Ingrid Røn

Introduksjon av en geometrisk mønsteroppgave på åttende trinn

En studie av elevers utforsking, og forslag til et undervisningsopplegg

Masteroppgave i Master i matematikkdidaktikk 5. – 10. trinn

Veileder: Per Gunnar Østerlie

Mai 2020

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Ingrid Røn

Introduksjon av en geometrisk mønsteroppgave på åttende trinn

En studie av elevers utforsking, og forslag til et undervisningsopplegg

Masteroppgave i Master i matematikkdidaktikk 5. – 10. trinn
Veileder: Per Gunnar Østerlie
Mai 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne masteroppgaven handler om en introduksjon av et geometrisk mønster på ungdomsskolen. Ifølge forskning kan elevene med riktig oppbygde oppgaver, over tid utvikle en dypere forståelse av algebra og funksjoner. Viktige faktorer i prosessen er blant annet at elevene må resonnere og bruke varierte representasjoner. Selv om denne masteroppgaven ikke går over lengre tid, hvor utvikling av forståelse hos elevene uteblir, kan man likevel se på potensialet med slike oppgaver som en innføring til algebra og funksjoner. I tillegg kan masteroppgaven gi informasjon om hvordan problemstillinger til geometriske mønstre kan bygges opp, og gi innsikt i hva slags type resonnementsstrategier og representasjoner, som kan oppstå i undervisningen. Introduksjonen av den geometriske mønsteroppgaven er også i tråd med flere av kjerneelementene fra den nye læreplanen, som blir gjeldende i Norge fra våren 2020.

Forskingstilnærmingen baserer seg på trekk fra designforskningen, som er en egnet metode for å knytte sammen teori og praksis. Oppbyggingen av problemstillinger til det geometriske mønsteret, som elevene skulle utforske, er grunnet i teorien om funksjonstenking. Den geometriske mønsteroppgaven er i hovedsak utviklet av forskere. Selve undersøkelsen bygger på observasjon av en åttendeklasse, med til sammen 16 elever. Datagrunnlaget består av logg, lyd- og videoopptak, som videre brukes i analysen, og er med på å underbygge og besvare forskningsspørsmålene mine.

Resultatene fra studien kan tyde på at introduksjon av geometriske mønstre virket interessant for elevene, hvor de viste variert bruk av representasjoner og flere resonnementsstrategier gjennom utforskingen. Elevene gikk fra å bruke uformelle måter å uttrykke seg på i matematikk (tegninger og naturlig språk), til mer formelle måter å uttrykke seg på (bruk av symboler og formler). Det mest oppsiktsvekkende var at noen av de uformelle representasjoner, som jeg ikke har sett i tidligere forskning, så ut å være en støtte for elevene gjennom hele prosessen.

Abstract

This master's thesis deals with the introduction of a geometric pattern in secondary school. According to research, students with properly constructed tasks can, over time, develop a deeper understanding of algebra and functions. Important factors in the process include that students must reason and use varied representations. Although this master's thesis is limited in duration, where the development of understanding in the students is lacking, one can still look at the potential of such tasks as an introduction to algebra and functions. In addition, this thesis can provide information on how problems for geometric patterns can be constructed and provide insight into the kinds of reasoning strategies and representations that can arise in the teaching. The introduction of the geometric pattern assignment is also in line with several of the core elements of the new curriculum, which will be applicable in Norway from spring 2020.

The research approach is based on features from design research, which is a suitable method for linking theory and practice. The construction of problems for the geometric pattern, which the students will explore, is grounded in the theory of functional thinking. The geometric pattern task is mainly developed by researchers. The study itself is based on observation of an eighth grade with a total of 16 students. The data base consists of logs, audio and video recordings, which are further used in the analysis, and help to substantiate and answer my research questions.

The results of the study may indicate that introducing geometric patterns seemed interesting to the students, showing varied use of representations and several reasoning strategies through exploration. The students went from using informal ways of expressing themselves in mathematics (drawings and natural language) to more formal ways of expressing themselves (using symbols and formulas). The most surprising result was that some of the informal representations, which I have not seen in previous research, seemed to support the students throughout the process.

Innholdsfortegnelse

Figurer

Tabeller

Bilder

Skriftlig besvarelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for masteroppgaven

Forskermiljøet har over lengre tid kritisert hvordan algebra læres i skolen. Blant annet hevdes det at flere elever misliker algebra, siden de blir utsatt for rene regnetekniske prosedyrer for manipulering av symboler (Kaput, 1999, s. 134). Jeg kan bekrefte fra flere års erfaring i norsk skoleverk, at dette fremdeles er gjeldende. Mitt inntrykk er at flere lærere har manglende kunnskap rundt emnet, og at det fremdeles benyttes eldre lærebøker i norsk skole, som brukes uten kritiske blikk. I tillegg viser TIMSS-undersøkelsen (Trends in International Mathematics and Science Study) i matematikk i 2015, at norske elever er på middels nivå i et europeisk perspektiv, og det er særlig emneområdet algebra som trekker ned gjennomsnittsskåren (Utdanningsdirektoratet, 2016).

Det er ikke bare min oppfatning at lærere har manglende kunnskap rundt emnet algebra, flere forskere hevder nemlig det samme. Undervisning og læring av algebra anses å være et viktig politisk problem rundt om i verden (Hodgen, Küchemann & Brown, 2010). Flere forskere hevder også at motstanden mot algebra i videregående skole kan reduseres, dersom aritmetikk og algebra sees i sammenheng (Cai & Moyer, 2008; Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006). I tillegg er en viktig faktor å utvikle elevenes algebraiske tenking på et tidlig tidspunkt i utdanningsløpet. Den stadig mer komplekse matematikken i det 21. århundre, vil kreve at elever har en dypere forståelse av matematisk struktur, som er viktigere enn ren beregning med aritmetikk (Romberg & Kaput, 1999).

Høsten 2020 trer den nye læreplanen i kraft i norsk skole, og forventinger fra den nye læreplanen vil kreve endring i nåværende undervisningspraksisen i matematikk, og da spesielt innen kjerneområdet algebra. Etter å ha lest forskningslitteratur og studert den nye læreplanen, oppdaget jeg at flere av begrepene og prinsippene pekte i samme retning. Blant annet fremheves utforsking av mønstre og tilegnelse av varierte representasjoner og resonnement som viktige faktorer (Utdanningsdirektoratet, 2019a).

På bakgrunn av observasjonene ovenfor, har jeg gjort et dypdykk i forskningslitteraturen, som veiledet meg i hvordan lærere kan hjelpe elevene i gang med algebra, tidlig på ungdomsskolen. En av metodene som ser ut til å være en effektiv inngangsport til algebra, er aktiviteter som oppfordrer elever til å utforske geometriske mønstre. Utforsking av mønstre er faktisk avgjørende i all matematikk, det er også avgjørende i alle vitenskapelige disipliner. Elever som prøver å uttrykke sin opplevelse av mønstre på en matematisk måte, er i en utmerket posisjon til å lære seg algebraisk språk og delta i algebraiske aktiviteter (Lee & Freiman, 2006). Derfor er det viktig at lærere legger opp til aktiviteter, som faktisk kan bidra til å utvikle elevenes algebraiske tenkning.

National Council of Teachers of Mathematics (2000) påpeker at flere lærere legger opp til noe de tror er utforsking av mønstre, men at algebraisk tenking ofte uteblir. Lærere vet kanskje at mønsterforsking er viktig, men de mangler kunnskap om hvordan man kan videreutvikle det til algebraisk tenking. Mitt forskningsprosjekt kan være et bidrag til å belyse viktige faktorer som bør inkluderes i algebraundervisningen, samt metoder som kan brukes for å analysere elevenes arbeid. I følge Stacey og Chick (2004), er det et behov for forskere som forsøker å danne kunnskap innen algebra. Denne kunnskapen kan videreføres til lærere, slik at de på alle klassetrinn kan fremme konseptuell læring[1], snarere enn «standard»-tilnærmingen de selv lærte på skolen

1.2 Tidligere forskning

Algebraundervisning har blitt kritisert over lang tid, og det har vært en rekke oppfordringer fra forskere om å skape endringer (Carraher & Schliemann, 2007; Greenes et al., 2001; Kaput, 2008). Blant annet har reformarbeidet i USA skapt oppmerksomhet med sin funksjonsbaserte tilnærming, for å lære algebra de siste tiårene. Mens i den australske læreplanen er det en kombinasjon av både tradisjonelle og reformerende tilnærminger til algebraundervisning (Sutherland, 2002). Likevel er det kontinuerlige utfordringer å fastslå hvilken av tilnærmingene, eller en kombinasjon av begge deler, som kan være den mest effektive for å hjelpe elevene til å utvikle en helhetlig forståelse av funksjoner (Wilkie & Ayalon, 2018).

Mitt ståsted som forsker i denne masteroppgaven, retter seg mest mot USA sin reform, hvor det er en funksjonsbasert tilnærming for å undervise i algebra. Det er imidlertid vanskelig å finne en generell teori, uavhengig av kultur og tidsrom, som kan støtte samtlige elever i algebraundervisning i hele verden. Tidligere forskning og teorier kan likevel gi meg et godt grunnlag i forskningsprosessen. Samtidig må jeg ta et forbehold om at resultatene fra denne forskningen kan gi andre utslag ut ifra vår undervisningskultur i Norge. I senere avsnitt henviser jeg til tidligere forskning innen områdene som berøres i denne masteroppgaven. Områdene omhandler funksjonstenking, geometriske mønstre, resonnering og representasjoner. Flere av referansene jeg henviser til er forskning fra USA over en 20-års periode, fra 1996 til 2018.

I forbindelse med geometriske mønstre (voksende mønstre), brukte Warren og Cooper (2008), konkrete materialer for å få barneskoleelever til å konstruere voksende mønstre. Dette førte til at elevene fikk støtte i prosessen med å forstå mønstre og sekvenser. De fant også ut at spesifikke spørsmål, for å markere relasjonen mellom elementene i mønsteret og posisjonen til tallet, kunne støtte elevenes evne til å generalisere eksplisitt. Radford, Bardini og Sabena (2007) fremhever også at det er viktig å gi oppmerksomhet til visualiseringen, for å utvikle generalitet og en eksplisitt formel. Driscoll (1999) støtter også oppmerksomheten til visualisering, og hevder at algebra i ungdomsskolen kan gjøres mer interessant for elever, hvis regneoppgaver kan forklares med geometriske visuelle termer. Elever viser seg å tenke visuelt om matematiske ideer og begreper. Elever bør få mulighet til å resonnere i arbeid med algebraoppgaver, ikke bare etablere en formel for et mønster, ved å følge regler eller teknikker.

1 Konseptuell læring er læring som inkluderer matematiske sammenhenger, resonnering og problemløsning (Stacey & Chick, 2004).

Friel og Markworth (2009) har forsket og utviklet et rammeverk, som kan brukes til å karakterisere naturen og kompleksiteten til geometriske mønsteroppgaver. I rammeverket inkluderes ulike numeriske og figurative måter å resonnere på, og hvordan slike oppgaver kan utvikle elevenes funksjonstenking. Lee og Freiman (2006) undersøkte hvordan lærere kunne bruke mønsteroppgaver i undervisning og inkludere algebraisk tenking, samt introduserte elevene for en mer formell studie av algebra på ungdomsskolen. Wilkie (2014) forsket på en rekke oppgaver som kan fremkalle elevenes bevis for funksjonstenking i ulike sammenhenger, og deres generalisering av voksende figurmønster, samt kunnskap om variabler og bruk av flere representasjoner på ungdomsskolen. Hun ønsket med sin forskning å bidra til innsikt i tilgjengelige strategier og ressurser, som kan støtte læreren til profesjonell undervisning i algebra.

Smith (2008) foreslo et rammeverk for funksjonstenking, der algebraisk tenking oppstår når eleven selv finner opp eller anvender representasjonssystemer for å representere generaliseringer av relasjonen mellom variabler. Prosessen innebærer å engasjere seg i en situasjon som handler om funksjoner, hvor elevene kan lage en oversikt over tilsvarende verdier (for eksempel med tegning, tabell eller grafisk). Deretter kan elevene søke etter mønstre, ved hjelp av de tidligere representasjonene. Blanton og Kaput (2004) fant ut at lærere kunne støtte grunnskoleelever til å utvikle og bruke en rekke representasjonsverktøy, som elevene kunne bruke når de skulle gi en begrunnelse for funksjonene. Ved at elevene fikk jobbe med å beskrive funksjoner med ord og symboler, både med rekursiv og eksplisitt generalisering, kunne de bruke symbolspråk som modell og løse likninger med ukjente mengder (Blanton & Kaput, 2005; Moss, Beatty, Barkin & Shillolo, 2008).

1.3 Problemstilling, avgrensning og metode

Det virker til å være et behov for økt kunnskap rundt gode aktiviteter, som kan bidra til funksjonstenking i matematikkundervisningen. Forskningen kan bidra med innsikt i tilgjengelige strategier og ressurser, som kan støtte lærere som underviser i algebra (Wilkie, 2014). På bakgrunn av dette, ville jeg undersøke hvordan man kan innføre en geometrisk mønsteroppgave blant norske elever, som inkluderer algebraiske resonnement og varierte representasjoner. Jeg ønsket også å undersøke elevenes arbeid, som kunne være et grunnlag for revidering av undervisningsopplegget. I tillegg ble teori og praksis knyttet sammen, i forbindelse med analyse av elevarbeidene. Dette kan være et eksempel på hvordan man kan identifisere elevers representasjoner og resonnement. Mine forskningsspørsmål ble dermed som følger:

1. Hvordan kan introduksjonen av en geometrisk mønsteroppgave utformes for å hjelpe elevene i gang med funksjonstenking på åttende trinn?
2. Hvordan representerer elevene resonnementsstrategiene sine gjennom utforskingen av det geometriske mønsteret, og hva slags resonnementsstrategier bruker de?

For å kunne svare på forskningsspørsmålene, var det nødvendig å observere og analysere elevenes arbeid med det geometriske mønsteret. Slik kunne jeg få et innblikk i elevenes måter å representere sine resonnement på, i forbindelse med oppgaveløsningen. Som metode i gjennomføringen av forskningsprosjektet valgte jeg å bruke trekk fra pedagogisk designforskning, og kan best relateres til typen «classroom design experiment» (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer & Schauble, 2003, s. 9). Med andre ord vil det si en intervenerende studie i tre faser, som inkluderte en forberedende fase, en utprøvende fase og en fase med analyse.

I forbindelse med de tre fasene ble det første forskningsspørsmålet knyttet til den forberedende fasen. Dette var en foranalyse av undervisningen eller designet av undervisningsopplegget. Den utprøvende fasen handlet i hovedsak om å skaffe praktiske data og erfaringer i forbindelse med innføringen av den geometriske mønsteroppgaven, som elevene skulle undersøke. Til slutt var fasen med analysen, som i hovedsak inkluderte forskningsspørsmål nummer to. Her så jeg på elevenes utforsking av den geometriske mønsteroppgaven, for å identifisere deres representasjoner og resonnementsstrategier.

Formålet med dette prosjektet var ikke å kartlegge effekten av innføringen av den geometriske mønsteroppgaven, men å skape innsikt i didaktiske muligheter og utfordringer en slik type introduksjon kan ha.

Siden forskningen hadde en begrenset lengde, og at elevene og skolen jeg undersøkte var ukjent, fokuserte jeg på introduksjonen av et geometrisk mønster for åttendetrinnselever. Min hypotese var, at allerede i en introduksjonsfase, kunne elevene ved hjelp av gode problemstillinger og egnet vanskegrad, resonnere seg frem til et algebraisk uttrykk via visuell og numerisk tilnærming. I tillegg trodde jeg at elevene kunne vise oppbygging av det geometriske mønsteret på flere måter, og at de brukte flere varierte representasjoner gjennom utforskingen. Forutsetningene for elevene, var at de ikke hadde jobbet med algebra tidligere, og de fikk lite veiledning underveis i prosessen. Elevene kunne imidlertid støtte seg på hverandre i gruppearbeidet, som overordnet kunne relateres til et sosiokulturelt syn på læring. Kommunikasjon og språkbruk ble sentralt og fungerte som bindeledd mellom individet og omgivelsene (Säljö & Moen, 2001).

Begrepet «algebra» er allerede nevnt flere ganger, og jeg vil presisere at algebra i forbindelse med denne oppgaven defineres av Kaput (2008). Algebra er ikke et isolert fagområde, men en måte å tenke og løse problemer på, noe som foregår gjennom hele skoleløpet. Algebra handler blant annet om å registrere systemer og mønstre på en matematisk måte. I tillegg inkluderer algebra tanker, resonnementer, refleksjoner og arbeidsmåter. Algebra er med andre ord ikke bare «regning med bokstaver» ved hjelp av prosedyrer.

1.4 Oppgavens oppbygging

Overordnet er denne masteroppgaven delt inn i fem deler: teori, metode, foranalyse, analyse, diskusjon og avsluttende refleksjoner. Teorien tar for seg sentrale begreper som i hovedsak danner grunnlaget for analysen av det innsamlede datamaterialet. Her utdypes spesielt begrepene funksjonstenking, geometriske mønstre, resonnementsstrategier, representasjoner og begrunnelse.

Metodekapittelet er et slags rammeverk for selve forskningsprosessen, hvor det argumenteres for hvorfor trekk fra designforskning var egnet som metodetilnærming for å besvare mine forskningsspørsmål. I tillegg blir omstendighetene rundt forskningsprosjektet klargjort med utvalget, datainnhentingen, analysetilnærmingen og forskningsetikken.

Foranalysen inneholder beskrivelser av valg og refleksjoner om designet rundt gjennomføringen av den geometriske mønsteroppgaven. Her legges blant annet aktuelle kompetansemål og kjerneelement frem, samt omstendigheter rundt undervisningen. Kjerneelementene vil fungere som undervisningsprinsipper som alle i undersøkelsen skulle forholde seg til. Til slutt blir utformingen av problemstillingene i den geometriske mønsteroppgaven synliggjort, som er basert på tidligere forskning. Den geometriske mønsteroppgaven er delt inn i tre faser, og brukes som struktur i analysen.

Analysen tar for seg situasjoner som viser seg interessante i forbindelse med gjennomføringen av undervisningen på åttende trinn, og som kan belyses av teori. De tre fasene fra den geometriske mønsteroppgaven blir analysert med sentrale begreper fra teorien.

Diskusjonen tar for seg refleksjoner rundt resultatene fra analysen, med utgangspunkt i de sentrale begrepene fra teorien. Resultatene fra analysen settes også i sammenheng med teori, foranalyse og tidligere forskning. Det blir også en refleksjon og oppsummering av selve introduksjonen av den geometriske mønsteroppgaven, med et forslag om en revidert utgave.

2 Teori

Teorikapittelet inkluderer sentrale teorier som danner grunnlagt for masterprosjektet. Først blir teorien om funksjonstenking belyst, som er overordnet teori i forskningsprosjektet. Deretter beskrives teorien bak det geometriske mønstret, og matematikken som ligger til grunn. Til slutt beskrives de sentrale begrepene som benyttes i analysen av elevarbeidene, som omhandler resonnementsstrategier, representasjoner og begrunnelse.

2.1 Funksjonstenking som en vei mot algebraisk tenkning

Algebra og algebraisk tenking kan komme i flere sammenhengende former med ulike teorier. I denne masteroppgaven er fokuset på funksjonstenking, en retning som inkluderer generalisering i undervisningen. Funksjonstenking kan sees som en type algebraisk resonnement, som blant annet inkluderer utforsking av mønstre ved hjelp av representasjoner. Forskerne Blanton og Kaput (2005) beskriver et algebraisk resonnement, som en prosess hvor elever generaliserer matematiske ideer fra et sett med spesielle tilfeller. Videre kan elevene etablere generaliseringer gjennom argumentasjon, hvor de uttrykker generaliseringen på stadig mer formelle måter (Kaput, 1999). I de to neste avsnittene gis to eksempler, av min forenklede tolkning av et algebraisk resonnement.

Vi kan se for oss en rekke med partall 2, 4, 6.. og så videre, med tilhørende posisjoner 1, 2 og 3.. i rekkefølge. Ved å undersøke sammenhengen mellom partallene og posisjonen til partallene, kan vi for eksempel oppdage at partallet er det dobbelte av verdien av tallets posisjon. Dette kan uttrykkes med flere symbolske regneeksempler, som kan skrives slik: $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 2 = 6$. En måte å argumentere for at regneksemplene kan fungere, kan høres slik ut: «partallet er dobbelt så stort som posisjonsnummeret. Ved å doble posisjonsnummeret vil vi få partallet i disse regneeksemplene (spesifikke tilfellene)».

Videre kan vi finne et algebraisk uttrykk, som gjelder alle partall ved for eksempel å generalisere ut ifra de symbolske regneeksemplene. Resonnementet kan lyde slik: «tallets posisjon varierer, og vi kan uttrykke det med n. Videre er doblingen av tallets posisjon konstant, som vi kan uttrykke det med «gange to». Svaret vi får vil avhenge av tallets posisjon, som vi kan kalle f(n)». Det algebraiske uttrykket som beskriver alle partall kan skrives $n \cdot 2 = f(n)$ eller $f(n) = 2n$. Dette er en mer formell måte å uttrykke generalisering på, fremfor de forrige regneeksemplene i avsnittet ovenfor. En videre forklaring blir beskrevet i avsnittene som omhandler resonnementsstrategier, representasjoner og begrunnelse i dette kapitlet.

Det finnes ulike retninger innen algebraisk resonnement, som omhandler hvilke utgangspunkt man har for å generalisere, og jeg skal nevne tre av dem. Den første kalles generalisert aritmetikk, hvor man arbeider med tallmengder og ulike operasjoner av dem for å generalisere. Den andre retningen er modellering, som er en del av statistisk analyse. I modellering går man fra en mengde målepunkter, og prøver å finne en matematisk sammenheng mellom variabler og målinger. Den tredje retningen heter funksjonstenking, hvor man generaliserer ut i fra et tallmønster, for å beskrive relasjoner i funksjoner (Blanton & Kaput, 2005). Funksjonstenking er retningen denne masteroppgaven tar for seg.

På samme måte som det finnes ulike retninger innen algebraisk resonnement, er det også ulike måter å definere funksjonstenking på. Denne forskningen er med utgangspunkt i definisjonen til Smith (2008, s. 143):

> Representational thinking that focuses on the relationship between two (or more) varying quantities, specifically the kinds of thinking that lead from specific relationships (individual incidences) to generalisations of that relationship across instances.

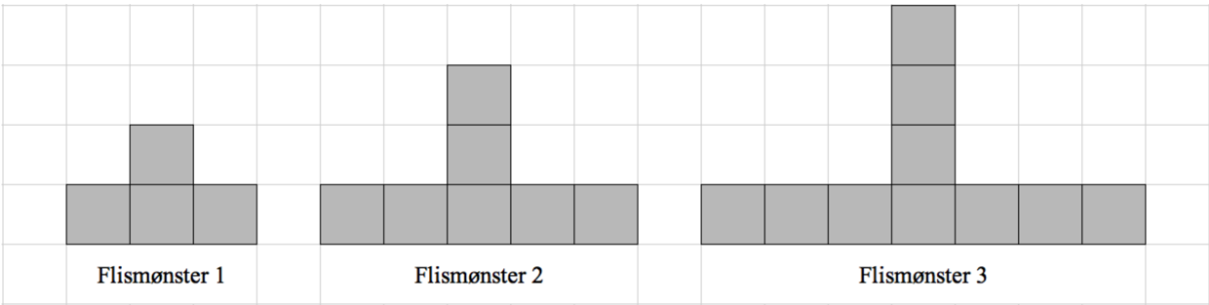
Definisjonen innebærer at elevene kan forstå og se endringen i variablene, som er relatert til hverandre. Oppgaver som legger opp til algebraisk resonnement, kan støtte elever i læringen om hvordan tall og bokstaver kan brukes til å representere variablene. I tillegg kan representasjonene brukes til å uttrykke forskjellige typer relasjoner, for eksempel lineære, kvadratiske og eksponentielle funksjoner (Smith, 2008). I de neste avsnittene gir jeg et eksempel på en lineær funksjon, som elever i denne undersøkelsen skulle jobbe med.

2.2 Utforsking av et geometrisk mønster - Flismønsterproblemet

Det å arbeide med mønster er en naturlig del av mennesket, som er en medfødt egenskap og skaper entusiasme. For å innføre mer formell algebra, blir aktiviteter med mønstre sett på som ideelle, selv om variabelen er avgrenset til naturlige tall. Det viktigste er at elevene blir kjent med variabelens rolle, og at de kan utvikle en rik algebraisk tenking. Gode problemstillinger, riktig vanskegrad og utforsking av geometriske mønstre, kan engasjere elever i å tilegne seg kunnskap om variabler og ukjente, ekvivalens av algebraiske uttrykk, symbolmanipulering, lage uttrykk og likninger og finne den ukjente (Lee & Freiman, 2006).

Geometriske mønstre, som også kalles figurmønstre, er en geometrisk representasjon av en tallrekke som forandrer seg etter et bestemt mønster (Karlsen, 2014), altså en visuell representasjon av en situasjon. Min undersøkelse inkluderte én geometrisk mønsteroppgave. Den skulle veilede elevene gjennom en prosess, hvor elevene kunne resonnere ut ifra et sett med spesielle tilfeller. Etter hvert ble elevene i stand til å uttrykke seg på stadig mer matematisk formelle måter. For eksempel var bruk av symbolske representasjoner i oppgaveløsning, en mer formell matematisk måte å uttrykke seg på sammenlignet med å illustrere situasjonen med tegning.

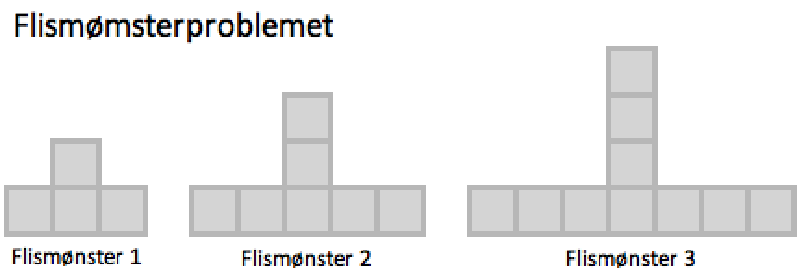
Oppgaven elevene skulle utforske, var *Flismønsterproblemet*, som var sterkt inspirert av Friel og Markworth (2009, s. 26) sine geometriske mønstre. Kort fortalt gikk Flismønsterproblemet ut på at elevene skulle flislegge et mønster på et gulv, som så ut som en opp-ned-T. Vi visste ikke hvor stort mønsteret skulle være, så vi ønsket å undersøke ulike størrelser av figurene. Nedenfor er et utklipp av det geometriske mønsteret elevene ble introdusert for, se Figur 2.1. Flismønstrene kan beskrives på ulike måter, og derav kunne man få ulike resonnement og måter å representere det på.



Figur 2.1: En illustrasjon av de tre første flismønstrene, som elevene fikk på oppgavearket.

Lærere kan hjelpe elevene til å generere funksjoner i en kontekst, og bruke flere representasjoner av dem, ved å utforske generaliseringsprosesser. På denne måten kan elevene støttes i arbeidet med å utforske ulike sider av begrepet funksjoner, på en legitim måte (Duval, 2006). Kaput (1999) foreslår en tilnærming som fokuserer på flere matematiske representasjoner, som inkluderer bruk av diagrammer, verdier, språk, likninger og grafer, som også kan representere funksjonen. I tillegg vektlegger han at prosessen bør innebære generalisering, slik at elevene kan undersøke sammenhenger mellom mengder (for eksempel x og y), og finne ut hva mengdene har til felles.

Flismønsterproblemet er et lineært geometrisk mønster (flismønsteret), og kan føre til en lineær funksjon, som kan skrives på den generelle matematiske formen: $f(n) = an + b$. Den lineære funksjonen i Flismønsterproblemet inkluderer to variabler, flismønsternummeret (n, uavhengig variabel) og flismønsterets totale antall fliser ($3n + 1$, avhengig variabel). Her kreves det at det er entydig sammenheng mellom variablene for at det skal kunne kalles en funksjon, som er en spesiell type relasjon og at de har samvarierende verdier. Til ett element i en definisjonsmengde, skal det bare høre til ett element i en verdimengde. Figur 2.2 nedenfor, viser sammenhengen mellom de ulike representasjonene av den lineære funksjonen til flismønsteret.



Flismønster-nummer (n)	Funksjons-uttrykk 3n + 1	Totalt antall fliser f(n)
1	$3 \cdot 1 + 1$	4
2	$3 \cdot 2 + 1$	7
3	$3 \cdot 3 + 1$	10
Innverdi (uavhengig variabel)	Utverdi (avhengig variabel)	

Figur 2.2: Sammenhengen mellom de ulike elementene i Flismønsterproblemet.

I Flismønsterproblemet kan den uavhengige variabelen være et hvilket som helst naturlig tall **N** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}, som er definisjonsmengden. Utforskning av systematisk variasjon og mønstergeneralisering kan føre til senere studier av funksjoner og bruk av variabler som argument eller parametere. Likninger eller regler som beskriver et mønster med variabler, f.eks. $y = 3x + 1$, fører til funksjonsnotasjon, f.eks. $f(x) = 3x + 1$, hvor x er argumentet og f er navnet på funksjonen (parameteren) (Blanton & Kaput, 2005, s. 14).

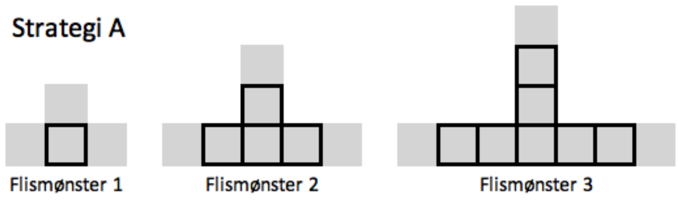
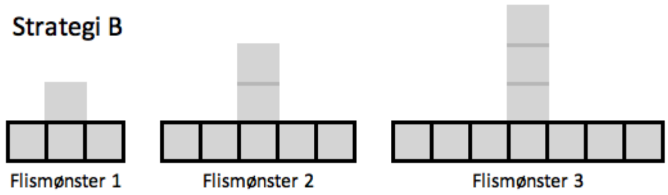
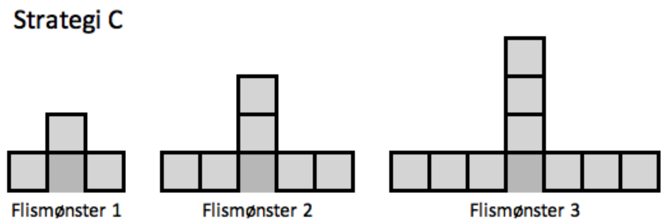
2.3 Resonnementsstrategier

For å få et innblikk i hvordan elevene løste ulike problemstillinger i Flismønsterproblemet, var det nødvendig å se på elevenes resonnering via deres argumentasjon. I kjerneelementet beskrives resonnering som en måte å følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnement både for å forstå og løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at elevene grunngir fremgangsmåter, resonnement og løsninger, samt beviser at de er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2019a).

Resonnering innebærer blant annet å overbevise seg selv og andre om gyldigheten av formelen, som eleven genererer ved å bruke numeriske og figurative metoder. For eksempel går den numeriske metoden ut på at elevene bruker algebraiske begreper og operasjoner i resonnementene sine. Mens en figurativ metode går ut på å at elevene forklarer relasjonene mellom figurene i det geometriske mønsteret, som elevene studerer visuelt. Med figurativt resonnement skal elevene kunne forklare hvordan de kom fem til formler og mønstre, samt hvorfor det gir mening. De er da i stand til å ta hensyn til visuelle tegn som kan organiseres og oversettes til numeriske beskrivelser. I tillegg viser det seg at en figurativ tilnærming kan være like streng og analytisk, som en numerisk tilnærming (Rivera & Becker, 2005).

Flismønsterproblemet som elevene utforsket var delt inn i tre deler, hvor elevene gikk fra visuell tilnærming (figurativ) via numerisk tilnærming og endte opp i en algebraisk tilnærming. I og med at elevenes oppgave berørte alle tilnærmingene, synes jeg det var oversiktlig å ha de i flere deler.

Tabell 2.1 viser figurative resonnementsstrategier. Tabell 2.2 viser en numerisk og algebraisk fremstilling. Tabellene inneholder det samme, men med ulike måter å representere tilnærmingene til oppgava på.

Tabell 2.1: Tre ulike figurative resonnementsstrategier, som brukes til å beskrive Flismønsterproblemet.	
	Strategi A innebærer å bruke forrige flismønster og legge til én flis på hver av de tre «sidene». Å tegne flismønster 43 vil kreve at du vet hvordan flismønster 42 ser ut, og at du vet antallet fliser totalt. Videre legger du til tre ekstra fliser på flismønster 42, for å få flismønster 43. Denne strategien kalles også en rekursiv strategi (Lannin, 2005).
	Strategi B fokuserer på en horisontal rad og en vertikal rad med fliser (fra midterste flis). Å tegne flismønster 43 innebærer at den horisontale raden inkluderer to rekker med 43 fliser, addert med flisa i midten. Den vertikale raden inneholde kun 43 fliser.
	I Strategi C er det flere sett med likt antall fliser. Å tegne flismønster 43 innebærer tre sett med 43 fliser og en flis i midten. Denne strategien kalles også en eksplisitt strategi (Lannin, 2005).

At noe er figurativt betyr at bildene som vises er mer enn bare tegninger, det er også relasjoner mellom dem. Figurativ betyr at objektene (eller bilder av det samme) «viser et eller flere relasjoner mellom hverandre" (Rivera & Becker, 2005, s. 199).

Tabell 2.1 blir brukt som analyseverktøy i første fase av Flismønsterproblemet, da oppgavene i denne fasen legger opp til figurative resonnement. Tabell 2.2 benyttes i andre fase av Flismønsterproblemet, da elevene arbeider med problemstillinger, som fremprovoserer numeriske og algebraiske resonnement. Begge tabellene er inspirert av Friel og Markworth (2009).

Tabell 2.2: En numerisk fremstilling av de ulike figurative resonnementsstrategiene.			
Flismønster-nummer (n)	Numerisk resonneringsstrategi	Totalt antall fliser f(n)	Forklaring på strategi
Strategi A			
1 2 3 4 . . . n	1 + 3 4 + 3 7 + 3 10 + 3 . . ? + 3 .	4 7 10 13 . ? . .	Med strategi A kan elevene merke at overgangen fra den figurative tolkningen av mønsteret til den numerisk representasjon ikke er like enkel og tydelig som med de to andre strategiene.
Strategi B			
1 2 3 4 . . . n	(1(h) + 1(h) + 1) + 1(v) (2(h) + 2(h) + 1) + 2(v) (3(h) + 3(h) + 1) + 3(v) (4(h) + 4(h) + 1) + 4(v) . . . (n (h) + n (h) + 1) + n (v)	4 7 10 13 . . . (n + n + 1) + n	Den numeriske resonneringen fra strategi B gjenspeiler elevens tenkning og belyser hva som endres i flismønsteret, samt hva som er konstant. Det gir en eksplisitt kobling mellom flismønsternummeret (input) og de totale antallet fliser (output).
Strategi C			
1 2 3 4 . . . n	1 + 1 + 1 + 1 2 + 2 + 2 + 1 3 + 3 + 3 + 1 4 + 4 + 4 + 1 . . . n + n + n + 1	4 7 10 13 . . . 3n + 1	Strategi C fører til et funksjonsuttrykk, som kobler sammen «innverdi» og «utverdi». Her kan elevene komme frem til en eksplisitt formel.
(Merk: h refererer til horisontale deler, og v refererer til vertikale delen av figurstrukturen.)			

Lannin (2005) har i likhet med Friel og Markworth (2009) lignende beskrivelser av resonnementsstrategiene, men han omtaler det som generaliseringsstrategier. Lannin (2005) deler grovt sett generaliseringsstrategiene inn i to: ikke-eksplisitte strategier og eksplisitte strategier. Den ikke-eksplisitte strategien vil ikke føre til et funksjonsuttrykk, mens den eksplisitte strategien kan føre til et funksjonsuttrykk. Han har flere inndelinger av strategiene, som kommer til nytte i analysen. Videre trekker jeg frem de gjeldende begrepene for denne undersøkelsen.

Under den ikke eksplisitte strategien inngår *telling*, som vi si at det tegnes et bilde eller lages en modell for å representere situasjonen (Lannin, 2005), som i dette tilfellet er flismønsteret. Elevene bruker dette til å telle de ønskede egenskapene. Et eksempel kan være at elevene tegner opp flismønster 4, og deretter teller opp ønsket antall fliser, som blir totalt 13 fliser. I tillegg inngår rekursiv strategi i Lannin (2005) sitt rammeverk, som tilsvarer strategi A, i Tabell 2.1 og Tabell 2.2.

Under den eksplisitte generaliseringsstrategien inngår tre type strategier, som kalles «helhet-objekt», «prøve og feile» og til slutt «eksplisitt strategi» (Lannin, 2005). Den eksplisitte strategien tilsvarer strategi C, som vist i

Tabell 2.1 og Tabell 2.2. I analysen i denne forskningen blir telling, rekursiv (strategi A) og eksplisitt (strategi C) aktuelle, og jeg velger derfor å ikke utdype de gjenværende strategiene noe mer.

En eksplisitt tilnærming blir sett på som en mer formell tilnærming enn en rekursiv tilnærming, men begge utfyller likevel hverandre. Siden den eksplisitte strategien kan føre til et funksjonsuttrykk. Rekursive strategier er verdifulle for å utforske hva som skjer fra det ene mønsteret til det neste, og kan inkludere begrepet «stigningstallet av en funksjon» (Küchemann, 2010).

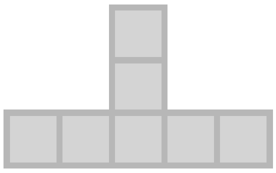
2.4 Representasjoner

Geometriske mønsteroppgaver er ment som en hjelp i overgangen fra visuelle figurer til aritmetiske og algebraiske uttrykk (Lannin, 2005), noe som også vil kreve at elevene inkluderer ulike representasjoner i utforskingen. I kjerneelementet blir representasjoner beskrevet som en viktig faktor for å få innsikt i elevenes løsninger på matematiske problemer. Elevene skal bruke matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Et av hovedområdene i dette forskningsprosjektet nettopp å få innsikt i elevenes løsninger i utforskingen av Flismønsterproblemet. Og for å få til dette ble matematiske samtaler, argumentasjon og resonnement brukt som virkemiddel i prosessen.

For å kommunisere matematiske begrep, sammenhenger og problemer er det nødvendig med representasjoner. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske. Det er viktig at elevene kan veksle mellom matematiske representasjoner og dagligspråk (Utdanningsdirektoratet, 2019a). I og med at elevene i undersøkelsen ikke hadde erfaring med slike oppgaver fra tidligere, ville elevene få behov for å bruke det daglige språket med kunnskap de hadde fra før. Men de ville også få behov for å representere med matematiske symboler underveis for å kunne svare på problemstillingene i de ulike fasene.

For å kunne studere og analysere elevenes representasjoner var det nødvendig med teori, som omhandlet representasjoner. Teorien om representasjoner er abstrakt, men det er kanskje ikke så rart når matematikk i seg selv også er abstrakt. Videre vil jeg prøve å gi en forenklet versjon av hva varierte representasjoner og et matematisk objekt er.

Duval (2006) grupperer representasjonene i noe han kaller for semiotiske representasjonssystemer, som kan benyttes fritt i henhold til oppgaven som skal utføres, eller i henhold til spørsmålet som stilles. Flere representasjoner kan representere det samme matematiske objektet og de utfyller hverandre. Matematiske objekter er abstrakte og er tilgjengelige kun gjennom ulike representasjoner, og det er viktig å påpeke at en representasjon ikke er et objekt. Han deler representasjoner inn i fire semiotiske representasjonssystemer, som er naturlig språk, symbolspråk, illustrasjoner og tabell/diagrammer/grafer. For at et matematisk objekt skal kunne læres, må elevene bruke minst to systemer. Tabell 2.3 er en forenklet versjon av Duval (2006) sitt representasjonssystem, som er tilpasset min forskning. Tabellen vil være nyttig for å sette ord på hvordan elevene matematisk representerer resonnementsstrategiene sine gjennom utforskingen av Flismønsterproblemet.

<table>
<tr><th colspan="4">Tabell 2.3: En forenklet versjon av Duval (2006) sitt representasjonssystem.</th></tr>
<tr><th>Naturlig språk</th><th>Illustrasjoner</th><th>Symbolspråk</th><th>Tabeller, diagrammer, grafer</th></tr>
<tr><td>Kan representeres med tekstoppgaver, forklaringer, besvarelser, bevis og teoremer. Kan uttrykkes skriftlig eller muntlig.</td><td>Kan representeres med tegninger, mønstre, skisse og fysiske brikker.</td><td>Kan representeres med beregninger, bevis og formler. Kan uttrykkes kun skriftlig.</td><td>Kan representeres med tabeller, diagrammer og grafer.</td></tr>
<tr><td>Eksempel på en forklaring av et spesifikt flismønster:
"Flismønster 2 har tre sett fliser som inneholder to fliser hver, pluss én flis i midten. Til sammen blir det sju fliser".</td><td>Eksempel på en tegning

Flismønster 2</td><td>Eksempel på beregning (de to første) og formel (den siste).

2 + 2 + 2 + 1 = 7
2 · 3 + 1 = 7
n · 3 + 1 = f(n)</td><td>Eksempel på tabell<table><tr><th>Flismønster-nummer (n)</th><th>Totalt antall fliser f(n)</th></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>10</td></tr></table></td></tr>
</table>

I følge Enge og Valenta (2013) er alle matematiske begreper og objekter abstrakte, selv om de av noen oppleves som mer reelle enn andre. Duval (2006) sier at representasjoner ikke er selve objektet, men at ulike representasjoner kan belyse ulike sider av objektet. De ulike representasjonene viser oss ulike aspekter ved objektet, og har ulike egenskaper for matematisk arbeid og matematikklæring. For eksempel er det enklere å lese informasjon (n og f(n)) fra en graf, fremfor å bare vise et algebraisk uttrykk. Men det algebraiske uttrykket kan til gjengjeld gi mer informasjon om hvordan punktene i grafen (n og f(n)) er regnet ut, og sammenhengen mellom dem. I forbindelse med Flismønsterproblemet og funksjonsbegrepet, kan en funksjon representeres ved å tegne en graf, et algebraisk uttrykk eller som en tabell.

Enge og Valenta (2013) sier videre at de tre nevnte representasjonene åpner for ulike aspekter ved forståelsen av en funksjon, om hvordan den ene størrelsen varierer i forhold til den andre, men at ingen av representasjonene er selve funksjonen.

For å kunne forstå et objekt, sier Duval (2006) at objektet må bearbeides. Bearbeidelsen beskrives som transformasjoner av representasjoner. En transformasjon er en konvertering hvor et matematisk objekt representeres i et system, for eksempel fra naturlig språk til et annet system, for eksempel symbolspråk, se Tabell 2.3. En transformasjon kan også skje innenfor det samme systemet og kalles da for en behandling. For eksempel innenfor symbolspråk kan elevene gå fra beregninger til en formel. Felles for alle transformasjoner er at objektet ikke kan forandres, men representeres på ulike måter.

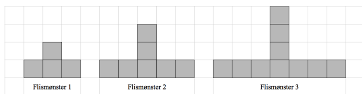
2.5 Begrunnelse

Jeg har også valgt å inkludere teori om begrunnelse, som var nyttig i forbindelse med elevenes algebraiske uttrykk i andre fase av Flismønsterproblemet.

Lannin (2005) fremhever viktigheten av at man ikke kan skille elevenes generalisering fra deres begrunnelser, da de er nært knyttet til hverandre. Begrunnelsen handler om hvilken grad elevene har generalisert og om begrunnelsen er akseptabel. Først når elevene kobler generaliseringen opp mot problemsituasjonen, sammen med visualiseringen av det geometriske mønsteret, sier vi at begrunnelsen er gyldig. Flisene er visualiseringen av Flismønsterproblemet. For at læreren skal kunne vurdere hvordan elever generaliserer og hva de mener er underliggende for de algebraiske uttrykkene sine, er det viktig at elevene beskriver og begrunner dem. Et eksempel på en begrunnelse fra en elev kan være: «Vi har en flis i midten og tre rekker med likt antall fliser utover til høyre, venstre og oppover fra midterste flis. Antall fliser i de tre rekkene henger sammen med flismønsternummeret. Hvis vi har flismønsternummer to, vil det være to fliser multiplisert med tre rekker, addert med flisa i midten. Til sammen har vi sju fliser». Dette er en beskrivelse av et generelt uttrykk, som er koblet opp mot det geometriske flismønsteret.

Begrunnelsen gir altså informasjon om hvilke strategier elevene bruker. Nedenfor er Tabell 2.4, som viser inndelingen av de ulike nivåene av begrunnelse, og eksempler på begrunnelser i Flismønsterproblemet. Nivåene viser elevenes utvikling i evnen til å begrunne og er i stigende rekkefølge (Lannin, 2005).

Tabell 2.4: Elevenes begrunnelse, delt inn i fem stigende nivåer.

Begrunnelsesnivå	Eksempel på begrunnelse i Flismønsterproblemet
0 ingen begrunnelse	Ingen begrunnelse blir gitt.
1 henvendelse til ekstern kilde	En ekstern kilde kan være fra litteratur eller en lærer. En elev kan si at det algebraiske uttrykket for et hvilke som helst flismønster er $f(n) = 3 \cdot n + 1$, fordi læreren skrev det opp på tavla.
2 empirisk eksempel	Egenskaper for enkelttilfellet kan representere egenskapene for mange eller alle tilfeller. Elevene kan si at generaliseringen stemmer fordi en del utvalgte enkelteksempler passer med det som generaliseres. Elevene kan regne ut flere eksempler og forklare at utregningene stemmer overens med det totale antallet flisene elevene telte i de visuelle flismønstrene i oppgaven, ved å bruke det algebraiske uttrykket: $f(n) = 3 \cdot n + 1$.  $f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 5$, $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, $f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$
3 generisk eksempel	Utgangspunktet er i en bestemt del av mønsteret og formelen kan stemme i dette tilfellet, men i realiteten kan formelen benyttes for hele mønsteret. En elev kan for eksempel begrunne slik: «I flismønster 2 blir det to fliser ganger tre retninger fra flisa i midten. Flisa i midten må også legges til. Til sammen blir det totalt sju fliser». Her begrunnes strategien gjennom relasjonene mellom innverdien og utverdien til flismønsternummeret.
4 deduktiv begrunnelse	Elevene løsriver seg fra enkeltdeler av mønsteret, og begrunner i større grad uten å henvise til det visuelle mønsteret. Eleven benytter seg av det generelle uttrykket for å støtte begrunnelsen. Et eksempel på en deduktiv begrunnelse kan være: «Alle flismønstrene inneholder en flis i midten, som er konstant og kan representeres med tallet «1» i formelen. Fra den midterste flisa er det tre rekker med fliser, som kan representeres med tallet «3». Hvor mange fliser som er i hver flisrekke har en sammenheng med flismønsternummeret, som vil variere og vi kan representere det med variabelen n. Svaret vi får vil også variere med flismønsternummeret, og vi kan kalle funksjonen f(n). Formelen blir da $f(n) = 3 \cdot n + 1$.»

Hvis elevene for eksempel kun kommer med talleksempler for å illustrere generaliseringen, er det ikke en tilstrekkelig begrunnelse (Radford, 1996), og begrunnelsen er ikke gyldig før de bruker et generisk eksempel, se Tabell 2.4. Begrunnelsen kan være både skriftlig og muntlig.

3 Metoder for innsamling av data

I metodekapittelet blir forskningsmetoden jeg har tatt utgangspunkt i beskrevet, for å kunne svare på forskningsspørsmålene mine. Metodeavsnittet tar for seg flere punkter, og inkluderer blant annet forskningsspørsmålet og argumenter for at pedagogisk designforskning kan være en passende forskningsmetode. I tillegg er en beskrivelse av utvalget, som danner datagrunnlaget mitt, samt forskningsetikk og til slutt hvordan jeg hentet dataene og tilhørende analyse av dem.

Den vitenskapelige metoden jeg har valgt å ta utgangspunkt i, er overordnet kategorisert som en kvalitativ metode. Mitt utgangspunkt er å gå i dybden i et område i matematikkdidaktikk, som er viktig både faglig, men også pedagogisk. Forskningsmetoden jeg har tatt utgangspunkt i, viser seg å være en brobygger mellom teori og praksis, og omtales hyppig som designforskning. Jeg vil i de neste avsnittene trekke frem de underliggende prinsippene jeg har benyttet for å gjennomføre forskning, og som danner grunnlaget for denne masteroppgaven. Jeg vil også prøve å argumentere for viktige trekk i designforskning, som vil passe til min undersøkelse. Min forskning er ikke en ren designstudie, men den har noen felles trekk.

3.1 Forskningsspørsmålets konsekvenser for valg av metoder for datainnhenting

Målet med denne studien var å kunne svare på forskningsspørsmålene, som tidligere er nevnt i innledningen:

1. Hvordan kan introduksjonen av en geometrisk mønsteroppgave utformes for å hjelpe elevene i gang med funksjonstenking på åttende trinn?
2. Hvordan representerer elevene resonnementsstrategiene sine gjennom utforskingen av det geometriske mønsteret, og hva slags resonnementsstrategier bruker de?

I min studie ønsket jeg å få mer kunnskap om elevenes resonnementsstrategier, og hvordan de uttrykket og begrunnet sine strategier under introduksjonen av den geometriske mønsteroppgaven. Jeg ønsket også å få innsikt i hvordan det teoribaserte undervisningsdesignet fungerte, og se på hvilke endringer i designet av undervisningssekvensen det kunne være nødvendig å gjøre noe med, for å videreutvikle designet.

Den geometriske mønsteroppgaven er først og fremst utviklet av forskere (Friel & Markworth, 2009; Lee & Freiman, 2006), som har utviklet en rekke geometriske mønsteroppgaver av ulik vanskegrad, med hensikt å hjelpe elevene til å utvikle funksjonstenking. Min forskning fokuserte på elevenes første møte med en geometrisk mønsteroppgave. Ved å analysere elevenes muntlige og skriftlige arbeid, fikk jeg innsikt i hvilke strategier elevene brukte. Denne informasjonen kunne jeg ta med meg til videre utvikling av designet. I tillegg kunne jeg justere mine første antagelser, slik at jeg i neste utprøving av designet, muligens kunne få et enda bedre resultat enn i det første.

I følge Rienecker, Jørgensen og Skov (2013) har problemformuleringer som inkluderer hvordan-spørsmålet, en konstruksjon eller en handling som et mål. Det første forskningsspørsmålet handler om å konstruere et undervisningsopplegg, hvor elever får innføring i et geometrisk mønster, som de har lite erfaring med fra tidligere. For at undervisningsopplegget skulle være mest mulig effektiv, tok jeg utgangspunkt i tidligere forskning på feltet, for å få en god nok gjennomføring.

Det første spørsmålet var mest relevant i forarbeidet før undervisningsopplegget, mens det andre forskningsspørsmålet var relevant i analysen etter undervisningsopplegget. Det andre forskningsspørsmålet førte oss til hva som faktisk skjedde i løpet av selve arbeidet med den geometriske mønsteroppgaven. Her studerte jeg hvordan elevene representerte resonnementsstrategiene sine i arbeidet med den geometriske mønsteroppgaven. I diskusjonen, som er oppgavens siste del, ble det en vurdering og anbefaling av handlingen.

I og med at det andre forskningsspørsmålet inkluderte elever og deres resonnementsstrategier, ble det nødvendig å innhente data fra den empiriske undersøkelsen i klasserommet. Her ble observasjon med lyd- og videoopptak mest aktuelt, da det ga et helhetsinntrykk av hendelsen. I analysen inkluderes dialoger, bilder og utklipp av elevbesvarelsen for å vise hvordan elevene uttrykket og begrunnet sine resonnementsstrategier. Jeg analyserte besvarelsene med tilhørende teoretiske rammeverk.

3.2 Pedagogisk designforskning

Det sies at designforskning i formell utdanning effektivt kan bygge bro mellom to sterke rivaler, nemlig forskning og praksis. Metoden ble utviklet nær begynnelsen av 21. århundre og har siden blitt mer og mer populær i utdanningsforskning. Designbasert forskning som metode, er brukt av en rekke anerkjente forskere innen utdanning, og har blitt publisert i flere kjente tidsskrifter (Anderson & Shattuck, 2012). Designforskning tar sikte på å utvikle empirisk forankrede teorier om læreprosesser og læremidler i naturlige omgivelser. Forskningsmetoden har også som mål å utvikle såkalt robuste design (Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieveen, 2006).

I min forskning benyttes begrepet designforskning, mens i litteraturen finnes det flere begreper om samme eller liknede forskningstilnærminger. Andre varianter av begrepet er utviklingsforskning, designeksperimenter og designstudier (Conceicao, Sherry & Gibson, 2004; Oha & Reeves, 2010). Anderson og Shattuck (2012) analyserte både opprinnelige og nyere definisjoner av designbasert forskning. Kort oppsummert skal forskingen være lokalisert i en reell utdanningssammenheng, og den må også være lokalisert i en reell pedagogisk sammenheng, som gir en følelse av validitet til forskningen. I tillegg skal forskningen sikre at resultatene kan brukes til å vurdere, informere og forbedre praksis i minst denne (og sannsynligvis andre) sammenhenger. En hyppig sitert definisjon på pedagogisk designforskning (educational design research) er følgende:

> *"Educational design research is the systematic study of designing, developing, and evaluating educational programs, processes and products" (Akker et al., 2006).*

Min forskning kan ha likhetstrekk med flere metoder, og det er ikke enkelt å skille dem, da inntrykket mitt er at metodene ofte glir over i hverandre. Men noen trekk i forskningstilnærmingene er mer tydelige enn andre. For eksempel kan vi sette designforskning og aksjonsforskning opp mot hverandre. Aksjonsforskning har et bredere fokus på utvikling av praksis, mens designforskning har et avgrenset fokus på utviklingen av pedagogisk design. Min forskning vil ha et avgrenset fokus, hvor det er en spesifikk undervisningssekvens med en geometrisk mønsteroppgave i designen, og det vil derfor passe bedre med designforskning. I tillegg har aksjonsforskningstilnærmingen sterkere vekt på praktikernes styring av forskningsprosessen, mens designforskning er mer forskerstyrt (Bjørndal, 2013), som i denne forskningen.

I forskningsprosessen er det viktig å forholde seg til veletablerte metoder, slik at forskningen oppfattes som troverdig og at prosessen faktisk kan kalles for forskning. Akker et al. (2006) har utarbeidet noen fellestrekk innen designforskning, som jeg har valgt å forholde meg til i min forskningsprosess. Nedenfor er det fem trekk, som inngår i designforskningen og hvordan jeg forholder meg til dette i min forskning:

Forskningen (1) tar sikte på å utforme et *inngrep i den virkelige verden* (Akker et al., 2006). Min forskning er i et gjennomsnittlig klasserom, som inkluderer elever på alle nivåer, samt læreren. Undervisningen foregår i omgivelser elevene er vant til. Den største forandringen er at jeg er med i klasserommet, og at oppgavetypen elevene blir introdusert for er ny. I tillegg var det lyd- og videoutstyr rundt elevene, som var nytt for dem i en undervisningssituasjon.

Forskningen (2) omfatter *design, evaluering og revisjon i en syklisk tilnærming* (Akker et al., 2006). Min forskning omfatter design av en geometrisk mønsteroppgave, i en undervisning med gjennomføring og evaluering av opplegget. Det blir ikke gjennomført revisjon i syklisk tilnærming, da forskningsprosjektet er av begrenset lengde. I og med at den sykliske tilnærmingen uteblir, er det mer naturlig å si at min forskning bruker trekk fra designstudien, heller enn at forskningen er en designstudie.

Forskningen (3) er *prosessorientert*, hvor fokuset er på forståelse og forbedring av designet (Akker et al., 2006). Min forskning vil etter utføring av undervisningsopplegget og analysen, reflektere rundt hva som kan gjøres bedre ved en eventuelt ny gjennomføring av undervisningen, eller en ny forskning.

Forskningen (4) er *nytteorientert*, der designens verdi måles etter hvor nyttig den er i praksis (Akker et al., 2006). Det vil bli en vurdering etter hele forskningsprosessen, hvor nyttig denne type design kan være for åttendeklassen som er med i forskningsprosjektet. Denne refleksjonen kommer også i siste del av oppgaven, kalt diskusjonen.

Forskningen (5) er *teoriorientert*, som betyr at designen er basert på teori, og utprøving av design bidrar til å bygge teori (Akker et al., 2006). Jeg har så langt det har latt seg gjøre, trukket inn tidligere forskning og teorier i hele forskningsprosessen, med hensikt å få et best mulig resultat på et forsøk. I tillegg var det interessant å se om teoriene, som har opphav fra andre land, også var brukbar i forbindelse med norske elevers arbeid med geometriske mønstre. I og med at min forskning var såpass avgrenset, vil det kanskje ikke bidra til å utvide teorien noe særlig, men forskningen kan i mitt tilfelle være med på å underbygge om teorien er relevant.

3.2.1 Designeksperiment i klasserommet

I og med at min forskning var avgrenset til et klasserom, vil forskningen ha likhetstrekk med Gravemeijer og Cobb (2006, s. 18-19) sin forskningstilnærming, som de kaller «classroom design experiment». Jeg har valgt å oversette det til «designeksperiment i klasserommet». Eksperimentet består vanligvis av tre faser: forberedelse av undersøkelsen, utprøving i klasserommet og retroperspektive analyser. I neste avsnitt utdypes disse fasene nærmere.

I første fase inngår forberedelsen, hvor formålet med forskningen etableres – hva skal undersøkes eller endres? Her brukes tidligere forskning, som grunnlag. I tillegg utarbeides det en lokal teori for undervisningen, som i dette prosjektet er foranalysen (Gravemeijer & Cobb, 2006). Hvis det er begrenset litteratur på området, blir ulike tilgjengelige ressurser benyttet, for å tilpasse undervisningsopplegget. Denne type arbeid innen designforskning kan minne om arbeidet til MacGyver, hvor han bruker det han har tilgjengelig av utstyr i øyeblikket, for å komme seg ut av problemer.

Andre fase handler om å prøve ut undervisningsopplegget i klasserommet, med mål om å kunne forbedre designen. Mens i den den tredje og siste fasen, inngår den retroperspektive analysen av eksperimentet, som kan bidra til utvikling av en lokal undervisningsteori (Gravemeijer & Cobb, 2006). Jeg nøyde meg med én utprøving av undervisningsopplegget, for så å utvikle en forståelse for læringsprosessen gjennom analyse av elevenes muntlige og skriftlige arbeider med Flismønsteroppgaven.

I designforskning er det ofte et forskerteam bestående av et samarbeid mellom forskere, lærere og eventuelt studenter. I denne forskningen opptrer jeg i hovedsak som forsker, men også som veileder for elevene og matematikklæreren. I forberedelsesfasen og utprøvingen i klasserommet, hadde jeg et tett samarbeid med matematikklæreren. Arbeidet med den retroperspektive analysen, var det kun jeg som utførte (Anderson & Shattuck, 2012).

3.3 Utvalg

Jeg var ute etter å finne elever som hadde lite eller ingen erfaring med algebra, men som hadde erfaring med regning med symboler. Av tidligere erfaring som lærer på ungdomstrinnet, har elever i begynnelse av åttende trinn lite erfaring med algebra. I tillegg starter gjerne elevene med «blanke ark» og nye lærere, som kanskje gjør dem mer «frie» i å tenke nytt. I perioden hvor undersøkelse skulle finne sted, var jeg heltidsstudent hjemme, og det ble naturlig å kontakte en skole i nærheten. Jeg har ikke hatt kontakt med skolen tidligere i forbindelse med læreryrket, noe som krevde en del forarbeid i form av skriftlig dokumentasjon til skoleledelsen. I tillegg trengte jeg kontakt med matematikklæreren til klassen, som jeg kunne involvere i planlegging, kartlegging av forkunnskapene til elevene og gjennomføringen av undersøkelsen.

Jeg ønsket ikke å bruke for lang tid på undersøkelsen, da jeg vet at skolene er presset på tid fra før. I tillegg var ikke algebra et tema klassen arbeidet med enda, og jeg måtte derfor bryte unaturlig inn i deres opprinnelige undervisning. Skolen jeg var hos, var svært imøtekommende, og jeg lærte mye av å være på en annen skole. I tillegg hadde jeg ingen forkunnskaper eller erfaringer med elevene eller læreren, og jeg stilte derfor med blanke ark. Det kan være positivt med tanke på validiteten til undersøkelsen, da jeg ikke har hatt mulighet til å påvirke læreren eller elevene på forhånd. Elevene hadde heller ingen kjennskaper til meg, der jeg kanskje oppfattes som mindre dømmende i undervisningen.

Jeg valgte å gjennomføre undersøkelsen med alle elevene i klasserommet, for å få en undervisningssituasjon som var tilnærmet lik den dagligdagse. I tillegg fikk jeg mulighet til å ha med meg matematikklæreren, som kunne være med å veilede elevene. Det var fire grupper med fire elever, til sammen 16 elever i undersøkelsen. Grunnen til at gruppene bestod av fire elever, var at det ble flere ideer å spille på, og som økte sannsynligheten for at elevene fikk flere innfallsvinkler til problemstillingen. Læreren hadde på forhånd satt sammen gruppene, med en blanding av elever på ulike nivå, i tillegg ble gutter og jenter jevnt fordelt. Jeg hadde to klokketimer til gjennomføringen av undervisningsopplegget.

3.4 Forskningsetikk

I forskning er det i hovedsak to etiske grunnprinsipper som bør inkluderes. Det *første etiske grunnprinsippet* handler om at informantene får informasjon om formålet med forskningsprosjektet, og oversikt over aktivitetene de skal delta i (Erickson, 1986). Den første jeg kontaktet i forbindelse med undersøkelsen var rektoren ved skolen, slik at jeg kunne få godkjenning for å undersøke elevene. Rektoren fikk tilsendt formålet med forskningsprosjektet, hvilke informanter jeg var ute etter, og oppgavene som skulle inkluderes i undervisningen. Jeg informerte også om at det ville bli sendt ut et dokumentasjons- og samtykkeskjema til alle involverte i undersøkelsen. Det ble også informert om video- og lydopptak, noe som krever ekstra dokumentasjon i form av samtykke av foreldre, da elevene er under 18 år.

Det *andre etiske grunnprinsippet,* handlet om at informantene fikk innsikt i hvordan de ble anonymisert og hvordan det ble i varetatt (Erickson, 1986). Dokumentasjon- og samtykkeskjema, godkjent av Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD), ble sendt hjem til alle elever og foreldre. Skjemaet handlet om behandling av personopplysninger. Elever og pårørende ble gjort oppmerksomme på at de når som helst kunne trekke seg fra prosjektet, og at de ville bli anonymisert gjennom hele prosessen av forskningsprosjektet. Data skulle kun lagres hjemme og slettes i masterprosjektets sluttfase.

3.5 Datainnhenting

Under gjennomføringen av undervisningsøkten, ble blant annet video- og lydopptak brukt til datainnhenting. Det var et videokamera, som var plassert slik at jeg kunne se alle gruppene ovenfra og ned. I tillegg ble det plassert en lydopptaker på hver av de fire gruppene. Alle elever fikk tildelt hvert sitt oppgaveark, med Flismønsterproblemet, som introduseres i kapittel 4.

Elevene fikk beskjed om å vise mest mulig skriftlig, og de fikk beskjed om å ikke viske ut svarene underveis, slik at jeg kunne se utviklingen av arbeidet deres. De skriftlige elevarbeidene ble anonymisert med dekknavn og scannet, slik at jeg kunne klippe ut og bruke det i min besvarelse. Alle lydopptak ble også anonymisert og transkribert, og det ble i overkant av 150 sider til sammen.

I transkripsjonene ble de skriftlige elevbesvarelsene klippet inn, der de hørte til i dialogen, samt bilder som var aktuelle fra videoen. Jeg skrev også noen kommentarer underveis fra det jeg observerte fra videoen, som kunne være nyttig ved en senere tolkning. Dessverre gikk det galt med lydopptaket til den ene gruppa, og jeg fikk derfor bare tre grupper å forholde meg til videre i arbeidet.

I tillegg til lyd- og videoopptakene, førte jeg en logg etter undervisningen, samt logg under møtene med matematikklæreren. Vi hadde tre møter på forhånd, et informasjonsmøte om forskningsprosjektet, et møte angående elevgruppa og hvordan vi skulle gjennomføre undervisningen. Etter undervisningen hadde vi også et møte der vi evaluerte undervisningsopplegget.

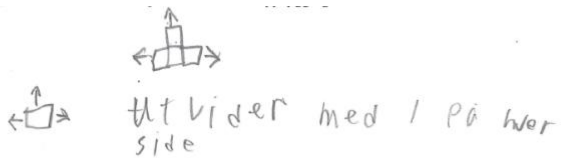
Jeg brukte tid sammen med matematikklæreren for å planlegge gjennomføringen av undervisningsopplegget. Vi diskuterte blant annet prinsipper for undervisning, mål for økten, og teorien bak den geometriske mønsteroppgaven. Vi diskuterte også hvordan vi skulle opptre som veiledere, og hvordan vi på best mulig måte skulle unngå å være førende ovenfor elevene. Jeg var også nysgjerrig på overføringsverdien av undervisningsopplegget, og håpet mitt var at flere kunne dra nytte av erfaringen vi fikk under arbeidet. Jeg lot også matematikklæreren være hovedveilederen i undervisningen, der hun introduserte den geometriske mønsteroppgaven for dem. Mer om utarbeidelse av undervisningsprinsipper og undervisningsopplegget i kapittel 4.

I gjennomføringen sammen med klassen fungerte jeg som veileder for elvene, men også som en deltagende observatør. Læreren ble derfor en del av gruppen som studeres, og elevene vet at de blir observert (Gold, 1958). På denne måten ble det mulig å få førstegangstilgang til datamaterialet, noe som vil være en fordel når jeg skal evaluere og forbedre undervisningsøktene etter observasjonen. Observasjon kan også by på noen utfordringer, som jeg kommer tilbake til senere.

En kombinasjon av muntlige dialoger, som er transkribert, og skriftlige besvarelser, vil gi et helhetsinntrykk av elevenes arbeid gjennom undersøkelsen. Det vil også gi mer informasjon i form av at elevene får uttrykt seg på flere måter, og det kan være enklere å få et inntrykk av resonneringsstrategiene deres.

Både skriftlige og muntlige besvarelser ble et omfattende datamateriale, og det ble behov for å redusere dataene. Derfor laget jeg en tabell, hvor jeg sorterte ut oppgavene, skriftlig besvarelse og muntlig besvarelse, se Tabell 3.1. Elevgruppene ble i første omgang analysert gruppevis. I neste omgang satte jeg sammen gruppene under oppgavene (oppgave 1, gruppe A, gruppe B, gruppe C) for å kunne sammenligne dem.

Tabell 3.1: Et utdrag fra struktureringen av elevenes skriftlige og muntlige besvarelser, gruppe A.

Oppgave	Skriftlig besvarelse (fra elevenes oppgaveark)	Muntlig besvarelse (representasjoner, resonnement, begrunnelse)
1. På hvor mange ulike måter kan du se på flismønstrenes oppbygging?	Sofia  Åsne  Scott  Roberto 	Sofia: for det mønsteret her kan man tenke at det går fra mønster en til mønster to, så går man ut over en for hver sin pinne eller man har like mange utover her (peker på flisrekken til høyre fra midterste flis, flismønster 1), som hvilke mønster man har (peker på overskriften «flismønster 1» i oppgaven). Åsne: asså, at det blir en ut av hvert, på en måte? Sofia: ja, altså hvis man tenker at man er på oppgave 20, så blir det 20 utover sånn (peker på de tre pilene, se Skriftlig besvarelse 5.1).

Under bearbeidelsen av datamaterialet ble jeg nødt til å lese gjennom transkripsjonene flere ganger og dele det opp. Jeg brukte fargekoder på de ulike strategiene, som jeg farget dialogene med, og lagde i tillegg en oversiktstabell med fasene, oppgavene, gruppene og hva slags strategier elevene brukte, se Tabell 3.2. Oversiktstabellen vil også være nyttig i diskusjonen, for å få en oversikt over elevenes resonneringsstrategier og representasjoner. I tillegg ble det enklere å sammenligne gruppene.

Tabell 3.2: En oversikt av analyseresultatene fra dataene til gruppe A.

Oppgave	Gruppe	Resonnementsstrategi/ Begrunnelse	Representasjon
Fase 1: Begrunnelse ved å bruke de visuelle egenskapene til den geometriske mønsteroppgaven			
1. På hvor mange ulike måter kan du se på flismønstrenes oppbygging?	A Analyse	A, figurativ tilnærming	Naturlig språk: muntlig Illustrasjoner: tegning
	B	A, figurativ tilnærming	Naturlig språk: muntlig Illustrasjoner: tegning
	C	A, figurativ tilnærming	Naturlig språk: muntlig Illustrasjoner: tegning
a) Hvordan vil du tegne eller bygge det 4. flismønsteret?	A	A, figurativ tilnærming	Naturlig språk: muntlig Illustrasjoner
	B Analyse	A, figurativ tilnærming	Naturlig språk: muntlig og skriftlig Illustrasjoner: tegning, fysiske brikker
	C Analyse	A, figurativ tilnærming	Naturlig språk: muntlig og skriftlig Illustrasjoner: tegning og fysiske brikker

Ved et par anledninger i studiet av elevbesvarelsene, ble jeg usikker på tolkningene av dem, og jeg måtte gå tilbake til videoopptaket for nærmere oppklaring. Det å tolke dialogene mellom elevene og de skriftlige besvarelsene, viste seg å bli mer krevende enn antatt. I og med at jeg forsker alene, kan feiltolking forekomme. Derfor har jeg valgt å bruke en del beskrivelse i analysen, for å tydeliggjøre og beskrive for leseren, min tolkning av resonnementsstrategiene til elevene.

3.6 Analysetilnærmingen

Jeg tok utgangspunkt i en forskningsbasert geometrisk mønsteroppgave, som skal støtte elever i prosessen med funksjonstenking, ved at de får jobbe med egnede problemstillinger som fokuserer på figurativt-resonnement. Jeg har tatt utgangspunkt i flere rammeverk, som vist i kapittelet om analyseredskaper, fra tidligere forskere, for å beskrive elevenes resonnementsstrategier og hvordan de representerer og begrunner dem.

Et av målene mine ved undersøkelsen var å få kunnskap om elevenes intuitive resonnementsstrategier gjennom arbeid med den geometriske mønsteroppgaven. Kunnskapen kan danne et grunnlag for å revidere, og tilrettelegge for eventuelt ny utprøving av undervisningsopplegget. Eksempelvis kan det være hensiktsmessig å reflektere rundt hvilke problemstillinger en bør fokusere mer på, som kunne være med på å støtte elevenes funksjonstenking. Ved at elevene fikk minimal veiledning var de nødt til å bruke hverandre for å begrunne om strategiene deres var gyldige.

Jeg tok opprinnelig utgangspunkt i rammeverket til Friel og Markworth (2009), som inkluderte ulike resonnementsstrategier. Men etter hvert ble jeg også nødt til å inkludere Lannin (2005) sitt rammeverk, for å beskrive flere resonnementsstrategier fra datamaterialet, samt elevenes begrunnelser.

Min forskning undersøker hvordan elevene representerer sine resonnementsstrategier i utforskingen av Flismønsterproblemet. Elevene skal utforske tre faser i Flismønsterproblemet, som har vist seg å støtte elevens arbeid med funksjonstenking. Fasene inneholder flere problemstillinger, som jeg også trekker inn i analysen, og som blir nærmere beskrevet i kapittel 4. Nedenfor ser du oppdelingen av fasene og hvilke rammeverk som er mest aktuelle i de ulike fasene.

Første fase: Elevene bruker de visuelle egenskapene Flismønsteret for å begrunne. Her benyttes først og fremst analyseredskapet fra

Tabell 2.1: med figurative resonnementsstrategier. I tillegg benyttes Duval (2006) sine begreper, som er vist i Tabell 2.3 og vil for øvrig bli benyttet i hele analysen for å beskrive elevenes representasjoner.

Andre fase: Utvikling av tallpar for å generalisere en funksjon. Her benyttes først og fremst analyseredskapet fra Tabell 2.2: numerisk fremstilling av de figurative resonnementsstrategiene. I tillegg benyttes Tabell 2.4 fra analyseredskaper, som går på elevenes begrunnelsesnivå av generalisering.

Tredje fase: I Flismønsterproblemet inngår en utvidet mønsteranalyse. Her vil det være behov for å kombinere alle de sentrale teoretiske begrepene og tabellene, som er nevnt i første og andre fase.

Analysen inkluderer trekk fra designforskning med retroperspektiv analyse av eksperimentet, som danner grunnlaget for forberedelsen av et eventuelt nytt undervisningsopplegg. Analysen tar blant annet utgangspunkt i transkriberte materialer av lyd- og videoopptak. I tillegg inkluderes loggen, hvor både observasjoner fra undervisningen og tidligere forventninger. Innsikten og forståelsen fra prosessen med eksperimentet, gir informasjon om hvordan man tolker hendelser, hvordan man planlegger og hvilke avgjørelser man kan ta hvis man ønsker å gjenta eksperimentet. I tillegg kan man tilpasse opplegget til bruk i et annet klasserom (Bjørndal, 2013). Jeg håper at innsikten og forståelsen, som er utviklet gjennom min forskningsprosess, kan gi informasjon om hvordan man kan identifisere og tolke elevenes måte å representere sine resonnementsstrategier. I tillegg å få innsikt i hvordan man kan bygge opp et undervisningsopplegg, som inkluderer geometriske mønstre med undervisningsprinsipper fra kjerneelementene.

De sentrale begrepene fra teorien (analyseredskapet), er benyttet i den retroperspektive analysen. Analysen var sentral for å forstå hvordan undervisningsopplegget virket i praksis, slik at man eventuelt kan videreutvikle og forbedre designet. I foranalysen har jeg hatt særlig fokus på hvordan jeg har bygd opp undervisningen, og hvilke prinsipper vi har brukt for å få et godt resultat av gjennomføringen. I tillegg har jeg gjennomført en analyse av tre elevgrupper, som inkluderer muntlige og skriftlige besvarelser. Jeg er ikke ute etter å vurdere eller rangere gruppene, men vil heller få frem mangfoldet og de ulike strategiene og begrunnelsene de bruker.

3.7 Metodiske utfordringer

Kvalitativ forskning kjennetegnes ved at det inkluderer begrepene *reliabilitet*, *validitet* og *generaliserbarhet* (Kvale & Brinkmann, 2009). Begrepene utypes videre i avsnittene, med kommentarer fra egen forskning. *Reliabilitet* handler om hvor pålitelige resultatene i studien er, noe som kan oppnås ved å gjøre analysene så åpne og gjennomsiktige som mulig, slik at resultatene kan reproduseres av andre. I en undervisningssituasjon spiller mange faktorer inn, og for å få et oversiktsbilde må faktorene beskrives nøye, slik at andre kan rekonstruere dem.

Det er all grunn til å stille spørsmål ved reliabilitet i forbindelse med min forskning, da det kun er jeg som står for utviklingen, utprøvingen og analysen av designet. Det er i tillegg høy usikkerhet rundt eventuelt en gjenskapelse av undervisningsopplegget med andre aktører og i andre klasserom, med samme resultater. Men undervisningstilnærmingen vil derimot enkelt kunne tilpasses andre klasserom.

Begrepet *validitet* inkluderer to deler: en *ekstern* og en *intern*. Den *interne* validiteten sier oss noe om hvor stor grad funnene i en konkret studie underbygges av data med god kvalitet, og hvorvidt man måler det man har sett for seg å måle. Den *eksterne* validiteten handler om hvorvidt funnene har overføringsverdi til andre sammenhenger, altså at man kan generalisere ut fra dem (Calder, Phillips & Tybout, 1982). Det er tegn på generaliserbarhet hvis undervisningsopplegget og tiltakene i studien kan overføres til andre lignende situasjoner (Bakker & Van Eerde, 2015).

Det er også grunn til å stille spørsmålstegn ved *generaliserbarheten* til undersøkelsen, da det er få elever og en kort undervisningsperiode. Bakker (2018, s. 109) sier på sin side, at i stedet for å generalisere fra et utvalg til en populasjon, vil designforskning prøve å oppnå teoretisk generalisering. Det vil si at vi får innsikt i hvordan ulike prosesser eller mekanismer kan hjelpe andre til å oppnå lignende resultater i andre sammenhenger. Jeg har prøvd å beskrive forskningsprosessen min så nøye som mulig, fra start til slutt, slik at andre kan oppnå lignende resultater. I tillegg har jeg basert forskningen min på tidligere forskning, teorier og begreper. Resultatene fra min forskning kan med det belyses ut ifra disse teoriene og begrepene, og kan videre sammenlignes med anbefalinger fra tidligere forskning. Hvis resultatene fra undersøkelsen kan belyses med teorier, begreper og tidligere forskning, kan min forskning, i liten skala, være med på å underbygge teorien.

Designforskning innebærer forskerinitierte endringer i et system, som endrer seg mens det blir observert. I motsetning er et positivistisk ideal, der observatøren står på utsiden og påvirker dermed ikke studieobjektet utover det som er strengt kontrollert. En innvending på validiteten i min forskning, kan være at forskningen er for preget av mine intensjoner og påvirkning. Til gjengjeld vil all forskning til en viss grad reflektere forskeren, blant annet gjennom fortolkningen av omgivelsene og påvirkningen av informantene (Bjørndal, 2013).

En av styrkene ved forskningsprosjektet mitt er at den har klar relevans i praksis, noe som ifølge Bjørndal (2013) bør være et like styrende kriterie som validiteten. Jeg har inkludert tidligere forskning, teori som analyseredskap og teori i oppbyggingen av undervisningen, for å sikre gode resultater i min forskning. En annen fordel med prosjektet kan også være at jeg tok utgangspunkt i en ukjent skole, som kanskje øker sannsynligheten for at forskningsprosjektet kan ha relevans i praksis for andre også.

4 Foranalyse av undervisningen

I dette kapittelet om foranalyse av undervisningen, gis et foreløpig svar på det første forskningsspørsmålet mitt: Hvordan kan introduksjonen av en geometrisk mønsteroppgave utformes for å hjelpe elevene i gang med funksjonstenking på åttende trinn? Videre trekkes foranalysen inn sammen med analysen, for å drøfte fordeler og ulemper ved undervisningsopplegget i diskusjonen.

I foranalysen beskriver jeg forberedelsesfasen i forskningsprosjektet, som inkluderer valg og refleksjoner som ligger til grunn for selve gjennomføringen av undervisningen. Videre vil de faglige læringsmålene bli klargjort, samt begrunnelse for Flismønsterproblemet og tiltakene som ble gjennomført for å støtte elevene i undervisningen. Gjennomføringen i praksis er basert på undervisningsprinsipper fra kjerneelementene og teorier om funksjonstenking og geometriske mønsteroppgaver. Målet med forberedelsesfasen, var å finne et så godt utgangspunkt som mulig, slik at elevene skulle mestre oppgavene.

4.1 Designet av undervisningsopplegget

Som tidligere nevnt er algebraisk resonnement en type funksjonstenking – en prosess hvor elevene generaliserer matematiske ideer fra et sett med spesielle tilfeller. Elevene etablerer disse generaliseringene gjennom argumentasjonen, og uttrykker de på stadig mer formelle og sofistikerte måter (Kaput, 1999). Jeg har undersøkt hva slags type spørsmål og oppgaver som kan være med på å støtte elevene i å utvikle funksjonstenking i teorien. Jeg har også sett på hva som bør inkluderes i undervisningen av verktøy og materialer, som kan bidra til å effektivisere prosessen. Samtidig tok jeg utgangspunkt i den nye læreplanen, for å knytte norsk skole opp mot utenlandsk forskning. Den nye læreplanen er også svært aktuell i disse tider, da den snart skal innføres i norsk skole. Jeg håper også at denne masteroppgaven kan være en inspirasjon til hvordan en undervisningsøkt med algebra kan bygges opp, og hvordan man kan man kan inkludere noen av kjerneelementene. Designet av undervisningsøkten inkluderer aktuelle kompetansemål, kartlegging og samarbeid med læreren og aktuelle kjerneelement.

4.2 Aktuelle kompetansemål

Kompetansemålene fra den nye læreplanen, som innføres høsten 2020, er delt inn i klassetrinn, mens dagens læringsmål omfatter kompetansemål fra hele ungdomstrinnet. I og med at forskningen foregikk i en åttende klasse, tok jeg utgangspunkt i de relevante kompetansemålene for åttende trinn fra den nye læreplanen. Jeg trekker frem tre læringsmål for forskningsprosjektet, og det er viktig å presisere at vi var innom noen elementer fra hver av kompetansemålene i løpet av økten. Jeg trekker inn eksempel fra Flismønsterproblemet, samt inkludere noe teori fra teorikapitlet under læringsmålene.

Det første kompetansemålet lyder slik: «*beskrive og generalisere mønster med eigne ord og algebraisk*» (Utdanningsdirektoratet, 2019b). I Flismønsterproblemet bruker elevene kunnskap de allerede, har for å beskrive det geometriske mønsteret, for deretter å gå gjennom en prosess med ulike problemstillinger hvor elevene går fra uformelle beskrivelser, til mer formelle og generelle måter å uttrykke seg på (Blanton & Kaput, 2005) .

Det andre kompetansemålet er som følger: «*lage og forklare rekneuttrykk med tal, variablar og konstantar knytte til praktiske situasjonar*» (Utdanningsdirektoratet, 2019b). I forbindelse med Flismønsterproblemet, som er en praktisk oppgave, kan elevene lage seg flere regneuttrykk. Et eksempel på regneuttrykk med tall kan se slik ut: $f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 5$, $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, $f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$, hvor elevene etter hvert kan se at leddet + 1 er flisa i midten og er konstant. At det legges på tre fliser for etterfølgende mønster, som representeres med $3 \cdot$ variabelen n, som er flismønsternummeret.

Det tredje kompetansemålet lyder slik: «*Representere funksjonar på ulike måtar og vise samanhengar mellom representasjonane» (Utdanningsdirektoratet, 2019b)*. Under utforskingen med Flismønsterproblemet får elevene mulighet til å bruke ulike representasjoner, hvor de kan gå fra mer matematisk uformelle representasjoner med tegninger og beskrivelser, og etterhvert bevege seg over til mer formelle representasjoner med numeriske utregninger og til slutt forhåpentligvis et algebraisk uttrykk.

4.3 Forberedelse til gjennomføringen

Som tidligere nevnt, hadde jeg et tett samarbeid med matematikklæreren til åttendeklassen, som var med i undersøkelsen. Vi hadde tre samtaler: to før undervisningsøktene og en etter. Målet med disse samtalene var å bli enige om hvordan vi skulle gjennomføre undervisningsopplegget, og diskutere hva vi trodde kom til å skje. I tillegg gikk vi gjennom aktuelle kjerneelementer, som skulle fungere som undervisningsprinsipper.

Flismønsteroppgaven. Jeg sendte flismønsteroppgaven på forhånd med beskrivelser av de ulike resonnementsstrategiene, slik at matematikklæreren kunne være forberedt på dette underveis i gjennomføringen av undervisningen. Vi skulle oppfordre elevene til å være kreative og bruke flere representasjoner. Vi ble enige om at vi skulle være tydelige på at elevene i gruppene skulle overbevise medelevene om at deres strategi var den mest effektive. Samtidig ønsket vi at elevene skulle se mønsteret på forskjellige måter. Vi var unnlot å påpeke hvilken strategi, som var den mest effektive, da det kan være flere riktige strategier. Ved å trekke inn effektivitet vil kanskje elevene også se nytten av å bruke matematiske symboler heller enn å tegne, noe som vil ta betraktelig mer tid. Vi ble enige om å inkludere noen kjerneelementer i undervisningen, som omtales senere i kapittel 4.4.

Konkretiseringsmateriell. Vi diskuterte hvilke konkretiseringsmaterialer vi skulle bruke, og fant kvadratiske plastikkbrikker i to farger på skolen, som kunne representere flisene. Alle elevene skulle også få hver sitt oppgaveark, slik at alle fikk mulighet til å notere ned sine strategier og løsninger. Det var god plass mellom oppgavene, slik at elevene hadde rikelig plass til å notere. I tillegg kopierte vi arkene på enkeltsider, slik at det ble vanskeligere å overse oppgavene, og for å hindre at noteringen skulle komme gjennom på andre siden av arket.

Veilederrollen. Vi skulle opptre som forsiktige veiledere, som vil si at vi egentlig skulle blande oss minst mulig inn. Dette var for å forhindre at elevene skulle bli påvirket av lærerne. Vi var også forsiktig med å si at noe var riktig eller galt, da vi kan oppfattes som dømmende. Men vi var jevnlig innom alle gruppene, og oppmuntret elevene til å samarbeide og forklare resonnementene sine til hverandre. I og med at elevene ikke hadde arbeidet med geometriske mønsteroppgaver tidligere, var det ekstra spennende å se hvordan de intuitivt responderte på oppgavene.

Elevenes bakgrunn. I og med at jeg ønsket å fokusere på introduksjonen av oppgaven, var det viktig at elevene ikke hadde vært borti lignende oppgaver tidligere. Elevene ble plassert i blandede grupper, i ulike nivåer og med ulike kjønn. Dekknavnene elevene lagde, stemmer overens med kjønnene. Dekknavnene ble lagt tydelig frem på bordene, slik at elevene også i dialogen seg imellom skulle bruke dekknavnene.

Lærerens bakgrunn. Læreren hadde ikke erfaring med geometriske mønsteroppgaver fra tidligere. Hun hadde flere års erfaring med undervisning i matematikk, og brukte også varierte metoder i undervisning. Elevene har tidligere også samarbeidet, noe som ga et godt grunnlag for diskusjon og trygghet blant elevene i gruppene. Læreren hadde også erfaring med samtaletrekk, som går ut på at læreren veileder elevene til å utdype det de mener, heller enn å kun komme med et ferdig svar (Wæge, 2015) .

4.4 Aktuelle kjerneelement (undervisningsprinsipper)

For at jeg og matematikklæreren skulle ha så likt utgangspunkt som mulig under gjennomføringen av matematikkundervisningen, diskuterte vi noen sentrale begreper fra kjerneelementene. Kjerneelementene er en beskrivelse av hva som bør inkluderes i matematikkundervisningen. De relevante kjerneelementene som ble introdusert for elevene var utforsking, representasjon og kommunikasjon, og ble introdusert muntlig i begynnelsen av undervisningsopplegget. Mens kjerneelementene resonnering, argumentasjon, abstraksjon og generalisering ble kun diskutert mellom meg og matematikklæreren. I videre avsnitt gis en beskrivelse av de relevante kjerneelementene, som ble grunnlaget for undervisningen (undervisningsprinsipper).

Kjerneelementet *utforsking,* handler om at elevene skal lete etter mønstre, finne sammenhenger og diskutere seg frem til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og fremgangsmåtene, heller enn på selve løsningen. Kjerneelementene *representasjon* og *kommunikasjon,* ble beskrevet i teorien under representasjoner (se kap. 2.4). Flismønsterproblemet er utformet slik at elevene har mulighet til å veksle mellom ulike representasjoner. Underveis i gjennomføringen ble elevene oppfordret til å bruke varierte representasjonsformer, for å få frem strategiene de brukte. Vi tydeliggjorde også hva vi mente med representasjoner, som er måter å uttrykke begrep, sammenhenger og problemer på. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske.

Det neste kjerneelementet ble ikke nevnt til elevene, men ble diskutert med matematikklæreren. Kjerneelementet *resonnering*, handler om at elevene skal følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Med Flismønsterproblemet er det lagt opp til at elevene skal få et eierforhold til oppgaven, og at de selv skal komme frem til et uttrykk, som ikke er tilfeldig. I tillegg legger Flismønsterproblemet opp til at elevene skal kunne gå fra konkrete beskrivelser, til en mer generell beskrivelse av det geometriske mønsteret. Det vil si at elevene arbeider med *abstraksjon*, som innebærer at elevene gradvis utvikler en formalisering av tanker, strategier og matematisk språk. Utviklingen går fra konkrete beskrivelser, til formelt symbolspråk og formelle resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2019a). *Generalisering* handler om at elevene skal oppdage sammenhenger og sturkurer, og skal ikke bli presentert for ferdige løsninger. Elevene skal utforske tall, utregninger og figurer, for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved å bruke algebra og funksjonelle representasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2019a).

4.5 Utforming av problemstillinger i Flismønsterproblemet

For å kunne svare på det første forskningsspørsmålet mitt: «Hvordan kan introduksjonen av en geometrisk mønsteroppgave utformes for å hjelpe elevene i gang med funksjonstenking på åttende trinn?», er det naturlig å begrunne undervisningsopplegget med forskningsbasert teori om geometriske mønsteroppgaver.

Arbeidet med å visualisere et mønster og bevege seg fra en språkbeskrivelse av mønsteret, til en symbolsk representasjon eller regel, er en konseptuell tilnærming til algebra. Wilkie og Clarke (2016), viser oss hvordan utformingen av generaliseringsoppgaver, basert på geometriske mønstre, kan fremkalle elevers utvikling av funksjonstenking. Oppgavene er basert på visualisering og elevenes evne til å utforske forskjellige representasjoner av samme funksjon.

Mange lærere dekker temaet som omhandler «mønster» veldig raskt, og presenterer bare mønstre som fører til uttrykk an + b og deler sine triks for å komme frem til uttrykket tidlig. Når det gjelder Flismønsterproblemet, gjør lærere ofte det visuelle mønsteret om til en numerisk representasjon av mønsteret for raskt, ved å stille spørsmålene: "Hvor mange fliser er det i det første flismønsteret? det andre? det tredje? Hvor mange øker det for hver gang?" Når elevene har svart på det siste spørsmålet, får de beskjed om at det er tallet a, i uttrykket an + b. For å få b, trenger elevene bare å undersøke det første flismønsteret i oppgaven (midtre flis). Med en slik tilnærming er det tvil om at utvikling av algebraisk tenking kan finne sted (Lannin, 2005).

Friel og Markworth (2009) trekker frem at problemstillinger som fokuserer på den visuelle resonnementskompetansen ofte uteblir. Lee og Freiman (2006) foreslår derfor et sett med spørsmål, som skal veilede elevene i problemløsningsprosessen. Spørsmålene skal legge til rette for visuell begrunnelse, og er selve hjørnesteinen i et figurativt resonnement.

Til tross for kritikk av tidligere undervisning med geometriske mønstre, har forskere utviklet flere oppgaver, som kan være til hjelp i prosessen med å lære seg algebraisk tenking. I mitt forskningsprosjekt, er utgangspunktet i en geometrisk mønsteroppgave, som er delt inn i tre faser. Fasene inneholder problemstillinger som skal stimulere elevenes arbeid med funksjonstenking. Jeg har stort sett valgt å følge forskernes oppbygging av problemstillingene og fasene. Det kan likevel være noen små nyanser i spørsmålene, da jeg har oversatt dem fra engelsk til norsk. I tillegg har jeg gjort om den visuelle fremstillingen av mønsteret til kvadratiske fliser. Andre forskere, som Friel og Markworth (2009), har brukt smileansikter. Lee og Freiman (2006), har brukt stjerner. Utarbeidelsen av problemstillingene og fasene i Flismønsterproblemet er sterk inspirert av Lee og Freiman (2006) og Friel og Markworth (2009).

4.5.1 Første fase av Flismønsterproblemet

I første fase av Flismønsterproblemet, bruker elevene de visuelle egenskapene i Flismønsteret for å begrunne. *Første problemstilling* i denne fasen, handler om hvor mange ulike måter elevene kan se flismønstrenes oppbygging på. Ifølge Lee og Freiman (2006), er spørsmålet avgjørende, for at elevene skal kunne utvikle rik algebraisk tenking. Spørsmålet kan føre til flere uttrykk, som igjen kan åpne opp for diskusjon om uttrykkene er likeverdige, og arbeide med symbolmanipulasjon av uttrykkene. Ungdomsskoleelever viser seg å ha ulike tilnærminger til oppfattelsen av det geometriske mønsteret.

For å lokke frem ulike tilnærminger til mønsteret, er det også lagt til fire underspørsmål (a, b, c og d) i første oppgave, hvor spørsmålene legger opp til at elevene skal tegne eller bygge det 4.-, 10.-, 58.- og et hvilke som helst flismønster. Elevene som bruker strategien med å legge på tre ekstra fliser på forrige flismønster, vil på det 58. flismønsteret få behov for å endre strategi, for å utføre oppgaven mer effektivt. I siste delspørsmål, skal elevene fortelle noen hvordan de skal tegne eller bygge et hvilket som helst flismønster (Lee & Freiman, 2006). Et eksempel på utsagn fra elevene være: «Du tegner en flis i midten og legger deretter antallet fliser som er i flismønsternummeret til høyre, venstre og ovenfor midterste flis» eller «du tar forrige flismønster og legger til en flis på hver ende» eller «Du dobler flismønsternummeret og tar bort en, som gir deg antall fliser i den horisontale retningen. Deretter tegner du de vertikale flisene over den midterste flisa og legger til samme antall fliser som flismønsternummeret». I teoridelen ble de ulike resonnementsstrategiene beskrevet (se kap. 2.3) og illustrert i

Tabell 2.1 og Tabell 2.2.

Den *andre problemstillingen* i første fase, handler om at elevene har 27 fliser til rådighet, og spørsmålet er hvordan flismønsteret vil se ut, og om det vil være noen fliser igjen. Her endres fokuset betydelig fremfor de første oppgavene. Elevene kan bruke ulike strategier for å løse oppgaven, og måten elevene bygger figuren på kan gi oss en pekepinn på hva slags strategi de bruker. Når elever begynner å telle antall fliser i flismønsteret kan resonnementene endre seg fra tidligere resonnementer (Lee & Freiman, 2006).

4.5.2 Andre fase av Flismønsterproblemet

I andre fase av Flismønsterproblemet inngår utvikling av tallpar (n og f(n)), for å generalisere en funksjon. I denne fasen inngår tre etterfølgende problemstillinger fra første fase. Den *tredje problemstillingen* i andre fase er spørsmålet hvor mange fliser som trengs for å lage flismønsternummer 10, 58 og 100. Spørsmålene ligner underspørsmålene i første problemstilling, men overgangen fra å uttrykke hvordan man tegner et bestemt flismønster til hvor mange fliser det er i et bestemt flismønster, krever blant annet at elevene behersker numeriske utregninger. Oppmerksomheten er nå rettet mot antallet fliser i flismønsteret, og elevene kan oppfordres til å se etter mønster i utregningene sine, som vil danne grunnlag til å svare på den fjerde problemstillingen (Lee & Freiman, 2006).

Den *fjerde problemstillingen* i andre fase stiller spørsmålet om hvor mange fliser det trengs for å lage flismønster nummer n, et hvilke som helst flismønster. Videre får de også beskjed om å lage et uttrykk. Her er det viktig at elevene oppfordres til å beskrive med ord, og uttrykke skriftlig, hva uttrykket kan være. Hva slags uttrykk og begrunnelse elevene kommer med, vil kanskje avhenge av hva slags strategier elevene har brukt i tidligere oppgaver. Uavhengig av hvordan uttrykket elevene lager seg, vil variabelen n være til stede, som er et hvilke som helst naturlig tall. Her dannes grunnlaget for studien av relasjoner og funksjoner. Et enkelt spørsmål kan flytte oss fra å tenke på n som et ukjent spesifikt tall, og fremkalle den andre siden av elementær algebra, hvor vi er opptatt av å finne ukjente gjennom å sette opp og løse likninger. Dette blir relevant i den siste og tredje fasen av Flismønsterproblemet i senere avsnitt (Lee & Freiman, 2006).

Den *femte problemstillingen* i andre fase, får elevene beskjed om å sammenligne uttrykkene de kom frem til med medlemmene på gruppa, fra forrige problemstilling. Videre stilles det spørsmål om hvilke uttrykk de mener er «riktige». Arbeidet kan føre til interessante diskusjoner, hvor elevene prøver å rettferdiggjøre formlene sine, og at de går tilbake for å sjekke om det de har funnet ut stemmer. Denne problemstillingen har lett for å bli oversett av elevene, fordi de kun er fokusert på sine egne formler (Lee & Freiman, 2006).

Det er viktig å påpeke, at det ikke er en enkel oppgave å uttrykke mønsteret med symboler, som et uttrykk. Jo mer fleksible elevene er i å oppfatte mønsteret på ulike måter, desto mer mottakelige er de for å finne en strategi som enklere lar seg skrive symbolsk. Ulike uttrykk vil også gi en ypperlig inngang for å undersøke ekvivalens mellom dem. For eksempel hvordan kan $3n + 1$, $(2n + 1) + n$ og $3(n + 1) - 2$ være ekvivalente uttrykk. Det er en vesentlig forskjell mellom å diskutere uttrykkene elevene kommer frem til, kontra et sett med tilfeldige sammensatte uttrykk fra matematikkboka. Elevenes uttrykk tilhører dem selv, noe som gir mening og noe de bryr seg om. Elevene blir mest sannsynlig mer motiverte og mottakelige for etterfølgende symbolmanipulasjon også (Lee & Freiman, 2006).

4.5.3 Tredje fase av Flismønsterproblemet

I den tredje og siste fasen av Flismønsterproblemet inngår en utvidet mønsteranalyse, som tar oss tilbake til den andre problemstillingen i første fase med totalt 27 fliser. I første fase fokuserte elevene kun på antall fliser i flismønsteret. I tredje fase, brukes antall fliser, for at elevene skal kunne løse en likning ved å finne den ukjente n. Den *sjette problemstillingen* i tredje fase, handler om hvilke flismønster som har nøyaktig 50 og 100 fliser. Elevene kan ha ulike tilnærminger til oppgaven, alt ettersom hvilke resonnementsstrategier de har brukt tidligere (Lee & Freiman, 2006). Ved å ta utgangspunkt i uttrykket $3n + 1$, kan likningen bli $100 = 3n + 1$, n må være 33 siden $3 \cdot 33 + 1 = 100$. En forklaring kan være at de tre armene til n inneholder 99 fliser pluss flisa i midten, som gir totalt 100 fliser. Ved å dele 99 fliser på de tre armene, sitter vi igjen med 33 fliser per arm, som er flismønsternummeret n.

Den *sjuende og siste problemstillingen,* utfordrer elevene til å lage en ny oppgave med et egenprodusert mønster. Denne problemstillinger tvinger elevene til å reflektere rundt aktiviteten elevene har jobbet med tidligere, og bruke det de har lært. De må gå tilbake og se på hva et mønster er, hvordan man kan se et mønster, hva slags uttrykk det nye mønsteret kan ha, og så videre (Lee & Freiman, 2006).

Jeg har prøvd å tilpasse problemstillingen med tanke på at elevene ikke har jobbet med mønstre tidligere, og at vi som veiledere ikke skulle blande oss for mye inn. Grunnen til at jeg valgte Flismønster, er noe konkret, som elevene kan se for seg i praksis. I tillegg hadde jeg fysiske brikker, som kunne ligne på fliser, og som elevene kunne bruke i oppgaveløsningen.

I de opprinnelige oppgavene er det stort sett begrepet «tegning» som inngår som representasjon, men jeg trakk inn å «bygge» i tillegg for å gi elevene flere valg (for eksempel med de fysiske brikkene), se oppgave a, b og c i Tabell 4.1. Intensjonen var også at det kanskje var enklere for elevene å bygge flismønsteret og at det ville bli enklere for meg i etterkant å analysere elevenes strategier. Nedenfor er en Tabell 4.1 av de opprinnelige spørsmålene fra Friel og Markworth (2009), samt min versjon som elevene fikk utdelt. De bruker, som tidligere nevnt «smiley faces», i stedet for fliser i tilsvarende oppgave.

4.5.4 Problemstillinger til Flismønsterproblemet

Tabell 4.1: De opprinnelige spørsmålene og min oversettelse av dem.

Fase	**Oppgave**	**Spørsmål: punkt (1) opprinnelig fra Friel og Markworth (2009), punkt (2) min versjon**
1	1	(1) How many different patterns can you see in this drawing? (2) På hvor mange ulike måter kan du se på flismønstrenes oppbygging?
	a	(1) How would you draw the next stage? (2) Hvordan vil du tegne eller bygge det 4. flismønsteret?
	b	(1) How would toy draw the 10th stage? (2) Hvordan vil du tegne eller bygge det 10. flismønsteret?
	c	(1) How wold you draw the 58th stage? (2) Hvordan vil du tegne eller bygge det 58. flismønsteret?
	d	(1) How wold you tell someone how to draw any stage at all? (2) Fortell noen hvordan de skal tegne eller bygge et hvilket som helst flismønster.
	2	(1) I have a box of 25 smiley faces. How big a figure could I make? Would I have some smiley faces left over? (2) Du har 27 fliser. Hvordan vil flismønsteret se ut? Vil du ha noen fliser igjen?
2	3	(1) How many smiley faces does it take to make the nth stage? (2) Hvor mange fliser trengs for å lage flismønsternummer n (et hvilke som helst flismønster)? Lag et uttrykk.
	4	(1) How many smiley faces does it take to make the 10th stage, the 58th stage, or the 100th stage? (2) Hvor mange fliser trengs for å lage det 10. flismønsteret, 58. flismønsteret eller 100. flismønsteret?
	5	(1) Which of the expressions for the nth stage is a "right" one? (2) Sammenlign uttrykkene med hverandre. Hvilke uttrykk mener dere er det «riktige»?
3	6	(1) Which stage has exactly 100 smiley faces in it? What about 50 smiley faces? (2) Hvilke flismønster har nøyaktig 100 fliser? Hva med 50 fliser?
	7	(1) Can you create a pattern problem for the class? (2) Kan du lage en ny oppgave med flismønstre eller andre mønstre for klassen?

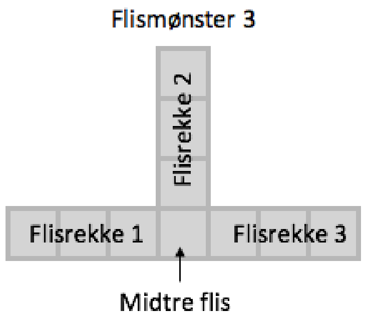
I tillegg til problemstillingene og illustrasjonen på oppgavearket (Figur 2.1), var det en innledning som lød slik: «Du skal flislegge et flismønster på gulvet. Flisene har samme størrelse, men flismønsteret blir større og større for hver nye flismønster. For eksempel til flismønster 1 trenger du 4 fliser, mens til flismønster 2 trenger du flere fliser, og så videre. Ved å gjøre oppgavene under, vil du etter hvert kunne finne en regel, som enkelt forteller hvor mange fliser du trenger til de ulike flismønstrene. Naboen sin regel kan se annerledes ut enn din, men regelen kan likevel fungere. Det viktigste er at dere argumenterer for hvorfor regelen skal fungere. Lykke til!». Oppgaven, slik elevene fikk utdelt i undervisningen, ligger vedlagt, i kapittel 8.2.

5 Analyse av elevenes arbeid med Flismønsterproblemet

I femte kapittel analyserer jeg elevenes arbeid med Flismønsterproblemet, ved å se på elevenes utforsking av oppgaven i lys av deres representasjoner og resonnementer. Hensikten med kapitlet var å finne svar på følgende problemstilling: Hvordan representerer elevene resonnementsstrategiene sine gjennom utforskingen av det geometriske flismønsteret? Jeg brukte analysetilnærmingen som tidligere er beskrevet i metodekapittelet, og analysen er delt opp de tre fasene i Flismønsterproblemet.

I analysen ønsket jeg å få frem bredden av representasjoner og resonnementsstrategier. Jeg har valgt å fokusere ekstra på noen elevbesvarelser, for å vise utviklingen gjennom elevenes arbeid. Spesielt blir gruppe A og B eksemplifisert mer enn gruppe C, men i enkelte tilfeller skiller strategi og representasjoner seg mer ut, og da trekker jeg inn flere eksempler fra flere grupper. Noen elever er mer delaktige enn andre, og det blir naturlig å trekke frem elever som viser mye både skriftlig og muntlig, for å avdekke strategier og få frem flere representasjoner. Det er viktig å påpeke at undersøkelsen ikke var ment for å finne ut hva elevene har fått til eller ikke, men vise bredden av måter elever kan representere situasjoner på, og som er naturlig for dem, for å kunne bygge videre på disse senere.

For å unngå lange beskrivelser av hvordan flismønsteret ser ut, har jeg valgt å lage en illustrasjon med begreper jeg bruker tilhørende flismønsteret. Utgangspunktet er i flismønster 3, men gjelder også et hvilket som helst flismønster, se Figur 5.1. Flisrekke 1, 2 og 3 omtales sammen som *flisrekkene*.



Figur 5.1: En spesifisering av begreper i flismønsteret, som blir brukt i analysen.

Analysen inkluderer flere elevdialoger, kalt «muntlige besvarelse» i forbindelse med oppgaveløsning, samt elevers «skriftlige besvarelse». I de skriftlige besvarelsene har jeg i flere tilfeller markert tall i parentes (x), kalt punkter. Disse punktene er også markert i min tekst og noen ganger i elevens dialoger, for å vise at punktene har en sammenheng. Tallene fremfor dialogene (1, 2, 3 ...) kaller jeg for linjer, som jeg også henviser til underveis i tekstene. Dialogene kan også inneholde parenteser med forklaringer, som for eksempel «(peker på overskriften «flismønster 1» i oppgaven)», som er min observasjon fra videoopptakene. I tillegg er det noen bilder fra ulike situasjoner fra undervisningen i analysen, som markeres med «Bilde».

5.1 Første fase: Elevenes begrunnelse med å bruke de visuelle egenskapene til flismønsteret.

Denne fasen fokuserer på de visuelle egenskapene til flismønsteroppgaven, med spørsmål som er laget slik at elevene kan få frem ulike strategier. Oppgavene legger til rette for at elevene skal bygge eller tegne mønsteret visuelt. For å lokke frem ulike tilnærminger til mønsteret er det også lagt til fire underspørsmål. Elevene hadde tilgang til fysiske brikker og hvert sitt oppgaveark, som de også kunne tegne på som hjelpemiddel.

1. På hvor mange ulike måter kan du se på flismønstrenes oppbygging?

Samtlige grupper benytter seg av det naturlige språket og illustrasjoner for å representere resonnementsstrategien, som ser ut til å være strategi A, med figurativ tilnærming. Videre utdyper jeg påstandene ved å gi eksempler fra elevenes skriftlige og muntlige besvarelser fra utforskingen med gruppe A. Nedenfor er et eksempel av Sofia sitt resonnement tidlig i dialogen mellom elevene i oppgave 1, se linje 1.

1	Sofia:	for det mønsteret her kan man tenke at det går fra mønster en til mønster to, så går man ut over en for hver sin pinne eller man har like mange utover her (peker på flisrekken til høyre fra midtre flis, flismønster 1), som hvilket mønster man har (peker på overskriften «flismønster 1» i oppgaven).
2	Åsne:	asså, at det blir en ut av hvert, på en måte?
3	Sofia:	ja, altså hvis man tenker at man er på oppgave 20, så blir det 20 utover sånn (peker på de tre pilene, se Skriftlig besvarelse 5.1).

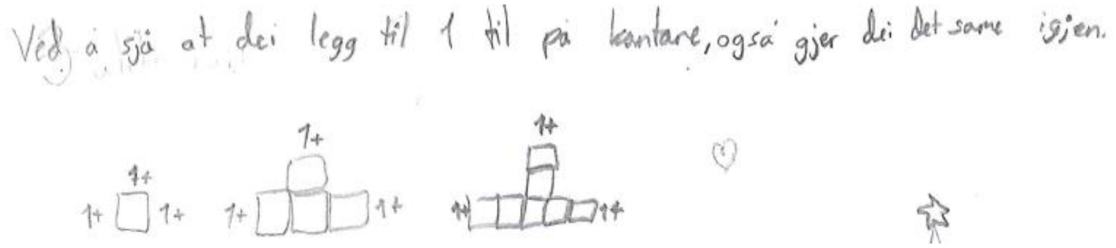
Jeg tolker resonnementet i linje 1, som at Sofia legger til en flis i hver av de tre flisrekkene fra flismønster 1 for å kunne lage flismønster 2. Min tolkning vil da være figurativ resonnementsstrategi A (rekursiv tilnærming), hvor eleven er avhengig av forrige flismønster for å lage det neste (Lannin, 2005). Ved å se på den skriftlige besvarelsen 5.1 nedenfor, kan påstanden underbygges.

Skriftlig besvarelse 5.1 av Sofia

Elevene på gruppe A ble enige om hvordan de skulle representere strategien skriftlig, se Skriftlig besvarelse 5.1. Pilene ser ut til å representere flisrekkene ut fra midterste flis, som beskrives som «kvar sin pinne». Hvis vi ser pilene og «pluss tre» i sammenheng, kan det se ut som at elevene bruker en rekursiv strategi – at det legges på tre ekstra fliser for å få neste figur, en i hver retning. En rekursiv strategi er verdifull for å utforske hva som skjer fra det ene mønsteret til det neste og kan inkludere begrepet stigningstallet av en funksjon (Küchemann, 2010). Den skriftlige besvarelsen til Sofia er en illustrasjon og i dialogen bruker elevene sine egne begreper og bruker et naturlig språk for å representere resonnementet.

Det er også verdt å merke seg den siste delen av setningen i linje 1 (etter ..eller..) og linje 3 i dialogen. Sofia ser ut til å observere at det er like mange fliser i hver retning fra midterste flis, og at størrelsen på flisrekkene er det samme som flismønsternummeret. Her kobler hun flismønsternummeret opp mot det visuelle flismønsteret, som også kan kalles en figurativ tilnærming (Rivera & Becker, 2005). Senere kan observasjonen være til hjelp i en eventuell overgang til strategi C, hvor flismønsternummeret vil være den uavhengige variabelen og at den er i sammenheng med det visuelle flismønsteret.

Nedenfor er et annet eksempel (Skriftlig besvarelse 5.2) på en skriftlig representasjon av eleven Mali fra gruppe B, som er en tegning av utviklingen til flismønsteret. Det ser ut til at «1+» kan representere flisene som legges til i hver flisrekke, for hver etterfølgende figur, som i likhet med Sofia sin representasjon tolkes rekursivt (strategi A). Representasjonen til Sofia og Mali, var typiske eksempler på hvordan flere av elevene representerte sine resonnement.



Skriftlig besvarelse 5.2 av Mali

Et av målene med denne problemstillingen var at elevene skulle se mønsteret på ulike måter og komme frem til flere resonnementsstrategier, som etter hvert kunne by opp til diskusjon. Det ble ikke tilfellet i denne undersøkelsen, for elevene på gruppene ble raskt enige om en strategi, som også ble en gjenganger hos alle gruppene i første oppgave. Det var tydelig at problemstillingen var ny for elevene, da de brukte flere minutter på å lese oppgaven og forstå spørsmålene. Til tross for at elevene virket usikre, bestemte veilederne seg for ikke å påvirke elevene, for å se hvordan de tolket oppgaven, og hva slags kunnskaper de brukte for å løse oppgaven på egen hånd.

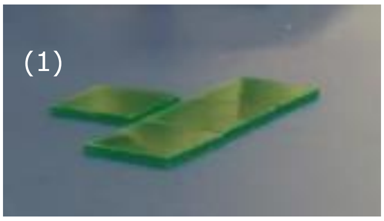
a) Hvordan vil du tegne eller bygge det 4. flismønsteret?

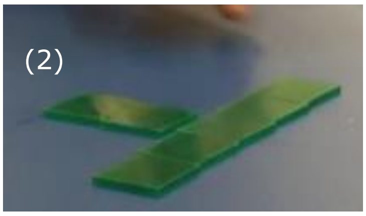
Denne oppgaven er mer konkret i form av at elevene skulle bygge eller tegne det 4. flismønsteret. Det spennende her blir om elevene bygger eller tegner flismønsteret med samme strategi, som de gjorde i første oppgave eller om de gjør noe annet.

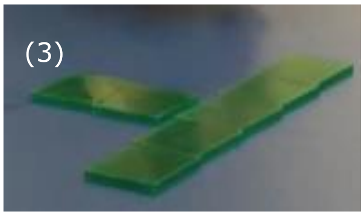
Samtlige grupper benytter seg av det naturlige språket og illustrasjoner for å representere resonnementsstrategien i oppgave a, og de fortsetter med samme strategi som i første problemstilling. Videre utdyper jeg påstandene ved å gi to eksempler fra elevenes skriftlige og muntlige besvarelser fra utforskingen med gruppe B.

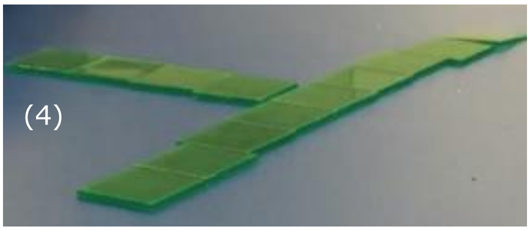
Nedenfor er et eksempel fra gruppe B av Kristine sitt resonnement i arbeid med oppgave a. Eksempelet viser også hvordan hun brukte de fysiske brikkene, for å forklare de andre på gruppa om strategien sin, se linje 4 med punkt 1 til 4 i sammenheng med punktene på bildene, se Bilde 5.1.

4 Kristine: vi starter med den i midten, åsså legge på en på hver side, sånn da har vi flismønster én (1). På flismønster to så legger du på en til, så har du flismønster to (2). Åsså det samme med flismønster tre (3). Så, en flis til på flismønster fire (4). Åsså legger man bare på en til for hver figur.. skjønte du?



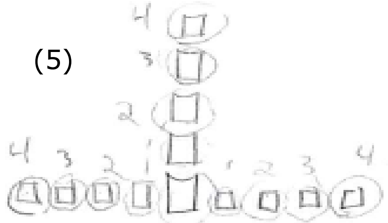






Bilde 5.1: Inkluderer fire bilder (1)-(4) av Kristine, som bygger flere flismønstre.

(5)



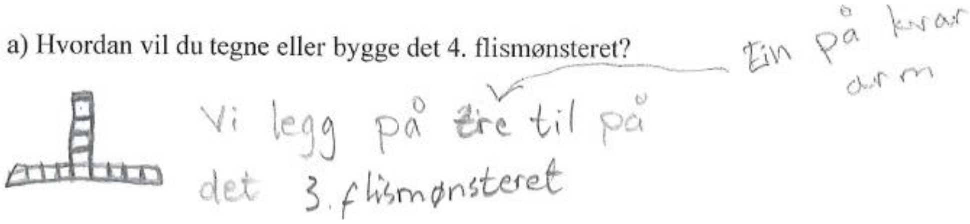
Skriftlig besvarelse 5.3 av Kristine

Sett fra Kristines muntlige forklaring, bygger hun opp ett og ett flismønster fra flismønster 1 til flismønster 4, ved å legge på tre nye fliser i flisrekkene for hver nye flismønster. Punkt 5 viser Kristine sin skriftlige besvarelse, som ser ut til å representere det samme ved at hun skriver nummer en, to, tre og fire på tre nye fliser i hver av flisrekkene. I sammenheng med den muntlige forklaringen tolker jeg fremdeles strategien til Kristine som strategi A.

Jeg velger også å trekke frem gruppe C sitt resonnement, siden de er mer effektive i prosessen ved å ta utgangspunkt i det tredje flismønsteret som er illustrert på oppgavearket. Mia legger til tre nye fliser på flisrekkene fra flismønster 3 til flismønster 4, se linje 5 og 6.

5 Ben: hvordan vil dere tegne eller bygge det fjerde flismønsteret?
6 Mia: Ta på enda en. Da skriver jeg legg på en, nei tre til på mønsteret fra det 3. flismønsteret.

Påstanden om at denne gruppa også bruker en rekursiv strategi forsterkes også ved at de representerer det samme i den skriftlige representasjonen.



Skriftlig besvarelse 5.4 av Mia

I Skriftlig besvarelse 5.4, illustrerer Mia til venstre en tegning av flismønsteret, samt en forklaring til høyre med det naturlige språket, som også ligner forklaringen hun ga muntlig.

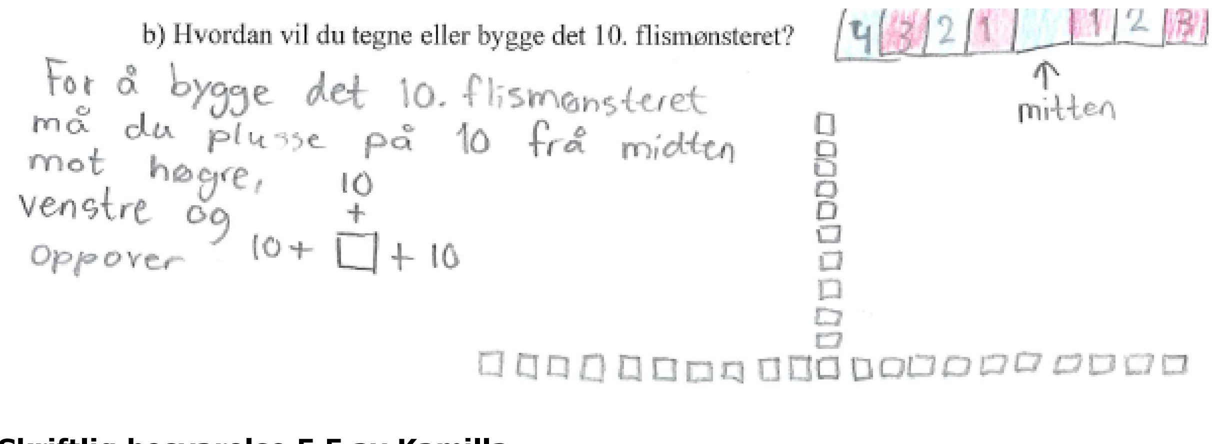
b) Hvordan vil du tegne eller bygge det 10. flismønsteret?

I denne oppgaven er det ikke lengre like enkelt og effektivt å bygge figuren med strategi A. For eksempel, er det fra flismønster tre til fire, mulig å se på forrige figur, mens fra flismønster fire til ti, så vil det være tidkrevende, siden elevene må tegne alle flismønstrene mellom fire og ti.

Samtlige elevgrupper bruker fremdeles det naturlige språket og illustrasjoner, for å representere resonnementsstrategiene sine. Alle gruppene ser ut til å skifte strategi til eksplisitt tilnærming (strategi C). Gruppe C får også en annen måte å telle fliser på, som jeg trekker frem. Videre utdyper jeg påstandene ved å gi eksempler fra elevenes skriftlige og muntlige besvarelser, med gruppe A.

I gruppe A begynner Pær å bygge med de fysiske klossene rett etter at gruppa har lest oppgaven, mens de andre valgte å tegne og forklare på egne oppgaveark. Pær begynte å legge brikken i midten og deretter ti fliser i flisrekke 1, ti fliser i flisrekke 2 og til slutt det samme i flisrekke 3. Denne måten å bygge flismønsteret på ligner mer strategi C heller enn strategi A (eksplisitt tilnærming), hvor det er flere sett med likt antall fliser (Lee & Freiman, 2006). Etter noen minutter gir Pær en beskrivelse av hva han tenkte til gruppa, samtidig følger Kamilla etter og viser sin besvarelse, se linje 7 til 9 og Skriftlig besvarelse 5.5 av Kamilla.

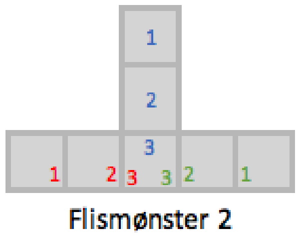
7	Pær:	da legger vi én flis i midten, også en, to, tre, fire, fem, sek, sju, åtte, ni, ti (flisrekke 1). Ganger ti her; en, to, tre ... ti (flisrekke 2). Da har vi det der. Åsså får vi [en, to, tre ... 10] (flisrekke 3). Åååh, det er det tiende flismønsteret.
8	Kamilla:	Åsså blir det sånn (snur arket til de andre på gruppa, se Skriftlig besvarelse 5.5 av Kamilla). Det blir litt enklere å skrive det med ti pluss ti enn å tegne eller bygge hele greia. Er dere enige i det?
9	Kristine:	ja



Skriftlig besvarelse 5.5 av Kamilla

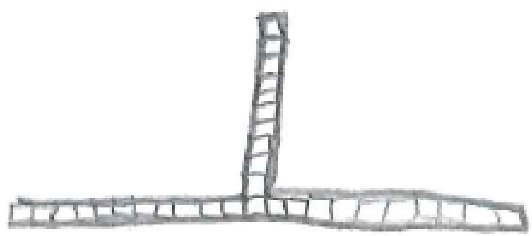
Den skriftlige besvarelsen til Kamilla ligner også på Pær sin strategi A, ved å legge en flis i midten og ti i hver flisrekke. Det ser ut til at elevene kobler flismønsternummeret opp mot antall fliser i flisrekkene og de har fremdeles en figurativ tilnærming i løsningene sine.

Jeg velger å trekke frem en annen tellemåte som dukket opp hos gruppe C. Diskusjonen ble uoversiktlig, og jeg velger heller å beskrive situasjonen. Elevene diskuterte hvordan de skulle telle flisene i flisrekken. Det virket som at elevene telte flisen i midten hver gang da de skulle telle flisene utover i flisrekkene, se eksempel Figur 5.2. I Flismønster 2 vil det altså være tre fliser i hver rekke.



Figur 5.2: Illustrerer hvordan elevene talte flisrekkene til flismønsteret.

Det vil si at i flismønsternummer 10 inkluderer 11 fliser i hver flisrekke. Til tross for at tellingen var annerledes enn de andre gruppene, ble tegningen av flismønster 10 likevel som de andre gruppene sine, se Skriftlig besvarelse 5.6 av Ben.



Skriftlig besvarelse 5.6 av Ben

Måten å telle på ble ikke oppdaget av veilederne underveis i undervisningen, og elevene gikk over til annen tellemåte på i oppgave c, etter videre diskusjon. Hvis tellingen hadde blitt oppdaget i tide kunne det vært interessant å se om elevene kunne fortsette oppgaveløsningen på samme måte, og finne en formel for strategien senere, som kunne blitt $3(n+1) - 2$. Dette er en mulighet man kan ta opp og utforske ved en senere anledning, for å undersøke ekvivalensen mellom ulike algebraiske uttrykk. Lee og Freiman (2006) påpeker at det er en vesentlig forskjell mellom å diskutere uttrykkene elevene kommer frem til kontra et sett med tilfeldige sammensatte uttrykk fra matematikkboka. Elevenes uttrykk tilhører dem selv, noe som gir mening og noe de bryr seg om. Elevene blir mest sannsynlig mer motiverte og mottakelige for etterfølgende symbolmanipulasjon også.

c) Hvordan vil du tegne eller bygge det 58. flismønsteret?

Med denne problemstillingen har ikke elevene lengre mulighet til å bygge flismønsteret med fysiske brikker, da det ikke er nok brikker tilgjengelig. Det vil også bli mer utfordrende og ineffektivt å tegne flismønsteret. Her vil det være interessant å se hvordan elevene velger å representere resonnementsstrategiene og om de holder fast ved strategien de brukte i oppgave b.

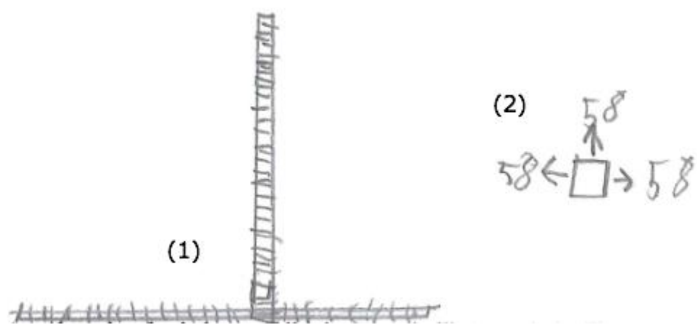
Elevene fra alle gruppene bruker det naturlige språket og illustrasjoner for å representere resonnementsstrategiene sine. Alle gruppene viderefører strategien, som de resonnerte seg frem til i oppgave b. Videre utdyper jeg påstandene ved å gi eksempler fra elevenes skriftlige og muntlige besvarelser med gruppe A.

I dialogen mellom Kamilla, Kristine og Pær på gruppe A, diskuterer elevene hvordan de skulle representere resonnementet sitt. Etter at elevene leste oppgave c, konkluderte Kamilla tidlig med at det ikke var igjen nok fysiske brikker for å bygge flismønster 58. Kristine undret seg over det samme, etter at hun talte opp brikkene, se linje 10 og 11. Elevene ble enige om at det ble for lite brikker, ved å resonnere seg frem til hvor mange fliser hver flisrekke skulle ha, se linje 12.

10	Kamilla:	vi har ikke nok brikker
11	Kristine:	50, 59. Vi har 99 stykker, er det nok for å bygge det 58. flismønsteret?
12	Kamilla:	nei, det er ikke det. Fordi du må jo ha 58 der, 58 der og 58 der pluss en.
13	Pær:	men da trenger vi jo ikke å lage figuren da.
14	Kristine:	hvordan skal vi få til det?
15	Kamilla:	vi må tegne det.

Skriftlig besvarelse 5.7 av Kamilla

Elevene representerte besvarelsen sin skriftlig, ved å lage en lignende tegning som de gjorde i oppgave b, se Skriftlig besvarelse 5.7 av Kamilla. Representasjonen er mer effektiv å bruke enn å tegne hele flismønsteret. Jeg trekker også frem den skriftlige besvarelsen 8 av Scott i gruppe A, for å belyse at noen elever også prøvde å tegne hele figuren, men at de til slutt fant ut at det ikke var så enkelt.



Skriftlig besvarelse 5.8 av Scott

Illustrasjonen til Scott i den Skriftlig besvarelse 5.8, punkt 2 og tegningen til Kamilla i Skriftlig besvarelse 5.7 er tilsynelatende like, men Kamilla bruker addisjonstegn for å vise antall fliser i flisrekkene, mens Scott bruker piler. Begge representasjonene var typisk for de fleste elevene gjennom oppgaveløsningen i fase 1.

d) Fortell noen hvordan de skal tegne eller bygge et hvilket som helst flismønster.

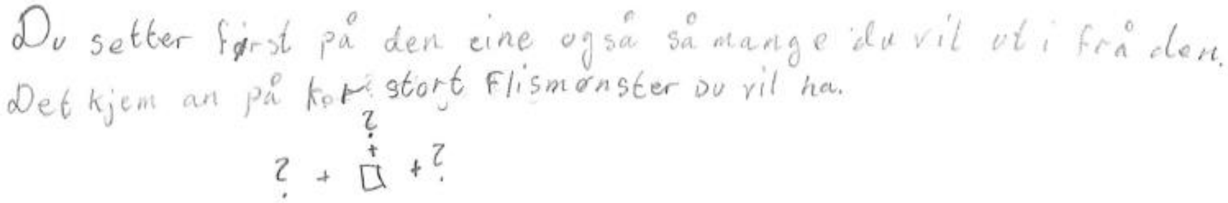
Denne problemstillingen er mindre konkret enn oppgave b og c, ved at elevene skal prøve å forklare hvordan de vil bygge et hvilket som helst flismønster. De har da ingen spesifikke eksempler å ta utgangspunkt i, og det blir spennende å se hvordan elevene tolker og besvarer oppgaven.

Elevene viste flere varierte representasjoner av strategien i denne oppgaven fremfor tidligere oppgaver. Variasjonen var også større innad i gruppene. Elevene så også ut til å videreføre strategi C som er vist tidligere. Nedenfor er fire eksempler fra de skriftlige besvarelsene fra alle grupper, og jeg trekker frem to eksempler fra gruppe b for å vise variasjoner innad i gruppene. Jeg velger å nøye meg med å trekke frem de skriftlige besvarelsene i denne omgang, da flere av dem inneholder det naturlige språket, som får frem elevenes strategier like godt som de muntlige besvarelsene.

Først er et eksempel av gruppe A, som hadde en overraskende tilnærming til problemstillingen. Elevene svarte at de måtte bruke matematikk og geometri for å løse oppgaven, uten å gi noen videre forklaring. Gruppene så seg videre fornøyde med svaret, og gikk videre til neste oppgave. Nedenfor er et eksempel på en Skriftlig besvarelse 5.9 av Sofia fra gruppe A.

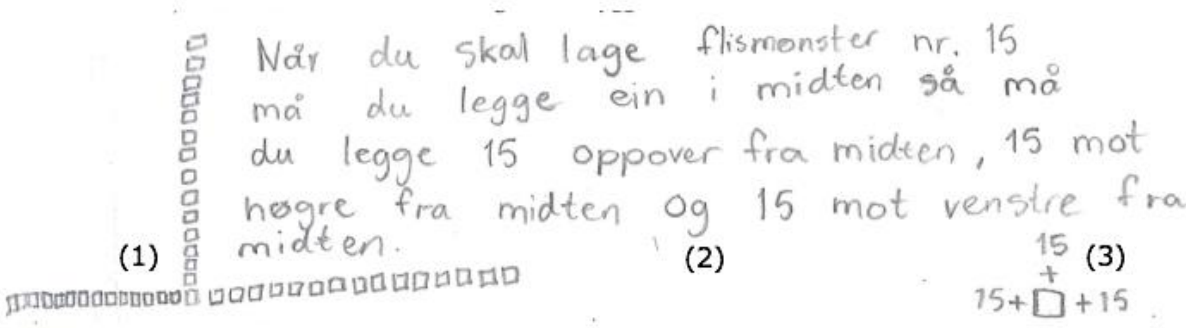
Skriftlig besvarelse 5.9 av Sofia

Gruppe B hadde en annen tilnærming og elevene representerte strategien noe ulikt. For eksempel ga Kristine en generell beskrivelse av hvordan hun ville forklare en venn et hvilket som helst flismønster. Dette viste hun nederst på Skriftlig besvarelse 5.10 av Kristine, med en kjent illustrasjon fra tidligere. Denne gangen skrev hun spørsmålstegn i flisrekkene, for å vise et ukjent antall fliser. Besvarelsen er dermed mer generell enn å gi et spesifikt eksempel, som kommer i neste eksempel av Kamilla, fra samme gruppe.



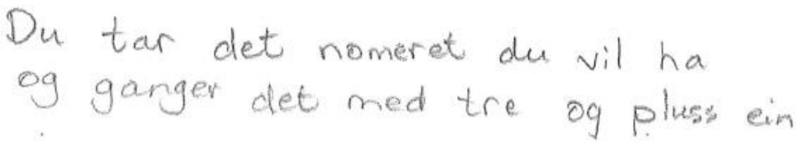
Skriftlig besvarelse 5.10 av Kristine

På samme gruppe ga Kamilla et spesifikt eksempel for å forklare en venn et hvilket som helst flismønster. Hun valgte tilfeldig flismønsternummer 15, se Skriftlig besvarelse 5.11 av Kamilla. Hun representerer resonnementet på tre ulike måter, med naturlig språk og ved å tegne. Tegningen ved punkt 1, er en illustrasjon av hvordan flismønsteret så ut. Tegningen ved punkt 2, er den omtalte varianten, som er mer effektiv enn den førstnevnte.



Skriftlig besvarelse 5.11 av Kamilla

Mia fra gruppe C hadde også en mer generell tilnærming, og representerer i Skriftlig besvarelse 5.12 av Mia, kun med det naturlige språket. Beskrivelsen ligner en oppskrift på hva du skal gjøre. Forklaringen kan senere enkelt gjøres om til en formel: n (det nummeret du vil ha) · 3 (ganger tre) + 1 (pluss en).



Skriftlig besvarelse 5.12 av Mia

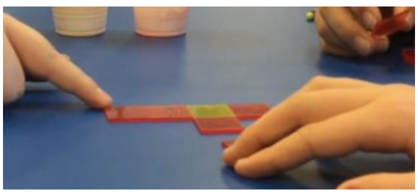
2. Du har 27 fliser. Hvordan vil flismønsteret se ut? Vil jeg ha noen fliser igjen?

I denne oppgaven forandrer fokuset seg, ved at elevene nå får vite utverdien, som er totalt 27 fliser. Oppgaven blir å finne ut hvordan flismønsteret vil se ut.

Flesteparten av elevene ga en muntlig forklaring, samtidig som de bygde flismønsteret fysisk. I tillegg representerte elevene strategien sin skriftlig, som oftest inkluderte tegning. Én elev valgte derimot å representere strategien sin ved å regne med symboler. I tillegg ga hun en muntlig forklaring, samt tegning av flismønsteret. Videre trekker jeg frem tre eksempler: to fra gruppe B og en fra gruppe A. Gruppe C har en tilnærmet lik måte å representere strategien som gruppe A, og blir dermed ikke eksemplifisert.

Gruppe A begynte arbeidet med å trekke ut totalt 27 fliser. Deretter la elevene en og en flis fra midtre flis i flisrekkene, se linje 16 og 17.

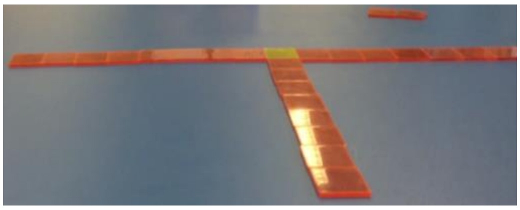
16	Sofia:	Hva med å bare starte med den gule brikka i midten?
17	Åsne:	Ja, da blir det litt enklere å se. Hvis vi starter utover sånn (se Bilde 5.2).



Bilde 5.2: Sofia og Åsne bygde flismønsteret med 27 fliser.

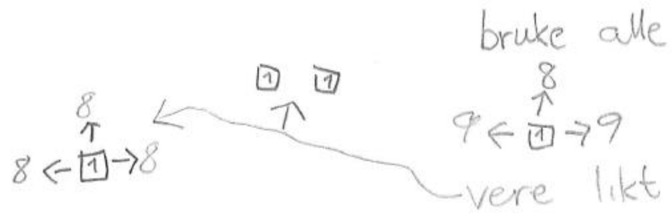
Videre fortsatte elevene å bygge flismønsteret på samme måte, til alle brikkene var lagt på, bortsett fra to fliser som ble til overs. Sofia talte antall fliser i flisrekke 1, og kom frem til at det var åtte fliser. Videre brukte hun hoderegning for å finne totalt antall fliser i flismønsteret: $8 \cdot 3 + 1 = 25$, se linje 18.

18	Sofia:	åtte ganger tre er tjuefire, pluss en blir tjuefem.
19	Åsne:	Blir det åtte utover, så vil det være igjen to fliser. Hvordan vil flismønsteret se ut? Ni og ni og åtte. Men hvis du vil at det skal se likt ut, blir det igjen to.



Bilde 5.3: Gruppe A sin ferdige illustrasjon av oppgave 3.

Videre i linje 19 konkluderte Åsne med at det ville være igjen to fliser, hvis flisrekkene skulle ha likt antall fliser. Elevene virket til å være usikre på om de måtte bruke alle flisene, da de avgir to svar både muntlig og skriftlig, se Skriftlig besvarelse 5.13 av Sofia. Til venstre er en tegning av flismønsteret hvor antall fliser er likt i flisrekkene, og at det vil være igjen to fliser. Mens tegningen til høyre viser oppbyggingen av flismønsteret, hvis elevene måtte bruke alle flisene.



Skriftlig besvarelse 5.13 av Sofia

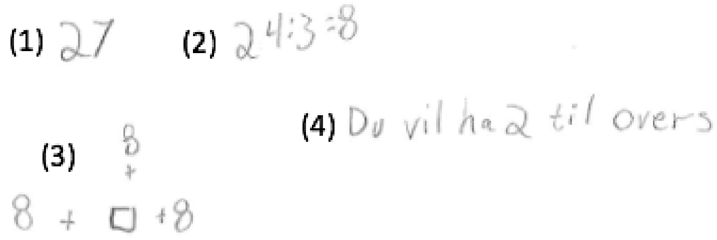
Gruppe B hadde to ulike tilnærminger til oppgaven. Den ene tilnærmingen lignet gruppe A sin strategi, ved at Pær tok ut totalt 27 fliser, for deretter å legge på en og en flis i flisrekkene fra midtre flis, til alle flisene var brukt opp, se linje 20. Pær fant ut at det ble åtte fliser i hver flisrekke og at det ble to fliser til overs ved å bygge flismønsteret fysisk, se Skriftlig besvarelse 5.14 av Pær.

20 Pær: vi tar bare én, også setter vi bare på en og en.. det her tar litt tid.

Skriftlig besvarelse 5.14 av Pær

Kristine valgte en annen tilnærming, som gikk ut på å regne med symboler. Den muntlige forklaringen i linje 22 og Skriftlig besvarelse 5.15 nedenfor, viser Kristine sin tilnærming til oppgaven. Jeg har valgt å sette tall i parentes fra (1) til (4), for å vise sammenhengen med min tolkning av Kristine sin muntlig og skriftlige besvarelse. Min tolkning er at Kristine startet med å finne ut hva slags tall som var delelig med 3 og var nærmest 27 fliser (1). Hun så at 24 fliser kunne divideres med 3, og fant videre ut at det ble 8 fliser i hver flisrekke (2) og (3). Til slutt la hun til den midtre flisa og kom frem til hvor mange fliser det måtte være til overs (4).

21	Kamilla:	hva har dere gjort på oppgave 2?
22	Kristine:	eeh, jeg tok bare.. 27 (1) kan ikke deles på tre, ikke 26 eller 25, men 24 kan (2)! Da får vi åtte på hver side pluss en i midten (3). Da har vi 25 og vi får 2 til overs (4).



Skriftlig besvarelse 5.15 av Kristine

5.2 Andre fase: Utvikling av tallpar for å generalisere en funksjon

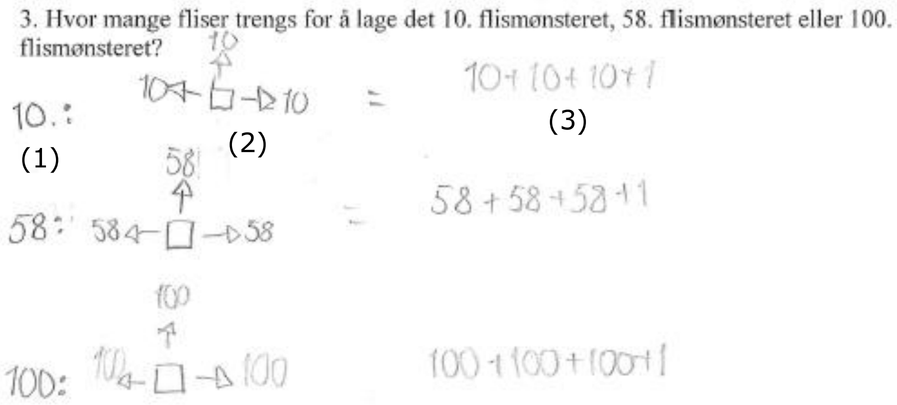
I andre fase av Flismønsterproblemet inngår utvikling av tallpar for å generalisere en funksjon. I denne fasen er det tre etterfølgende problemstillinger ut ifra første fase. Når elever begynner å telle antall fliser i flismønsteret kan resonnementene endre seg fra tidligere resonnementer (Lee & Freiman, 2006).

3. Hvor mange fliser trengs for å lage det 10. flismønsteret, 58. flismønsteret eller 100. flismønsteret?

Spørsmålene ligner underspørsmålene i første problemstillingen. Overgangen fra å uttrykke hvordan man tegner et bestemt flismønster, til hvor mange fliser det er i et bestemt flismønster, krever blant annet at elevene behersker numeriske utregninger. Oppmerksomheten er nå rettet mot antall fliser i flismønsteret. Elevene kan oppfordres til å se etter mønster i utregningene sine, som vil danne grunnlag til å svare på den fjerde problemstillingen (Lee & Freiman, 2006).

Frem til nå har elevene i stor grad representert resonnementene sine med illustrasjoner og det naturlige språket, som også brukes videre. Flere elever velger i tillegg å inkludere numerisk tilnærming. Elevene ser ut til å bruke resonnementsstrategi C i denne oppgaven, som jeg videre skal gi eleveksempler på.

Det var interessant å se på Sofia sin Skriftlig besvarelse 5.16 i gruppe A, som inkluderte en kjent representasjon. Hun lagde sin tegning med piler og tall, som var med i hele første fase. Det ser ut til at det er en sammenheng mellom flismønsternummeret (1) og den kjente tegningen (2) samt regnestykket bak likhetstegnet (3). Det ser ut til å være en overgang mellom representasjonene, fra figurativ tilnærming (2), til numerisk og symbolsk tilnærming (3), med resonnementsstrategi C. Sofia adderte alle flisrekkene og la til flisa i midten, se Skriftlig besvarelse 5.16. Sofia ga lite muntlig forklaring. Hun viste de andre elevene hva hun hadde gjort skriftlig, og de andre på gruppa hadde liknende skriftlige besvarelser.

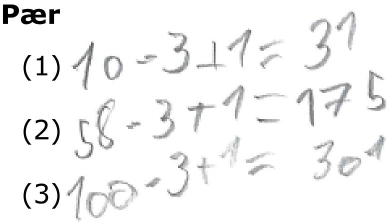


Skriftlig besvarelse 5.16 av Sofia

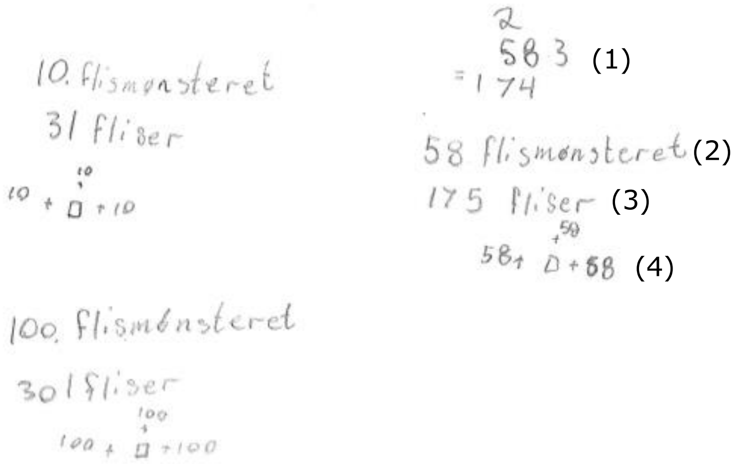
Gruppe B ser ut til å ha lignende tilnærming som Sofia, men i stedet for å addere sammen flisrekkene, multipliserte Pær dem. Han regnet kjapt ut de tre flismønstrene, med et oppsett som ligner en tabell. Samtidig med utregningen, ga Pær en muntlig forklaring til de andre på gruppa, se linje 23-28. Den skriftlige og muntlige besvarelsen er markert med punkt (1) til (3) og kan sees i sammenheng.

23	Pær:	Eeh, ikke ti fliser?
24	Kristine:	det tiende flismønsteret.
25	Pær:	10 ganger 3.. 31 (1)
26	Pær:	58 ganger 3 er 150 i hvert fall… 174, pluss 1. 175. (2)
27	Kamilla:	vent, jeg er ikke ferdig.
28	Pær:	hundrede flismønsteret, 301. (3)

Skriftlig besvarelse 5.17 av Pær



Pær sin skriftlige besvarelse inneholder kun symboler, mens Kristine på samme gruppe representerer sitt skriftlige resonnement i hovedsak med tegning og naturlig språk, se Skriftlig besvarelse 5.17. Punktene fra (1) til (4) i den skriftlige besvarelsen sees i sammenheng med min tolkning videre. I Skriftlig besvarelse 5.18 (1), ser det ut som at Kristine multipliserer 58 med tre, for å få antall fliser i flisrekkene. Videre representerer hun flismønsternummeret (2), for deretter å skrive totalt antall fliser, som i dette tilfellet er 175 (3). Til slutt er den kjente tegningen fra tidligere, med 58 fliser i hver flisrekke og flisa i midten (4).



Skriftlig besvarelse 5.18 av Kristine

Både Pær og Kristine begrunner i liten grad hva de gjør. De får frem to ulike måter å representere resonnementene sine på. Pær sin representasjon er i større grad formell, ved at han bruker symboler og viser utregning. Kristine sin representasjon er i mindre grad formell, ved at hun fremdeles tegner og bruker det naturlige språket i resonnementet sitt. Gruppe C har lignende tilnærming som Kristine, og eksemplifiseres derfor ikke videre.

4. Hvor mange fliser trengs for å lage flismønster nummer n (hvilke som helst flismønster)? Lag et uttrykk.

I denne oppgaven er det viktig at elevene oppfordres til å beskrive med ord og uttrykke skriftlig, hva uttrykket kunne være. Hva slags uttrykk og begrunnelse elevene kommer med, vil kanskje avhenge av hva slags strategier elevene har brukt i tidligere oppgaver. Et enkelt spørsmål kan få elevene til å tenke på n som et ukjent spesifikt tall, og fremkalle den andre siden av elementær algebra, hvor vi er opptatt av å finne ukjente gjennom å sette opp og løse likninger (Lee & Freiman, 2006). Det blir interessant å se hvordan elevene kommer frem til (generaliserer fra figurativ og numerisk, til algebraisk) formlene sine, og hvordan de begrunner dem.

I og med at elevene ikke hadde erfaring med en variabel fra tidligere, fikk alle gruppene mer veiledning på denne oppgaven. Da gruppa var i gang med oppgaven, gikk veilederne dit for å gi informasjon. Elevene fikk blant annet vite at n kunne stå for et hvilket som helst tall, og at det var tilfeldig at vi brukte bokstaven n. Det kunne like godt vært en boks, en x eller et annet tegn, og at n kunne representere alle naturlige tall. For eksempel i dette tilfellet flismønsternummer 1, 2, 3 eller 10, 14, 108.

Alle gruppene representerte sine resonnement i hovedsak med et tilfeldig regneeksempel og algebraisk uttrykk, hvor de gikk fra et numerisk eksempel til et algebraisk uttrykk. I tillegg representerte flere av elevene både med illustrasjoner og naturlig språk. Det kan også se ut til at begrunnelsen til flere av elevene var med et generisk eksempel, som eksemplifiseres nedenfor. Jeg velger å trekke frem et lengre eksempel fra gruppe B, for å få frem overgangen fra numeriske eksempler til algebraisk uttrykk, og i tillegg vise hvordan læreren veiledet underveis i oppgaven. Til slutt viser jeg en skriftlig besvarelse av gruppe A, som også kan underbygge påstanden om at flere grupper resonnerte på liknende måter. I tillegg vil dette eksemplet ha en sammenheng med begrunnelsen eleven gir i oppgave 5, for det algebraiske uttrykket.

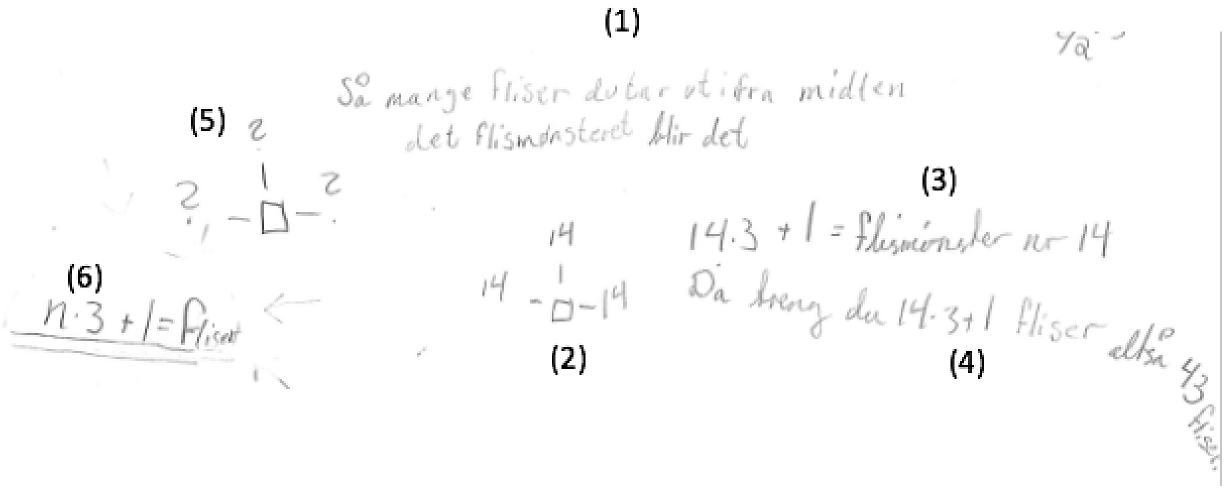
Etter at elevene fikk informasjon om hva en ukjent kunne være, begynte elevene å diskutere hvordan de skulle løse oppgaven, mens lærer 2 observerte arbeidet. Det virket som at elevene valgte et tilfeldig flismønsternummer, som skulle representere den ukjente, se linje 29 til 31. Videre ga Kristine en beskrivelse av flismønster 14, og Pær uttrykker en formel (se linje 33) for hvordan de skulle regne ut det totale antallet fliser i flismønster 14, se linje 32 til 34.

29 Pær: et hvilket som helst flismønster, da skal vi velge..
30 Kristine: jaa, flismønster nummer.. si yndlingstallet ditt
31 Pær: 14
32 Kristine: ååå, okei. Hvis vi skal lage flismønster nummer 14, da er det bare en i midten og fjorten utover hver side. Hvordan gjør vi det?
33 Pær: 14 ganger tre pluss en
34 Kristine: ja, enig. Vi skriver det.

Utgangspunktet til elevene var i en bestemt del av mønsteret, som var Flismønster 14 og formelen stemmer i dette tilfellet. I realiteten kan formelen benyttes for hele mønsteret. Elevenes begrunnelse kan etter hvert se ut som et generisk eksempel (Lannin, 2005), noe som også kommer enda mer frem i Skriftlig besvarelse 5.19 av Kristine, og etterfølgende dialog fra linje 35 til 40.

35 Lærer 2: okei, så hvis dere skulle lage et uttrykk da, som gjelder et hvilket som helst flisnummer, men som ikke har et nummer, men ved å bruke n eller ved å bruke en annen bokstav..
36 Kristine: åjaa.
37 Lærer 2: hvordan ville dere gjort det?
38 Kristine: jeg tok sånn, så mange fliser du tar ut ifra midten, blir det flismønsteret..
39 Lærer 2: ja, og det er noe du har forklart veldig godt tidligere. Så da er spørsmålet, går det an å sette opp det som en formel eller et uttrykk?
40 Kristine: åjaaa… Da blir det jo sånn, n ganger tre pluss en er lik flismønsteret
41 Lærer 2: flott, tenk videre på den og diskuter den gjerne mer i gruppa.

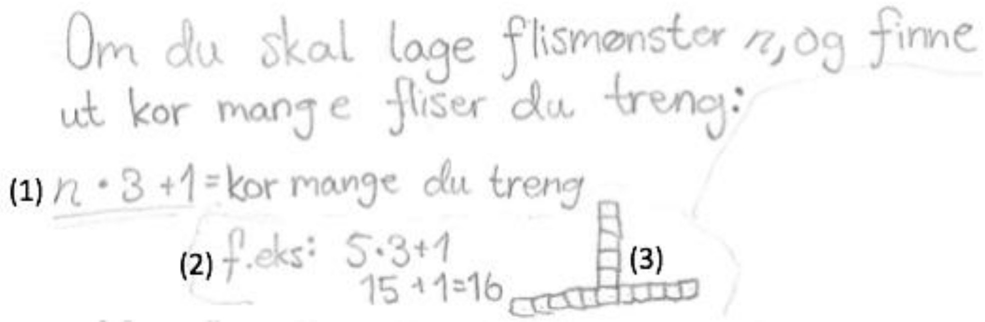
Etter et par veiledende spørsmål fra lærer 2, klarte Kristine å lage et algebraisk uttrykk, se linje 40. Etter at læreren gikk, begynte elevene å skrive ned resonnementene sine. Nedenfor er et eksempel med Skriftlig besvarelse 5.19 av Kristine, hvor punkt (6) viser det algebraiske uttrykket hennes. I tillegg har hun tegnet et bilde av situasjonen (5), på samme måte som hun gjorde i oppgave d, der hun skulle tegne et hvilket som helst flismønster.



Skriftlig besvarelse 5.19 av Kristine

Punkt (1) ser ut til å være en generell forklaring på sammenheng mellom flismønsternummeret og antall fliser i flisrekkene. Videre i fra punkt (2) til (4) representerer det elevene snakket om i linje 32 og 33. Ved å studere alle representasjonene i den skriftlige og muntlige besvarelsen til Kristine, kan det se ut som at hennes resonnement er strategi C og at begrunnelsen er med et generisk eksempel. Pær og Kamilla nøyer seg med å representere sine resonnement med numerisk regneeksempel og det algebraiske uttrykket, som ligner Kristine sine punkt (3) og (6).

Sofia i gruppe A representerer løsningen sin på lignende måte som Kristine i gruppe B. Nedenfor er Skriftlig besvarelse 5.20, som inneholder både et algebraisk uttrykk (1), et regneeksempel (2) og tilhørende tegning av regneeksempelet (3). I oppgave 5 begrunner Sofia muntlig hvorfor hun har skrevet uttrykket på denne måten.



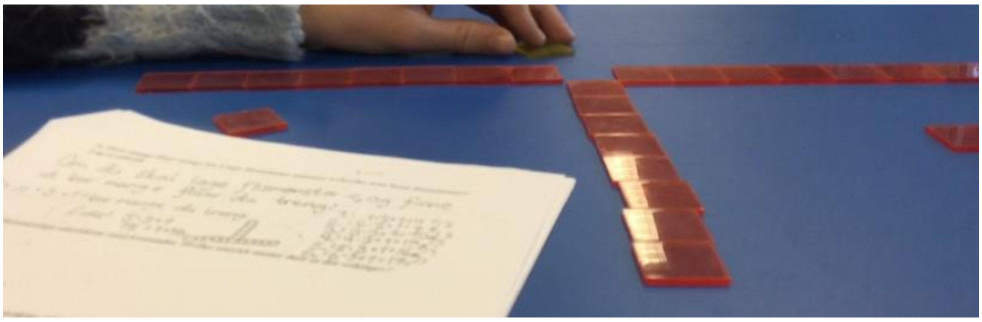
Skriftlig besvarelse 5.20 av Sofia

5. Sammenlign uttrykkene med hverandre. Hvilke uttrykk mener dere er det «riktige»?

Arbeidet med denne problemstillingen kan føre til interessante diskusjoner. Elevene har mulighet til å rettferdiggjøre formlene sine, og de kan gå tilbake for å sjekke om det de har funnet ut tidligere, stemmer.

I og med at elevene i samme gruppe hadde kommet frem til det samme algebraiske uttrykket, konkluderte elevene rask med at uttrykkene de hadde kommet frem til var riktige, uten videre diskusjon. Lee og Freiman (2006) sier at denne problemstillingen har lett for å bli oversett av elevene, og de har lett for å kun fokusere på sine egne formler. Selv om det var små forskjeller i uttrykkene til elevene, ønsket vi likevel å få frem en muntlig begrunnelse av det algebraiske uttrykket. Nedenfor er et eksempel fra gruppe A, som gir en videre indikasjon på at eleven begrunner med et generisk eksempel.

Nedenfor er et utklipp fra samtalen mellom lærer 2 og Sofia i forbindelse med oppgave 5, i linje 42 og 43. I tillegg er Bilde 5.4 vedlagt, som viser flismønsternummer 8 som elevene bygde i oppgave 2, som Sofia tok utgangspunkt i, for å gi en forklaring på uttrykket sitt.



Bilde 5.4: Viser flismønsteret, som Sofia tok utgangspunkt i ved begrunnelsen av det algebraiske uttrykket.

42 Lærer 2: kan du (Sofia) forklare hva du har tenkt? Hvorfor skriver du det sånn?

43 Sofia: ehm, fordi i dette mønsteret har vi jo tre armer som går utover (peker på brikkene på bordet) og de armene er like store, så hvis vi tar bort den i midten (den gule brikken), så har vi åtte utover. Da kan vi ta åtte gange tre for å finne ut hvor mye det er av disse (peker på de røde brikkene). Åtte ganger tre er 24 og hvis vi plusser på den ene i midten så blir det tjuefem.

I linje 43 ser det ut som at Sofia tar utgangspunkt i flismønster 8, for å forklare hvordan hun kom frem til uttrykket sitt. Sofia forklarte sammenhengen mellom innverdien 3 (armer/flisrekker) $\cdot$ n (8 røde fliser i flisrekkene) + 1 (den gule flisa i midten) og utverdien som er totalt 25 fliser. Forklaringen stemmer overens med eksempelet hun viste i Skriftlig besvarelse 5.20 av Sofia, i punkt (1) og (2) i oppgave 4. Formelen stemmer i dette tilfellet, men vil også stemme for alle tilfellene med flismønsteret (Lannin, 2005), og kan derfor ligne et generisk eksempel.

5.3 Tredje fase: Utvidet mønsteranalyse

I den tredje og siste fasen av Flismønsterproblemet, inngår en utvidet mønsteranalyse, som legger opp til at elevene får behov for å løse en likning. Elevene blir også i denne fasen utfordret til å lage sitt eget mønster. De vil få behov for å reflektere tilbake på tidligere oppgaver, og kan sees på som en oppsummering av hele prosessen de har vært gjennom.

6. Hvilke flismønster har nøyaktig 100 fliser? Hva med 50 fliser?

Denne problemstillingen går tilbake til oppgave 2 i første fase: «Du har 27 fliser. Hvordan vil flismønsteret se ut? Vil jeg ha noen fliser igjen?». Problemstillingen fokuserer på totalt antall fliser f(n), heller enn variabelen «n», som har vært mye fokus på tidligere. Her blir det spennende å se om elevene løser oppgaven som en likning, som er en effektiv strategi. Hvis elevene bruke telling som strategi, vil det være en mer tidkrevende og tungvint fremgangsmåte.

Samtlige grupper resonnerte med muntlig språk og symbolspråk i utforskingen. Gruppene har også liknende tilnærminger på måten de går frem i oppgaven. Jeg velger å trekke frem gruppe B, for å gi et eksempel på hvordan gruppene løste oppgaven. I og med at det er to problemstillinger, ønsker jeg å belyse begge. Først trekker jeg frem dialogen mellom Pær, Kamilla, lærer 2 og Kristine i diskusjonen rundt hvilke flismønster som har nøyaktig 100 fliser, se linje 44 til 50.

44	Pær:	Okei, det er flismønsternummer 33, for 33 ganger 3 er 99 pluss en er 100.
45	Kamilla:	hvordan visste du det så fort?
46	Lærer 2:	ja, det var et godt spørsmål
47	Pær:	fordi jeg delte 99 på tre..
48	Kristine:	ja, men først visste du at du måtte ta vekk en fra 100..
49	Kamilla:	fordi en er i midten?
50	Pær:	ja, først så tok jeg en fra 100, så delte jeg 99 på tre også ble det 33 …

Det kan virke som at Pær benyttet seg av tilnærmingen han har vist i tidligere oppgaver, som kan skrives algebraisk $f(n) = n \cdot 3 + 1$, som i dette tilfellet er $f(33) = 3 \cdot 33 + 1 = 100$. Kristine støttet opp om Pær sin strategi ved å gi Kamilla en forklaring på hvor tallet 99 kom fra, se linje 48. I linje 50 ga Pær en oppsummering på strategien sin, som er en type likningsløsing, og kan skrives symbolsk: $f(n) = n \cdot 3 + 1$, $\frac{f(n)-1}{3} = n$, $\frac{100-1}{3} = 33$. Pær representerte løsningen sin skriftlig med symboler, som han også har vist tidligere og strategien ligner det algebraiske uttrykket $n \cdot 3 + 1 = f(n)$. Pær representerer oppgaven med 100 fliser, se Punkt (1) i Skriftlig besvarelse 5.21 av Pær.

(1) $33 \cdot 3 + 1 = 100$

(2) $16 \cdot 3 + 1 = 49$

(1 til over)

Skriftlig besvarelse 5.21 av Pær

I oppgaven med 50 fliser representerte elevene den skriftlige besvarelsen på samme måte som ovenfor, se punkt (2) i Skriftlig besvarelse 5.21 av Pær. Videre fortsatte diskusjonen mellom Kristine, Pær og Kamilla, linje 51 til 63.

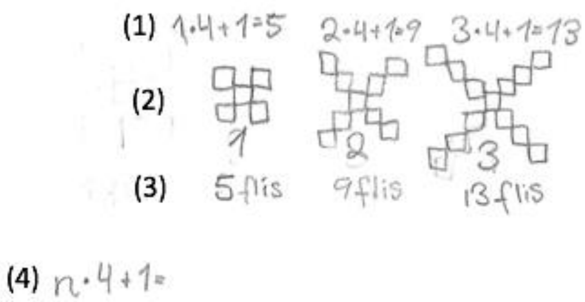
51	Kristine:	da må vi først ta vekk en. Så har vi 49.
52	Kamilla:	så må vi dele 49 på tre ...
53	Kristine:	ja.. det blir 16,33333..
54	Kristine:	hva skal vi gjøre da?
55	Pær:	jeg vet ikke. 50 fliser. Det blir litt for mye.. Det blir noen til overs.
56	Kristine:	da er det bare 16 ganger 3 + 1 = 49, vent da.. går det? Hva er 16 ganger 3?
57	Pær:	16 ganger tre, ehm.. 48
58	Kristine:	sikker på det?
59	Pær:	ja, 10 ganger 3 er 30. 6 ganger 3 er 18… 48! jeg sa at det var 48
60	Kristine:	aaa, jeg forstår..
61	Pær:	det er to til overs..
62	Kristine:	det blir en til overs, en fordi du plusser på en
63	Pær:	ååja, for jeg plusser på en.

Gruppa ser ut til å bruke samme strategi som ovenfor, men i og med at 50 fliser ikke nøyaktig gikk opp, fikk elevene behov for å gjøre flere mellomregninger. I linje 51 tok Kristine utgangspunkt i totalt antall fliser, og trakk fra en flis, for deretter å ta antallet de fikk, dele på tre, slik de kom frem til i dialogen ovenfor. I disse problemstillingene er variabelen (innverdien) flismønsternummer 16 og 33. Ved hjelp av den eksplisitte formelen som modell, representerte Pær løsningen sin, ved hjelp av naturlig språk og symbolspråk, for å løse ligning med ukjente mengder. Det ser ut til å være i tråd med det Blanton og Kaput (2005) og Moss et al. (2008) også fant ut, som omtalt i kapittelet 1.2.

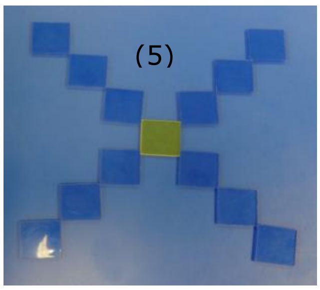
7. Kan du lage en ny oppgave med flismønstre eller andre mønstre for klassen?

Den sjuende og siste problemstillingen utfordrer elevene til å lage en ny oppgave med et egenprodusert mønster. Denne problemstillinger tvinger elevene til å reflektere rundt aktiviteten elevene har jobbet med tidligere, og bruke det de har lært. De må gå tilbake og se på hva et mønster er, hvordan man kan se et mønster, hva slags uttrykk det nye mønsteret kan ha og så videre (Lee & Freiman, 2006).

Det var generelt lite dialog mellom elevene i arbeidet med denne oppgaven, og jeg velger derfor å trekke frem skriftlige besvarelser, som får frem flere representasjoner. Det var flere elever som valgte å lage lignende mønster som flismønsteroppgaven, men med en ekstra flisrekke. Nedenfor er to eksempler: et fra gruppe A og et fra gruppe C.



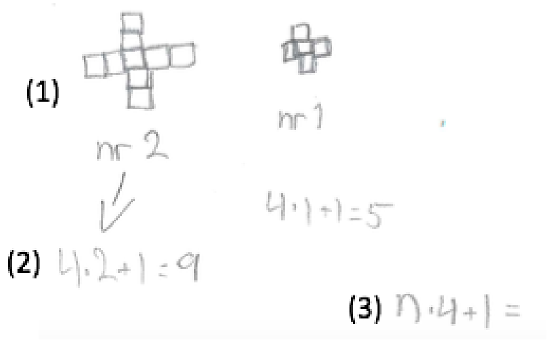
Skriftlig besvarelse 5.22 av Sofia



Bilde 5.5: Sofia sitt flismønster med fysiske brikker.

Sofia sin skriftlige besvarelse reflekterer en del av det hun har arbeidet med i tidligere problemstillinger, se Skriftlig besvarelse 5.22. Hun begynte med å bygge flismønsteret, som du kan se på Bilde 5.5, markert med punkt (5), slik som de gjorde i de første oppgavene. Deretter tegnet hun opp flismønsteret slik hun bygde flismønsteret med fysiske brikker fra flismønsternummer 1 til 3, se punkt (2). I punkt (1) har hun også regnet ut de tre første eksemplene, og utregningen ligner regneuttrykkene hun kom frem til i tidligere oppgaver, og punkt (3) ser ut til å være totalt antall fliser. Til slutt i punkt (4) representerer hun det algebraiske uttrykket. Kort oppsummert, går Sofia fra visuell tilnærming via numerisk og til slutt representeres hun med et algebraisk uttrykk.

Jeg velger også å trekke frem den skriftlige besvarelsen til Gunnar fra gruppe C, som også viste flere representasjoner. Gunnar representerer sammenhengen og overgangen mellom ulike representasjoner fra tegning (1) via numerisk tilnærming (2) og over til et algebraisk uttrykk (3), se Skriftlig besvarelse 5.23.



Skriftlig besvarelse 5.23 av Gunnar

Arbeidet til elevene minner om begynnelsen av innholdet til kjerneelementet abstraksjon. Det innebærer at elevene gradvis utvikler en formalisering av tanker, strategier og matematisk språk. Utviklingen går fra konkrete beskrivelser, til formelt symbolspråk og formelle resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Både Sofia og Gunnar viser et algebraisk uttrykk heller enn et funksjonsuttrykk, siden sammenhengen mellom f(n) og det algebraiske uttrykket mangler. Men samtidig viser Gunnar fra punkt (1) til punkt (2), at det er en sammenheng mellom flismønster 2 og utregningen han gjør $4 \cdot 2 + 1 = 9$, hvor det er en sammenheng mellom flismønsternummeret og totalt antall fliser. Det kan se ut som at elevene er på vei til å representere noen sider av et objekt, som kan være en funksjon. Det gjør elevene ved å lage en tegning og vise utregning med symboler. Det er viktig å påpeke at en representasjon ikke representerer selve objektet, men kan belyse ulike sider av det (Duval, 2006). Elevene har ikke blitt introdusert for begrepet funksjon enda, men måten å representere en lineær funksjon på, har elevene fått en liten smakebit på nå.

6 Oppsummerende drøfting

I dette kapittelet synliggjør jeg sammenhengen mellom mine teoretiske perspektiver, som omhandler funksjonstenking, resonnementsstrategier og representasjoner, samt min undervisningsdesign. I lys av nevnte sentrale teorier og funn fra analysen og utprøvingen, skal jeg se på områder som bør endres eller utvikles. I tillegg trekkes tidligere forskning inn. Første del av oppsummeringen (kap. 6.1– 6.3) dreier seg om min andre problemstilling, og er delt inn på samme måte som fasene i analysen. Siste del av oppsummeringen dreier seg i hovedsak om første problemstilling (kap. 6.4).

I oppsummeringen trekker jeg frem det andre forskningsspørsmålet først, siden analyseresultatene og oppsummering av innføringen av den geometriske mønsteroppgaven settes i sammenheng til slutt. Videre vil dette kunne føre til en revidering og videreutvikling av undervisningsopplegget. Før vi går i gang, gjentar jeg det andre forskningsspørsmålet, som diskuteres først: Hvordan representerer elevene resonnementsstrategiene sine gjennom utforskingen av det geometriske mønsteret, og hva slags resonnementsstrategier bruker de?

6.1 Første fase av Flismønsterproblemet

Som tidligere nevnt fokuserte første fase på de visuelle egenskapene til Flismønsterproblemet, med spørsmål som var laget slik at elevene kunne få frem ulike resonnementsstrategier. Oppgavene skulle også legge til rette for at elevene kunne bygge eller tegne mønsteret visuelt (Lee & Freiman, 2006). Det var også flere underspørsmål her, med hensikt å lokke frem ulike tilnærminger til mønsteret.

Jeg hadde en hypotese før undervisningen om at elevene skulle komme frem til flere resonnementsstrategier i forbindelse med flismønsterets oppbygging (oppgave 1), noe som ikke ble tilfelle. Jeg var nok farget av teorien hvor Lee og Freiman (2006), som hevdet at spørsmålet kunne føre til flere ulike uttrykk. Elevene så nemlig ikke ut til å ha ulike tilnærminger til oppfattelsen av det geometriske mønsteret, i dette tilfellet. Med tanke på at elevene ikke hadde jobbet med mønstre tidligere, kan det være en egenskap man bør trene opp. I tillegg kan formuleringen av spørsmålet være dårligere enn det opprinnelige, og jeg kommer derfor med forslag til redigering av spørsmålet i kapittel 6.4.

Elevenes arbeid med problemstillingene i første fase, inkluderte naturlig språk og illustrasjoner, for å representere resonnementene sine, og fremstillingen fra gruppene var ganske like (som vist gjennom analysen, kap. 5.1). Det tydet på at elevene hadde en rekursiv tilnærming i oppgavene helt i starten, hvor elevene kunne bygge på forrige figur ut ifra illustrasjonene på oppgavearket (flismønster 1, 2, 3 og 4). Men da elevene fikk beskjed om å tegne eller bygge flismønsteret utover de visuelle flismønstrene på oppgavearket (flismønster 10 og 58), så det ut til at elevene etter hvert gikk over til en eksplisitt tilnærming. Den eksplisitte tilnærmingen blir sett på som mer formell enn den rekursive, og kan føre til en formel. Men en rekursiv tilnærming er også verdifull, for å utforske hva som skjer fra det ene mønsteret til det neste (Küchemann, 2010).

Som nevnt i teorien grupperer Duval (2006) representasjoner inn i systemer, hvor elevene kan gjøre ulike transformeringer, med ulike representasjoner innenfor en og samme problemstilling. Elevene brukte både flere representasjoner i samme system (behandling), og representerte i andre system (konvertering) allerede fra start. Blant annet viste Kamilla i oppgave b, at hun både ga en muntlig og skriftlig forklaring, for å beskrive oppbyggingen av det 10. flismønsteret, som er en behandling innenfor et system. I tillegg representerte hun besvarelsen på oppgaven med tegning, som tilhører et annet system, og er illustrasjoner. Kamilla representerte resonnementet sitt i oppgaven med til sammen fire ulike representasjoner, som vist i analysen (linje 7-9 og Skriftlig besvarelse 5.5 av Kamilla). Det er interessant å erfare at flere av elevene representerte strategiene på flere måter. Det er også i tråd med det Utdanningsdirektoratet (2019a) fremhever som viktig - at elevene kan veksle mellom matematiske representasjoner og dagligspråk. En av hypotesene mine var også at elevene ville bruke varierte representasjoner under hele prosessen, men at enkelte elever skulle inkludere fire ulike representasjoner i en og samme problemstilling, hadde jeg ikke forventet.

Som tidligere nevnt i kapittel 4.5.3, var ikke begrepet «bygging» en del av den opprinnelige problemstillingen. Ut ifra analysen med elevenes utforsking av Flismønsterproblemet, ble byggingen med de fysiske flisene en stor del av elevenes oppgaveløsning, også gjennom andre og tredje fase. Det ble enklere for meg å analysere elevenes arbeid, da de diskuterte hvordan de skulle bygge flismønsteret med fysiske brikker. Det var lite diskusjon blant elevene, da de tegnet flismønstrene. Selv om jeg ikke har sammenligningsgrunnlag, med og uten «bygging» med fysiske brikker, mener jeg at brikkene hadde en positiv effekt. Det er imidlertid noe som kunne vært spennende å forske på senere – hvordan problemstillinger og representasjoner kan påvirke elevenes utforsking av Flismønsterproblemet.

Noe av poenget med den visuelle fasen, var at elevene skulle bli mer oppmerksomme på hvordan de tegnet og bygget flismønstrene. Friel og Markworth (2009) trakk frem at problemstillinger som fokuserte på den visuelle resonnementskompetansen ofte uteble i algebraundervisning, og at det var viktig at elevene fikk utforske dette. Det kan se ut til at første fase var til hjelp for elevene i de neste fasene, noe jeg kommer tilbake til i drøftingen av andre fase (kap. 6.2).

6.2 Andre fase av Flismønsterproblemet

Andre fase av Flismønsterproblemet, gikk ut på å utvikle tallpar for å generalisere en funksjon (Lee & Freiman, 2006). Elevene fikk i denne fasen erfaring med problemstillinger som skapte diskusjoner, som endte i nye og ulike måter å representere resonnementene sine på.

I andre fase, gikk elevene over til mer formelle måter å representere sine resonnement på, kontra i første fase. Spørsmålene virket til å fremprovosere nye representasjoner gjennom prosessen. Flesteparten av elevene ga en muntlig forklaring, samtidig som de bygde flismønsteret fysisk i begynnelsen av andre fase. I den skriftlige besvarelsen var det illustrasjoner, som lignet dem vi så i første fase. Men utover i andre fase (fra oppgave 3) var det flere elever som inkluderte numerisk tilnærming, samtidig som de fremdeles holdt fast på illustrasjoner fra tidligere. Det kan tyde på at de støttet seg til de visuelle tilnærmingene fra tidligere oppgaver, i videre resonnement. Det var også mer varierende hvordan elevene representerte resonnementene sine, enn tidligere. For eksempel brukte Sofia og Kristine flere uformelle representasjoner for å belyse oppgave 3 (Skriftlig besvarelse 5.16), kontra Pær (Skriftlig besvarelse 5.17) som kun brukte symboler og muntlig språk, og betegnes som mer formelt.

Ut ifra analyseresultatene så det ut til at de fleste elevene resonnerte med den eksplisitte tilnærmingen, spesielt i forbindelse med oppgave 3. Ved å analysere tilnærmingene elevene brukte fra oppgave c (fase 1) og utover (fase 2 og 3), virket det som at elevene holdt på den samme strategien, og at det kan være en faktor for at flere lyktes med å finne en algebraisk formel.

I forbindelse med den algebraiske formelen, ble elevene bedt om å lage et uttrykk for et hvilket som helst flismønster, i oppgave 4. Ut ifra analyseresultatene så det ut til at flere kom frem til en eksplisitt formel, som blant annet ble representert med symboler. Siden elevene ikke hadde jobbet med en variabel fra tidligere, var det naturlig at jeg gikk inn for å gi mer informasjon utover oppgavelyden. Det er ikke enkelt å si ut ifra forskningen om hvor mange som faktisk kunne begrunne de algebraiske uttrykkene. Noen resultater kan tyde på at begrunnelsen var gyldig, ved at elevene brukte et generisk eksempel, som vist med Kristine og Sofia i oppgave 4 (Skriftlig besvarelse 5.19 og Skriftlig besvarelse 5.20).

I forbindelse med oppgave 5, hvor elevene skulle sammenligne uttrykkene, hadde de fleste elevene lignende algebraiske uttrykk og det ble lite diskusjon. Lee og Freiman (2006) hevdet at denne problemstillingen hadde lett for å bli oversett av elevene. For å unngå at problemstillingen ikke ble oversett, fokuserte jeg på å få frem en muntlig begrunnelse av det algebraiske uttrykket, selv om uttrykkene var like. Her var teorien jeg hadde lest på forhånd til nytte, slik at jeg kunne være oppmerksom på dette underveis i gjennomføringen. Det er viktig å påpeke at det ikke er en enkel oppgave å uttrykke mønsteret med symboler, som et uttrykk. Det er en vesentlig forskjell mellom å diskutere uttrykkene elevene kommer frem til, kontra et sett med tilfeldige sammensatte uttrykk fra matematikkboka. Elevenes uttrykk tilhører dem selv, noe som gir mening og noe de bryr seg om (Lee & Freiman, 2006).

Flere elever gikk fra figurative resonnement til numeriske tilnærming og endte opp med algebraiske måter å uttrykke seg på, som vist gjennom oppgavene i andre fase fra analysen. I tillegg hadde flere av elevene gått fra å tegne flismønsteret, til å bruke symbolske utregninger og endt opp med en algebraisk formel. Elevene har vært gjennom minst to representasjonssystem. I følge Duval (2006) må elevene gjennom minst to representasjonssystemer for å forstå et matematisk objekt, og det får de muligheten til med Flismønsterproblemet. De har også fått en smakebit av kjerneelementet «abstraksjon», som innebærer at elevene gradvis utvikler en formalisering av tanker, strategier og matematisk språk. Utviklingen går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk og formelle resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2019a).

6.3 Tredje fase av Flismønsterproblemet

I den tredje og siste fasen av Flismønsterproblemet inngikk en utvidet mønsteranalyse, som kunne lede elevene mot likningsløsning (Lee & Freiman, 2006). I denne fasen ble også elevene utfordret til å lage sine egne mønster, noe som kunne få elevene til å reflektere over arbeidet i de første fasene.

I analysen av elevenes arbeid i forbindelse med den sjette oppgaven, så det ut til at flere løste oppgaven ved hjelp av likning, og da med å ta utgangspunkt i formelen de kom frem til i oppgave 4, som ble eksemplifisert med gruppe B. Måten elevene representerte resonnementene sine på, i oppgaven, var først og fremst via muntlig forklaring, der elevene utfylte hverandre i diskusjonene. Elevene ga også en skriftlig besvarelse, som stort sett ble representert numerisk på formen: $f(n) = n \cdot 3 + 1$. Det ga en indikasjon på at elevene støttet seg til formelen, som de kom frem til i de tidligere oppgavene, for å løse videre problemstillinger.

Den siste oppgaven hadde merkbart mindre dialog mellom elevene, sammenlignet med de tidligere oppgavene, hvor elevene virket mest opptatte av sine egne flismønstre. Noen elever valgte kun å tegne et nytt mønster, altså representere det kun med illustrasjon, mens andre representerte oppgaven både visuelt (tegning og bygging), med numerisk utregning og algebraisk uttrykk. Jeg trakk frem to eksempler med Sofia (Skriftlig besvarelse 5.22) og Gunnar (Skriftlig besvarelse 5.23), som kombinerte flere representasjoner. Måtene disse elevene har representert sine resonnement på, ligner også strategi C, som er den eksplisitte tilnærmingen. Disse elevene løste også oppgaven i samme rekkefølge, som fasene er bygd opp. Det ser ut til at Sofia og Gunnar reflekterte rundt aktivitetene de jobbet med tidligere, noe som også var i tråd med intensjonen til Lee og Freiman (2006) i forbindelse med denne oppgaven.

Ved å studere elevenes måter å representere oppgavene på, har de vært gjennom tre av fire representasjonssystem (Duval, 2006): naturlig språk, illustrasjoner og symbolspråk. Det siste systemet, som omhandler tabeller, diagrammer og grafer, uteble i denne omgang. Jeg tror likevel det er mulig å innføre det siste systemet, ved å bruke mer tid på lignende oppgaver.

Gjennom analysen av elevenes utforsking av de tre fasene i Flismønsterproblemet, ser det ut til at noen av elevene viser potensialet til å kunne resonnere seg frem til et algebraisk uttrykk, via både visuelle og numeriske tilnærminger. Dette understøtter hypotese jeg hadde før utføringen av undervisningsopplegget, som nevnt i kapittel 1.3. Videre i oppsummeringen (kap 6.4), settes diskusjonen og oppsummering av resultatene i kapittel 6.1 til 6.3, opp mot gjennomføringen av undervisningen. Jeg kommer med et forslag til en revidert utgave av undervisningsopplegget i forbindelse med en eventuelt ny gjennomføring.

6.4 Oppsummering av undervisningen og forslag til videreutvikling av Flismønsterproblemet

Som nevnt i innledningen til kapittel 6, handler dette kapittelet om videreutvikling av introduksjonen av den geometriske mønsteroppgaven. Her blir det første forskningsspørsmålet drøftet, som er: Hvordan kan introduksjonen av en geometrisk mønsteroppgave utformes for å hjelpe elevene i gang med funksjonstenking på åttende trinn? Tidligere forskning (kap. 1.2) trekkes i større grad inn her.

Ut ifra analysen av elevenes skriftlige og muntlige besvarelser, så det ut til at veien om visualisering av geometriske mønstre virket interessant for dem, slik Driscoll (1999) og Radford et al. (2007) hevdet. Elevene var engasjerte i form av at flesteparten av dem deltok i diskusjoner, samt at de representerte oppgaveløsningene sine på flere måter.

Det virket også til at noen elever kunne se en viss sammenheng mellom de ulike representasjonene, da flere av elevene videreførte de uformelle representasjonene inn i senere oppgaver, som også inkluderte mer formelle representasjoner. I forbindelse med elevenes undersøkelse av Flismønsterproblemet var det muligheter for dem å anvende ulike representasjonssystemer, da problemstillingene var varierte og at lærerne ikke la føringer. Elevene hadde også mulighet til å finne opp og anvende representasjonssystemer i generaliseringen, slik Smith (2008) foreslo i sitt rammeverk.

Visualisering av det geometriske mønsteret går inn under representasjoner, som Duval (2006) omtaler som illustrasjoner. Elevene fikk vist flere behandlinger innenfor systemet med illustrasjoner, hvor de både inkluderte tegninger, mønstre og fysiske brikker (konkreter). Under utforskingen av flismønsteret, brukte elevene konkreter, som fungerte som en støtte, gjennom flere oppgaver slik Warren og Cooper (2008) fant ut i sin forskning. For eksempel støttet elevene seg til fysiske brikker, gjennom hele første fase og i begynnelsen av andre fase, samt i arbeidet med oppgave 7 i tredje fase.

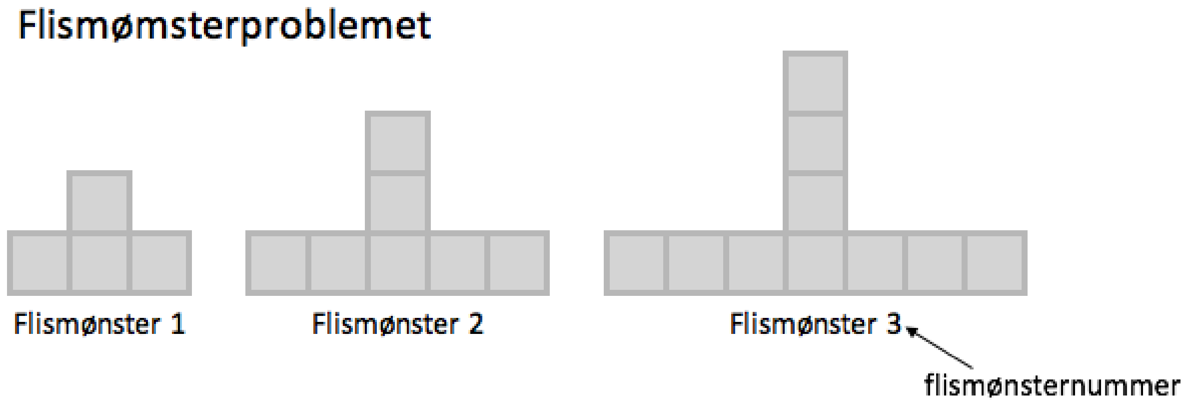
Oppbyggingen av spørsmålene i de ulike fasene ser ut til å binde oppmerksomheten til elevene i å utforske ulike deler av funksjonen, noen ganger var fokuset på innverdien, mens andre på utverdien. I tillegg virket det som at spørsmålene motiverte elevene til å bruke ulike representasjoner, fra visuelle til numerisk og algebraisk, noe (Brizuela & Earnest, 2008) anbefalte. I og med at vi veilederne hadde minimal innvirkning, var det interessant å observere hvordan elevene intuitivt representerte sine resonnementsstrategier. Denne kunnskapen kan være nyttig til eventuelt videre utvikling av undervisningsopplegget for samme gruppe elever.

Selv om forskningen ikke var ute etter å se på utvikling av generalisering i et lengre perspektiv, kan det være tendenser fra arbeidet med Flismønsterproblemet, som viser potensialet for at elevene kan utvikle funksjonstenking på sikt. Ved, for eksempel å studere Sofia sitt arbeid gjennom alle fasene, ser det ut til at hun, sammen med gruppa utvikler en stadig mer formell måte å representere matematikken på. Spesielt har representasjonen med flisa i midten og piler i hver flisrekke gjentatt seg gjennom flere faser (Skriftlig besvarelse 5.13, Skriftlig besvarelse 5.13 og Skriftlig besvarelse 5.16), som hun ser ut til å støtte seg på. I tillegg så det ut til at Sofia ga et generisk eksempel for funksjonsuttrykket (linje 43, oppgave 5), som vil si at det er en matematisk gyldig begrunnelse (Lannin, 2005).

I foranalysen trakk jeg inn kjerneelementene, som en rettesnor for hvordan undervisningen skulle gjennomføres (undervisningsprinsipper), og hvordan vi som veiledere skulle opptre ovenfor elevene. Dette fungerte godt, da både lærere og elever virket samkjørte på hva som var viktige fokusområder i undervisningen, som inkluderte utforsking, representasjon og kommunikasjon. Oppgavene la også opp til at elevene fikk erfare arbeidet med abstraksjon, generalisering og utforsking. Det vil si at undervisningsopplegget kan være et eksempel på hvordan man kan trekke inn kjerneelementene i undervisningen.

Utformingen av oppgavene i Flismønsterproblemet er som tidligere nevnt basert på tidligere forskning. Jeg har for lite forskningsgrunnlag til å revidere innholdet i problemstillingene i Flismønsterproblemet. Derfor ønsker jeg at innholdet, ved en ny utprøving, forblir som den opprinnelige. Det som eventuelt kan forandres, er spørsmålets utforming. Jeg kan ha oversatt eller tolket spørsmålene annerledes enn hva som var opprinnelig tenkt. I tillegg kan det være verdt å legge vekt på oppgaver, som kan stimulere til refleksjon og diskusjon mellom elevene.

På bakgrunn av utprøvingen og analysen, ønsker jeg å revidere tre av spørsmålene til en eventuelt ny gjennomføring. Innholdet i problemstillingene vil stort sett forbli de samme, men oversettelsen blir annerledes. Figur 6.1 nedenfor, er illustrasjonen elevene fikk på oppgavearket, men nå med en ny detalj. Etter gjennomføringen oppdaget jeg at det ble uklart hvilke navn innverdien skulle ha. Friel og Markworth (2009) kaller det for «stage» på engelsk, som også kan oversettes som trinn på norsk. Jeg har tidligere sett flere lignende oppgaver med «Figurnummer», som kanskje passer bedre, og jeg valgte derfor å kalle innverdien for «flismønsternummer». På Figur 6.1 nedenfor, ved «Flismønster 3», har jeg valgt å revidere med å legge til «flismønsternummer» og pil, for å gi innverdien et «navn». Flismønsternummer kan da brukes som et begrep i problemstillingene, og vil kanskje være oppklarende for elevene underveis i utforskingen.



Figur 6.1: En revidert utgave av illustrasjonen til Flismønsterproblemet.

Som tidligere nevnt, prøvde jeg å tilpasse problemstillingene med tanke på at elevene ikke hadde jobbet med mønstre tidligere. Problemstillingene fikk kanskje en annen betydning enn de opprinnelige. Min intensjon var å hjelpe elevene i gang, uten for mye forklaring på forhånd og underveis. I gjennomføringen med klassen, virket det som om noen problemstillinger skapte mer forvirring enn andre, og jeg har derfor valgt å revidere tre av problemstillingene (oppgave 1, deloppgave d og oppgave 3).

Den første problemstillingen jeg ønsker å revidere er oppgave 1: Hvor mange ulike måter kan du se flismønstrenes oppbygging på? Elevene ble raskt ferdige med denne oppgaven, og det var stort sett én måte elevene så flismønsteret på. For å provosere frem flere måter å se flismønsteret på, ønsker jeg å revidere oppgaven til: Hvordan vil du beskrive måten flismønstrene er bygd opp? Kan du se andre måter å bygge flismønstrene på? Ved å trekke inn begrepet «beskrive» vil kanskje elevene gi mer utfyllende beskrivelser, og «flere måter» vil kanskje få elevene til å undersøke mer enn én måte å se flismønsteret på.

Den andre problemstillingen jeg ønsker å revidere er oppgave d: Fortell noen hvordan de skal tegne eller bygge et hvilket som helst flismønster. Fra observasjoner i undervisningen virket det som at uttrykket «et hvilket som helst» var vanskelig for elevene, og jeg ønsker derfor å bytte om til begrepet «et tilfeldig, men som gjelder for alle», som virket mer kjent for dem. Revideringen av oppgaven blir da: Hvordan vil du forklare en medelev hvordan han/hun skal bygge et tilfeldig flismønsternummer, som gjelder for alle flismønstre? I tillegg er «flismønsternummer» satt inn med tanke på at elevene kanskje kan relatere innverdien til den nye illustrasjonen på oppgavearket, som kan være mer oppklarende.

Den tredje og siste problemstillingen jeg ønsker å revidere er oppgave 3: Hvor mange fliser trengs for å lage flismønsternummer n (et hvilket som helst flismønster)? Lag et uttrykk. Her er også uttrykket «et hvilket som helst», som jeg reviderer til «et tilfeldig flismønster, men som gjelder for alle flismønstre». I tillegg virket begrepet «uttrykk» mindre kjent for elevene fremfor begrepet «formel». Den nye problemstillingen blir da: Hvor mange fliser trengs for å lage flismønsternummer n (et tilfeldig flismønster, men som gjelder for alle flismønster)? Lag en formel. Det er kun ved en ny utprøving, at man kan vurdere om problemstillingene er bedre eller ikke. Ut ifra observasjonene fra undervisningen, tydet det på at disse formuleringene gjorde det mer tydelig for elevene, hva de skulle gjøre.

6.5 Avsluttende refleksjoner

Denne forskningen tok for seg et undervisningsopplegg med innføring av et geometrisk mønster på åttende trinn, kalt Flismønsterproblemet. Designet av undervisningsopplegget var først og fremst grunnet i forskningsbasert teori. Prinsippene rundt undervisningen inkluderte i hovedsak de nye kjerneelementene, som innføres i norsk skole, høsten 2020.

Ved å tolke og analysere de innsamlede observasjonene, de transkriberte datamaterialene fra lyd- og videoopptak og elevenes skriftlige besvarelser, så har det vært mulig å besvare mine forskningsspørsmål. I tillegg har forskningen ført til en revidering av undervisningsopplegget, til en eventuelt ny utprøving, som er en del av designforskningen. Prinsippene rundt undervisningen og det forskningsbaserte undervisningsopplegget (som omtalt i kapittel 3), ga både overraskende og mindre overraskende resultater.

Det mest overraskende var at flesteparten av elevene viste flere typer representasjoner i sine besvarelser gjennom flere oppgaver. Elevene var innom ulike representasjonssystemer, som inkluderte både konverteringer og behandlinger. Gjennom å studere de ulike representasjonene til elevene, var det mulig å avdekke deres ulike resonnementsstrategier. Elevene så ut til å ha en rekursiv tilnærming i begynnelsen. Elevene gikk over til en eksplisitt tilnærming i løpet av oppgaveløsningen. Mindre overraskende var det, at elevene innad i gruppene, hadde tilnærmet like resonnementsstrategier. Det er sannsynlig for at elevene ble påvirket av hverandre.

En av hensiktene med denne masteroppgaven, var å få frem elevenes måte å representere og resonnere på, i forbindelse med introduksjonen av den geometriske mønsteroppgaven. Det vil si, at jeg inkluderte gode eksempler i analysen, for å belyse relevant teori. Men det er også viktig å påpeke, at det sannsynligvis var flere elever som ikke hadde et like stort eieforhold til tilnærmingene og løsningene sine. Siden elevene innad i gruppene hadde flere liknende måter å representere resonnementene sine på, vil jeg ikke utelukke at noen elever kopierte andre elevers tilnærminger. Men elevene viste samtidig engasjement, ved at de ønsket å inkludere de andre på gruppa, ved å tegne og forklare hva de hadde gjort. En av forutsetningene for at opplegget skal fungere, er nok at elevene har erfaring med å jobbe samme i gruppe fra tidligere. Fra tidligere var elevene vant til å diskutere/argumentere i matematikkundervisningen.

Undervisningsopplegget inkluderer undervisningsprisnippene, som anbefales av Utdanningsdirektoratet, med de nye kjerneelementene, som innføres til høsten. Selv om det er vanskelig å si noe om hva slags overføringsverdi undervisningsopplegget kan ha for andre klasser, mener jeg at det vil passe flere. Dette med tanke på at klassen i denne undersøkelsen ble tilfeldig valgt, som jeg ikke hadde noen kjennskap til, og at det var en blandet elevgruppe. Jeg håper at forskningen bidro til innsikt i hvordan en geometrisk mønsteroppgave kan bygges opp, og hvordan man kan identifisere elevers måter å representere sine resonnement på.

Det kan virke som at undervisningsopplegget, med utforsking av Flismønsterproblemet, har potensialer til å hjelpe elever i gang med funksjonstenking. Som nevnt i teorien, beskrev Blanton og Kaput (2005) et algebraisk resonnement, som en prosess hvor elevene generaliserer matematiske ideer fra et sett med spesielle tilfeller. Elevene etablerer disse generaliseringene gjennom argumentasjonen, og uttrykker de på stadig mer formelle måter. Eksemplet med Sofia gjennom analysen, kan tyde på at hun gjennom utforskingen av Flismønsterproblemet, går fra uformelle til mer formelle måter å representere sine resonnement. Jeg synes likevel det er viktig å påpeke, at selve utviklingen av funksjonstenking krever betraktelig større tidsperspektiv. Forskningen kan være et eksempel på hva som bør inkluderes i en slik type undervisning, og hvordan man kan identifisere elevenes representasjoner, resonnement og begrunnelser.

Jeg vil avslutte denne masteroppgaven med et oppløftende sitat til alle matematikklærere der ut, fra forskerne Friel og Markworth (2009, s. 30):

> *"A combination of an effective problem-solving process that focus on figural reasoning and appropriately challenging geometric pattern tasks will enable mathematics teachers at all levels to promote functional understanding".*

7 Litteraturliste

Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (2006). Introducing educational design research. I J. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 3-7). London: Routledge.

Anderson, T. & Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? *Educational Researcher, 41*(1), 16-25. https://doi.org/10.3102/0013189X11428813

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. London: Routledge.

Bakker, A. & Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. I A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Red.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: examples of methodology and methods* (s. 429-466). Dordrecht: Springer Netherlands.

Bjørndal, K. (2013). Pedagogisk designforskning. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker* (s. 245-259). Oslo: Universitetsforlag.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students’ capacity for functional thinking. I *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (bd. 2, s. 135-142). Norway: Bergen University College.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. . *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/30034944

Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2008). Multiple notation systems and algebraic understandings: The case of the “best deal” problem. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the Early Grades* (s. 273-301). New York: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

Cai, J. & Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. I C. Greenes & R. Rubenstein (Red.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (s. 169-180). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Calder, B. J., Phillips, L. W. & Tybout, A. M. (1982). The concept of external validity. *Journal of consumer research, 9*(3), 240-244. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/2488620

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (bd. 2, s. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Conceicao, S., Sherry, L. & Gibson, D. (2004). Using developmental research to design, develop, and evaluate an urban education portal. *Journal of Interactive Learning Research, 15*(3), 271-286.

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*. NH: Heinemann.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *An International Journal, 61*(1), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Enge, O. & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten, 24 (1)*, 8-46.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. I M. Wittrock (Red.), *Handbook of research on teaching* (bd. 3, s. 119-161). New York: MacMillan.

Friel, S. N. & Markworth, K. A. (2009). A Framework for Analyzing Geometric Pattern Tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 24-33. Hentet fra www.jstor.org/stable/41182948

Gold, R. L. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces, 36*(3), 217-223. https://doi.org/10.2307/2573808

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. I *Educational design research* (s. 17-51). London: Routledge.

Greenes, C. E., Greenes, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C. & Small, M. (2001). *Navigating through algebra in prekindergarten-grade 2*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Hodgen, J., Küchemann, D. & Brown, M. (2010). Textbooks for the teaching of algebra in lower secondary school: Are they informed by research? *Pedagogies: An International Journal: The Teaching of Algebra, 5*(3), 187-201. https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.486154

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. I *Mathematics classrooms that promote understanding* (s. 133-155). Mahwah: Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (s. 5-17). New York, NY: Taylor & Francis Group.

Karlsen, L. (2014). *Tenk det!: utforsking, forståelse og samarbeid-elever som tenker sjæl i matematikk: ungdomstrinnet* Cappelen Damm akademisk.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). Det kvalitative forskningsintervju (2. utg.) Oslo: Gyldendal akademisk.

Küchemann, D. (2010). Using patterns generically to see structure. *Pedagogies: An International Journal: The Teaching of Algebra, 5*(3), 233-250. https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.486147

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lee, L. & Freiman, V. (2006). Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(9), 428-433.

Moss, J., Beatty, R., Barkin, S. & Shillolo, G. (2008). What is your theory? what is your rule?" fourth graders build an understanding of functions through patterns and generalizing problems. I *Algebra and algebraic thinking in school mathematics (70th yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)* (s. 155-168). Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Oha, E. & Reeves, T. (2010). The implications of the differences between design research and instructional systems design for educational technology researchers and practitioners. *Educational Media International, 47*(4), 263-275.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 107-111). Dordrecht: Springer Netherlands.

Radford, L., Bardini, C. & Sabena, C. (2007). Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 507-530. https://doi.org/10.2307/30034963

Rienecker, L., Jørgensen, P. S. & Skov, S. (2013). *Den gode oppgaven: håndbok i oppgaveskriving på universitet og høyskole* (2. utg. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2005). Teacher to Teacher: Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Romberg, T. A. & Kaput, J. J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. I E. Fennema & T. Romber (Red.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (s. 3-32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (s. 133-160). New York: Taylor & Francis Group.

Stacey, K. & Chick, H. (2004). What is the problem with algebra? I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra* (s. 1-20). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Sutherland, R. (2002). *A comparative study of algebra curricula: London: Qualifications and Curriculum Authority*.

Säljö, R. & Moen, S. (2001). *Læring i praksis : et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelen akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2016). Hovedresultater fra TIMSS 2015. Hentet 02. mai 2020 fra https://www.udir.no/contentassets/7b41d7e958ad41cc8596f58dfd4838d1/timss_2015_hovedresultater.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2019a). *Kjerneelement (MAT01-05)*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Utdanningsdirektoratet. (2019b). *Kompetansemål og vurdering (MAT01-05)*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv16

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *An International Journal, 67*(2), 171-185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2

Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(5), 397-428. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9251-6

Wilkie, K. J. & Ayalon, M. (2018). Investigating Years 7 to 12 students' knowledge of linear relationships through different contexts and representations. *Mathematics Education Research Journal, 30*(4), 499-523. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0236-8

Wilkie, K. J. & Clarke, D. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal, 28*(2), 223-243. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0146-y

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk - redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten, 26*(2), 22-27.

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1: Informasjonsskriv til foreldrene

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet

"En designstudie av et undervisningsopplegg basert på RME-teorien i forbindelse med algebra og funksjoner"?

Til foresatte for elever på 8. trinn ved x skole

Jeg er masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt på skolen til ditt barn. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål

Jeg er lærerstudent ved NTNU, som fordyper meg innen matematikkdidaktikk. Høsten 2018 og våren 2019 skal jeg utføre et avsluttende masterprosjekt. Jeg er på utkikk etter en skole jeg kan samarbeide med, som inkluderer elever på 8. trinn.

Mine foreløpige forskningsspørsmål er:

1. Hvordan kan et helhetlig undervisningsopplegg i algebra og funksjoner utformes for elever på ungdomsskolen (eller barneskolen)?

1. Hvordan kan arbeidet med Flismønsterproblemet hjelpe elevene i overgangen fra uformell matematikk til formell matematikk i lys av RME-teorien?

Forskningsspørsmålene skal besvares ut ifra teorier om undervisning sammen med elevbesvarelser. Undervisningsopplegget utvikles av meg, på bakgrunn av RME-teorien (punktene under):

- *Aktivitetsprinsippet* handler om at eleven er en aktiv deltaker i matematikkundervisninga, det vil si at eleven ikke presenteres for «ferdig» matematikk.
- *Virkelighetsprinsippet* handler om at eleven skal oppleve nærhet til virkeligheten.
- *Nivåprinsippet* går ut på at modeller er knyttet til virkeligheten og som etterhvert går over til mer og mer formell matematikk.
- *Sammenflettingsprinsippet* er en helhetlig matematikkundervisning uten oppdeling i tema: tall- og algebra, funksjoner, geometri og så videre.
- *Samhandlingsprinsippet* går ut på at eleven er en deltaker i et fellesskap, hvor det foregår deling og diskusjoner rundt matematikk.
- *Veiledningsprinsippet* handler om at eleven skal gjenskape og oppdage matematikken.

Prosjektet vil for elevene vare i omtrent 2 timer, og jeg trenger mellom 12 og 24 elever. For at dette skal kunne gjennomføres trenger jeg foresatte sin bekreftelse, som er en signert svarslipp av foresatte nederst i dokumentet.

Resultatene av studien vil bli brukt i en eksamensbesvarelse/masteroppgave ved NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Elever på 8. trinn får denne henvendelse da jeg tror både elevene og forskeren (meg) får best utbytte av undervisningsopplegget. Jeg ønsker elever som kan samarbeide om matematikkoppgaver, og som ønsker å arbeide på en ny måte i matematikk og som har lyst å lære noe nytt.

Hva innebærer det for deg å delta?

Deltakelsen innebærer gruppearbeid hvor jeg skal undersøke elevene i arbeid med en skreddersydd matematikkoppgave. Oppgaven er såkalt "åpen", noe som betyr at elevene selv velger fremgangsmåte og hjelpemidler (bøker, dataprogram, ark, fysiske gjenstander osv.). Oppgaven er ikke en ren algebra eller geometrioppgave, men heller en oppgave som knytter sammen flere matematiske temaer. Matematikkoppgaven er ment som at elevene skal "gjenoppdage" matematikken selv, det vil si at læreren ikke skal presentere noe, men heller være en støttende veileder.

Det vil bli gjort lyd -og videoopptak og samlet inn elevarbeider (tegninger, skriftlige dokumenter o.l.), noe kun jeg vil se på i etterkant av undervisningen. Opptakene er viktige slik at jeg kan analysere hvordan elevene jobber med oppgavene. Alle elevene blir anonymisert og datamaterialet vil bli slettet så snart masterprosjektet er avsluttet.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du/ditt barn velger å delta, kan du/ditt barn når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Ingrid Røn og veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter (elevtekster og transkripsjon). Videoene vil ikke bli vist til medstudenter eller veileder.
- Jeg kommer til å oppbevare lyd -og videoopptak i en låst mappe. Skriftlige dokumenter vil bli låst inne i et skap. Opprinnelig navn eller andre personopplysninger om elevene skal ikke oppgis.
- Deltakeren kan kjenne igjen tegninger eller noe som er skrevet på papir, hvis det kommer med i oppgaven. Navn vil aldri bli nevnt.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes 1. juni. Digitale data (film -og videoopptak) vil bli slettet fra PC. Skriftlige dokumenter vil bli makulert.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for Lærerutdanning, har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning v ed Eivind Kaspersen (eivind.kaspersen@ntnu.no)/Mari-Ann Igland (mari.a.igland@ntnu.no)
- Vårt personvernombud: *(sett inn navn på personvernombudet hos behandlingsansvarlig institusjon)*
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig Student (Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *En designstudie av et undervisningsopplegg basert på RME-teorien i forbindelse med algebra og funksjoner*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

□ å delta i gruppearbeid i forbindelse med matematikkundervisning med lyd -og videoopptak.

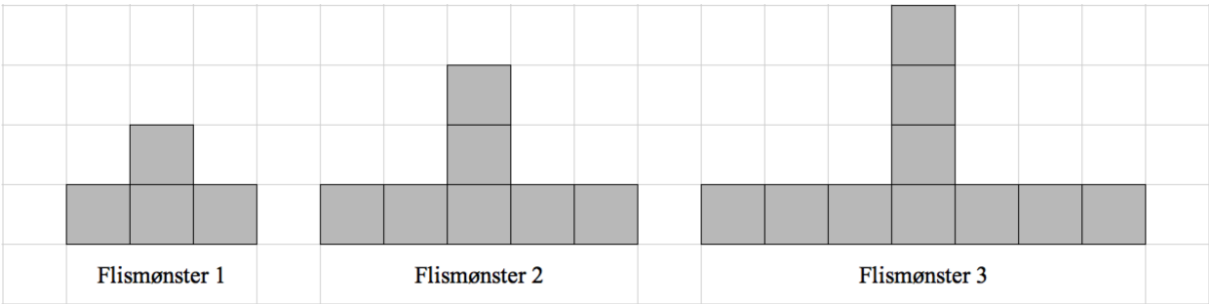
Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 1. juni.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

8.2 Vedlegg 2: Flismønsterproblemet, oppgavearket til elevene.

Flismønsterproblemet

Dekknavn:___________



Du skal flislegge et flismønster på gulvet. Flisene har samme størrelse, men flismønsteret blir større og større for hver nye flismønster. For eksempel til flismønster 1 trenger du 4 fliser, mens til flismønster 2 trenger du flere fliser, og så videre. Ved å gjøre oppgavene under, vil du etter hvert kunne finne en regel, som enkelt forteller hvor mange fliser du trenger til de ulike flismønstrene. Naboen sin regel kan se annerledes ut enn din, men regelen kan likevel fungere. Det viktigste er at dere argumenterer for hvorfor regelen skal fungere. Lykke til!

1. På hvor mange ulike måter kan du se på flismønstrenes oppbygging?

a) Hvordan vil du tegne eller bygge det 4. flismønsteret?

b) Hvordan vil du tegne eller bygge det 10. flismønsteret?

c) Hvordan vil du tegne eller bygge det 58. flismønsteret?

d) Fortell noen hvordan de skal tegne eller bygge et hvilket som helst flismønster.

2. Du har 27 fliser. Hvordan vil flismønsteret se ut? Vil jeg ha noen fliser igjen?

3. Hvor mange fliser trengs for å lage det 10. flismønsteret, 58. flismønsteret eller 100. flismønsteret?

4. Hvor mange fliser trengs for å lage flismønster nummer *n* (hvilke som helst flismønster)? Lag et uttrykk.

5. Sammenlign uttrykkene med hverandre. Hvilket uttrykk mener dere er det «riktige»?

6. Hvilke flismønster har nøyaktig 100 fliser? Hva med 50 fliser?

7. Kan du lage en ny oppgave med flismønstre eller andre mønstre for klassen?

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology