Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Tone Cecilie Nystrøm

Resonnering i matematikk

- en kvalitativ studie av ulike strategier brukt av elever på 8.trinn.

Masteroppgave i lærerspesialist i matematikk, 8.-10.trinn
Veileder: Eskil Ahn Braseth
Mars 2021

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Tone Cecilie Nystrøm

Resonnering i matematikk

- en kvalitativ studie av ulike strategier brukt av elever på 8.trinn.

Masteroppgave i lærerspesialist i matematikk, 8.-10.trinn
Veileder: Eskil Ahn Braseth
Mars 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Hensikten med studien er å få et innblikk i hvordan elever resonnerer i matematikk når de sammen diskuterer problemløsningsoppgaver. Jeg har besvart følgende problemstilling: *«Hva kjennetegner elever på 8.trinn sine muntlige resonneringer i matematikk når de diskuterer problemløsningsoppgaver i små grupper?»*

Studien har en kvalitativ tilnærming og bygger på lydopptak og observasjonsnotater av to matematiske samtaler mellom elever på 8.trinn, der læreren har rolle som fullstendig deltager. Utvalget består av totalt seks elever, fordelt på to grupper med tre elever på hver gruppe.

En analyse av elevenes resonnering ved bruk av Lithners (2008) rammeverk for kreativ og imitativ resonnering er gjennomført i studien. Videre ble resultatene sammenlignet, med fokus på likheter og ulikheter i elevenes resonneringsprosess og ulike hinder i elevenes resonneringssekvens ble identifisert.

Sentrale funn i denne studien er: 1) Elevenes innledende resonnement er imitative.
2) Elevene bruker metakognitive reguleringsferdigheter for å verifisere løsningen og svaret sitt. Manglende reguleringsferdigheter fører til problemer for elevene med å fullføre alle stegene i resonneringsstrukturen. 3) Deler av elevenes resonnering blir ikke verbalisert.

Funnene i studien peker på at elevenes resonnering stort sett er imitativ, noe som utfordrer lærere i matematikk når kjerneelementet resonnering og argumentasjon i LK20 skal implementeres.

Abstract

The main purpose of this study is to gain an insight into how pupils reason in Mathematics when they discuss tasks that involve problem solving. I have answered the following question: «*What characterizes 8th grade students' oral reasoning in Mathematics, when they, in small groups, discuss problem solving tasks*? »

The study takes a qualitative approach. The data consist of observations and audio recordings of two Mathematical discussions between 8th grade pupils, where the teacher has the role of full participant. The sample consists of a total of six pupils, divided into two groups with three pupils in each group.

Lithner's research framework of imitative and creative reasoning (2008) was used to analyse the pupils reasoning in this study. Furthermore, the results were compared with a focus on similarities and differences in the pupils reasoning process, and various obstacles in the pupils' reasoning sequence were identified.

Key findings in this study are: 1) The pupils' initial reasoning is imitative
2) The pupils use metacognitive monitoring skills to verify solutions and answers. Lack of monitoring skills leads to problems for pupils to complete all the steps in the reasoning structure. 3) Parts or pupils' reasoning are not communicated verbally.

The findings of this study indicate that the pupils' reasoning is largely imitative, which challenges teachers in Mathematics when the core element Reasoning and Argumentation in LK20 is to be implemented.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på studiet mitt som lærerspesialist i matematikk ved NTNU. Etter over 20 år som lærer var det både spennende og litt nervepirrende å sette seg på skolebenken igjen. Heldigvis viste det seg at lærerspesialiststudiet var både interessant og matnyttig. Dyktige forelesere inspirerte og la til rette for gode refleksjoner over egen praksis. Medstudentene var faglig engasjerte og det førte til mange flotte diskusjoner og godt samarbeid.

Etter hver samling i Trondheim fikk jeg nye ideer til undervisningsopplegg som jeg kunne prøve ut med elevene mine. Kompetansen min som matematikklærer økte, og proporsjonalt med denne økningen opparbeidet elevene seg en forventing om at vi skulle gjøre noe kjekt i matematikktimene når jeg kom tilbake fra en samling. «My Favourite No», strikkhopp med Barbie og utforsking av parallelle linjer i andre geometrier enn den Euklidske var noen av oppleggene som fenget mange elever. Til og med vurdering i matematikk ble kjekke, ifølge elevene, etter at vi startet med par-prøver. For å sitere en av elevene: «Det er så greit med matteprøver nå. Før bare satt jeg der og fikk ikke til noe. Men nå, siden jeg jobber med en som jeg kan diskutere med, så får jeg til mer og lærer noe. Det er vel ikke feil å lære selv om det er en prøve, vel?».

Når det gjelder selve masteroppgaven så har det vært et interessant arbeid, i en travel tid. Jobb, familie og Covid-19 har krevd sitt, og det er mange jeg vil takke for at jeg har kommet i mål.

Først og fremst vil jeg takke veilederen min Eskil Ahn Braseth ved Matematikksenteret for konstruktive tilbakemeldinger og innspill. Videre vil jeg takke familien min som har latt meg okkupere spisestuebordet i månedsvis, som forstår når de må være stille og som gir meg god støtte. Jeg vil takke venner og kolleger som heier meg fram. Jeg vil takke de fantastiske elevene mine, som er med på alle rare påfunn i timene, som tåler at læreren av og til er litt mentalt fraværende og som er grunnen til at jeg har verdens beste jobb. Til slutt vil jeg takke min gode venn Elin, du fikk meg i mål.

Tone Cecilie Nystrøm

Hafrsfjord, mars 2021

Innhold

Figurer xi
Tabeller xi
Forkortelser/symboler xi
1 Innledning 12
1.1 Bakgrunn 12
1.2 Problemstilling 14
1.3 Oppgavens oppbygning 14
2 Teoretisk rammeverk 16
2.1 Matematisk resonnering 16
2.1.1 Ulike måter å forstå og forklare hva resonnering er 16
2.2 Kompetanse til å løse problemløsningsoppgaver i matematikk 19
2.3 Argumenter brukt i matematisk resonnering 20
2.4 Resonneringssekvens 21
2.5 Resonneringsstruktur 22
2.5.1 Imitativ resonnering 24
2.5.2 Kreativ resonnering 25
2.6 Læringsmiljø 27
2.7 Matematiske samtaler 28
3 Metode 30
3.1 Valg av metode 30
3.1.1 Casestudie 31
3.2 Utvalg 31
3.3 Observasjon som metode 32
3.4 Empiri 34
3.4.1 Forberedelse til datainnsamling 34
3.4.2 Gjennomføring av datainnsamling 34
3.4.3 Oppgavene 35
3.5 Analyse og analyseverktøy 37
3.5.1 Transkribering og etterarbeid 38
3.5.2 Analysemetode 38
3.6 Gyldighet og pålitelighet ved oppgaven 39
3.7 Etiske betraktinger og metodekritikk 40
3.7.1 Etiske betraktninger 40
3.7.2 Metodekritikk 41
4 Resultat og analyse 42

4.1 Imitativ resonnering 43
4.1.1 Memorert resonnering 43
4.1.2 Algoritmisk resonnering 48
4.1.2.1 Kjent algoritmisk resonnering 48
4.1.2.2 Avgrenset algoritmisk resonnering 50
4.1.2.3 Ledet algoritmisk resonnering 58
4.2 Kreativ resonnering 61
5 Diskusjon..67
5.1 Resonneringsstrategier som elever på 8.trinn benytter seg av 67
5.1.1 Elevenes innledende resonnement er imitative..67
5.1.2 Imitativ resonnering kan være hensiktsmessig..68
5.1.3 Metakognisjon kan føre til endring av resonnement 69
5.2 Mulige hinder for elevenes resonnement 70
5.2.1 Manglende verifiseringsstrategier 70
5.2.2 Manglende bekreftelse fra læreren 70
5.2.3 Elever oppfatter seg selv som faglig underlegne..71
5.2.4 Bruk av imitativ resonnering..71
5.2.5 Elevenes resonnering kommer ikke alltid til uttrykk 72
6 Avslutning..73
Referanser..75
Vedlegg 1: Samtykkeerklæring 79

Figurer

Figur 1 Matematisk kompetanse (Kilpatrick et.al.2001 s.5) 18
Figur 2 Resonneringsstruktur representert med graf (Lithner, 2008, s.258) 22
Figur 3 Struktur av resonnement (Lithner, 2006, s.5) 23
Figur 4 Hvordan resonnering oppstår (Lithner, 2008, s.256) 27
Figur 5 Blomsterselgeren Rose (mattelist.no) 36
Figur 6 Handlevogner (mattelist.no)..37
Figur 7 Den lille og den lange delen av en handlevogn 43

Tabeller

Tabell 1 Ulike observatørroller (Postholm & Jacobsen, 2018, s.115) 33
Tabell 2 Fordeling av antall blomster av hver farge etter elevresonnement 56
Tabell 3 Oppsummering av Pers resonnement 65
Tabell 4 Elevenes innledende resonnement 67

Forkortelser/symboler

LK20	Kunnskapsløftet 2020
NCTM	Nathional Council of Teachers of Mathematics
NSD	Norsk senter for forskningsdata
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

1 Innledning

I denne delen av oppgavene vil jeg redegjøre for valg av oppgave og problemstilling, i tillegg til å beskrive oppgavens innhold og oppbygning.
Temaet for masteroppgaven er å studere hvordan elever på 8.trinn resonnerer i matematikk.

1.1 Bakgrunn

Utvikling av elevers resonneringskompetanse i matematikk vektlegges i Kunnskapsløftet 2020 (LK20), som ble innført i norsk skole høsten 2020. Endringen i læreplanen, fra Kunnskapsløftet 2006, skal føre til at elevene arbeider med metoder og tenkemåter i matematikk slik at de får bedre kompetanse i faget (Kunnskapsdepartementet, 2018). LK20 presiserer at elevene må få tid til å tenke, reflektere, resonnere og stille spørsmål når de arbeider med matematikk. I tillegg til at elevene gjennom opplæring i matematikk skal utvikle ferdigheter til å vurdere resonnement kritisk slik at de står bedre rustet til å ta egne valg (Utdanningsdirektoratet, 2019).
I LK20 presenteres kjerneelement innen hvert fag, disse kjerneelementene representerer det viktigste og mest sentrale elevene skal lære innen faget. I matematikk er resonnering og argumentasjon et av seks kjerneelement: «Resonnering i matematikk handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer. Det inneber at elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar. Elevane skal utforme eigne resonnement både for å forstå og for å løyse problem. Argumentasjon i matematikk handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2019, side 3).

Matematisk resonnering regnes som en grunnleggende ferdighet i matematikk (Ball & Bass, 2003; NCTM, 2000; Ross, 1998), og resonnering i matematikk er essensielt både i løpet av prosessen med å løse oppgaver, og for å oppnå et svar (Ball & Bass, 2003). Ball og Bass (2003) trekker fram at matematisk resonnering er fundamentet for matematisk forståelse, for bruken av matematikk og for å rekonstruere matematisk kunnskap.
Hvis ikke elever resonnerer matematisk, handler matematikk kun om å følge prosedyrer og å herme etter eksempler uten forståelse (Ross, 1998). Ross påpeker at NCTM standards oppfordrer elever til å utvikle egne algoritmer og løsningsmetoder, og at det må legges vekt på at elever blir problemløsere i matematikk, i stedet for å herme etter allerede kjente prosedyrer.

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) hevder at hvis elever skal forstå ulike algoritmer må elevene selv forklare, argumentere og resonnere over mange ulike problem, ikke bare jobbe med samme oppgavetype. Kilpatrick et al. (2001) beskriver matematisk resonnering med at man skal kunne forklare og begrunne tankeganger, følge og vurdere logiske resonnement, bruke logiske resonnement når man argumenterer for gyldigheten av hypoteser og kunne forklare og begrunne sammenhenger mellom ulike begrep og fremgangsmåter. Resonnering kommer naturlig for elever når de jobber med åpne oppgaver (oppgaver som ikke kan løses ved standard framgangsmåter) i matematikk, og elever bør oppfordres til å forklare i detalj hvordan de resonnerer og tenker når de jobber med oppgaver, og til å gi tilbakemelding på hverandres matematiske resonnement (Maher, 2009). Maher (2009) argumenterer at elevers naturlige interesse for å forstå sammenhenger i matematikk bør stimuleres. Hun beskriver at dette kan oppnås ved at elevene får interessante problem til utforsking, i tillegg til at elevene må få den tiden de trenger til utforskningen. Ved å gi elever mange muligheter til å bygge og bearbeide løsninger som er meningsfulle vil, etter hvert, resonnementene til elevene bli mer sofistikerte og matematisk korrekte (Maher, 2009).

Da Kunnskapsløftet ble innført i norsk skole i 2006 brukte mange skoler Blooms taksonomi for å utarbeide kjennetegn på måloppnåelse ut fra kompetansemålene, dette førte til at kompetanse som å resonnere ofte ble sett på som en kompetanse bare elevene med de antatt sterkeste ferdighetene i matematikk hadde mulighet til å tilegne seg (Throndsen, Hopfenbeck, Lie, & Dale, 2009). Historisk sett har ferdigheten med å løse åpne oppgaver i matematikk blitt sett på som en ferdighet som krever høyere matematisk forståelse enn å løse rutineoppgaver (Schoenfeld, 2016). Det kan være en medvirkende årsak til at denne type oppgaver først blir presentert for elever etter at grunnleggende ferdigheter innen et emne er innarbeidet, eller er oppgaver som kun de høyest presterende elevene får jobbe med (Bloom, 1956; Stanic & Kilpatrick sitert i Schoenfeld, 2016 s. 5).

På tross av skolereformer viser allikevel forskning innen matematikkdidaktikk at matematikkundervisning har endret seg lite i løpet av årene (Boesen et al., 2014; Sriraman & Pizzulli, 2005). Tradisjonelt følger en matematikktime følgende løp: først presentere læreren dagens tema, etterpå sitter elevene på plassen sin og løser eksempelbaserte oppgaver mens læreren går rundt i klasserommet og hjelper, før timen avrundes med en kort oppsummering og oppklaringer av eventuelle utfordringer (Boaler, 2015; Boesen et al., 2014). Undervisning, lærebøker og evalueringssituasjoner i matematikk fremmer innlæring av algoritmer og strategier, ved at elevene skal følge eksempler fra enten lærer eller lærebok (Bergqvist & Lithner, 2012; Lithner, 2015). En av hovedutfordringene med tradisjonell matematikkundervisning har vært at mange elever fremdeles utvikler matematikkunnskapene sine ved å memorere strategier og algoritmer selv om man ønsker at elever skal bli problemløsere og kunne resonnere matematisk (Lithner, 2008, 2015; Schoenfeld, 2016). Videre viser forskning at det er liten overføring fra å kunne bruke memorerte strategier og algoritmer til å tilegne seg ferdigheter for å løse åpne oppgaver (Lithner, 2015). Ved innføring av ny læreplan, LK20, så ble kompetansemålene endret med større fokus på resonnering enn forrige læreplan (Utdanningsdirektoratet, 2019). Forskning viser at endring av kompetansemål som går på arbeidsmåter i liten grad fører til endring i klasserommet (Boesen et al., 2014). Grunnen til dette er at lærere generelt tolker kompetansemålene slik at de passer inn i deres egne oppfatninger om læring, i stedet for at lærerne endrer oppfatningen sin om læring i tråd med nye arbeidsmåter (Boesen et al., 2014).

Schoenfeld (1987) peker på at god undervisning må legge til rette for at elever skal få anledning til systematisk å gjøre oppdagelser i matematikk. Åpne oppgaver i matematikk vil kunne gi alle elever, uansett matematisk utgangspunkt, mulighet til å møte oppgaven på sitt nivå og til å gjøre oppdagelser og resonnere seg fram mot en løsning. Utgangspunktet til hver elev vil være ulikt, og elevene vil tilnærme seg oppgavene med ulike strategier. Strategiene kan være alt fra rene gjetninger til oppdagelser av nye sammenhenger (Lithner, 2008). I tillegg vil åpne oppgaver gi elever et godt grunnlag til å jobbe sammen, diskutere og resonnerer seg fram mot løsninger, en arbeidsmåte som er basert på Vygotsky sine tradisjoner om sosiokulturell læringsteori (Vygotsky, 1978).

I tillegg til at forskningen jeg har presentert her viser klart at resonnering er helt sentralt i matematikklæring, stemmer dette også overens med mine egne erfaringer fra arbeidet med matematikkundervisning. I løpet av min egen lærerkarriere har jeg alltid vært interessert i hvordan elever resonnerer når de løser oppgaver. Av erfaring ser jeg at flere elever som strever med standardiserte oppgaver klarer å løse utfordrende og vanskelige problemløsningsoppgaver, mens elever som skårer høyt på standardiserte oppgaver kan bli tydelig frustrerte når de ikke kan bruke en kjent algoritme for å løse en oppgave. Nå som LK20 innføres i skolen, ser jeg et behov for at matematikkundervisning bør endre litt kurs bort fra det tradisjonelle, og kanskje lærebokstyrte. Bruk av matematiske samtaler og problemløsningsoppgaver som fremmer resonnering kan være en metode som kan styrke matematikkundervisning og dermed, forhåpentligvis, øke elevers motivasjon for matematikkfaget.

I dette prosjektet studerer jeg derfor hva som kjennetegner elevresonnementer i matematikk når elevene på 8.trinn jobber med problemløsningsoppgaver. Elevene diskuterer to ulike oppgaver, de jobber i små grupper og læreren er tilstede som en observerende deltaker.

1.2 Problemstilling

Formålet for denne studien er å belyse hvordan elever resonnerer når de diskuterer problemløsningsoppgaver, og å se på hva som karakteriserer resonnementene. Jeg har derfor valgt følgende problemstilling for forskningen min:

«Hva kjennetegner elever på 8.trinn sine muntlige resonneringer i matematikk når de diskuterer problemløsningsoppgaver i små grupper?»

For å belyse problemstillingen har jeg formulert følgende delforskningsspørsmål:

- Hvilke resonneringsstrategier benytter elever på 8.trinn seg av?
- Hva hindrer elevene i resonneringsprosessen, og hvordan overkommer elevene disse hindrene?

Studien baserer seg på den matematiske samtalen til to smågrupper av elever. Elevene diskuterer to ulike problemløsningsoppgaver. Observasjon og lydopptak ble benyttet som dokumentasjonsmetode.

1.3 Oppgavens oppbygning

Masteroppgaven består av seks kapiteler. Det første redegjør for bakgrunnen for oppgaven, problemstilling og oppgavens oppbygging. Kapittel 2 inneholder blant annet læringsteori, det teoretiske rammeverket og relevante begrep avklares og blir gjort rede for. Lithner (2008) sitt rammeverk om kreativ og imitativ resonnering blir presentert. Etter teorikapittelet følger metodekapittelet. I dette kapittelet blir den metodiske tilnærmingen gjort rede for, gjennomføringen av datainnsamlingen blir beskrevet, og problemløsningsoppgavene som er valgt blir presentert. I tillegg blir valg av metode begrunnet. I kapittel 4 blir resultatene presentert og analysert. Resultatene blir analysert utfra Lithner (2008) sitt rammeverk om kreativ og imitativ resonnering. Kapittel 5 inneholder diskusjonen, der funn av mønster blir presentert og diskutert. I dette kapittelet besvares problemstillingen. Jeg avslutter oppgaven med konklusjon og avsluttende kommentarer i det siste kapittelet.

2 Teoretisk rammeverk

2.1 Matematisk resonnering

Som allerede beskrevet i kapittel 1 ses matematisk resonnering på som en grunnleggende ferdighet i matematikk (Ball & Bass, 2003). Utvikling av elevers matematiske resonneringskompetanse er et mål i mange læreplaner, også den norske, og hvordan lærere best kan legge til rette for denne utviklingen er et viktig element blant forskere innen matematikkundervisning (Jeannotte & Kieran, 2017). En utfordring er at matematisk resonnering er et begrep som ofte blir brukt med en implisitt antagelse av at det er en allmenn forståelse av hva som menes med resonnering i matematikk (Jeannotte & Kieran, 2017; Yackel & Hanna, 2003). Ulike studier om undervisning i matematikk kan være vage, usystematiske og til og med motsigende når de beskriver matematiske resonnering, samtidig som det ofte vektlegges at matematisk resonnering bør være et viktig aspekt av elevers matematikk opplæring og eleveres matematiske kompetanse (Jeannotte & Kieran, 2017).

2.1.1 Ulike måter å forstå og forklare hva resonnering er

Store norske leksikon definerer begrepet resonnering på følgende måte:

«Å resonnere er tenkning som innebærer at man trekker slutninger. I deduktiv tenkning trekkes logiske slutninger, fra premisser til konklusjon. Eller så kan slutninger bli tatt i induktiv tenkning, altså når man generaliserer fra enkeltobservasjoner til mer generelle prinsipp. Studier av resonnering viser at tenkning kan foregå både analytisk og bevisst, eller mer spontant og intuitivt. Den siste formen for resonnering kan lett komme i konflikt med normer for å trekke korrekte slutninger» (Teigen, 2019).

Her løftes det fram at resonnering kan være både deduktiv og induktiv, samtidig som det problematiseres at visse normer for å trekke slutninger må følges.

Jeannotte & Kieran (2017) hevder at matematisk resonnering kan bli sett på som deduktiv, induktiv eller som abduktiv. Der deduktiv resonnering kan bli assosiert med å sette fram hypoteser, i induktiv resonnering verifiseres hypotesene, mens i abduktiv resonnering så konstrueres hypoteser på bakgrunn av ulike observerte matematiske fenomen (Aliseda, 2003).

Deduksjon i matematisk resonnering blir av Duval (1995 i Jeannotte & Kieran, 2017, side 10) beskrevet som den eneste formen for resonnering som kan endre de epistemiske verdiene i matematisk forståelse fra sannsynlig til sann. Endringen finner sted fordi deduktiv resonnering er prosessen med å utlede en konklusjon fra en hypotese ved å bruke formelle matematiske regler på allerede kjent informasjon, og videre vise at konklusjonen man kommer fram til er universal (Ayalon & Even, 2008; Yackel & Hanna, 2003). Når det arbeides med bevis og bevisføring i matematikk blir ofte deduktiv resonnering brukt som et synonym for matematiske tenkning (Aliseda, 2003; Ayalon & Even, 2008; Jeannotte & Kieran, 2017), noe som har røtter helt tilbake til Euklids elementer der hver ny proposisjon ble bevist utfra tidligere kjente proposisjoner, aksiomer og definisjoner.

Induktiv resonnering i matematikk er, etter deduktiv resonnering, den mest vanlige formen for matematisk resonnering (Jeannotte & Kieran, 2017), og blir ofte brukt om all former for resonnering som ikke blir definert som deduktiv. Induktiv resonnering tar utgangspunkt i tilgjengelig data og observasjoner, med bakgrunn i likheter, ulikheter og sammenhenger mellom disse dataene og observasjonene kan en generell konklusjon eller regel formuleres (Christou & Papageorgiou, 2007). Når man i matematikk jobber med å gjenkjenne mønster utfører man matematiske generaliseringer som blir sett på som en form for induktiv resonnering (Jeannotte & Kieran, 2017; Stylianides, 2008). Konklusjoner som er basert på induktiv resonnering anses som sannsynlige (Jeannotte & Kieran, 2017).

Abduktiv resonnering kan bli sett på som baklengs deduktiv resonnering, der man søker etter sannsynlige forklaringer og beskrivelser som med støtte i teori kan være med på å generalisere og validere en hypotese (Aliseda, 2003) Ved bruk av abduktiv resonnering vil man ha en kontinuerlig veksling mellom teori og empiri fram mot en generalisering og validering (Jeannotte & Kieran, 2017). Som for induktiv resonnering kan konklusjoner man kommer fram til i abduktiv resonnering anses som sannsynlige, men kan bli tilbakevist om mer informasjon foreligger (Aliseda, 2003).

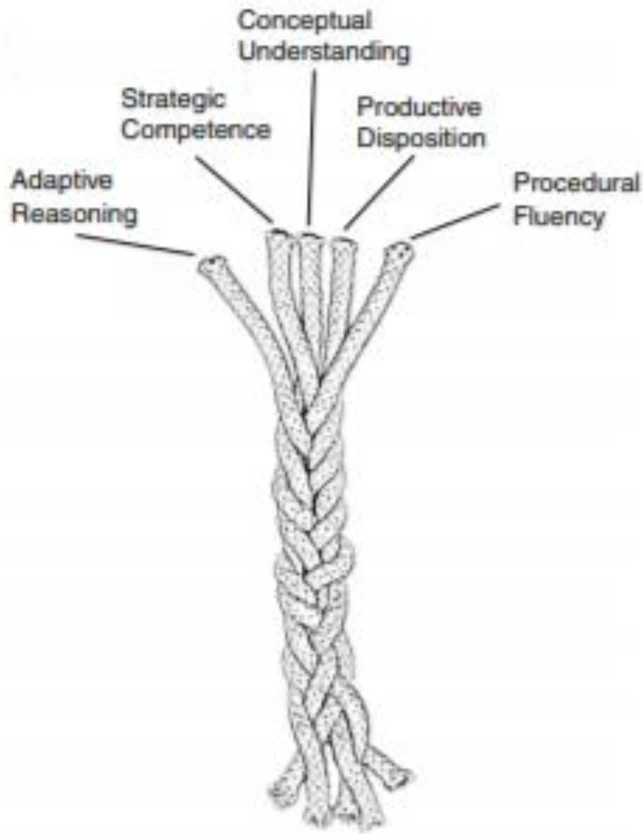
Ulike ord og uttrykk beskriver forskjellige former for matematiske resonnementer. Uttrykkene som blir brukt forteller noe om innholdet, kvaliteten på innholdet, nivået og styrken som ligger i det enkelte resonnementet (Balacheff, 1988). Balacheff (1988) beskriver den enkleste form for et resonnement innen matematikk som pragmatisk bevisføring, som involverer å vise med direkte handling, og det resonnementet som har høyest kvalitet og størst tyngde innenfor matematikk som konseptuell bevisføring. Konseptuell bevisføring krever at elever klarer å løsrive seg fra konkrete eksempler og handlinger (Balacheff, 1988). Stylianides (2008) viser til sammenhengen mellom resonnering og bevis for å beskrive prosessen fra å identifisere mønster, videre til å se sammenhenger, for til slutt å være i stand til å bevise matematikk. Mellom det sterkeste og det svakeste nivået av matematisk resonnement finnes det flere ulike former for å resonnere som for eksempel å argumentere overbevisende, å verifisere eller å rettferdiggjøre (Stylianides, 2008).

Resonnering og bevisføring blir av NCTM standards (Lithner, 2008, s. 270) beskrevet som fundamentale deler av matematikk. Kompetanse i resonnering er mer enn å konstruere kunnskap. Resonneringskompetansen inkluderer ferdigheter som å følge og vurdere ulike matematiske argumenter, vite hva et bevis er og hvordan det er ulikt fra andre resonneringsargument, avdekke grunnleggende ideer i en gitt argumentasjonsrekke, i tillegg til å formulere uformelle og formelle argument (Niss, 2003). Matematisk resonnering er en ferdighet som elever bør inneha og som derfor bør utvikles i elevers læringsprosess (Adawiyah & Muin, 2017; Kilpatrick et.al., 2001). Lithner (2008) peker også på at resonnering har som formål å føre til ny kunnskap hos dem som resonnerer. Sammen med bevisføring er resonnering sentralt når man skal gjøre matematikk. Allikevel er dette aktiviteter som mange elever, og matematikklærere, får problemer med når de møter (Stylianides, 2008). Stylianides (2008) problematiserer at det er lite kunnskap om hvordan lærebøker tar for seg resonneringsaspektet i matematikk, noe som kan føre til en utfordring når elevene skal utvikle resonneringsferdighetene sine i klasserom der undervisningen er i hovedsak lærebokstyrt. Stylianides beskriver videre at det er viktig at elever utvikler analytiske verktøy slik at de kan forbedre ferdighetene sine innenfor resonnering og bevisføring. En nøkkelfaktor i matematisk resonnering blir dermed å rettferdiggjøre og begrunne påstander ved matematiske argument (NCTM, 2000).

Lithner (2008) peker på at når man skal diskutere elevers resonneringskompetanse i matematikk så må man både se på elevenes forståelse for oppgaven som skal løses, elevenes kompetanse til å løse matematiske problem, i tillegg til elevenes kompetanse til å resonnere. Videre handler matematisk resonnering både om svaret og hvordan man kommer fram til svaret, altså produkt og prosess (Jeannotte & Kieran, 2017). Matematisk resonnering har som formål å produsere ny kunnskap hos dem som resonnerer (Jeannotte & Kieran, 2017).

Kilpatrick et.al.(2001) beskriver resonnering i matematikk som en av fem ulike matematiske ferdigheter som til sammen utgjør det som ofte betegnes som matematisk kompetanse. De fem komponentene som utgjør matematisk kompetanse, ifølge Kilpatrick et al. (2001), er sammenfattet i figur 1.

1) Begrepsforståelse (Conceptual Understanding) – forståelsen for matematiske begrep, ideer, operasjoner og sammenhenger.
2) Prosedyreferdigheter (Procedural Fluency) – evnen til å utføre ulike matematiske prosedyrer og beregninger fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig.
3) Strategisk kompetanse (Strategic Competence) – evnen til å formulere, representerer og løse matematiske problem.
4) Adaptiv resonnering (Adaptive Reasoning) – evnen til å tenke logisk, reflektere, forklare, vurdere og verifisere.
5) Produktiv holdning/ engasjement (Productive Disposition) – evnen til å se på matematikk som fornuftig, nyttig og verdifull, samtidig som å ha tro på egne ferdigheter i matematikk.



Figur 1 Matematisk kompetanse (Kilpatrick et.al.2001 s.5)

Kilpatrick et al. (2001) fremhever at de fem matematiske komponentene er både tett sammenflettet og avhengige av hverandre. Komponentene støtter hverandre, og det er viktig at elevene får mulighet til å utvikle alle de fem komponentene samtidig for å forbedre sin samlede matematiske kompetanse. Forbindelsen mellom de ulike komponentene blir da forsterket og elevene utvikler matematiske ferdigheter som er varige, fleksible, nyttige og relevante. Skal man utøve matematikk understreker

Kilpatrick og hans kollegaer at man må ha et samspill mellom de ulike komponentene. For å kunne mestre utfordringer og løse oppgaver i matematikk i sammenhenger og situasjoner som er nye og ukjente for elevene så bør de inneha resonneringskompetanse slik som beskrevet av Kilpatrick et al. (2001), i tillegg til andre matematiske ferdigheter som prosedyreferdigheter og konseptuell forståelse.

Lithner (2008) definerer matematisk kompetanse som elevenes evner til å forstå, bedømme, utføre og bruke matematikk i ulike sammenhenger og situasjoner. Elevenes resonneringskompetanse blir videre definert som hvilken forståelse elevene har for hvordan et problem kan løses og hvordan elevene til slutt ender opp med å løse ulike matematiske problem. Elevens resonneringskompetanse formes av miljøet eleven jobber i (Lithner, 2008). I delkapittel 2.6 vil jeg beskrive hvordan læringsmiljøet i et klasserom kan utformes for best å legge til rette for utvikling av resonneringskompetansen til elevene. Elevens kompetanse vil kunne både styrke og begrense elevens tankeprosesser, og elevenes tankeprosesser kan videre føre til ulike resonneringssekvenser hos elevene (Lithner, 2008).

2.2 Kompetanse til å løse problemløsningsoppgaver i matematikk

Hva som er et problem i matematikk og hva som er problemløsningsoppgaver defineres på mange ulike måter. Et problem kan ses på som en oppgave hvor problemløseren ikke vet hvordan han skal komme videre i løsningsprosessen, og der problemløseren ikke kan bruke en kjent løsningsmetode (Boesen, 2006; Leer, 2009). Problemløsning kan ses på som løsning av problemet (Boesen, 2006). I denne oppgaven vil jeg bruke NCTM (2000, i Lithner 2015 s 489) sin definisjon på problemløsningsoppgaver i matematikk: «En problemløsningsoppgave er en oppgave der elevene, på forhånd, ikke er klar over hvilken løsningsmetode som bør brukes». Oppgaver som ikke er problemløsningsoppgaver vil være rutineoppgaver der det er forventet at elevene følger en løsningsmetode som de kan fra før (Lithner, 2015).

For at elever skal ha kompetanse til å løse matematiske problem så må elevene kunne identifisere, presentere og spesifiserer ulike typer problem. I tillegg må elevene kunne løse problemene både bevisst og på hensiktsmessige ulike måter (Niss, 2003). Bare når læring gjøres bevisst, kan den være effektiv (Özsoy, 2011).

Schoenfeld (2016) har utformet et rammeverk for å løse matematiske problem. Rammeverket beskriver ulike kompetanser som elevene bør inneha for å kunne løse problemløsningsoppgaver:

- basiskunnskap
- problemløsningsstrategier
- observasjoner og å ta valg
- matematisk syn

Schoenfeld (2016) oppdaget at en av utfordringene for elever når de skal løse problemløsningsoppgaver, om elevene ikke er vant til å løse denne type oppgaver, er at elevene ofte har nok basiskunnskap til å løse ulike matematiske problem, men mangler kunnskap innen de tre andre kompetansenefeltene. For at elever skal utvikle kunnskap innen de andre kompetansefeltene og dermed ferdighetene sine til å problemløsningsoppgaver så bør både elevenes metakognitive ferdigheter og metakognitiv reguleringsferdigheter utvikles (Desoete, 2007).

Metakognitiv regulering vil si alle valg og strategiske aktiviteter som elever tar mens de jobber seg gjennom en kognitiv oppgave eller et problem (Garofalo & Lester Jr., 1985). Slike aktiviteter inkluderer valg av informasjonen som trengs for å forstå problemet, planlegging av fremgangsmåten som skal brukes til å løse problemet og valg av gode strategier for å utføre strategiene. Metakognitive reguleringsferdigheter vil si at elevene skal være i stand til å overvåke og evaluere utførelsen av planene og strategiene de har valgt å bruke, elevene skal være i stand til å evaluere utfallet, og, om nødvending, forkaste planer og strategier som ikke fører frem. Å besitte slike metakognitive reguleringsferdigheter er svært viktig for elevers prestasjoner i matematikk, og spesielt innen problemløsing (Garofalo & Lester Jr., 1985; Schoenfeld, 2016).

Forutse, planlegge, overvåke og evaluere er fire former for metakognitive reguleringsferdigheter som det bør fokuseres på i undervisningen (Özsoy, 2011). Forutse er elevenes evne til å vurdere vanskegraden til en oppgave og derfor hvilken innsats som må legges ned for å løse oppgaven, og til å vurdere hvilke algoritmer som kan brukes for å løse oppgaven (Özsoy, 2011). Planleggingsferdigheter gjør at elevene tenker over hvordan og hvorfor de skal løse en oppgave, gjerne gjennom å sette ulike delmål som leder fram mot oppgavens svar (Desoete, 2007; Özsoy, 2011). Overvåkningsferdigheter kan beskrives som elevenes evne til å identifisere problem underveis i løsningsprosessen og deretter modifisere planene sine om nødvendig. Mens det å evaluere er evnen til å reflektere etter noe har skjedd, om elevene er i stand til å se på hvordan oppgaven er løst og om dette har ledet til et ønsket resultat eller ikke (Özsoy, 2011). Desoete (2007) peker på metakognitiv regulering kan skje underveis i løsningsprosessen når elever snakker høyt og diskuterer mens de løser oppgaver.

2.3 Argumenter brukt i matematisk resonnering

Resonnering kan ha ulike funksjoner i matematikk, for eksempel verifisere, forklare, systematisere, oppdage, kommunisere og utforske (Yackel & Hanna, 2003). Argumentene som blir brukt innenfor de ulike områdene av resonnering er av forskjellig art (Lithner, 2008). Skal elevene utforske et problem, så må de kunne argumenterer hvorfor de ulike strategiene som foreslås kan gi ønskede resultat, men om elevene skal verifisere en løsning så må de kunne argumenterer for hvorfor de har nådd den ønskede løsningen (Lithner, 2008). Lithner (2008) peker videre på at kvaliteten av et matematiske argument er avhengig av validitet, overtalelsesevne og anvendbarheten. Yackel og Cobb (1996) understreker at det er viktig at argumentene er basert på matematikk, og ikke på sosial status, for eksempel lærerens autoritet eller en medelev som anses for å være flink i matematikk.

Korrekt bruk av matematiske begrep er viktig når elever skal resonnere i matematikk, og en god begrepsforståelse innebærer at elevene må både kunne anvende begrepet og forstå hvorfor begrepet skal brukes i den gitt situasjon (Stengrundet & Valbekmo, 2018). Hvis elevene har lært seg noen formler så kan de ofte løse mange tilsvarende oppgaver riktig, men med en gang oppgaven blir mer komplisert så kan begrepsapparatet ramle sammen (Schoenfeld, 2016; Stengrundet & Valbekmo, 2018). «Skal jeg gange eller dele, lærer?» er et velkjent uttrykk for elever som kan en prosedyre, men ikke vet når den skal brukes (Stengrundet & Valbekmo, 2018).

Videre er det hensiktsmessig om argumentene som brukes i resonnering er matematisk forankret i relevante matematiske egenskaper (Lithner, 2008). Argumentene som elevene bruker i resonnementene sine kan enten være forankret i overflateegenskaper eller tallenes egenverdi (Lithner, 2015). Hvis elevene legger overflateegenskapene til 1,2345 og 12,3 til grunn når de sammenlikner to tall kan de tro at det lengste tallet har størst verdi (Brekke, 1995). Mens elever som ser på sifferplassering bruker tallenes egenverdi i resonnementene sine. Elevenes argumenter kan også bli farget av vanlige misoppfattelser som for eksempel at multiplikasjon alltid gjør svaret større og divisjon gjør alltid svaret mindre (Brekke, 1995).

Lithner (2008, 2015) problematiserer i tillegg at det stilles andre krav til hvilke matematisk resonnement som er gyldige når elever jobber med matematiske oppgaver på skolen enn når for eksempel matematikere eller ingeniører resonnerer. I skolesammenheng er det tillatt for elevene å gjette, ta en sjanse, prøve seg fram og så videre, mens det vil være uhørt om en bygningsingeniør gjettet på hvordan en konstruksjon burde være og kun fikk 50% av beregningene korrekt.

2.4 Resonneringssekvens

Det strukturelle aspektet av matematisk resonnering referer til hvordan de ulike diskursive elementene kombineres i et ordnet system som beskriver både elementene og hvordan elementene er relatert til hverandre. Vanligvis er det da snakk om deduksjon, induksjon og abduksjon (Jeannotte & Kieran, 2017).

Lithner (2008, 2015) definerer resonnering som en tankerekke. En tankerekke som starter med en oppgave og har som mål å ende opp i et produkt. Produktet oppstår gjennom en resonneringssekvens der startpunktet er oppgaven og svaret er slutten av sekvensen. I denne sammenheng definerer Lithner (2008, 2017) oppgaven som det elevene blir bedt om å gjøre i løpet av matematikkøkta. Oppgaven kan være i form av åpne spørsmål, rike oppgaver, gruppearbeid eller andre utfordringer som elevene blir bedt om å løse. I tillegg må oppgavene, som elevene skal løse i løpet av matematikkøkta, være utformet slik at de er utfordrende for elevene som skal løse dem. Utfordrende oppgaver vil være oppgaver der elevene ikke kan bruke en kjent løsningsmetode for å komme fram til en løsning eller et svar. Svaret er definert som det elevene forventes å komme fram til i løpet av matematikkøkta. Løsningen defineres til både å inneholde svaret og begrunnelsen for hvorfor svaret er korrekt. Løsningen vil ikke inneholde hele resonneringsrekka som elevene har brukt underveis, men den vil inneholde et optimalisert sammendrag og vil kunne spores i elevenes, eventuelle, skriftlige arbeid (Lithner, 2008).

Lithner sitt rammeverk om matematisk resonnering er inspirert av Pólya «In strict reasoning the principal thing is to distinguish a proof from a guess, […]. In plausible reasoning the principal thing is to distinguish a guess form a guess, a more reasonable guess form a less reasonable guess" (Pólya 1954, sitert i Lithner, 2015, s.493). Her vil et sannsynlig (plausible) resonnement bli fulgt opp av sannsynlige argument, selv om argumentasjonsrekken ikke er helt logisk. Det mer logisk argumentasjonsrekken er, det mer sannsynlig er resonnementet (Lithner, 2008, 2015).

Lithner (2008) argumenterer at resonneringssekvensen hos elevene kan inneholde mer data enn hva et vanlig skriftlig svar ville inneholdt. En stor del av resonneringsprosessen foregår inne i den enkelte elevs hode, men deler av denne vil komme til utrykk under muntlig aktivitet mellom elever, eller mellom elever og lærer. Hvis en lærer ønsker å få tilgang til størst mulig del av resonneringsprosessen til elevene bør det legges til rette for samtaler mellom elevene, og i denne sammenheng kan bruk av matematiske samtaler være et godt hjelpemiddel. I en matematisk samtale kommuniserer elevene med hverandre, og de setter ord på hvordan de tenker og resonnerer. Det er viktig å legge merke til at når elever resonnerer så trenger ikke argumentene deres være logisk formelle (Lithner, 2008). Argumentene elevene bruker trenger heller ikke å være i form av bevis, argumentene kan til og med være feil, så lenge argumentasjonsrekken er forståelig for eleven selv så regnes den som matematisk resonnering (Lithner, 2008, 2017).

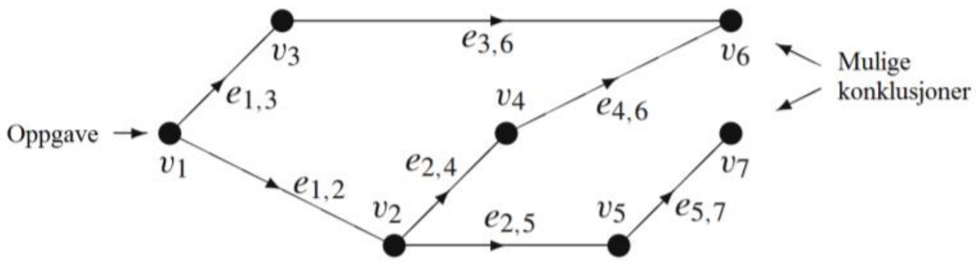
Videre i oppgaven min er det Lithner (2008) sin definisjon av matematisk resonnering jeg vil forholde meg til nemlig at resonnering er en tankerekke som starter med en oppgave og skal ende opp i et produkt.

2.5 Resonneringsstruktur

For å prøve å forklare forskjellige former av resonnering, er det viktig å skille resonneringssekvensen fra tankeprosessen som er opphav til resonneringssekvensen (Lithner, 2008).
Følgende fire steg kan brukes når en oppgave skal løses og resonneringssekvensen skal beskrives (Lithner, 2008, s.257, egen oversettelse):

i. Elevene møter en oppgave. Dersom oppgaven er utformet slik at det ikke er opplagt for elevene hvordan den skal løses kan den betegnes som et problem.
ii. Elevene velger en strategi for å løse oppgaven. Kanskje vil elevene følge opp valget sitt med argumentet om hvorfor den valgte strategien vil hjelpe dem til å løse oppgaven. Elevene kan benytte seg av mange ulike former for strategier; velge, bestemme, konstruere, oppdage, gjette og så videre.
iii. Elevene bruker strategien sin til å løse oppgaven. Elevene kan verifisere om strategien var vellykket, eller om de må revurdere løsningen sin og benytte en annen strategi for å løse oppgaven.
iv. Elevene finner et svar eller en konklusjon på oppgaven.

Resonneringsstrukturen kan representeres som en sti, figur 2 (Lithner, 2008). Et hjørne, v_1 i grafen representerer både oppgaven som skal løses og elevenes kunnskaper på det gitte tidspunkt i resonneringssekvensen. Elevenes valg av strategi er representert med stiene som leder ut fra v_1. Gjennomføringen av strategien representeres med sti $e_{1,2}$ og $e_{1,3}$.



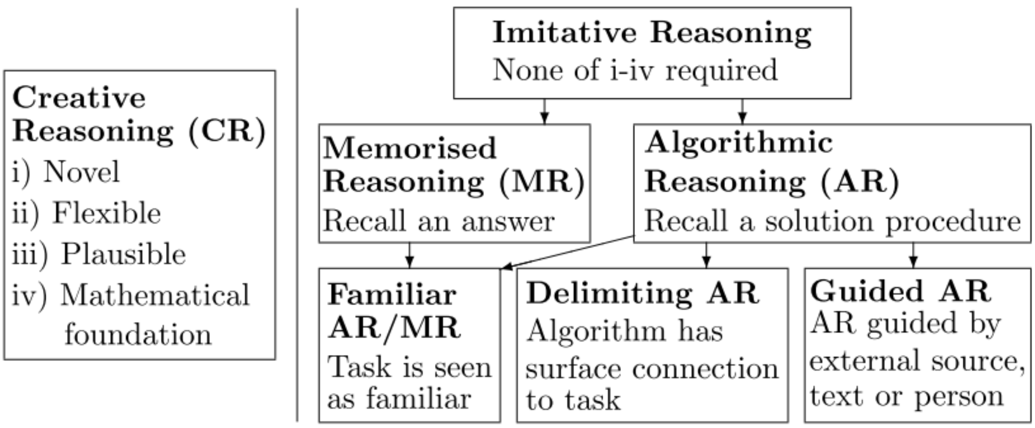
Figur 2 Resonneringsstruktur representert med graf (Lithner, 2008, s.258)

Kunnskap som ikke var tilgjengelig i v_1 blir gjenkalt eller konstruert, for å danne den nye kunnskapstilstand v_2 eller v_3, avhengig av hvilken strategi som er fulgt. I denne nye kunnskapstilstanden er oppgaven delvis løst, og elevene må ta nye valg for hvordan de skal komme seg videre fram mot et mulig svar.

Elevenes metakognitive reguleringsferdigheter vil legge til grunn for strategivalget, og for å bekrefte, eller eventuelt forkaste, mulige konklusjoner (Garofalo & Lester Jr., 1985). Begrunnelse for valg av strategi ligger bak forflytningen fra et hjørne til en annet. Elevene vil alltid ha en form for begrunnelse for strategivalg, selv om begrunnelsen kan være både eller overfladisk (Lithner, 2008).

Evnen til å tenke logisk om sammenhenger mellom begrep og situasjoner er det Kilpatrick er.al. (2002) beskriver som adaptiv resonnering. De påpeker videre at denne resonneringen bør være korrekt, valid og alle mulige alternativer skal være nøye gjennomtenkt. Adaptiv resonnering er også evnen til å kunne argumentere for sine strategivalg og løsninger (Kilpatrick et al., 2001). Adaptiv resonnering er i stor grad det samme som Lithner (2008) kaller kreativ resonnering som forklares nærmere i kapittel 2.5.2. Begge disse begrepene står i kontrast til imitativ resonnering hvor elevene bruker tidligere erfaringer, innlærte algoritmer og rutiner i resonneringen (Lithner, 2008, 2017). Star & Seifert (2006) skriver at en elev som kan flere løsningsprosedyrer og kan skape flere nye prosedyrer er fleksibel, det følger videre at en fleksibel elev har god forståelse av prosedyrene som trengs for å løse et matematisk problem. Kilpatrick et al. (2002) skriver at når en elev får større konseptuell forståelse vil eleven være mer fleksibel når nye problemer skal løses. Men på den andre siden vil eleven bli mindre fleksibel hvis en prosedyre blir automatisk for eleven. Da vil det være vanskeligere for elevene å tenke på andre aspekter av problemet og elevene vil få utfordringer med å løse nye problem.

Lithner (2008) deler resonnering inn i kreativ og imitativ resonnering, se figur 3. I de neste delkapitlene vil de ulike formene for resonnering presenteres.



Figur 3 Struktur av resonnement (Lithner, 2006, s.5)

2.5.1 Imitativ resonnering

Lithner (2008) definerer faktabasert resonnering (rote learning) som imitativ. Faktabasert resonnering er det et viktig aspekt når elever skal lære matematikk fordi det ikke kan forventes av elever at de skal klare forstå og rekonstruere samtlige matematisk ideer (Lithner, 2015). Faktabasert resonnering kan derimot bli problematisk om dette elevenes dominerende strategi for å jobbe i matematikk (Lithner, 2015).

Lithner (2008) beskriver elever som kun bruker tidligere erfaringer, uten å se, for dem, nye sammenhenger når de løser en oppgave, som elever som resonnerer imitativt. Ved å bruke tidligere erfaringer kan elevene kopiere, følge en modell eller et eksempel, uten å tilføre noen form for original tankemåte når de resonnerer (Lithner, 2006). Elever som mener at en oppgave skal løses på en spesiell måte eller ved hjelp av en spesiell algoritme, kan bli hindret av dette, for eksempel ved at første valg av algoritme ikke fører fram allikevel (Bergqvist, Lithner, & Sumpter, 2008).

Det er i hovedsak to kognitive ferdigheter involvert når elever resonnerer imitativt, evnene til å identifisere likheter og til å herme (Lithner, 2008), mens elevenes analytiske og konseptuelle ferdighetene kan være helt fraværende. Elever som resonnerer imitativt fokuserer mer på å bruke kjente algoritmer enn på om løsningsmetoden og svaret er riktig (Lithner, 2006). Hvis oppgavene som elevene skal løse er utformet slik at elevene kan bruke imitativ resonnering så reduseres kompleksiteten i oppgavene til at elevene kun skal huske og gjengi innøvde fakta og algoritmer. Hvis forventningen til elevene kun er at de skal gjengi innlærte algoritmer når de løser oppgaver kan det videre føre til at elevene kun utvikler instrumentell forståelse i matematikk (Skemp, 1976). Skemp (1976) argumenterer at mangel på utvikling av relasjonell forståelse i matematikk kan føre til lærevansker i matematikk, og Lithner (2006, 2015) påpeker at elevers utstrakte bruk av lite effektiv faktabasert imitativ resonnering kan være en medvirkende årsak for elevers lærevansker i matematikk.

Lithner (2008) deler imitativ resonnering i to ulike former for resonnering, memorert resonnering og algoritmisk resonnering.

i. Memorert resonnering.
   Elevens valg av strategi er å gjengi et fullstendig svar (Lithner, 2008).
   Lithner (2008) beskriver videre at implementering av memorert resonnering er at elevene kun skriver ned svaret. Eleven trenger ikke vise forståelse for hvordan oppgaven er løst eller hvordan svaret er funnet (Lithner, 2008).
   Det er viktig å påpeke at denne formen for resonnering også er verdifull i gitte situasjoner, spesielt når elevene skal løse mer komplekse oppgaver. Oppgaver som krever mye tallbehandling blir enklere å jobbe med for elever om de har for eksempel memorert multiplikasjonstabell eller har kontroll på tier-overganger. Hvis elevene ikke innehar denne memorerte kunnskapen så vil også disse delene av matematikken kunne bli til hinder for dem når de skal løse komplekse oppgaver.

ii. Algoritmisk resonnering.
   Elevene bruker en kjent løsningsalgoritme når de skal løse en oppgave, det er ikke nødvendig for elevene å finne nye løsningsstrategier (Lithner, 2008). Det er kun elevenes slurvefeil som gjør at svaret ikke blir rett. Eksempler på algoritmisk resonnering kan være når elever uttrykker at de bruker flytte-bytte-regelen når

de løser likninger. I følge Lithner (2008) så innebærer oppgaver i skolematematikken oftere at elevene skal huske en løsningsalgoritme, heller enn at de skal huske et fullstendig svar. Bruk av en allerede kjent algoritme kan ofte være tidsbesparende og forhindre matematiske feil, i tillegg til at det å bruke en kjent algoritme reduserer bruken av det kognitive arbeidsminnet (Jonsson, Norqvist, Liljekvist, & Lithner, 2014). Hovedutfordringen for elevene vil være å finne en algoritme som passer til oppgaven de skal løse (Lithner, 2008).

Algoritmisk resonnering kan videre deles inn i tre undergrupper:

a) Kjent algoritmisk resonnering (familiar).
   Elevenes strategivalg er baser på at oppgaven virker kjent og kan løses ved bruk av en allerede kjent algoritme.
b) Avgrensende algoritmisk resonnering (delimiting).
   Elevene velger en av mange algoritmer de kjenner til, fordi algoritmen har en viss tilhørighet til oppgaven. Om algoritmen kan løse oppgaven blir ikke vurdert av eleven, og verifisering av svaret er kun basert på elevenes egne forventninger av løsningen.
c) Ledet algoritmisk resonnering (guided).
   Eleven ledes gjennom oppgaven av likheter mellom et kjent eksempel, for eksempel i læreboka, og den oppgaven det arbeides med. Eleven kan også bli ledet gjennom oppgaven av en lærer eller medelev som forklarer steg for steg hvordan oppgaven skal løses, også kalt personledet algoritmisk resonnering. Den kognitive kompleksiteten av oppgaven reduseres for eleven.

Når elever bruker imitert resonnering, memorert eller algebraisk, så vil vanskelige og utfordrende deler ved å løse oppgavene bli ivaretatt av bruk av en allerede kjent algoritme, og bare enkle deler av oppgaveløsningen er igjen for at elevene skal løse dem (Lithner, 2015). Hvordan en oppgave skal løses er gjenkjennbar for elever når de bruker memorert resonnering, mens når elevene bruker algoritmisk resonnering så leter de fram den algoritmen som etter deres oppfatning passer til oppgaven. Ved begge tilfellene er oppgaveløsningen basert på overflate egenskapene til tallene, og er ikke matematisk forankret (Lithner, 2008). Hvis målet er at elevene skal være kreative i oppgaveløsingen sin så må oppgavene legge til rette for at elevene ikke bare kan bruke imitert resonnering.

2.5.2 Kreativ resonnering

Kreativitet i matematikk blir ofte sett på i sammenheng med det å være flink i matematikk og som fundamentalt for profesjonelle matematikere. I skolesammenheng blir det ikke forventet at elever skal oppdage matematikk som er ny på et globalt nivå, forventningen ligger i at elevene skal kunne oppdage matematikk som er ny med respekt for kunnskap de besitter og oppgaver de tidligere har løst (Lithner, 2008, 2015). Kreativitet i matematikk kan defineres som både når tankeprosessen er kreativ og løsriver seg fra faste ideer, eller at selve produktet er kreativt (Haylock, 1997). Lithner (2008) påpeker videre at i matematiske resonnering defineres kreativ som noe som er originalt for den som utfører det, altså er kreativt det motsatte av imitativt. Kreativ tenkning blir nesten alltid sett på som evnen til å tenke fleksibelt og løsrive seg fra faste og innlærte mønster (Haylock, 1997).

For at matematisk resonnering skal være kreativ så må følgende kriteria ligge til grunn (Bergqvist et al., 2008; Lithner, 2008):

i. Resonneringssekvens som eleven bruker for å løse oppgaven er ny for eleven. Her påpekes det at resonneringssekvensen også anses som kreativ om eleven har glemt den og gjenoppdager den.
ii. Ulike løsningsmetoder må kunne brukes til å løse oppgaven.
iii. Argumentene som eleven legger til grunn i resonneringsstrategien sin må være av en slik form at løsningen blir riktig eller plausibel.
iv. Argumentene eleven bruker må være matematisk forankret.

Kreativ resonnering trenger ikke, i motsetning til oppgaveløsning, å være utfordrende. Definisjonene ovenfor inkluderer også resonnering på et elementært nivå, så lenge oppgavene er av en slik art at de er nye for elevene. Lithner (2008) understreker at oppgaver som fremmer kreativ resonnering er formulert slik at de er originale for dem som skal løse dem, selv om løsningene på oppgavene kan være relativt enkle.

Kvaliteten i argumentene som er brukt til å løse en oppgave er bestemt av tre ulike faktorer; validitet, overbevisningsevne og effektivitet (Lithner, 2008). Man bør i tillegg skille mellom et generelt argument og et gyldig resonnement, der det siste vil lede fram til et bevis i matematikk (Duval 2002, i Lithner,2008, side 260). Resonnering, ifølge Lithner (2008), trenger ikke nødvendigvis være strengt logisk, men må være assistert av plausible argument.

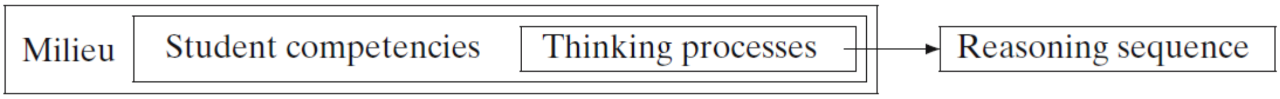
Munandar (1992 sitert i Adawiyah & Muin, 2017, side 249) beskriver at elever som resonnerer kreativt innehar fem ulike karakteristikker:

- Elevene har mange ulike tanker, ideer, spørsmål og forslag til løsninger når de jobber med en oppgave. I tillegg tenker elevene på ulike måter når de tilnærmer seg oppgavene.
- Elevene viser fleksibilitet ved å komme opp med flere ulike svar, ideer og spørsmål. Elevene klarer å se på problemene på mer enn en måte, noe som videre kan føre til at de har mulighet til å endre tilnærmingen sin til problemene underveis.
- Elevene kommer med unike og originale ideer når de løser oppgaver. Når elevene uttrykker seg viser de at de kan tenke annerledes enn det som er vanlig og forventet av dem, og viser evne til å sette sammen opplysninger på en kreativ og ikke-forventet måte.
- Elevene klarer å gå i dybden på problemet og berike produktet. De klarer også å gå i dybden på en interessant ide, eller situasjonen, som dukker opp underveis i løsningsprosessen.
- Elevene klarer selv å evaluerer standarden på løsningen sin og på ulike valg som de tar underveis i prosessen sin.

For at elevene skal kunne resonnere i matematikk er det viktig at læringsmiljøet i klassen, og i matematikk, legger til rette for at dette (Lithner, 2008). Undervisningen må fremme tankeprosesser hos elevene, og disse tankeprosessene må hjelpe elevene til å utvikle resonneringskompetanse slik som beskrevet i dette delkapittelet. I neste delkapittel vil jeg beskrive hvordan læringsmiljøet i klasserommet kan legges til rette for å utvikle den ønskede resonneringskompetansen hos elevene.

2.6 Læringsmiljø

For å undersøke hvilke resonneringsstrategier elever bruker bør man se på læringsmiljøet der resonneringskompetansen er formet (Lithner, 2008). Det



Figur 4 Hvordan resonnering oppstår (Lithner, 2008, s.256)

sosiokulturelle læringsmiljøet i en klasse kan både være med å utvikle og begrense elevenes kompetanse, se figur 3. Elevenes kompetanse fører videre til at forskjellige tanke- prosesser blir aktivert, noe som igjen fører til at elevene utvikler ulike resonnerings-sekvenser som kan brukes i matematikk (Lithner, 2008).

Det er lærerens ansvar å ikke bare planlegge og utforme innholdet av hva elevene skal lære i matematikk, men også for at sosiale relasjoner og normer i klasserommet er av en slik art at de legger til rette for læring hos elevene (Mercer & Hodgkinson, 2008). Klasseromsnormer som vektlegger at elevene skal kunne utvikle seg til å bli intellektuelt autonome i matematikk er de sosiomatematiskenormene i et klasserom (Yackel & Cobb, 1996), det vil for eksempel være forskjell på hva som er en akseptert forklaring og resonnering i matematikk i forhold til andre fag.

Videre vil ikke elever oppføre seg som en homogen gruppe i et klasserom, elevene tar på seg ulike roller. Disse rollene gir seg uttrykk i om elevene tar del i, eller ikke tar del i, klasseromsdiskusjoner (Kazemi & Hintz, 2014; Solomon & Black, 2008). Noen elever former en identitet der de ekskluderer seg selv fra diskusjoner, mens andre elever former en identitet der de er muntlig aktive. Aktive elever kan utformer hypoteser, de spør spørsmål, utforsker og argumenterer, i tillegg til at aktive elever også bruker læreren som en ressurs i større grad enn elever som ikke er aktive (Solomon & Black, 2008). Elevene bør ta del i den interaktive diskusjonen i klasserommet for å utvikle sin egen forståelse og resonneringskompetanse (Yackel & Cobb, 1996). I tillegg kan elevers evner og måloppnåelse ha innvirkning både på hvordan læreren kommuniserer med elevene og hvordan elever forstår sin egen læringssituasjon (Solomon & Black, 2008).

Lærerens oppgave er å legge til rette både for å utvikle det sosiomatematiske-miljøet i klasserommet (Yackel & Cobb, 1996) og for å utforme ulike didaktiske situasjoner. De didaktiske situasjonene må være designet slik at elever kan jobbe med oppgaver og komme fram til svar, uten at læreren blander seg i hvordan elevene jobber med oppgaven eller at læreren kommer med egne løsningsforslag (Lithner, 2008). Elever og lærere kan ha kolliderende syn på hvordan oppgaver skal løses (Brousseau sitert Lithner 2008, s. 271), for eksempel om læreren ønsker at elevene skal utvikle problemløsningsstrategier, mens elevene selv ønsker å få tilgang til algoritmer som løser oppgaver uten større utfordringer. For at elever selv skal konstruere ny kunnskap, er det et poeng at elevene ikke blir guidet gjennom en løsningsoppskrift, hverken av læreren, medelev eller en lærebok. Om eleven ikke klarer å løse problemet på egenhånd, så kan læreren hjelpe ved å oppklare det som hindrer eleven i å løse problemet, ikke ved å tilby hele løsningen (Lithner, 2008).

Når det gjelder norske lærebøker i matematikk, så viser Johnsen og Storaas (2015) sin komparative studie at lærebøkene kan inneholde prosentvis få oppgaver som legger til rette for resonnering, og dertil mange oppgaver uten kontekst som er av en slik art at elever skal følge en løsningsoppskrift. Hvis undervisning er styrt av denne typen lærebøker vil kompleksiteten ved å løse utfordrende oppgaver bli redusert for elevene, noe som igjen kan føre til at elever ikke får utviklet resonneringskompetansen sin (Johnsen & Storaas, 2015). Elever som leter etter algoritmer i en lærebok er sjelden på jakt etter riktig eller enklest måte å løse en oppgave på, men jakter den måten som er mest sannsynlig ut fra deres eget kompetansenivå (Lithner, 2008).

Ved bruk av matematiske samtaler i klasserommet, kan læreren legge til rette for at elever får resonnere matematisk, i tillegg til at læreren vil gjennom samtalene få et unikt innblikk i hvordan elevene resonnerer når de løser ulike oppgaver. I det neste delkapittelet vil jeg beskrive matematiske samtaler.

2.7 Matematiske samtaler

Nathional Council of Teachers of Mathematics, NCTM, (2000) legger vekt på at elever skal kunne løse problem, resonnere, bevise, kommunisere og representere i matematikk. NCTM (2000) har satt følgende standarder for hva elever skal beherske i matematikk:
- organisere og konsolidere hvordan de tenker gjennom kommunikasjon
- kommunisere hvordan de tenker sammenhengende og klart til medelever og lærere
- analysere og evaluere andres matematiske tenking og strategier
- bruke matematisk språk til å uttrykke ideene sine presis

Målene til NCTM legger både til rette for samarbeid mellom elever og for bruk av lærerstyrte matematiske samtaler (NCTM, 2000). Hovedfokus bør være at når elever sammen løser ulike typer problemløsningsoppgaver så får elevene anledning til å tenke kreativt, finne mønster og resonnere logisk, samtidig som de kommuniserer ideene sine (Bray, 2011). Oppgavene som brukes når elevene skal ta del i matematiske samtaler må være utformet slik at elevene får anledning til å være problemløsere, i stedet for regelfølgere (Bray, 2011; Kazemi & Hintz, 2014). Slike anledninger oppmuntrer ofte elever til å løse og resonnere over utfordringer på sin egen måte (Bray, 2011).

Individuell læring viser seg å bli mest effektiv når den skjer i en gruppe der medlemmene i gruppa både har adgang til og blir påvirket av hvordan de andre på gruppa tenker (Maher, 2009). Samarbeidet mellom elever må bestå av mer enn å kopierer løsningen til en medelev uten noen form for begrunnelse (Sidenvall, Lithner, & Jäder, 2015). Elever vil utvikle en dypere forståelse i matematikk når de diskuterer sine matematiske ideer, lytter til andre elevers ulike perspektiv og oppfatninger om hvordan oppgaver skal løses, og generelt ved å delta i situasjoner der den matematiske forståelsen kan øke (Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Chapin, O'Connor, & Anderson, 2009; Kazemi & Hintz, 2014).

Sosial interaksjon fører til at elevene tenker, reflekterer og forbedrer sine egne tankeprosesser (Chapin et al., 2009). Elever må være i stand til å forklare og begrunne hvordan de tenker, i tillegg til at de må kunne forklare hvorfor et matematiske utsagn er sant, eller usant, og hvorfor en matematisk regel virker (NCTM, 2000). Ved å delta i matematiske samtaler, enten i små grupper eller i hel klasse, vil elever og lærere arbeide sammen for å dele, begrunne, sammenligne og utforske ulike strategier for å løse matematiske problem (Bray, 2011; Kazemi & Hintz, 2014). Når elever deltar i matematiske samtaler får de anledning til å reflektere over hvordan de oppfatter ulike problem. Elevene får videre anledning til å tilpasse seg nye ideer, utvikle resonnerings-evnen sin ved å dele, forklare og begrunne ideene sine, i tillegg til at å delta i en matematisk samtale hjelper elever til å bygge sin egen matematiske forståelse (Carpenter et al., 2003). Ny læring og dypere forståelse er resultat av en slik reflekterende tankeprosess.

Samtaler i klasserommet er et viktig didaktisk verktøy for å veilede elever i deres utvikling i matematikk, og for å legge til rette for en felles faglig forståelse for klassen (Mercer & Hodgkinson, 2008). Kvaliteten på klasseromssamtaler bør økes, slik at samtalene ikke ender opp som en serie av informasjon eller at læreres rigide rammer hemmer elevene når de skal delta i samtaler (Mercer & Hodgkinson, 2008; Solomon & Black, 2008). For at matematiske samtaler skal være produktive er det viktig at samtalen har et matematiske mål, og samtalene må bli planlagt av læreren ut fra målet som er satt (Kazemi & Hintz, 2014). Kazemi og Hintz (2014) peker på at en av utfordringene med å lede en produktiv matematisk samtale er å få alle elevene til å delta. I de fleste klasserom er det noen elever som alltid har hånden oppe, og ønsker å delta aktivt i samtaler, da er det lett for de andre elevene å forholde seg passivt eller bli nervøse for å måtte bidra til samtalen. Det er derfor grunnleggende for å holde en produktiv matematisk samtale at elevene vet hva og hvordan de skal dele ideene og resonnementet sine, slik at opplevelsen om at alle har noe viktig å bidra med blir ivaretatt (Kazemi & Hintz, 2014). Læreren må kommunisere til elevene at alle ideer er verdifulle, og at det må være rom for å gjøre feil (Kazemi & Hintz, 2014; Maher, 2009).

Klassemiljøet bør derfor bygges opp slik at alle elevene i en klasse eller gruppe er trygge på hverandre og tør delta i matematiske samtaler, slik at elevene sammen kan utvikle en konseptuell forståelse i matematikk (Bray, 2011). Når elever først får tid til å fundere over hvordan en oppgave skal løses alene, og så samtale med medelever i små grupper, så klarer de å uttrykke ideene sine i tillegg til at de ikke har en følelse om at de må ha riktig løsning (Kazemi & Hintz, 2014). Den sosiale settingen i klasserommet må være slik at et ulike ideer og strategier er verdsatt, at feil blir sett på som anledninger for læring og at korrekthet ligger i det matematiske argument heller enn hos lærer eller lærebok (Bray, 2011).

Jeannotte og Kieran (2017) argumenterer for at elevers matematiske samtaler består både av hva elevene sier, intonasjonen elevene bruker og hvordan elevene uttrykker seg. Videre beskriver Jeannotte og Kieran (2017) at samtalene også består av hva elevene gjør i løpet av samtalen, både gester elevene bruker og de ulike representasjoner elevene lager, og hvordan elevene bruker disse representasjonene til å underbygge argumentene sine. All denne informasjonen kan brukes av læreren til å hjelpe elevene til både å delta i matematisk resonnering og til å hjelpe elevene til å bruke den form for matematiske resonnering som er forventet av dem. Lærere må da ha verktøy som gjør dem i stand til å avgjøre hvilke form for matematisk resonnering elevene bedriver, og, kanskje enda viktigere, lærerne må vite hvilke form for matematiske resonnering de ønsker av elevene sine (Jeannotte & Kieran, 2017).

3 Metode

For å undersøke hva som kjennetegner elevers resonnement når de tar del i matematisk samtaler gjennomførte jeg en kvalitativ studie. Kvalitative studier handler om å innhente informasjon om virkeligheten gjennom ord eller språk (Postholm & Jacobsen, 2018), der virkeligheten blir konstruert av personer som befinner seg i de aktuelle situasjonene (Postholm & Jacobsen, 2018).

3.1 Valg av metode

Tre ulike forhold begrunner metodevalget mitt; min vitenskapsteoretiske posisjon, problemstillingen i studien og ulike praktiske forhold (Mertens, 2014).

Studien min er basert på tanken om at personer aktivt konstruerer sin egen kunnskap innenfor den aktuelle situasjonen de befinner seg i (Guba & Lincoln, 1988; Hatch, 2002). Jeg plasserer meg derfor innenfor *det konstruktivistiske paradigmet*. I tillegg til prinsippet om at virkeligheten blir konstruert av individene og med bakgrunn i individenes oppfattelse av virkeligheten, tar også paradigmet utgangspunkt i at virkeligheten er i stadig endring og utvikling (Hatch, 2002; Postholm & Jacobsen, 2018). Det eksisterer derfor kun en subjektiv virkelighet, og det blir viktig for forskeren å forstå det dynamiske og det unike i situasjonen som blir studert (Postholm & Jacobsen, 2018). Med dette bakteppet er målet til forskere å forstå ulike sosiale konstruksjonene av mening og kunnskap. Postholm & Jacobsen (2018) argumenterer at når man studerer sosiale fenomen så er det umulig å skille forskeren fra objektet som studeres. Dette fører videre til at innenfor det konstruktivistiske paradigmet er det hensiktsmessig å gjennomføre kvalitative studier (Hatch, 2002). Videre bygger kunnskapssynet mitt i denne studien på sosiokulturell teori (Vygotsky, 1978). Teorien bygger på en antagelse om at læring foregår i hovedsak som en sosial kontekst mellom mennesker, og at språket er et sentralt redskap i kommunikasjon (Vygotsky, 1978).

Problemstillingen min var også avgjørende for valg av metode. Jeg ønsket å studere hva som kjennetegner resonnementene til elever når de tar del i matematiske samtaler. For å få best mulig tilgang på elevresonnementene var det viktig at jeg, både i rolle som lærer og forsker, var tilstede under samtalene. Glesne (2016) legger vekt på at forskeren kan velge rollen sin ut fra ulike forhold; situasjonen og hensikten med forskningen, forskerens teoretiske ståsted og forskerens personlighet og verdier. Forskeren kan, når han er tilstede, beskrive det som skjer, og prøve å sette opp handlingene og intensjonene til de som blir studert mot sitt eget perspektiv (Hatch, 2002; Postholm & Jacobsen, 2018). Forskeren, som i denne sammenheng vil opptre i rolle som lærer, vil kunne ta en aktiv del i samtalen ved å stille spørsmål som leder elevene videre mot målet. For å kunne ha fokus på det som skjedde i klasserommet, uten å hele tiden måtte ta notater over hva elevene sa, valgte jeg derfor observasjon kombinert med lydopptak som metode.

Praktiske forhold spilte også inn når det gjaldt valg av metode. Jeg hadde først tenkt å ta videoopptak i tillegg til lyd. Men siden jeg, i rolle både som lærer og forsker, var til stede under opptakene og observerte alt elevene gjorde og diskuterte, så ble det funnet overflødig å ta filmopptak i tillegg til lyd. I tillegg kunne videoopptak ha ført til at elevene oppfattet situasjonen enda mer uvant, og det kunne ført til at de ble forstyrret av opptaket. Jeg kunne også ha intervjuet elevene om deres tanker rundt å resonnere i matematikk, eller jeg kunne intervjuet andre lærere om hvordan deres elever resonnerer i matematikk. Men, for å holde oppgavens omfang nede så valgte jeg å ikke bruke intervju som metode.

En hensikt med kvalitativt forskningsarbeid kan blant annet være å gi andre lærere innspill til egen undervisning. Lærere som leser et forskningsarbeid, skal kunne finne og kjenne igjen elementer fra egen praksis. På denne måten kan deler av et kvalitativt forskningsarbeid tilpasses og overføres til flere klasserom. Lærere kan inspireres og lære av andres forskningsarbeid (Hatch, 2002; Postholm & Jacobsen, 2018).

3.1.1 Casestudie

Postholm & Jacobsen (2018) beskriver casestudier som et forskningsdesign, i og med at casestudier kan utføres ved å bruke ulike metoder. Videre defineres en casestudie som en studie som er avgrenset av tid og sted (Postholm & Jacobsen, 2018) der den unike konteksten spiller en sentral rolle. Studien min er avgrenset i tid fordi elevene brukte en skoletime til å diskutere, og studien er avgrenset i sted fordi jeg studere det som skjer i grupperommet der elevene gjennomfører samtalen.

Studien min omfatter seks elever fra samme klasse, dette er derfor en enkeltcasestudie. Målsettingen for studien er å presentere en grundig forståelse for den enkelte casen som jeg studerer (Creswell, 2015). En enkeltcasestudie gir en lokal kunnskap, avgrenset til de elevene som studeres og hvordan akkurat de utvalgte elevene samhandler (Postholm & Jacobsen, 2018). Elevene som studeres i prosjektet mitt er «typiske» elever på 8.trinn, utvalget av elever blir beskrevet i delkapittel 3.2.
Oppgavene som danner grunnlaget for de matematiske samtalene elevene holder er tilgjengelige for alle, og bruk av matematiske samtaler i matematikkundervisningen er en kjent metode. Derfor vil jeg argumentere for at prosjektet mitt også har ekstern gyldighet, der både gjennomførelsen, og resultat kan overføres til andre caser.

3.2 Utvalg

Jeg valgte å bruke mine egne elever i forskningsprosjektet mitt. Valget er begrunnet i at jeg ønsket at settingen skulle være så naturlig som mulig for elevene (Hatch, 2002) slik at elevene skulle bli minst mulig påvirket av at det var en forsker til stede i klasserommet. En ukjent person i et klasserom kan føre til at elever oppfører seg annerledes enn de ville gjort med bare kjente personer tilstede (Hatch, 2002). Eller så kan tilstedeværelsen av en ukjent person i et klasserom føre til at elevene blir usikre når det gjelder å ytre seg muntlig og diskuterer oppgaver (Hatch, 2002). Som forsker måtte jeg ha anledning til både å observere samspillet mellom elevene, lytte til hvordan elevene resonnerte matematisk når de kommuniserte sammen og i tillegg kunne stille oppklarende spørsmål og hjelpe elevene videre om de sto fast. Elevene var vant til at jeg var tilstede i matematikktimene i rollen som lærer, og elevene var vant til at jeg har en aktiv rolle i klasserommet. Derfor ble observasjonene av elevene foretatt i en naturlig setting for elevene, selv om rollen min var skiftet fra lærer til forsker.

Elevene som tok del i forskningsprosjektet gikk i 8.klasse skoleåret 2019/2020. I løpet av høsten 2019 hadde elevene i klassen deltatt i matematiske samtaler flere ganger, både i hel klasse og i små grupper. I undervisningen var det blitt vektlagt at elevene skulle, muntlig, forklare hverandre hvordan de løste oppgaver, og elevene øvet seg på å begrunne matematiske valg de tok underveis i løsningsprosessen. Fra høsten 2020, når elevene starter i 9.klasse, skal de følge LK20, derfor har klassen fulgt kompetansemålene fra LK20 også i 8.klasse. Det betyr at hovedfokus høsten 2019 har vært på emnet tall og algebra. Klassen har brukt problemløsningsoppgaver som utgangspunkt i flere timer høsten 2019.

Jeg valgt å studere to fokusgrupper, hver gruppe bestående av tre elever. Fokusgrupper defineres av Hatch (2002) til å bestå av elever som har lignende karakteristikker. Elevene til fokusgruppene ble kun valgt ut fra elevene der foresatte hadde skrevet under på samtykkeskjema. Samtykkeskjema ble levert hjem til elever og foresatte i god tid før gjennomføringen av samtalene. Karakteristikkene jeg vektla når jeg valgte elever til fokusgruppene var om elevene er muntlig aktiv i timene, at elevene klarer å sette ord på det de tenker og at de liker å samarbeide.

Gruppene ble i tillegg delt inn slik at de ble homogene, der den ene gruppa besto av elever som oppnådde nivå 4 eller 5 på den nasjonale prøven i regning for 8.trinn, og den andre gruppa besto av elever som oppnådde nivå 2 eller 3 på den nasjonale prøven i regning. Jeg valgte å dele de to gruppene etter nivå slik at samtalene forhåpentligvis skulle bli mer jevnbyrdige, og at argumentene skulle baseres på matematikk og ikke sosial status (Yackel & Cobb, 1996). I en klasse observerer jeg ofte at elever som tror at andre elever er såkalt flinke i matematikk, ikke tør å forklare hvordan de selv tenker i fare for å framstå som om mindre flinke (Yackel & Cobb, 1996). I samtalene ønsket jeg at alle elevene skulle delta, ikke at de skulle lytte og si seg enig med den eleven de selv trodde var den flinke.

3.3 Observasjon som metode

Ulike datainnsamlingsstrategier som bruker ord for å beskrive og forstå menneskers handlinger og til å skape mening av det mennesker gjør i deres naturlige kontekst brukes til å samle inn data i casestudier (Postholm & Jacobsen, 2018). Metodene kan for eksempel være observasjon eller intervju (Hatch, 2002; Postholm & Jacobsen, 2018).

Målet med studien min er å få innsikt i hva som kjennetegner elevenes matematiske resonnement når de diskuterte ulike oppgaver. Derfor var det hensiktsmessig for min forskning å observere elevene mens de matematiske samtalene fant sted, ikke intervjue elevene i etterkant av matematikkøkta om hvordan de selv oppfattet at de resonnerte. Jeg valgte derfor å bruke observasjon som metode. Observasjon er ikke en metode som er tilstrekkelig om det brukes alene (Guba & Lincoln, 1988), fordi forskeren med sine antagelser og sin subjektivitet tolker og analyserer det som blir observert. Derfor valgte jeg å ta lydopptak av samtalene elevene holdt, i tillegg til å ta feltnotater.

Nivået av deltagelse som observatøren tar under forskningen er et nøkkelpunkt i kvalitativ forskning (Hatch, 2002). Gold (1958) beskriver fire observatør roller. Disse rollene plasseres i to ulike dimensjoner, nemlig grad av avstand til det/de som studeres og forskerens grad av deltagelse i forskningssituasjonen.

		Forskerens deltagelse	
		Liten	**Stor**
Forskerens avstand	**Liten**	Observerende deltager	Fullstendig deltager
	Stor	Fullstendig observatør	Deltagende observatør

Tabell 1 Ulike observatørroller (Postholm & Jacobsen, 2018, s.115)

Jeg utførte studien min med egne elever, mens jeg selv hadde timen. Det betyr at avstanden mellom meg som forsker og deltagerne var liten. I tillegg ønsket jeg både at elevene mine kunne henvende seg til meg om det var noe de lurte på, og at jeg selv kunne spørre utdypende spørsmål underveis i økta for å hjelpe dem videre i resonnementene sine. Det førte derfor til at deltagelsen min som forsker var stor. Lærere som observerer egen undervisning er derfor fullstendig deltagere (Postholm & Jacobsen, 2018).

Jeg observerte samtalene elevene holdt, men det var utfordrende å få med seg alt som skjedde når man observerer samtidig som man er fullstendig deltager. Derfor tok jeg i tillegg lydopptak av samtalene, observasjonsnotater underveis, og noterte ned inntrykkene jeg satt igjen med etter at observasjonsøkten var ferdig. Notatene jeg tok fra observasjonene og lydopptakene av samtalene ble også brukt i analysen.

Postholm & Jacobsen (2018) påpeker at analyseprosessen starter når forskeren ankommer forskningsfeltet og ikke først etter datainnsamlingen er ferdig. Forskere søker svar på et spesifikt interessefelt, og bruker derfor tid på å observere hendelser og utsagn som er av interesse for forskningen (Hatch, 2002). For å svare på forskningsspørsmålet mitt «Hva kjennetegner elevers muntlige resonneringer i matematikk når de diskuterer problemløsningsoppgaver i små grupper?» var jeg interessert i hvordan elevene diskuterte oppgavene, hvordan de resonnerte seg fram til svar, hvordan de lyttet til hverandre og hvordan de responderte hverandre. Notatene jeg tok underveis dreier seg derfor om hvordan elevene samhandlet, hva de ytret og om tenkepauser de tok.

Hatch (2002) påpeker at observasjon skal bli utført i en situasjon som er så naturlig som mulig for elevene. For elever er det naturlig at læreren er tilstede i timene. Det er også naturlig for elevene at de kan henvende seg til læreren når de jobber med oppgaver, og det er naturlig for elevene at læreren henvender seg til dem underveis i en økt. Siden jeg er matematikklærer i klassen var elevene i fokusgruppene komfortable med å diskutere matematikk både sammen med meg, og mens jeg hørte på. Det vil på dette viset være et samarbeidsforhold mellom forskeren, i dette tilfellet læreren, og elevene som står i fokus for forskningen (Guba & Lincoln, 1988). Rollen min, som observatør, forsker og lærer, hadde jeg avklart med elevene mine på forhånd. Allikevel så kan en situasjon med lydopptak, der elevene vet at det de sier skal bli brukt i et forskningsprosjekt, føre til at elevene ikke oppfatter settingen som helt naturlig og dette kan videre lede til at elevene blir preget av denne litt unaturlige settingen (Hatch, 2002; Postholm & Jacobsen, 2018). En av utfordringene i løpet av observasjonene var derfor å være bevisst når man opptrer som lærer og når man opptrer som forsker. Denne utfordringen vil jeg diskutere videre under etiske betraktninger.

Transkripsjonene av lydopptakene samkjørte jeg med notatene jeg tok underveis, slik at jeg fikk et grundigere materiale til å bruke i analysen min. Transkripsjonsprosessen kan allikevel ikke sees på som helt separat fra analyseprosessen, Riessman (2008) hevder at forskeren analyserer hele tiden, og at dype analyser også foregår under transkripsjon.

3.4 Empiri

Lydopptakene, med dialogen som elevene holdt da de diskuterte oppgavene, danner grunnlaget for empirien brukt i studien min. For den samlede empirien brukte jeg også egne notater, både feltnotatene jeg tok underveis mens samtalene pågikk, og dem jeg tok i etterkant av samtalene.

3.4.1 Forberedelse til datainnsamling

Ulike faktorer måtte tas hensyn til for å sikre at data som ble samlet inn ville gjøre det mulig for meg å svare på problemstillingen min «Hva kjennetegner elevers muntlige resonneringer i matematikk når de diskuterer problemløsningsoppgaver i små grupper».

Prosjektet har som formål å få fram kunnskap om hva som kjennetegner elevers muntlige resonnement når de tar del i matematiske samtaler. I teorikapittelet diskuterte jeg ulike former for resonnering, der resonneringen deles inn i to hovedgrupper, imitativ og kreativ resonnering (Lithner, 2008). I tillegg presenterte jeg fire ulike steg i resonneringssekvensen (Lithner, 2008). Hvordan elevene resonnerer vil være avhengig av oppgaven og interaksjonene mellom elevene. Ofte vil elevene bruke flere ulike former for resonnement når de løser en oppgave, eller i et enkelt argument. Oppgavene som ble brukt i diskusjonene skulle bidra til å lokke fram ulike elevresonnement. Valg av oppgaver blir diskutert nærmere i delkapittel 3.4.3.

Av erfaring vet jeg at elever av og til ikke kommer videre når de skal løse problemløsningsoppgaver, jeg hadde derfor forberedt en rekke spørsmål som kunne lede elevene videre i resonnementene sine. Spørsmålene jeg hadde forberedt var åpne, og basert på ulike utfordringer jeg hadde sett for meg at elevene kunne støte på underveis. Til den andre samtalen reviderte jeg spørsmålene mine med bakgrunn i hvordan den første samtalen hadde forløpt.

Utvalget av elever som skulle studeres måtte også tenkes nøye igjennom. Elevene måtte være muntlig aktive og ikke være redd for å ta del i en matematisk samtale. Grunnlaget for hvilke elever som ble valgt til å være med i prosjektet er beskrevet i delkapittel 3.2.

3.4.2 Gjennomføring av datainnsamling

To undervisningsøkter á 60 minutter, en økt til hver av gruppene, ble brukt til å samle inn data. De matematiske samtalene ble gjennomført i uke 49 og 50, 2019. Den ene gruppa av elever gjennomførte sin samtale i uke 49, og den andre gruppen i uke 50. Elevene, som gjennomførte samtalen sin i uke 50, hadde en matematikktime mer i full klasse før samtalen enn den første gruppa hadde hatt. Den andre gruppen kunne derfor ha tilegnet seg kunnskap i løpet av matematikktimen som de kunne tatt med inn i samtalene. Allikevel velger jeg å anta at begge gruppene hadde samme utgangspunkt før sine respektive matematiske samtaler.

Samtalene ble gjennomført på grupperom, der kun de tre elevene i fokusgruppene og jeg, i rollen som lærer, var til stede. Samtalene kunne dermed holdes helt uten forstyrrelser fra de andre elevene i klassen fordi de hadde ikke anledning til å komme inn på grupperommet i løpet av timen. Med 60 minutter til rådighet visste også elevene i fokusgruppene at de hadde god tid til å diskuterer oppgavene og at de derfor kunne bruke den tiden de trengte til å tenke, diskutere og bli enige om svar og løsninger. Før samtalen startet informerte jeg elevene om at jeg var tilstede for dem i rollen som lærer, noe som betydde at jeg kunne stille oppfølgende og oppklarende spørsmål underveis, og at de kunne henvende seg til meg om det var noe de trengte bekreftelse eller oppklaring til. I tillegg presiserte jeg at samtalen var del av et forskningsprosjekt, derfor ville det bli tatt lydopptak av samtalen og jeg kom til å ta noen notater underveis.

3.4.3 Oppgavene

Oppgavene jeg brukte i dette prosjektet måtte møtte ulike kriteria. For det første måtte det være mulig for meg å svare på problemstillingen min etter at elevene hadde diskutert oppgavene. For det andre måtte det være oppgaver som alle elevene hadde mulighet til løse på sitt nivå. Videre måtte oppgavene være av en slik utforming at de kunne bidra til at elevene skulle resonnere kreativt. Til slutt ønsket jeg også at oppgavene skulle være utformet slik at elevene kunne bruke ulike strategier for å komme fram til svaret, altså at det ikke var innlysende for elevene hvilken/hvilke løsningsstrategi som var mest hensiktsmessig.

Helenius (2006) har studert lærebøker for å finne oppgaver som støtter elevers progresjon når det gjelder å resonnerer matematisk, han har kun funnet oppgaver som ikke endrer karakter, men der progresjonene går ut på at elevene skal vise at de behersker å regne med andre eller større tall. Jeg valgte derfor å hente oppgaver fra mattelist.no (Matematikksenteret, 2018). Mattelistoppgaver defineres som oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde. Lav inngangsterskel viser til at oppgavene er designet slik at de skal være lette å komme i gang med for de fleste elevene, og det vil være ulike strategier som kan brukes for å starte på oppgavene. Samtidig skal oppgavene være utformet med stor takhøyde, nemlig med muligheter for å jobbe med oppgavene på et høyt matematisk nivå ved å utvide oppgaven med andre tall og generalisere. Schoenfeld (2014) argumentere at ofte blir oppgaver som er ment til å fremme kreativ resonnering redusert i kompleksitet fordi læreren tar en aktiv rolle i problemløsningsprosessen og guider elevene gjennom utfordringer. Som lærer måtte jeg være bevisst på dette i løpet av gjennomførelsen av de matematiske samtalene.

Jeg valgte å bruke to oppgaver. Oppgavene er ikke avhengige av hverandre, slik at om elevene ikke klarte å løse den første oppgaven så kunne de likevel løse den andre oppgaven. Begge oppgavene omhandler emnet tall og algebra, derfor hadde jeg den oppfatning at elevene i fokusgruppene burde ha et godt utgangspunkt for å diskutere seg fram til løsninger på oppgavene.

Studien min omhandler hvordan elever resonnerer i matematikk når de tar del i matematiske samtaler. Når elever samarbeider muntlig i små grupper så må de diskutere matematikk. Et resonnement kan gjerne begynne som en gjetning eller med noe som elevene kjenner igjen (Lithner, 2008) Med bakgrunn i startstrategien må elevene tenke, gjerne høyt eller hver for seg. Videre må elevene forsøke å overbevise både seg selv og medelever om at de har resonnert riktig. Oppgavene jeg valgte var designet slik at alle elevene kunne starte på dem med en mer eller mindre kvalifisert gjetning og derfra kunne gruppa diskutere og resonnerer seg fram til en løsning. I tillegg til at det var mulig å løse oppgavene på ulike måter, slik at elevene må komme fram til hva som kan være mest hensiktsmessig.

Den første oppgaven jeg presenterte for elevene mine var oppgaven om Blomsterselgeren Rose og oppgaven elevene fikk etter at de hadde løst denne oppgaven var Handlevogner. Begge oppgavene passer inn i definisjonen av en problemløsningsoppgave, se delkapittel 3.2. Oppgavene jeg har valgt er designet slik at elevene ikke på forhånd vet hvordan de skal starte på oppgaven eller komme videre i løsningsprosessen, fordi elevene ikke kan bruke en kjent løsningsmetode (Boesen, 2006; Leer, 2009).

Oppgave 1:

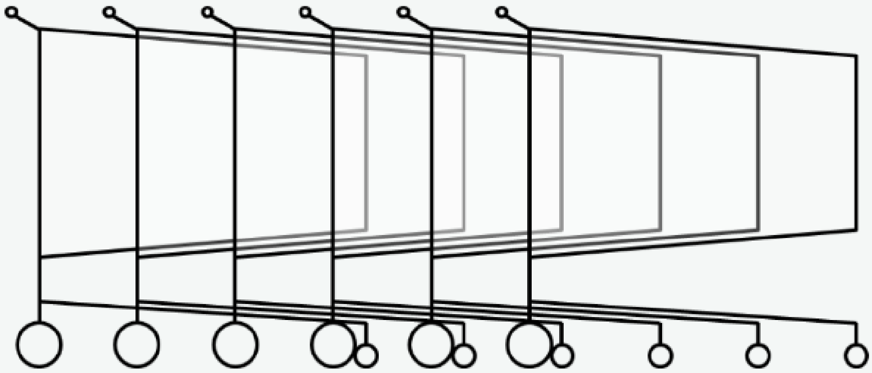
Figur 5 Blomsterselgeren Rose (mattelist.no)

Oppgave 2:

Handlevogner

På et supermarked er det to rekker med handlevogner som er kjørt tett sammen slik som på figuren. Den første rekken har 10 vogner og er 2,9 m lang. Den andre rekken har 20 vogner og er 4,9 m lang.

Hvor lang er en handlevogn? Gi svaret i meter.



Kan du finne ut:

- Hvor lang vil en rekke med 5, 15, 50 eller *n* vogner være?
- Hvor mange handlevogner vil det være plass til i en rekke på 8 meter, 10 meter, eller *n* meter?

Figur 6 Handlevogner (mattelist.no)

På mattelist.no er oppgaven om Blomsterselgeren Rose definert som vanskegrad 2, mens oppgaven med Handlevogner er definert som vanskegrad 1. Jeg er litt uenig i denne graderingen, siden oppgaven om Handlevogner er en oppgave der det er flere faktorer å ta hensyn til. Denne oppgaven fører også fram til en generell formel. Noe som oppgaven med blomstene ikke gjør. Elevene mine fikk derfor først presentert oppgaven om Blomsterselger Rose. Når de hadde løst denne oppgaven, og var fornøyde med svaret så fikk de utdelt oppgaven om Handlevognene. Begge oppgavene fikk de utdelt i papirform, slik at de kunne lese oppgaven så mange ganger som de trengte.

Jeg valgte å gi elevene en oppgave om gangen, slik at de kunne konsentrere seg om den enkelte oppgaven, uten å tenke på den andre. Elevene visste, som tidligere nevnt, at de hadde god tid til å gjennomføre samtalen.

3.5 Analyse og analyseverktøy

På bakgrunn av at jeg forholder meg en subjektiv virkelighet, så er det viktig at jeg som forsker er bevisst på subjektiviteten min og de ulike forforståelsene jeg tar med inn i forskningen min (Nilssen, 2012). Jeg vil komme tilbake til bevisstheten rundt perspektivet i drøftingen om etiske forholdsregler.

Postholm & Jacobsen (2018) hevder at analysen starter med en gang forskeren er på forskningsfeltet. Den første forståelsen som forskeren får på feltet får betydning for hva oppmerksomheten rettes videre mot i observasjoner, og hvilke videre spørsmål som stilles. Når jeg tok notater under samtalene så ble notatene speilet av den tolkningen jeg bevisst, eller ubevisst, gjorde av samtalene elevene holdt og hva jeg til enhver tid fokuserte på. Transkripsjoner vil dermed aldri bli helt nøyaktige (Nilssen, 2012).

3.5.1 Transkribering og etterarbeid

Datamaterialet mitt baserer seg på to undervisningsøkter, som det ble gjort lydopptak av, og feltnotater. Opptakene transkriberte jeg selv. Tholander og Cekaite (2015 sitert i Postholm & Jacobsen 2018, side 164) mener at det er viktig at forskeren selv transkriberer opptakene, slik at forskeren kan lytte til opptakene flere ganger, og dermed gjøre nye oppdagelser og analyser. Forskeren skal forstå hva deltagerne sier, ikke spekulere i hva som foregikk mellom deltagerne. Forskeren skal heller ikke vurdere det som deltagerne sier opp mot virkeligheten, ei heller skal forskeren være moralistisk når han transkriberer (Tholander & Cekaite, 2015 sitert i Postholm og Jacobsen, 2018). Det var derfor viktig at jeg forholdt meg til det elevene uttalte når jeg transkriberte, i stedet for å tolke hva de kanskje mente med de ulike utsagnene sine.

Postholm & Jacobsen (2018) argumenterer at om en forsker har erfaring i feltet han forsker på, så vil han få innsikt i det som studeres raskere enn en som ikke har erfaring. Jeg er matematikklærer, og har jobbet som lærer i over 25 år, og jeg har vurdert mange hundre elever i løpet av disse årene. Jeg trakk derfor slutninger når jeg analyserte de matematiske samtalene som elevene holdt, som en forsker uten denne erfaringen ikke hadde kunnet trekke. Det vil for eksempel være enklere for meg å forstå elevers usammenhengende og upresise resonnement, slik at jeg kan stille oppfølgende spørsmål som får elevene til å utvikle et mer presist resonnement. På den annen side så var jeg i rollen som lærer på hjemmebane, og jeg måtte være spesielt oppmerksom på å skille rollene som forsker og lærer. Bruk av teori vil være spesielt viktig for å gjøre det kjente fremmed slik at det kan oppdages og forstås.

De to matematikkøktene lå i etterfølgende uker derfor ble, på grunn av liten tid, ikke lydopptaket fra den første samtalen transkribert før den andre samtalen ble gjennomført. Allikevel vil analyse som ble gjort både bevisst og ubevisst under første samtalen, og feltnotatene jeg tok, føre til at jeg kan ha respondert elevene av litt ulik karakter i de to samtalene.

3.5.2 Analysemetode

Etter datamaterialet var transkribert, skrev jeg det ut for å få en bedre oversikt til analysen. Ved analysen av samtalene har jeg brukt en konstant komparativ metode. Som beskrevet i Robson og McCartan (2016 s.163) er åpen koding, der kategorier for å sortere resultatene blir forsøkt utviklet, den første delen av analyseprosessen. Studiens forskningsspørsmål dreier seg om hva som kjennetegner elevenes resonnement når de deltar i matematiske samtaler, og jeg hadde som forsker fokus på resonnementene til elevene. Jeg startet med å tolke og beskrive de ulike resonnementene. Jeg skrev også ned ulike tanker og tolkninger som jeg fikk underveis.

Elevresultatene lot seg vanskelig sortere inn i rene imitative eller kreative resonneringsstrategier slik Lithner (2008) kategoriserer matematisk resonnering. Jeg forsøkte derfor å endre analysestrategi til en abduktiv tilnærming der jeg brukte teorien i samspill med empirien for å utvikle kategorier som jeg bedre kunne analysere dataene etter (Alvesson & Sköldberg, 2009). I arbeidet med å utvikle kategoriene til å analysere empirien brukte jeg Lithner (2008) sin teori om imitativ og kreativ resonnering som bakteppe. Kommunikasjonen av resultatene lot seg vanskelig gjøre med disse nyutviklede kategoriene, jeg gikk derfor tilbake til den opprinnelige organiseringen med å sortere inn under imitativ og kreativ resonnering (Lithner, 2008) selv om denne modellen ikke var helt optimal.

Den neste fasen i analyseprosessen er aksial koding (Postholm & Jacobsen, 2018; Robson & McCartan, 2016), her blir datamaterialet videre systematisert og forenklet. I denne fasen ble sentrale fenomen identifisert, spesielt med tanke på hva som utløste og kjennetegnet de ulike elevresonnementene og hvordan skiftene mellom de ulike resonneringsstrategiene oppsto. For å formidle funnene mest mulig oversiktlig har jeg valgt å først presentere resultatene jeg anser som imitative, etterfulgt av resultat jeg anser som kreative.

Til slutt gjennomførte jeg en selektiv koding (Postholm & Jacobsen, 2018; Robson & McCartan, 2016) der de ulike funnene ble relatert til hverandre og forskningen satt sammen til en helhet. Denne sammenbindingen av de ulike kategoriene gav meg kjernen i studien, og gjorde meg i stand til å svare på forskningsspørsmålet mitt.

3.6 Gyldighet og pålitelighet ved oppgaven

Robson og McCartan (2016) påpeker at forskeren alltid må være bevisst gyldighet og pålitelighet i en studie og må derfor adresseres når kvaliteten av en studie skal vurderes. Ulike valg forskeren tar underveis i studien vil ha innvirkning både på gyldigheten og på påliteligheten til oppgaven.

Gyldighet slik Postholm & Jacobsen (2018) omtaler det, omhandler hvor gyldige dataene, funnene og resultatene er. Ved å diskutere den indre gyldigheten (Postholm & Jacobsen, 2018) så må man se på samsvar mellom teoriene og virkeligheten som studeres, i tillegg til å ta høyde for om det er mulig å se på årsak og virkning. Jeg vil derfor argumentere for bakgrunnen for funnene underveis ved å vise data og tolkningen av dem. Ved å gjøre rede for valg jeg har tatt og konsekvensene av dem, drøfter jeg den indre gyldigheten. Jeg har i dette metodekapittelet gjort rede for metodiske valg, og i analyse- og drøftingskapitlene vil jeg begrunne hvorfor funnene mine er relevante for å besvare forskningsspørsmålet mitt.

Forskning representerer kun et utsnitt av virkeligheten (Postholm & Jacobsen, 2018), og det vil være med å definerer gyldigheten til forskningen. Videre vil forskning på elever også være kun et utvalg av mange elever som det er interessant å undersøke. Forskningen er også basert på frivillighet, i mitt prosjekt inngikk kun de elevene der foresatte hadde gitt sitt samtykke til å være med på studien. I tillegg var jeg avhengig av at elevene leverte samtykkeskjemaet både hjemme og tilbake til meg. Her kan elever ha latt være å leverer, selv om de foresatte hadde skrevet under. Postholm og Jacobsen

(2018) påpeker at dette leder til viktige spørsmål: Hvem ønsker å delta i forskningen? Og hvem ønsker ikke å delta? Som igjen vil gjenspeile seg i gyldigheten i oppgaven.

Når det kommer til påliteligheten (reliabilitet) i studien, er det funnene og resultatenes pålitelighet som bør drøftes (Postholm & Jacobsen, 2018). Pålitelighet kan aldri fullstendig garanteres, fordi det er vanskelig å replikere møtet mellom forsker, forskningsfelt og de som deltar i studien. Ulike forskere tar med seg sin egen subjektive og individuelle teori inn i forskningen, og alle mennesker er i utvikling til enhver tid, både forskere og deltagere i en studie (Postholm & Jacobsen, 2018). Jeg har derfor reflektert over min egen påvirkning og jeg vil gjøre forskningsprosessen så gjennomsiktig som mulig slik at andre kan reflektere over den. Dette har jeg blant annet gjort ved at overførbarheten av studien min framkommer her i metodekapittelet, siden jeg har diskutert og gjort rede for metodiske valg.

3.7 Etiske betraktinger og metodekritikk

3.7.1 Etiske betraktninger

All forskning bør følge de veiledende forskningsetiske retningslinjene (NESH, 2016). NESH er en norsk komité som har utarbeidet ulike retningslinjer i henhold til de etiske kravene som oppstår mellom forsker og forskningsdeltaker som denne studien er i samsvar med. Retningslinjene skal fremme god vitenskapelig praksis, forebygge vitenskapelig uredelighet og retningslinjene er begrunnet i vitenskapelig allmennmoral. Forskningsetikken er basert både på akademisk frihet og at forskeren har evne til selvregulering.

I dette prosjektet jobber jeg med ungdom, og da er det viktig at deres behov og interesser blir ivaretatt (NESH, 2016, s. 20). Jeg jobber til daglig med ungdom, og har derfor kunnskap om denne aldersgruppen slik at jeg kunne tilpasse forskning til et aldersadekvat nivå når jeg gjennomførte observasjon av matematiske samtaler.

Studien hadde i forkant av datainnsamlingsprosessen blitt godkjent av NSD, Norsk Senter for Forskningsdata. Elevene og deres foresatte ble gjennom et informasjonsskriv, informert om prosjektet i henhold til NSDs retningslinjer (se vedlegg). Informasjonsskrivet ble delt ut i klassen flere uker før datainnsamlingen. Kontaktinformasjon min ble gitt med beskjed om at jeg kunne kontaktes for videre spørsmål. Samtykke til observasjon og bruk av lydopptak ble gitt ved innlevering av skrivet. Elever som ikke leverte signert samtykkeskjema, ble ikke plukket ut til å være del av fokusgruppene. Elevene ble informert nok en gang om muligheten til å trekke seg fra studien før de matematiske samtalene ble gjennomført. Raskt etter at observasjonen ble gjennomført, ble alle forskningsdeltakere anonymisert og gitt fiktive navn, og i henhold til NSD ble datamateriale anonymisert og arkivert uten personopplysninger etter studiens slutt.

3.7.2 Metodekritikk

Jeg valgte å ta lydopptak av samtalene, dette betyr at jeg kan ha gått glipp av non-verbal kommunikasjon som jeg kunne fått tilgang til ved å ta video-opptak. Siden jeg selv var tilstede under samtalene, skrev feltnotater underveis og refleksjonsnotater etter samtalene så mener jeg at jeg allikevel klarte å fange opp noe av denne kommunikasjonen.

Jeg var selv tilstede under samtalene i form som elevenes lærer, i tillegg er jeg denne studiens forsker. Dobbeltrollen som jeg her hadde kan ha hatt innvirkning på hvordan jeg opptrådde som lærer under de matematiske samtalene. Spørsmål og kommentarer til elevene underveis i samtalen kan ha blitt speilet av at jeg, i rollen som forsker, analyserte det elevene diskuterte. For å unngå dobbeltrollen som lærere og forsker kunne jeg jobbet med en annen lærer slik at jeg kun fikk rollen som forsker. Jeg kunne også fått en annen lærer til å høre gjennom lydopptak eller jeg kunne satt bort transkribering, det ville styrket dataene.

Studien baserer seg på observasjon av to matematiske samtaler med to ulike fokusgrupper. Hadde studiens omfang vært større så ville jeg fått et større datagrunnlag til å analysere, eventuelt flere elever eller andre typer oppgaver. Hadde jeg studert flere elever, kunne jeg med større sikkerhet ha generalisert hvordan elever på 8.trinn resonnerer. Hadde jeg latt de samme elevene resonnere over ulike oppgaver over lenger tid kunne jeg sett på om elevenes resonneringsevne utviklet seg over tid. På grunn av studiens omfang, og utfordringer med å låne opptaksutstyr ble ikke dette gjort.

En kvalitativ studie blir påvirket av de som deltar, og derfor av meg som forsker. Jeg valgte ut de delene som var av interesse og relevans for å besvare forskningsspørsmålet. Utvelgelsene mine, og tolkningene er farget av erfaringene mine som lærer og av den teoretiske bakgrunnen min som forsker. Det kan ha ført til at andre interessante deler av de matematiske samtalene elevene holdt kan ha blitt oversett. Som forsker er det derfor viktig for meg å se på datamaterialet fra flere ulike synsvinkler, og å være så åpen som mulig for det det forskes på (Postholm & Jacobsen, 2018)

4 Resultat og analyse

I dette kapittelet presenterer og analyserer jeg ulike utdrag fra de matematiske samtalene mellom elevene. Gjennom analysen av utdragene forsøker jeg å danne et grunnlag som kan bidra til å besvare studiens forskningsspørsmål: «Hva kjennetegner elever på 8.trinn sine muntlige resonneringer i matematikk når de diskuterer problemløsningsoppgaver i små grupper?».

Sekvensene jeg har brukt i analysen er kun utdrag fra de fullstendige diskusjonene elevene holdt når de jobbet med problemløsningsoppgavene. Linjene er derfor nummerert i forhold til den opprinnelige samtalen mellom elevene. Samtalene til begge gruppene startet med at en av elevene på gruppa leste oppgaven om Blomsterselgeren Rose høyt for de to andre elevene. Opplesing av oppgaven om Blomsterselgeren Rose har dermed blitt nummerert som linje 1 for begge gruppene. Elevene på begge gruppene diskuterte oppgaven om Blomsterselgeren Rose ferdig og resonnerte seg fram til et samlet svar, før de startet på oppgaven om Handlevogner. Resonnementet om Handlevogner starter derfor på ulikt linjenummer for de to gruppene.

For å tydeliggjøre hvilken oppgave og gruppe de ulike utdragene er hentet fra har jeg gitt de to gruppene kodene G1 og G2, oppgaven om Blomsterselgeren Rose koden B og oppgaven om Handlevogner koden H. For hvert nytt utdrag som presenteres nummereres sekvensen påfølgende, slik at G1.H1 betyr det første utdraget som er hentet fra gruppe 1 sin diskusjon om Handlevogner, og videre vil G1.H6 være det sjette utdraget fra gruppe 1 sin diskusjon om Handlevogner. Utdragene er ikke nødvendigvis plassert i kronologisk rekkefølge slik de framkom i samtalene fordi de er plassert etter hvordan elevene resonnerte i forhold til Lithner (2008) sitt rammeverk om imitativ og kreativ resonnering.

Transkripsjonskoder:

[…] – deler av samtalen er utelatt fordi, jeg mener, den hverken har betydning for samtalen elevene i mellom eller for analysen

( ) - marker utfyllende kommentarer

… - kort pause, kun få sekunder

I analysene av hvilke resoneringsstrategiene elevene brukte framtrer de to kategoriene, imitativ og kreativ resonnering, fra Lithner (2008) tydelig. I analysene av hva som hindret elevenes resonnement står resonneringssekvensen til Lithner (2008) sentralt.

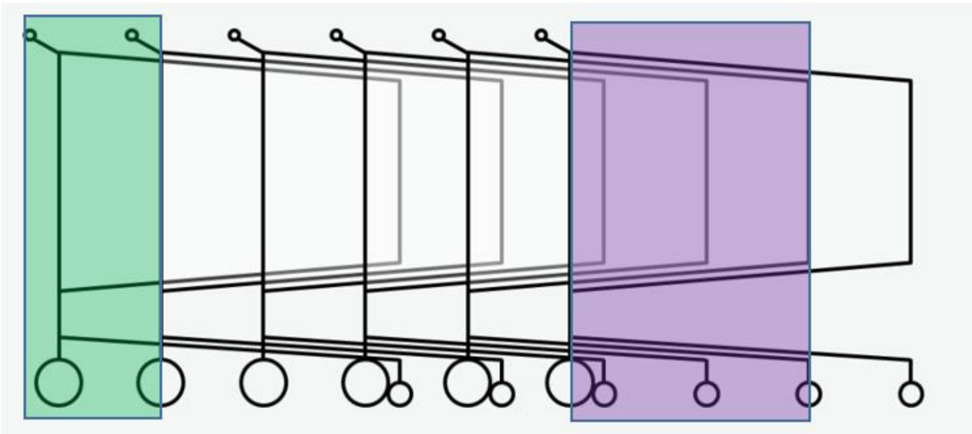
4.1 Imitativ resonnering

I dette delkapitlet viser og analyserer jeg ulike eksempler på hvordan elevene resonnerte imitativt. Jeg tar utgangspunkt i transkripsjonene fra samtalene elevene holdt, samt notatene jeg tok mens elevene deltok i de matematiske samtalene. Først viser jeg tre eksempler der elevene brukte memorert resonnering før jeg går over til å vise ulike eksempler der elevene brukte algoritmisk resonnering. Innen algoritmisk resonnering deler jeg elevbesvarelsene inn i underkategoriene kjent algoritmisk, avgrenset algoritmisk og leder algoritmisk resonnering i tråd med Lithner (2008) sin kategorisering.

Eksemplene fra elevresonnementene presenteres kronologisk innad i underkategoriene, men er ikke kronologisk presentert gjennom hele kapitelet.

4.1.1 Memorert resonnering

På tidspunktet i samtalen, der de følgende tre eksemplene er hentet fra, hadde elevene på gruppa utviklet to begrep som de brukte når de diskuterte oppgaven om Handlevogner; *den lille delen* og *den lange delen* av handlevogna. Elevene definerte *den lille delen* som den delen av handlevognen som stakk ut når handlevognene var kjørt inn i hverandre. Den lille delen er markert med grønt på figur 7. *Den lange delen* ble av elevene definerte som den delen av en handlevogn som var kjørt inn i vognen foran i rekka, altså den delen av vogna som «forsvant». På figur 7 er den lange delen markert med lilla, og det er vogn nummer to fra høyre som er markert.



Figur 7 Den lille og den lange delen av en handlevogn

Med utgangspunkt i opplysningene som var oppgitt i oppgaven hadde elevene resonnert seg fram til at *den lille delen* var 20 centimeter lang, og *den lange delen* var 0,9 meter lang. Utfra dette hadde elevene konkludert med at lengden til en handlevogn var 1,1 meter.

G1.H1:

192	Per:	20 + 0,9. Altså 0,2 + 0,9
[…]		
231	Ola:	20
232	Per:	Centimeter
233	Ola:	Ja, 0,2 meter.

Analyse
Kun ved noen få anledninger presiserte elevene at tallene de brukte for å representere lengdene på handlevogndelene måtte ha samme benevning. Allikevel uttalte ikke Per, i linje 192 dette direkte, men ut fra måten han uttrykte seg på forstår jeg det som om han ved å si «20 + 0,9. Altså 0,2 + 0,9» ønsket å presisere at benevningen på tallene som skulle adderes måtte være den samme. Det tyder på at han her vekslet mellom 20 centimeter og 0,2 meter, og at han ikke hadde problemer med å forstå at både 20 centimeter og 0,2 meter var lengden av den lille delen av handlevognen. I tillegg tyder uttalelsen til Per på at han visste at han ikke kunne addere lengder målt i centimeter sammen med lengder målt i meter, og derfor gjorde han lengdene automatisk om slik at de fikk samme benevning. Videre i linjene 231 – 233 presiserte Per og Ola at 20 centimeter er det samme som 0,2 meter.

Jeg oppfatter det som om Per og Ola intuitivt forsto hverandre når de brukte tallene 20 og 0,2 om hverandre, og at det var underforstått for begge to at de vekslet mellom 20 centimeter og 0,2 meter. Videre tyder det på at elevene oppga lengder under en meter i centimeter for å unngå desimaltall som var mindre enn 1. Vekslingen mellom 20 centimeter og 0,2 meter kan dermed sies å være automatisert og førte til at samtalen elevene imellom gikk forholdsvis raskt fordi det ikke var behov for å oppklare hvilken benevning de ulike tallene hadde. En slik automatisk veksling mellom to benevninger er å betrakte som en memorert imitativ resonnering (Lithner, 2008). Vekslingen mellom å oppgi lengden av den lille delen som 20 eller 0,2, uten å spesifisere hvilke benevning som ble brukt, ble observert under hele resonneringssekvensen til elevene, og underbygger derfor argumentet for at elevene brukte memorert resonnering.

Elevene skulle videre bruke lengdene de hadde resonnert seg fram til når de skulle beregne lengden av rader med to og fem handlevogner.

G1.H2:

236 Kari:	Hvis en sånn liten er 20 og en hel er 1,1, eller 0,2 og 1,1. Det bare står to sånne.
237 Ola:	1,3
238 Kari:	Ja
239 Lærer:	Så da vil det være 1,3, ja. Og hvis det sto 5 da?
240 Per:	Da blir det
241 Kari:	20 * 4, det blir
242 Ola:	Det blir 1,9, er det ikke det.

(Bekreftelse fra de andre elevene).

243 Per:	Også pluss 5 igjen, det blir 2,9.
244 Kari:	Da har vi 10.

Analyse

Eksempelet over viser hvordan elevene resonnerte da de beregnet hvor lang en rad med to handlevogner og en rad med fem handlevogner måtte være med utgangspunkt i at de kjente lengden av den lille delen, den lange delen og hele handlevognen.

Kari tok initiativ til resonnementet da hun, i linje 236, klargjorde for gruppa hva som skulle beregnes først, nemlig hvor lang en rad med 2 handlevogner ble. I linje 237 svarte Ola kontant at det ble 1,3. Ola forklarte ikke hvilke tall han brukte for å komme fram til svaret, men mye tyder på at han hadde lagt sammen lengden av en liten del og lengden av en hel handlevogn. Ola brukte heller ikke benevning på svaret sitt, men siden han oppga svaret til å være 1,3, tyder det på at han mente 1,3 meter.

Videre skulle elevene regne ut hvor lang en rad med fem handlevogner ble. Kari uttrykte i linje 241 at de skulle regne ut 20 * 4, og Ola svarte i linjen etter at svaret da ble 1,9. Hele gruppa var enige i at dette resonnementet var korrekt, selv om «alle» vet at 20*4 ikke er det samme som 1,9. Ved å analysere uttalelsen til elevene om at 20*4 er 1,9 nærmere (linje 241 og 242), kan mye tyde på at elevene først gjorde automatisk om mellom ulike måleenheter. 20*4 er lengden, i centimeter, av *den lille delen* av handlevognen fire ganger. Videre er det litt uklart hvordan elevene regnet videre siden de ikke forklarte hvordan de tenkte, men siden elevene oppga lengden av den lille delen til å være 20 så tyder det på at de regnet ut 20 centimeter * 4 = 80 centimeter. Allikevel er det en mulighet for at elevene gjorde om lengden av den lille delen til meter før de regnet ut. Den matematiske notasjonen som elevene da ville brukt kan framstilles slik: 20 centimeter * 4 = 0,2 meter * 4 = 0,8 meter.
Den andre regneoperasjonen det tyder på at elevene utførte, uten å forklare, var at de la til lengden av en hel handlevogn til lengden av de fire små delene. Elevene oppga alltid lengden av en hel handlevogn i meter så for å regne ut totallengden så må de også ha gjort om lengden av de fire smådelene til meter. Uttrykt med matematisk notasjon vil dette bli 20 centimeter * 4 + 1,1 meter = 0,2 meter * 4 + 1,1 meter = 0,8 meter + 1,1 meter = 1,9 meter.
Sekvensen viser at elevene behersket omgjøring mellom enhetene så godt at de i løpet av samtalen automatisk vekslet mellom centimeter og meter uten å sette spørsmålstegn med hva de gjorde eller hvorfor de regnet slik. Elevene spurte heller ikke hverandre om oppklaringer på vekslingen mellom enhetene, noe som tyder på at alle tre fulgte resonnementet. En slik automatisk veksling mellom benevninger korresponderer med Lithner (2008) sin definisjon av memorert imitativ resonnering.
I tillegg til å vise elevenes bruk av memorert imitativ resonnering er sekvensen et eksempel på at resonnementet elevene brukte hverken var sammenhengende eller fullstendig. Det tyder på at mye av det matematiske resonnementet foregikk i hodet til den enkelte elev, men at elevene fulgte hverandres tenkning selv om resonnementet ikke ble uttrykt høyt.

Videre virker det som gruppa brukte den oppgitte lengden av en rad med 10 handlevogner til å forsøke å verifisere resonnementet sitt. Med utgangspunkt i Ola sitt svar i linje 242 at 5 handlevogner er 1,9, sa Per, i linje 243, at de skulle plusse på 5. Ingen av elevene presiserte at det var 5 handlevogner som skulle adderes til rekka, men alt i samtalen tyder på at det var det Per mente. Per uttalte videre at når de plusset på 5 så fikk de svaret 2,9. Matematisk uttrykte Per at 1,9 pluss 5 blir 2,9. Når han framsatte forslaget om å legge på 5 tyder det på at han mente at han skulle legge til 5 små deler på lengden av fem handlevogner, ikke tallet 5. Det er uvisst her om Per regnet med 5 * 20 centimeter eller 5 * 0,2 meter siden dette ikke ble uttrykt. Uansett tyder det på at Per hadde umiddelbart gjenkjent at 5 små deler av handlevognen ble en meter, og derfor tror jeg at uttalelsen hans om 1,9 pluss 5 blir 2,9 betyr 1,9 meter pluss 5 små deler á 0,2 meter/20 centimeter blir 2,9 meter. Kari viste, i linje 244, at hun fulgte resonnementet til Per. Det er min oppfattelse at både Per og Kari brukte memorert imitativt resonnement (Lithner, 2008) når de på denne måten intuitivt vekslet mellom de ulike enhetene og fulgte hverandres resonnement. Denne siste delen av sekvensen er også et eksempel på hvordan elevresonnement ikke blir uttrykt verbalt, men kun skjer i den enkelte elevs hode.

Det siste eksempelet jeg har tatt med av at elevene brukte memorert imitativ resonnering er hentet fra elevenes beregninger av hvor lang en rad med 50 handlevogner ble.

G1.H3:

246 Lærer:	Så 50 vogner da, på rad og rekke.
[…]	
249 Ola:	Da er det bare å hive på en null bakerst, da. Å flytte…
(Pause)	
250 Per:	Da tok vi lengden av den hele vognen, pluss den korte delen, for å finne to i hvert fall.
251 Kari:	Når jeg skulle finne fem. Da tok jeg. Først en sånn liten del var jo 20 fant vi ut. Og det er jo bare fem sånne små deler, hvis vi tar vekk en hel vogn. Så 20 * 4 og plusser på den hele, altså 1,1.
252 Lærer:	Men hvorfor tok du 20 * 4 når det er 5 vogner?
253 Kari:	Fordi en hel er 1,1
254 Per:	Og hele den står ute, på en måte.
255 Kari:	Så tok jeg bare vekk den, så da har jeg 4 sånne små tapper igjen da.
256 Lærer:	Da spør jeg igjen, hvis det står 50 vogner da?
257 Ola:	19 meter.
258 Lærer:	Ja vel, hvor kom det tallet fra? Det har du sittet og tenkt litt på.
259 Ola:	Fordi hvis fem var 1,9, og siden det er 10 så bare flytter du komma en bak.

Analyse

Den opprinnelige oppgaven som elevene ble presentert for la opp til at de skulle bestemme hvor lang en rad med *n* vogner ble. På vei mot å utforme den generelle formelen utfordret læreren elevene, i linje 246, til å regne ut hvor lang en rekke med 50 vogner ble, og Ola sine utsagn vil videre bli analysert.

Ola hadde, i linje 242 i forrige eksempel, vist forståelse for hvordan oppgaven skulle løses og lengden på rekker av handlevogner beregnes. Det er derfor interessant å observere at når elevene skulle regne ut hvor lang en rad med 50 handlevogner var, så virker det som om Ola forkastet argumentene gruppa, og han selv, hadde brukt til å beregne lengden på en rekke handlevogner.

I linje 249 forklarte Ola at for å finne lengden av en rad med 50 vogner så *hiver han på en null bakerst.* Her tolker jeg det som at Ola tok lengden av fem vogner som utgangspunkt, og mente at han ved å sette på en null bakerst ville få lengden av raden med 50 vogner. Ola uttalte ikke hva svaret på dette skulle bli. Analyseres Olas påstand matematisk vil jo å sette en null bak 1,9, bli akkurat det samme svaret, nemlig 1,90. Allikevel oppfatter jeg det ikke som om det var dette Ola mente med å sette en null bak, fordi Ola sitt utsagn, i linje 249, slutter med «å flytte…». Derfor tolker jeg utsagnet om å hive en null på bakerst som at Ola ønsket å multiplisere med 10. Det virker som om han tolket oppgaven med at når antall vogner kunne multipliseres med 10, fra 5 til 50, så kunne han også multiplisere lengden av 5 vogner med 10 for å få lengden av 50 vogner.

Denne tankemåten utdypet Ola i linje 259 der han uttrykte «fordi hvis fem var 1,9, og siden det er 10 så bare flytter du komma en bak». Ola brukte ikke benevninger når han argumenterte for synspunktet sitt, derfor er det litt uklart hva han egentlig prøvde å formilde. Jeg tolker uttalelsen som om han mente at hvis en rad med fem vogner er 1,9 meter lang, så må man multiplisere antall vogner med 10 for å få 50 vogner, videre så kan lengden av en rad med 50 vogner finnes ved å flytte komma en bak på lengden, noe som korrespondere til å multiplisere med 10. Mye tyder på at Ola har lært noen huskeregler for å multiplisere med 10, nemlig at man kan legge på en null eller flytte komma en bak, og disse innøvde huskereglene kan ha ført til at Ola gjenkjente regneprosessen som multiplikasjon med ti. En slik gjenkjenning av multiplikasjonsregelen og automatisk utførelse av tallbehandling som Ola brukte er å betrakte som memorert imitativ resonnering (Lithner, 2008).

Det er interessant å observere at Kari i linje 251 gjentok hvordan hun tenkte når hun regnet ut hvor lang rekka med handlevogner ble, denne gjentagelsen kom mellom Ola sine uttalelser i linje 249 og linje 259. Kari viste at hun forsto hvordan oppgaven burde løses, og dette forsøkte hun så godt hun kunne å forklare til Ola og Per. Allikevel holdt Ola på at i dette tilfellet var det bare snakk om å multiplisere med 10, han gikk helt vekk fra det tidligere resonnementet gruppa hadde vært gjennom.

Lithner (2008) beskriver at implementering av memorert resonnering er når elevene velger en strategi for å gjengi et fullstendig svar. I dette eksempelet tyder det på at Ola kun så at ti-gangen kunne brukes, svarene i ti-gangen mestrer han godt og derfor valgte han denne strategien som ville gi ham fullstendige svar. Ola brukte ikke lenger den forståelse han nettopp hadde vist tidligere i samtalen når han nå skulle regne ut hvor lang en rad med 50 handlevogner ble. Ola brukte heller ikke noen strategier for å sjekke om svaret han kom fram til var riktig. Dette samsvarer med Lithner (2008) som sier at eleven ikke trenger vise forståelse for hvordan oppgaven er løst eller hvordan svaret et funnet når han bruker memorert resonnering.

4.1.2 Algoritmisk resonnering

4.1.2.1 Kjent algoritmisk resonnering

Eksempelet under starter rett etter elevene på gruppa hadde lest oppgaven om Blomsterselgeren Rose høyt. Eksempelet viser derfor hvordan elevene tilnærmet seg et, for dem, ukjent problem uten at de har fått instruksjoner om hvordan de skulle jobbe med oppgaven. Elevene på denne gruppa brukte ikke tid til å tenke gjennom oppgaven på egenhånd før de begynte å diskutere sammen.

G2.B1:

2 Jane: Så, hun har 24 hvite og 42 rød, og 36 gule

[…]

5 Jane: Hva er det største antall buketter hun kan lage, hvis hun skal bruke alle blomstene, og alle bukettene skal være like?

6 Jane: OK. Så 42 det kan du dele opp i 6 og i 7. 6 gange 7 er jo 42.

[…]

9 Lise: Ehm. Kan vi ikke se hva som går opp i samme liksom gangestykke?

10 Jane: Jo fordi 42 det går jo opp i 7 og 6

11 Lise: Alle der går opp i 6

12 Jane: Ja

13 Lise: Men hvis

14 Jane: 36 gange 6, det er jo…. 6 ganger 6 det er jo 36. Er det ikke?

15 Truls: Jo

16 Jane: Og 6 ganger 7 det er 42

17 Truls: Og 4 ganger 6 er 24

18 Jane: Ja. 6 ganger 4 er 24. Så alle de går opp i 6. Så… Hva er det største antall buketter hun kan lage hvis hun skal bruke alle blomstene.

19 Lise: Og alle bukettene skal være helt like.

20 Jane: Da kan hun ha. Hun kan jo ha 6 buketter, det vet vi jo. Siden alle går opp i 6. Eller jeg vet ikke jeg

21 Lise: Men hun skal ha like mange blomster i hver bukett. Ja

[…]

24 Lise: For hvis hun har 6 buketter

25 Jane: Da kommer ikke alle sammen til å være like

26 Lise: Vent. 6 ganger 6, 6 ganger 7, 6 ganger 4

(Lang pause)

27 Truls: Alle går jo i 2-gangen og da.

Analyse

Elevene brukte først litt tid på å sette seg inn i oppgaven. Jane leste oppgaven høyt flere ganger og prøvde å sortere ut den informasjonen elevene trengte for å løse oppgaven, noe som korresponderer til det første steget i Lithners (2008) resonneringssekvens. Allerede i linje 6 tilnærmet Jane seg en strategi når hun uttalte at 42 kan deles opp i 6 og 7, som hun videre bekreftet med at 6 ganger 7 blir 42. Det kan tyde på at Jane hadde en formening om at antall buketter måtte ha en sammenheng med en av faktorene til antall blomster av hver farge. I linje 9 fulgte Lise opp Jane sin idé når hun spurte om de skulle se hva som gikk opp i samme gangestykke. Jeg tolker denne uttalelsen som at Lise ønsket å se om det fantes en fellesfaktorer i antall blomster av hver farge. Altså at Lises spørsmål om noe går opp i samme gangestykke betyr at hun mente de skulle undersøke om antall blomster av hver farge var produkt i samme gangetabell. Begge jentene gjenkjente antall blomster av hver farge som produkt i 6-gangen, noe som kommer fram i linjene 10 og 11, og gruppa forfulgte denne strategien videre.

Relativt raskt hadde gruppa kommet fram til hvilke multiplikasjonstykker, med felles faktorer, som passet til de tre produktene, noe som er uttrykt i linjene 14 til 17. Produktene er her antall blomster av hver farge. I linje 26 uttrykte Lise enda en gang svaret de var kommet fram til «6 ganger 6, 6 ganger 7, 6 ganger 4». Det kan tyde på at hun prøvde å verifisere om bukettene ville bli like hvis de delte blomstene opp på denne måten. Rett før denne uttalelsen hadde nemlig Jane problematisert at bukettene ikke kom til å bli like om de delte blomstene opp på denne måten.

Ingen ting tyder på at elevene hadde valgt en helt tilfeldig algoritme når de skulle løse oppgaven. Elevene kan mange hundre algoritmer, valgte raskt en algoritme som de oppfattet hadde tilhørighet til oppgaven og brukte algoritmen for å finne svar på oppgaven (Lithner, 2008). Det som videre er interessant er at elevene i denne sekvensen begynte å tvile på egne resultat i stedet for å verifiserer svaret sitt. Elevene hadde implementert strategien sin og kommet fram til et svar; uttalt av Jane, i linje 20, med at de kunne lage 6 buketter og av Lise, i linje 26, når hun gjentok de tre multiplikasjonsstykkene. Elevene valgte allikevel å avslutte dette resonnementet, noe som kan tyde på at implementereringen av det første strategivalget ikke ledet elevene fram til en konklusjon som var rimelig for dem. Når elevene ikke gikk videre med strategien sin kan det være et tegn på at de hadde basert resonnementet sitt på tallenes overflateverdier, uten forståelse for hva de egentlig hadde regnet ut (Lithner, 2008). Bruk av tallenes overflateverdier tyder på at elevresonnementet var imitativt, nærmere bestemt kjent algoritmisk (Lithner, 2008).

Elevenes, tilsynelatende, mangel på forståelse for hva de hadde regnet ut kom videre til uttrykk i linje 25 når Jane sa at de seks bukettene ikke kom til å være like. Hva hun mente med at bukettene ikke ble like er uvisst, men det er tydelig at resonnementet skiftet kurs etter dette utsagnet. Det virker som om endringen oppsto fordi manglende verifiseringsstrategier førte til at elevene forkastet den første løsningen sin, som var korrekt, og fortsatte å resonnere mot en mulig løsning.

Elevene fikk på dette tidspunktet av samtalen heller ikke noen form for bekreftelse fra læreren på at de hadde kommet fram til riktig svar. Manglene bekreftelse fra læreren kan derfor også ha vært en medvirkende årsak til at elevene ble usikre på om oppgaven var løst riktig.

Mangel på bekreftelse fra læreren og manglende verifisering fra elevene kan ha ført til at Jane i linje 25 uttalte at om de lagde 6 buketter så kom ikke bukettene til å være like. Etter disse utsagnene kom Truls med en ny påstand, i linje 27, om at alle tallene gikk opp i 2-gangen. Det kan virke som om usikkerheten til elevene rundt det første svaret førte til denne nye påstanden. Truls sitt nye forslag ledet til at elevene forkastet det opprinnelige svaret sitt, og valgte å tilnærme seg svaret på oppgaven på en annen måte. Det som er en interessant observasjon er at det ser ut som om elevene ikke endret algoritme, i stedet fortsatte de å dividere antall blomster av hver farge på ulike tall. Det virker som om gruppa hadde kommet fram til en enighet om at denne algoritmen hadde en tilhørighet til oppgaven (Lithner, 2008), selv om denne enigheten aldri ble uttalt.

4.1.2.2 Avgrenset algoritmisk resonnering

En av elevene på gruppe 2 startet med å lese oppgaven om Handlevogner høyt. Det påfølgende utdraget er hentet fra starten av den matematiske samtalene deres om denne oppgaven, og er et eksempel på hvordan elevene starter resonneringssekvensen.

G2.H1:

219 Jane: Hvor lang er handlevognen?

(Pause)

220 Lærer: Ja, en handlevogn.

221 Lise: Gi svaret i meter.

222 Jane: Ok, så 10 vogner

(Lang tenkepause)

223 En av dem sier: 7

(Lang tenkepause)

224 Jane: Ok, så

225 Lise: Ja, men bør ikke, siden, hæ, det er jo dobbelt så mye og det er jo 2,9 meter. Og 4,9 meter er jo ikke dobbelt så mye som 2,9 meter.

226 Jane: Nei…. Det er en cm i fra. Nei, tulla, det er en meter og en

227 Truls: Der er det tre. 5,8 meter

228 Jane:	Ja 5,8 er det hvis du plusser de sammen.

[…]

244 Lise:	For den blir ikke dobbelt så lang fordi det er så mye først.

(Lise peker på tegningen)

245 Lærer:	Ja, sant vel, det er noe der.

246 Lise:	Så den blir ikke dobbelt … Han blir ikke så lang, liksom.

247 Jane:	For han blir kanskje sånn, fordi det er noe først.

(Lise peker på tegningen igjen)

248 Lærer:	Ja

249 Jane:	Før den. Og så er det kanskje så mye bakerst, men det er dobbelt så mye først. Så derfor blir de to pluss hverandre mindre enn, nei mer enn den. For i den så henger alle…

Analyse

Elevene repeterte først det som etter dere oppfatning var viktig informasjon for å løse oppgaven, nemlig at oppgaven gikk ut på å bestemme lengden av en handlevogn (linje 219), at svaret skulle oppgis i meter (linje 221) og at lengden av 10 handlevogner var kjent (linje 222). Identifiseringen av viktig informasjon kan ses på som at tegn på at elevene jobbet på første steget i Lithners (2008) resonneringssekvens, fordi det ikke var opplagt for elevene hvordan de skulle angripe oppgaven. I tillegg kan disse uttalelsen og gjentagelsene være tegn på at elevene lette etter opplysninger og informasjon som var kjent slik at familiære strategier og algoritmer kunne brukes til å løse oppgaven (Lithner 2008).

En annen indikasjon på at elevene ikke visste hvordan de skulle løse oppgaven var at det virker som om elevene på dette tidspunktet i samtalen gjettet litt vilkårlig på ulike tall. I linje 223 ble tallet «7» nevnt, og i linje 227 uttalte Truls at «der er det tre». En mulig forklaring på hvorfor elevene nevnte disse tallene er at de kanskje håpet det kunne være svar på oppgaven eller være steg i riktig retning på en løsning, i tillegg kan det være at elevene håpet at de ville få aksept fra læreren hvis tallene hadde betydning. På oppgavearket elevene hadde foran seg var det en illustrasjon med seks handlevogner, derfor er det lite sannsynlig at tallene tre og sju kom fra illustrasjonen. Hverken læreren eller de andre elevene på gruppa fulgte opp betydningen av uttalelsen av disse tallene. Lithner (2008) presiserer at ren gjetting er en strategi som er valid når elever resonnerer, og uttalelsene bør derfor ikke forkastes som uvesentlige.

I linje 225 forsøkte Lise å finne en strategi for hvordan hun kunne komme fram til en mulig løsning på oppgaven. Lise gjenkjente at antall handlevogner var doblet, samtidig som hun avkreftet at lengden av hele handlevognrekka ble doblet. I dette andre steget i resonneringsstrategien til Lithner (2008), prøvde Lise å løse oppgaven ved å bruke en kjent algoritme, nemlig dobling. I linje 227 fortsatte Truls strategien til Lise når han uttrykte at det ble 5,8 meter, og i linje 228 fulgte Jane opp Truls sitt utsagn når hun sa «Ja 5,8 er det hvis du plusser de sammen». Det tyder på at Jane med uttrykket å plusse de sammen, ønsket å addere lengden av en rad med fem handlevogner med en annen rad med fem handlevogner. Jane adderte 2,9 og 2,9, i stedet for å multiplisere med 2, når hun skulle beregne det dobbelte av 2,9.   Hun fikk svaret 5,8, men sammenliknet ikke svaret hun hadde fått med den oppgitte lengden av ti handlevogner.

Elevene hadde helt fra Lises uttalelser i linje 225, bemerket at dobling kanskje ikke var en strategi som ville føre fram. Uttalelsene til elevene i linjene 244, 246, 247 og 249 tyder på at de begynte å forstå at dobling ikke var mulig for å løse oppgaven. Elevene brukte tegningen aktivt til å forstå oppgaven, de pekte på delen av handlevogna som var kjørt inn i vogna før. Elevene kommenterte, linjene 244 og 247, at det er så mye først, dette tolker jeg til å bety den delen av handlevognen som var forsvunnet inn i handlevognen før og derfor ikke var del av den totale lengden av handlevogner. Uttalelsene viser at elevene var i ferd med å bli bevisst det fakta at handlevognene var kjørt inni hverandre hadde noe å si for hvordan man måtte regne ut lengden av en handlevogn. Elevene forsøkte ved hjelp av tegningen å verifisere strategien sin. Verifiseringsstrategien fungerte for elevene og førte til at de forkastet ideen om at lengden av handlevogner dobles og forsto etter hvert at de måtte velge en annen strategi.

Denne sekvensen viser at elevene brukte både gjetting på litt vilkårlige tall, og tilnærming med en doblingsstrategi til å løse oppgaven. Etter min oppfatning er valg av en doblingsstrategi et eksempel på at elevene bruker en avgrenset algoritmisk resonneringsstrategi (Lithner, 2008). Elevene oppfattet at antall handlevogner var doblet, og deres første strategivalg hadde derfor sammenheng med til denne doblingen. Algoritmen om dobling har en viss tilhørighet til oppgaven og jeg oppfattet derfor ikke valget av strategi som tilfeldig.

Det neste eksempelet i denne delen er et kort eksempel som jeg mener er representativt når elever løser oppgaver.

G1.H4:

Det følgende eksempelet er hentet fra oppstarten av resonneringen rundt oppgaven om Handlevogner, rett etter at Kari hadde lest oppgaven høyt.

121 Kari:	Da må vi vel ta 10 delt på 2,9, da? Må vi ikke det? Eller 20 delt på 4,9?
122 Per:	Kanskje det er motsatt?
123 Kari:	2,9 delt på 10? Eller 4,9 delt på 20?

Analyse
I starten av denne korte sekvensen, som fulgte rett etter elevene hadde lest oppgaven høyt, foreslo Kari umiddelbart divisjon som strategi for å løse oppgaven. Karis raske valg av strategi tyder på at hun har en oppfatning om at strategien hadde en tilhørighet til oppgaven (Lithner, 2008).   I linje 121 uttrykte Kari at hun ønsket å ta det største tallet og dividere på det minste tallet. Det kan tyde på en vanlig misoppfatning om divisjon, nemlig at divisjon alltid gjør svaret mindre og derfor må alltid dividenden være større

enn divisor (Brekke, 1995). Når Per, i linje 122, kommenterte på at det kanskje var motsatt, så endret Kari strategi. Både i linje 121 og 123 når Kari foreslo hvilke tall som skal divideres på hvilke virket hun usikker, og uttalelsene hennes var formulert som spørsmål til de andre på gruppa. Dette, sammen med den hurtige endringen av strategi om hvilke tall som skulle divideres kan være tegn på at Kari hverken har hadde full forståelse for hvorfor hun skulle dividere eller hvilke tall som skulle divideres på hvilke. Kari kan i stedet ha brukt tallenes overflateverdi som bakgrunn for å velge strategi, nemlig det største tallet dividert på det minste.

Oppgaven går ut på å beregne lengden av en handlevogn, og det kan også være med på å forklare Kari sitt innledende valg av strategi. Strategivalget til Kari tyder på at vanligvis når hun skal finne lengden av en enhet må hun dividere den totale lengden på antall enheter, og hun oppfattet det, i linje 121, som at den totale lengden må være det største tallet. Per derimot tolket oppgaven annerledes og påpekte, i linje 122, at det må være motsatt, innforstått at totallengden måtte divideres på antall vogner.

Kari var pådriver i samtalen og for valg av strategi, det var hun som først foreslo divisjon, trolig basert på at hun oppfattet at oppgaven lignet på noe hun hadde jobbet med tidligere. Det første resonnementet til Kari kan derfor beskrives som imitativt, nærmere bestemt avgrenset algoritmisk (Lithner, 2008).

En av elevene på gruppa hadde, før samtalen det refereres til nedenfor, lest oppgaven om Blomsterselgeren Rose høyt. Videre brukte elevene noen minutter hver for seg til å sette seg inn i oppgaven.

G1.B1:

6 Kari:	Da tenker jeg først at vi tar en hvit, en rød og en gul i hver bukett, også kan vi se hvor mange det går opp til da
7 Ola:	24
8 Kari:	Ja, 24
9 Ola:	Men, er det like etter farge eller antall?
10 Kari:	Nja
(5 sekunders pause)	
11 Kari:	Ja, nei, men alle bukettene skal være helt like, og hvis vi skal ha med de hvite
12 Ola:	Men så blir det bare 24
13 Kari:	Så blir det bare 24
14 Ola:	Det blir bare 24
15 Kari:	Da er det jo noen til overs, noen røde og gule til overs

Analyse
Ut fra sekvensen kan man se at Kari, i linje 6, tok initiativ med å velge strategi for å løse oppgaven. Hun uttrykte at ved dele ut en blomst av hver farge i hver bukett, kunne de se hvor mange det gikk opp til. Dette forstår jeg som at hun hadde en oppfatning av at hvis de laget buketter på tre blomster, der hver bukett besto av en hvit, en gul og en rød blomst så ville de oppnå høyest antall buketter. Kari uttrykte ikke presist hva hun mente med *hvor mange det går opp til*, men jeg forstår det som at hun mente at de kunne lage buketter på tre blomster så lenge de hadde blomster av hver farge. At hun derfor med uttrykket *går opp til* mente hvor mange buketter som kunne lages. Av samtalen videre virker det også som om alle tre på gruppa var innforstått med at utdeling av en blomst av hver farge ville hjelpe dem til å bestemme det maksimale antall buketter.

Det kan se ut som om både Ola og Kari, i henholdsvis linje 6 og 7, oppfattet at den fargen det var færrest blomster av var styrende for hvor mange buketter som kunne lages. Videre virker det som om Ola fulgte resonneringen til Kari da han responderte, i linje 7, med kun tallet 24. Mye tyder på at Ola her trakk samme slutning som Kari at det som avgjorde hvor mange buketter som kunne lages var antall hvite blomster, altså at den fargen det var færrest av var avgjørende for antall buketter.

I linje 9 kan det tyde på at Ola forsøkte å verifisere denne tolkningen av oppgaven da han spurte om bukettene måtte være like i farge eller antall. Jeg forstår spørsmålet hans som om han prøvde å få klarhet i om det var «lov til» å ha ulikt antall hvite, røde og gule blomster i hver bukett, eller om antall blomster av hver farge også måtte være likt. Kari forsøkte litt nølende, i linjene 10 og 11, å besvare spørsmålet til Ola, men hun uttrykte ikke tydelig om hun hadde en oppfatning om bukettene måtte være like i antall blomster i hver bukett eller at fargene i hver bukett måtte være like. I stedet påpekte hun at de skulle ha med de hvite blomstene. Elevene hadde på dette tidspunktet i resonnementet sitt valgt en algoritme som de følte hadde tilknytning til oppgaven, nemlig å dele blomstene i grupper på tre, en av hver farge, så lenge de hadde blomster av hver farge. Jeg mener at elevene her brukte avgrenset algoritmisk resonnering (Lithner, 2008) fordi de anså at den valgte algoritmen hadde en tilhørighet til oppgaven.

I linjene 7, 8, 12, 13 og 14 gjentok elevene tallet 24 eller *det blir bare 24.* Dette tolker jeg som at elevene fastslo at ved å bruke den valgte algoritmen var det de hvite blomstene, som det var 24 av, som var avgjørende for hvor mange buketter de kunne lage ved hjelp av denne strategien. Når elevene gjentok at det bare blir 24 buketter virker det som om de ble litt overrasket over at de ikke kunne lage flere buketter. Videre kan gjentagelsene av tallet 24 være et tegn på at elevene hadde en oppfatning om at ved å gjenta tallet verifiserte de svaret sitt. På linje 15 påpekte Kari at det blir noen blomster til overs da alle bukettene var laget, et utsagn som kan tyde på at også hun prøvde å verifisere svaret. Hverken Kari eller de to andre elevene i gruppa fulgte opp denne uttalelsen, og dermed kan det virke som elevene på dette tidspunktet mente de hadde funnet et svar på oppgaven. Elevene forsøkte ikke å sjekke om svaret de var kommet fram til var riktig ved å regne ut det totale antall blomster, de prøvde heller ikke finne andre strategier som kunne brukes til å løse oppgaven. Elevenes første valg av strategi førte ikke fram, men siden elevene virket overbevist om at strategivalget var riktig så hindret valget dem å løse oppgaven, noe som også kan anses som at elevene resonnerte imitativt (Bergqvist et al., 2008).

Det siste eksempelet i dette delkapitlet er hentet fra Blomsterselgeren Rose. Tidligere i resonnementet hadde gruppa prøvd å dele bukettene inn i tre blomster per bukett, en blomst av hver farge, se forrige eksempel.

G1.B2:

38 Per:	Går det…. Går det an å prøve å dele opp alle på samme tall? Og se om det går…
[…]	
41 Kari:	Ja, 24 går i tre, 36 går i tre. 42 går også i tre. Skal vi prøve med tre først da?
42 Per:	Jeg tror også at alle går i 6, 24 går i seks, 36 går i seks …
43 Ola:	Men det skal være størst antall, så det må være tre
[…]	
50 Per:	Da kan du få tre buketter, alle har 8 hvite. 12 gule og 14 røde, jeg vet ikke…
51 Kari:	Men hva mener du? Blir det bare tre buketter da?
52 Per:	Du kan i hvert fall få tre buketter.
53 Ola:	Ja
54 Kari:	Men alle disse er jo partall, så da kan vi gjøre det flere ganger. Så det går an å få seks buketter, hvis vi dobler det. Da blir det 16, 24 og 28. Men vi har ikke plass til å doble det engang til.
55 Per:	Men er det ikke omvendt?
56 Ola:	Men du kan få 9.
[…]	
71 Kari:	9 buketter, men hvor mange blomster er det i hver bukett?
72 Per:	Men. Men, blir det ikke mindre hvis du?
73 Ola:	Det er ikke hvor mange blomster du har i hver. Men antall buketter.
74 Per:	Men, blir det ikke mindre hvis du deler på 6? At hvis du deler 42 på 6, blir ikke det mindre enn 14?
75 Kari:	Jo
76 Per:	Det blir jo ikke høyere.
77 Kari:	Nei, nei. Nå har vi gjort… nei
78 Ola:	Men det er hvor mange blomster det er hvis du lager 3 buketter.
79 Per:	Å ja, sånn ja…. Men går det ikke mindre?

80 Lærer: Hva tenker du Per? Hva tenker du med færre, i forhold til det som Kari har skrevet?

81 Per: Nei, jeg tenkte feil. Jeg tenkte 42 delt på 6, for det blir jo mindre. Men nå skjønte jeg det, når de forklarte det.

82 Kari: Du legger til dobbelt så mye

Analyse
Uttalelsen til Per i linje 38 tyder på at han forsøkte å finne en strategi som kunne brukes for å løse oppgaven. Per foreslo å dividere alle på samme tall, her alle mest sannsynlig betyr antall blomster av hver farge. Per oppfattet at han muligens kunne bruke en kjent algoritme for å løse en ukjent oppgave, og divisjon er en kjent algoritme for elever på 8.trinn. Videre fulgte Kari, i linje 41, opp resonnementet til Per om at antall blomster av hver farge kunne divideres på samme tall, og hun resonnerte videre at alle tallene gikk i tre-gangen. Det tyder på at elevene på dette tidspunktet hadde oppdaget at antall blomster kunne faktoriseres og at faktorene hadde innvirkning på antall buketter som kunne lages. Elevene uttrykte ikke spesifikt at de faktoriserte, men av både innholdet av ytringene deres og hvor enkelt de fulgte hverandres resonnement på dette tidspunktet så tyder det på at de faktoriserte. Strategien elevene valgte hadde en tilhørighet til oppgaven, noe som er et tegn på at elevene resonnerer imitativt, nærmere bestemt avgrenset algoritmisk (Lithner, 2008).

I linje 42 fulgte Per opp argumentet om at antall blomster av hver farge var delelig på tre da han kommenterte at de også var delelig på seks. Per sitt argument om delelighet på seks ble ikke fulgt opp, det blir derimot avvist i linje 43 av Ola, der Ola argumenterte at siden det skulle være størst antall så måtte antall blomster divideres på 3. Her kan det virke som om Ola med størst antall tenkte at det skulle være størst antall blomster i hver bukett, ikke størst antall buketter slik som oppgaven ba om. Argumentene til Ola var ikke matematisk forankret, noe som er et tegn på at han på dette tidspunktet resonnerte imitativt (Lithner, 2008).

			Hvite blomster	Røde blomster	Gule blomster
	Totalt antall		24	42	36
Linje 50	Tre buketter		8	14	12
Linje 54	Seks buketter (dobling fra tre)		16	28	24
Linje 56	Ni buketter		24	42	36
Linje 54	Tolv buketter (dobling fra seks)		32	56	48

Tabell 2 Fordeling av antall blomster av hver farge etter elevresonnement

I linjene 50 til 53 brukte elevene Ola sin strategi med å lage tre buketter og beregnet hvor mange blomster av hver farge man kunne ha i hver bukett; åtte hvite, 12 gule og 14 røde, se tabell 2. Elevene problematiserte at det kun var 3 buketter som kunne lages, men her brukte ikke elevene noen matematiske argument for å verifisere om løsningen var korrekt. Elevene virket i stedet litt forundret over svaret de hadde fått.

Allikevel førte denne forundringen til at Kari i linje 54 framsatte et argument om at antall buketter kunne dobles fra 3 til 6. Kari begrunnet dette forslaget med at «alle disse er jo partall». Det tyder på at Kari med *alle disse* mente antall blomster av hver farge. Siden Kari påpekte at antall blomster av hver farge var partall så kan det tyde på at hun ønsket å argumentere for delelighet. Når Kari benyttet doblingsstrategi på antall buketter, så virker det som om hun blandet argumentene sine og resonnerte seg fram til at da måtte også antall blomster av hver farge i hver bukett dobles. Kari framsatte at dobling ville gi 16 hvite, 28 røde og 24 gule blomster, se tabell 2.

Kari argumenterte videre at de ikke kunne doble antall buketter en gang til, altså at de ikke kunne lage 12 buketter. Det virker som om hun baserte argumentet sitt på at om de doblet antall blomster enda engang så ville de få flere blomster enn hva de opprinnelig hadde hatt til rådighet, fordi hun uttrykte at de ikke hadde plass til å doble en gang til, se siste rad i tabell 2. Kari hadde ulike tanker og ideer om hvordan oppgaven skulle løses, men hun klarte ikke forankre argumentene sine matematisk og sjekket heller ikke om løsningen hun kom fram til var plausibel. I stedet virker det som om Kari hadde valgt strategi fordi hun mente den hadde en viss tilhørighet til oppgaven. Valg av strategi med en viss tilhørighet til oppgaven tyder på imitativ resonnering, nærmere bestemt avgrenset algoritmisk (Lithner, 2008).

At elevene resonnert imitativt kan man også observere i linje 56 da Ola foreslo at de kunne lage ni ulike buketter. Dette argumentet ble ikke fulgt opp videre i gruppa, men mye tyder på at Ola fulgte samme strategi som Kari hadde brukt da hun doblet og at han derfor ville ha kommet tilbake til det totale antall blomster, tabell 2.

Videre i samtalen kan man observere at elevene ikke lenger var enige om den videre progresjonen med å løse oppgaven. Per, som først hadde foreslått at de kunne lage 6 buketter, viste tydelig at han ikke var helt enig med Karis doblingsstrategi. I linje 55 spurte han om det ikke var omvendt, og i linje 72 spurte han om det ikke ble mindre. Spørsmålet til Per om det ikke blir omvendt fulgte rett etter Kari hadde lansert doblingsstrategien, jeg tolker Pers uttalelse at han undret om ikke antall blomster i hver bukett skulle halveres når antall buketter ble doblet. Jeg oppfatter det som om han hadde en oppfattelse av halvering som det omvendte av dobling. Per viste at han fremdeles var i kontekst med oppgaven, og at han hadde en formening om at det totale antall blomster som skulle brukes ikke kunne endres. Jeg mener at dette blir videre understreket av Per, linje 72, da han spurte om det ikke ble mindre. Et spørsmål som jeg tolker som om han spurte om det ikke ble færre blomster av hver farge i hver bukett om det lages dobbelt så mange buketter. Per fulgte opp spørsmålene sine i linje 74, der han ikke bare fremsatte spørsmålet om at det ikke ble mindre, men i tillegg spurte om ikke 42 delt på 6 blir mindre enn 14. Dette tolker jeg som at Per hadde forstått at når de laget tre buketter så ble antall røde blomster i hver bukett 14, fordi 42 delt på 3 er 14. Per resonnerte videre at om det skulle lages 6 buketter så måtte antall total antall blomster divideres på 6, og uten å regne ut et nøyaktig svar resonnert Per seg fram til at svaret måtte bli færre blomster enn når de dividerte på 3 i motsetning til flere slik som Kari hadde foreslått i linje 54. Når Per fremsatte ulike forslag for hvordan oppgaven skulle løses, og hadde spørsmål til strategiene som de andre elevene framsatte så kan det anses på som tegn på at han beveget seg fra imitativ resonnering mot kreativt (Lithner, 2008).

Ola hadde ved flere anledninger møtt argumentene til Per med at utregningen hadde med antall buketter å gjøre, linje 73, og at de skulle regne ut hvor mange blomster de fikk i tre buketter, linje 78. Det er tydelig at Per ikke var enig i Olas og Karis argumenter, fordi han fortsatte å sette spørsmålstegn ved utregningen. I tillegg viste Kari, i linje 77, at også hun begynte å tvile litt på om doblingsstrategien virket. Da læreren i linje 80 spurte Per direkte om han ville forklare hva han egentlig mente med å si at det blir færre blomster, så svarte Per i linjen etter at han hadde tenkt feil. Han utdypet dette svaret med at han hadde tenkt at 42 delt på 6 blir mindre, her er det sannsynlig at han mente at svaret ble mindre enn 14. Per fortsatte med å si at han nå hadde skjønt hvordan de skulle regne, fordi de andre hadde forklart det for ham. Jeg klarer ikke helt å analysere utfra samtalen mellom elevene hva det var Ola og Kari har forklart som kan ha fått Per til å endre oppfatning. Ingen av dem hadde kommet med noen argument som var matematisk forankret, de hadde heller ikke verifisert svarene sine. Det kan tyde på at Per ikke sto fast på sine argumenter fordi han oppfattet Kari og Ola som flinkere enn seg selv i matematikk, derfor behøvde han ikke at argumentene til Kari og Ola var matematisk forankret for å bli overbevist, det holdt for ham at argumentene var forankret i sosial status (Yackel & Cobb, 1996).

4.1.2.3 Ledet algoritmisk resonnering

Fram til den følgende sekvensen hadde elevene prøvd seg litt vilkårlig fram på hvordan de kunne løse oppgaven. Oppstarten på resonnementet deres er beskrevet under avgrenset algoritmisk resonnering, eksempel G2.H1. Etter det innledende resonnementet prøvde elevene å bruke illustrasjonen til å løse oppgaven, i tillegg til at de problematiserte at dobling ikke kunne brukes fordi handlevognene var kjørt inn i hverandre. Læreren gjentok oppgaven og understreket for elevene hvor lang en rad med 10 vogner var og en rad med 20 vogner.

G2.H2:

275	Lærer:	Tenk dere de to rekkene.
276	Elevene:	Ja
277	Lærer:	Hva vet dere om forskjellen på de?
278	Lise:	At det er 10. At den 10er rekken er mindre, enn den 20 rekken.
279	Lærer:	Ja, så den er mindre enn den med 20 i.
280	Elever:	Ja
281	Lærer:	Hvor mye mindre er den?
282	Jane:	10 vogner
283	Lærer:	Ja. Vet dere noe annet enn at den er 10 vogner mindre?
284	Lise:	At den er 3 meter mindre. Nei, to meter mindre.
285	Jane:	Så. Vi vet jo at den er 3 meter mindre. Så hvis du tar 3 meter. Den er 3 meter mindre. Hvis du har 20 vogner, ikke sant. Sånn liksom bortover. Også har du 10 her. Så er den der. Det er den vi mangler. Da må jo den være lenger enn den. Da er den 3 meter mindre enn den,

286 Lise: Tre?

287 Jane: Ja. To. Å… jeg har sagt tre mange ganger nå. To. To meter mindre enn den der.

(Lang pause)

288 Jane: Ehm, så da ehm kan vi ta

(Lang pause)

289 Lærer: Men dere sa noe akkurat nå. Dere sa at den korteste er 2 meter kortere.

290 Elever: Ja

291 Lærer: Så vet dere også noe annet om den korteste.

Analyse

I forkant av denne sekvensen hadde elevene gjettet litt på ulike løsningsstrategier, det kan derfor virke som om læreren, linje 275, prøvde å få elevene inn på et resonneringsspor som ikke kun besto av gjetting i starten av dette utdraget. Læreren brukte tegningen aktivt på dette tidspunktet, og gikk tilbake til den opprinnelige oppgaven der lengden på en rad med 10 vogner og lengden på en rad med 20 vogner var oppgitt. Videre, i linje 277, spurte læreren elevene direkte hva som var forskjellen på de to radene med vogner. Lise responderte, i linje 278, «at det er 10». Noe som tyder på at hun mente antall vogner var forskjellig i de to radene, altså at det var 10 vogner færre i den korteste raden. Lise fortsatte uttalelsen sin med «At den 10er rekken er mindre, enn den 20 rekken». Med denne siste uttalelsen kan det virke som om Lise kommenterte på lengden av radene, at hun her prøvde å presisere at raden med 10 vogner var kortere enn raden med 20 vogner. Uttalelsen til Lise i linje 278 kan derfor tyde på at Lise oppfattet at både antall vogner i radene og lengden av radene var forskjellige, men hverken Lise eller gruppa fulgte direkte opp dette resonnementet.

Videre i sekvensen kan man observere at læreren prøvde å få elevene oppmerksomme på sammenhengen mellom antall handlevogner og lengden på radene. I linje 279 bekreftet læreren utsagnet til Lise om at den ene raden er mindre enn den andre. Fra sekvensen kommer det ikke fram om læreren prøvde å få fram at den ene raden var kortere, altså lengden på radene, eller at raden inneholdt færre handlevogner. I linje 281 spurte læreren elevene hvor mye mindre raden var, og fikk til svar at den var 10 vogner mindre. Dette ble fulgt opp av læreren i linje 283 der han spurte om elevene visste noe annet enn at raden var 10 vogner mindre. Dette siste spørsmålet fra læreren tyder på at han ønsket at elevene skulle både bli bevisst og fokusere på sammenhengen mellom forskjellen på radene med 10 og 20 handlevogner, både med tanke på antall vogner og lengder.

Etter at elevene hadde kommet med noen tanker om forskjell i lengden på radene, linjene 284 - 288, kan man observere at læreren raskt var på banen igjen. I linje 289 påpekte læreren for elevene betydningen av forskjellen i lengden på handlevogner. I tillegg gjentok læreren at elevene hadde uttalt at den korteste raden var 2 meter kortere. Med denne uttalelsen virker det som om læreren bevisst endret ordlyden sin for å beskrive forskjellen på handlevognradene. Til nå i resonnementet hadde læreren brukt det samme adjektivet som elevene brukte for å beskrive forskjellen, nemlig *mindre*, men videre i resonnementet benyttet læreren adjektivet *kortere*. Endringen av ordlyd kan tyde på at læreren ønsket at elevene skulle fokusere på forskjell i lengden av radene, i tillegg til antall vogner. Videre påpekte læreren, i linje 291, enda en gang at elevene hadde mer informasjon om den korteste raden av handlevogner.

Gjennom hele denne sekvensen kan man observere at læreren forsøkte å lede elevene fram mot en løsningsstrategi. Læreren unnlot å gi direkte råd om hvordan elevene skulle regne, men forsøkte i stedet å peke på viktig informasjon i oppgaven og ta tak i uttalelsene til elevene som ville gi dem framdrift i resonneringsprosessen sin. Etter min oppfatning er dette eksempelet en personledet algoritmisk resonnering (Lithner, 2008), der elevene bli ledet steg for steg gjennom en del av en oppgaven.

Det neste eksempelet er tatt fra resonneringen til gruppe 1. Elevene hadde i forkant av denne sekvensen kommet fram til at den første delen av en handlevogn var 0,9 meter, og at 10 ekstra vogner i en rad tilsvarte at raden økte med 2 meter noe som er beskrevet i delkapittel 4.2 Kreativ Resonnering, eksempel G1.H6. Sekvensen nedenfor er hentet før elevene definerte den lange delen og den korte delen av en handlevogn, beskrevet i delkapittel 4.1.1 Memorert Resonnering, eksempel G1.H1.

G1.H5

180 Lærer: Ja. For hva av de 10 vognene er det som er 2 meter? Er det hele vognene, eller. Hvilken del?

181 Kari: Det er den lille.

182 Per: Det er bare den ytterste delen.

(Bekreftelse fra lærer)

183 Lærer: Og hvor mye vil da en sånn ytterste del være?

(Lang pause)

184 Lærer: Hvis dere vet at 10 er 2 meter?

185 Per: 0,2

186 Lærer: Ja, 0,2 meter. Er den ikke det?

(Bekreftelse fra alle)

187 Lærer: Her som dere har 10 vogner, hvor mange sånne ytterste deler har dere da? Når dere har 10 vogner?

Analyse

I starten av denne korte sekvensen, i linje 180, stilte læreren elevene et konkret spørsmål nemlig hvilken del av vognene som til sammen utgjør 2 meter. I tillegg til å stille et helt konkret spørsmål, fulgte læreren videre opp med å spørre «Er det hele vognene, eller?». Dette tilleggsspørsmålet kom fra læreren før elevene hadde fått tid eller anledning til å besvare det første spørsmålet. Det kan virke som om læreren her mente at han måtte stake ut veien videre for elevene ved å stille et lukket spørsmål i stedet for et åpent.

Videre kan man observere at Kari i linje 181 svarte at det var den lille delen av handlevognen som både representerte de 10 handlevognene og 2 meter, dette ble bekreftet av Per i linje 182. Per kalte den lille delen for den ytterste delen, allikevel tyder det på at Per og Kari her snakket om samme del av handlevognen. Læreren bekreftet uttalelsene til Per og Kari, før han igjen stilte et direkte spørsmål i linje 183: «Og hvor mye vil da sånn ytterste del være?». Når læreren, etter en lang tenkepause fra elevene ikke fikk svar på dette spørsmålet så utdypet han spørsmålet sitt, i linje 184, med «Hvis dere vet at 10 er 2 meter?» Det kan tyde på at læreren ikke forventet at elevene selv skulle oppdage sammenhengen mellom antall vogner og lengden av handlevognraden siden han stilte elevene konkrete spørsmål i stedet for åpne. Videre kan det virke som at ved å redusere forventningene sine til elevene så fratok også læreren elevene muligheten til å resonnerer matematisk.

Videre i utdraget svarte Per, i linje 185, på lærerens direkte spørsmål, at det ble 0,2. Læreren bekreftet svaret til Per i den påfølgende linja. Bekreftelsen kom ikke bare i form av et ord, læreren gjentok både tallsvaret som Per hadde gitt, i tillegg til at læreren brukte benevning på svaret. Dette tyder på at læreren ønsket å bevisstgjøre elevene på at de regnet ut lengder og derfor måtte ha med benevning når de oppgav svarene sine. Videre stilte læreren et retorisk oppfølgingsspørsmål til elevene: «Er den ikke det?». Læreren fikk bekreftelse på dette spørsmålet fra alle elevene. Det virker som om læreren her ville forsikre seg om at Ola og Kari også forsto hvordan Per hadde kommet fram til at den lille delen av handlevognen var 0,2 meter. Læreren virket fornøyd med kun å oppnå en bekreftelse fra Ola og Kari om at de var enige om at den ytterste delen var 0,2 meter, fordi han etterspurte ikke om de kunne forklare dette nærmere. Etter at læreren hadde fått en bekreftelse fra elevene på at de var enige om at den ytterste delen av handlevogna var 0,2 meter rettet læreren oppmerksomheten til elevene tilbake til raden med 10 vogner. Læreren spurte elevene direkte, i linje 187, hvor mange ytterste deler av handlevogner det var når raden besto av 10 vogner.

Gjennom hele sekvensen ledet læreren elevene steg for steg nærmere en løsning på oppgaven. Det virker som om læreren forsøkte å redusere kompleksiteten av oppgaven ved å stille elevene lukkede spørsmål som krevde minimalt med resonnering fra elevene, i tillegg til at læreren stilte elevene retoriske spørsmål som ikke krevde annet fra elevene enn at de sa seg enige i en påstand. Elevene ble guidet gjennom resonnementet sitt av at læreren stilte dem spørsmål for å få dem videre mot den løsningen læreren ønsket, dette tilsvarer det Lithner (2008) kaller personledet algoritmisk resonnering.

4.2 Kreativ resonnering

I det følgende delkapittelet skal jeg vise og analysere noen eksempler av elevresonnement som følger kreativ resonnering ifølge Lithner (2008) sin resonneringsstrategi.

G1.H6

171 Per:	Så for å få 20 eller, ja så er de på en måte plusset på 2 meter? 10 vogner er da verdt 2 meter? På den med 20. Nesten. Nei.
172 Lærer:	Ja, hvordan tenkte du. Si det en gang til.

173 Per:	Altså. På den så står det at 10 vogner er 2,9 meter, også på den andre er det 4,9
174 Kari:	Så 10 meter tilsvar… nei, 10 vogner tilsvarer 2 meter? Nei. Fordi du legger jo på 10 vogner fra 10 til 20, også er forskjellen 2 meter.

(Bekreftelse fra de andre)

175 Kari:	Da er sikkert den første, for den første er jo litt lenger enn de viser her liksom. Da er sikkert den første 0,9, som du sa Ola. Tror jeg.

[…]

178 Per:	For ifølge den så er 10 vogner 2 meter.

(Alle er enige om dette).

179 Per:	Og hvis den da også er 2 meter, så har du på en måte 0,9 meter igjen.

Analyse
I dette utdraget oppdaget elevene ulike sammenheng mellom opplysningene de hadde fått i oppgaven. I linje 171 satte Per ord på sammenhengen mellom antall vogner og lengden av de ekstra ti vognene som var lagt til raden når antall vogner økte fra ti til tjue. Uttalelsen til Per tyder på at han på dette tidspunktet hadde oppdaget viktigheten av at det kun var den lille delen av handlevognen som var av interesse når de diskuterte den ekstra lengden, noe som sto i kontrast til elevenes første resonnement da de kun tenkte at de kunne dividere lengden av handlevognraden på antall vogner (delkapittel 4.1.2.2 Avgrenset Algoritmisk Resonnering, eksempel G1.H4). Sammenhengen ble utdypet av Kari, i linje 174, der hun både argumenterte for at 10 vogner tilsvarte 2 meter, og utdypet dette med at man la på 10 vogner for å få 20 vogner. Siden det virker som om elevene både så sammenhenger og trakk noen slutninger som de ikke hadde sett i starten av resonnementet, tolker jeg det slik at elevene her resonnerte på en måte som var ny for dem. Når elevene bruker en ny resonneringsstrategi så tyder det på at de resonnerer kreativt (Bergqvist et al., 2008; Haylock, 1997; Lithner, 2008).

Videre fulgte Kari opp sin egen uttalelse i linje 175 da hun presiserte at den første var lenger. Det tyder på at hun med den første refererte til den handlevognen som sto først i rekka, altså den handlevognen der hele vognen var synlig. Kari uttrykte at «den første er jo litt lenger enn de viser her liksom». Om Kari brukte ordet *liksom* for å referere til at hun syntes illustrasjonen var unøyaktig, eller om hun sa dette fordi hun sammenliknet den første handlevognen med de andre i raden er uvisst. Men, det virker som om de andre på gruppa fulgte resonnementet hennes fordi Per fortsatte med å bruke opplysningene til å resonnere videre. I linje 179 påpekte Per at «hvis den da også er 2 meter, så har du på en måte 0,9 meter igjen». Med denne uttalelsen flyttet Per fokus vekk fra at det var 2 meter forskjell på lengden på de to radene med vogner, til at om han tok vekk 2 meter fra den korteste raden med 10 vogner, så var det 0,9 meter igjen. Det tyder på at Per her prøvde å verifisere det som Kari uttrykte i linje 175, når hun sa at den første sikkert var 0,9. Per sine argument nærmer seg en matematisk forankring, noe som også er et kriteria for at han resonnerte kreativt (Bergqvist et al., 2008; Lithner, 2008).

Neste eksempel er hentet når gruppa videre skulle bestemme hvor lang en rad med 50 handlevogner ble. Elevene hadde på dette tidspunktet beregnet lengden av en handlevogn, lengden av den lille og den lange delen, i tillegg til at de hadde bestemt lengden på rader med to og fem handlevogner var. I starten av utdraget er to linjer, 250 og 251, fra eksempel G1.H3 som er beskrevet under delkapittel 4.1.1 Memorert Resonnering tatt med. De to linjene er inkludert fordi de er viktige for det videre resonnementet i eksempelet.

G1.H7

250 Per: Da tok vi lengden av den hele vognen, + den korte delen, for å finne to i hvert fall.

251 Kari: Når jeg skulle finne fem. Da tok jeg. Først en sånn liten del var jo 20 fant vi ut. Og det er jo bare fem sånne små deler, hvis vi tar vekk en hel vogn. Så 20 * 4 og plusser på den hele, altså 1,1.

[…]

264 Per: Blir det ikke 4,9 + 30 ganger 20?

265 Kari: Jeg hadde tatt 20 * 49, ja, men det blir veldig langt

266 Per: Ja for hvis en sånn liten del er 20 cm så skal du på en måte ta 30 til av de fra den. Går det ikke da å ta 20 ganger 30 for å finne ut hvor langt det er?

[…]

268 Per: Og så tar du det du får der og plusser på det.

269 Lærer: Ja. Det ville jo sikkert gått. Hva ville dere fått da?

270 Per: 6 meter pluss det, så 10,9 meter

271 Lærer (henvendt til Ola og Kari): Er dere med på hvordan han tenkte nå?

272 Kari: Nei

[…]

274 Per: En sånn liten del som stikker ut er 20 cm

275 Kari: Ja

276 Per: Og så skal du ha 30 til sånne fra den med 20 vogner.

277 Kari: Ja

278 Per: Så da tar du 20 ganger 30

279 Kari: Å ja, ja

280 Per: For å finne ut hvor mange centimeter det er. Og så tar du det og plusser sammen med 4,9 meter.

[…]

287 Kari: Fordi at den ene vognen tar jeg bort fordi den vet jeg er 1,1. Og når jeg har tatt bort den er det bare 49 vogner igjen. Tatt vekk en. 50 minus 1 er 49. Og da er det 49 sånne små, og en sånn fant vi ut at var 20. Eller 20 centimeter, og 20 centimeter ganger 49. Også pluss på den der da.

Analyse

I dette utdraget tok Per initiativ, i linje 250, med å beskrive hvordan han regnet ut lengden av to handlevogner ved å ta lengden av en full vogn, for så å addere en liten del. Dette argumentet fulgte Kari opp, i linje 251, når hun forklarte at for å finne lengden av fem handlevogner så måtte hun fremdeles ta lengden av en hel vogn, men nå hadde hun fire små deler. Kari gikk i dybden og forklarte at grunnen til at hun tok fire og ikke fem små deler var at hun først tok vekk en hel vogn fra rekken, og dermed fikk fire små deler. Denne hele vognen la hun til lengden av de fire smådelene på slutten. Måten Kari behandlet antall vogner på her og endret rekkefølgen hun adderte dem sammen tyder på at resonnementet hennes var matematisk forankret. I tillegg var resonnementene til både Per og Kari plausible. En slik resonnering som både er matematisk forankret og plausibel kan sees på som kreativ (Lithner, 2008).

Videre er det interessant å observere at Per og Kari brukte ulike strategier når de skulle beregne hvor lang en rad med 50 handlevogner ble.

I linje 265 uttrykte Kari at for å regne ut en rad med 50 handlevogner ville hun regne ut 30 multiplisert med 49. Dette utsagnet tyder på at hun brukte den samme strategien som Per og hun hadde implementert i linjene 250 og 251. Kari uttrykte selv, i linje 251, at først måtte man ta vekk en hel vogn for å finne antall små deler. Det tyder på at hun brukte samme strategi når hun fikk tallet 49, altså at hun trakk en vogn fra 50. I linje 251 argumenterte hun også for at total antall vogner minus en skulle multipliseres med 20, som var lengden av en liten del. Dette brukte hun i linje 265 der hun, i stedet for å forklare hvordan hun tenkte, kun uttrykte at hun for å beregne hvor lang en rad med 50 vogner var så de burde ta 20 multipliser med 49. Kari nevnte ikke her at de måtte addere lengden av en hel vogn når de hadde funnet lengden av alle de små delene. Allikevel tyder det på at Kari visste at hun skulle addere lengden av en handlevogn til smådelene, men at hun mente det ikke var viktig å presisere at hun måtte gjøre dette. Når hun uttrykte 20 multipliser med 49, så virker det som om hun mente at det var denne delen av regnestykket som var utfordrende og derfor viktig at hun kommuniserte til de andre på gruppa. Jeg mener at Karis resonnering derfor fremdeles er matematisk forankret og kan anses som kreativ (Lithner, 2008).

Per, på den annen side, valgte en annen strategi når han skulle beregne hvor lang en rad med 50 handlevogner ble. I linje 264 framsatte han et forslag om at det ble 4,9 pluss 30 ganger 20. Videre i linje 266 utdypet han hvordan han resonnerte, nemlig at han trengte 30 ekstra smådeler fra *den.* Det tyder på at *den* her refererte til lengden av 20 handlevogner, nemlig 4,9 meter, en lengde som var oppgitt i oppgaven. Per hadde resonnert seg fram til at for å øke raden fra 20 til 50 vogner så må han legge på 30 små deler til lengden av raden på 20 vogner. I tillegg brukte Per, i linje 266, benevning når han oppgav lengden på den lille delen. Per valgte en annen og original strategi i forhold til Kari og viste med det at han evnet å tilnærme seg oppgaven på flere måter noe som kan forstås som at Per resonnerte kreativt på dette tidspunktet (Adawiyah & Muin, 2017; Haylock, 1997; Lithner, 2008).

Etter at Per hadde framsatt sitt resonnement virket det som om hverken Kari eller Ola fulgte resonnementet, selv etter han i linjene 268 og 270 prøvde å utdype hvordan han tenkte.

	De 30 ekstra smådelene	Raden av 20 handlevogner
Pers ordlyd linje 268	Det du får der	Det
Pers ordlyd linje 270	6 meter	Det
Matematisk notasjon	30 * 0,2 meter	4,9 meter

Tabell 3 Oppsummering av Pers resonnement

Forklaringene hans i linje 268 var «så tar du det du får der og plusser på det» og videre utdypet han forklaringen sin, i linje 270, med «6 meter pluss det, så 10,9». Det virker som om *det man får der* og 6 meter tilsvarte samme lengde i Pers resonnement, se tabell 3. Videre at denne lengden var 20 centimeter multiplisert med 30, omgjort til meter, fordi det var den ekstra lengden som var lagt til 20 vogner for å få lengden av en rad på 50 vogner. Etterpå skulle disse 6 meterne plusses på *det*, der det tyder på at *det* er lengden av en rad med 20 vogner, se tabell 3.

Hverken Ola eller Kari gav uttrykk for at de forsto resonnementet til Per, derfor forklarte han, i linjene 274 til 280 på oppfordring fra læreren, steg for steg for dem hvordan han resonnerte. Han fikk bekreftelser fra Kari underveis på at hun forsto hvordan han tenkte. Per la vekt på at hver liten del var 20 centimeter, og med å øke fra 20 til 50 vogner så trengtes det 30 flere av de små delene. Han fulgte videre opp med å forklare at det var derfor han tok 20 multiplisert med 30, og at svaret på dette ville ha benevningen centimeter. Helt til slutt forklarte han, i linje 280, at lengden av de 30 smådelene skulle adderes på lengden av raden med 20 handlevogner. Ved å analysere Pers resonnement så ser man at han tar utgangspunkt i en kjent lengde av antall vogner og adderer smålengdene til antall ekstra vogner. Per viste med dette resonnementet en annen og original strategi for å løse oppgaven på enn elevene hadde brukt i starten av resonnementet sitt. Å bruke originale strategi og evnen til å kunne se på problemet på mer enn en måte gjør at resonnementet til Per kan forstås som kreativt (Adawiyah & Muin, 2017; Lithner, 2008).

Etter Kari hadde hørt og tilsynelatende forstått Pers resonnement forklarte hun, i linje 287, enda engang hvordan hun beregnet lengden av 50 handlevogner. Kari brukte den samme strategien gjennom hele resonnementet, nemlig å ta vekk en vogn fra det totale antallet, multiplisere det gjenværende antallet, som var antall små delene, med 20, og til slutt addere lengden av smådelene samme med lengden av den hele vognen. Kari resonnerte helt likt både i linje 251 da hun beregnet lengden av 5 handlevogner og i linje 287 da hun beregnet lengden av 50 vogner. Det kan tyde på at Kari på dette tidspunktet var på vei mot å utarbeide en generell formel for lengden av handlevogner.

I hele denne sekvensen mener jeg at både Per og Kari resonnerer kreativt (Lithner, 2008). Begge har strategier som er plausible og matematisk forankret, og de bruker ulike strategier for å løse en oppgave som er ukjent for dem (Bergqvist et al., 2008;

Lithner, 2008). Begge elevene tenkte fleksibelt og de brukte ikke innlærte strategier i resonnementene sine (Haylock, 1997).

5 Diskusjon

I dette kapitelet vil jeg drøfte funnene mine i lys av teorien presentert i kapittel 2. Forskningsspørsmålet vil bli besvart i form av fem delkapitler.

5.1 Resonneringsstrategier som elever på 8.trinn benytter seg av

5.1.1 Elevenes innledende resonnement er imitative

Et interessant aspekt når man studerer hvordan elever resonnerer i matematikk er å se på elevenes innledende resonnement. Hvilke strategier brukte elevene for å tilnærme seg en oppgave som var ukjent for dem? Hvordan angrep elevene oppgaven når de ikke har fått noen instruksjon på forhånd om hvordan de skulle løse problemet?

Et gjennomgående funn for begge gruppene var at elevene startet resonnementene imitativt. Søken etter kjente algoritmer og strategier som kan brukes når en ukjent oppgave skal løses er en naturlig første strategi for de aller fleste, og blir støttet av Schoenfeld (2016) som påpeker at elever innehar basiskunnskaper til å løse matematiske problem, men mangler både strategier for å løse ukjente problem og evnen til å ta valg. Som lærer er et av de spørsmålene man ofte får fra elever «skal jeg gange eller dele her?» (Stengrundet & Valbekmo, 2018) noe som også tyder på at elever har kunnskap om ulike strategier, men ikke har en fullgod oppfatning om hvilken strategi de skal bruke til enhver tid.

Gruppenes innledende resonnementet på de to oppgavene er oppsummert i tabell 4.

	Første strategivalg	
Oppgave	Gruppe 1	Gruppe 2
Blomsterselgeren Rose	Eksempel G1.B1 Dele ut en blomst av hver farge i buketter på tre blomster	Eksempel G2.B1 Finne felles faktor til blomstene av de ulike fargene, og bruke dette til å bestemme antall buketter.
Handlevogner	Eksempel G1.H4 Divisjon Først antall vogner på lengde, deretter lengde på vogner	Eksempel G2.H1 Dobling

Tabell 4 Elevenes innledende resonnement

Det kan virke som elevene først og fremst ønsket å bruke memorerte regler og algoritmer for å løse oppgavene. Deres umiddelbare reaksjon når de møtte en ny oppgave var imitativ, og de prøvde å finne en kjent algoritme som hadde tilhørighet til oppgaven. Lithner (2008) påpeker at strategien med å bruke kjente algoritmer kan ha noe å gjøre med læringsmiljøet til elevene. Lærebøker og skoleoppgaver er ofte utformet på en slik måte at elevene kun skal finne en passende algoritme når de skal løse en oppgave. Når elevene kommer fram til svaret på en oppgave går de ofte videre uten å gi en begrunnelse for valg av algoritme, argumentere for løsningsmetoden sin eller reflektere over om svaret ga mening. Som lærer opplever jeg stadig at elevene spør «Hvor i boka finner jeg svar på dette?» eller de ber meg «Kan du ikke bare forklare meg hvordan jeg skal løse oppgaven?».   Mange elever viser frustrasjon hvis de ikke kan løse oppgaver etter en kjent oppskrift, elevene står fast og har få strategier for hvordan de skal angripe oppgaver som ikke er kjente. Dette er i tråd med Schoenfeld (2016) som påpeker at elever har basiskunnskaper i matematikk men mangler problemløsningsstrategier og ferdigheter til å ta matematiske valg. Hvis elever ikke får trening i å løse problemløsningsoppgaver, kan resonneringen deres ende opp med å bli overfladisk og imitativ (Lithner, 2008).

Elever jakter ikke alltid den beste og enkleste måten å løse en oppgave på, men i stedet den løsningen eller algoritmen som er mest plausible innenfor deres kompetanse (Lithner, 2008). Det å lete etter det kjente når man skal forsøke å løse en oppgave er naturlig for de aller fleste. Både elever og voksne vil forsøke å bruke den kunnskapen de allerede innehar og først bruke strategiene som er kjent før de begir seg ut på mer ukjent grunn. Schoenfeld kaller dette taktisk problemløsningsatferd. Beslutningene til elevene gjør at de iverksetter ulike strategier og algoritmer. Denne taktiske problemløsningsatferden dominerte først hos begge gruppene, siden deres første resonnementer var imitative.   Utfordringen til elevene var hvordan de skulle bevege seg videre i problemløsningsstrategiene når det kjente ikke kunne brukes. Schoenfeld (2016) beskriver det som overvåkende problemløsningsadferd, noe som involverer elevers metakognitive avgjørelser. Garofalo og Lester (1985) påpeker at elever ofte mangler overvåkende metakognitive reguleringsferdigheter, noe som kan føre til at elevene ikke kommer videre i løsningsprosessen sin.

5.1.2 Imitativ resonnering kan være hensiktsmessig

Lithner (2008) beskriver overfladiske kunnskaper når man argumenterer og resonnerer i matematikken. Han kaller imitativ resonnering for overfladisk fordi den ikke krever iboende matematiske kunnskaper. Likevel påpeker Lithner (2008) at imitativt resonnement kan være pålitelig og hensiktsmessig, og dermed et viktig aspekt ved læring av matematikk. Noen oppgavetyper lar seg ikke løses uten innlærte algoritmer og regler, og dessuten er det hensiktsmessig og tidsbesparende å resonnere imitativt hvis eleven har evne for det som ligger til grunn for algoritmen.

At imitativ resonnering var en hensiktsmessig resonneringsform for elevene kom tydelig fram da gruppe 1 diskuterte oppgaven om Handlevogner, eksemplene G1.H1 og G1.H2. Elevene oppga i dette resonnementet sjelden benevning når de diskuterte lengdene av *den lange delen* og *den lille delen*, i tillegg oppga de ikke alltid benevninger på svarene sine heller. Allikevel kan man tydelig se fra analysen at elevene oppfattet 1,1 + 20 som det samme som 1,1 + 0,2, fordi de intuitivt forsto at i det første tilfellet så var det snakk om 20 centimeter som er det samme som 0,2 meter i det andre tilfellet. Elevenes veksling fram og tilbake mellom centimeter og meter, uten å forklare hva eller hvorfor de kunne gjøre dette førte ikke til misforståelser mellom elevene en eneste gang. Skulle elevene ha forklart omgjøring mellom centimeter og meter hver gang de gjorde det hadde resonnementene deres blitt mer omstendelige. Hvis elevene ikke hadde innehatt kompetansen til intuitivt å gjøre om mellom ulike benevninger ville også vanskegraden på selve oppgaven blitt mye høyere, hovedhensikten med oppgaven var ikke å jobbe med omgjøring, men omgjøring var et av verktøyene som elevene brukte for å løse oppgaven. Derfor var denne formen for imitativ resonnering både hensiktsmessig og tidsbesparende for elevene (Lithner, 2008).

Også i eksempel G1.H2 kan det observeres at elevene brukte memorert imitativ resonnering hensiktsmessig. Når elevene diskuterte sa de at 20 * 4 ble 1,9, og at alle elevene på gruppa fulgte dette resonnementet. Heller ikke læreren spurte hva elevene mente med denne utregningen, noe som kan tolkes som at også han fulgte elevenes resonnement. Elevenes bruk av imitativ resonnering gi dem mer flyt i samtalen sin siden de ikke behøver å forklare hver minste detalj og hvert eneste steg for hverandre. Skulle elevene, på den annen side, ikke brukt imitativ resonnering og hvert eneste steg i en matematisk samtale vært kreativ så måtte de jo til enhver tid oppdage matematikk som var ny for dem selv. Mens i realiteten bruker man matematikkunnskapene man allerede innehar og setter den sammen på nye måter (Lithner, 2008). En slik form for resonnering følger en deduktiv tankegang der elevene bruker kjent informasjon til å løse ukjent problem (Aliseda, 2003; Jeannotte & Kieran, 2017).

5.1.3 Metakognisjon kan føre til endring av resonnement

En viktig faktor for elever når de løser oppgaver i matematikk er å kunne endre eller forkaste strategier som ikke fører fram. For å være i stand til dette må elever inneha metakognitive reguleringsferdigheter (Desoete, 2007; Garofalo & Lester Jr., 1985; Schoenfeld, 2016). Videre bør elever først gjennomføre steg tre i Lithner (2008) sin resonneringssekvens når de diskuterer oppgaver, hvis elever ikke forsøker å verifisere løsningen sin før de revurderer strategien sin, vil de heller ikke være i stand til å vurdere om strategien som er implementert er vellykket eller ei.

I eksempel G2.H1 var gruppas første strategi fordobling fordi antall vogner var doblet. Elevene forkastet strategien om fordobling da de oppdaget at 4,9 ikke var det dobbelte av 2,9, altså at lengden av handlevogner ikke var doblet. I tillegg til talleksemplene brukte elevene illustrasjonene på oppgaven aktivt for å verifisere at den førstvalgte strategien ikke førte fram. Dette viser at elevene klarte å verifisere resultatene sine (Lithner, 2008) ved å bruke metakognitive reguleringsferdigheter (Garofalo & Lester Jr., 1985). Videre innledet elevene nye resonneringssekvenser som ledet dem mot kreativt resonnement. Akkurat hvilke tanker som gjorde at elevene så at deres første påstand ikke stemte, kommer ikke helt tydelig fram av opptakene og transkripsjonene, men at dette faktisk skjedde indikerer likevel at elevene viste metakognitiv overvåkningsadferd.

Manglende metakognitiv reguleringsferdigheter kan også føre til at elevene får problemer mer å verifisere resonnement som er riktig utført. I eksempel G2.B1 hadde elevene resonnert seg fram til riktig antall blomster av hver farge i hver bukett. De klarte allikevel ikke å gjennomføre steg 3 I Lithner (2008) sin resonneringssekvens og verifiserte ikke svaret sitt. Elevene hadde prosedyreferdighetene til å løse oppgaven, men de manglet begrepsforståelse (Kilpatrick et al., 2001), noe som medførte at de ikke klarte å forstå hva oppgaven egentlig ba dem komme fram til. Mangelen på begrepsforståelse førte til utfordringer for elevene når de skulle ta ulike valg underveis i løsningsprosessen, som igjen førte til at elevene endret strategi. Hvis basiskunnskapene og problemløsningsstrategiene som elevene innehar ikke strekker til for å løse en oppgave så kan begrepsapparatet til elevene ramle sammen (Schoenfeld, 2016; Stengrundet & Valbekmo, 2018).

5.2 Mulige hinder for elevenes resonnement

Elevene fulgte Lithner (2008) sin resonneringsstruktur når de løste oppgavene og ulike faktorer gjorde resonneringsprosessen utfordrende for elevene.

5.2.1 Manglende verifiseringsstrategier

Det tredje steget i resonneringsstrategien til Lithner (2008) er at den valgte strategien skal brukes for å løse oppgaven. I tillegg inkluderer dette steget å verifisere om valgt strategi er vellykket, eller om løsningen må revurderes og en annen strategi må benyttes for å løse oppgaven.

En gjentagende utfordring for elevene i begge gruppene var nettopp manglende strategier for å verifisere svaret sitt. I eksempel G2.B1 brukte elevene en kjent algoritme for å løse oppgaven, og de kom raskt fram til det riktige svaret. Problemet var at elevene hadde resonnert imitativt, og forsto derfor ikke at svaret de hadde kommet fram til var riktig. Utfordringen videre for elevene var at de ikke hadde noen strategier som kunne hjelpe dem å verifisere svaret sitt. I stedet begynte elevene å sette spørsmålstegn ved sin egen tolkning av oppgaven. Elevene argumenterte for at om de laget seks buketter med blomster så kom ikke bukettene til å bli like, og derfor gikk elevene vekk fra den første løsningen sin uten å verifisere den. Elevene viste at de hadde basiskunnskaper og kjennskap til å løse oppgaver (Lithner, 2008; Schoenfeld, 2016), men de manglet metakognitiv reguleringsferdigheter (Garofalo & Lester Jr., 1985).

I eksempel G1.B1 hadde elevene delt opp blomstene i buketter som inneholdt tre blomster hver, elevene framsette noen tanker som de kunne brukt til å verifisere løsningen sin. Nemlig om bukettene skulle være like i farge eller antall, og at de fikk blomster til overs. Allikevel brukte ikke elevene dette til å videre verifisere løsningen sin. Her viste elevene at de hadde prosedyreferdigheter, men at de manglet både å kunne forklare og vurderer løsningen sin (Kilpatrick et al., 2001; Lithner, 2008).
Det er viktig at elever opparbeider seg strategier for å verifisere løsningene og svarene sine. Hvis ikke elever innehar disse strategiene kan det føre til at de forkaster et riktig svar, eller at de beholder et feil svar. Elevene manglet overvåkende metakognitiv reguleringsferdigheter (Garofalo & Lester Jr., 1985) noe som førte til at resonneringen enten stoppet opp, eller tok en ny retning som ikke ledet mot en ønsket løsning.

5.2.2 Manglende bekreftelse fra læreren

I tillegg til manglende verifiseringsstrategier fikk heller ikke elevene noen form for bekreftelse fra læreren på at de hadde kommet fram til riktig svar. Mange lærere vil gi elever bekreftelse på riktig svar, selv om elevene ikke selv vet at de har kommet fram til det rette svaret. Hvis elevene er vant til dette, så vil de etter hvert ikke stole på seg selv, men derimot vente til at en annen med en høyere sosial status i matematikk bekrefter eller avkrefter svaret (Yackel & Cobb, 1996). Som lærer er det viktig å være bevisst på å ikke bekrefte eller avkrefte elevenes resonnement tidlig i elevenes resonneringsprosess. Ved å være mindre hjelpsom kan man heller hjelpe elevene til å utvikle strategier for å selv å være i stand til å bekrefte eller avkrefte svarene sine.

I eksemplene på ledet algoritmisk resonnering ser man at læreren hadde en aktiv rolle i elevenes resonneringssekvens. Men lærerens rolle var ulik i de to sekvensene. I eksempel G2.H2 klarte læreren å stille elevene åpne spørsmål som hjalp dem videre i resonneringen, noe som er i tråd med hvordan Kazemi og Hintz (2014) beskriver at matematiske samtaler bør ledes. Mens i eksempel G1.H5 stilte læreren lukkede og retoriske spørsmål, noe som ikke lot elevene få anledning til å sel å resonnerer seg fram mot en mulig løsning.

Hvis lærere hele tiden guider elevene steg for steg fram mot en løsning, slik som i eksempel G1.H5, så vil ikke elevene utvikle egne ferdigheter hverken til å ta valg, overvåke utførelsen eller verifisere svarene sine (Adawiyah & Muin, 2017; Kilpatrick et al., 2001; Lithner, 2008). Elevene vil ikke utvikle resonneringsferdighetene sine, og vil videre mangle kompetanse til å resonnerer matematisk. Da kan man ende opp med elever som mangler en grunnleggende ferdighet i matematikk (Ball & Bass, 2003; Kilpatrick et al., 2001).

5.2.3 Elever oppfatter seg selv som faglig underlegne

Eksempel G1.B2 viser at elevene valgte ulike stier i resonneringssekvensen (figur 2), der Ola og Kari valgte en dobling av antall blomster, mens Per mente at antall blomster skulle halveres. Her kunne elevenes metakognitive reguleringsferdigheter hjulpet dem med å bekrefte, eller eventuelt forkaste, mulige konklusjoner (Garofalo & Lester Jr., 1985). Allikevel ser vi at når Per prøvde å forklare og bekrefte sin egen strategi til de andre på gruppa, så endte det med at han selv endret strategi. Per begrunnet endringen av sitt strategivalg med at de andre hadde forklart ham hvordan han skulle regne. Hverken Kari eller Ola hadde framsett argument som var matematisk forankret eller plausible, mest sannsynlig endret Per strategi fordi han følte seg matematisk underlegen i forhold til de to andre på gruppa (Yackel & Cobb, 1996).

5.2.4 Bruk av imitativ resonnering

Gruppe 1 resonnerte kreativt når de diskuterte oppgaven om Handlevogner, og elevene var på sporet av å utlede en generell formel. På samtalen som elevene holdt virket det som om alle tre forsto hvordan de regnet lengden av rader med ulik antall handlevogner. Når elever resonnerer kreativt er tankeprosessene deres fleksible, og ikke hindret av å være fiksert på framgangsmåte slik som imitativt resonnement er (Lithner, 2008). I samtalen kom det et tydelig skifte i resonneringsstrategien til Ola. Han hadde til dette punktet i samtalen resonnert kreativt, og selv om han ikke hadde uttrykt hvordan han tenkte i fullstendige setninger, slik som de andre på gruppa, så var det tydelig at han forsto oppgaven og hadde full kontroll på hvordan han regnet ut lengden av handlevognrekka. Endringen i resonnering oppsto da tallbehandlingen lignet noe han kunne fra før. Ola gjenkjente multiplikasjon med 10, og begynte å argumentere for at lengden av raden også skulle multipliseres med 10. Ola ble nå fiksert på denne framgangsmåten og hevdet standhaftig at framgangsmåten var den rette å bruke også etter at Kari hadde gjennomgått gruppas tidligere resonnement i detalj. Dette skriftet hindret tydelig Ola i hans videre resonnement, slik som Lithner (2008) påpeker at imitativ resonnering kan gjøre. Det var interessant å observere dette skiftet i resonneringsstrategi, og det er viktig for lærere å være klar over hva som kan trigge slike skifter. Veldig ofte når elever gjenkjenner tall eller algoritmer så regner de med dem helt ukritisk, og uten å reflektere over svaret. I dette tilfellet så var det den gjenkjennbare multiplikasjonen med 10 som fungerte som triggeren.

5.2.5 Elevenes resonnering kommer ikke alltid til uttrykk

Når elevene diskuterte oppgavene var det deler av elevenes tankeprosesser som ikke kom til uttrykk.   Elevene unnlot å verbalisere deler av det som skulle regnes ut, for eksempel i eksempel G1.H2 da elevene resonnerte seg fram til at 20*4 ble 1,9. Og i eksempel G1.H7 da Kari forklarte at for å regne ut raden av 50 handlevogner så måtte hun ta 20 * 49. Allikevel var det ingenting som tydet på at elevene ikke fulgte hverandres resonnement siden de ikke spurte etter utdypende forklaringer. På den annen side kan det være at elevene ikke spurte etter utdypende forklaringer fordi de ikke ville innrømme for de andre på gruppa at de følte seg matematisk underlegne (Yackel & Cobb, 1996). Argumenter i en resonneringssekvens som utelater informasjon vil ikke være logisk formelle, men Lithner (2008) påpeker at så lenge argumentasjonsrekken er forståelig for elevene selv så regnes den som matematisk resonnering. Det er interessant å observere at når elevene uttrykte seg ufullstendig i disse to eksemplene så satte de ord på det som var utfordrende i resonnementet sitt. Mens det virker som om de ikke så betydningen av å verbalisere det som for dem ble oppfattet som enkelt, nemlig at de også måtte legge til en hel handlevogn. Resonnering som ikke blir verbalisert kan bli et hinder i resonneringsprosessen om elevene ikke forstår hverandre. Yackel og Hanna (2003) påpeker at det er viktig at elevene forklarer og kommuniserer tankene og ideene sine. Det må settes av tid i timer for at elevene skal få sjansen til å forklare hverandre hvordan de tenker

Andre eksempler på at deler av resonnement ikke kom til uttrykk var når elevene uttrykte seg upresis og ikke brukte matematiske begrep i argumentene sine. I eksempel G1.H7 brukte ikke Per matematiske begrep når han skulle argumentere for sitt resonnement. Han brukte i stedet argument som «Og så tar du det du får der og plusser på det» (linje 268). Upresis argumentering førte til at de andre elevene på gruppa ikke klarte å følge resonnementet hans. Elevene må støtte argumentene sine på matematiske sannheter og bruke matematiske begrep når de argumenterer (Lithner, 2008). Når elever uttrykker seg upresis så vil dere være utfordrende for dem å overbevise medelever om at sine resonnementer er valide (Stylianides, 2008), klarer elever derimot bruke et mer presis matematisk språk så vil det bli enklere for dem å argumentere overbevisende og rettferdiggjøre innholdet av argumentene sine.

6 Avslutning

Det første funnet mitt er at elevenes matematiske resonneringer kjennetegnes ved at de innledende resonnement er imitative. Dette er et funn som ikke er så veldig overaskende fordi det vil være naturlig for de aller fleste å forsøke å løse en ny oppgave ved hjelp av en metode eller algoritme man kan fra før. I tillegg følger, dessverre, mye av matematikkundervisningen i skolen fremdeles et tradisjonelt løp (Boesen et al., 2014) der elever skal løse rutineoppgaver ved å bruke strategier som memorerte regler og kjente algoritmer i stedet for å utvikle problemløsningsferdigheter (Lithner, 2008; Schoenfeld, 2016) noe som vil føre til bruk av imitativ resonnering. Stylianides (2008) problematiserer at det ikke er god nok kunnskap om lærebøker i matematikk legger vekt på å utvikle resonneringsferdigheter til elever. Johnsen og Storaas (2015) sin komparative studie av matematikkoppgaver i et norsk og et finsk læreverk peker på at det var få oppgaver i det norske læreverket som la til rette for å utvikle resonneringsferdigheter. Hvis matematikkundervisningen er styrt av denne typen lærebøker så kan det være en medvirkende faktor til å hindre utvikling av elevers resonneringskompetanse. I klasserom der lærere leder elever steg for steg gjennom ulike oppgaver vil heller ikke elever utvikle egne problemløsningsferdigheter eller resonneringskompetansen sin (Bergqvist & Lithner, 2012; Lithner, 2008).

Det andre funnet mitt er at elever følger Lithner (2008) sin resonneringssekvens når de løser problemløsningsoppgaver. Når elevene blir presentert for en oppgave det ikke er opplagt for dem hvordan de skal løse bruker de kompetansen de har på det tidspunktet til å velge en strategi for å komme nærmere en løsning. Men elevene argumenterte sjelden for hvorfor den valgte strategien ville hjelpe dem å finne løsningen på problemene, de bare implementerte strategien sin. På det tredje steget i Lithner sin resonneringssekvens møtte elevene av og til noen utfordringer mot å komme videre fram til en konklusjon. Noen ganger virker det som om elevene beveget seg bakover i resonneringsstrukturen, figur 2 (Lithner, 2008, s.258) i stedet for å søke nye strategier for å komme nærmere løsningen. Det som oftest hindrer elevene i å konkludere er manglende strategier for å verifisere løsningene sine (Garofalo & Lester Jr., 1985; Lithner, 2008), manglende bekreftelse fra lærere eller medelever på løsningen sin (Yackel & Hanna, 2003), at de endrer resonnementet sitt underveis fordi de gjenkjenner deler av utregningen som imitativ eller at elevene ikke verbaliserer argumentene sine (Yackel & Hanna, 2003). Hvis elevene klarer å bruke metakognitive reguleringsferdigheter (Garofalo & Lester Jr., 1985) underveis i resonnementene sine eller når de har kommet fram til en løsning har de større sannsynlighet til å fullføre Lithner (2008) sin resonneringssekvens. Metakognitive reguleringsferdigheter vil hjelpe elevene til å endre en strategi som ikke fungerer underveis i resonneringssekvensen sin, til å verifisere svaret sitt og konkludere om løsningen er korrekt (Lithner, 2008).

Et annet kjennetegn på elevers matematiske resonnering er at mye av resonneringen skjer i elevenes hode eller blir framsagt usammenhengende, noe som kan gjøre det utfordrende for både lærere og medelever å få tilgang til denne informasjonen. Det kan være ulike grunner til at elevene ikke uttrykker seg verbalt, kanskje er de usikre på om resonnementet sitt er korrekt? Hvis det sosiomatematiske miljøet i et klasserom er av en slik art at kun få elever deltar i diskusjoner (Solomon & Black, 2008) og at elever føler seg matematisk underlegne (Yackel & Hanna, 2003) så vil det mest sannsynlig føre til at mange elever ikke vil forklare hvordan de tenker. Med større vekt på bruk av matematiske samtaler (Kazemi & Hintz, 2014) i matematikktimer så vil man kunne legge til rette for, og trene, elever på å forklare hvordan de tenker underveis i en resonneringsprosess. Sosial interaksjon, både i små grupper og i full klasse, vil føre til at elever må forklare resonnementene sine og forbedre sine egne argumenter slik at argumentene blir forståelige for medelever (Chapin et al., 2009). I tillegg så vil elevene ved å ta del i lærerstyrte matematiske samtaler får øve seg på å bruke matematiske begrep og til å utlede resonnement som er matematisk forankret. Elevene vil kunne lære av hverandres forklaringer, og bli hjulpet fram av læreren ved at læreren inkluderer elevene og stiller åpne spørsmål som fremmer resonnering og matematisk tenkning (Kazemi & Hintz, 2014).

Matematikklærerens oppdrag i skolen er å tilrettelegge undervisning for elevene etter kompetansemålene, der kjerneelement i faget, tverrfaglige tema og grunnleggende ferdigheter blir inkorporert (Utdanningsdirektoratet, 2019). LK20 legger vekt på at elever skal resonnere og tenke kritisk i matematikk, det blir også presisert at elevene må få tid til å reflektere, resonnere og stille spørsmål i matematikkfaget. I mitt masterarbeid viser det seg at elevene i stor grad bruker imitativ resonnering. Tidligere forskning har vist at elever som innehar kreative resonneringsferdigheter blir bedre problemløsere og lettere kan tilnærme seg oppgaver utover rutineoppgaver (Jeannotte & Kieran, 2017; Kilpatrick et al., 2001; Lithner, 2008; Ross, 1998). For å oppnå dette bør det gjøres noen endringer i undervisningspraksisen til matematikklærere. Oppgaver som brukes i undervisningen må legge til rette for at elever kan utvikle seg til å bli resonnerende og kritiske problemløsere, og elevene må få god tid til å jobbe med faget. Lærerens rolle i arbeidet med undersøkende matematikk vil gå fra å være en kunnskapsgiver, til heller å fungere som motivator og veileder som tilrettelegger for elevene.

Denne masteroppgaven bidrar til å belyse resoneringens sentrale rolle i matematikkundervisningen. Ennå gjenstår mange spørsmål og det trengs mer forskning på hvordan resonnering i matematikk implementeres i skolen. Man trenger mer kunnskap om hvordan resonnering i matematikk behandles i lærebøker, vurderingssituasjoner, undervisning og i lærerutdanningen. I tillegg viser min oppgave at Lithners (2008) modell er nyttig i analysen av elevers strategier og resonnement, men at det er behov for mer forskning for å videreutvikle modellen til å bli mer finmasket.

Referanser

Adawiyah, R., & Muin, A. (2017). Mathematical Inductive-Creative Reasoning , A Theoretical Study. *In International Conference on Mathematics and Science Education . Atlantis Press.*, *57*(ICMSEd 2016), 247–251.

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese*, *134*(1–2), 25–44. https://doi.org/10.1023/A:1022127429205

Alvesson, M., & Sköldberg, K. (2009). *Reflexive Methodology: 2 new vistas for qualitative research* (2nd ed.). London: Sage Publishing.

Ayalon, M., & Even, R. (2008). Deductive reasoning: In the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 235–247. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9136-2

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics (ODD). *Mathematics, Teachers, and Children*, 215–235.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making Mathematics Reasonable in School. *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, (January 2003), 27–44.

Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical Reasoning in Teachers’ Presentations. *The Journal of Mathematicla Behaviour*, *31*(2), 252–269.

Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2008). Upper secondary students’ task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(1), 1–12.

Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of educational objectives. Vol. 1: Cognitive domain. New York: David McKay.

Boaler, J. (2015). *The Elephant in the Classroom, Helping Children Learn and Love Maths* (2.utg). Souvenier Press.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity : comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. *Department of Mathematics*. Umeå universitet.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*(1), 72–87. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.10.001

Bray, W. S. (2011). A collective case study of the influence of teachers’ beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(1), 2–38.

Brekke, G. (1995). Oppfatninger av desimaltall. *Nämnaren*, *22*(4), 27–34.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Heinemann, Portsmouth, NH.

Chapin, S. H., O’Connor, C., & Anderson, N. C. (2009). *Classroom Discussions Using Math Talk to Help Students Learn*.

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*.

Creswell, J. W. (2015). *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches*. *Health Promotion Practice* (Vol. 16).

https://doi.org/10.1177/1524839915580941

Desoete, A. (2007). Evaluating and improving the mathematics teaching-learning process through metacognition. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *5*(13), 705–730.

Garofalo, J., & Lester Jr., F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(3), 163–176.

Glesne, C. (2016). *Becoming qualitative researchers: An introduction.* Pearson. One Lake Street, Upper Saddle River, New Jersey 07458.

Gold, R. L. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces*, *36*(3), 217–223. https://doi.org/10.2307/2573808

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1988). Do inquiry paradigms imply inquiry methodologies. Qualitative approaches to evaluation in education, 89–115.

Hatch, A. J. (2002). *Doing qualitative research in education settings*. Suny Press.

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. ZDM, 29(3), 68-7. *ZDM - Mathematics Education*, *29*(3), 68–74.

Helenius, O. (2006). Kompetenser och matematik. *Nämnaren*, (3), 11–15.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1). https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Johnsen, M. K. M., & Storaas, A. E. (2015). *En komparativ studie av matematikkoppgaver i et norsk og et finsk læreverk*. UiT Norges Arktiske universitet.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *36*, 20–32. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003

Kazemi, E., & Hintz, A. (2014). *Intentional Talk*. Stenhouse Publishers, Portland, Maine.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Helping Children Learn Mathematics*. *Helping Children Learn Mathematics*. https://doi.org/10.17226/10434

Kunnskapsdepartementet. (2018, August). Fornyer innholdet i skolen. Retrieved from https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Leer, L. G. (2009). *Vurdering av matematisk problemløsning*. NTNU.

Lithner, J. (2006). A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 255–276.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Lithner, J. (2015). LEARNING MATHEMATICS BY CREATIVE OR IMITA TIVE REASONING. *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, *Springer,* 487–506.

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM - Mathematics Education*, *49*(6), 937–949. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3

Maher, C. A. (2009). Children's reasoning: Discovering the idea of mathematical proof. In *Teaching and learning proof across the K-16 curriculum* (pp. 120–132).

Matematikksenteret. (2018). MatteLIST - ny nettside med aktiviteter som passer alle. Retrieved November 23, 2019, from https://www.matematikksenteret.no/nyheter/mattelist-ny-nettside-med-aktiviteter-som-passer-alle

Mercer, N., & Hodgkinson, S. (Eds.). (2008). *Exploring talk in school: Inspired by the work of Douglas Barnes.e*. Sage.

Mertens, D. M. (2014). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods.* (S. Publications, Ed.).

NCTM. (2000). Principles and standards for school matematics. *National Council of Teachers of Mathematics*.

NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Retrieved March 20, 2020, from https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi/

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren.* Universitetsforlaget.

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics : the Danish Kom Project. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, 115-124.

Özsoy, G. (2011). An investigation of the relationship between metacognition and mathematics achievement. *Asia Pacific Education Review*, *12*(2), 227–235. https://doi.org/10.1007/s12564-010-9129-6

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Cappelen Damm Akademisk.

Riessman, C. K. (2008). *Narrative methods for the human sciences.* Sage.

Robson, C., & McCartan, K. (2016). *Real World Research*. John Wiley & Sons.

Ross, K. A. (1998). A research companion to principles and standards for school. *The American Mathematical Monthly*, *105*(3), 252–255.

Schoenfeld, A. H. (1987). Pólya, Problem Solving, and Education. *Mathematics Magazine*, *60*(5), 283–291. https://doi.org/10.1080/0025570x.1987.11977325

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, *196*(2), 1–38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Sidenvall, J., Lithner, J., & Jäder, J. (2015). Student's reasoning in mathematics textbook task-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(4), 533–552.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*(1), 20–26.

Solomon, Y., & Black, L. (2008). Talking to learn and learning to talk in the mathematics classroom. In N. Mercer & S. Hodgkinson (Eds.), *Exploring talk in schools,* (pp. 73–90).

Sriraman, B., & Pizzulli, M. (2005). Balancing mathematics education research and the NCTM standards. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *37*(5), 431–436. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0033-1

Star, J. R., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving.

Contemporary Educational Psychology, *31*(3), 280–300. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2005.08.001

Stengrundet, S., & Valbekmo, I. (2018). Begrepslæring i matematikk. Retrieved from http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-11/T3.P1.M2A Begrepslæring i matematikk_nybu.pdf

Stylianides, G. J. (2008). an Analytic Framework of. *For the Learning of Mathematics*, *1*, 9–16.

Teigen, K. H. (2019). Resonnering. Retrieved July 15, 2020, from https://snl.no/resonnering

Throndsen, I., Hopfenbeck, T. N., Lie, S., & Dale, E. L. (2009). *Bedre vurdering for læring. Rapport fra" Evaluering av modeller for kjennetegn på måloppnåelse i fag"*.

Utdanningsdirektoratet. (2019). Læreplan i matematikk 1.-10.trinn. Retrieved May 15, 2020, from https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society; The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458–477. https://doi.org/10.2307/749877

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, G. W. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227–236).

Vedlegg 1: Samtykkeerklæring

22.november 2019

Til foresatte for elever i klasse 8B ved Gosen skole

Anmodning om tillatelse til lydopptak av undervisning, og eventuelt innsamling av elevbesvarelser.

Jeg er student på videreutdanningsprogrammet Lærerspesialist i matematikk ved NTNU. I den forbindelse skriver jeg en masteroppgave der jeg undersøker hvordan matematiske samtaler kan brukes som formativ vurdering.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, er det ønskelig å gjøre lydopptak av elever som jobber med, og diskuterer, matematikk. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å gjøre opptak i klasserommet, samt å samle inn elevbesvarelser. Det er snakk om 2 til 4 undervisningstimer, delt opp i kortere økter. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til dette.

Informasjon fra opptakene vil kun bli hørt av meg og veileder. Vi vil bare bruke opplysningene om eleven til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Navn på elevene vil bli erstattet med koder, der navnelister oppbevares adskilt fra øvrige data. Alt datamateriale vil bli kryptert.

I materialet som skrives eller på annen måte presenteres vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest september 2020.

Så lenge eleven kan identifiseres i datamaterialet, har dere rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om eleven,
- å få rettet personopplysninger om eleven,
- få slettet personopplysninger om eleven,
- få utlevert en kopi av elevens personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av elevens personopplysninger.

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Tone Cecilie Nystrøm på epost (tcnystrom@stavangerskolen.no) eller NTNU ved Eskil Braseth på epost (eskile.braseth@matematikksenteret.no)
- NTNUs personvernombud: Thomas Helgesen
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Jeg håper at dere syns dette er interessant og viktig, og at dere er villig til å la deres ungdom være med på undersøkelsen. Vennligst fyll ut svarslippen, så snart som mulig, om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til å la deres ungdom være med på undersøkelsen.

På forhånd takk.

Vennlig hilsen
Tone Cecilie Nystrøm
tcnystrom@stavangerskolen.no
90727584

Tillatelse

Som en del av undersøkelsen ber jeg om tillatelse til å ta lydopptak av ungdommen din/deres mens de jobber med, og diskuterer matematikk i timene.

Forutsetningen for tillatelsen er at alt materialet blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg/vi gir tillatelse. Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

☐ Jeg/vi gir ikke tillatelse

Sted og dato:

Elevens fornavn og etternavn:

Underskrift av foresatt(e):

NTNU

Kunnskap for en bedre verden