere tilfeller av at de brukte kalenderne som visuell støtte for sine antagelser.



Figur 4: Illustrasjon av opptegningen på Pers kalender - $3 \cdot 3$ kvadrat

Figur 4 viser hvordan Per trolig hadde brukt sin kalender som visuell støtte for å identifisere strukturer i kvadratet bestående av $3 \cdot 3$ ruter. Diagonalene ble tydelig med en slik oppmerking, og den visuelle støtten kan tenkes å ha gjort det tydeligere at de to diagonalene har lik verdi. Tilsvarende kvadrat hadde Linus på gruppe B tegnet inn på sin kalender, da han episode F undersøkte fordelingen av oddetall og partall i $3 \cdot 3$-kvadratet. Det visuelle mønsteret gjorde det trolig enklere å identifisere hvordan partall og oddetall fordelte seg i kvadratet.

4.2.4 Notatark

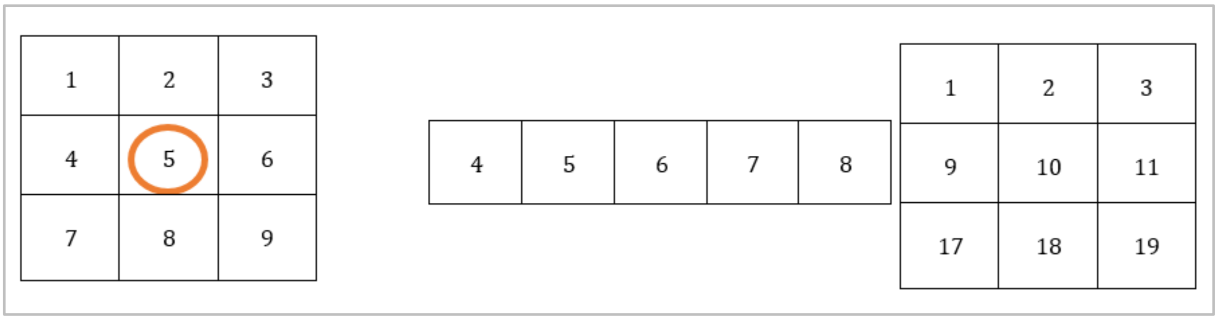
Koden *notatark* har noen fellestrekk med *visuell støtte*. Jeg valgte å skille den ut som egen kode, fordi notatark så ut til å ha et litt annet bruksområde. Spesielt med tanke på å utforske, og resonnere videre med de generaliseringene som elevene identifiserte.

Notatarkene bar hovedsakelig preg av å ha blitt brukt til å sette opp aritmetiske uttrykk av ulik art. Dette er noen eksempler, hentet fra ulike elevers notatark.

$18 + 18 = 36$ $\quad$ $14 + 22 + 30 = 66$ $\quad$ $36 \div 4 = 9$ $\quad$ $4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 12 = 2640$

Det var forekomster av alle fire regnearter, og jeg antok at elevene hadde satt opp disse uttrykkene for å kontrollere antagelser de hadde om strukturene de identifiserte underveis. Trolig var uttrykket lengst til venstre satt opp for å finne verdien av kvadratet med $2 \cdot 2$ ruter, etter at de hadde identifisert at diagonalene hadde lik verdi. Det andre uttrykket kan se ut til å være summen til av en diagonalene i et kvadrat med $3 \cdot 3$ ruter. $36 \div 4 = 9$ kan stamme fra antagelsen om at det midterste tallet i kvadratet med $3 \cdot 3$ ruter kan multipliseres med 4 for å få summen av hjørnene i kvadratet. Det siste uttrykket kan tyde på at en elev har gjort undersøkelser med tallene i et kvadrat med $2 \cdot 2$ ruter. Denne strukturen ble ikke foreslått av eleven i dialogen, så den ble trolig forkastet.

På ett av notatarkene var det tegnet opp kvadrater, i tillegg til nedskrevne aritmetiske uttrykk. Under følger en illustrasjon av to representasjoner fra Liv sitt notatark.



Figur 5: Illustrasjon av opptegninger fra Livs notatark

Liv hadde tegnet opp et $3 \cdot 3$-kvadrat bestående av tallene fra $1 - 9$, trolig for å representere en antagelse hun hadde. Det samme gjaldt kvadratet til høyre, der hun i tillegg hadde satt på noen tall til støtte utenfor selve kvadratet. Antagelsen eleven hadde, gikk utenfor kalenderoppgaven. Dermed kunne hun antagelig ikke søke visuell støtte på selve kalenderutskriften, og hun laget en ny representasjon på notatarket sitt. Hvilken antagelse eleven her jobbet med, kommer jeg grundigere tilbake til i kategorien *resonnere* med generalisering. Først skal jeg beskrive hvilke funn jeg gjorde om elevenes handlinger knyttet til kategorien *begrunne.*

4.3 Begrunne

Elevene så ut til å benytte seg av flere ulike typer begrunnelser for sine antagelser. Kodene jeg fant i denne kategorien var e*mpirisk begrunnelse, begrunne med aritmetisk forkunnskap* og *begrunne med generisk eksempel*.

I noen tilfeller begrunnet elevene sine generaliseringer spontant, som en del av sin egen forklaringen på hvordan de hadde tenkt for å komme til antagelsen om generalisering. I tillegg brukte jeg bevisstgjørende spørsmål, for å se om elevene kunne begrunne på flere måter, eller for å stimulere dem til å tenke nytt om generaliseringen de hadde kommet fram til. Bevisstgjørende spørsmål fokuserer på at en generalisering skal være gyldig for alle tilfeller i samme situasjon, og inneholdt hos meg ord som *alltid, flere, bestandig, alle, bevise, generell.*

4.3.1 Empirisk begrunnelse

Å begrunne empirisk betyr å hevde at noe er generelt, basert på at det gjentar seg gjennom flere observasjoner. En kalender er bygd opp av et fast mønster og inneholder et visst antall dager. Derfor er det i utgangspunktet teknisk mulig å kunne sjekke at alle kvadrater av gitte størrelser har de samme strukturene, uten at jeg har belegg for å verken hevde eller avskrive at elevene tok det med i sine betraktninger underveis i arbeidet.

Episode **I** under beskriver hvordan elevene gikk fram da de generaliserte strukturen i det minste kvadratet, og begrunnet hvorfor diagonalene alltid vil få lik verdi.

39	Lone:	Det er i hvert fall det samme her og (peker på nytt kvadrat)
40	F:	Du ser at det er det samme der også?
41	Lone:	Ja, 6+14 er 20, og 7+13 er 20.
42	F:	Mhm… Vil det bestandig være slik, tror dere?
43	Lone:	Hmm… ja…
44	F:	Er du enig, Linus?
45	Linus:	Ja, alle bli lik

Her undersøkte elevene diagonalene i til sammen tre kvadrater. Gjennom å bruke begrepet *bestandig,* stilte jeg spørsmål om det var grunnlag for å generalisere det elevene observerte. I ytring 45 presiserte Linus at *alle* blir like, og det så ut til at elevene mente det var tilstrekkelig med tre tilfeller for å kunne begrunne generaliseringen.

4.3.2 Begrunne med kjent aritmetisk kunnskap

I undersøkelsen viste elevene tegn til at de benyttet kunnskap de hadde fra før, til å forklare og begrunne generaliseringene de identifiserte. At det var av betydning å ha forkunnskaper om egenskapene til partall og oddetall, kom spesielt til syne i episoder som kan knyttes til denne koden.

Episode **J** fortsetter der episode E avsluttet, og viser hvordan elevene argumenterte for å begrunne at totalsummen i de minste kvadratene alltid var et partall.

92	Liv:	Nesten er 40 og andre er 44, så det betyr at alle er partall
93	F:	Alle summene er partall? Hmmm..
94	Liv:	Det er jo fordi at de blir samme da (peker på diagonalene i kvadratet), og da hvis du ganger sammen to like tall, så blir det jo et partall.
95	F:	Hvis du leg… ganger sammen to like tall, eh…altså tar to like tall og legger sammen, så blir det et partall?
96	Liv:	Ja!
97	F:	Og det vet du at alltid blir slik?
98	Liv:	Ja!
99	Liv:	For oddetallene går ikke an å dele på 2, til å få like, ehh, sånn ehh ikke, ehh slike desimaltall.

Begrepet *ganger* dukket hos Liv opp flere ganger i forbindelse med å addere, men jeg valgte å ikke rette på henne, da jeg så at hun utførte korrekt operasjon på notatarket sitt. I denne episoden ble antagelsen først eksemplifisert med to konkrete tilfeller, før eksemplene ble brukt til å hevde at alle kvadratene hadde et partall til sum, en empirisk begrunnelse. Etter hvert ble forklaringen bygd på, og generaliseringen begrunnet ut fra forkunnskap om å legge sammen to like tall, og de grunnleggende egenskapene til partall og oddetall.

I episode **K** startet elevene med det jeg har kodet som en empirisk begrunnelse, før de gikk videre i argumentasjonen.

232	F:	Nå har vi prøvd det på 2 kvadrat da, kan vi si at det alltid stemmer, tror dere? Basert på 2 kvadrat?
233	Liv:	Jah!
234	F:	Jaa, kanskje litt… Ja, du er du tviitvil (henvendt til Signe)
235	Signe:	Nei, det kommer litt an på, trooor jeg.

Elevene var delt i spørsmålet om den empiriske begrunnelsen var solid nok eller ikke. I tillegg stilte jeg spørsmål om hvordan de kunne overbevise en matematiker om at denne generaliseringen var sann for alle kvadrater av denne typen, og indikerte på den måten at jeg var interessert i en begrunnelse som var basert på mer enn at det stemte for to tilfeller. Det som startet som en empirisk begrunnelse, går videre i episode **L** over til å bli en begrunnelse der elevene bruker sin forkunnskap om gjennomsnitt for å forklare at utfallet alltid vil bli slik de har foreslått.

252	Liv:	Det er hvis du tar og plusser sammen disse, og så skal du finne… Jeg kommer ikke på hva det heter akkurat nå…. Ehh Signe, når… åhhhh
253	Signe:	median?
254	Liv:	Nei…
255	Signe:	Nei.
256	Liv:	Det er sånn, se for deg at alle i klassen springer og så springer de på forskjellig, forskjellig tid…hehe (latter rundt bordet) og så skal du plusse sammen og så dele, da får du…
257	Per:	Gjennomsnittet?
258	Liv:	Ja, gjennomsnittet! Gjennomsnittet er 9, så hvis, du kan ha 9 på alle disse hjørnene så blir det likt.
259	F:	Gjennomsnittet er 9?
260	Liv:	Jah, og derfor står det i fokus.

Selv om Liv ikke var helt sikker på hvilket begrep hun skulle bruke for å forklare hvordan hun hadde tenkt, ga hun tilkjenne at hun kunne begrunne generaliseringen ut fra forkunnskaper hun hadde. Det kan være grunn til å tro at presiseringen hennes om at det tallet som blir gjennomsnittet står i *fokus*, kom av at elevene ble bedt om å beskrive sitt $3 \cdot 3$-kvadrat helt i starten av den oppgaven. Da var Liv raskt ute med å ta utgangspunkt i nettopp 9 for å beskrive sitt kvadrat som besto av tallene $1-2-3-8-9-10-15-16-17$. Om det var hennes måte å beskrive kvadratet sitt på, og plasseringen av tallet 9, som gjorde at hun ble oppmerksom på at gjennomsnitt var noe som kunne være aktuelt, er ikke sikkert. Men jeg kan heller ikke utelukke at det var med på å gjøre sammenhengen tydeligere for henne.

4.3.3 Begrunne med generisk eksempel

En begrunnelse med bruk av generisk eksempel vil si å bruke et bestemt eksempel som synliggjør at et forhold eller en situasjon er generell. Dette mente jeg å kunne identifisere i Liv sin argumentasjon rundt strukturene i det minste kvadratet, og begrunnelsen hang sammen med måten hun representerte generaliseringen i episode H.

Da representerte hun strukturene ved numerisk bruk av tall, som kvasi-variable. Episode **M** viser hvordan hun bygde videre på representasjonen fra episode H.

21	Liv:	Det blir jo større bortover, så om du ganger… eh.. den med ett hakk tilbake og den med ett hakk fram, så blir det jo likens.

Her så det ut som at Liv har begrunnet generaliseringen på en slik måte at de konkrete tallene hun pekte på, har fått funksjon som generelle tall, og dermed begrunner hun en generell struktur.

Samme type begrunnelse fant jeg også i den kommende episoden, episode **N,** der eleven ble bedt om å begrunne hvorfor hun mente at totalsummen i et $2 \cdot 2$-kvadrat øker med 4 for hvert flytt til høyre.

58	Liv:	Det hopper jo 1 her og 1 her da.
59	F:	Ja.
60	Liv:	De, ja…
61	F:	Når du peker på 4 og 5, så hopper det 1 der og mellom 11 og 12 er det 1.
62	Liv:	Ja, og når du tar med disse (peker på 6 og 13) så blir jo det også 1 mer enn dem (peker på 5 og 12), så da er det jo naturlig at det blir 4 mer der og 4 mer her.

Liv begrunnet her en struktur hvor ett flytt til høyre på kalenderen førte til at totalsummen i de minste kvadratene økte med fire. Hun begrunnet generaliseringen ved å synliggjøre en generell struktur, basert på forhold mellom tallene. Forhold mellom tall blir også vesentlig i den neste kategorien, der elevenes handlinger i kategorien *resonnere* skal presenteres.

4.4 Resonnere med generalisering

Å resonnere med en generalisering vil si at generaliseringene om et aritmetisk forhold blir brukt til å utføre andre beregninger eller resonnere omkring nye generaliseringer. Da en elev endret de faste rammene og premissene som ligger i en kalender, handlet hun på en måte som tydet på at hun resonnerte med en generalisering. Handlingen fikk koden *trekke inn nytt element*.

Elevene kom fram til at diagonalene i et kvadrat med $2 \cdot 2$ ruter hadde lik verdi. Generaliseringen ble begrunnet, blant annet ved algebraisk bruk av tall. I episode **O**, som følger under, så det ut til at Liv registrerte hvordan den faste strukturen i kalenderen var en forutsetning for at generaliseringen skulle være gyldig.

39	Liv:	Jo mindre det er når det er starter 1 her da, (peker på siste ledige rute i kalenderen, ruta etter 30). Da blir det ikke slik.
40	F:	Nei! Det er, hvis at vi hadde hatt med måneden før og måneden etterpå.

Jeg tolket det til at eleven hadde sett at generaliseringen ikke ville ha blitt riktig om kalenderen hadde fortsatt med 1.desember i samme kalender som november. Om ruta med 1 hadde blitt inkludert i et kvadrat (eksempelvis $23-24-30-1$), ville ikke strukturen elevene hadde kommet fram til stemme lenger.

Videre stilte eleven spørsmål ved hva som kunne skje om begrensningene og forutsetningene i kalenderstrukturen ble endret. Episode **P** viser et eksempel på hvilke handlinger elevene tok i bruk da de skulle velge ruter til kvadratet med $3 \cdot 3$ ruter.

147	Liv:	Går det an å velge denne (peker i ruta før 1), og si at den er 0? Blir det det fortsatt det samme da? Eller blir det helt feil?
148	F:	Det vil
149	Liv:	For se da! 0+8 det blir 8, og 7+1 det blir 8.
150	F:	Ja, det gjør det

Her lot det til at Liv oppdaget at diagonalstrukturen de hadde jobbet med i det minste kvadratet var gyldig, selv om hun tok inn 0 som et nytt element i kalenderen. Videre så det ut til at hun antok at det nye elementet også ville være gyldig for tilsvarene struktur i det største kvadratet. Jeg tolket denne handlingen som at Liv tok i bruk en gyldig generalisering, for så å benytte den i en ny generalisering. En slik handling tydet på at hun hadde resonnert med generaliseringen elevene hadde gjort i arbeid med det minste kvadratet.

Ytterligere et nytt element ble trukket inn, underveis i elevenes arbeid med å begrunne snarvegen til summen av hjørnene i $3 \cdot 3$-kvadratet. I episode **Q** omorganiserte Liv kalenderen.

283	Liv:	Da, da nå må jeg se nå nå har jeg byttet plass på noe her. Der det er 8 dager i uka og ikke bare 7 (regner videre for seg selv)
284	F:	Dere har vært veldig flinke altså, dere har (blir avbrutt)
285	Liv:	Det blir likens uansett om du har 8 eller 7 dager i uka. For at det bli likens uansett.
286	F:	Ja, hvordan kan du forklare det da?
287	Liv:	Jeg må prøve en ting!
288	F:	Mhm
289	Signe:	Ja, nå skjønner jeg hva du prøver på
290	F:	Ja, bra
291	Liv:	Nei, nå tok jeg jo gange (latter) JA, det blir likens, nå har jeg $1-2-3-4-5-6-7-8-9$ inne i en sånn en (har laget et kvadrat), men likevel blir det likt uansett om du tar dem sammen og deler dem så blir det 5 som gjennomsnitt uansett
292	Liv:	Eller det som er i midten da, det blir gjennomsnitt uansett

Det så ut til at Liv utfordret kalenderens begrensninger, og manipulerte den opprinnelige strukturen i kvadratet. Eleven så ut til å konkludere med at det ikke spilte noen rolle hvor mange dager «uka» hadde, så lenge et fast mønster ble benyttet. I avsnittet om representasjoner viste jeg en illustrasjon av hvordan Liv benyttet notatarket sitt for å utforske denne antagelsen. Hun prøvde ut to strukturer. En struktur representerte ei «uke» som bestod av 8 dager $(1-2-3-9-10-11-17-18-19)$. I tillegg hadde hun tegnet et kvadrat som representerte det hun framhevet i episoden over, ei «uke» med 3 dager. Gjennomsnittet av hjørnesummen var identisk med kvadratets midterste tall i begge de manipulerte kvadratene også, og eleven så dermed ut til å konkludere med at det nye elementet var en generell struktur.

Gjennom disse episodene tok eleven i bruk flere handlinger knyttet til algebraisk tenkning, ved at hun trakk nye elementer inn i kalenderen. Dermed ble det det mulig for henne å resonnere med generaliseringene de hadde gjort tidligere i undersøkelsen, og benytte dem til å utføre nye generaliseringer.

Analysen har vist at elevene tok i bruk ulike handlinger innenfor fire kategorier, *generalisere, representere, begrunne og resonnere med generalisering.* Noen av funnene fra analysen skal jeg se nærmere på, og drøfte, i kommende kapittel.

5 Diskusjon

I dette kapitlet skal jeg drøfte funnene fra analysen som er gjennomført for å finne svar på forskningsspørsmålet, som i min studie er:

Hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning tar elever i to grupper på 8.trinn i bruk i arbeid med en oppgave innen generalisert aritmetikk?

Formålet med studien er å undersøke hvilke handlinger knyttet til algebraiske tenkning elever tar i bruk arbeid med generalisert aritmetikk. Det teoretiske rammeverket for studien baserer seg på Blanton et al. (2018) sitt arbeid for å utvikle et pensum beregnet for algebraundervisning på lavere klassetrinn. De har på sin side fundamentert mye av sitt arbeid på Kaput (2008) sin innholdsanalyse av algebra, og jeg kommer videre i dette kapitlet til å se mine funn i lys av deres forskning, samt annen forskning på algebrafeltet.

Kort oppsummert har jeg funnet ut at elevene identifiserte strukturer og identifiserte egenskaper. De representerte generaliseringer muntlig, de representerte ved algebraisk bruk av tall, gjennom visuell støtte og bruk av notatark. Elevene begrunnet empirisk, med aritmetisk forkunnskap og med generisk eksempel. Elevene viste også at de kunne resonnere med generalisering, ved at de trakk et nytt element inn i oppgavesituasjonen. I de følgende seksjonene skal jeg trekke frem og belyse noen av funnene fra analysen, som jeg mener er viktige med tanke på å besvare studiens forskningsspørsmål.

5.1 Identifisere strukturer og egenskaper

Generalisering dreier seg om å gjenkjenne spesifikke trekk eller egenskaper som er felles for en rekke tilfeller, som man deretter kan si er gjeldende for alle lignende tilfeller. Generalisert aritmetikk dreier seg spesifikt om å undersøke strukturen til aritmetiske uttrykk. Strukturen blir undersøkt for å finne sammenhenger og egenskaper, som kan generaliseres til å være gjeldende for alle lignende uttrykk. Generalisert aritmetikk står i motsetning til å fokusere på en konkret verdi av det aritmetiske uttrykket. I min studie generaliserte elevene blant annet ved at de identifiserte strukturer i kalenderen. Flere av strukturene ble forklart og uttrykt ved aritmetiske uttrykk. Eksempelvis fant elevene at diagonalene i kvadratet på $2 \cdot 2$ ruter hadde lik verdi, og dette uttrykte de gjennom å si at $6 + 14$ er like mye som $7 + 13$. De aritmetiske uttrykkene kan tolkes som at elevene hadde et operasjonelt fokus, men gjennom sine generaliseringer lot det til at elevene ble bevisste på å uttrykke likhet. Gjennom å identifisere to eller flere uttrykk med lik verdi, beskrev elevene en struktur som med tanke på tidligere forskning er interessant. Flere forskere (eksempelvis Carpenter et al., 2003; Kieran, 2004a; Schifter, 2018), har pekt på at elever sjelden fokuserer på relasjonen i et uttrykk, noe som kan henge sammen med manglende forståelse for likhetstegnet. I min undersøkelse var det derimot funn som kan tyde på at elevene uttrykte en relasjon mellom to mengder, og at de identifiserte uttrykkene som matematiske objekter. Knuth et al. (2016) har utarbeidet en liste med tre kriterier for å lykkes med algebra, der forståelsen for at likhetstegnet uttrykker en relasjon mellom to menger er ett av kriteriene. Å bygge videre på elevenes identifisering av diagonalene $6 + 14 = 7 + 13$, er i tråd med blant andre Blanton & Kaput

(2003) sitt syn på å algebraifisere matematikken, for å skape forståelse for algebra på høyere trinn.

Et av funnene som også vakte spesiell interesse hos meg, var viktigheten av partall og oddetall. Egenskapene til partall og oddetall så ut til å være viktig for å at elevene identifiserte andre strukturer i kalenderen. Ytringer som refererte til partall og/eller oddetall forekom i forbindelse med strukturer, spesielt ved at elevene pekte på visuelle mønstre på kalenderen. I tillegg brukte elevene også kunnskap om egenskapene til par - og oddetall da de uttrykte aritmetiske sammenhenger. Spesielt viktig lot identifisering av delelighet på 2 til å være da elevene begrunnet generaliseringene de hadde kommet fram til. Det lot til at elevene hadde god forståelse for egenskapene, og kunne gjøre nytte av dem på en hensiktsmessig måte.

Egenskapene til partall og oddetall er noe elever får kjennskap til allerede tidlig på småtrinnet. De fleste elevene har trolig jobbet en del med ulike varianter av oppgaver som utforsker egenskapene til disse tallgruppene i løpet av barneskolen. Det så ut til å være nyttig for elevene at de hadde med seg disse forkunnskapene inn i undersøkelsen, blant annet da de skulle begrunne generaliseringen sine. Carpenter et al. (2003) viser også til viktigheten av partall og oddetall i forbindelse med elevers algebraiske tenkning. De skriver at antagelser om par- og oddetall kan gjøres på flere ulike nivå, og at det igjen gir gode mulighet til å utforske hva det vil si å begrunne en antagelse. Blanton & Kaput (2005) viser til betydningen av å ha kunnskap om partall og oddetall gjennom en studie der de observerte en lærer og hennes 3.klasse. De framhever at elevene i løpet av en undervisningsøkt, med blanding av undervisning og elevdiskusjon, ender med å begrunne generaliseringer om summene av par-og oddetall ved algebraisk bruk av tall. Egenskapene til partall og oddetall ser ut til å kunne være en vesentlig identifisering å bygge videre på i elevenes arbeid med å generalisere.

I prosessen med å komme fram til antagelser, eller generaliseringer, måtte elevene lete etter mønster. Oppgaven i min studie bød på flere muligheter for å finne både mønstre og snarveier, og gjennom en utforskende oppgave viste flere av elevene at de kunne være mønsterfinnere. Eksempel på at de kom fram til en snarvei så jeg der elevene fant ut at de kunne finne summen av $3 \cdot 3$-kvadratets hjørner ved å multiplisere kvadratets midterste tall med 4. Snarveien fant de fram til ved å gjøre flere undersøkelser, gjerne med konkrete aritmetiske uttrykk som utgangspunkt. En av elevene kom fram til at hvis hun delte summen av hjørnene, som var 88, med 4, fikk hun det tallet som sto i midten. Hun fant en sammenheng og et mønster, men manglet snarveien de skulle finne for å unngå å summere. Snarveien klarte elevene å komme fram til ved å undersøke flere kvadrater og egenskapene til de ulike aritmetiske uttrykkene de uttrykte seg med. Dermed så det ut til at de aritmetiske uttrykkene fikk en sentral rolle i å drive undersøkelsesprosessen videre. I den kommende seksjonen skal jeg se nærmere på hvordan elevene representerte antagelsene de fant underveis i undersøkelsen.

5.2 Representasjon

Det var muntlig representasjon som var mest framtredende blant elevene som deltok i min studie. Elevene representerte gjennom bruk av dagligspråket sitt, og det formelle matematiske språket var ikke spesielt fremtredende. Bruk av *plusser* for å beskrive at man adderer, og *skrå* som betegnelse på diagonalen er blant eksemplene på at dagligspråket preget de muntlige uttrykkene. Jeg hadde i innledningen til undersøkelsen lagt vekt på at elevene skulle være muntlig aktive, så en høy andel muntlig representasjon var sånn sett ikke overraskende.

Funnet av at muntlige utsagn var i overtall som representasjonsuttrykk, er ikke særegent for min studie. Breiteig & Grevholm (2006) gjennomførte en norsk studie med førsteårselever på videregående, der de ønsket å undersøke hvordan elever valgte å representere en sammenheng. Problemet som ble benyttet var samme problem som markerte overgangen fra synkopert til symbolsk algebra, ved at Vieta kom fram til en generell løsning. Elevene i studien var bedt om å forklare *hvordan* man kan finne verdien av to tall når man får oppgitt sum og differanse, samt forklare hvorfor den framgangsmåten *alltid* virker. Til tross for at elevene hadde hatt undervisning i lineære likningssystemer forut for undersøkelsen, valgte mindre enn 10% av elevene å representere framgangsmåten med to likninger. Enda færre elever satte opp den generelle løsningen. Elevene prefererte å uttrykke seg med egne ord, som i deres tilfelle var skriftlig forklaring (kvantitativ undersøkelse). Majoriteten av elevene i undersøkelsen fra videregående representerte på et retorisk nivå, og bygger opp under at funnene av naturlig språk og muntlig representasjon hos 8.trinnselevene i min studie kan sies å være forventet.

Selv om muntlig representasjon var dominerende, og andre representasjonsformer så ut til å komme i bakgrunnen, gjorde jeg funn av flere ulike representasjoner. De ulike representasjonene så ut til å bli brukt til ulike formål. Elevene hadde fått notatark og utskrift av kalenderen. Ved gjentatte anledninger oppfordret jeg til, eller etterspurte, tegninger eller andre representasjoner som kunne visualisere det elevene snakket om. Kalenderutskriftene som elevene tegnet opp sine kvadrater på, så ut til å fungere som en visuell støtte for flere av elevene mens de utforsket og undersøkte. De brukte utskriften til å tegne inn diagonaler og ringe rundt tall, og ved en slik bruk kan kalenderen ha vært med på å gjøre det enklere å avdekke mønstre og strukturer. Kalenderen hadde alle elevene tegnet på, mens det var svært varierende bruk av notatarkene. Noen elever hadde omtrent blanke ark, mens andre hadde brukt dem til å skrive ned aritmetiske uttrykk. Det var nok i stor grad de samme aritmetiske uttrykkene de hadde uttrykt muntlig, for å forklare strukturer de hadde registrert. Notatarkene så hos disse elevene ut til å ha en funksjon som sikkerhet, der elevene kunne kontrollere utregninger de trodde hadde betydning for generaliseringene. Det var få eksempler på at elevene hadde brukt notatarkene til å utforske ideer, eller prøve seg på visualisering av strukturer eller begrunnelser.

Unntaket fant jeg hos den eleven som hadde manipulert kalenderens begrensninger. Hun hadde brukt sitt notatark til å tegne nye kvadrater, for å representere sin antagelse om at antall dager i en uke ikke påvirket snarvegen til summen av hjørnene i et kvadrat med $3 \cdot 3$ ruter. Deretter fikk notatarket funksjon som en støtte når hun muntlig begrunnet generaliseringen.

I forskningsmiljøene ser det ut til å være noe uenighet om hvor stort fokus man skal ha på å etterstrebe formell symbolsk representasjon hos elever i grunnskolen. I forbindelse med sitt prosjekt LEAP viser Blanton & Isler-Baykal et al. (2019) til resultatene fra undersøkelser gjort for å dokumentere effekten av å innføre algebra på lavere klassetrinn. På en av oppgavene som ble gitt kan de vise til at 60% av elevene i deres eksperimentgruppe (som fulgte pensum og opplegg tilrettelagt for algebraundervisning) allerede etter 3.trinn kunne lage ei likning med variabler for å representere kommutativitet. Etter 5.trinn hadde suksessfaktoren for samme eksperimentgruppe økt til 80% på samme oppgave. Notasjon med variabler blir brukt, og forskningsgruppen mener derfor at det tradisjonelle synet på at yngre elever ikke er klare for notasjon med variabler bør utfordres og stilles spørsmålstegn ved (Blanton & Isler-Baykal et al. 2019; Blanton & Stroud et al., 2019). Forskningsgruppens syn på notasjon kan nok være noe av forklaringen på at de har plassert *begrunne* generalisering som en del av Kaput (2008) sitt kjerneelement B.

På sin side mener Britt & Irwin (2011) at det er fornuftig at elever jobber med, mestrer og forstår, andre typer representasjoner i starten. De trekker fram representasjoner som verbale uttrykk, tegninger, grafer og numeriske symboler som opptrer som kvasi-variable. Disse representasjonene kan være med på å utvikle forståelse for generalitet og utvikle algebraisk tenkning. Forståelsen for de underliggende strukturene, og evnen til å representere dem på de foreslåtte måtene, er ifølge Britt og Irwin (2011) noe som må være på plass før elevene blir introdusert for symbolsk algebra. Funnene i min studie kan tyde på at elevene hadde forståelse for oppbyggingen av noen strukturer de identifiserte. Blant annet fant de konkrete aritmetiske uttrykk, som de generaliserte og representerte muntlig. En av elevene representerte også en av sine generaliseringer, ved å bruke tall som kvasi-variable, og var dermed på å framheve en generell struktur. Det forekom ingen formell algebraisk notasjon i min undersøkelse, noe elevene heller ikke hadde fått undervisning i på tidspunktet undersøkelsen ble gjennomført. Med bakgrunn i resultatene fra Blanton & Isler-Baykal et al. (2019), kan fraværet av algebraisk notasjon i min studie ses på som naturlig, all den tid det later til at det er vesentlig at elever får opplæring før de tar i bruk den formelle symbolske representasjonen.

Johanning (2004) retter fokus mot at elevenes uformelle representasjoner er et godt utgangspunkt for videre arbeid med formell symbolsk representasjon. I likhet med min studie viser Johanning (2004) til en undersøkelse gjennomført med elever som ikke hadde hatt undervisning i symbolsk algebra. Elevene gikk på mellomtrinn, og jobbet med skriftlige problemoppgaver av algebraisk karakter. Både problem og løsninger kunne uttrykkes ved hjelp av symbolsk algebra, noe ingen av elevene gjorde. Gjennom oppgaveløsningen viste elevene derimot at de mestret flere uformelle strategier. I følge Johanning (2004) viste elevenes skriftlige arbeid at flere var på vei til å utvikle regler for å uttrykke funksjoner. Elevene i min undersøkelse ble presentert for en oppgave som la opp til identifisering av strukturer og generalisert aritmetikk. Ingen elever uttrykte strukturene de identifiserte ved hjelp av symbolsk algebra, men de viste blant annet at de kunne representere generaliseringer ved algebraisk bruk av tall. I lys av Johanning (2004) mener jeg at algebraisk bruk av tall kan betraktes som en uformell strategi, og i likhet med Johanning (2004) har jeg funn i min studie som tyder på at elevene tenker algebraisk forut for opplæring i symbolsk algebra.

5.3 Begrunne og resonnere

I tråd med at det meste av elevenes representasjon var muntlig, begrunnet de også sine generaliseringer muntlig, og med et hverdagsspråk som inneholdt uttrykk som for eksempel «blir det samme, sjekket at det stemte.» Muntlige begrunnelser av denne typen passer ikke helt med rammeverket til Blanton et al. (2018). Der blir *begrunne* med generalisering kategorisert som en del av det Kaput (2008) kaller kjerneaspekt B. Kjerneaspekt B beskrives som den delen av algebra hvor man utfører syntaktisk styrte handlinger i et formelt symbolsystem. Det var ingen av elevene i min studie som begrunnet sine generaliseringer algebraisk, ved hjelp av formelle symboluttrykk. De holdt seg til sitt naturlige språk. Jeg velger likevel å kategorisere elevenes utsagn som begrunnelser, all den tid begrunnelsene hadde som formål å forklare hvorfor generaliseringen elevene hadde kommet fram til, var gyldig for alle lignende tilfeller. Til tross for at Blanton et al. (2018) i sitt rammeverk har trukket *begrunne* ut fra Kaputs kjerneelement B, finner jeg også støtte for mitt valg hos dem. Blanton et al. (2018) nevner flere måter å begrunne på, som ikke involverer symboler, deriblant empiriske begrunnelser.

Empiriske begrunnelser var en utbredt form for begrunnelse i min undersøkelse. Ved flere anledninger trakk elevene generelle slutninger basert på noen få tilfeller. Mine funn samsvarer med det Lannin (2005) presenterer fra sine undersøkelser, der empiriske begrunnelser var i flertall. Videre peker Lannin (2005) på generisk eksempel som en begrunnelse som står sterkere, og er nærmere en gyldig begrunnelse. En gyldig begrunnelse er generell og uavhengig av situasjonen, mens et generisk eksempel fremdeles er basert på en bestemt situasjon. Det var funn av begrunnelser med generisk eksempel i min undersøkelse, der en elev begrunnet to ulike generaliseringer med å peke på en generell struktur. Etter at hun hadde begrunnet generaliseringen sin, uttalte eleven at det var naturlig at det ble sånn. Lannin (2005) påpeker at generisk eksempel ikke kan sies å være en begrunnelse for noe generelt, med mindre det blir oppfattet som generelt. Funnene i min undersøkelse tydet på at denne eleven oppfattet sin egen begrunnelse som generell, og at begrunnelsen må kunne sies å være på det Lannin (2005) har kalt nivå 3. Generisk eksempel var også den sterkeste begrunnelsen jeg fant i min undersøkelse.

Med tanke på elevens alder, og hvor de var i skoleløpet, hadde jeg heller ikke forventet at elevene skulle begrunne på et høyere nivå. En begrunnelse på det øverste nivået, en deduktiv begrunnelse, hører til det symbolske nivået. Historisk har algebra utviklet seg gjennom tre stadier, fra et retorisk nivå, via synkopert, til et symbolsk nivå. Gjennom historien har det vært graden av å uttrykke det generelle, ved bruk av bokstaver, som har markert de ulike stadiene (Kieran, 1990; Harper, 1987). Funn i min studie tydet på at elevene stort sett opererte på et retorisk nivå, både når de representerte og begrunnet. Arbeid med symbolsk algebra vil for elevene by på et nivåsprang, der Carraher et al. (2006) peker på at den historiske utviklingen kan si oss noe om hvilke vansker elever kan møte på i arbeid med algebra. Breiteig & Grevholm (2006) konkluderte i sin studie med at steget fra aritmetikk til algebra var vanskelig. De færreste videregåendeelevene i deres studie hadde kommet så langt at de mestret overgangen fra å begrunne retorisk til å begrunne på et symbolsk nivå.

En handling knyttet til algebraisk tenkning som også er krevende for mange elever, er å resonnere med generalisering. Funn i min undersøkelse tydet på at en elev tok i bruk en generalisering hun hadde kommet fram til, og brukte den videre. Den første generaliseringen hun gjorde var at diagonalene i det minste kvadratet hadde lik verdi. Videre så det ut til at hun hadde en utforskende tilnærming lik den vi finner beskrevet hos Cuoco et al. (1996). Gjennom å lete etter skjulte mønstre, prøvde hun å endre betingelsene i kalenderen, for å se hva som skjedde med strukturen. Hun trakk nye element inn i oppgaven, i form av å innføre 0 som dato og utvidet ei uke til å inneholde flere dager. Eleven registrerte at de nye elementene ikke endret strukturene de hadde kommet fram til tidligere, og brukte videre deretter generaliseringen for å gjøre nye antagelser om diagonalene i det største kvadratet.

I dette kapitlet har jeg belyst flere handlinger knyttet til algebraisk tenkning som elevene i min studie har tatt i bruk i arbeid med generalisert aritmetikk. I neste kapittel skal jeg se nærmere på hvordan funnene i min undersøkelse kan fungere som utgangspunkt for videre arbeid med algebra. Før det skal jeg avslutte diskusjonskapitlet med noen oppsummerende kommentarer om studiens styrker og svakheter

5.4 Oppsummerende kommentarer

Noe av hensikten med å gi elevene en åpen og utforskende oppgave, var å se hvordan de gikk fram for å identifisere mønster og strukturer, om de kom fram til generaliseringer og hvordan de uttrykte de generaliseringene de fant. For noen av elevene virket oppgaven for åpen i starten, og de hadde utfordringer med å komme i gang med utforskingen av kvadratene i kalenderen. For deres del ble det nødvendig med noen konkrete spørsmål for å få rettet oppmerksomheten mot enkelte deler av kvadratet. Dermed ble ikke deres utforsking så spontan som ønsket, mens det på en annen side fungerte fint for andre elever.

Undersøkelsessituasjonen var fra min side organisert slik at det var lagt til rette for samtale og muntlig aktivitet. Elevene var plassert sammen med meg ved et rundt bord, og situasjonen fikk kanskje et kaféaktig og sosialt preg. Selv om jeg ved flere anledninger nevnte andre representasjonsuttrykk, eller oppfordret elevene til å skrive ned, tegne eller vise, ble undersøkelsen i stor grad preget av muntlig aktivitet. Det kan derfor ikke utelukkes at jeg hadde fått en større variasjon i representasjonsuttrykk om jeg hadde lagt opp situasjonen noe annerledes, eller i større grad hadde vektlagt bruk av notatarkene da jeg introduserte oppgaven. Mitt hovedfokus var å få elevene i tale, slik at mest mulig av det de tenkte og fortok seg skulle bli dokumentert på taleopptakeren. Det hadde vært fullt mulig, og kanskje også fordelaktig, om jeg i starten hadde understreket at de gjerne måtte benytte notatarket til både å skrive og tegne ved behov.

Et annet forhold som er viktig å ta med i betraktning er antall elever som deltar i undersøkelsen. Min analyse baserer seg kun på fem elever, og undersøkelsen kan dermed ikke sies å være representativ for alle 8.klassingers handlinger knyttet til algebraisk tenkning. Gjennom episodene hentet fra transkripsjonene vises det også at det er enkelte elever som er mer delaktig enn andre. Det kan framstå som at datamaterialet blir snevert framstilt, med fokus på enkeltelever, men det er ikke gjort med hensikt. Episodene må nødvendigvis bli hentet fra transkripsjonen, og der er det de muntlig aktive elevene som kommer tydeligst fram.

Selv om funnene i analysen baserer seg på et lite utvalg elever, mener jeg resultatet er relevant, både for videre forskning og med tanke på praktiske konsekvenser i undervisning. Det skal jeg belyse nærmere i avslutningen.

6 Avslutning

I denne studien har jeg undersøkt hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk i arbeid med en oppgave innen generalisert aritmetikk. Det var to grupper med elever på 8.trinn som ble undersøkt, og gjennom analysen har jeg funnet ut at elevene tar i bruk flere handlinger knyttet til algebraisk tenkning innenfor kategoriene generalisere, representere, begrunne og resonnere med generalisering. Funnene i min studie kan være med å belyse hvilke didaktiske valg en kan stå overfor i forbindelse med undervisning av algebra, samt være grunnlag for videre forskning. I dette kapitlet skal jeg se nærmere på didaktiske implikasjoner og perspektivering av studien.

Noe av motivasjonen for min studie har vært den økte bevisstheten rundt, og forskningen som har blitt gjort på tidlig algebra de siste tiårene. Samtidig har jeg erfart at elever på ungdomstrinn ser på algebra som et vanskelig emne, som de også har vansker med å se en praktisk nytteverdi av. Den observasjonen støttes av flere studier jeg har referert til i innledningskapitlet (eksempelvis Kieran, 2007; Kaput, 2008), og den underbygges av resultatene fra internasjonale undersøkelser. Jeg opplever derfor at det ikke er samsvar mellom måten algebra tradisjonelt ser ut til å bli undervist på, og det flere studier har pekt på som hensiktsmessige arbeidsmetoder. I teorikapitlet viste jeg til resultater fra andre forskningsprosjekter (eksempelvis Carraher et al., 2006; Kaput, 2000) som kan tyde på at å arbeide for å utvikle unge elevers evne til å tenke algebraisk er fullt mulig, og har flere fordeler senere i skoleløpet. Rammeverket for min studie er en variant av det rammeverket Blanton et al. (2018) utviklet til et prosjekt der elever på 3.-5.trinn gjennomgikk en matematikkopplæring med systematisk fokus på algebra. Min studie er ikke en undervisningssituasjon, men en undersøkelse av hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever som enda ikke har hatt undervisning i symbolsk algebra tar i bruk. Dermed kan mine funn være verdifulle for å belyse at algebraisk tenkning forekommer også før elevene møter undervisning med symbolsk algebra. Funnene viser også hvilke handlinger knyttet til algebraisk tenkning elever tar i bruk, og hvilke handlinger det da kan være fordelaktig å bygge videre på i undervisning med symbolsk algebra.

For å legge til rette for en algebraundervisning der elevenes evne til algebraiske tenkning er hensyntatt, mener jeg det er betimelig å se til forskning på tidlig algebra. Funnene som rapporteres fra prosjekt LEAP (Blanton & Isler-Baykal et al. 2019; Blanton & Stroud et al., 2019) virker overbevisende med tanke på læringsutbytte, også for unge elever. Det tyder på at det kan gi god effekt å engasjere elever i undersøkelser omkring aritmetiske forhold, kombinert med undervisning i hvordan de aritmetiske forholdene kan uttrykkes algebraisk. Blanton & Kaput (2003) skriver blant annet hvordan lærere kan legge til rette for å algebraifisere matematikken på småtrinnet. Med begrepet algebraifisere mener de å skape muligheter for å tenke algebraisk med utgangspunkt i oppgaver og materiale som er kjent for elevene, og allerede benyttes i undervisning. På den måten skapes det en sammenheng mellom oppgaveformer som er kjente for elevene, der de tidligere har jobbet med å finne et konkret tall, for så å være på jakt etter generelle mønster. I tillegg til å arbeide med generelle løsninger på aritmetiske oppgaver, retter Blanton & Kaput (2003) oppmerksomhet mot samtalen i klasserommet. Det blir understreket at lærere må benytte anledningene som oppstår, for å vende samtaler over fra det spesifikke til det generelle, og engasjere elevene i å bruke algebraisk språk. En måte man kan styre det på, er å benytte seg av bevisstgjørende spørsmål. Spørsmål som gjør at elevene må bygge argumenter, forklare og begrunne. Selv om Blanton & Kaput (2003) retter artikkelen mot lærere på lavere trinn, er det ikke noe i veien for at disse elementene er noe lærere på alle klassetrinn, også ungdomstrinn, kan hensynta.

Norge har ikke en helhetlig plan for hvordan algebra skal innføres og undervises gjennom hele skoleløpet, slik flere stater i USA har. Da blir det viktig at lærere har kunnskap om hvilke fallgruver elever kan komme ut for i overgangen mellom aritmetikk og algebra. Det er også viktig å ha kunnskap om hva som kan lette overgangen. Funn i min studie kan tyde på at god tallforståelse er viktig når elever skal arbeide med generalisert aritmetikk. Videre var det funn som tydet på at er viktig med god kunnskap om partall og oddetall, og deres egenskaper. Det lot til at kunnskap om partall og oddetall hadde betydning for elevene i deres arbeid med å begrunne generaliseringene sine. I tillegg var partall og oddetall kjente egenskaper som så ut til å være en pådriver i undersøkelsesarbeidet. Undersøkelsessituasjonen i seg selv er en faktor man også må være bevisst på. For at elever skal identifisere regelmessige strukturer, bør de ha en utforskende tilnærming til oppgaven eller tallmaterialet. Erfaringer fra min studie indikerer at utforsking og mønsterleting er viktig, men at det ikke falt alle elever like naturlig. Det kan være at elever i større grad bør eksponeres for slike arbeidsmåter, slik at de blir mer vante og trygge i undersøkelsessituasjoner.

I denne studien er det funn som kan tyde på at algebra er og bør presenteres som noe mer enn manipulasjon av symboler, slik navnet på studien, *X'er og Y'er er ikke mer algebra enn noter på et ark er musikk,* også indikerer. Elevene i min studie identifiserte strukturer og egenskaper, som de representerte, begrunnet på flere måter og som de resonnerte videre med. Elevene tok i bruk flere ulike handlinger knyttet til algebraisk tenkning i arbeidet sitt, og jeg mener indikerer at det ligger mange muligheter i en enkel oppgave. Det kan tenkes at en lignende oppgave kunne ha vært en fin inngang til arbeid med algebra av mer symbolsk og abstrakt karakter. Slik jeg ser det, synes det fornuftig å gå om generelle aritmetiske uttrykk for å skape en god overgang til arbeid med generelle symbolske uttrykk.

Basert på funnene i min studie mener jeg at det kan være interessant med videre undersøkelser på elever, undervisning og læring i overgangen mellom barne- og ungdomstrinn. Det ser ut til å være viktig for elevene at deres forkunnskaper blir hensyntatt og bygd videre på. For å gjøre det på en god måte, slik at algebra ikke blir en avsondret enhet i matematikkfaget, kan det være behov for mer kunnskap om hvilke elementer fra aritmetikken som bør styrkes inn mot undervisning i symbolsk algebra. Det kunne også vært interessant å prøve ut forsøk med tidlig algebra, for å se om et større fokus på algebraisk tenkning på lavere trinn, vil gi noe av den samme positive effekten som blir rapportert fra prosjekt LEAP (Blanton et al.,2018; Blanton & Isler-Baykal et al. 2019; Blanton & Stroud et al., 2019).

Referanser

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. I *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education 2*(1), 95-101

Bergem, O.K., Kaarsten, H., & Nilsen,T. (Red). (2016). Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015 (s. 22-44). Universitetsforlaget. Hentet fra: https://www.idunn.no/vi-kan-lykkes-i-realfag

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 412-446.

Blanton M.L. & Kaput J.J. (2011) Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. I Cai, J. & Knuth, E. (Red) *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education*. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Series in Essential Understandings*. National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-year-olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practic*e (s. 27–49). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Blanton, M., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E., & Gardiner, A.M. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 193–219. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A., Stylianou, D., Knuth, E., Isler, I., & Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in grades 3–5. *American Educational Research Journal*, 56(5), 1930-1972. https://doi.org/10.3102%2F0002831219832301

Breiteig, T., & Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: To reason, explain, argue, generalize and justify. In *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education:*(2), 225-232. PME, Charles University.

Brinkmann, S. & Tanggaard, L. (Red.) (2012). *Kvalitative metoder: Empri og teoriutvikling*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Britt M.S. & Irwin K.C. (2011) Algebraic Thinking with and without Algebraic Representation: A Pathway for Learning. I Cai J. & Knuth E. (Red), *Early Algebraization* (s.137-159). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_10

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77-101.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. I Lester, F. K. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics*, 669-705.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 87-115.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (s. 235-272). Routledge

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). London: Routledge.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Hentet fra: http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Cooper, T. & Warren, E. (2011). Year 2 to Year 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*, (s. 187–214). New York: Springer.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(4), 375-402.

Demonty, I., Vlassis, J., & Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(1), 1-19. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9

Devlin, R. (2011, publisert 20.november). What is algebra? [Blogginnlegg]. Hentet fra: https://profkeithdevlin.org/2011/11/20/what-is-algebra/

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching

Harper, E. (1987). Ghosts of diophantus. *Educational studies in mathematics*, *18*(1), 75-90. https://doi.org/10.1007/BF00367915

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, *27*(1), 59-78. https://doi.org/10.1007/BF01284528.

Irwin, K. C., & Britt, M. S. (2005). The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand Numeracy Project. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(2), 169-188.

Johanning, D. I. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: A closer look at students' informal strategies. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 371-388. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.001

Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? I D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Red.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of PME-NA* (Vol. 1, s. 71-94). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Red.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (s. 133-155). Mahwah, NJ: Erlb

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra for an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum*. Arlington, VA: National Science Foundation (ERIC Document Reproduction Service No. ED444166).

Kaput, J.J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (s. 5-17). Routledge.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. I P. Nesher & J. Kilpatrick (Red.), *ICMI study series. Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 96–112). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.007

Kieran, C. (2004a). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2004b). The core of algebra: Reflections on its main activities. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study* (s. 21-33). Springer, Dordrecht.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. I F.K Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age Publishing; Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2018). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. I Kieran C. (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Old* (s. 79-105). ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M., & Gardiner, A. (2016). Building an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan, 97*(6), 65–68. https://doi.org/10.1177%2F0031721716636877

Kvale, S. & Brinkmann S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2.utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Kvale, S. & Brinkmann S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3.utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, *7*(3), 231-258.

Lee, L., & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(1), 41-54. https://doi.org/10.1007/BF00356040.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational studies in mathematics*, *30*(1), 39-65. https://doi.org/10.1007/BF00163752.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study* (s. 45-70). Springer, Dordrecht.

Mason J. (1996) Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra*. Mathematics Education Library, vol 18. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades*, (s. 57-94)
Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32.
Miles, M. B., Huberman, A. M. & Saldaña, J. (2014). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (3. utg.). Los Angeles, CA: SAGE.
NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Oslo: Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsfag og humaniora (NESH). Hentet fra: https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf
Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.
NRICH (u.å). Calendar Capers. Hentet fra: https://nrich.maths.org/85
Patton, M.Q. (2002). *Qualitative Research & Evaluation methods* (3.utg.). California: Sage Publications.
Postholm, M.B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudie* (2.utg.). Oslo: Universitetsforlaget.
Project LEAP: Learning through an Early Algebra Progression. (u.å) Hentet fra: http://algebra.wceruw.org/index.html.
Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *4*(2), 37-62.
Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011a). Connecting arithmetic to algebra. Portsmouth, NJ: Heinemann
Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011b). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. I Cai, J. & Knuth, E. (Red.), *Early algebraization* (s. 43-69). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_4
Schifter, D. (2018). Early algebra as analysis of structure: A focus on operations. In *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 309-327). Springer, Cham.
Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 15-39.
Sharpe, S. T. (2019). An algebraic translation task solved by grade 7–9 students. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(1), 78-84. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1564970
Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Red.). (2006). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (Vol. 8). Springer Science & Business Media.
Strachota, S., Knuth, E., & Blanton, M. (2018). Cycles of generalizing activities in the classroom. I C., Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (s. 351-378). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_15
Timeanddate.no (u.å). Kalender for November 2019 (Norge). Hentet fra: https://www.timeanddate.no/kalender/personlig?year=2019&
Tjora, A. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2.utg.). Oslo: Gyldendal norsk forlag AS.

Warren, E. (2003). The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematics Education Research Journal* 15, (s. 122–137). https://doi.org/10.1007/BF03217374.

Warren, E. & Cooper, T. (2002) Arithmetic and Quasi-variables: a year 2 lesson to introduce algebra in the early years. I B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch & M. Thomas (Red.), *Mathematics Education in the South Pacific*, (2.utg.). (s. 673-681). Auckland: Mathematics Education Group of Australasia.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Vedlegg 1

Vil du delta i forskningsprosjektet

"X'er og Y'er er ikke mer algebra enn noter på et ark er musikk"?

Formål

Dette prosjektet er en del av det jeg ønsker å undersøke i forbindelse med min masteroppgave i matematikkdidaktikk.
Det er algebra som er tema for masteroppgaven og denne undersøkelsen er et forsøk på å finne ut mer om hvordan elever utfører oppgaver innenfor dette matematiske temaet, og ikke minst hvordan de tenker omkring det de gjør.
Jeg ønsker å undersøke hvilke strategier elevene har, hvordan de lærer algebra, og hvilke konsekvenser det videre kan ha for måten det undervises på.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, institutt for lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Jeg er ansatt som lærer på denne skolen og for meg er det viktig å undersøke hvordan elevene ved vår skole tenker og jobber med dette emnet.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta vil du få jobbe med noen oppgaver, sammen med 2-3 stykker på ei gruppe, der jeg også vil være til stede. Jeg kommer til å observere hvordan dere jobber for å løse oppgavene og vi kommer til å snakke sammen både underveis og etterpå. Det er beregnet ei undervisningsøkt til gjennomføring.
Jeg kommer til å samle inn notatene og oppgavearkene deres – de skal være uten navn.
Samtalen/e kommer jeg til å ta opp på en lydopptaker, og opplysninger som er interessante anonymiseres og kan bli brukt i masteroppgaven.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Deltagelsen vil ikke påvirke vurderingen du får i matematikk.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Ingen uvedkommende får tilgang til personopplysningene. Det er kun student og veileder som vil ha tilgang til datamaterialet.
- Datamaterialet blir lagret på en kryptert minnebrikke og slettet etter at prosjektet er avsluttet.
- Alt du sier vil bli anonymisert før det eventuelt brukes i masteroppgaven og ingen utenforstående kan gjenkjenne deg og det du har sagt.

.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes våren 2020. Lydopptak vil da bli slettet, og samtykkeskjema makulert.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU ved veileder Anita Valenta, anita.valenta@ntnu.no eller student Nina Rokne Bye, ninar_b@hotmail.com, tlf 95919461
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen, thomas.helgesen@ntnu.no, 93079038
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Anita Valenta Prosjektansvarlig (Forsker/veileder)	Nina Rokne Bye Student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «X'er og Y'er er ikke mer algebra, enn noter på et ark er musikk» og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at jeg/mitt barn:

- ☐ deltar i oppgaveløsning og taleopptak av matematisk samtale, samt at notater blir samlet inn

Jeg samtykker til at mine/mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. juni 2020

--	---
Navn på elev/deltakeren	Signert av elev, dato

	Signert av foresatt, dato

NTNU

Kunnskap for en bedre verden