Anniken Rødset

Negative tall

En kvalitativ studie av elevers utfordringer med negative tall på 4. trinn

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Ole Enge
Mai 2020

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Anniken Rødset

Negative tall

En kvalitativ studie av elevers utfordringer med negative tall på 4. trinn

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Ole Enge
Mai 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Formålet med denne studien er å kartlegge hvilke utfordringer 4. trinnselever møter på når de arbeider med negative tall, og hvilke representasjoner de selv tar i bruk for løse oppgaver som inneholder negative tall. Målet for denne masteroppgaven er å skape et større innblikk i utfordringer yngre elever møter under innlæringen av negative tall. Tidligere forskning på eldre elever viser blant annet at minustegnets ulike funksjoner, og tallenes retning og mengde kan by på utfordringer for elevene. I tillegg kan elevenes tidligere erfaringer fra de naturlige tallene, være med å skape misoppfatninger når negative tall blir introdusert.

Studien har et kvalitativt forskningsdesign og ble gjennomført med åtte 4. klassinger ved en skole i Trondheim. Metoden som ble benyttet under datainnsamlingen er semi-strukturert gruppeintervju med to elever i hvert intervju. Elevene fikk totalt ti oppgaver med negative tall som skulle besvares, og oppgavene involverte sortering av heltall, regnestykker med addisjon og subtraksjon, sammenligning av positive og negative tall, og to tekstoppgaver. Under datainnsamlingen ble lydopptak benyttet, så datamaterialet for denne studien er transkripsjoner av lydopptakene, observasjonsnotater og elevbesvarelsene. Lydopptakene ble transkribert rett etter gjennomføringen av intervjuene, og transkripsjonene ble analysert gjennom en koding og kategoriseringsprosess.

Gjennom analysen av datamaterialet kommer det frem at flere av elevene opplever utfordringer når det kommer til minustegnets ulike funksjoner. De elevene som møtte på denne utfordringen knytter som oftest minustegnet kun til en av funksjonene. Når det kommer til tallenes retning og mengde resonnerer flertallet av elevene ut fra retning og ofte i sammenheng med bevegelse på en tallinje. De elevene som hadde utfordringer med tallenes retning og mengde knyttet regning med negative tall opp mot regneregler for de naturlige tallene. Den siste utfordringen som ble kartlagt i denne studien omhandler aritmetiske operasjoner med addisjon og subtraksjon. Misoppfatninger som at en ikke kan trekke fra et større tall fra et mindre tall, var en gjenganger blant flere av elevene. Utfordringer som er funnet i denne studien, samsvarer med utfordringer funnet i tidligere forskning.

Når det gjelder bruk av representasjoner for å løse oppgaver med negative tall ble tallinje brukt av samtlige elever. Noen av elevene brukte uttrykk som termometer eller gradestokk for å forklare utregningen. Kun en av åtte elever brukte en mengde-modell som representasjon og fire av åtte elever benyttet en kontekst.

Abstract

The purpose of this study is to identify what challenges fourth grade students face when dealing with negative numbers, and what representations they use for solving problems that contain negative numbers. The aim of this master's thesis is to create a greater insight into the challenges younger students face when learning negative numbers. Previous research with older students shows, among other things, that the various functions of the minus sign and the direction and quantity of the numbers can present challenges for the students. In addition, students' previous experiences of the natural numbers may help to create misconceptions when negative numbers are introduced.

The study has a qualitative research design and was carried out with eight fourth graders at a school in Trondheim. The method used during the data collection is a semi-structured group interview with two students in each interview. The students were given a total of ten assignments with negative numbers. The assignments involved sorting integers, calculations with addition and subtraction, comparison of positive and negative numbers, and two text assignments. During the data collection audio recordings were used. The data material for this study is the transcripts from the audio recordings, observation notes and student responses. The audio recordings were transcribed immediately following the interviews, and the transcripts were analyzed through a coding and categorization process.

The analysis of the data material revealed that several of the students experience challenges when it comes to the various functions of the minus sign. The students who met this challenge usually associate the minus sign with only one of the functions. When it comes to the direction and magnitude of numbers, most of the students resonate out of direction, and often in the context of movement on a number line. The students who faced challenges with the direction and value of the numbers, associated negative numbers with the rules of calculation for natural numbers. The final challenge identified in this study deals with the arithmetic operations of addition and subtraction. Misconceptions that one cannot subtract a larger number from a smaller number were commonplace among several of the students. Challenges found in this study correspond to challenges found in previous research.

When it comes to using representations to solve tasks with negative numbers, all students chose to use number lines. Some of the students used terms such as thermometers or scales to explain the calculation. Only one of eight students used a quantity model as representation and only four of eight students used a context as a representation.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten for to år med videreutdanning ved NTNU. Å skrive en masteroppgave har vært en lang og tidkrevende prosess, men samtidig spennende og lærerikt. Til tider hadde jeg mine tvil om oppgaven noen gang ville bli en realitet, men ved hjelp av en rekke mennesker, har jeg endelig nådd målet. Jeg vil derfor benytte anledningen til å takke disse menneskene.

Jeg vil først takke, min tidligere rektor Bente Moholt, som har gitt meg muligheten og lagt til rette for at jeg kan gjennomføre denne masteren. Deretter vil jeg takke elevene som deltok i studien. Videre ønsker jeg å takke min veileder, Ole Enge, for ærlige, konstruktive og gode tilbakemeldinger underveis i prosessen. En stor takk går også til min nærmeste familie og venner for støttende, oppmuntrende og motiverende ord. Helt til sist vil jeg rette en spesiell takk til Mats, uten deg hadde aldri denne masteroppgaven sett dagens lys!

Trondheim, mai 2020

Anniken Rødset

Innhold

Figurer xi
Tabeller xi
1 Innledning 13
1.1 Forskningsspørsmål 14
1.2 Teori og metodevalg 15
1.3 Oppgavens oppbygging 16
2 Teori 17
2.1 Negative tall – Historisk perspektiv 17
2.2 Utfordringer med negative tall 19
2.2.1 Minustegnets funksjoner 19
2.2.2 Aritmetiske operasjoner med negative tall 21
2.2.3 Tallenes retning og mengde 23
2.3 Representasjoner 25
3 Metodekapittel 29
3.1 Kvalitativ forskningsmetode 29
3.2 Pilotundersøkelse 30
3.3 Datainnsamling 31
3.4 Analysemetoder 33
3.5 Etiske betraktninger 35
3.6 Reliabilitet og validitet 36
4 Analyse av oppgavene 39
4.1 Oppgave1 39
4.2 Oppgave 2 til og med oppgave 7. 39
4.3 Oppgave 8: > , < eller = ...41
4.4 Oppgave 9 og oppgave 10 41
5 Analyse av datamaterialet 43
5.1 Utfordringer knyttet til negative tall 43
5.1.1 Minustegnets funksjoner 44
5.1.2 Aritmetiske operasjoner knyttet til negative tall 46
5.1.3 Mengde og retning 48
5.2 Representasjoner 50
5.2.1 Tallinje 50
5.2.2 Kontekst 52
5.2.3 Mengdemodell 53
6 Drøfting 55

6.1 Kjennetegn ved elevers utfordringer med negative tall 55
6.2 Representasjoner 57
6.3 Metodekritikk 59
7 Avslutning 61
Litteraturliste 64
Vedlegg 68

Figurer

Figur 1: Ulike representasjoner av mengden 3. 25
Figur 2: Addisjon med tallinjemodellen..27
Figur 3: Subtraksjon med tallinjemodellen..27
Figur 4: Carl sin tallinje. 51
Figur 5: Anna sin tallinje. 51
Figur 6: Frida sin mengdemodell. 53

Tabeller

Tabell 1: Minustegnets ulike funksjoner. 20
Tabell 2: Oversikt over oppgavene. 33
Tabell 3: Oppgave 1. 38
Tabell 4: Oppgave 2 til og med oppgave 7. 38
Tabell 5: Oppgave 8. 40
Tabell 6: Oppgave 9 og oppgave 10. 40

1 Innledning

Temaet for studien er elevers arbeid med negative tall, med fokus på hvilke utfordringer elever opplever. Nyere forskning viser at negative tall er et tema som kan skape store utfordringer for elevene (Gallardo, 2002; Vlassis, 2004, 2008; Whitacre, Azuz, Lamb, Bishop, Schappelle, Philipp & Lewis, 2017). Forskere som Gallardo (2002), Manchester (2011) og Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre og Schappelle (2014) har knyttet utfordringene elevene møter med negative tall opp mot historiske utfordringer tidligere matematikere har møtt på. Gjennom å se på et historisk tilbakeblikk viser det seg at negative tall har skapt hindringer og stridigheter gjennom flere århundre. I stor grad kan dette skyldes tallenes abstrakte natur, samt at de ikke kan konkretiseres og observeres på samme måte som de naturlige tallene (Kilhamn, 2009). Thomaidis (1993) knytter utfordringene opp mot modellene som vanligvis benyttes for å introdusere negative tall; kontekster om temperatur, penger og gjeld. Thomaidis (1993) påpeker at bruken av slike modeller ikke hjelper elevene med å komme over utfordringene fordi det ikke er nødvendig å bruke negative tall i slike kontekster. Behovet for negative tall kom ikke fra hverdagslige situasjoner, men som et behov fra algebra og generalisering (Freudenthal, 2002). Forskere er enige i at negative tall er et utfordrende emne for elever, og har opp gjennom historien belyst ulike områder som kan skape utfordringer. Hvordan negative tall skal læres, når innlæringen skal komme, og hvilke representasjoner som skal benyttes er det fremdeles uenigheter om.

De fleste studier angående negative tall er gjennomført med elever på 5.-10-årstrinn. Forskere som Gallardo (2002), Vlassis (2008) og Kilhamn (2011) skriver om ungdomstrinnselevers arbeid knyttet til negative tall. I nyere tid har forskere som Bishop et al. (2014) og Bofferding, Aqazade og Farmer (2018) gjennomført studier med elever i småskolen. Resultatene i deres forskningsprosjekt viser at elever før introduksjon av negative tall mestrer mye når det kommer til sammenligning av heltallene. Videre påpekes det at innlæringen av negative tall bør komme tidligere enn hva den gjør nå, noe som støttes av flere forskere. Peled og Carraher (2008) argumenterer for at negative tall bør introduseres i løpet av de første skoleårene for å støtte elevers læring av algebraiske begreper. Bruno og Martinón (1999) forklarer at elevene har blitt så komfortable med de naturlige tallene, at senere introduksjon av de negative tallene kan føre til at elevene stoler for mye på sin kunnskap om naturlige tall i arbeid med de negative tallene. Erfaringer forskere har gjort er at elevene overgeneraliserer sin kunnskap om naturlige tall i arbeidet med de negative tallene.

I den utgående læreplanen for matematikk er det i dag kompetansemål om negative tall som elevene skal mestre etter 4.årstrinn og 7.årstrinn. Etter 4. trinn skal elevene kunne bruke negative tall i praktiske sammenhenger, og uttrykke tallstørrelser på varierte måter. Etter 7.trinn skal elevene kunne regne med negative tall, og plassere dem på en tallinje (Utdanningsdirektoratet, 2013). I fagfornyelsen som skal gjelde fra høsten 2020 er det gjort endringer når det kommer til kompetansemål om negative tall. Fra og med august 2020 presenteres ikke negative tall før på 7.trinn. Etter 7.årstrinn skal elevene kunne utforske negative tall i praktiske situasjoner, og bruke tallinje i regning med negative tall (Utdanningsdirektoratet, 2019). Innholdet i kompetansemålene er i stor grad like, men forskjeller er når elevene skal introduseres for temaet. I følge Linchevski og Williams (1999) bør ikke elevene introduseres for de negative tallene før de er modne nok. Nyere forskning fra Bishop et al. (2014) og Bofferding et al. (2018) påpeker derimot at innlæringen bør skje på et tidlig stadige. Grunnen til dette er fordi reglene som gjelder for de negative tallene kan være motstridende fra de positive tallene, og for at elevene skal unngå å danne seg misoppfatninger, som at addisjon alltid vil føre til et større tall. Selv om nyere forskning argumenterer for at innlæringen av negative tall bør komme tidligere, vil det fra høsten 2020 ikke bli introdusert for elevene i matematikkfaget før på syvende årstrinn. I tillegg forventes det at innlæringen og regningen med negative tall skal komme samtidig.

I følge Duval (2006) kan matematiske objekter beskrives som abstrakte, ikke-fysiske og uobserverbare, og eneste tilgangen vi har til dem er gjennom representasjoner. Representasjoner er derfor avgjørende, og et viktig verktøy for å få tilgang til de matematiske objektene. Både i den nåværende, og den kommende fagplanen for matematikk nevnes bruken av praktiske situasjoner, og bruken av tallinje som modell i arbeid med negative tall. Freudenthal (2002) er en forsker som har kritisert bruken av tradisjonelle modeller som brukes når elever skal arbeide med negative tall. Han begrunner dette med å vise til at negative tall ofte blir passive, og at de ikke er egnet for å forklare addisjon og subtraksjon med negative tall. Flere forskere har også kritisert bruken av hverdagskontekster, da mange av dem kan løses uten å bruke negative tall (Prather & Alibali, 2008; Kilhamn, 2011; Whitacre, Bishop, Lamb, Philipp, Schappelle & Lewis, 2011).

1.1 Forskningsspørsmål

Mennesker har en tendens til å unngå negative tall i hverdagen hvis de kan. Som nevnt tidligere påpeker Thomaidis (1993) at kontekster som ofte omfatter de negative tallene ofte kan løses uten bruk av negative tall. Prather & Alibali (2008) har gjort samme funn i sin studie, der de viser til realistiske kontekster med negative tall som enklere kan løses uten å bruke de negative tallene. I språket vi benytter har vi flere begreper som indikerer at tallene er negative, som kuldegrader og gjeld, slik at vi unngår de negative tallene. Kilhamn (2011) forklarer at vi kan ikke bli overrasket hvis elevene tar i bruk samme strategi som oss voksne, og unngår å bruke negative tall hvis de kan. Kilhamn (2011) viser til en tekstoppgave fra et svensk læreverk som enklere kan løses uten bruk av negative tall:

Keiser Augustus ble født i år 63 før Kristus. Det kan skrives som år -63. Han døde i år 14 etter Kristus. Hvor gammel ble han? (Egen oversettelse).

Konteksten i denne tekstoppgaven inviterer til bruk av negative tall, men oppgaven kan enklere løses ved å addere 63 år og 14 år (før og etter år 0), et regnestykke som vil bli 63 + 14 = 77. Det ønskelige regnestykke i denne oppgaven ville derimot ha vært 14 – (-63) = 77, der negative tall benyttes, men som øker kompleksiteten i regnestykket. Kilhamn (2011) forklarer at målet med oppgaven må komme tydelig frem, ønsker en å løse oppgaven på enklest mulig måte, eller å utvikle forståelsen for negative tall. Whitacre et al. (2011) belyser dette problemet med å argumentere for at reelle kontekster med negative tall er vanskelig å finne, og at de fleste kontekster som inneholder negative tall kan løses uten.

Som tidligere nevnt er ikke behovet for negative tall kommet fra hverdagslige situasjoner, men som et behov for algebra og generalisering (Freudenthal, 2002). Det å lære seg å utføre operasjoner med negative tall vil derfor være en viktig byggestein for videre læring i matematiske temaer som algebra. Gjennom sitt forskningsarbeid om hva som forårsaker feil i arbeid med likninger fant Vlassis (2002) ut at likninger som inneholder negative tall øker vanskelighetsgraden for elevene. Videre forklarer Vlassis (2002) at det ikke er strukturen på likningene eller variablene som gjør det vanskelig, men abstraksjonen negative tall medfører. Dette belyser viktigheten rundt innlæringen av negative tall, om hvordan negative tall kan påvirke andre emner i matematikk. For å få en bedre forståelse for hva elevene synes er vanskelig med negative tall ønsker jeg å benytte denne studien til å se på utfordringer elevene opplever i arbeid med negative tall. Flere forskere som har studert negative tall har belyst ulike utfordringer elevene møter, og to av forskerne er Altiparmak & Özdoğan (2010), som har samlet tre kategorier med utfordringer elever opplever: mengde og retning, aritmetiske operasjoner og minustegnet. Utfordringene omhandler tallenes retning og mengde, aritmetiske operasjoner med addisjon og subtraksjon med negative tall og minustegnets ulike funksjoner. Videre i denne studien vil jeg ser nærmere på de tre kategoriene av utfordringer Altiparmak & Özdoğan (2010) nevner i sin studie.

Negative tall kan beskrives som byggesteiner for flere temaer i matematikk, spesielt innenfor temaet algebra. Negative tall vil derfor være et viktig tema og lykkes med. Med utgangspunkt i tidligere forskning om negative tall og representasjoner av matematiske modeller, har jeg kommet frem til følgende forskningsspørsmål for denne studien:

Hva kjennetegner utfordringene åtte elever på 4. trinn møter i arbeid med negative tall og hvilke representasjoner tar de i bruk?

Utfordringer som vil bli kartlagt i denne studien er de som omhandler negative tall, og representasjonene som omtales i mitt forskningsspørsmål vil hovedsakelig være matematiske modeller. Med matematiske modeller mener jeg representasjonene elevene selv tar i bruk, som for eksempel tallinjer, ulike kontekster eller mengdemodeller.

1.2 Teori og metodevalg

For å besvare mitt forskningsspørsmål har jeg gjennomført et kvalitativt forskningsarbeid med åtte elever på 4. trinn. Som metode for innsamlingen benyttet jeg meg av oppgavebasert intervju med grupper på to og to elever. Elevene fikk arbeide med aritmetikkoppgaver med addisjon og subtraksjon, og sammenligningsoppgaver med heltall. Alle intervjuene ble gjennomført i skoletiden og hver gruppe arbeidet i omtrent 25 minutter. Elevene fikk beskjed om å løse oppgavene individuelt, der de etter hver oppgave skulle forklare fremgangsmåten de hadde benyttet, for den andre medeleven og meg. Under innsamlingen ble det tatt lydopptak av samtalene, det er dette som utgjør mitt datamateriale, i tillegg ble elevenes skriftlige notater samlet inn, og mine egne notater som ble notert ned underveis. Før innsamlingen av datamaterialet ble gjennomført, søkte jeg godkjenning til NSD, og samtykkeskjema ble sendt ut til foresatte, se vedlegg 1 og vedlegg 2. En av grunnene til at valget av deltagere til intervju ble 4. trinnselever er fordi jeg ønsket elever som hadde vært gjennom undervisning med negative tall. En annen grunn er at jeg ønsket å se på hva elever i denne alderen uttrykker som utfordrende med negative tall, siden kompetansemålene om negative tall går bort i fra dette årstrinnet.

1.3 Oppgavens oppbygging

Denne masteroppgaven består av seks kapitler: teori, metode, analyse av oppgavene, analyse av datamaterialet, drøfting av elevarbeidet og avslutning. I teorikapittelet presenteres de viktigste begrepene, og det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for videre analyse i studien. Først vil jeg presentere et historisk tilbakeblikk over utviklingen av negative tall, og hvordan negative tall ble akseptert i vesten. Videre vil jeg beskrive ulike utfordringer tidligere forskere har kartlagt som elever møter i arbeid med negative tall, før jeg avslutningsvis i dette kapittelet ser på ulike modeller som ofte tas i bruk under innlæringen av negative tall. I metodekapittelet vil jeg gjøre rede for valg av forskningsdesignet, og begrunne de forskningsmetodene som er benyttet i denne studien. Jeg vil beskrive hvordan datainnsamlingen ble utført, hvilke metoder som ble brukt, og beskrive hvordan jeg gjennomførte analysen av datamaterialet, altså hvordan materialet ble transkribert, kodet og kategorisert. I tillegg vil jeg begrunne noen etiske betraktninger, studiens troverdighet og pålitelighet, før jeg avslutter kapittelet med et kritisk blikk på de metodiske valgene jeg har tatt. I neste kapittel vil resultatene fra analyseprosessen av oppgavene bli presentert. Her vil de ti ulike oppgavene elevene fikk arbeide med bli analysert, jeg vil begrunne valg av oppgaver og presentere hvor de er hente fra. I tillegg vil jeg bemerke potensialet som ligger i oppgavene, samt ulike løsningsmetoder. I kapittel 5 vil jeg gjøre rede for analyse av datamaterialet. Her vil funnene i elevenes arbeid bli presentert og drøftet opp mot det teoretiske rammeverket som jeg tar i bruk i denne masteroppgaven. Her vil utfordringer i elevbesvarelsene belyses, og modeller elevene benytter beskrives i sammenheng med utdrag fra intervjubesvarelsene. I drøftingskapittelet vil sentrale funn fra analysen drøftes opp mot relevant teori. Her vil jeg trekke frem de viktigste funnene i analysen, og se hva det kan fortelle meg om elevenes utfordringer i arbeid med negative tall. I tillegg vil jeg se på hvilke modeller de selv velger å bruke. I dette kapittelet ønsker jeg i tillegg å sammenligne mine funn opp mot annen relevant forskning. Avslutningsvis i dette kapittelet vil noen metodiske utfordringer for studien drøftes. I det siste kapittelet i min masteroppgave vil jeg oppsummere studiens resultater og funn. Videre vil jeg drøfte hvilke implikasjoner denne studien kan ha for videre studier på yngre elever om negative tall og dele erfaringer jeg har gjort meg i løpet av denne prosessen.

2 Teori

Målet med oppgaven er å finne ut hvilke utfordringer elever på 4. trinn har når det kommer til læring av negative tall, og hvilke representasjoner elevene benytter seg av når de arbeider med negative tall. For å kunne svare på spørsmålene har jeg behov for teori som beskriver og forklarer utfordringer knyttet til læring av negative tall, samt teori om representasjoner av matematiske modeller. Teorien som presenteres i teorikapittelet utgjør bakgrunnen for analysen i min studie. Som teoretisk rammeverk for oppgaven brukes de tre utfordringene Altiparmak & Özdoğan (2010) knyttet til læring av negative tall.

I kapittelet vil jeg først presentere negative tall i et historisk perspektiv, for deretter å se på ulike utfordringer tidligere forskere har funnet om temaet negative tall. Avslutningsvis i dette teorikapittelet vil jeg se nærmere på ulike forskeres syn på modeller som tas i bruk når elever arbeider med negative tall.

2.1 Negative tall – Historisk perspektiv

Et tilbakeblikk i historien viser at negative tall har vært et omdiskutert begrep. Flere forskere som har studert konseptet negative tall skriver om konflikter og stridigheter temaet har møtt på opp gjennom årene (Gallardo, 2002; Kilhamn, 2011; Manchester, 2011). Manchester (2011) går så langt i sin avhandling at hun påstår at en studie om negative tall vil ha liten tyngde hvis den ikke ses i sammenheng med det historiske perspektivet. Kilhamn (2011) skriver i sin studie at utfordringene elevene hadde, ofte var relaterte til lignende problemer i den historiske utviklingen av negative tall, noe som kan antyde at lærere og elever kan dra nytte av dypere innsikt i historien til matematikk. En annen som mener matematikkens historie er avgjørende er Mosvold (2002), som skriver om historisk genesis i matematikkundervisningen. Genesis betyr opphav, og historisk genesis tar utgangspunkt i det matematiske emnets opphav og historie (Mosvold, 2002). Videre beskriver Mosvold (2002) at ideen bak prinsippet er at elevene skal lære matematikk fra det grunnleggende til det mer kompliserte på samme måte som forfedrene våre har gjort. Så ut i fra at flere forskere påpeker viktigheten med et historisk tilbakeblikk, og at elever i dag fremdeles opplever noen av de samme utfordringene, ønsker jeg å se nærmere på konfliktene og stridighetene negative tall har ført med seg.

Gjennom å lese historien om negative tall, ser vi at fokuset matematikerne hadde i ulike deler av verden har påvirket negative tall sin historie. En av de første skriftlige tekstene med negative tall stammer fra Kina, og er omtrent fra år 250 før vår tidsregning (Gallardo, 2002). I teksten brukes negative tall i formuleringer og i løsninger av likninger, og handler om kjøp og salg (Gallardo, 2002). De negative tallene blir betraktet som motsatte størrelser og gjeld. For å holde orden tok kineserne i bruk staver i ulike farger for å illustrere tallene. Røde staver representerte de positive tallene, mens de svarte stavene markerte de negative tallene (Gallardo, 2002). I Østen, Babylon og oldtidens India, er matematikerne opptatt av telling og summering, og tallene representerer hovedsakelig kvantitet, men også rekkefølge (Kilhamn, 2011). Tallene trengte ikke å gi mening gjennom geometri, men i relasjon med hverandre (Kilhamn, 2011). Matematikerne i Østen aksepterte abstrakte matematiske objekter i større grad, og var derfor de første som godtok negative tall som reelle tall. Gjennom fornuftige matematiske systemer som hadde logisk utvikling ga null og negative tall mening. Eksempel på dette er:

$2 - 1 = 1$

$2 - 2 = 0$

$2 - 3 = -1$

$2 - 4 = -2$

Hva tallene representerte var ikke viktig, så lenge systemet hadde en logisk utvikling, som gjorde det mulig for matematikerne å akseptere de negative tallene som matematiske objekter, selv om de var abstrakte (Kilhamn, 2011). I Vesten derimot, hovedsakelig Egypt og Hellas, var matematikken knyttet opp mot geometri, og her skulle tallene gi mening i form av geometrisk størrelser og være målbare. I Vesten hadde ikke tall retning, kun mengde (Kilhamn, 2011). Siden tallene representerte direkte størrelser og målinger, ble negative tall derfor sett på som unødvendige, fordi et negativt areal eller en negativ distanse ikke ga noe mening. Det tok derfor lengre tid før matematikerne i Vesten aksepterte og tok i bruk regning med negative tall.

Østen regnes som opprinnelsesstedet for algebra, noe som utgjør en stor betydning for negative tall sin historie. Utviklingen av negative tall som matematiske objekter kom rundet det 16. århundret med introduksjonen av algebra (Kilhamn, 2011). På dette tidspunktet blomstret oppmerksomheten rundt algebra, og matematikerne hadde økende behov for symbolisering av matematikk. Gjennom algebraisk tankegang økte behovet for negative tall for å kunne generalisere. En begynte derfor å skille mellom aritmetikk og algebra, der de abstrakte negative tallene ikke trengte å gi fysisk mening, kun en algebraisk (Kilhamn, 2011). Etter hvert som algebraen ble mer avansert økte gapet mellom hverdagsmatematikk og abstrakt matematikk. Algebraens voksende rolle medførte derfor at de negative tallene ble mer akseptert, der stadig flere begynte å oppfatte negative tall som reelle tall. Det var ikke før det 18. århundre at negative tall ble brukt i lærebøker, og at negative tall ble anerkjent for fullt. Det har derfor vært en lang kamp for å få negative tall definert som matematiske objekter, og det er ikke før på slutten av det 19. århundre at den formelle matematiske definisjonen av begrepet kom (Kilhamn, 2011).

Selv om den formelle matematiske definisjonen av negative tall kom på slutten av det 19. århundre, tok det likevel omtrent 100 år før negative tall kom for fullt inn i hverdagsmatematikken (Kilhamn, 2011). Frem til da hadde temperaturer og gjeld blitt representert ved hjelp av positive tall, gjennom begreper i språket. Begreper som gjeld og kuldegrader indikerte at tallene var negative, men i stede for å si at en hadde -100 kroner, sa man heller at en hadde 100 kroner i gjeld. Mye av årsaken til dette kan være at selv matematikerne slet i mange århundre med finne mening i de negative tallene, på grunn av at de forsøkte å knytte dem til konkreter og mengder (Whitacre et al., 2011). Whitacre et al. (2011) skriver at det var først når en betraktet tallene som abstrakte objekter at en kunne akseptere dem for fullt. En kan derfor si at fremveksten av abstrakt algebra ledet det matematiske samfunnet til å godta de negative tallene som fullverdige tall. Negative tall ble altså akseptert fordi de løste unike matematiske problemer, og ikke på grunn av hverdagslige problemer (Whitacre et al., 2011).

Et historisk tilbakeblikk viser at negative tall har skapt utfordringer i flere århundrer, selv for de mest kjente matematikerne opp gjennom tidene. Det er derfor ikke en overraskelse at temaet fortsetter å skape utfordringer for både lærere og elever. Med dette i bakhodet vil jeg videre gå dypere inn i de negative tallenes utfordringer. Hva er det som gjør negative tall så utfordrende?

2.2 Utfordringer med negative tall

Som nevnt innledningsvis viser tidligere forskning innen negative tall at temaet ofte kan skape store utfordringer for både elever og lærere (Gallardo, 2002; Vlassis, 2004, 2008; Whitacre et al., 2017; Bofferding et al., 2018). En av årsakene er at negative tall i motsetning til de naturlige tallene ikke kan representere visuelt og telles fysisk, de er kun abstrakte objekter. I skolematematikken er negative tall et av de første temaene elevene møter som ikke kan representeres fysisk. Dette medfører at elevene er nødt til å arbeide med abstrahering og uobserverbare matematiske objekter når de lærer om negative tall.

I dagens, og den kommende læreplan er ikke negative tall et eget separat fagområde, men inngår under temaet tall og algebra (Utdanningsdirektoratet, 2013; 2019). Negative tall vil derfor dukke opp innen ulike temaer i matematikk. I følge Kilhamn (2011) skaper negative tall også utfordringer når elever arbeider med algebra, likninger og desimaltall. Dette viser at elevenes forståelse for negative tall er et viktig grunnlag for at de skal lykkes innen flere temaer i matematikken. Av den grunn ønsker jeg derfor å se nærmere på typer utfordringene tidligere forskere har kommet frem til i sine studier om negative tall. Altiparmak & Özdoğan (2010) har i sin studie beskrevet tre kategorier av utfordringer knyttet til læring av negative tall. De tre kategoriene er; tallenes mengde og retning, betydningen av aritmetiske operasjoner og minustegnet ulike funksjoner. Jeg vil i den kommende delen utdype hva som kjennetegner utfordringer innen hver kategori.

2.2.1 Minustegnets funksjoner

Flere forskere som har studert konseptet negative tall har kommet frem til at minustegnet på flere måter skaper utfordringer for elevene (Gallardo & Rojano (1994; Vlassis, 2004; 2008). Gallardo og Rojano (1994) har kommet frem til at minustegnet ulike roller byr på utfordringer, og har i sin artikkel presenterer en tredeling av minustegnets ulike funksjoner. De deler minustegnet inn i unær funksjon, binær funksjon og symmetrisk funksjon. Med utgangspunkt i denne inndelingen har Vlassis (2008) videreutviklet en tabell for å tydeliggjøre minustegnets funksjoner i elementær algebra:

Ulike funksjoner	*Beskrivelse*	*Eksempeloppgaver*
Unær funksjon	Minustegnet indikerer at tallet det er knyttet til er negativt.	– 5 + ☐ = 2
Binær funksjon	Minustegnet indikerer operasjonen subtraksjon. Her representeres subtraksjonens handlinger som: ta bort, differansen og forflytte seg på en tallinje.	5 – 8 = ☐
Symmetrisk funksjon	Minustegnet indikerer en operasjon, men knyttes til tallets invers, også kjent som " å ta det motsatte av et tall".	Hvem er størst – – 4 eller – 4?

Tabell 2: Vlassis (2008) sin modell, med oppgaver hentet fra Lamb et al. (2012).

Mest relevant for denne studien vil være unære og binære funksjonen minustegnet har, jeg vil derfor ikke gå mer inn på den symmetriske funksjonen.

For å utdype betydningen mellom unær og binær funksjoner ønsker jeg å vise til eksempeloppgavene i tabellen. Oppgave – 5 + ☐ = 2, er et eksempel som får frem den unære funksjonen til minustegnet. Den unære funksjonen indikerer at tallet er negativt, og i denne oppgaven vil det si at minustegnet markerer at 5 er et negativt tall. Ser vi derimot på oppgave 5 – 8 = ☐, indikerer minustegnet operasjonen subtraksjon, altså den binære funksjonen. I denne oppgaven er minustegnet knyttet til en handling som å "ta bort" eller finne differansen mellom tallene. Fellestrekket for begge oppgavene er symbolet " – ", men symbolet har ulik rolle og betydning i oppgavene. Elever vil også møte på regnstykker der begge funksjonene oppstår i samme oppgave, der de er nødt til å forholde seg til to minustegn. En eksempeloppgave der elevene vil møte begge funksjonene i ett regnestykke er – 2 – 7 = ☐. I denne oppgaven har det første minustegnet en unær funksjon, som indikerer at 2 er et negativt tall, mens det andre minustegnet i oppgaven har den binære funksjonen, som er knyttet til operasjonen subtraksjon. Minustegnets ulike roller har derfor ført til at flere forskere antyder dette som en mulig årsak til at elevene opplever vanskeligheter med negative tall.

Vlassis (2008) har i sin studie funnet ut at de fleste elevene kun ser på minustegnet som en operasjon. Kun fokus på den binære funksjonen, medfører at det er vanskeligere for elevene å godta flere minustegn i ett og samme regnestykket, og når de kommer etter hverandre (Vlassis, 2008). For å gi større fokus til den unære funksjonen minustegnet har, har Ball (1993) gjennomført en studie der minustegnet som har den unære funksjonen er byttet ut med et annet symbol (^), for å gi mer oppmerksomhet til negative tall som tall, og ikke kun som en operasjon. Forskere mener derfor er det viktig å fokusere på begge funksjonene minustegnet har i innlæringen av negative tall (Gallardo & Rojano, 1994; Vlassis, 2004; 2008). Det norske språket kan også gjøre det utfordrende når det kommer til å skille mellom de ulike funksjonene, da vi benytter samme begrep. På norsk sier vi for eksempel minus tre, både når vi snakker om operasjonen, og det negative tallet. På engelsk benytter de "negative three" om det negative tallet, og "minus three" når de henviser vi operasjonen.

2.2.2 Aritmetiske operasjoner med negative tall

Heltall er et viktig og utfordrende emne i overgangen fra aritmetikk til algebra (Peled & Carraher, 2008). Elever starter med å lære om de positive heltallene, som kan beskrives som å være ganske intuitiv, fordi de kan telles og kvantifiseres. Når innlæringen av negative tall kommer, er det flere tidligere regler som blir motstridende. I følge den nåværende læreplanen skal elevene etter fjerde årstrinn kunne bruke negative tall i praktiske sammenhenger, og uttrykke tallstørrelser på varierte måter. Etter syvende årstrinn skal elevene kunne regne med negative tall, og plassere dem på en tallinje (Utdanningsdirektoratet, 2013). I den kommende læreplanen møter ikke elevene kompetansemål om negative tall før syvende årstrinn (Utdanningsdirektoratet, 2019). Flere forskere som har studert elevers læring rundt negative tall er kritiske til at innlæringen av negative tall kommer så sent, som for eksempel Peled og Carraher (2008), Bishop et al. (2014) og Bofferding et al. (2018). Forskerne påpeker at dette kan lede til at elevene danner misoppfatninger, som for eksempel at addisjon alltid vil føre til et større tall, mens subtraksjon alltid vil føre til et mindre tall, eller at en aldri kan subtrahere et større tall fra en mindre tall. Goldin og Shteingold (2001) skriver i sin studie at når elevene omsider lærer om negative tall er de nødt til å rive ned og rekonstruere sin kunnskap, da flere av de kjente regnereglene elevene har tillært seg ikke gjelder når de negative tallene blir introdusert. Vlassis (2004) påpeker i sin studie at egenskapene til de negative tallene vil kunne komme i strid med elevenes kunnskap om de naturlige tallene, og at elevene vil forsøke å tilpasse regning med negative tall til sine erfaringer fra de naturlige tallene. I de kommende avsnittene ønsker jeg derfor å se nærmere på to ulike aspekter rundt aritmetiske operasjoner med addisjon og subtraksjon. Jeg vil ikke gå inn på aritmetiske operasjoner rundt multiplikasjon og divisjon, da mitt datamateriale kun omhandler addisjon og subtraksjon med negative tall.

En av utfordringene når det kommer til regning med addisjon og subtraksjon med negative tall er koblingen flere elever gjør til tidligere erfaringer med de naturlige tallene. Prather og Alibali (2008) har i sin forskningsstudie sett nærmere på hvordan mennesker tilegner seg kunnskap om aritmetiske prinsipper med negative tall. En av fremgangsmåtene er å overføre prinsipper fra operasjoner med regning av positive tall til regning med negative tall. Bofferding og Wessmann-Enzinger (2017) har også sett på om elevers tidligere erfaringer påvirker løsningsstrategiene fra kjente regler fra de naturlige tallene. I en studie med elever fra ulike klassetrinn fant Bofferding og Wessmann-Enzinger (2017) flere likhetstrekk i resonneringene og løsningsstrategiene hos elevene, der reglene for de naturlige tallene ble overført til regning med negative tall. Bofferding og Wessmann-Enzinger (2017) viser til flere eksempler der elevene tar i bruk tidligere kunnskap for å løse oppgavene, som oppgavene (-6) – (-3) og (-6) – (-6). Flere elever løste oppgavene med å skrive 6 – 3 og 6 – 6, der de overser fortegnene og knytter regnestykke opp mot mengde. Også Bruno og Martinón (1999) utdyper i sin studie at elevers tidligere erfaringer påvirker elevenes løsningsstrategier, og at det derfor kreves en lang og grundig gjennomgang når negative tall skal introduseres. Et av lærernes fokus må derfor være på elevenes koblinger og assosiasjoner mellom positive og negative tall, og hjelpe elevene med å videreutvikle de nye reglene slik at de gir mening for elevene. I følge Bofferding og Wessmann-Enzinger (2017) kan dette hjelpe elevene med å unngå overgeneralisering av regler mellom de naturlige tallene og negative tall.

Som nevnt av Bruno og Martinón (1999) må elevene få en grundig gjennomgang når negative tall skal introduseres. Det holder ikke å lære seg ulike regneregler som "like tegn gir pluss" og "ulike tegn gir minus» eller "pluss og pluss blir pluss, minus og minus blir pluss, pluss og minus blir minus og minus og pluss blir minus" eller symbolske regneregler som:

- + (+) = +
- - (-) = +
- + (-) = -
- - (+) = -

Operasjoner med negative tall må læres med relasjonell forståelse. Relasjonell forståelse innebærer at elevene vet hvordan en skal bruke ulike metoder og regler, og samtidig forstå hvorfor de fungerer (Skemp, 1976). Med relasjonell forståelse vil mengden elevene må huske reduseres.

Kilhamn (2009) mener at der er vanskelig å konkretisere og illustrere regnereglene for addisjon og subtraksjon med negative tall i hverdagslige kontekster. Hun viser til temperatur som den mest brukte konteksten for å presentere negative tall i Sverige (Kilhamn, 2011). Med temperaturkontekster er det naturlig å vise til et termometer, som videre kan assosieres med en vertikal tallinje. Ut fra regnereglene kan addisjon av et negativt tall forstås som å være det samme som subtraksjon av et positivt tall, men dette lar seg ikke representeres på et termometer da temperaturen ikke kan stige med negative grader (Kilhamn, 2009). Hun viser til et eksempel 3 + (-2), som kan tolkes ut fra regnereglene til å bli 3-2. Dermed vil temperaturkontekst være meningsløst for addisjon av negative tall slik som a + (-b) = a – b. Utfordringer vil også dukke opp når en inkluderer subtraksjon med negative tall i temperaturkontekster (Kilhamn, 2009). Subtraksjon uttrykkes ofte som a – b, og kan forstås som forskjellen mellom a og b, eller som bevegelsen fra a til b. Forskjellen mellom to punkter på en linje, eller to temperaturer uttrykkes som oftest som absoluttverdi. Kilhamn (2009) illustrerer dette ved å vise til et eksempel med -4 og 6, forskjeller mellom disse to tallene uttrykkes ut fra absoluttverdien, altså 10 og ikke -10. I tillegg understreker Kilhamn (2009) gjennom eksemplet -4 og 6, at retningene vi betrakter regnestykkene vil avgjøre hvilket svar vi vil få, når en benytter subtraksjon. Regnestykket (-4) – 6 = (-10), vil indikere at temperaturen minker, mens 6 – (-4) = 10, vil indikere at temperaturer øker. Å tolke uttrykket fra 6 til -4, er ofte en "unaturlig" retning, fordi tallene leses som " fra minus 4 til 6". Retning er derfor identifisert som et kritisk trekk for å lære subtraksjon med negative tall (Kullberg, 2006, sitert i Kilhamn 2009, s. 21).

Aritmetiske operasjoner med negative tall kan være utfordrende for mange elever. Jeg har nå nevnt to aspekter ved addisjon og subtraksjon som kan skape utfordringer for elevene. Det første aspektet omhandler elevenes tidligere erfaringer med det naturlige tallene. Koblingene elevene gjør med positive tall vil ikke nødvendigvis stemme med operasjoner med negative tall. Viderefører elevene prinsippene for regning med naturlige tall til regning med negative tall, kan dette skape problemer for elevene. Det andre aspektet er knyttet opp mot regnereglene for addisjon og subtraksjon med negative tall, og hvor vanskelig det er å illustrere og konkretisere regnereglene ved hjelp av hverdagslige kontekster. Regnereglene for aritmetiske operasjoner med negative tall er så abstrakte, at det dermed blir en del regler elevene må pugge, da det er vanskelig å konkretisere og illustrere regnereglene.

2.2.3 Tallenes retning og mengde

I følge Ball (1993) består alle tall av to komponenter: mengde og retning. Begrepet mengde vil være lik begrepet absoluttverdi, og vil derfor danne den numeriske verdien til tallet uten hensyn til fortegnet (Kilhamn, 2011). Det vil si at mengden og absoluttverdien til -3 og 3 vil vær lik 3. Mengde og absoluttverdi kan defineres som avstanden til null eller origo på en tallinje (Kilhamn, 2011). Når det kommer til tallenes retning omhandler dette ordningen og rekkefølgen til tallene. Dette innebærer at tallenes plassering er avgjørende for størrelsen, for eksempel vil tall som er plassert lengre til venstre på en tallinje være mindre, enn tallene som er plassert lengre til høyre på en tallinje. Både positive og negative tall innehar mengde og retning, men for de positive heltallene peker begge begrepene på det samme. Her vil retning og mengde samsvare med hverandre, for en bevegelse mot høyre på en tallinje vil alltid indikere at tallet blir større, mens en bevegelse mot venstre viser at tallet minker. Et eksempel vil være hvis vi beveger oss til høyre på tallinjen, fra 3 til 5. Her vil tallet bli større og mengden vil øke. Beveger vi oss til venstre, fra 5 til 3, vil mengden minske og tallet blir mindre. Når det kommer til de negative tallene vil de to begrepene være avvikende. En bevegelse til høyre på en tallinje vil indikere at tallet blir større, men mengden blir da mindre. Beveger vi oss derimot til venstre på tallinjen vil mengden øke, men tallet blir mindre. For å utdype dette ønsker jeg å benytte et eksempel: -3 kan ses på som mengden 3, i hverdagssituasjoner benytter vi ulike begreper fra språket for å tydeliggjøre om tallet en negativt, som gjeld og kuldegrader. I en hverdagssituasjon blir -3 sett på som 3 kroner i gjeld. Men som de positive tallene innehar også de negative tallene retning og har en plassering i en tallrekke eller på en tallinje. Ved å sammenligne to ulike tall kan en derfor få forskjellige resultat avhengig om en ser på retningen til tallet eller mengden. Argumenterer en for mengden til -3, kan en si at -3 er mindre enn -5, fordi 3 kroner i gjeld er mindre enn å ha 5 kroner i gjeld. Argumenterer en derimot for retningene til tallene vil -3 være lengre til høyre på tallinjen, og -5 være lengre til venstre på tallinjen. Noe som vil indikere at -5 er et mindre tall enn -3. Altiparmak & Özdoğan (2010) skriver at det er helt avgjørende å kunne tolke tallenes retning og mengde, og viser til at dette er et av de viktigste stegene for læring av negative tall. En annen matematikkforsker som understreker viktigheten ved tallenes mengde og retninger er Ball (1993), som påpeker at det er avgjørende for elevene å kjenne til denne todelingen for å forstå de negative tallene. Ball (1993, s.379) skriver at hjerte til å forstå negative tall er evnen til å forstå at -5 i en forstand er mer enn -1, men i en annen forstand er mindre enn -1.

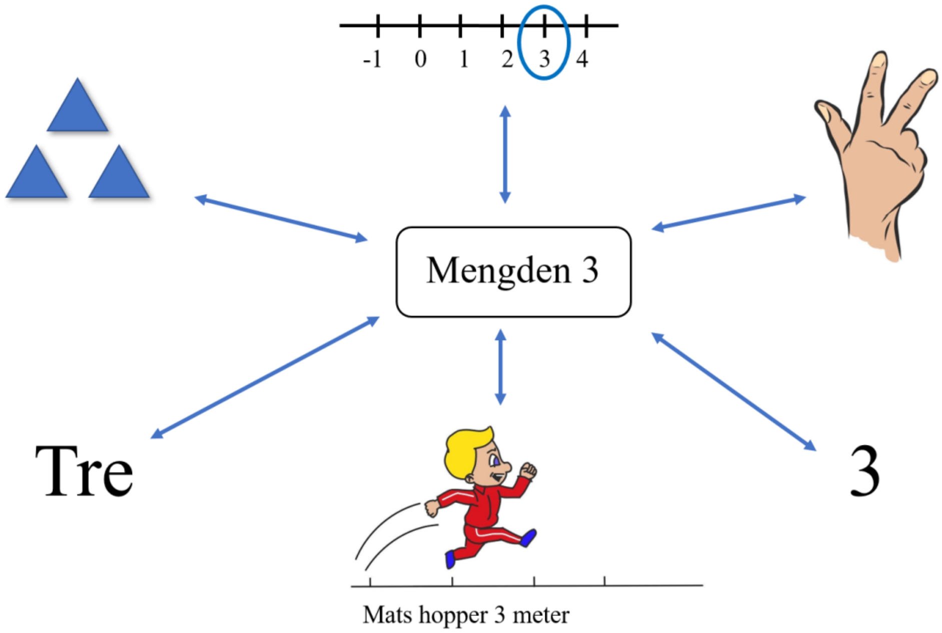
Utfordringen som er beskrevet i avsnittet over er det flere studier som viser til (Bofferding, 2010; Bofferding, 2018; Bishop et al., 2014). I følge Bofferding (2010; 2018) skaper utfordringene med mengde og retning med negative tall også problemer for elevene når de arbeider med addisjon og subtraksjon av negative tall. I artiklene viser hun til flere regnestykker der elevene er usikre på hvilken vei på tallinjen elevene skal flytte. Et av eksempel hun trekker frem er -4 + 5=. Opererer en kun med positive heltall resulterer addisjon av to tall at summen blir større enn begge addendene, og en vil alltid bevege seg mot høyre på tallinjen (Bofferding, 2010). Inneholder regnestykke derimot negative tall som -4 + 5 =, vil noen elever oppleve utfordringer knyttet til egenskapene til tallenes mengde og retning. Adderer en et mindre positivt tall til et større negativt tall, vil resultatet gi et større tall lengre til høyre på tallinjen, men absoluttverdien vil bli mindre. Når det kommer til subtraksjon vil det motsatte skje. Ved positive heltall vil subtraksjon medføre bevegelse mot høyre, altså tallet blir mindre, samt mengden vil også bli minket. Subtraherer en med negative tall vil absoluttverdien, altså mengden øke, men bevegelsen vil gå i retning venstre, noe som indikerer at tallet blir mindre. Dette viser at egenskapene til tallenes mengde og retning vil skape utfordringer for elever som ikke har forståelsen for de to ulike komponentene i arbeid med addisjon og subtraksjon med negative tall.

Oppdelingen av tallenes komponenter har også Bishop et al. (2014) skrevet en artikkel om. I artikkelen vises det til to andre begreper, kardinalitet og ordinalitet, som opprinnelig benyttes i forbindelse med positive heltall, men som de utvider i sin studie til også å gjelde for negative tall (Bishop et al., 2014). Opprinnelig presenterer de en tredeling av tallsynet, kardinalitet, ordinalitet og formalt, der de poengterer at alle tallsynene er nødvendige for å kunne resonnere med tall på en tilstrekkelig måte. I denne studien vil jeg kun gå inn på kardinalitet og ordinalitet, da fokuset mitt rundt datamaterialet gjelder kun disse to kategoriene. En kardinal forståelse av tall innebærer å fokusere på mengden, altså antall objekter som representeres. Det vil si en tellbar mengde, som ofte blir knyttet opp til nummerering, telling og ideen av en mengde (Bishop et al., 2014). Begreper som å ha, miste og skylde uttrykker en kardinal forståelse. En ordinal forståelse av tall forbindes med retningen og rekkefølgen, og ikke opp mot en tellbar mengde (Bishop et al., 2014). En kan dermed si at en ordinal forståelse er en ordning av tallene, og et grunnprinsipp for tallinjen. Uttrykk som høyre, venstre, over, under, større, mindre, før og etter er begreper som ofte benyttes når en begrunner eller resonnerer med ordinal forståelse. Ut i fra Bishop et al. (2014) sine definisjoner kan en si at kardinalitet sammenfaller med begrepet mengde, mens ordinalitet rettes mot begrepet retning. Det er viktig å understreke at kardinalitet og ordinalitet ikke er to adskilte måter å se tallene på, at en behøver begge tallsynene, og at den ene metoden ikke er bedre enn den andre (Bishop et al., 2014). Det er derfor viktig at elevene får muligheten til å lære å resonnere med både kardinal og ordinal tallsyn når det kommer til læring av negative tall.

Whitacre et al. (2017) skriver at både resonnering med mengde og retningen kan støtte elevenes løsninger når de arbeider med heltall. De beskriver at modellene og konteksten som benyttes er avgjørende, og viser til sin studie om positive og negative dager for å gi mening til resonnering med mengde (Whitacre, Bishop, Lamb, Philipp, Schappelle & Lewis, 2012). I artikkelen forklarer Whitacre et al. (2012) at positive dager kan ses på som positive tall, og at negative dager kan representere de negative tallene. Videre påpeker de at konteksten for å resonnere med mengden er viktig. Wilcox (2008) argumenterer derimot for at resonnering med retning gir elevene større fordeler, og viser til at resonnering rundt tallenes retning på en tallinje, vil gi større fordeler når elevene arbeider med tall til venstre for null på en tallinje. Wilcox (2008) påpeker i tillegg at resonnering med mengde kan skape en barriere for elevene i arbeid med heltall, fordi det ikke finnes noe mengde mindre enn null. Forskere er altså uenige når det kommer til resonneringer med fokus på mengde, men enige om at konteksten som brukes i arbeid med negative tall er viktig.

2.3 Representasjoner

I følge Duval (2006) kan matematiske objekter beskriver som abstrakte, ikke-fysiske og uobserverbare, og eneste tilgangen vi har til dem er gjennom representasjoner. For å kunne uttrykke og kommunisere matematiske ideer, er vi nødt til å benytte oss av ulike representasjoner. Noen representasjoner er vanlig i all slags tenkning, som for eksempel det skriftlige og muntlige språket, der andre er mer spesifikke for matematikken, som algebraisk notasjon, enkelte symboler og figurer. For å bevare, dele og utvikle matematiske tanker og ideer er vi avhengig av ulike representasjoner, og et matematisk objekt kan ha flere forskjellige representasjoner. For å illustrere dette har jeg laget et eksempel med mengden 3:



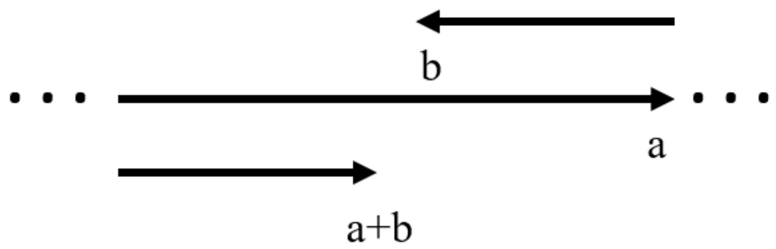
Figur 1: Ulike representasjoner av mengden 3.

Når elever skal introduseres for abstrakte begreper med negative tall, vil de merke at de negative tallene ikke kan representeres som fysiske objekter, slik de positive heltallene kan. Negative tall er abstrakte, og vi har ikke taktile representasjoner for å illustrere dem. Derfor må elevene lage seg mentale, visuelle eller skriftlige representasjoner for de negative tallene (Manchester, 2011). Mange lærebøker bruker visuelle representasjoner som tallinje, en skala, en tidslinje eller representasjoner fra hverdagen som temperaturer og penger for å forklare negative tall. Ofte blir slike representasjoner referert til som modeller (Kilhamn, 2011). I denne studien har jeg valgt å fokusere på representasjoner i form av modeller.

Når det kommer til bruk av modeller for å representere addisjon og subtraksjon med negative tall er flere forskere uenig rundt hvilke representasjoner som bør benyttes (Kilhamn, 2009). Ball (1993) skriver i sin studie at ingen representasjoner omfavner alle aspektene av en ide, og ikke alle er like brukervennlige. Videre påpeker Ball (1993) at lærere må analysere representasjonene som benyttes, slik at de er klar over de kritiske momentene med bruk av representasjonen. I tillegg må lærene finn ut hvordan representasjonene kan brukes hensiktsmessig (Ball, 1993). Kilborn (1979) mener derimot at bruken av flere ulike modeller vil forvirre elevene mer enn de er til hjelp (referert i Kilham, 2011). Linchevski og Williams (1999) argumenterer for å ikke bruke modeller som representasjoner for negative tall, unntaket kan være når elevene skal lære om subtraksjon av negative tall. Mens Gallardo (1995) foreslår bruken av diskrete modeller for innlæringen av negative tall, der heltall representerer objekter, fremfor bruken av tallinje. Bruno og Martinón (1999) mener derimot at tallinje absolutt er nødvendig verktøy for bruk av additive problemer med subtraksjon.

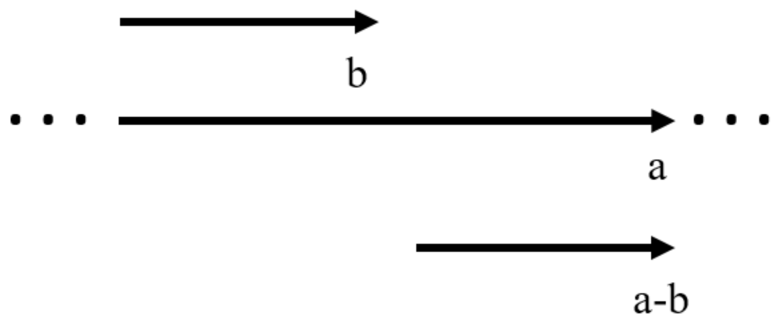
Utdanningsdirektoratet presisere bruken av tallinje som representasjon for regning med negative tall, og jeg ønsker derfor å se nærmere på tallinjen. En tallinje kan presenteres visuelt, men også mentalt. Fisher og Rottmann (2005) har i sin studie gjort funn som indikerer at alle mennesker innehar en mental tallinje som sorterer lave tall til venstre og høye tall til høyre på tallinjen. Når det kommer til negative tall fant Fisher og Rottmann (2005) at de fleste knyttet de negative tallene til venstre på den mentale tallinjen. Likevel påpekes det i studien at resultateten for de negative tallene var mer varierende enn med positive tall, noe som kan indikere at negative tall prosesseres forskjellig (Fisher & Rottmann, 2005). En annen som har forsket på modeller som representasjoner for negative tall er Freudenthal (2002), som skiller mellom gamle og nye modeller. Med gamle modeller viser han til hverdagskontekster som penger og temperaturer, samt spill hvor en taper og vinner og trappegåing (Freudenthal, 2002). Der alle de "gamle" modellene kan illustreres med tallinje. Med disse eksemplene mener (Freudenthal, 2002) at de negative tallene får en passiv rolle, der han viser til at flere av oppgavene kan løses uten bruk av negative tall. Freudenthal (2002) mener at modellene som brukes må skape en likeverdig rolle for de positive og negative tallene, og foreslår derfor to "nye" modeller. Den første modellen Freudenthal (2002) henviser til er hentet fra kinesisk matematikk fra rundt 250 år før vår tidsregning, og omhandler røde og svarte klosser. I denne modellen representerer de svarte klossene negative tall, mens de røde representerer de positive tallene. Her vil en sort og en rød klosse annullere hverandre. Freudenthal (2002) skriver at modellen vil gi mening både med addisjon og subtraksjon med negative og positive tall. Ved addisjon av positive tall legges det til x-antall røde klosser, mens addisjon av negative tall tilføres x-antall svarte klosser. Når det gjelder subtraksjon av positive tall, fjernes x-antall røde klosser, og subtraksjon med negative tall vil en ta bort x-antall svarte klosser. Om en ikke skulle ha igjen nok klosser til å fjerne ønsket antall, legges det til tilsvarende like røde og svarte klosser som mangler, for å få regnestykket til å gå opp.

Den andre nye representasjonen Freudenthal (2002) viser til er en tallinjemodell med bruk av piler, eller vektorer. Her representerer en pil som peker til høyre et positive tall, og en pil som peker til venstre viser et negativt tall. For å illustrere addisjon med denne modellen, viser Freudenthal (2002) til en figur, se figur 2. I figuren er a et positivt tall og b et negativt tall. For å representere addisjon av a og b, legges enden av b til pilspissen til a. Lengden av a som ikke berøres av b vil være svaret når en adderer a og b.



Figur 2: Addisjon med tallinjemodellen. Figuren er hentet fra Freudenthal (2002, s. 442).

Freundethal (2002) viser også hvordan subtraksjon med denne modellen fungerer, se figur 3. I figur 3 er a og b positive tall. Enden av b skal starte ved enden av a, og den lengden av a som ikke berøres vil da være svaret når en subtraherer b fra a.



Figur 3: Subtraksjon med tallinjemodellen. Hentet fra Freudenthal (2002, s.442).

I begge modellene til Freudenthal (2002) kommer minustegnets unære og binære funksjon frem. I klossemodellen kommer den unære funksjonen frem gjennom svarte klosser, mens den binære funksjonen markeres ved å ta bort klosser. I tallinjemodellen vil pilens retning mot venstre indikere den unære funksjonen, og avstanden som ikke berøres av de to pilene vil vise den binære funksjonen. Selv om begge modellene tydeliggjør minustegnets funksjoner, og viser hvordan addisjon og subtraksjon kan gjennomføres med positive og negative tall, inneholder tallinjemodellen en del prosedyrer som må huskes for at modellen skal være til hjelp. Tallinjemodellen vil derfor kreve mye tid i innlæringsprosessen, og elevene må huske alle prosessene og hva de står for, for å kunne utføre riktig operasjon. Utfordringen jeg ser med klossemodellen er at den kun representerer negative tall med mengde, noe som kan være vanskelig for elevene å fatte, spesielt elever som sliter med å forstå at negative talls retning og mengde er avvikende fra hverandre.

Matematiske modeller elever benytter i forklaringer og utregninger av oppgaver kan tydeliggjøre hvilket tallsyn de støtter seg til. Kardinale modeller, er representasjoner som er knyttet til mengde, og typiske modeller som viser kardinal forståelse er klossemodellen til Freudenthal (2002), hverdagskontekster med penger og andre kontekster som omhandler objekter. Ordinale modeller bygger på, og representerer tallenes rekkefølge, og ordningen av tallene er styrende for modellen. Tallinjer er modeller som tar utgangspunkt i tallenes retning og avstand, og er en ordinal modell. Andre representasjoner som viser ordinal forståelse er kontekster knyttet til temperatur, heis mellom etasjene og trappegåing. Når det kommer til å telle på fingrene, kan dette både vise en kardinal og en ordinal forståelse. Bruker elever fingrene til å holde styr på en tallrekke, som en, to, tre, fire, fem…, kan det tyde på at elevene har en ordinal forståelse. Teller de derimot en finger, to fingre, tre fingre og så videre viser dette en kardinal forståelse, da de refererer til fingrene som mengder.

3 Metodekapittel

I metodekapittelet vil jeg redegjøre for valgene som er tatt før, underveis og i etterkant av innsamlingen av datamaterialet. Jeg vil begrunne valg av forskningsmetode, innsamlingsmetode, bearbeidelsen av datamaterialet og hvordan kodingen og kategoriseringen som analysemetode ble gjennomført. Avslutningsvis i dette kapittelet vil jeg drøfte studiens pålitelighet, metodekritikk og etiske betraktninger.

3.1 Kvalitativ forskningsmetode

Hvilken forskningsmetode som skal benyttes avhenger blant annet av hva en ønsker å finne ut. Det er ingen metoder som er perfekt, men ut i fra hvilket forskningsfokus man har kan en snevre inn metodevalget. Valg av metode er gjort på bakgrunn av problemstillingen, og hvordan jeg på best mulig måte kan besvares. Jeg har derfor valgt å gjennomføre en kvalitativ studie. I følge Tjora (2012) innebærer en kvalitativ studie å fokusere på forståelsen, nærheten til forskningsdeltakerne, tekstbasert data fremfor tallbasert, og ofte bruk av induktiv fremgangsmåte. Videre skriver Tjora (2012) at kvalitative studier ofte fokuserer på å tolke, og på deltakerens opplevelse og meningsdanning, og hva slags konsekvenser meningene har. Sentrale kjennetegn ved en kvalitativ forskningsmetode er at forskeren går i dybden innen et smalt felt og konsentrerer seg om et mindre antall forskningsobjekter, fremfor hva en gjør med kvantitativ forskningsmetode. Med en kvalitativ forskningsmetode kunne jeg som forsker undersøke en liten gruppe elevers utfordringer ved å gå i dybden på deres verbale og skriftlige besvarelser, for bedre å forstå hva de har gjort og tenkt. Postholm (2010) skriver at forskerens mål med bruk av kvalitativ forskningsmetode er å danne seg et mer helhetlig bilde av deltakerens perspektiver i temaet som studeres. Ved bruk av oppgaveløsning og samtaler fikk jeg muligheten til å studere hva elevene sa og gjorde, slik at jeg kunne få et mer helhetlig bilde av utfordringene elevene hadde i arbeid med negative tall.

Postholm og Jacobsen (2018) forklarer at kvalitativ forskningsmetode kan være ressurskrevende, og at datamaterialet må begrenses for at det ikke skal bli for komplekst og omfattende. For å avgrense datamaterialet slik at jeg hadde muligheten til å gå i dybden på elevbesvarelsene valgte jeg å intervjue fire grupper med to elever i hver gruppe, i omtrent en halv time. Med kun åtte elever i studien vil resultatene fra min forskning kun være representativ for seg selv, og ikke for hele befolkningen (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Funnene i min forskning sier noe om hvilke utfordringer noen 4.klassinger har i arbeid med aritmetikkoppgaver som inneholder negative tall. Siden utvalget som forskes på er begrenset, og ikke er representativt for alle 4.klassinger kan ikke funnene i denne studien generaliseres. I stede for generalisering kan en snakke om studiens overførbarhet. I følge Fangen (2010) dreier dette om tolkningene, beskrivelsene og forklaringen av funnene kan overføres til å gjelde lignende sammenhenger. Når det er sagt kan mitt forskningsprosjekt gi meg og andre lærere forståelse for utfordringer elever kan møte på, og hvordan vi som lærere kan arbeide med å unngå eller tilpasse for elevene som møter ulike utfordringer innen temaet negative tall.

Cohen et al.(2011 s. 409 og s.456) skriver at både intervju og observasjon som datainnsamlingsmetode er hyppig brukt innenfor kvalitativ forskning. Ut i fra mitt forskningsfokus på utfordringer i arbeid med negative tall ble det derfor naturlig å ha en samtale med elevene om hva de gjorde, og hvordan de hadde tenkt. Gjennom elevforklaringer kan en få et innblikk i hvilke metoder og strategier elevene benyttet seg av, noe som kan bidra til dypere innsikt i utfordringene elevene måtte ha. Jeg valgte derfor et oppgavebasert intervju som metode for datainnsamling. Årsaken til intervju som valg av metode er fordi intervju gir meg som forsker flere alternativ til å være med på elevenes tankeprosesser enn andre metoder. Med intervju har en også mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål til elevenes forklaringer og utfordre elevenes tanker og påstander der og da. Det å ha muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål kunne gi meg som forsker større innsikt i elevenes utfordringer. Flere forskere har beskrevet inndelingen av ulike typer intervju, Postholm & Jacobsen (2018) deler intervju inn i tre ulike former: det ustrukturerte, det semistrukturerte og det strukturerte. Greig, Taylor & MacKay (2013) har også delt inn ulike typer intervjuer ut fra grad av struktur. Formen for intervju som ble benyttet i denne studien kan klassifiseres som et semistrukturert intervju, noe som også er det vanligste formen for intervju (Grieg et al., 2013). Det som gjør mitt intervju til et semistrukturert intervju er at spørsmålene i stor grad var bestemt på forhånd, samtidig som jeg hadde muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål der jeg trengte, og i tillegg kunne jeg spille videre på elevuttalelser som jeg fant interessant. Jeg hadde en tydelig plan med intervjuet, noe som forsikret meg om at intervjuene ble tilnærmet lik for alle elevene som deltok i denne studien, da jeg fulgte en intervjuguide som ble laget på forhånd (se vedlegg 3). Selv om intervjuet hadde en tydelig hensikt var det fremdeles rom for at både elevene og jeg kunne utforske noen emner mer nøye og muligheten for å stille spørsmål begge veiene var åpen. En annen årsak til at jeg valgte å gjennomføre et semistrukturert intervju var fordi jeg ønsket at intervjuene skulle bli noenlunde like for alle elevene som deltok i studien, dette ville gi meg som forsker et bedre utgangspunkt når jeg skulle sammenligne og kategorisere elevbesvarelsene i analysedelen, enn hva et ustrukturert intervju hadde gjort.

3.2 Pilotundersøkelse

Jeg valgte å gjennomføre en pilotstudie før jeg gikk i gang med datainnsamlingen. Jeg hadde tre mål med gjennomføringen av pilotundersøkelsen, det første var å finne ut om oppgavene passet med nivået hos elever på 4. trinn, det andre var om spørsmålene jeg stilte var forståelig for elevene og det siste jeg ønsket å finne ut av var om besvarelsene elevene kom med passet til min problemstilling. Pilotstudien ble gjennomført med fire elever fra 4. trinn på samme skole hvor datainnsamlingen skulle skje, men elevene i pilotprosjektet gikk ikke i samme klasse med informantene som skulle delta i selve datainnsamlingen. Elevene ble valgt ut av læreren og ble beskrevet som gjennomsnittlig i matematikk. Jeg intervjuet to og to elever, der de fikk arbeide med en oppgave før vi hadde en samtale rundt oppgaven. Elevene jobbe med ti ulike oppgaver, og i mellom alle oppgavene hadde jeg noen spørsmål som elevene besvarte.

Utfallet av min pilotstudie gav meg mye informasjon, noe som medførte at det ble en del endringer før selve datainnsamlingen skulle gjennomføres. Det første målet med pilotundersøkelsen var å se om oppgavene var tilpasset nivået en kan forvente av 4.trinnselever. Jeg ønsket ikke at oppgavene skulle være for enkle, men heller ikke for vanskelige for elevene. Etter undersøkelsen kom det derimot frem av nivået på oppgavene passet elevene godt, og at tre av oppgavetypene gav meg utfyllende informasjon. Derfor valgte jeg å kutte ned en av de to oppgavene som gav meg lite informasjon og heller tilføre en annen type oppgave. Den oppgaven som ikke ble kuttet ut valgte jeg å ha som oppvarmingsøvelse for informantene i datainnsamlingen. Det andre målet med pilotprosjektet var å finne ut om spørsmålene jeg stilte skapte en diskusjon eller samtale mellom elevene. De fleste spørsmålene som ble stilt besvarte elevene godt, men jeg ble i tillegg gjort oppmerksom på noen oppfølgingsspørsmål som flere av elevene trengte for å gi utfyllende svar. Dermed ble noen av spørsmålene fra undersøkelsen endret til mer utfyllende eller konkrete spørsmål til selve datainnsamlingen. Eksempel på dette var når elevene tegnet tallinjer i sine besvarelser, men ikke tok med dette i sin verbale forklaring. Det siste målet mitt med pilotundersøkelsen var å se om elevbesvarelsene passet til mitt forskningsfokus. For å finne ut av dette valgte jeg å kategorisere svarene til elevene og gjennomføre en enkel og overfladisk analyse. Med bakgrunn i min enkle analyse så jeg at det var muligheter å danne kategorier som samsvarte med tidligere forskning innen emnet. Denne tilbakemeldingen gav meg tryggheten jeg trengte før jeg gikk i gang med datainnsamlingen.

3.3 Datainnsamling

Som tidligere nevnt kjennetegnes kvalitative studier at innsamlingen av datamaterialet foregår med et begrenset antall personer. Datainnsamlingen til denne masteroppgaven ble gjennomført på én skole i Trondheim, med totalt åtte elever fra 4. trinn. Skolen og elevene ble valgt gjennom bekvemmelighetsvalg, det vil si at utvalget ble gjort på bakgrunn av hvilke deltakere jeg hadde lett tilgang til (Tjora, 2012). Jeg hadde kjennskap til skolen og flere av kontaktlærerne på trinnet, noe som ga meg som forsker fleksibilitet. Fleksibiliteten medførte at det var mulighet for at datainnsamlingen kunne skje over flere dager, samt mulighet til å komme tilbake hvis behovet var der. Når det kommer til utvelgelsen av informanter er det flere faktorer som kan påvirke. Cohen et al. (2011) skriver at hensikten, egenskapene det forskes på, og tiden som er satt til rådighet er avgjørende. Valget av antall deltakere ble foretatt ut i fra to aspekter. Det første jeg måtte vurdere var hvor mange informanter jeg trengte for å få et bredere svar på forskningsspørsmålet, ikke for få, men heller ikke for mange. Det andre jeg måtte ta hensyn til var kapasiteten, tiden jeg hadde til rådighet. Hvor stort datamaterielat kunne jeg håndtere og bearbeide med tanke på tiden jeg hadde. Antallet informanter ble derfor åtte, et stort nok utvalg til å besvare forskningsspørsmålet, og innenfor min kapasitet når det kom til tid og bearbeidelse.

Før datainnsamlingen startet sendte jeg ut samtykkeskjema til alle foresatte i den ene klassen. Her ble foresatte informert om frivillig deltakelse i studien, og muligheten for å trekke seg til en hver tid om ønskelig. Jeg fikk god respons på deltakelse, så valget av informanter ble tatt av kontaktlærer. Bakgrunnen for utvelgelsen var at elevene var på bredt spekter når det kommer til kompetansenivå, og at elevene var komfortable med å forklare fremgangsmåten sin, og delta i en matematisk diskusjon. Alle elevene som deltok i denne studien har fått pseudonymer i alfabetisk rekkefølge, der A viser til den første deltakeren og H betegner den siste deltakeren. Navnene til deltakerne er altså anonymisert, men kjønnet er bevart. Pseudonymene til elevene er: Anna, Birk, Carl, Daniel, Erik, Frida, Guro og Henrik.

Tjora (2012) skriver at det er hensiktsmessig å velge et sted hvor elevene føler seg trygge, når de skal delta i forskning. Derfor ble alle intervjuene gjennomført på et grupperom i nærheten av klasserommet. Elevene ble tatt ut av ordinær undervisning, men jeg passet på at ingen av elevene mistet hverken matpause eller noen friminutt. Eder og Fingerson (2001) påpeker at maktforholdet mellom den som intervjuer og informantene er mindre tydelig hvis intervjuene gjennomføres i grupper. Cohen et al. (2011) skriver at gruppeintervjuer egner seg godt når en skal intervjue barn, og at gruppeintervjuer med barn kan skape en mer naturlig samtale, og elevene vil snakke mer fritt. Eder og Fingerson (2001) mener at en mer naturlig samtale vil gi mer valide resultater. Alle intervjuene til min datainnsamling ble gjennomført som grupper. Jeg gjennomførte fire gruppeintervjuer med totalt åtte elever, med to elever i hver gruppe. En annen fordel med å benytte seg av gruppeintervjuer er at elevene kan utfordre hverandre, og hjelpe hverandre når de deltar i en felles samtale. En felles dialog kan føre til at svarene går mer i dybden enn hva det ville gjort med individuelle intervju (Cohen et al. 2011). Men en ulempe med gruppeintervjuer kan være at elevenes svar påvirkes av hverandre. Derfor valgte jeg å gjennomføre små gruppeintervju der to og to elever deltok samtidig, slik at det var enklere for meg som forsker å ha kontroll over hvem som fikk forklare seg først. En annen faktor som kan påvirke intervjuer med barn er varigheten på intervjuene (Cohen et al. 2011). Jeg hadde bestemt meg på forhånd om å avbryte intervjuene hvis elevene ble ukonsentrerte og urolige, noe jeg slapp å gjøre. I gjennomsnitt varte mine intervjuer i omtrent 30 minutter.

Innsamlingen av datamaterialet ble innhentet i november 2019, omtrent tre måneder etter at elevene for første gang hadde blitt introdusert for negative tall i skoleundervisning. Som tidligere nevnt gikk alle elevene i samme klasse, så samtlige elever hadde fått lik undervisning i emnet. Alle informantene i denne studien fikk totalt ti oppgaver de skulle besvare individuelt. I korte trekk omhandlet oppgavene sortering og sammenligning av heltall, addisjon og subtraksjonsoppgaver med negative tall og to tekstoppgaver. De fikk kun se en oppgave omgangen, og resten av oppgavene var ikke synlige for elevene. Før elevene fikk starte arbeidet forsikret jeg meg om at elevene hadde forstått hva de skulle gjøre, og kom det en oppgave elevene ikke klarte å svare på leste jeg oppgaven en gang til. Alle oppgavene som hadde tekst ble lest opp før elevene fikk begynne arbeidet. Se Tabell 2 for en oversikt over oppgavene elevene fikk i denne undersøkelsen. Når begge elevene hadde besvart en oppgave, hadde vi en samtale rett etterpå om hvordan de hadde løst oppgaven. Samtaler ble gjennomført mellom hver oppgave. Årsaken til at jeg ønsker å prate med elevene rett etter at de hadde løst oppgaven var fordi de bedre skulle huske hvordan de hadde gått frem for å løse oppgaven. To av oppgavene som elevene skulle løse inneholdt en rute der svaret skulle fylles inn. Begge disse oppgavene ble lest opp for alle elevene. Oppgave 4 ble lest opp som: minus tre pluss ett tall er lik seks, og oppgave 5 ble lest opp som: ett tall pluss fem er lik tre. Hensikten med å lese opp akkurat de to oppgavene var fordi denne oppgavetypen var noe mer ukjent enn de andre oppgavene elevene har arbeidet med tidligere. De fleste av oppgavene i denne studien er hentet fra tidligere forskning om negative tall, og resten har jeg selv laget på bakgrunn av teori. Alle oppgavene elevene fikk er sammenlignet med oppgaver fra læreverket klassen brukte i innlæringsperioden, fordi jeg ikke ønsket nye oppgavetyper som elevene var fremmed for. Oppgave 4 og 5 er oppgavetyper elevene hadde noe, men lite erfaring med på forhånd.

En del av forskningsfokuset mitt i denne studien er å se hvilke representasjoner elevene benyttet i arbeid med negative tall. Jeg ønsket å se om elevene selv konstruerte eller tok i bruk kjente representasjoner som hjelp for å løse oppgavene. Jeg hadde derfor ikke med noen hjelpemidler som elevene kunne ta i bruk under oppgaveløsningen. Før datainnsamlingen startet vurderte jeg å ha med noen tallinjer, røde og svarte klosser elevene kunne benytte seg av, men konkluderte med at dette kunne være veiledende for resultatet.

Oppgavenummer	**Oppgaver**
Oppgave 1	Sorter tallene fra minst til størst: -4 3 2 7 -5 -8
Oppgave 2	4 – 5 =
Oppgave 3	-5 – 6 =
Oppgave 4	-3 + ☐ = 3
Oppgave 5	☐ + 5 = 3
Oppgave 6	6 – 9 =
Oppgave 7	-2 – 4 =
Oppgave 8	Skriv >, < eller = 3 -3 -4 -2 -7 3 2 -9 -5 -6 -5 -100
Oppgave 9	I Trondheim er det -9 ℃. Temperaturen stiger med fire grader. Hva er temperaturen i Trondheim?
Oppgave 10	I Tromsø er det -11 grader. Temperaturen synker med fire grader. Hva er temperaturen i Tromsø nå?

Tabell 2: Oppgavene elevene arbeidet med i min studie.

3.4 Analysemetoder

Postholm (2010) skriver at analysen ikke er en avgrenset del av forskningsprosessen, men foregår parallelt med datainnsamlingen. En del av analysearbeidet er å skrive intervjuguide, gjennomføre intervjuer, transkribere samtaler, kategorisere og kode datamaterialet. Dataanalysen kan beskrives som en prosess hvor helheten blir delt opp i mindre deler (Kvale & Brinkmann, 2015). Som forsker forsøker man å skape sammenhenger og meninger av helheten ved å se på de ulike bitene av prosessen. Videre i dette kapittelet vil jeg se nærmere på det innsamlede datamaterialet mitt gjennom transkribering, koding og kategorisering.

Under innsamlingen av datamaterialet tok jeg lydopptak av samtalene og noterte ned interessante observasjoner på et observasjonsnotat. Lydopptakeren ble plassert midt mellom meg og deltakerne for å sikre så god lydkvalitet som mulig. På forhånd hadde jeg forklart elevene om lydopptakeren, og hvorfor jeg trengte å ta opp samtalen mellom oss.

I tillegg opplyste jeg elevene om at jeg kom til å notere ned stikkord underveis mens de jobbet og når vi snakket. Jeg ga denne informasjonen til elevene slik at de var forberedt på forhånd, for at de i minst mulig grad skulle blir distrahert av meg. Når det kommer til bruken av lydopptaker mister man det visuelle og ikke-verbale aspektet ved samtalen (Cohen et al. 2011). For å dekke opp for dette, hadde jeg med et observasjonsnotat. På observasjonsnotatet noterte jeg interessante observasjoner, som for eksempel lengre tenkepauser, tegninger av tallinjer eller om elevene brukte fingrene for å telle. Tok elevene med det samme jeg hadde lagt merke til i sin forklaring, unngikk jeg å stille spørsmål om observasjonen. Unngikk elevene å ha med observasjonene jeg hadde lagt merke til i forklaringen, valgte jeg å følge opp med et spørsmål. Spørsmål som dette kunne være; her ser jeg at du tegnet en tallinje, hvordan brukte du denne eller hvorfor tegnet du en tallinje når du løste oppgaven. Grunnlaget for mitt datamateriale er derfor lydopptakene og transkripsjonene fra samtalen, observasjonsnotatet mitt og elevbesvarelsene.

Transkribere betyr å skifte fra en form til en annen, i denne sammenhengen er det oversettelse fra talespråk til skriftspråk. Jeg valgte å gjennomføre ett intervju hver dag, da kunne jeg med en gang intervjuene var ferdige starte med transkripsjonen. Å transkribere intervjuet kort tid etter selve gjennomføringen kan bidra til lettere å huske episoder som kan være oppklarende, eller ha stor betydning for innholdet (Kvale & Brinkmann, 2015). Likevel kan aldri en transkripsjon bli helt fullstendig for informasjon som formidles gjennom muntlig tale (Kvale & Brinkmann, 2015). Fangen (2010) skriver at transkripsjonsprosessen har to fremgangsmåter. En kan enten skrive ned hver minste lyd, markere alle pauser og stotringene som kommer frem i intervjuene, eller en kan redigere bort uviktige lyder og småord, samt skriv om ufullstendige setninger og fjerne dialektord. Jeg gikk for den siste metoden, da jeg ikke finner det hensiktsmessig å notere ned hver minste detalj, for å få frem utfordringer elever har i arbeid med negative tall eller hvilke representasjoner de tok i bruk. I tillegg øker anonymiseringen av elevene når jeg ikke transkriberer på dialekt. Når jeg transkriberts brukte jeg noen enkle skrivemåter for å uttrykke når elevene hadde en lengre tenkepause og for å vise ikke-verbale handlinger.

(…)	refererer til tenkepause på mer enn tre sekunder.
(Kursiv)	refererer til ikke-verbale handlinger.

Cohen et al. (2011) skriver at det ikke er én korrekt måte å analysere og presentere kvalitativ data, men måten en forsker gjennomfører det på, bør stemme overens med formålet for forskningen. Kvalitative data taler ikke for seg selv, forskeren som har samlet inn dataene, bør også analysere og fortolke datamaterialet, fordi teorier, hypoteser og forskerens forforståelse er viktig utgangspunkt for dataanalysen (Johannessen, Tufte & Christoffersen, 2010). Nilssen (2012) påpeker at i analyseprosessen kommer en frem til funn, mens tolkningsprosessen hjelper forskeren med å skape mening i funnene. For å komme frem til funn, og gi mening til funnene har jeg benyttet meg av koder for å analysere datamaterialet. I kodingsprosessen har jeg forsøkt å forstå informantenes forklaringer gjennom å tolke mindre deler av deres utsagn, for så å se det opp mot deres helhetlige forklaring. I følge Johannessen et al., (2010) er koding innenfor kvalitative undersøkelser å klassifisere data ved å sette betegnelser eller markeringer på utsnitt av den teksten som skal analyseres. Kodingsprosessen krever at forskeren leser, tildeler, endrer og fornyer koder gjentatte ganger gjennom prosessen (Cohen et al., 2011). Gjennom denne kodingsprosessen har jeg som forsker gått frem og tilbake mellom ulike koder, jeg har sett på mindre deler av datamaterialet opp mot helheten for å gi mening til funnene. I det kommende avsnittet ønsker jeg å belyse hvordan prosessen med koding og kategorisering av datamaterialet har bidratt i denne studien, og hvilke kategorier jeg har benyttet i studien.

Lydopptakene er lyttet til gjentatte ganger, og transkripsjonene er lest nøye for å sikre at mine skriftlige transkripsjoner stemte overens med det som ble sagt på lydopptakene. For videre å organisere og dele inn datamaterialet benyttet jeg det Johannessen et al. (2010) kaller tverrsnittsbasert og kategoribasert inndeling av data. Den tverrsnittsbaserte inndelingen kjennetegnes ved å konstruere et system som gjør det lettere å identifisere og gjenkjenne spesielle temaer i datamaterialet (Johannessen et al., 2010, s.166). Denne prosessen kan kalles kategoribasert inndeling, fordi kategoriene indikerer en gruppe temaer som har fellestrekk eller på en måte er like. I datamaterialet mitt ser jeg på utfordringer elever møter i arbeid med negative tall, og flere av de utfordringene jeg fant i mitt datamateriale har flere likhetstrekk med hva tidligere forskning har funnet. Altiparmak og Özdoan (2010) har i sin forskning nevnt tre kategorier av utfordringer knyttet til arbeid med negative tall, og kategoriene er mengde og retning, aritmetikk og minustegnet. Mitt datamateriale har likhetstrekk når det kommer til ulike utfordringer, så jeg har derfor valgt å ha mengde og retning, aritmetikk ved addisjon og subtraksjon og minustegnet som mine kategorier i denne studien. Kategoriene som ble benyttet for representasjoner er tallinje, kontekster og mengdemodell. Kategoriene ble valgt fordi det var disse matematiske modellene elever selv tok i bruk. Hovedpoenget med kategoriseringen er å ende opp med noen få kategorier som kan gi et svar på forskningsspørsmålet. Jeg vil redegjøre i analysedelen hva jeg legger i de ulike kategoriene.

3.5 Etiske betraktninger

Kvalitative studier gir forbehold om at forskeren må ta høyde for etiske problemstillinger fra start til slutt (Kvale & Brinkmann, 2015). I denne studien startet refleksjonene rundt etiske problemstillinger når jeg søkte godkjennelse for prosjektet til Norsk senter for forskningsdata (NSD). Etter godkjennelse fra NSD ble samtykkeskjema (vedlegg 2) sendt hjem til alle foresatte ved den aktuelle klassen jeg skulle gjennomføre datainnsamlingen. Her hadde jeg beskrevet formålet med studien, hva deltakelsen innebar, tillatelse til å gjøre lydopptak, behandling av data og muligheter for å trekke seg når som helst. I tillegg ble anonymitet og konfidensialitet beskrevet nøye. Anonymitet og konfidensialitet er viktige etiske betraktninger som forskeren må ta hensyn til (Nilssen, 2012). Foresatte fikk beskjed om at pseudonymer ville bli brukt for elevenes navn, at skolen ikke ville bli navngitt, og at datamaterialet ville bli oppbevart konfidensielt og slettet når studien var gjennomført.

Når en forsker på barn og unge er det flere etiske betraktninger en må tenke gjennom. I følge Kvale og Brinkmann (2015) er det viktig å bruke alderstilpassende spørsmål når en intervjuer barn, og det samme gjelder formuleringene av oppgaveteksten. Gjennom planlegging av intervjuguide, og valg av oppgaver hadde jeg hele tiden i bakhodet at datainnsamlingen skulle skje med 4. trinnselever. Spørsmålene i intervjuguiden ble tilpasset slik at de var mer barnevennlige, og alt av oppgavetekster ble lest opp for elevene. Cohen et al.(2011) påpeker at maktforholdet i en intervjusituasjon mellom barn og voksne kan oppleves skjevt. For å prøve å redusere maktforholdet valgte jeg å intervjue grupper på to og to elever, slik at maktforholdet skulle oppleves mindre tydelig. I tillegg til gruppeintervju, hadde jeg stort fokus på hvordan prosjektet ble presentert for elevene. I presentasjonen av studie fortalte jeg for eksempel at jeg trengte deres hjelp, at det kun var elever på deres alder som kunne hjelpe meg, og at jeg ikke var opptatt av om svarene var rett eller galt.

3.6 Reliabilitet og validitet

Denne studien, som alle nye studier, har et ansvar ovenfor sitt fagfelt å ivareta krav om reliabilitet og validitet. Forskning på mennesker kan aldri bli fullstendig reliable og valid, men gjennom å reflektere rundt, og være oppmerksom på reliabilitet og validitet gjennom hele forskningsprosessen kan forskeren strekke seg mot idealet (Cohen et al., 2011). Når en snakker om reliabilitet innenfor kvalitativ forskning, fokuseres det på forskningens pålitelighet og vurderes ut fra åpenheten til forskeren og fremstillingen av hele forskningsprosessen (Johannessen et al., 2010). For å forsterke denne studiens reliabilitet har jeg beskrevet og begrunnet hvordan datamaterialet er samlet inn, blitt bearbeidet og brukt i min forskning. Jeg har prøvd å beskrive fremstillingen av fremgangsmåten så detaljert som mulig under hele prosessen. I følge Cohen et al. (2011) er forskningen verdiløs hvis det ikke er valid. Kvale og Brinkmann (2015) påpeker at dersom datamaterialet er pålitelig og funnene troverdig, vil dette styrke validiteten. Når en snakker om validiteten i en studie, omhandler det gyldigheten i de slutningene en kan trekke for forskningen (Cohen et al., 2011). Det vil si at svarene en har funnet gjennom forskningen faktisk svarer på spørsmålene som studeres. En metode for å øke validiteten i forskningen er å sammenligne egne funn opp mot tidligere forskning, noe jeg vil gjøre i drøftingskapittelet.

Metodetriangulering benyttes for å sikre studiens kvalitet. Metodetriangulering vil si å bruke to eller flere metoder for datainnsamling (Cohen et al., 2011). En kan for eksempel bruke både intervju og observasjon som metode for innsamling. En svakhet med denne studien er at jeg kun benyttet meg av en metode. Cohen et al. (2011) skriver at det kan være sårbart å kun ta i bruk en metode. Begrunnelsen for at jeg kun valgte en metode for min innsamling av data er hovedsakelig kapasiteten og tidsbegrensninger. Å gjennomføre kvalitative studier er som sagt tidskrevende, og etter fire intervjuer med åtte elever følte jeg at jeg hadde et stort nok datamaterialet for å kunne besvare mine forskningsspørsmål.

Som tidligere nevnt kan ikke denne kvalitative studien generaliserer for å gjelde alle elever på 4. trinn. Datamaterialet mitt er basert på åtte elevers utfordringer i arbeid med negative tall, og siden utvalget er lite, kan ikke dette sies å være representativt utvalg av befolkningen. Likevel har jeg prøvd å gjøre prosjektet transparent, ved å gi grundige og nøyaktige beskrivelser av hele forskningsprosessen. Med dette håper jeg mine funn kan gi andre lærere innspill og større bevissthet rundt utfordringer elever kan møte på når temaet negative tall blir introdusert.

4 Analyse av oppgavene

I det kommende kapittelet vil jeg presentere de ti oppgavene elevene arbeidet med under datainnsamlingen. Her vil jeg presentere hvilket potensiale de ulike oppgavene har, ulike løsningsmetoder, hvor de er hentet fra og begrunnelse for hvorfor oppgavene ble valgt. I tillegg ønsker jeg å se på hvilke representasjoner de legger til rette for.

4.1 Oppgave1

Sorter tallene fra minst til størst: -4, 3, 2, 7, -5, -8.

Tabell 3: Oppgave 1.

Den første oppgaven elevene fikk arbeide med er hentet fra Gallardo (1995). Jeg har gjort noen små endringer på valg av tall i oppgaven. Gallardo (1995) har med tall som består av to siffer, men i denne oppgaven valgte jeg kun å ta tall med ett siffer. Årsaken til at jeg endret oppgaven er fordi jeg ikke ønsket at plassverdi skulle være en mulig feilkilde i denne undersøkelsen.

Hensikten med denne oppgaven er å se hvordan elevene valgte å sortere tallene. Hvordan elever velger å rangere tallene kan fortelle noe om deres tallforståelse. For eksempel kan noen elever sorterer etter absoluttverdi, altså at -4 kommer før -5 og -8. Andre elever kan skille mellom de positive tallene og de negative tallene, stille de opp i to rekker, mens noen kan sortere etter ordningen av tall, ordinal forståelse. Metodene elevene bruker kan derfor si en del om elevenes forståelse av tallene. Mulig bruk av representasjoner i denne oppgaven er tallinje. Elevene har mulighet til å illustrere tallenes rekkefølge ved bruk av en åpen tallinje for å plassere tallene.

4.2 Oppgave 2 til og med oppgave 7.

Oppgave 2	4 – 5 =
Oppgave 3	-5 – 6 =
Oppgave 4	-3 + ☐ = 3
Oppgave 5	☐ + 5 = 3
Oppgave 6	6 – 9 =
Oppgave 7	-2 – 4 =

Tabell 4: Oppgave 2 til og med oppgave 7.

Oppgave 2 til med oppgave 7 er inspirert av Bofferding et al. (2018) og Bishop et al. (2014). Begge studiene tar utgangspunktet i yngre elevers resonnering av negative tall, der studiene benytter seg av aritmetikkoppgaver med addisjon og subtraksjon. Bofferding et al. (2018) skriver i sin studie at gjennom å høre elevenes resonneringer av strategier og metoder kan gi innsikt til hvilke utfordringer elevene står ovenfor.

Oppgave 2 og oppgave 6 er relativt like. Begge starter med et positivt heltall for så å subtrahere et større negativt tall. Noe som kan oppleves som problematisk for elevene med slike oppgaver er at minuenden er lavere enn subtrahenden. En fordel derimot er at oppgavene kan løses på flere ulike måter, og en metode å regne ut slike oppgaver er å tegne en tallinje for så å hoppe mot venstre på tallinjer så mange hopp oppgaven ber om. En annen mulighet er å løse oppgave 2 er for eksempel å tegne opp fire svarte sirkler og fem røde sirkler, der røde sirklene representerer negative mengder, for så å stryke ut en fra hver side til en er tom på den ene siden. En mulig måte å løse denne type oppgave på uten å tegne opp representasjoner er å subtrahere like mye som minuenden, arbeide seg ned mot null, får så å se hvor mye av subtrahenden en sitter igjen med. Oppgavetyper som denne åpner muligheten for å bruke flere ulike løsningsstrategier. En av årsakene til at jeg valgte to relativt like oppgaver var fordi jeg ønsket å se om elevene brukte samme strategi og fremgangsmåte på begge oppgavene, selv om tallstørrelsen er noe større i den siste oppgaven. Jeg har bevisst noen ulike oppgaver mellom de like oppgavene, for å se om elevene benytter samme strategi, og for å se om det eventuelt er andre utfordringer elevene møter på.

Årsaken til at oppgave 3 og oppgave 7 ble valgt er for å se på minustegnenes funksjoner. I begge oppgavene har minustegnene ulike roller, det første minustegnet har en unær funksjon som vil si at minustegnet er knyttet til et tall, noe som indikerer at tallet er negativt. Det andre minustegnet har en binær funksjon, som markerer operasjonen subtraksjon. Elevene skal i disse oppgavene utføre subtraksjon mellom et negativt tall og et positivt tall. Jeg har bevisst ikke skrevet oppgavene med parenteser, da elevene ikke har arbeidet med dette tidligere. Målet med oppgavene er å skape en samtale med elevene rundt minustegnets rolle, finne ut om elevene selv vet hva de ulike rollene er. Når det kommer til løsningsmetoder for oppgavene kan elevene regne ut absoluttverdien, for så å se på tegnene for å avgjøre om svaret blir positivt eller negativt. En annen metode elevene kan ta i bruk er å tegne opp en tallinje, for så å telle seg frem til svaret. Bofferding et al. (2018) skriver at en metode elever kan benytte seg av, som ikke vil gi riktig svar, er at de snur om på regnestykket, slik at det positive heltallet kommer først. Bofferding et al.(2018) påpeker også at ved slike oppgaver er det flere elever som ignorerer ett av minustegnene.

Oppgave 4 er en av to oppgaver som er noe annerledes enn hva elevene er vant til å løse. I denne oppgaven skal elevene finne differansen og ikke summen i regnestykket. Dette kan for noen elever være utfordrende i utgangspunktet, men jeg har likevel valgt å ta med oppgaven fordi jeg gjennom pilotundersøkelsen fikk mange interessante løsningsmetoder, og gode refleksjoner rundt oppgaven. En mulig løsning er å telle oppover fra -3 til 3, eller tegne opp en tallinje og markere tallene -3 og 3, for så å se hvor mange hopp en trenger å gjennomføre på tallinjer for å komme til 3.

Den siste oppgaven jeg valgte som inspirasjon fra Bishop et al.(2014) er oppgave 5. I denne oppgaven skal elevene verken finne differansen eller summen, men et av leddene i regnestykket. Som oppgave 4 kan også denne oppgavetypen være noe utfordrende for elevene, men denne oppgaven gir meg som forsker muligheten til å finne ut av hvordan elevene stiller seg til at summen av to tall blir mindre enn en av addendene. En strategi for å løse denne oppgaven, hvis elevene er kjent med sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon, er å regne ut 2-5. En annen mulig måte å løse oppgaven er å telle fem bakover fra 3, med denne metoden kan elevene tegne en tallinje som hjelpemiddel.

4.3 Oppgave 8: > , < eller =

Oppgave 8	Skriv >, < eller =
	3 -3 -4 -2 -7 3 2 -9 -5 -6 -5 -100

Tabell 5: Oppgave 8.

Oppgave 8 er hentet fra Whitacre et al.(2017). Dette er en oppgave hvor elevene skal sammenligne heltall, der alle oppgavene inneholder ett eller to negative tall. Hensikten med denne oppgaven er å se om elevene velger tall ut fra absoluttverdi eller ordinal forståelse. Gjennom elevenes resonnering rundt valg av tall kan jeg som forsker få et innblikk i om elevene velger etter mengde eller retning. Årsaken til at -5 og -100 er med som siste del av oppgaven er for å se om avstanden mellom de to negative tallene påvirker elevenes besvarelser.

4.4 Oppgave 9 og oppgave 10

Oppgave 9	I Trondheim er det -9 ℃. Temperaturen stiger med fire grader. Hva er temperaturen i Trondheim?
Oppgave 10	I Tromsø er det -11 ℃. Temperaturen synker med fire grader. Hva er temperaturen i Tromsø nå?

Tabell 6: Oppgave 9 og oppgave 10.

Felles for oppgaven 9 og oppgave 10 er at begge oppgavene er tekstoppgaver og inneholder temperaturkontekster. I arbeid med tekstoppgaver er språket en bruker i forbindelse med temperatur avgjørende, og elevene blir derfor nødt til å tolke hvilken operasjon de ulike begrepene indikerer. Begreper elever ofte må tolke i temperaturkontekster er kaldere, varmere, stiger, synker, over og under null. I oppgave 9 og 10 måtte elevene tolke begrepene stiger og synker. I oppgave 9 får elevene vite at det er -9 ℃ i Trondheim og at temperaturen stiger med fire grader. I denne oppgaven vil tolkningen av begrepet stiger være en avgjørende, og en viktig prosess for å komme frem til riktig løsning. Men selv om elevene kommer frem til operasjonen addisjon når temperaturen stiger, er fremdeles elevenes forståelse for negative tall viktig for å komme frem mot løsningen. Elever som er opptatt av absoluttverdien, og fokuserer på mengden, vil kanskje tro at absoluttverdien vil øke når det er addisjon. Samme tolkningsproblem vil elevene også møte i oppgave 10, med begrepet synker. Elever med ordinal forståelse som kommer frem til operasjonen subtraksjon vil kunne komme frem til rett løsning, mens elever med kardinal forståelse vil kanskje tenke at absoluttverdien vil minske. Hvordan elevene tolker begrepene, og hvilken forståelse de har for negative tall, vil derfor være avgjørende for om de kommer frem til korrekt løsning.

Oppgave 9 og oppgave 10 har jeg laget selv, med inspirasjon fra læreverket trinnet har brukt i innlæringen av negative tall, Matemagisk 4A (Kroknes, Kavén og Persson, 2014). Tekstoppgavene i læreverket benytter hverdagskontekster som temperaturer og over og under havoverflaten. Jeg valgte å gå for samme kontekst i begge oppgavene for å unngå at elevene ble forvirret ved bruk at flere kontekster. Målet med oppgavene var å se om elevene tok i bruk negative tall for å løse dem og om elevene møtte på andre utfordringer når de måtte løse tekstoppgaver.

Tekstoppgaver åpner for at elevene kan bruke ulike representasjoner, som gradestokk og tallinje. Representasjonen gradestokk er noe elevene eventuelt kjenner til fra hverdagslivet, og vil være en aktuell modell å benytte i begge oppgavene. Både tallinje og gradestokk vil være modeller som legger til rette for ordinal forståelse, da begge modellene er ordnet ut fra tallenes rekkefølge. Om elevene ikke skulle benytte seg av matematiske modeller for å løse oppgaven kan de fremdeles løse oppgaven med å sette opp regnestykker eller telle på fingrene.

5 Analyse av datamaterialet

Innledningsvis i denne masteroppgaven presenterte jeg to forskningsspørsmål: Hva kjennetegner utfordringene åtte elever på 4. trinn møter i arbeid med negative tall og hvilke representasjoner tar de i bruk? I dette analysekapittelet ønsker jeg å gi grunnlag for at begge forskningsspørsmålene kan bli besvart. Hovedmålet med analysekapittelet er å gi innsikt i hvilke utfordringer elever på 4. trinn møter i arbeid med negative tall, og hvilke representasjoner de selv tar i bruk for å løse oppgaver som inneholder negative tall. For å kunne belyse elevenes utfordringer og representasjonsbruk, vil jeg ta i bruk utvalgte utdrag fra besvarelsene elevene kom med under datainnsamlingen. Funnene som presenteres i løpet av dette kapittelet er hentet fra alle de fire elevgruppene. Alle elevene har fått hvert sitt pseudonym, og gruppe 1 består av Anna og Birk, gruppe 2 av Carl og Daniel, gruppe 3 består av Erik og Frida, og den siste gruppen, er gruppe 4 som er Guro og Henrik. Jeg har valgt å skrive "forsker" foran utsagnene jeg kommer med.

Analysekapittelet er strukturert i to deler. I den første delen av kapittelet ønsker jeg å presentere funn fra gruppeintervjuene som peker på utfordringer knyttet til negative tall. Her vil jeg presentere tre underkategorier, som elever kan møte når de arbeider med oppgaver som inneholder negative tall. Den første underkategorien som vil bli presentert er utfordringer som er knyttet til tallenes retning og mengde. Videre vil jeg se nærmere på utfordringer som kan knyttes til aritmetiske operasjoner med negative tall, før jeg til sist vil presenterer den tredje underkategorien som omhandler utfordringer som kan knyttes til minustegnets ulike funksjoner. For å belyse utfordringen som er nevnt ovenfor vil jeg ta utgangspunkt i transkripsjonene fra datainnsamlingen. Selv om flere av elevene sliter med de samme utfordringene vil jeg ikke presentere alle, men gå i dybden på to eller tre av besvarelsene.

Den siste delen av dette kapittelet retter seg mot den andre delen av forskningsspørsmålet, som omhandler representasjonene elevene selv tar i bruk når de jobber med oppgaver som inneholder negative tall. I denne delen har jeg valgt å trekke frem tre ulike modeller elevene har benyttet seg av i arbeid med negative tall. De tre modellene er tallinje, kontekster og mengdemodell. Selv om flere elever har tatt i bruk samme modell har jeg kun valgt å trekke frem noen få.

5.1 Utfordringer knyttet til negative tall

For mange elever skaper negative tall utfordringer, og en av årsakene er fordi negative tall er så abstrakte og ikke kan representeres med fysiske objekter. Tidligere forskning innen temaet viser til flere utfordringer elever kan møte på når de arbeider med negative tall. Altiparmak & Özdoğan (2010) har i sin studie utarbeidet tre kategorier knyttet til læring av negative tall. De tre kategoriene er: tallenes retning og mengde, betydningen av aritmetiske operasjoner med negative tall og minustegnets ulike funksjoner. Gjennom observasjoner og tolkninger av mitt datamateriale har jeg kommet frem til at disse utfordringene også er fremtredende i min undersøkelse. Jeg har derfor valgt de samme tre kategoriene for å presentere utfordringer 4. trinnselever møter når de arbeider med negative tall.

5.1.1 Minustegnets funksjoner

Minustegnet har som tidligere nevnt en trippel natur, som vil si at det samme tegnet som benyttes i matematiske oppgaver, innehar tre ulike funksjoner. Jeg ønsket dermed å se nærmere på tredelingen Gallardo og Rojano (1994) har definerte av minustegnets funksjoner, med fokus på den binære og unære rollen minustegnet har i ulike matematiske oppgaver. Utfordringer knyttet til minustegnet funksjoner skjer ofte fordi elevene ikke er klar over de ulike rollene minustegnet har. Den endringen som oftest skjer er at elevene tolker den unære funksjonen til å være den binære funksjonen. For å belyse minustegnets funksjoner har jeg valgt ut utdrag fra transkripsjonene der både den unære og binære funksjonen er med i oppgavene. Det første utdraget er hentet fra gruppeintervjuet med Anna og Birk der de skal løse oppgave 3.

43	Forsker:	Neste oppgave er -5 – 6, hvordan har dere løst denne oppgaven?
44	Birk:	Den er lett, det er -11. Her tok jeg bare 5 + 6 som er 11, men det er minus, så da setter jeg bare på et minustegn.
45	Forsker:	Kan du bare sette på et minustegn?
46	Birk:	Ja, man regner det jo egentlig ut som -5 + -6 som er -11 da.
47	Forsker:	-5 + -6 = - 11. Hvorfor har du med plusstegnet?
48	Birk:	Det er jo egentlig ikke med i oppgaven, man når en skal ta et negativt tall og et til negativt tall, så plusser men egentlig bare det andre negative tallet på det første. Sånn -5 – 3 = -8. Her plusser man egentlig -3 på -5, så man får -3 + -5 = -8.
49	Anna:	Jeg gjorde det vell litt andreledes.
50	Forsker:	Hvordan tenkte du da, Anna?
51	Anna:	Jeg tenkte her at du må først ta bort 5, så må du etterpå ta bort 6. Da får du -11. (…) Liksom at du har null og må ta bort 5 og så 6.
52	Forsker:	I oppgaven her har dere begge sett at det er to minustegn, men hva betyr minustegnene i denne oppgave?
53	Anna:	Å ta bort to ganger.
54	Birk:	Nei, det e jo to minustall.

Ser vi på det første utsagnet Birk kommer med ser vi at strategien han benytter for å løse oppgaven er å addere to positive tall, for så å legge til et minustegn i svaret. Når jeg som forsker spør om at det er mulig å legge til et minustegn i svaret, forklarer Birk i utsagn 46 og 48 at ja, det går fint, fordi vi regner ut slike oppgaver med å addere det andre negative tallet til det første negative tallet. Birk endrer derfor regnestykker fra -5 – 6 til -5 + -6, og inkluderer dermed et plusstegn i oppgaven, noe som medfører at operasjonen i regnestykket blir endret. Når Birk endrer regnestykket stemmer det at begge minustegnene innehar en unær funksjon, men i det opprinnelige regnestykket er det kun det første minustegnet som har en unær funksjon, mens det andre minustegnet har en binær funksjon. Når jeg som forsker spør om hva minustegnene i den opprinnelige oppgaven svarer Birk i utsagn 54 at begge tallene er negative. Birk ser derfor ikke at det andre minustegnet i denne oppgaven innehar en binær funksjon som indikerer operasjonen subtraksjon, men tolker at begge minustegnene tilhører tallene, noe som dermed indikerer at begge tallene i denne oppgaven er negative. Anna derimot har en annen tolkning av minustegnene i denne oppgaven. I utsagn 51 kan vi se at Anna ser på begge minustegnene som operasjonen subtraksjon. Hun benytter begrepet "ta bort" for begge minustegnene, og nevner ikke negative tall før i svaret. Det sammen bekrefter hun i utsagn 53, etter at jeg som forsker har spurt om hva de to minustegnene i oppgaven betyr. Her benytter hun igjen begrepet "ta bort", og påpeker at i dette regnestykke er en nødt til å trekke fra to tall. Anna sier med dette at begge minustegnene har en binær funksjon i regnestykket. I dette utdraget kan vi dermed se at Birk kun benytter seg av den unære funksjonen minustegnet har, mens Anna kun ser den binære funksjonen.

Videre ønsker jeg å presentere et utdrag fra en episode med Erik og Frida fra gruppe 3, når de arbeidet med oppgave 7, -2 – 4. I denne oppgaven har minustegnet både en unær og en binær funksjon.

74	Forsker:	Nå har dere løst oppgave -2 – 4. Hva fikk du til svar på denne oppgaven Frida?
75	Frida:	Jeg fikk -6, på grunn av at jeg startet på -2, så telte jeg fire bakover, og da kom jeg til -6. Fordi minustall (…) minustall da går en nedover og ikke oppover. Så jeg svarte 6.
76	Forsker:	Hva med deg Erik?
77	Erik:	Jeg tok 4 – 2 = 2, og siden begge tallene er minus, så ble svaret -2.
78	Forsker:	Så du snudde om på tallene?
79	Erik:	Ja, når begge tallene er minus spiller det ingen rolle hvem som står først.
80	Forsker:	Ser dere at det er to minustegn i denne oppgaven? Hva betyr minustegnene her da?
81	Frida:	(*Peker på det første minustegnet, -2)* Det her betyr at 2-tallet er under null.
82	Erik:	Det betyr at 2-tallet og 4-taller er under null.
83	Forsker:	(*Peker på begge minustegnene)* Så du Erik mener at begge tallene er negative?
84	Erik:	Ja, de er begge under null.
85	Forsker:	Hva tenker du Frida om det andre minustegnet?
86	Frida:	Jeg tenker at det betyr at i stede for å plusse på et tall så minuser du et tall.

Ser vi på utsagnene Frida kommer med i dette utdraget, kan vi se at Frida forstår at det er en forskjell på funksjonene minustegnene har i denne oppgaven. I utsagn 75 starter Frida på tallet -2, for så å telle fire mot venstre før hun stopper på -6. Når jeg spør om hva de ulike minustegnene betyr i denne oppgaven svarer hun med å peke på det første minustegnet, og forklarer at dette indikerer at tallet 2 er negativt. Når jeg senere spør om hva det andre minustegnet betyr, refererer hun til operasjonen subtraksjon. Frida viser i dette utdraget at hun har en forståelse for at minustegnet kan indikere ulike funksjoner ut fra hvor det er plassert i et regnestykke. Erik derimot, sier i linje77 og 82, at begge minustegnene indikerer negative tall. Likevel kan en også se i utsagn 77 at Erik utfører operasjonen subtraksjon for å løse oppgaven. Erik viser med dette at han vet at minustegnet kan ha en funksjon som indikerer operasjonen subtraksjon, samt ha en funksjon som viser at et tall er negativt. Det som likevel kommer frem i Erik sitt utsagn 85, er at han ikke alltid er bevisst på de ulike funksjonene når det er flere minustegn i en oppgave.

Når det kommer til minustegnets ulike funksjoner har jeg presentert to utdrag fra to av gruppene, der utdragene viser to forskjellige oppgaver der minustegnets ulike funksjoner er representert i begge oppgavene. Av totalt åtte elever som gjennomførte oppgavene, opplever fem av elevene at minustegnets ulike roller kan by på utfordringer. De fem elevene har gjennom sine forklaringer kun tildelt minustegnet en rolle i disse oppgavene. Enten kun den unære funksjonen eller kun den binære funksjonen. Det vil si at omtrent halvparten av elevene opplever utfordringer med å forstå at minustegnet har ulike funksjoner.

5.1.2 Aritmetiske operasjoner knyttet til negative tall

Som tidligere nevnt i teorikapittelet kan addisjon og subtraksjon med negative tall være utfordrende fordi elever ofte kan forsøke å tilpasse utregninger med negative tall til regneregler som gjelder for de naturlige tallene. Misoppfatninger som at addisjon alltid vil føre til et større tall, mens subtraksjon alltid vil føre til et mindre tall, er utfordringer elever ofte møter på når de begynner å regne med negative tall. Elevenes tidligere erfaringer rundt addisjon med de naturlige tallene har medført at tallet alltid er blitt større, og tallenes retning og mengde har alltid vært knyttet sammen. Det samme gjelder elevenes tidligere erfaringer med operasjonen subtraksjon. Når negative tall blir introdusert for elever vil ikke tallenes mengde og retning være sammenfallende lengre. Noe som medfører at addisjon ikke nødvendigvis vil føre til at tallet blir større, men kan med regning av negative tall resultere i at tallet bli mindre. Slike misoppfatninger har også vært fremtredende i mitt datamateriale, samt at flere elever har påstått at en ikke kan trekke fra et større tall fra et mindre tall. Gjennom utdrag fra elevbesvarelsene vil jeg i den kommende delen vise til eksempler angående utfordringer med aritmetiske operasjoner som er knyttet til negative tall. For å tydeliggjøre mine funn vil jeg i den kommende delen kun trekke ut ett eller flere enkeltutsagn elever kommer med. Grunnen til dette er fordi utfordringene elevene opplever innen denne kategorien ikke trenger å fremheves med en dialog eller en samtale mellom elevene og meg.

Den første eleven sine utsagn jeg ønsker å belyse i denne kategorien tilhører Guro, som ved flere utsagn viser at hun overgeneraliserer regneregler for de naturlige tallene inn i arbeidet med negative tall. Alle utsagnene som jeg fremmer er hentet fra oppgaven 2 når Guro skal løse ensifrede addisjon- og subtraksjonsoppgaver som inneholder negative tall.

19	Guro:	Først så tenkte jeg at det ikke går å ta bort et større tall, så da lånte jeg en tier, så da fikk jeg 15 – 4 som bli 11.
24	Guro:	Du kan ikke ta bort mer enn hva du allerede har. Med pluss så spiller det ingen rolle.

36 Guro: Det regnestykke går jo ikke. Det er ikke lov. Derfor skriver jeg null utenfor, fordi det betyr at oppgaven ikke er lov. Herregud så mange dårlige oppgaver du har.

For å belyse Guro sine utfordringer med aritmetiske addisjon og subtraksjonsoppgaver som inneholder negative tall, har jeg valgt ut tre utsagn hun kommer med i løpet av kort tid. I samtlige av utsagnene til Guro i utdraget over prøver eleven å tilpasse de negative tallene til egenskapene for de naturlige tallene. Utrykkene som "du kan ikke ta bort mer enn hva du har" og " det går ikke å ta bort et større tall" er kjente misoppfatninger elever kan møte på når negative tall introduseres. Ser vi videre på utsagn 36 som Guro kommer med, hevder hun at oppgave -5 – 6 ikke kan løses. Hun markerer derfor oppgaven med null utenfor svarboksen, noe som kan tolkes som at det laveste tallet Guro mener eksisterer er null. Dette er også en kjent utfordring elever kan møte når negative tall introduseres. Før negative tall introduseres for elevene kan flere av elevene være uvitende om at negative tall eksisterer. De har derfor i flere år arbeidet med null som det laveste tallet de kjenner til, så når de negative tallene omsider introduseres for elevene, er de nødt til å rive ned og rekonstruere sin kunnskap.

Den andre eleven sine utsagn jeg ønsker å trekke frem kommer fra Henrik. Henrik sine to første utsagn kommer fra oppgaven 2 når Henrik regner ensifrede addisjon- og subtraksjonsstykker som inneholder negative tall. Det siste utsagnet er hentet fra oppgave 10 som er en tekstoppgave.

21 Henrik: Pluss er enklest, fordi du vet at det alltid blir mer.

30 Henrik: Her regnet jeg bare baklengs, for du kan ikke ta mer minus enn du har.

158 Henrik: Minus er ganske kjipt, fordi det blir hver gang bare mindre.

Ut fra de tre utsagnene Henrik kommer med kan det tolkes at også Henrik overfører prinsipper for operasjoner med positive tall til regning med negative tall. Kunnskapen han har lært tidligere skaper konflikter for eleven når negative tall innføres. I utsagn 21 poengterer Henrik at addisjon er lettere å regne med fordi tallene alltid vil bli større. Tidligere erfart kunnskap vil nå måtte rekonstrueres, for at Henrik skal kunne regne med negative tall. Henrik må nå oppleve at når han regner med negative tall vil ikke addisjon lengre føre til at et tall nødvendigvis blir større. Også i linje 158 kan vi se at Henrik har en utfordring. Utfordringen gjelder subtraksjon med negative tall. Her må også Henrik rive ned og bygge opp kunnskapen sin når det gjelder subtraksjon. For når negative tall er med i kalkulasjonene vil ikke nødvendigvis subtraksjon medføre at tallet blir mindre.

Det siste utsagnet til Henrik jeg ønsker å trekke frem er utsagn nummer 30. Her sier han eksplisitt at det ikke er mulig å trekke fra et større tall fra et mindre tall. Henrik velger derfor å endre regnestykket for å finne en løsning. Denne utfordringen er poengtert av flere forskere, og er et av kjennetegnene til utfordringer elever kan møte på når de introduseres for negative tall.

Det siste utsagnet i denne kategorien tilhører Daniel, og kom da han skulle forklare hvordan han hadde løst den siste tekstoppgaven. I tekstoppgaven får Daniel vite at det er -11℃ i Trondheim og temperaturen synker med 4 grader.

130	Daniel:	Jeg vil prøve å forklare. 11 – 4 = 7, for minus blir jo mindre. Med minusgrader trenger jeg ikke tenke på alle minustegnene her, fordi alle minustegnene forstyrrer deg. Så da bruker jeg bare tallene og legger til minustegnet på slutten, fordi det er jo minusgrader.

I linje 130 uttrykker Daniel at flere minustegn i en og samme oppgave virker forstyrrende, og velger derfor å fjerne det første minustegnet, som har en unær funksjon, som markerer at tallet 11 er et negativt tall. Daniel velger derfor å benytte seg av positive tall for å løse oppgaven som inneholder negative tall. Daniel kommer frem til at regnestykke er 11 – 4 som er lik 7, for så å tilføre et minustegn i svaret, fordi oppgaven omhandler minusgrader. I samme setning påpeker Daniel at minus vil føre til at tallene blir mindre. At subtraksjon alltid vil føre til et mindre tall er en overgeneralisering som kun gjelder for de positive tallene. I utsagnet til Daniel kommer det frem at han har en forutsetning om at subtraksjon vil føre til et mindre tall. Gutten forsøker derfor å overføre kunnskapen sin om kalkulasjoner med de naturlige tallene til utregningen for negative tall. Kunnskapen Daniel har tilegnet seg gjennom arbeid med de positive tallene, vil derfor komme i strid med subtraksjon av negative tall. Eleven møter derfor på utfordringen at subtraksjon ikke nødvendigvis vil føre til mindre tall når de negative tallene er innført. Denne utfordringen kan også skape følgefeil for elevene. For Daniel kan denne følgefeilen knyttes opp mot retningen han beveger seg på en tallinje når temperaturen synker. Eleven velger i denne oppgaven å minske mengden til tallet, og retningens bevegelse går derfor mot høyre på en tallinje, mens den korrekte løsningen hadde vært at tallets mengde hadde økt, og tallets retning hadde beveget seg lengre til venstre på en tallinje.

5.1.3 Mengde og retning

I teorikapittelet skrev jeg at alle tall, både positive og negative, består av to komponenter: mengde og retning. Når det gjelder de naturlige tallene vil retning og mengde sammenfalle med hverandre, men når de negative tallene introduseres vil de to begrepene være avvikende. For å illustrere dette kan en si at -3 er større enn -6 hvis vi snakker om selve tallet, men snakker en derimot om mengden til tallet vil -6 være mer enn -3. For elever kan dette skape en forvirring. Gjennom mitt datamateriale, spesielt sammenligningsoppgavene og tekstoppgavene, har tallenes retning og mengde vært utfordrende for noen av elevene. I tillegg er det funn som viser at enkelte elever forklarer utregningen med å argumentere for retningen, men når de skal illustrerer forklaringen med en kontekst benyttes de en mengdekontekst. I den kommende delen vil jeg med hjelp av utdrag fra datamaterialet illustrere mine ulike funn når det kommer til mengde og retning av negative tall.

Det første utdraget jeg vil trekke frem er fra gruppeintervjuet med Guro og Henrik, som tydelig fokuserer på kun en av tallets komponenter. Begge elevene har svart likt på alle deloppgaven i oppgave 3, der de skal sammenligne to negative tall. Elevene skal velge mellom tegnene <, > eller = for å markere det største tallet.

75	Guro:	Krokodillen er alltid sulten, så den spiser der det er mest.

76	Henrik:	Vi har tenkt helt likt.
77	Forsker:	Jeg ser at dere begge har svart -6.
78	Henrik:	Ja, fordi 6 er mer enn 5, så da blir krokodillen mest mett.
79	Forsker:	Hva med -4 og -2 da?
80	Henrik:	2 er ganske lite, og 4 er også ganske lite, men mer enn 2. Så akkurat det samme.
81	Guro:	Man vil heller ha 4 sjokolader enn 2 sjokolader.
82	Forsker:	Også når det er negative tall?
83	Henrik:	Ja, fordi 4 er mer tall enn 2.
84	Guro:	Og man vil i hvert fall ha 100 og ikke 5
85	Henrik:	hahaha, hvem vil ha 5 sjokolader når du kan få 100.

Gjennom utdraget av samtalen mellom Guro og Henrik kan en se at begge to konsekvent snakker om mengden til tallet. Både Guro og Henrik bruker begreper som "mest", "å ha", "mer" og "lite" når de forklarer hvordan de har svart når de har sammenlignet to negative tall. Slike begreper kan knyttes opp mot tellbare mengder, noe som fremhever elevenes tallsyn. Guro sier i linje 81 at "man vil heller ha fire sjokolader enn to sjokolader" og Henrik sier i linje 85 "hahaha, hvem vil ha fem sjokolader, når du kan få hundre", slike utsagn poengterer elevenes forståelse for tall. Både Guro og Henrik kobler tallene opp mot objekter som kan representeres, noe som fremmer elevenes ide av en mengde. Hverken Henrik eller Guro nevner begreper som høyre, venstre, over eller under null som er begreper som ofte benyttes for å beskrive retningen til tallet. I tillegg kan vi også se at begge elevene i utdraget benytter seg av en kontekst for å forklare utsagnene sine. I linje 81 og 85 knytter elevene tallene til en kontekst om sjokolader.

Når en skal sammenligne to negative tall, og kun fokuserer på tallets mengde vil det ofte resultere i feil løsning. Årsaken til dette er at begrepene retning og mengde er avvikende fra hverandre når en sammenligner to negative tall. Ut fra dette utdraget kan det derfor tolkes som at Guro og Henrik har et kardinalt tallsyn. Som flere forskere belyser er det avgjørende å kjenne til begge komponentene tallene innehar, for å forstå de negative tallene. Resonneringene til Guro og Henrik hadde fungert for de naturlige tallene, men når negative tall introduseres er det avgjørende å se på tallenes retning og mengde. Gjennom hele samtalen unngår både Guro og Henrik minustegnet, og diskuterer kun med positive tall. Det kan derfor tolkes som at ingen av elevene kjenner til at både tallenes retning og mengde er avgjørende når en arbeider med negative tall.

Et annet eksempel som viser utfordringen knyttet til denne kategorier er fra gruppe 1 sitt arbeid med den første tekstoppgaven. I oppgaven får Anna og Birk vite at temperaturen i Trondheim er -9℃, og den stiger med 4℃. Anna og Birk skal nå finne ut hva temperaturen i Trondheim er:

103	Forsker:	Her kommer det en tekstoppgave (*Leser oppgaven høyt for elevene).* Nå skal dere få løse denne oppgaven.
104	Forsker:	Da ser jeg at dere begge to er ferdige, kan du forklare hvordan du har løst denne oppgaven Birk?

105	Birk:	Ja, jeg skrev at det er -5℃, fordi -9 + 4 = -5. Så derfor er svaret -5℃.
106	Anna:	Hmm… Jeg fikk ikke det!
107	Forsker:	Kan du forklare hva du har gjort, Anna?
108	Anna:	Jeg tok -9 + 4 som blir -13, med sånn gradetegn bak.
109	Birk:	Du har bare feil svar, for når det stiger, betyr det mer, lengre opp, varmere liksom… Det stiger liksom sånn som vannet, hvis en heller opp i mer vann, så går det mer opp.
110	Anna:	Som 10 til 20?
111	Birk:	Ja. Du tok liksom kaldere.

I linje 105 kan vi se at Birk setter opp et regnestykke for å forklare besvarelsen sin og at han tolker begrepet "stiger" til å gjelde addisjon. Ser vi på Anna sitt utsagn, 108, kan vi se at også hun benytter seg av et regnestykke for å løse oppgavene, og tolker begrepet "stiger" som addisjon. Når det kommer til utregningen av regnestykket opplever elevene å ha ulike svar. Birk argumenterer i utsagn 109 at når temperaturen stiger, og det er minusgrader, vil temperaturen bevege seg mot null, og i retning oppover. I tillegg prøver han å illustrere dette med å henvise til en kontekst med vann. Birk viser dermed med sine utsagn at retningen når en adderer et tall med et negativt tall er avgjørende. Anna har derimot antatt at addisjon medfører at mengden til tallet må bli større. Ut fra svaret i regnestykket til Anna kan det tolkes som at hun enten kun har fokusert på tallenes mengde i utregningen, eller at hun er usikker på hvilken vei på tallinjen en skal forflytte seg når en arbeider med addisjon med negative tall. På bakgrunn av at Anna ikke utdyper tankegangen sin, og at jeg som forsker ikke stilte oppfølgingsspørsmål rundt denne besvarelsen kan jeg ikke trekke en konklusjon for hvordan Anna har tenk. Likevel kan det påpekes at Anna opplever en utfordring når hun skal addere et tall til et negative tall. Både det å fokusere på mengde og usikkerheten for hvilken retning en skal bevege seg på en tallinje er belyst av tidligere forskere.

5.2 Representasjoner

Når elever skal introduseres for negative tall, kan ikke de negative tallene representeres som fysiske objekter. Manchester (2011) påpeker derfor at elevene må lage seg mentale, visuelle eller skriftlige representasjoner for de negative tallene. Gjennom analyse av datamaterialet har jeg funnet tre modeller elevene har tatt i bruk for å løse oppgavene. De tre modellene er tallinje, kontekster og mengdemodell. I den kommende delen vil jeg trekke frem utdrag og bilder fra datainnsamlingen som viser mine funn. Hver modell har fått sitt eget delkapittel, og selv om flere av elevene har tatt i bruk samme modell, har jeg kun valgt å trekke frem noen få eksempler.

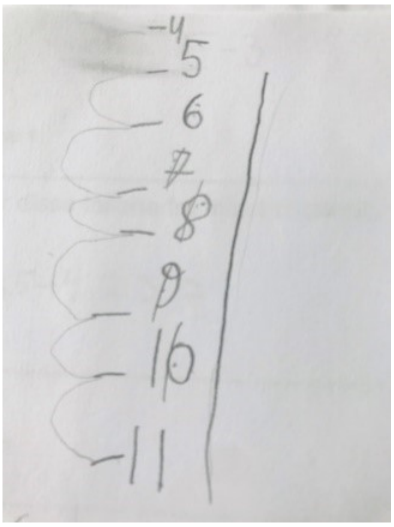
5.2.1 Tallinje

Tallinje kan beskrives som en ordinal modell, fordi tallenes retning og plassering er ordnet i en rekkefølge. I dette delkapittelet vil også gradestokk og termometer gå under denne kategorien, da de kan beskrives som en vertikal tallinje. Tallinje er helt klart den representasjonen flest elever benytter seg av i min studie, og elevene bruker tallinje på to forskjellige måter. Den første metoden innebærer å tegne en tallinje. Den andre metoden benytter elevene seg av mentale tallinjer som refereres til med et muntlig språk. I den siste metode blir ikke nødvendigvis ordet tallinje nevnt av elevene, men begreper og uttrykk som "til venstre", "til høyre", "oppover", "nedover" og " hoppet fra" indikerer at elevene benytter en mental tallinje. I den kommende delen vil jeg først vise til transkripsjoner hvor elevene brukte tallinjen visuelt, før jeg deretter gir eksempler fra transskripsjonen der elever tar i bruk en mental tallinje.

Samtlige av elevene som deltok i min studie benyttet seg av en form for visuell tallinje for å løse oppgaver eller begrunne svarene sine. Jeg ønsker derfor å trekke frem en elev som benyttet seg av tallinje for å løse oppgaven, og en elev som brukte tallinjen for å argumentere for besvarelsene sine. Et eksempel på en elev som bruker en visuell tallinje som hjelpemiddel for å løse oppgave -5 - 6 er Carl:

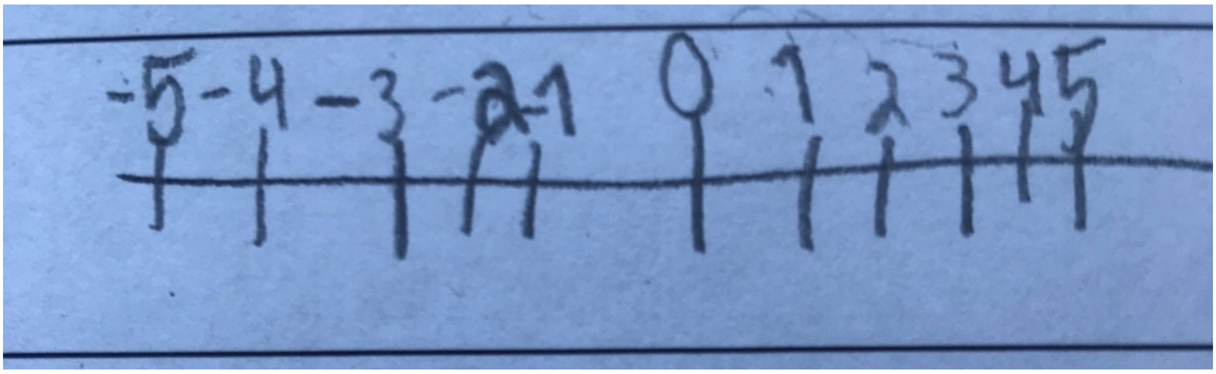
30	Carl:	haha, først trodde jeg det sto 5 – 6. Men så så jeg minustegnet
31	Forsker:	Bra du oppdaget minustegnet da, men hvordan kom du frem til løsningen Carl?
32	Carl:	For å være helt sikker, siden jeg tullet litt først, så tegnet jeg opp en sånn tallinje som peker nedover. Så tullet jeg litt mer, og begynte på -4 *(begge elevene begynner å flire)*, så visket jeg ut det, begynte på -5 og hoppet 6 nedover, siden det er minus 6.

Ut fra begge utsagnene til Carl kan vi se at han roter litt i starten av denne oppgaven, før han selv påpeker i linje 32 at han tegner en tallinje for å være helt sikker. I utsagn 32 kommer det eksplisitt frem av Carl tar i bruk en tallinje som hjelpemiddel for å løse oppgaven. Med bakgrunn i utdraget over kan det tyde på at Carl benytter en vertikal tallinje som hjelpemiddel for være sikker på at svaret er korrekt.



Figur 4: Carl sin tallinje.

En elev som også bruker en visuell tallinje er Anna. Hun tegner opp en horisontal tallinje for å begrunne alle sammenligningsoppgavene.



Figur 5: Anna sin tallinje.

Ser vi på tallinjen til Anna kan vi se at hun har tegnet opp en tallinje med negative tall til venstre og positive tall til høyre. Anna velger å tegne opp tallene -5 til og med 5, og benytter den samme tallinjen for alle sammenligningsoppgavene. Når jeg spør henne om hun kan forklare tallinjen, svarer Anna "først så jeg bare på tallene, så fant jeg ut at det var de tallene jeg trengte". Videre spør jeg om de negative tallene som -7 og -100 som også er en del av tallene i oppgavene, før jeg raskt får til svar at hun kun har tatt med de tallene "krokodillemunnen" vil ha. Gjennom dialogen med Anna kan det tyde på at hun har løst alle oppgavene først, for deretter å tegne opp en tallinje for å bruke den i forklaringen sin, når hun skal gjenfortelle løsningsstrategien hun har tatt i bruk. Anna har derfor ikke tegnet en tallinje som hjelpemiddel for å løse oppgaven, men som en del av begrunnelsen for løsningene sine.

Funn fra mitt datamateriale viser at flere av elevene indikerer at de så for seg en mental tallinje når de løste oppgaven. Ved flere av oppgavene tegnet ikke elevene en fysisk tallinje, men refererte til den som en mental tallinje. Utsagnet jeg ønsker å belyse for dette funnet kommer fra Erik når han skal forklare den første oppgaven elevene fikk arbeide med. Her skulle elevene sortere tall fra minst til størst.

2	Erik:	Forestill deg en sånn termometergreie, så er det tall på den, der de høyeste tallene med minus er nederst, de som liksom er lengst fra null. For eksempel -10, -9, -8 og opp til -1, så null, vanlig 1, vanlig 2 og oppover. Så da blir det -8, -5, -4, 2, 3 og 7.

Erik sier i utsagn 2 at han ser for seg et termometer når han skal løse denne oppgaven, han refererer derfor eksplisitt til en vertikal tallinje. Videre forklarer Erik hvordan et termometer seg ut "de høyeste tallene med minus er nederst" og forklarer i tillegg med negative tall frem til null og de positive tallene kommer lengre oppover. Dette eksempelet viser at Erik ser for seg en mental tallinje når han begrunner sorteringene av tallene.

5.2.2 Kontekst

I mitt datamateriale er det fire av åtte elever som benytter seg av modellen kontekst når de arbeider med oppgavene. Kontekstbesvarelser vil være når elevene presenterer en situasjon hvor oppgaven eller regnestykket får mening i en kontekst. Ved alle besvarelsene som inneholder en kontekst, refererer elevene til en kontekst der de fokuserer på mengde. For å fremheve mine funn ønsker jeg å vise til et utdrag fra gruppesamtalen med Carl. Oppgaven Carl arbeider med er sammenligningsoppgaven 3 og -3.

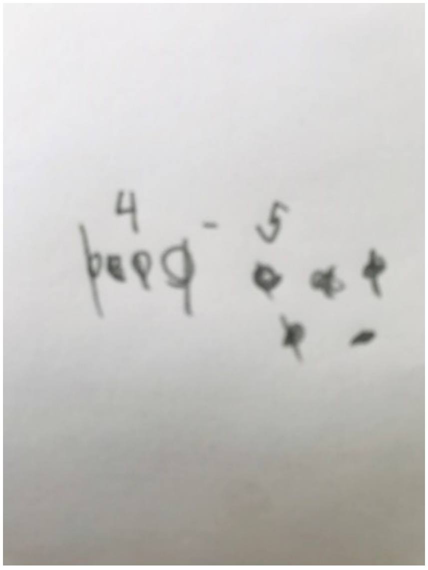
63	Carl:	Tall over null er høyere enn tall under null. Har du for eksempel tre blyanter har du mer enn hvis du skylder noen tre blyanter. Altså minus tre blyanter.
64	Forsker:	Kan man ha minus tre blyanter?
65	Carl:	Ja, fordi man kan ødelegge noen andre sine blyanter og da skylder vi dem tre stykker.

I linje 63 kan vi se at Carl først bruker en ordinal forståelse ved å argumentere for tallenes retning. Når Carl skal gi et eksempel med tall går han over til en kardinal forståelse og fokuserer på mengde. I tillegg benytter han seg av en kontekst for å illustrere løsningen for svaret. Carl bruker konteksten til å begrunne svaret i oppgaven, og ikke for å løse den. I konteksten eleven beskriver benytter han "å skylde" for å representere de negative tallene og begrepet "å ha" for de positive tallene.

5.2.3 Mengdemodell

Som nevnt i negative tall sin historie er en av de første skriftlige bevisene av negative tall fra Kina, som representerte positive og negative tall opp mot røde og svarte staver. En slik metode kan ofte knyttes til et kardinalt tallsyn, da den fokuserer på mengder objekter. I mitt datamateriale har jeg funnet en elev som benytter seg av en tilnærmet lik metode. Utdraget under er hentet fra gruppe 3, når Frida skal løse den første subtraksjonsoppgaven med negative tall.

9	Frida:	Kan jeg gjøre slik? *(Tegner opp fire hvite sirkler og fem svarte sirkler)*
10	Forsker:	Bruk den metoden du kan eller pleier å bruke.
		(Frida streker ut annenhver hvit og svart sirkel)
11	Frida:	Det gikk fort, svaret er -1.
12	Forsker:	Hvordan kom du frem til det?
13	Frida:	Pappa gjør sånn, tar bort helt til det bare har den ene igjen (…). Litt sånn (…) her ble det en minus igjen.



Figur 6: Frida sin mengdemodell.

For å løse oppgaven tar Frida i bruk en metode hvor hun tegner opp fire hvite kuler som representerer de positive tallene, og 5 svarte kuler som illustrerer de negative tallene. Hun eliminerer så en fra hver helt til hun kun sitter igjen med en svart kule. Frida konkluderer dermed for at løsningen for oppgaven må være -1. Frida representerer tallene 4 og -5 opp mot mengder av ulik farge, en kan derfor tolke at Frida bruker kardinalt tallsyn for å finne løsningen på oppgaven.

6 Drøfting

I dette kapittelet vil jeg trekke sammen trådene fra analysen, og forsøke å gi svar på spørsmålene jeg stilte innledningsvis. Forskningsspørsmålene jeg stilte var:

Hva kjennetegner utfordringene åtte elever på 4. trinn møter i arbeid med negative tall og hvilke representasjoner tar de i bruk?

Gjennom mitt analysearbeid har jeg sett på utdrag fra gruppeintervjuene som jeg har plassert i de tre kategoriene: minustegnets funksjoner, aritmetiske operasjoner med negative tall og tallenes mengde og retning. I tillegg har jeg sett på representasjoner elevene selv har tatt i bruk i arbeid med negative tall. I det kommende kapittelet vil jeg drøfte de mest sentrale funnene, se på mulige forklaringer av funnene og sammenligne funnene mot funn fra tidligere forskning. Avslutningsvis vil jeg drøfte noen av mine metodevalg for studien, som gruppeintervju, min deltagende rolle og intervjusituasjonen.

6.1 Kjennetegn ved elevers utfordringer med negative tall

I min studie har jeg funnet flere utfordringer som kan knyttes til utfordringer tidligere forskere har funnet innen temaet negative tall. Som for eksempel minustegnets funksjoner, aritmetiske operasjoner og negative talls retning og mengde. Av de ulike utfordringene er det minustegnets ulike funksjoner som skapte flest utfordringer blant elevene som deltok i min studie. Totalt fem av åtte elever opplever en eller flere ganger at minustegnets rolle kan skape vanskeligheter når de arbeider med negative tall. Forskere som Gallardo og Rojano (1994) og Vlassis (2004) belyser i sine studier at minustegnets ulike funksjoner kan være årsaken til at elevene møter utfordringer med negative tall. En av forklaringene for hvorfor utfordringer kan oppstå, er på grunn av at elevene forveksler hvilken betydning minustegnets funksjon har i ulike regnestykker. Her kan det tolkes som at de elevene som kun møter på utfordringer med minustegnet ved ett enkelt tilfelle i løpet av hele studien, har forvekslet minustegnets rolle i oppgaven. Derimot har jeg funn som viser elever som forveksler minustegnets rolle ved flere anledninger. Elevene som ved flere anledninger knytter minustegnets rolle opp mot kun en av funksjonene, kan ha en oppfatning av at minustegnet kun innehar en funksjon. Enten som en operasjon, eller som negative tall. De elevene i min studie som kun oppfatter en av minustegnets rolle knytter som oftest minustegnet til operasjonen subtraksjon. Resultatene i min undersøkelse samsvarer dermed med funnene Vlassis (2004; 2008) finner i sine studier. En av årsakene kan være at elevene frem til temaet negative tall ble introdusert, kun har erfaringer med minustegnet som en binær funksjon. Minustegnet har i flere år vært knyttet til operasjonen subtraksjon, når elevene ser minustegnet i et regnestykke, assosierer de tegnet med tidligere erfaringer. En annen forklaring kan være at elevene ikke er klar over at minustegnet også kan benyttes for å markere at et tall er negativt. For at elevene skal klare å identifisere de negative tallene, må de ha kjennskap til dem som objekter, i tillegg til å se på negative tall som tall i seg selv. Uansett hvilken funksjon av minustegnet elevene fokuserer på, er det viktig at lærere i skolen gir elever oppgaver som fremmer begge funksjonene. Elevene trenger erfaringer med begge rollene minustegnene innehar, men kan dra nytte av å bli introdusert for hver av funksjonene individuelt. Poenget med å introdusere tegnene hver for seg er at samme tegn benyttes for begge rollene. I tillegg bruker vi samme begrepet, "minus", når vi snakker om de ulike funksjonene tegnet har. Et eksempel på dette er minus 5. Her er det uvisst om det er det negative tallet -5, eller operasjonen subtraksjon, å ta bort fem. Selv om tegnene bør introduseres hver for seg, er det likevel viktig at elevene får tidlige erfaringer med begge funksjonene minustegnet har, kan forekomme i samme oppgave. I all hovedsak dreier det seg om at elevene selv må klare å skille de ulike funksjonene, noe som er mer utfordrende når samme tegnet dukker opp flere ganger i samme regnestykke.

Et av funnene som kjennetegner elevers utfordringer når de arbeider med negative tall i min studie, er overgeneralisering av addisjon og subtraksjon med de naturlige tallene. Flere av elevene prøver å tilpasse kalkulasjonene med de positive tallene inn i regning med negative tall. Som Vlassis (2004) påpeker i sin studie, vil de negative tallenes egenskaper kunne komme i strid med det elevene allerede har tillært seg om de positive tallene, og elevene kan prøve å tilpasse tidligere kunnskap om de positive tallene inn i innlæringen av negative tall. I mitt datamateriale har jeg flere typiske misoppfatninger som kommer tydelig frem. Slike misoppfatninger er at addisjon alltid vil føre til et større tall, og subtraksjon alltid vil føre til et mindre tall. I tillegg hadde flere av elevene i studien en forestilling om at større tall ikke kunne trekkes fra et mindre tall. Goldin og Shteingold (2001) fremhever i sin studie at når elever omsider lærer om negative tall er de nødt til å rive ned og rekonstruere sin kunnskap. En av årsakene til dette er at negative tall introduseres for sent. Flere forskere er derfor kritiske til at innlæringen av negative tall ikke kommer tidligere (Bishop et al. 2014; Bofferding et al. 2017). Som nevnt innledningsvis introduseres elever i dag for negative tall i løpet av fjerde årstrinn, men fra høsten 2020 vil elever introduseres for negative tall først på syvende årstrinn. Med tanke på at flere av elevene allerede på 4. trinn sliter med overgeneralisering av regler for de naturlige tallene i arbeid med negative tallene, kan det tenkes at flere vil slite når innlæringen skjer enda senere. Bakgrunnen for det er at elevene har bygget tallforståelsen rundt de naturlige tallene over en enda lengre periode, og desto lengre elever går rundt med misoppfatninger, desto vanskeligere vil det bli å rive ned og rekonstruere tallforståelsen. På 7.trinn er elevene rundt 12-13 år gamle, hvis elevene frem til da alltid har erfaring med at addisjon vil føre til et større tall, kan det for flere elever være vanskelig å bryte ned og akseptere de nye reglene som er gjeldende. En studie gjennomført av Bofferding og Wessmann-Enzinger (2017) hevder at tidlig fokus på koblinger og assosiasjoner mellom positive og negative tall kan hjelpe elevene med å unngå overgeneralisering av regler mellom de naturlige tallene og negative tall.

En annen utfordring jeg har funnet i min studie er at komponentene mengde og retning skaper en forvirring for noen av elevene i arbeid med negative tall. Et par av elevene i min studie fokuserte kun på tallenes mengde. Elevene har tidligere erfart gjennom naturlige tall, at tallenes retning og mengde er samsvarende, men når de introduseres for negative tall vil ikke retningen og mengden i addisjon og subtraksjon samsvare lengre. Elevenes evne til å variere tallsyn er dermed avgjørende når de skal løse oppgaver som inneholder negative tall. For at elevene skal bli bevisste på hvordan tallenes retning og mengde påvirker de negative tallene, trenger elevene erfaringer med oppgaver eller representasjoner som åpner muligheten for å resonnere med ulike tallsyn. Eksempelvis trenger de elevene som kun ser på tallenes mengde flere oppgaver og modeller som fremmer et ordinalt tallsyn. Ball (1993, s.379) skriver at det er viktig å få elevene til å forstå at -5 i en forstand er mer enn -1, men i en annen forstand mindre enn -1. Noe som også poengteres av Bishop et al. (2013), som argumenterer i sin studie at det er like viktig å ha forståelse for det kardinale tallsynet som det ordinale tallsynet. Bishop et al. (2013) poengterer i tillegg at en ikke kan si at en metode er bedre enn den andre. Ulike oppgaver og representasjoner belyser ulike typer forståelse for tall, og kan derfor støtte ulike måter å resonnere på. De elevene som kun fokuserer på mengden til tallene trenger dermed flere oppgaver og modeller som kan gi dem en bedre forståelse for ordinalt tallsyn, fordi det er viktig at elevene lærer å resonnere med både kardinalt og ordinalt tallsyn.

Den andre utfordringen som jeg fant i mitt prosjekt, som også er knyttet til tallenes retning og mengde, er usikkerheten rundt retningen elevene skal forflytte på seg på en tallinje når regnestykket inneholder negative tall. Denne usikkerheten kan tyde på at elevene opplever et dilemma om de skal følge tallenes mengde eller retning. Mine funn stemmer overens med funn Bofferding (2010) fremhever i sin studie. Dette tyder igjen på at elevenes forståelse for tallenes retning og mengde er avgjørende når de skal resonnere med negative tall. Altiparmak & Özdoğan (2010) påpeker også i sin studie at elevers tallforståelse er avgjørende, og at elevenes tolkning av tallenes retning og mengde er et av de viktigste stegene for å forstå de negative tallene. I all hovedsak handler denne utfordringen om å bygge opp om elevens kardinale og ordinale tallsyn og gi dem ulike oppgaver og representasjoner som underbygger de ulike tallsynene. Som lærer er det derfor avgjørende å analysere ulike representasjoner og oppgaver som elevene skal arbeide med, slik at en sikrer at begge tallsynene kommer frem i undervisningen. Skal en introdusere elevene for negative tall bør en dermed vite at modellen tallinje fremmer et ordinalt tallsyn, da den fokuserer på tallenes retning og plassering i en ordnet rekkefølge. Ønsker en derimot å fremstille en representasjon som fremmer et kardinalt tallsyn kan en benytte seg av det Freudenthal (2002) beskriver som "ny" modell, altså mengdemodellen som er hentet fra kinesisk matematikk rundt år 250 før vår tidsregning.

Som nevnt innledningsvis i kapittelet har jeg i løpet av denne studien funnet flere utfordringer elever på 4. trinn møter i arbeid knyttet til negative tall. Mine funn i denne studien er at minustegnets ulike funksjoner, overgeneraliseringer av regler for de naturlige tallene og negative talls retning og mengde skaper problemer for enkelte elever. Samtlige av mine funn kan knyttes opp mot funn fra tidligere forskning, samt sett opp mot det historiske perspektivet til negative tall. Når vi vet at negative tall har ført til utfordringer opp gjennom historien, og at flere studier viser til de samme utfordringene, er det viktig at vi retter større fokus på temaet negative tall. Samtidig vet vi også at negative tall fremdeles skaper utfordringer innen andre temaer som for eksempel algebra, er det derfor rimelig å si at fokuset på en grundig gjennomgang og en relasjonell forståelse for negative tall vil være viktig når fremtidig elever som skal introduseres for temaet. Det holder ikke å lære seg masse regneregler.

6.2 Representasjoner

I analysekapittelet redegjorde jeg for tre ulike representasjoner elever selv tok i bruk når de arbeidet med negative tall. Det var visuelle og mentale tallinjer, kontekster og mengdemodell. Bruken av tallinje, som inkluderer gradestokk og termometer, ble tatt i bruk av alle elevene under datainnsamlingen. Flere av elevene tok i bruk visuelle tallinjer for å begrunne svarene de kom med. En av faktorene kan være at elevene trengte å benytte tallinjen som hjelpemiddel for å forklare løsningsmetodene sine, mens en annen faktor kan være at jeg som forsker stilte oppfølgingsspørsmål rundt løsningsstrategiene elevene benyttet, og at de derfor tok i bruk en tallinje for å forklare seg. Samtidig som at noen elever benyttet en tallinje for å forklare løsningene sine, var det flere av elevene som brukte tallinje som hjelpemiddel for å løse oppgavene. Hvor ofte elevene tegnet opp tallinjer varierte, men flere av elevene brukte visuelle tallinjer som hjelpemiddel i mer enn tre av oppgavene. For enkelte av elevene var det avgjørende å tegne opp en tallinje for å finne løsningen i oppgaven. Flere av elevene som var usikre på løsningen eller hvordan de skulle gå frem til å løse oppgaven, benyttet etter hvert en tallinje som hjelpemiddel. De tegnet bevegelser i form av hopp, eller telte seg fra et tall og til et annet tall ut fra hvor mye de skulle addere eller subtrahere. Selv om den visuelle tallinjen både hjalp elevene med begrunnelse for løsningen, og som hjelpemiddel for å finne løsningen, var det også elever som implisitt snakket om tallinjen. Gjennom begrepene og argumenteringene elevene brukte når de skulle forklare løsningsmetodene sine, kommer det tydelig frem at flere av elevene så for seg mentale tallinjer. "Nedover", "oppover" og "mer mot null" er eksempler på ord elevene kom med, som indikerer at de benytter mentale tallinjer i sin resonnering. Det er positivt når elever tegner opp matematiske modeller som hjelp for å forklare og løse oppgaver, men jeg anser det også som veldig positivt at elevene ikke nødvendigvis er nødt til å tegne opp modellene, men klarer å ta i bruk mentale illusjoner for å resonnere eller argumentere for sine løsninger. Uansett om elevene brukte visuelle eller mentale tallinjer, er i hvert fall tallinje den modellen i min studie som er den mest fremtredende representasjonen elevene selv tar i bruk.

Jeg finner det interessant at samtlige elever i min studie benytter seg av tallinje i arbeid med negative tall. I både den utgående og den kommende læreplanen er tallinje nevnt som modell elevene skal kunne bruke når de arbeider med negative tall (Utdanningsdirektoratet, 2013; 2019). En av grunnene til at samtlige av elevene i min studie benyttet seg av tallinjer i arbeid med negative tall, kan være at matematikklæreren som har introdusert elevene for negative tall har fokusert på tallinje som hjelpemiddel. En annen mulighet er at læreverket som er benyttet under innlæringen har lagt vekt på tallinje som representasjon. Og en tredje mulighet er at flere av elevene kjenner til temperaturkonteksten, og assosierer negative tall med termometer eller gradestokk. Det kan altså være flere forskjellige muligheter, og det kan være at alle mulighetene er grunnen. I denne studien er ikke det viktigste å finne ut årsaken til hvorfor elevene benytter seg av tallinjer, men å se om elevene selv tar de i bruk og om tallinjer hjelper elevene med å unngå utfordringer. Mine funn viser at tallinjer på mange områder hjelper elevene i arbeid med negative tall, men at det kan oppstå utfordringer med hvilken retning en skal bevege seg på en tallinjer når en arbeider med addisjon og subtraksjon på en tallinje.

Når det kommer til å bruke kontekster som modeller i min studie, viser mine funn i analysekapittelet at fire av åtte elever benytter seg av en mengdekontekst for å forklare løsningene sine. To av elevene benytter en mengdekontekst for å forklare sammenligningsoppgavene av heltall. Begge elevene ser på mengden til tallene når de argumenterer for løsningene og overser dermed den unære funksjonen minustegnene har i oppgaven. Noe som medfører at løsningen i oppgaven ikke blir korrekt, og bruken av mengdekontekst kan være en av årsakene. Grunnen til dette er at tallenes retning og mengde er avvikende når det gjelder negative tall. Velger en kun å se på tallenes mengde, kan løsningen i svaret derfor bli feil. Av den grunn kan en dermed si at hvis elevene kun benytter seg av mengdekontekst for å argumentere for oppgaver som inneholder negative tall, kan modellen virke mot sin hensikt. Som nevnt i teorikapittelet påpeker Wilcox (2008) at kun fokus på mengde i kontekster kan skape en barriere når elevene arbeide med heltall. En elev som derimot klarer å benytte mengdemodellen til noe positivt er Carl, når han skal sammenligne heltallene 3 og -3. Han resonnerer seg først frem til svaret gjennom å bruke en mental tallinje, men for å tydeliggjøre resonnementet sitt velger Carl å bruke en mengdekontekst. Siden tallinje kan ses på som en ordinal modell, kan vi si at Carl tar i bruk tallenes retning i oppgaveløsningen, men ved å benytte seg av en mengdekontekst viser også Carl at han også har forståelse for tallenes mengde. Fordelen for Carl er at han tar i bruk både tallenes retning og mengde når han argumenterer for sin løsning.

Den siste representasjonen, som en elev brukte i studien, er en mengdemodell. Modellen eleven viste til i denne studien kan sies å være lik modellen Freudenthal (2002) beskriver i sin studie. Gjennom modellen representerte eleven positive tall med hvite sirkler og negative tall med svarte sirkler. Eleven benyttet videre elimineringsmetoden og sto tilslutt igjen med en svart sirkel, som medførte at svaret var -1. Freudenthal (2002) beskriver modellen som likeverdig for positive og negative tall, og at modellen gir mening både til addisjon og subtraksjon med negative tall. Selv om modellen skaper en likeverdig rolle for de positive og negative tallene er det avgjørende at elevene kjenner til både den unære og binære funksjonen minustegnet har. Hvis elevene har utfordringer med minustegnets ulike rolle kan modellen være misvisende. Men som eleven i min studie viser, fungere modellen når hun skal subtrahere et større tall fra en mindre tall.

6.3 Metodekritikk

Som tidligere nevnt er dette en liten kvalitativ studie, og generaliseringen av funnene er begrensede. Jeg har forsøkt gjennom hele prosessen å gjøre studien transparent, ved grundig og deskriptivt gjengi en beskrivelse av konteksten, datainnsamlingen og analyseprosessen. I tillegg har jeg gjennom hele studien knyttet mine funn opp mot eksisterende forskning. Til tross for dette kan jeg ikke hevde at konklusjonene i min studie vil sammenfalle med andre som studerer samme tema. I arbeid med å gjøre prosjektet transparent ønsker jeg derfor å presentere og drøfte kritikk av mitt metodevalg.

Som Postholm og Jacobsen (2018) fremhever kan gruppeintervjuer være en følsom og uheldig gruppeprosess. Blant annet kan enkeltpersoner være fullstendig dominerende, mens andre deltagere kan bli passive og stille. Det kan også gi muligheter for å endre strategivalgene sine underveis, dersom en ser at den andre personen i gruppen benytter en strategi som fungerer. Postholm og Jacobsen (2018) påpeker derfor at det stilles store krav til personen som skal lede og gjennomføre gruppeintervjuet, for at slike uheldige situasjoner skal unngås. Etter å ha gjennomført fire gruppeintervjuer med totalt åtte elever, er det ikke mulig å legge skjul på at enkelte av elevene dominerer mer enn hva andre elever gjør. Selv om jeg var nøye med å henvende meg til ulike personer jeg ønsket skulle starte forklaringen, var enkelte elever mer ivrige og kunne ved noen anledninger avbryte forklaringen til den andre gruppedeltageren. Jeg hadde på forhånd sett for meg dette scenarioet, og hadde derfor begrenset gruppeintervjuet til kun to deltagere i hvert intervju. På denne måten ble lettere å passe på at begge elevene fikk komme til. Positive sider jeg finner med å gjennomføre gruppeintervjuer er dialogen som oppstod mellom elevene. Samtalene elevene seg i mellom medførte at jeg som forsker fikk tid til å observere dynamikken og at jeg nødvendigvis ikke trengte å være deltaktiv med oppfølgingsspørsmål, fordi elevenes dialoger og forklaringer utfylte hverandre. Min rolle som forsker ble dermed ikke like fremtredende i utspørringsprosessen, når elevene selv skapte en naturlig dialog.

En annen årsak som kan ha påvirket studien er min deltagende rolle i datainnsamlingen. Jeg har aktivt deltatt med oppfølgingsspørsmål, og mine spørsmål kan til en viss grad ha påvirket elevbesvarelsene. Likevel anser jeg det som helt nødvendig, da studien fokuserer på utfordringene elevene møter i arbeid med negative tall. Ikke alle utfordringene kommer tydelig frem i løsningen til elevene og oppfølgingsspørsmålene bidro derfor til mer utdypende og forklarende svar. I tillegg til min rolle som deltagende i gruppeintervjuet, er det også jeg, alene, som har tolket og analysert datamaterialet. Ved å gi en deskriptiv beskrivelse av metode og en fremstilling av datamaterialet som utgangspunkt for mine analytiske utsagn, har jeg arbeidet for å sikre troverdighet i mine utsagn.

Som Cohen et al. (2011) påpeker kan også intervjusituasjonen elevene deltok i ha påvirket resultatet. Både gjennom min informasjon om studien, og det faktumet at lydopptak ble brukt, medfører at situasjonen er noe annerledes enn en undervisningssituasjon. Cohen et al. (2011) belyser at for enkelte elever kan det oppleves som skremmende når lydopptak gjennomføres. Når det er sagt hadde prosjektet og datainnsamlingen vært til dels umulig å utføre uten bruk av lydopptaker eller videokamera, og flere av elevene i studien poengterte i etterkant av innsamlingen at de hadde glemt at det ble tatt lydopptak. Men selv om lydopptakeren ble glemt var fremdeles situasjonen en uvant opplevelse for elevene. Det er ikke en vanlig hverdagssituasjon for elevene å delta i en forskningsoppgave, og heller ikke bli med en ukjent voksen inn på en grupperom for å forklare og begrunne hvordan de hadde jobbet og løst oppgavene. På den ene siden kan dette ha påvirket funnene i studien, men på den andre siden kan analysen av elevutsagnene blitt tolket mer objektivt, da jeg ikke hadde kjennskap til elevene fra tidligere.

7 Avslutning

Hensikten med denne masteroppgaven var å kartlegge hvilke utfordringer 4. trinnselever møter når de arbeider med negative tall, og hvilke representasjoner de selv tar i bruk for å løse oppgaver som inneholder negative tall. Målet for denne masteroppgaven var å skape et større innblikk i utfordringer yngre elever møter under innlæringen av negative tall. For å undersøke elevenes utfordringer og representasjonsbruk, ble elevene bedt om å løse ti oppgaver som innebar sortering og sammenligning av heltall, addisjon og subtraksjonsoppgaver med negative tall og to tekstoppgaver. For å få en dypere innsikt og forståelse for elevenes utfordringer og bruk av representasjoner har jeg benyttet meg av en kvalitativ tilnærming. Datamaterialet er samlet inn fra fire semi-strukturerte gruppeintervjuer med totalt åtte elever fra fjerde årstrinn.

Gjennom analysen av datamaterialet kommer det frem at minustegnet på flere måter skaper utfordringer for elevene. Ved bruk av Gallardo og Rojano (1994) sin inndeling av minustegnets funksjoner, har jeg kartlagt hvilke utfordringer minustegnet fører med seg. Jeg har i denne studien sett nærmere på to av minustegnets funksjoner, og funnet ut at flere elever opplever utfordringer med minustegnets unære og binære rolle. Funn fra min analyse viser at elevene som møtte på denne utfordringen som oftest knytter minustegnet til kun en av funksjonene. Den andre utfordringen som ble kartlagt i studien er elever sine utfordringer med aritmetiske operasjoner med negative tall. Overgeneralisering av regneregler for de naturlige tallene preger elevenes utfordringer. Misoppfatninger som at en ikke kan trekke fra et større tall fra et mindre tall, at addisjon alltid vil føre til et større tall og at subtraksjon vil resultere i en mindre tall, var en gjenganger blant elevene. Flere av elevene prøvde å tilpasse regnereglene med de positive tallene inn i regning med negative tall. Den tredje og siste utfordringen som ble kartlagt er tallenes retning og mengde. Noen av elevene i min studie så kun på en av tallenes komponenter, noe som ga elevene utfordringer når det kom til addisjon og subtraksjon med negative tall. De elevene som fikk størst utfordring var de elevene som kun så på tallenes mengde når de løste og resonnerte rundt oppgavene.

Når det gjaldt bruk av representasjoner for å løse oppgaver med negative tall var tallinje den modellen som ble brukt ved flest anledninger i min studie. Samtlige av elevene benyttet tallinje en eller flere ganger for å løse oppgavene de arbeidet med. Noen elever nevnte tallinjen eksplisitt i form av ordene tallinje, termometer eller gradestokk. Andre valgte å visualisere tallinjen for å løse oppgavene, mens noen elever tok i bruk mentale tallinjer. Flere av elevene brukte mer enn to av tallinjemodellene for å løse ulike oppgaver. Tre av elevene i min studie tok i bruk kontekst som modell for å løse oppgaven. Alle fire elevene tok i bruk en mengdekontekst, men kun en av elevene resonnerte med retning i tillegg til konteksten. Den siste representasjonen som ble benyttet i min studie er mengdemodellen. Mengdemodellen ble kun tatt i bruk av en elev ved en anledning. Eleven representerte positive og negative tall gjennom hvite og svarte sirkler, og tok i bruk elimineringsmetoden som å komme frem til løsningen.

Som nevnt i metodekapittelet kan ikke resultatene i min kvalitative studie generaliseres til å gjelde alle elever ved 4. trinn, men forskningsresultatenes overførbarhet kan fremdeles belyses. Alle mine funn i denne studien samsvarer med tidligere forskning og negative talls historie. En kan dermed anta at mine resultater kan overføres til lignende forskning. Dermed håper jeg at min studie kan bidra til at lærere i større grad får innsikt i utfordringer elever kan møte i arbeid med negative tall, og at min studie kan være et utgangspunkt for lærere til å reflektere over sin undervisning av temaet negative tall.

Avslutningsvis ønsker jeg å komme med implikasjoner for videre forskning, og tips til lærere som underviser temaer som inneholder negative tall. Når det kommer til videre forskning finner jeg det spennende at flere forskere de siste årene har rettet større fokus mot yngre elevers forståelse for negative tall, der flere studier belyser potensialet rundt hvordan yngre elever aksepterer og resonnerer med negative tall (Bishop et al., 2014). For videre studier hadde det derfor vært spennende å se hvordan norske elever presterer i arbeid med negative tall, nå som innlæringen vil komme på et senere tidspunkt. Vil overgeneraliseringer for regler for de naturlige tallene minke eller øke? Og når vi vet at negative tall er en av årsakene til at elever opplever utfordringer med algebra, er det positivt eller negativt at innlæringen kommer tett opp mot introduksjonen eller etter innlæringen av algebra?

Etter mye lesing i forskningsartikler og erfaringer fra min egen studie, sitter jeg igjen med en del tips jeg selv kommer til å ta med meg videre inn i læreryrkey, og som andre lærere forhåpentligvis kan dra nytte av. Tydeliggjøring av minustegnets funksjoner er viktig når elevene introduseres for negative tall. I tillegg vil resonneringene elevene gjør med mengde og retning spille en vesentlig rolle når negative tall introduseres. Og helt til sist er det viktig at lærere ved innlæring av de naturlige tallene ikke bidrar til overgeneraliseringer for regnereglene som ikke vil være gjeldende for negative tall.

Litteraturliste

Altiparmak, K. & Özdoğan, E. (2010). A study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 41*(1), 31-47. doi: 10.1080/00207390903189179

Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *The Elementary School Journal, 93*(4), 373 -397. doi: 10.1086/461730

Bofferding, L. (2010). Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign. *I Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6), 703-710.

Bofferding, L., Aqazade, M., & Farmer, S. (2018). Playing with integer concepts: A quest for structure. *I Exploring the Integer Addition and Subtraction Landscape*, 3-23. Springer, Cham.

Bofferding, L. & Wessmann-Enzinger, N. (2017). Subtraction involving negative numbers: Connecting to whole number reasoning. *Mathematics Enthusiast, 14*(1-3), 241-262.

Bishop, J.P., Lamb, L.L., Phillipp, R.A., Whitacre, I., Schappelle, B.P. & Lewis M.L. (2014). Using order to reason about negative numbers: The case og Violet. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1)m 39-59. doi:10.1007/s10649-013-9519-x

Bruno, A. & Martinon, A. (1999). The teaching of numerical extensions: The case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(6), 789-809.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Eder, D. & Fingerson, L. (2001). Handbook of Interview Reseach (s. 181-201): SAGE Publications, Inc doi:10.4135/9781412973588

Fangen, K. (2010). *Deltagende observasjon* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Fischer, M. H. & Rottmann, J. (2005). Do negative numbers have a place on the mental number line? *Psychology Science 47*(1), 22-32.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Gallardo, A. (1995). Negative Numbers in the Teaching of Arithmetic. I D. Owans, M. Reed & G. Millsaps (red.). *Conference proceedings of the 17th annual meeting for the* *psychology of mathematics education in North America.* (Vol. 1), 158-163. Ohio, North America. PME.

Gallardo, A. (2002). The Extension og the Natural-Number Domain to the Integers in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 49(2),* 171-192.

Gallardo, A. & Rojano, T. (1994). *School Algebra: Syntactic difficulties in the operativity with negative numbers.* I Proceedings of the 16th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 159-165.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development og Mathematical Concepts. I A. A. Cuocu (red.) *The Roles of Representations in School Mathematics* (s.1-23). Reston V A: National Council of Teachers of Mathematics.

Greig, A., Taylor, J. & MacKay, T. (2013). *Doing reseach with children: a practical guide* (3.utg.). Los Angeles, Calif: SAGE.

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (4. utg.). Oslo: Abstrakt forlag AS.

Kilhamn, C. (2009). Addition and subtraction of negative numbers using extensions of the metaphor "arithmetic as motion along a path". *I Winsløw, C. (Red.). Nordic research in mathematics education. Proceedings from Norma08*, 17-23.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers* (Doktorgradsavhandling), Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg.

Kroknes, T.-E., Kavén, A., Persson, H., & Ødegaard, E. (2014). *Matemagisk 4a – Grunnbok* (Bokmål. utg.). Oslo: Aschehoug.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lamb, L. L., Bishop, J. P., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., Whitacre, I., & Lewis, M. (2012). *Developing symbol sense for the minus sign. Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(1), 5-9.

Linchevski, L. & Williams, J. (1999). Using Intuition From Everyday Life in 'Filling' the gap in Children's Extension of Their Number Concept to Include the Negative Numbers. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 131-147. doi: 10.1023/A:1003726317920

Manchester, P.D. (2011). Young Children Conceptualize the Relationships Among Positive and Negative Numbers and Zero. *Kent State University.*

Mosvold, R. (2002). *Genesis principles in mathematics education*. Hentet fra https://openarchive.usn.no/usn-xmlui/bitstream/handle/11250/2439974/Rapp-2002-09.pdf?sequence=1

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

Peled, I., & Carraher, D. W. (2008). Signed numbers and algebraic thinking. *Algebra in the early grades,* 303-328.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Prather, R.W. & Alibali, M.W. (2008). Understanding and using principles of arithmetic: Operations involving negative numbers. *Cognitive science, 32*(2), 445-457.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.

Thomaidis, Y. (1993). Aspects of negative numbers in the early 17th century. *Contributions from History, Philosophy and Sociology of Science and Mathematics, 2*(1), 69-86. doi:10.1007/BF00486662

Tjora, A. (2012) *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2.utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag.* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-4.-arstrinn?lplang=http://data.udir.no/kl06/nob

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05).* Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv17

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction, 14(5),* 469-484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012

Vlassis, J. (2008). The Role of Mathematical Symbols in the Development of Number Conceptualization: The Case of the Minus Sign. *Philosophical Psychology, 21(4),* 555-570. doi:10.1080/09515080802285552

Whitacre, I., Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., & Lewis, M. (2011). Integers: History, textbook approaches, and children's productive mathematical intuitions. *Paper presented at the Proceedings of the 33rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 913-920.

Whitacre, I., Azuz, B., Lamb, L. L., Bishop, J. P., Schappelle, B. P., & Philipp, R. A. (2017). Integer comparisons across the grades: Students' justifications and ways of reasoning. The *Journal of Mathematical Behavior,* 45, 47-62.

Wilcox, V. B. (2008). Questioning Zero and Negative Numbers. *Teaching children mathematics*, *15*(4), 202-206.

Vedlegg 1

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Master i matematikkdidaktikk ved NTNU. "Hvordan lærer elevene matematikk" med fokus på negative tall

Referansenummer

442266

Registrert

23.09.2019 av Anniken Rødset - annikro@stud.ntnu.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet NTNU / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Ole Enge, ole.enge@ntnu.no, tlf: 98483281

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Anniken Rødset, anniken.rodset@ou.trondheim.kommune.no, tlf: 98880483

Prosjektperiode

26.08.2019 - 31.05.2020

Status

04.10.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

04.10.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 4.10.2019. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.5.2020.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Håkon J. Tranvåg

Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 2

Vil du delta i forskningsprosjektet
"Hvordan lærer elevene matematikk"?

Til foresatte for elever på 4. trinn ved Lade skole

Formål
Jeg, Anniken Rødset, er masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt ved Lade skole. Formålet med prosjektet er å finne ut hvilke strategier og metoder elever på 4.trinn benytter når de arbeider med negative tall. Dette innebærer at elevene løser noen matematiske oppgaver, mens jeg observerer og stiller spørsmål til elevene underveis og etter arbeidet med oppgavene. Datainnsamlingen vil foregå i løpet av høsten 2019, og leveringen av den ferdigstilte masteroppgaven er i mai 2020.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Lade skole er valgt ut som prosjektskole fordi jeg har arbeidet her siden januar 2015.

Hva innebærer det for deg å delta?
For de elevene som deltar i dette forskningsprosjektet innebærer det å løse noen matematikkoppgaver og forklare hvordan de har løst oppgaven. Opplysningene som samles inn vil kun være elevbesvarelser og elevenes forklaringer. Det vil bli tatt lydopptak under innsamlingen.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis foresatte samtykker til deltakelse i prosjektet, blir elevene spurt om de ønsker å være med. Dersom eleven sier nei, respekteres dette selv om foresatte har samtykket. Hvis foresatte og eleven velger å delta, kan dere når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om eleven vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for noen hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke dere.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Jeg vil kun bruke opplysningene om ditt barn til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun jeg som har tilgang til det innsamlede datamaterialet. Min prosjektgruppe og veileder, Ole Enge, vil ha tilgang til datamaterialet først etter at det er anonymisert. Lydopptaket vil kun være tilgjengelig for meg og vil transkriberes så raskt som mulig etter samtalene er gjennomført, og deretter slettet. I transkripsjonen vil navn på alle elever bli erstattet med et pseudonym, slik at de eneste opplysningene som kommer fram vil være alder (4. klassinger) og kjønn. Elevene vil derfor ikke kunne gjenkjennes ved en eventuell publikasjon. Prosjektet skal etter planen avsluttes mai 2020, og da vil lydopptak med eventuelle personopplysninger allerede være slettet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til prosjektet, ta kontakt med:
▪ Anniken Rødset, på epost anniken.rodset@ou.trondheim.kommune.no
▪ NTNU, Institutt for lærerutdanning, ved Ole Enge, på epost Ole.enge@ntnu.no
▪ NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost personvernombudet@nsd.no eller telefon: 55 58 21 17

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig Student
Ole Enge

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjonen om prosjektet. Jeg samtykker til at mitt barn:

€ Kan delta i dette forskningsprosjektet.

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. mai/juni 2020.

Elevens navn:____

(Signert av foresatte, dato)

NTNU
Kunnskap for en bedre verden