Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Marius Lossius Ellefsen og Per Herman Skuland

Elevers geometriforståelse

En kvantitativ undersøkelse om elevers geometriforståelse gjennom arbeid med og kunnskap om ikke-euklidsk geometri

Masteroppgave i Master i lærerspesialist - matematikk 8.-10. trinn
Veileder: Trygve Solstad
Mars 2021

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Marius Lossius Ellefsen og Per Herman Skuland

Elevers geometriforståelse

En kvantitativ undersøkelse om elevers geometriforståelse gjennom arbeid med og kunnskap om ikke-euklidsk geometri

Masteroppgave i Master i lærerspesialist - matematikk 8.-10. trinn
Veileder: Trygve Solstad
Mars 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Sammendrag

Tidligere forskning har vist en positiv sammenheng mellom undervisning i ikke-euklidsk geometri, deriblant taxicab-geometri, og en økt forståelse for definisjoner og begreper i euklidsk geometri. Forskjellen fra denne tidligere forskningen og vår masteroppgave er tidsaspektet, der vi har hatt begrenset med tid for gjennomføring.

I denne studien ønsker vi å undersøke om undervisning i ikke-euklidsk geometri vil gi elevene en økt forståelse i euklidsk geometri. Siden det er få studier på undervisning av ikke-euklidsk geometri i skolen mener vi det er interessant å ta utgangspunkt i en gruppe ungdomsskoleelever for denne studien.

Studien har benyttet en kvantitativ metode med et kvasi-eksperimentelt design. Det er flere måter å designe et kvasieksperiment på, og vårt valg ble et pretest-posttest-design med én gruppe. Det ble gjennomført en pretest, så en arbeidsøkt med taxicab-geometri, deretter en posttest. Utvalget besto av 38 elever fra 10. trinn. Som test på geometrisk forståelse ble det benyttet en test utviklet av Usiskin (1982), som tar utgangspunkt i van Hiele-modellen. Denne testen måler elevers nivå med tanke på van Hieles nivåer i geometrisk forståelse. Målet med å anvende ikke-euklidsk geometri i dette undervisningsopplegget er å sette fokus på elevenes evne til å tolke og fremstille definisjoner, basert på figurers egenskaper.

Pretesten gir et bilde av elevenes kunnskap før undervisning, mens posttesten gir et bilde av elevenes kunnskap etter undervisning. Selv om gjennomsnittet for elevenes nivå øker fra pretest til posttest, er ikke dette en statistisk signifikant endring. Utfordringen i denne undersøkelsen er tidsaspektet. Det har vært begrensede muligheter til å bruke tid på gjennomføringen av undervisningsopplegget, noe som medfører at det også er begrenset hva vi kan forvente av endringer på testene.

Et viktige funn fra studien vår er at pretesten er viktig for å kartlegge elevenes nivå i geometriforståelse. Dette er viktig for at man skal kunne tilrettelegge undervisningsopplegget for å oppnå best mulig utbytte for elevene. Ifølge De Villiers (2010) er en av grunnene til at geometriundervisningen i mange tilfeller mislykkes, at det undervises på et nivå som er høyere enn elevene har evne til å forstå. Det er også viktig at elevene selv er bevisst på hvilket nivå de selv tilhører, og hva de må vektlegge for å kunne oppnå høyere grad av forståelse.

Gjennom arbeid med ikke euklidsk geometri, som taxicab-geometri, ser vi at elevene må øke fokuset på definisjoner og egenskaper når de jobber med geometriske figurer. Nå innføres ny læreplan i matematikk for grunnskolen, Kunnskapsløftet 2020, hvor innholdet i faget fornyes. Et læringsmål på 9. trinn i den nye læreplanen handler om å endre forutsetninger i geometrien, og se på hvilke konsekvenser dette gir. Dette læringsmålet kan åpne opp for å jobbe med andre geometrier enn euklidsk geometri, og på den måten kan vår studie kanskje fungere som inspirasjon for andre lærere med tanke på undervisning i ikke-euklidsk geometri.

Abstract

Previous research has shown a positive correlation between teaching non-Euclidean geometry, including taxicab geometry, and an increased understanding of definitions and concepts in Euclidean geometry. The difference from this previous research and our master's thesis is the time aspect, where we have had limited time for implementation.

In this study, we want to investigate whether teaching non-Euclidean geometry will give students an increased understanding in Euclidean geometry. Since there are few studies on the teaching of non-Euclidean geometry in schools, we think it is interesting to study a group of middle school students for this research.

The study has used a quantitative method with a quasi-experimental design. There are several ways to design a quasi-experiment, and our choice became a pretest-posttest design with one group. A pretest was conducted, then a working session with taxicab geometry, then a posttest. The sample consisted of 38 pupils from 10th grade. We used a test of geometric understanding, developed by Usiskin (1982), which is based on the van Hiele model. This test measures students' level considering van Hiele's levels of geometric understanding. The aim of applying non-Euclidean geometry in this teaching programme is to focus on students' ability to interpret and produce definitions, based on the characteristics of figures.

The pretest provides a picture of students' knowledge before teaching, while the posttest provides a picture of students' knowledge after teaching. Although the average for students' level increases from pretest to posttest, this is not a statistically significant change. The challenge in this survey is the time aspect. There have been limited opportunities to spend time on the implementation of the teaching programme, which means that there is also limited what we can expect from changes to the tests.

An important finding from our study is that the pretest is important for mapping students' levels in geometric understanding. This is important in order to facilitate the teaching programme in order to achieve the best possible benefit for students. According to De Villiers (2010) one of the reasons geometry teaching in many cases fails is that it is taught at a level higher than students have the ability to understand. It is also important that students themselves are aware of the level at which they themselves belong and what they need to emphasize in order to achieve a higher degree of understanding.

Through work on non-Euclidean geometry, such as taxicab geometry, we see that students need to increase their focus on definitions and characteristics when working with geometric shapes. A new curriculum is now being introduced in mathematics, Kunnskapsløftet 2020, where the content of the subject is renewed. A 9th-stage learning goal in the new curriculum is about changing the assumptions in geometry and looking at the consequences this will have. This learning goal can open up to work with geometries other than Euclidean geometry, and in this way our study may serve as inspiration for other teachers in terms of teaching non-Euclidean geometry.

Forord

Denne masteroppgaven er gjennomført ved NTNU i perioden 2019 – 2021. For vår del utgjør denne oppgaven en avslutning på lærerspesialistutdanningen i matematikk. Lærerspesialistutdanningen har gitt oss ny innsikt innenfor ulike deler av profesjonen og ulike faglige aspekter. Det er i den forbindelse vi har fattet ekstra interesse for den ikke-euklidske geometrien vi har valgt å jobbe videre med i denne oppgaven.

Prosessen med masteroppgaven har vært spennende og lærerik. Det har vært utfordrende å jobbe med oppgaven ved siden av full undervisningsstilling og familieliv med småbarn. Det ble ekstra utfordrende da covid-19 inntok landet og skolene stengte ned. Denne perioden gjorde at vi var tvunget til å legge masteroppgaven litt til side. Vi må derfor rette en stor takk til NTNU som har tilrettelagt for utvidet innleveringsfrist, som har gjort det mulig å gjennomføre dette.

Vi ønsker å takke vår veileder Trygve Solstad, som har kommet med konstruktive tilbakemeldinger underveis og for å stille ressurser ved NTNU til rådighet for å utvikle digitale oppgaver sammen med oss. I tillegg har han vært en god støttespiller i en hektisk innspurt av oppgaven. Vi må også takke Øistein Gjøvik for veiledning i starten av arbeidet med masteroppgaven. Han fikk oss i gang på tema før Trygve Solstad overtok rollen.

Til slutt må vi få takke våre familier som har vært støttende og tålmodige gjennom hele denne prosessen. Uten den tilretteleggingen vi har fått på hjemmebane ville ikke dette vært mulig å gjennomføre.

Risør 27.02.2021

Marius Lossius Ellefsen og Per Herman Skuland

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser/symboler

NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Geometrisk forståelse har en sentral plass i skolematematikken. Geometri er et av to hovedområder som går igjen gjennom hele grunnskolens læreplaner (Utdanningsdirektoratet, 2013). Argumentasjonen til Kuzniak (2013) for hvorfor vi skal lære geometri underbygger læreplanens fokus på geometri gjennom hele utdanningsløpet. Elevene skal (1) utvikle romlige evner og geometrisk tenkning gjennom påfølgende utdanningsnivåer, (2) geometriundervisningen skal knyttes til «den virkelige verden» gjennom geometrisering og anvendelser, (3) en skal benytte instrumentering ved bruk av artefakter som datamaskiner og kjenne til bruken av dem og (4) opparbeide kunnskap og ferdigheter om forklaring, argumentasjon og bevis gjennom geometriutdanningen. Gjennom disse punktene viser Kuzniak (2013) at det er viktig med fokus på geometriundervisningen over lengre tid i utdanningsløpet, samtidig som geometri er viktig for å utvikle ferdigheter på ulike nivåer og emner.

Prestasjoner i matematikk har gjennom flere studier, ifølge Battista, Wheatley, and Talsma (1982), blitt koblet til elevenes geometriske forståelse. Fennema and Behr (1980) mener at elevenes evner til å forstå romlige relasjoner kan vektlegges like tungt som elevenes muntlige ferdigheter, med tanke på prestasjon i matematikk. Battista et al. (1982) sier videre at geometrisk forståelse er en faktor som ligger til grunn for evnen til å tilegne seg matematisk kunnskap på en effektiv måte. Forståelse og ferdigheter innen geometri vil være av betydning for deres matematiske prestasjoner. Elevenes prestasjoner i matematikkfaget måles i grunnskolen ved fullført 10. trinn gjennom eksamen, skriftlig og/eller muntlig. For å se på elevenes utvikling frem til dette stadiet gjennomføres det både nasjonale og internasjonale tester som undersøker elevenes ferdigheter og forståelse innen matematikk.

Undersøkelser viser at elevenes prestasjoner innenfor geometri flater ut utover i ungdomsskolen. En tendens vi observerer er at kunnskap innen geometri har en lavere stigning gjennom grunnskolen enn de andre emneområdene som testes gjennom nasjonale prøver. Knyttet til Battista et al. (1982) som uttrykker at geometrisk forståelse ligger til grunn for evnen til å tilegne seg matematisk kunnskap er dette bekymringsfullt. For å underbygge våre observasjoner har vi undersøkt internasjonale tester som PISA og TIMMS. PISA (Programme for International Student Assessment) måler kompetanse og ferdigheter innen lesing, matematikk og naturfag blant 15 åringer. I PISA 2015 deltok 550 000 elever fra 72 land. Ifølge Kjærnsli and Jensen (2015) knyttes matematisk kompetanse i PISA til individets evne til å formulere, bruke og vurdere matematikk i mange ulike sammenhenger og gjenkjenne hvilken rolle matematikk spiller i samfunnet. Resultatene i matematisk kompetanse i perioden 2003 – 2012 er stabile rundt OECD-gjennomsnittet. Sammenlignet med de andre nordiske landene er resultatene svakere enn Danmark og Finland. Sammenlignet med andre deltakende land som Norge kan sammenligne seg med, ligger de norske resultatene litt bak disse sammenlignbare landene.

TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study) måler også kompetanse innen matematikk blant elever i grunnskolen, i tillegg til naturfag. I denne undersøkelsen deles matematikken inn i emneområdene tall, geometri og statistikk. Det gjør at vi kan hente ut noe mer detaljerte opplysninger fra denne undersøkelsen. I tillegg innhenter den data fra elever på 5. og 9. trinn, noe som gir interessante resultater. Sammenligner en resultatene innenfor geometri mellom 5. og 9. trinn ser en at nivået svekkes utover på ungdomstrinnet. Elevene på 5. trinn scorer godt over det internasjonale gjennomsnittet i geometri. Når vi beveger oss over til 9. trinn ser vi at resultatet nå er tilnærmet likt det internasjonale gjennomsnittet.

Tabell 1 Resultat TIMMS 2016, emneområde geometri

Emneområde	Årstrinn	Score	Internasjonalt gj. Snitt
Geometri	5	559	500
Geometri	9	498	500

(Utdanningsdirektoratet, 2017)

Disse resultatene underbygger vår observasjon om at resultatene ikke ligger på et tilfredsstillende nivå. I og med at resultatene synker oppover i årstrinnene i skolen må en se dette i sammenheng med innholdet i læreplanene. Kompetansen i geometri på ungdomstrinnet går fra å se på det konkrete til å se på forståelsen og det bakenforliggende i geometrien. Innholdet går over til å handle om sammenhenger og definisjoner, og anvendelsen av disse. Emnet blir mer abstrakt og det blir vanskeligere for elevene. I TIMMS er et annet emneområde Algebra. Her scorer elevene på 9. trinn vesentlig under det internasjonale gjennomsnittet. Algebra beskrives som et abstrakt felt som må modnes. Noe av det samme gjelder for geometri på ungdomstrinnet. Det blir mer abstrakt og må, i likhet med algebra, modnes over tid. For å fremskynde denne modningen mener vi det er grunn for å undersøke alternative metoder for å øke forståelsen til elevene innen geometri.

Høsten 2020 iverksettes nye læreplaner, som setter fokus på dybdelæring, i grunnskolen. Ifølge Utdanningsdirektoratet defineres dybdelæring som det å gradvis utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom kjerneområder (Utdanningsdirektoratet, 2019). Elevene bør gis mulighet til å tilegne seg kunnskap som gjør dem i stand til å løsrive seg fra den virkelige verden og gå over i den rent matematiske. Det innebærer at elevene evner å argumentere for geometriske problemstillinger uten nødvendigvis å knytte dette til den reelle verden, men kunne basere sine begrunnelser i definisjoner og matematiske sannheter. Evnen til å kunne anvende kunnskap i ulike sammenhenger, anvende kunnskapen i problemstillinger som er ulike dem man brukte under innlæring, vil styrke elevenes kompetanse og evne til å løse problemer.

I fagfornyelsen er organiseringen av matematikkfaget annerledes enn i tidligere læreplaner. Innføringen av dybdelæring medfører at en underviser innenfor et hovedområde i faget over lengre tid. På 9. trinn i ungdomsskolen vil hovedvekten ligge på geometri i matematikkfaget. Et av de nye målene i læreplanen skal bidra til at elevene øker sin kompetanse i å anvende tidligere innlært kunnskap i nye situasjoner. Elevene skal «utforske og argumentere for hvordan det å endre forutsetninger i geometriske problemstillinger påvirker løsninger». Kompetansemålet knytter seg til den utfordringen vi ser med at matematikkfaget blir vanskeligere for elevene når en beveger seg fra det konkrete og over til det mer abstrakte. Det åpner også opp for muligheten til å trekke inn ulike geometrier for å belyse geometriske definisjoner basert på ulike forutsetninger.

Med utgangspunkt i kompetansemålet fra 9. trinn ønsker vi å sette fokus på matematiske definisjoner innen geometri fra ulike innfallsvinkler. I skolematematikken er den euklidske geometrien lagt til grunn for all utforsking og innlæring av kunnskap. Den nye læreplanen setter fokus på å endre forutsetninger, og den mest grunnleggende forutsetningen en kan endre er typen geometri. Ved bruk av ikke-euklidsk geometri vil en kunne se på de definisjonene en bruker i skolematematikken i nytt lys, og på den måten oppnå en større forståelse for selve definisjonen, og for euklidsk geometri. Undersøkelser viser, ifølge Ada and Kurtulus (2012), at den teoretiske kunnskapen som dekkes av euklidsk geometri alene ikke gir elevene den forståelsen elevene trenger om den reelle verden. På bakgrunn av dette ser det uunngåelig ut å introdusere et sett med geometrier, inkludert ikke-euklidske, i undervisningen.

1.2 Studiens formål og forskningsspørsmål

Som matematikklærere har vi et ønske om å forbedre våre elevers kompetanse innen matematikkfaget. En av faktorene for å øke ferdigheter i matematikk er elevenes geometriforståelse. På bakgrunn av dette ønsker vi å se nærmere på undervisning som vi mener kan bidra til å øke elevenes forståelse innenfor geometri. En av fordelene med å anvende ikke-euklidsk geometri i undervisningen er, ifølge Krause (1986), at den kan øke forståelsen for euklidsk geometri på samme måte som kunnskap om tolvtallsystemet øker elevenes forståelse for titallssystemet. Krause (1986) mener også at nyhetens interesse kan slå positivt for elevene. Den ikke-euklidske geometrien belyser et kjent tema på en ny måte for eleven og vekker ny interesse for temaet. I tillegg vil inkluderingen av ikke-euklidsk geometri belyse den aksiomatiske tenkemåten i seg selv. Det vil bli satt fokus på at et aksiom er avhengig av et sett med andre aksiomer. Vi ønsker derfor å på ikke-euklidsk geometri som et redskap for å øke elevenes forståelse og anvendelse av definisjoner innenfor den euklidske geometrien.

Dette er utgangspunkt for følgende problemstilling:

Hvordan kan kunnskap om ikke-euklidsk geometri bidra til økt geometriforståelse?

Når det kommer til valg av ikke-euklidsk geometri har vi valgt å ta utgangspunkt i taxicab-geometri. Dette er en ikke-euklidsk geometri med en metrikk som skiller seg fra euklidsk geometri. Endringen i metrikken gjør at vi får interessante resultater når vi ser nærmere på ulike geometriske definisjoner. Taxicab-geometrien er det Krause (1986) kaller en «ett aksiom unna»-geometri. Forskjellen mellom euklidsk geometri og taxicab-geometrien er kun metrikken, hvordan en måler avstand. «Euklidsk geometri ser ut til å være en god modell for den naturlige verden, mens taxicab-geometrien er en bedre modell for den konstuerte urbane verden bygd av menneskene» Ada and Kurtulus (2012). I tillegg mener Ada and Kurtulus (2012) at denne taxicab-geometrien er enkel og intuitiv å forstå for elever.

2 Teori

2.1 Læringsbaner

Som en overordnet struktur i vår forskning har vi brukt hypotetiske læringsbaner i vår forskning. Vi har brukt digitale hjelpemidler for å gjøre innlæringen til elevene mer effektiv og forskning viser at bruken av læringsbaner åpner opp nye muligheter for å bruke digital teknologi ved konstruksjon av matematikk og for å forstå matematisk kunnskap. (Sacristán et al., 2009)

I følge Sacristán et al. (2009) handler læringsbaner om å legge opp en løype for elevene slik at de lærer et gitt pensum. Sacristán et al. (2009) bruker også digital teknologi som et hjelpemiddel i denne sammenheng. Digital teknologi gjennom ulike plattformer kan være med på å gi muligheter til at elevene kan introduseres for matematisk innhold på et høyere nivå tidligere enn vi vanligvis gjør i dagens skole.

2.1.1 Hypotetiske- og faktiske læringsbaner

Læringsbaner deles inn i to hovedkategorier. Vi skiller mellom hypotetiske læringsbaner og faktiske læringsbaner. De hypotetiske læringsbanene omhandler en beskrivelse av elevenes matematiske mål, matematiske oppgaver eller problemer som elevene skal løse for å nå målet, og en plan som beskriver elevenes hypotetiske læringsprosess. Den hypotetiske læringsbanen fastsettes i forkant av at en aktivitet gjennomføres. Bak utarbeidelsen av en slik plan trengs en del forkunnskaper. Simon and Tzur (2004) lister opp følgende momenter til fordel for hypotetiske læringsbaner:

1. Utarbeidelsen av en hypotetisk læringsbane er basert på forståelse for elevenes nåværende kunnskapsnivå.
2. En hypotetisk læringsbane er et verktøy for planlegging av elevenes innlæring av spesifikke matematiske temaer.
3. Matematiske oppgaver er i seg selv et verktøy for innlæringen av matematiske temaer, de er derfor en viktig del av den forklarende prosessen.
4. Fordi dette er en hypotetisk læringsbane vil læreren kontinuerlig måtte tilpasse den hypotetiske læringsbanen underveis.

Gjennom denne prosessen er fordelen at den hypotetiske læringsbanen kobler sammen utviklingen av elevenes psykologiske prosesser med forklarende sekvenser som fremmer matematiske temaer.

Den faktiske læringsbanen er den prosessen eleven ender opp med å følge. Den blir til gjennom et kontinuerlig samspill mellom lærer og elev. Utgangspunktet for prosessen er den hypotetiske læringsbanen, men den må kontinuerlig evalueres og tilpasses den enkelte elev av den ansvarlige lærer. Endringer kan forekomme på bakgrunn av vanskeligheter som oppstår underveis, eksempelvis manglende forkunnskaper eller at tilnærmingen ikke er den optimale for den enkelte elev.

Læringsbaner konseptualiseres som en beskrivelse av elevenes tenkning og læring innenfor et spesifikt matematisk emne og en foreslått rute gjennom et sett med instruerende oppgaver som er utviklet for å igangsette mentale prosesser og handlinger for å hjelpe elever gjennom en utviklende progresjon gjennom forståelsesnivåer. Alt dette er utviklet med tanke på at elevene skal oppnå et høyere matematisk nivå innenfor et spesifikt emne. (Clements & Sarama, 2004)

I vår studie bruker vi digital teknologi for å fremme kunnskap og gi elevene muligheter øke sin geometriforståelse. Den digitale teknologien vil påvirke måten elevene tilegner seg det matematiske temaet. Likevel er det elevens tidligere kunnskap som styrer hvordan eleven bruker teknologien og dermed påvirker hvilken funksjon den vil ha i innlæringen (Hoyles & Noss, 2003). I utarbeidelsen av en hypotetisk læringsbane er det derfor viktig å legge vekt på oppgaver som skal fremme elevenes muligheter til å uttrykk, presentere, bruke, teste, raffinere og revidere eller justere sine tenkemåter. (Lesh & Yoon, 2004).

Den digitale teknologien vil kunne være et hjelpemiddel for elevene til å uttrykke seg, dersom de kjenner til bruken av den. En hypotetisk læringsbane som anvender digital teknologi, må ligge nært opptil elevenes forkunnskaper knyttet til bruken av teknologien. For stort sprik vil kunne gi redusert nytte eller feil bruk av teknologien.

I arbeidet med å utvikle hypotetiske læringsbaner er det viktig å fokusere på målet med undervisningen, hvor skal læringsbanen lede elevene. Det er i tillegg vesentlig å være klar over at denne læringsbanen må justeres underveis i forhold til elevenes progresjon, samt hvilken påvirkning den digitale teknologien har på elevenes læring og elevene på den.

2.2 Euklidsk geometri

I læreplanen for matematikk, gjeldende frem til høsten 2020, i den norske grunnskolen er det en kortfattet oppsummering av hva geometrifaget skal inneholde.

«Geometri i skolen handler blant annet om å analysere egenskaper ved to- og tredimensjonale figurer og gjøre konstruksjoner og beregninger. Man studerer dynamiske prosesser som speiling, rotasjon og forskyvning. Hovedområdet omfatter også å beskrive plassering og forflytning i rutenett, kart og koordinatsystemer (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Det er ingen føringer på hva slags geometri en skal legge til grunn for undervisningen, men det er likevel en geometri som blir brukt i den norske skolen, samt i de fleste andre utdanningstilbud. Selv om det er mange ulike geometrier, blir skolematematikken i all hovedsak viet til den euklidske geometrien (Buda, 2017).

Læreplanen som trer i kraft høsten 2020 gir ingen direkte oppsummering av innholdet i geometridelen av matematikkfaget. Det legges nå større vekt på kjerneelementene i faget. Et av disse kjerneelementene er «Utforsking og problemløsning». Her fokuseres det på at elevene skal analysere og forme om kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om løsningene er korrekte (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Det fokuseres på forståelsen av matematikken og anvendelsen av denne.

Et av kompetansemålene i matematikk for 9.trinn lyder som følger: «elevene skal kunne utforske og argumentere for hvordan det å endre forutsetninger i geometriske problemstillinger påvirker løsninger (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Det å endre forutsetninger i geometrien vil kunne være slike endringer vi gjør i denne oppgaven, nettopp å se på geometriske definisjoner i geometrier der forutsetningene ikke er like de vi har i den tradisjonelle skolegeometrien, den euklidske geometrien.

2.2.1 Euklid

Euklid hadde sitt virke rundt år 300 f.Kr. Det antas at han fikk sin opplæring innen matematikk i Athen, fra elevene til Platon. Videre er det beskrevet at han opprettet en skole i Alexandria i Egypt, der han også underviste. I tillegg til å undervise skrev han en rekker verk. Disse verkene omhandler matematikk, og i stor grad geometri og elementær geometrisk analyse. Det mest kjente verket til Euklid er Elementene. Matematikken som blir omhandlet her er ikke Euklids egen, men en sammenfatning av matematikk som allerede var oppdaget. Det Euklid gjorde var å samle den i et verk og satte den sammen i en pedagogisk rekkefølge (Venema, 2011). Eksempler på at matematikken var kjent før Euklids tid er teoremet om likebeinte trekanter, som kan knyttes til Thales. Likeledes teoremet om vinkelsummen i en trekant, samt teoremet om sidene i en rettvinklet trekant, som kan knyttes til Pytagoras. Begge disse levde om lag 300 år før Euklid (Hartshorne, 2013). Det er fascinerende å se at den matematikken som ble oppdaget av disse personene får så lenge siden, fortsatt danner grunnlaget for den moderne matematikken vi bruker i dag.

2.2.2 Euklidsk geometri

Den gamle geometrien, pre-Euklid, har sitt opphav fra praktiske problemstillinger som måtte løses i samfunnet. Det ble laget et sett med regler, som skulle fungere i den reelle verden, for å kunne måle opp jordstykker, planlegge byer og bygge bygninger. Når vi kommer til tiden Euklid har sitt virke, ser vi en vesentlig endring i matematikken. Fra å være knyttet sterkt til den reelle verden, med sine imperfeksjoner og svakheter, går vi nå over til å knytte matematikken til en idealistisk verden, en abstrakt verden. Geometri endrer nå status fra å være en praktisk vitenskap, til å bli en studie av relasjoner i en ideal eksistens. Fokuset nå ligger på en eksakt løsning og ikke en løsning som er tilpasset det praktiske problemet som er opphavet til matematikken (Hartshorne, 2013).

Den euklidske geometrien bygger på de definisjonene, postulatene og vanlige oppfatninger som Euklid har kommet frem til. Dette er antakelser som er ment å bli akseptert uten bevis. Han utviklet fem postulater som ikke kan bevises, men som ligger til grunn for den geometrien vi anvender i skolematematikken:

Postulat 1: Det er mulig å tegne en rett linje fra et punkt til et annet.

Postulat 2: Det er mulig å forlenge et linjestykke til en vilkårlig lang linje

Postulat 3: Det er mulig å definere en sirkel ved hjelp av sentrum og radius.

Postulat 4: Alle rette vinkler er kongruente hverandre

Postulat 5: Hvis en rett linje som skjærer to rette linjer lager innvendige vinkler på samme side som er mindre enn to rette vinkler, vil de to rette linjene, dersom de er av uendelig lengde, møtes på den siden der de innvendige vinklene er mindre enn to rette vinkler.

Disse to siste postulatene er de påstandene Euklid trenger i flere av sine bevis. Påstander som ikke bevises, men som danner grunnlaget for videre geometriske utledninger.

Bøkene til Euklid, kalt Elementene, har hatt en stor betydning for vitenskapelig arbeid i tiden etter hans virke. Disse har vært med på å sette standarden for hvordan en skal organisere logiske tankerekker, og har vært modell for utviklingen av flere vitenskapelige og filosofiske teorier (Venema, 2011).

Den euklidske geometrien bygger på noen grunnsteiner som en må godta, som ikke bevises. Ut ifra disse bygges geometrien lag på lag, og bevises med disse grunnsteinene i bunn, eller ut ifra andre tidligere bevis. Oppbygningen er logisk og gjør det mulig å studere deler av geometrien basert på noen sett med regler. Dette gjøres i grunnskolen i dag. Vi begynner med ett sett med regler som vi gradvis utvider og dermed øker elevenes muligheter til å utforske geometri. Læreplanen som introduseres høsten 2020 fastsetter at elevene allerede etter 2. årstrinn skal kunne utforske, tegne og beskrive geometriske figurer fra sitt eget nærmiljø og argumentere for måter å sortere de på etter egenskaper (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Vi ser her at elevene på 2. trinn skal bruke figurenes egenskaper i forbindelse med kategorisering av figurene. Allerede her starter arbeidet med å utvikle logiske resonnement og argumentasjonsrekker. Elevene legger et grunnlag for videre arbeid med geometri.

Læreplanen legger ikke føringer for hvilken geometri en skal anvende som base for opplæringen i grunnskolen. Det er praksis for å bruke euklidsk geometri, men likevel kan det være positivt for den geometriske forståelsen å anvende andre typer geometrier. Dette kan gi elevene dypere forståelse for definisjoner innenfor geometri (Krause, 1986)

2.3 Ikke-euklidsk geometri

En ikke-euklidsk geometri vil fravike den euklidske geometri på minst ett av de grunnleggende postulatene til Euklid (Venema, 2011). Flere geometrier skiller seg fra euklidsk geometri på det femte postulatet. I det femte postulatet sier Euklid at to rette linjer er parallelle, dersom de er i samme plan og forlenges i det uendelige, ikke skjærer hverandre i noen retning. Euklid beviser dette ved en rett linje som skjærer begge de parallelle linjene. Dersom de indre alternerende vinklene er like, at de korresponderende vinklene er like, eller at de indre vinklene på samme side er supplementære, så er de to linjene parallelle. Euklid beviser også det motsatte. Hvis en rett linje som skjærer to rette linjer danner indre vinkler på samme side som er mindre enn to rette vinkler, vil de to rette linjene, dersom de forlenges uendelig, møtes på den siden der vinklene er mindre enn to rette vinkler (Venema, 2011).

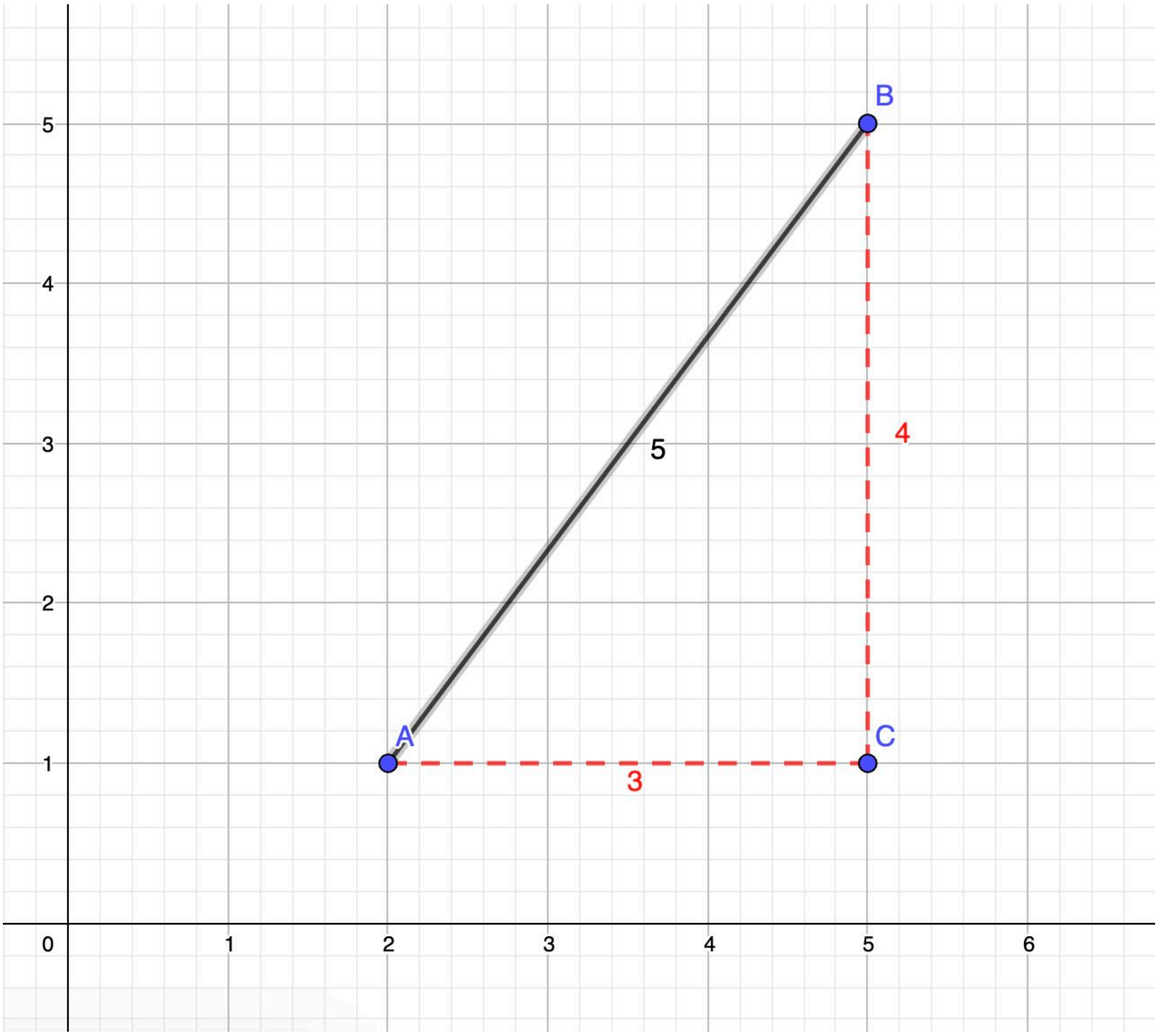
I hovedsak er det parallellpostulatet som skiller geometrier fra den euklidske geometrien. Euklidsk geometri danner en parallell linje gjennom et punkt utenfor en rett linje, mens det i andre geometrier ikke vil være noen parallelle linjer, eller at det er flere parallelle linjer gjennom dette punktet. Det kan også være andre grunnleggende forskjeller i geometriene, eks. hvordan en måler avstand, definisjon av plan osv., men felles er at det er grunnsystemene i geometrien som endres. Forutsetningene for videre oppbygning og anvendelse av geometrien skiller seg fra den euklidske. Likevel vil definisjoner og regler være like, men de vil kunne gi andre resultater enn hva en forventer i den euklidske geometrien (Krause, 1973). Det er nettopp slike forskjeller vi ønsker å dra nytte av i denne studien, og bruke dem til å øke elevenes forståelse for de geometriske definisjonene.

2.3.1 Taxicab-geometri

Vi har i denne studien valgt å konsentrere oss om en ikke-euklidsk geometri, taxicab-geometri. Vi har valgt denne fordi dette er en geometri som er lett tilgjengelig for elevene, nært knyttet til praksis. Den er også kun «ett aksiom unna» den euklidske geometrien i sin grunnstruktur (Krause, 1973).

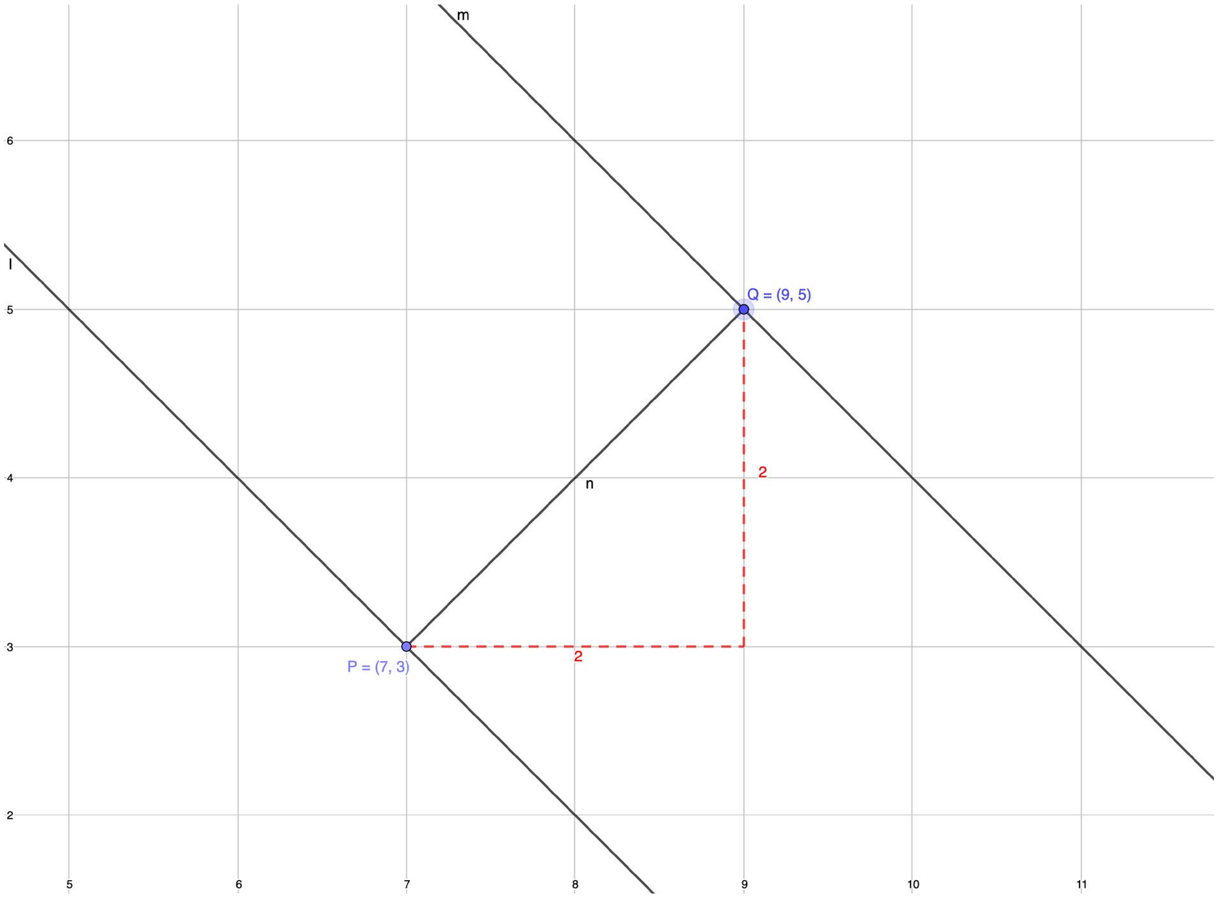
I euklidsk geometri måler vi avstand «as the crow flies». Det vil si at vi ser på korteste avstand mellom to punkt i en rett linje. Figur # viser to punkt, A og B, og hvordan vi måler avstanden i den euklidske geometrien gjennom det sorte linjestykket. I følge Pytagoras setning vil $d_E(A,B) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

I taxicab-geometri definerer vi ikke avstand på samme måte som i euklidsk geometri. I taxicab-geometri ser vi på absoluttverdien til summen av endring i x- og y-verdi mellom A og B. Den formelle definisjonen på avstand i taxicab-geometrien er $d_T\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Anvender vi denne definisjonen på eksempelet i figur # vil vi få følgende regnestykke: $d_T\big((A,B)\big) = |2-5| + |1-5| = 3 + 4 = 7$. Avstanden mellom A og B vil i taxicab-geometrien være 7.



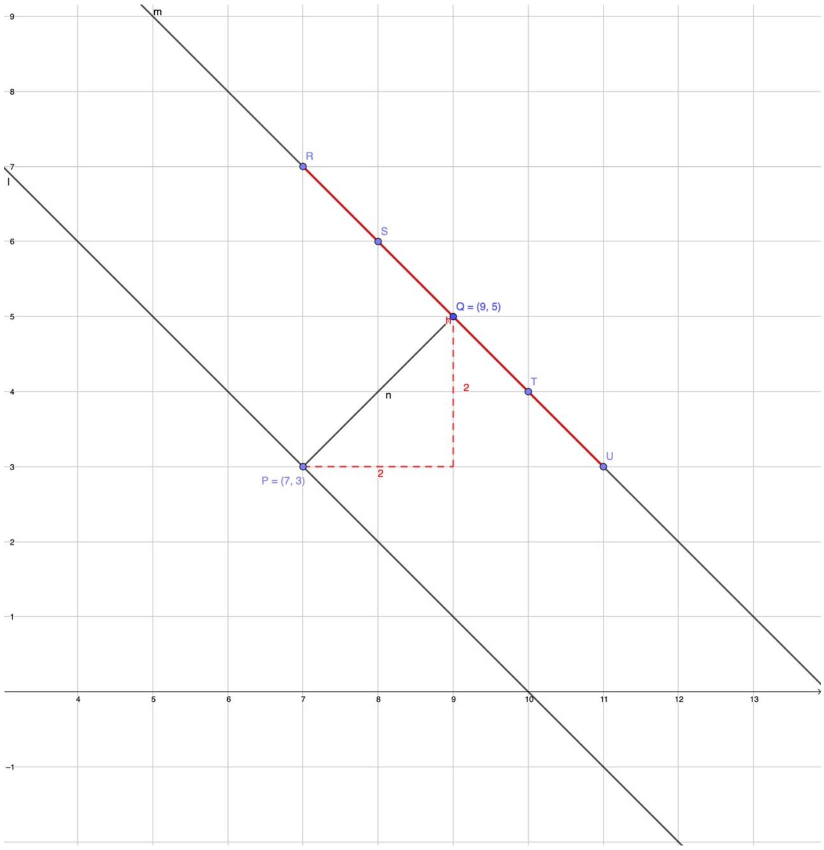
Figur 1 Illustrasjon som viser måling av avstand i taxicab-geometrien

Slike endringer i grunndefinisjonene til en geometri vil gi konsekvenser for andre definisjoner og læresetninger. Vi har nevnt parallellpostulatet i euklidsk geometri som et postulat som gir ulike resultater i ulike geometrier. En konsekvens av parallellpostulatet i euklidsk geometri er at et hvert punkt på linja l har kun et punkt på linja m med avstand lik lengden mellom P og Q, når m og l er parallelle og n står vinkelrett på l og m. Av Pytagoras setning følger det da at lengden mellom l og m er $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.



Figur 2 Avstand mellom parallelle linjer i taxicab-geometrien

I taxicab-geometrien vil avstanden mellom linja l og m regnes ut basert på formelen for avstand i denne geometrien. Avstanden mellom P og Q vil derfor bli som følger, $d_{PQ} = |7-9| + \lceil 3-5 \rceil = 2+2$=4. Basert på hvordan vi beregner avstand i denne geometrien vil vi også ha flere punkter på linja m som ligger like langt fra punktet P på linja l.



Figur 3 Punkter på parallell linje med samme avstand til P

Punktene R, S, T og U har alle samme avstand fra P.

$d_{PR} = |7-7| + \lceil 3-7 \rceil = 0+4 = 4$, $d_{PS} = |7-8| + \lceil 3-6 \rceil = 1+3 = 4$, $d_{PT} = |7-10| + \lceil 3-4 \rceil = 3+1 = 4$ og $d_{PU} = |7-11| + \lceil 3-3 \rceil = 4+0 = 4$. Alle punktene her har avstand lik 4 fra P. Det er heller ingen punkter som ligger nærmere P, som også ligger på m, det medfører at korteste avstand mellom l og m er 4, samtidig som det er flere punkter som ligger med samme avstand. Dette betyr at alle punktene på linja m, som ligger mellom R og U, har en avstand lik 4 til P. Dette skiller seg fra euklidsk geometri der punktet P kun har et punkt på linja m med avstand lik 4.

Antall punkter på linja m, som er parallell med linja l, med lik avstand til punkt P på linja l, vil variere ettersom vinkelen mellom linja l og x- og y-aksen varierer. Dersom linja l er parallell med enten x- eller y-aksen vil det kun være ett punkt på linja m, som har den minste mulige avstanden til punktet P på linja l. Selv om det visuelle inntrykket av to parallelle linjer er like i de to geometriene, vil konsekvensene av parallelliteten være forskjellige.

2.4 Læringssyn

Vår masteroppgave omfatter forståelse, og da gjerne en relasjonell forståelse knyttet til arbeid med geometri, og på bakgrunn av dette heller vårt syn mot et konstruktivistisk læringssyn. Konstruktivisme tar utgangspunkt i teori om hva kunnskap er og om hva det vil si å tilegne seg kunnskap, altså om hvordan læring skjer (Imsen, 2006). Ifølge et konstruktivistisk læringssyn lærer man ved å gjøre ting og å høste erfaringer av det en gjorde. Erfaring er et samspill mellom det å gjøre noe og å se hva handlingen førte til, og på den måten blir læring noe en bidrar til selv gjennom aktivitet og handling. Piaget brukte ordet læring om det å lagre kunnskap fra en ytre påvirkning, og læring som krever forståelse betegnet han som utvikling (Imsen, 2006).

Siden læring ikke er ren gjenkalling eller memorering, men derimot en omforming av informasjonen, ligger det implisitt i disse utsagnene at læring innebærer konstruksjon slik at informasjonen framstår som personens egen, private fortolkning (Imsen, 2006). Elevene tar ikke imot kunnskap, de konstruerer den, og læreren kan bare hjelpe til. Kunnskap kan bare forstås som elevenes arbeid eller tenkning i forhold til omverdenen, og de vil derfor ha sin egen subjektive oppfatning av verden rundt seg. Taxicab-geometri handler om en urban geometri, der man bruker et bybilde med gater som elevene er kjent med.

Piaget skiller mellom to typer kunnskap, figurativ kunnskap og operativ kunnskap (Imsen, 2006). Figurativ kunnskap er basert på fysisk læring, som er å ha kjennskap til hvordan ting ser ut og hvilke egenskaper de har. Denne kunnskapen vil vanligvis være begrenset til enkeltstående sansebilder, som f. eks å huske navnet på geometriske figurer. Mekanisk læring i matematikken er utbredt, der elevene bruker formler ukritisk uten å vite hva symbolene står for, eller der elevene gjenkjenner figurer på bakgrunn av figurenes utseende, og ikke deres egenskaper. Det laveste van Hiele-nivået karakteriseres ved nettopp dette, at elevene kan gjenkjenne figurer på bakgrunn av figurenes utseende, og for å komme til et høyere nivå kan ikke elevene basere seg på denne typen kunnskap. Operativ kunnskap er en logisk-matematisk læring, som er varig og elevens egen. Slik kunnskap har utgangspunkt i handling overfor tingene og ikke i observerte egenskaper ved dem, altså vil elevene få en forståelse for at det er en sammenheng mellom ulike figurers egenskaper og utseendet. Både symboler og tegn, enten det er bokstaver, ord, formler eller figurer har både en figurativ og en operativ side. Symbolet ytre form er figurativ, mens meningen bakom tegnet, derimot, er operativ. Denne typen kunnskap får elevene opp på et høyere nivå i van Hiele-modellen, og er derfor viktig for at elevene skal øke sin geometriforståelse.

Det kan være utydelige skiller mellom konstruktivistiske, sosialkonstruktivistiske og sosiokulturelt inspirerte tilnærminger til elevens læring i skolen. Konstruktivisme er et overordnet begrep for all type konstruktivisme. Innenfor konstruktivismen finner vi en rekke ulike læringsteoretiske perspektiver. Det sosiokulturelle er et perspektiv. Dette perspektivet bygger på et konstruktivistisk syn på læring (Dysthe, 2001). Videre legges det vekt på i et sosiokulturelt perspektiv at kunnskap og læring konstrueres gjennom samhandling med andre, og bruken av medierende redskaper er sentrale for læring. Ifølge Säljö (2001) menes redskaper som de ressurser vi har tilgang til, og som vi bruker når vi forstår vår omverden og handler i den. I vår læringsprosess blir redskapene altså hjelpemidler vi blant annet tar i bruk for å kommunisere med andre, men også som støtte og hjelp i læringsprosessen. Eksempler på medierende redskaper er fysiske som PC, men også intellektuelle som bruk av språk. Ved gjennomføringen av undervisningsopplegget satt elevene i par, noe som vi ønsket at skulle bidra til samtale mellom elevene mens de jobbet med oppgaver, hvor de måtte bruke begreper og figurers egenskaper i samtalen. Læringen skulle derfor konstrueres i samhandling med en læringspartner, og hvert elevpar satt med en PC, som de brukte til å jobbe seg gjennom oppgavene.

Carpenter, Franke, and Levi (2003) peker på at forklaringer som hører til spesielle matematiske begrep vil avhenge av elevenes definisjon og representasjon av begrepet. Elevenes oppfatning av geometriske definisjoner vil dermed være en del av det som former forklaringene som elevene for begrepet i vår undersøkelse. Når elever lærer nye begreper og prosedyrer for løsning av problemer er de nødt til å gi mening til disse for å kunne forklare og begrunne dem selv.

Det er ikke mulig å uttale seg om elevers kompetanse direkte, bare hvordan de formidler sin kompetanse bed hjelp av redskaper (Säljö, 2001). I denne masteroppgaven skal elevenes kompetanse i form av geometrisk forståelse undersøkes. Med elevenes forståelse menes den kompetansen de viser gjennom besvarelser på oppgaver, og ikke elevenes direkte kompetanse.

2.5 Geometriforståelse

Skemp (1976) foreslår to typer matematisk forståelse som man snakker om ved matematikklæring i skolen; instrumentell og relasjonell forståelse. I begrepet instrumentell forståelse ligger pugging av regler og definisjoner, og hvordan disse benyttes. Relasjonell forståelse går på elevens personlige involvering med matematiske objekter, situasjoner, problemer og ideer.

2.5.1 Van Hiele nivåene

2.5.1.1 Bakgrunn

Det nederlandske ekteparet Dina van Hiele-Geldof og Pierre van Hiele, begge matematikere utviklet en ide om å utarbeide en modell for ulike nivåer av forståelse innenfor geometri. De så at elevene støtte på utfordringer når de kom høyere opp i utdanningssystemet, og at det var behov for en felles forståelse for hva som var viktig med tanke på den undervisningen som ble gitt. Det var den undervisningen læreren ga elevene som skulle bringe elevene høyere i sin forståelse av geometri. Tanken var da at dersom denne modellen ble fulgt skulle den medføre økt forståelse i geometri blant elevene (Crowley, 1987).

2.5.1.2 Nivåer

Pierre van Hiele utviklet en modell der han delte inn den geometriske forståelsen i 5 nivåer. Han utviklet strukturen i modellen, som inkludert tanker og prinsipper som fullt ut skal hjelpe studenten å utvikle forståelse for geometri (Fuys, Geddes, & Tischler, 1988) i (Watson, 2012). Modellen skal hjelpe den som underviser å undervise på et nivå som elevene forstår. Problemene starter for elevene når de blir undervist på et nivå de ikke forstår (Watson, 2012). Modellen gir karakteristikker av de ferdighetene elevene skal inneha på de ulike nivåene, slik at den som underviser vet hvilket nivå undervisningen skal ha.

I de fire første nivåene av modellen til van Hiele er det noen begreper som er meget sentrale. Ifølge Gutiérrez, Jaime, and Fortuny (1991) er følgende begreper viktige for å beskrive elevenes forståelse på de ulike nivåene:

Identifisering av gruppen et geometrisk objekt tilhører.

Definisjon av et konsept, forstått fra to forskjellige utgangspunkt: Å lese definisjoner, det er å anvende gitte definisjoner, og å utlede definisjoner, som er å formulere en definisjon for en gruppe geometriske objekter.

Klassifisering av geometriske objekter i ulike grupper.

Bevis av egenskaper eller påstander, som er å overbevise andre om at en påstand er sann.

Disse begrepene bruker Gutiérrez et al. (1991) i sin beskrivelse av de ulike nivåene i modellen til van Hiele. Noen av begrepene forekommer ikke på alle nivåene på grunn av nivåenes kompleksitet, eller mangel på sådan.

2.5.1.2.1 Van Hiele – modellen nivå 1

Dette nivået karakteriseres av at elevene kan gjenkjenne figurer på bakgrunn av figurenes utseende. Eleven ser her på hvordan elementer er plassert i forhold til hverandre, størrelsen på ulike elementer og forholdet mellom ulike elementer. Disse egenskapene brukes uten at eleven nødvendigvis kan uttrykke dette korrekt matematisk.

Elevene ser kun på attributter som refererer til figurenes utseende. Alternativt brukes ikke-matematiske egenskaper som «runding» i stedet for sirkel. Elevene klarer ikke på dette nivået å lese matematiske definisjoner. For en del elever blir navnet på figuren definisjonen i seg selv, for eksempel en firkant er en firkant.

På dette nivået klarer ikke elevene å se sammenheng mellom ulike grupper av geometriske figurer. Elevene klarer heller ikke se sammenheng mellom to figurer innenfor samme gruppe som har stor forskjell i sitt utseende. Et eksempel på dette er to likebeinte trekanter med vinkler på 50, 50 og 80, og 82, 82 og 16.

2.5.1.2.2 Van Hiele – modellen nivå 2

Når elevene beveger seg over til dette nivået begynner de å gjenkjenne egenskapene til de geometriske figurene. Elevene får forståelse for at det er en sammenheng mellom ulike figurers egenskaper og utseendet. De kan derfor karakterisere og kategorisere figurer basert på deres egenskaper. Elevene anvender nå mer enn kun det visuelle. De bruker kunnskap om geometriske objekter og knytter denne til den visuelle figuren. De geometriske figurene analyseres av eleven. Likevel har ikke elevene kunnskap om hvilke egenskaper som er nødvendig, eller hvilke egenskaper som er tilstrekkelige, for å kategorisere dem. Til forskjell fra nivå 1 vil elever på dette nivået håndtere definisjoner tilhørende nye figurer når de introduseres for dem. På nivået under vil elevene nøye seg med å huske utseendet på den nye figuren.

2.5.1.2.3 Van Hiele – modellen nivå 3

På nivå 3 har elevene tilegnet seg kunnskap om grunnleggende definisjoner for geometriske figurer. De har og evnen til å se sammenhengen mellom ulike egenskaper hos de ulike figurene. På denne måten vil de kunne kategorisere figurer i grupper basert på ulike egenskaper figurene har til felles.

Elevene har også kunnskap om ulike typer bevis, både formelle og uformelle. Gjennom denne kunnskapen vil eleven kunne følge en argumentasjon, en bevisrekke, men eleven vil ikke kunne formulere et bevis på egenhånd. Kunnskapen gir grunnlag for å argumentere for sammenhenger, men ikke bevise dem.

Når det kommer til egenskaper som må til for at en figur skal oppfylle kravene til en enkelt geometrisk definisjon, har eleven nå grunnlag for å se hvilke egenskaper som er tilstrekkelige for at en definisjon er oppfylt, eller at en figur entydig kan tolkes som en spesifikk geometrisk figur.

2.5.1.2.4 Van Hiele – modellen nivå 4

Dette nivået handler om å kunne se de overordnede trådene i geometrien, de deduktive systemene. Elever på dette nivået har oversikt over strukturen i den geometrien en jobber i. Dette kan sammenlignes med systemet Euklid prøvde å bygge opp, der teorien bygger på aksiomer, definisjoner og logiske slutninger.

Når elevene har oversikt over den grunnleggende strukturen i geometrien vil de også ha evnen til å gjennomføre bevis, på bakgrunn av den kunnskapen som er innlært tidligere.

2.5.1.2.5 Van Hiele – modellen nivå 5

Evnen til å analysere deduktive systemer er sentralt på dette nivået. Elevene vil kunne jobbe med ulike geometrier, euklidsk og ikke-euklidsk, og ha oversikt over hvilke forskjeller og likheter det er mellom disse. Elevene vil også kunne se hvilke konsekvenser en endring utskifting av et aksiom vil medføre i den aktuelle geometrien.

2.5.1.2.6 Van Hiele – modellen - utdypende

Som en av flere påpeker Watson (2012) at det er visse momenter denne modellen ikke tar høyde for. Et av disse er at det ikke defineres noe forut for nivå 1. Watson (2012) beskriver et nivå 0 der eleven ikke har forståelse for det grunnleggende visuelle innenfor geometrien. Eleven vil på dette nivået ikke ha evnen til å gjenkjenne geometriske figurer basert på deres utseende.

Van Hiele mener selv at elevene når nivåene i rekkefølge. En elev kan ikke bevege oppover ved å hoppe over nivåer. Elevene må gjennom alle nivåene i utviklingen.

2.5.1.3 Innlæring av ulike nivåer

Det er viktig at elevene mestrer nivåene kronologisk. En elev kan ikke hoppe over et nivå. Eleven vil da miste essensiell kunnskap i utviklingen. Det vil medføre svekket forståelse for det nivået eleven har oppnådd. Likeledes vil undervisning som blir gitt på et høyere nivå enn eleven er på føre til såkalt «reduction of level». Dette fører til at elevene lærer utenat, fremfor å kjenne til bakgrunnen for ulike teorier. Den kunnskapen elevene lærer vil ikke nødvendigvis gi mening for eleven.

Hvert nivå i modellen til van Hiele har sitt språk og symboler. Et nivå inneholder kunnskap på et bestemt nivå og har et sett med begreper som er tilpasset dette nivået. Noe som ligger implisitt på et nivå vil bli eksplisitt på neste nivå. Elever som tilhører ulike nivåer i modellen, vil derfor snakke ulike «språk». De har nivåtilhørige begreper som den andre parten ikke kjenner til. Kunnskap som er kjent for den ene parten vil ikke være tilgjengelig for den andre. Det vil derfor være vanskelig å kommunisere faglig mellom nivåene. Den som tilhører høyest nivå må nødvendigvis tilpasse sin del av kommunikasjonen til det lavere nivået for at informasjonen skal være forståelig for den andre parten. Det er derfor viktig at lærere underviser på et nivå som er tilpasset eleven. Om så ikke er tilfelle vil avansement til neste nivå i modellen utebli.

2.5.2 Van Hiele – test

Når van Hiele presenterte sin modell for geometriforståelse, vokste det frem et behov for å lage en test som kunne indikere hvilket nivå i modellen en elev tilhører. Van Hiele beskriver et dilemma der elevene ikke utvikler sin geometriforståelse dersom læreren ikke underviser på nivået eleven befinner seg. Denne problematikken ligger til grunn for behovet av en test som forteller hvilket nivå eleven befinner seg.

I utviklingen av en slik test har det vokst frem to hovedretninger av tester. Den ene retningen bruker konkrete oppgaver med svaralternativer for å bestemme elevenes forståelsesnivå. Denne testen gjennomføres skriftlig og rettes etter gitte kriterier. Usiskin (1982), en kjent geometriker, har utviklet en test som oppfyller disse kriteriene. Usiskin (1982) ønsket en test som plasserte elevene på ulike nivåer med hensyn til deres forståelse for geometri. Usiskin (1982) så problemet med at elever som ikke blir undervist på et nivå som samsvarer med deres forståelse, ikke fikk optimalt utbytte av undervisningen. Han gjennomgikk derfor et enormt arbeide med å gjennomføre en studie som så på elevers progresjon knyttet til nivåene i van Hiele -modellen. Denne van Hiele-testen har senere blitt brukt i større utstrekning enn forventet av utviklerne.

En annen retning tar utgangspunkt i elevenes evne til å uttrykke sin kunnskap muntlig. Testen som Burger and Shaughnessy (1986) har utviklet administreres gjennom ulike intervju. Testen tar derfor mye tid å gjennomføre og er ressurskrevende. Denne testen gir, i motsetning til testen utviklet av Usiskin (1982), mer detaljert kunnskap om elevenes geometriforståelse. Den som gjennomfører testen får mer informasjon om deltakerens argumentasjonsevne, noe som kan medføre mer pålitelige resultater.

Felles for testene er at de begge angir hvilket nivå elevens geometriforståelse ligger på i henhold til van Hiele-modellen. Burger and Shaughnessy (1986) sin test er mer tidkrevende å gjennomføre, men kan gi mer pålitelige resultater fordi den baserer seg på grundige intervju. Usiskin (1982) sin test er mulig å gjennomføre på større grupper, uten at den binder store mengder med ressurser. Den viser ikke hvordan elevene argumenterer, men forholder seg kun til resultatet av argumentasjonen. Resultatet av begge testene er hvilket nivå elevenes geometriforståelse ligger på det tidspunkt testen gjennomføres.

3 Metode

I dette kapittelet presenteres valg og vurderinger rundt forskningsmetoden, og hvilke metoder vi har benyttet for å samle inn og analysere data. Videre vurderer vi studiens kvalitet ved å bruke begrepene validitet og relabilitet, og til slutt trekker vi fram metodekritikk og en kort kommentar knyttet til etiske utfordringer ved metoden.

3.1 Vårt forskningsdesign

Denne oppgaven har som formål å undersøke hvordan elever kan øke sin geometriforståelse gjennom arbeid med og kunnskap om ikke-euklidsk geometri. Ifølge Jacobsen (2005) avhenger valg av metode av problemstillingen eller forskningsspørsmålet, og hvilket undersøkelsesdesign det er lagt opp til. For å besvare vårt forskningsspørsmål har det vært naturlig for oss å benytte oss av en test, og å gjøre en studie av flere elever. Kvalitative metoder samler inn data i form av tekst, der informasjon hentes fra blant annet intervjuer, observasjoner, tekster og symboler, mens kvantitative metoder derimot er metoder der man samler inn data i form av tall, slik som spørreundersøkelser og standardiserte tester (Høgheim, 2020). Ved kvantitativ metode kvantifiserer eller tallfester man det man forsker på, og analyserer tallene på gitte måter, og denne metoden egner seg bedre til konfirmerende undersøkelser der vi skal undersøke om en teoretisk antakelse kan være aktuell for en gruppe mennesker eller et sted. Elevenes nivå med tanke på geometrisk forståelse skal først kartlegges ved at de tar en pre-test, deretter skal elevene gjennomføre et undervisningsopplegg basert på ikke-euklidsk geometri, før de igjen skal ta samme test, altså en post-test, for å undersøke om det har skjedd en endring i elevenes nivå. På bakgrunn av dette ble det naturlig for oss å ta i bruk en kvantitativ tilnærming.

Det er i denne oppgaven valgt en kvantitativ metode med et kvasieksperimentelt forskningsdesign som datainnsamlingsmetode, da målet med undersøkelsen var å se om elevene fikk en økt forståelse for geometrisk tenkning, samt forsøke å finne ut om det er undervisningen av ikke-euklidsk geometri som fører til denne økningen.

3.2 Kvantitativ metode

Kvantitativ metode handler om det vi gjør når vi designer undersøkelser, henter inn kvantitativ informasjon og deretter statistisk analyserer, tolker og presenterer denne informasjonen (Thrane, 2018). For å undersøke problemstillingen vår hadde vi behov for å basere oss på å samle inn numeriske data og analysere disse ved bruk av matematiske metoder. En viktig komponent i kvantitativ forskning er å ta sikte på å forklare et fenomen, implisitte vil det si at man jobber bekreftende. Man har et utgangspunkt for å forstå et fenomen og hvordan det er, og målet med forskningen er å undersøke om det faktisk er slik man har grunn til å anta at det er (Høgheim, 2020).

Siden vi ønsket å undersøke effekten av et undervisningsopplegg valgte vi et eksperimentelt design. For å vite om opplegget hadde noen effekt var vi nødt til å vite elevenes nivå før vi gjennomføre undervisningsopplegget. Ut fra dette kunne vi valgt et randomisert eksperiment, men siden vi ikke ønsket å bruke en kontrollgruppe falt valget på et kvasieksperiment. Denne typen eksperiment er egnet til å undersøke effekten av intervensjoner når man mangler en kontrollgruppe (Høgheim, 2020). Dette kan gjennomføres på flere måter, men vi valgte et design som består av kun én gruppe, Pretest-posttest-design med én gruppe. I følge Høgheim (2020) gjennomfører man da en pretest før en intervensjon, som i dette tilfellet er et undervisningsopplegg, og deretter en posttest. Dette gjør at man får muligheten til å se om gruppen endrer seg i løpet av intervensjonsperioden. En kontrollgruppe, som ikke hadde fått gjennomført undervisningsopplegget, kunne muligens sagt noe om hvorvidt det faktisk er undervisningsopplegget som fører til en endring i elevenes geometriforståelse. Men vi mener at sannsynligheten for å øke en geometriforståelse uten å ha gjort noe for å øke forståelsen vil være svært liten. Derfor bør det gå greit å ikke ha en kontrollgruppe i dette tilfellet.

3.3 Utvalg

Ifølge Jacobsen (2005) er teoretisk populasjon alle de respondenter det ønskes informasjon fra. Teoretisk populasjonen for denne undersøkelsen er ungdomsskoleelever i den norske skolen, nærmere bestemt elever på 10. Trinn. Siden det ikke var mulig å ta med alle i denne oppgaven så ble gjort et utvalg. Ifølge Thrane (2018) er et utvalg et utsnitt fra en større populasjon. Man trekker derfor et utvalg fra populasjonen, som er de menneskene som faktisk deltar i den aktuelle forskningen.

Et utvalg trekkes på ulike måter. Denne prosessen avgjør i hvilken grad resultater fra undersøkelsen kan generaliseres til populasjonen. Et representativt utvalg er en gruppe som ligner populasjonen på alle relevante kjennetegn. Et grunnleggende krav er at utvalget må være en viss størrelse for at vi skal kunne snakke om mulighet for generalisering (Jacobsen, 2005). Utvalget i denne undersøkelsen utgjør en svært liten del av teoretisk populasjon, og spørsmål om mulighet for generalisering står sentralt. I denne undersøkelsen tok vi utgangspunkt i to matematikklasser på 10. trinn hvor vi underviser. Unntaket gjelder elever som har rett på spesialundervisning i form av gruppeundervisning, og dermed ikke fulgte ordinær undervisning. Disse elevene er utelukket i datagrunnlaget fordi det organisatorisk ikke lot seg gjennomføre. Variasjonen blant elevene er likevel stor og inneholder alt fra elever med sterke matematikkunnskaper og høy indre motivasjon til å jobbe med faget, til elever med svake matematikkunnskaper og varierende motivasjon for matematiske utfordringer.

Det ble sendt ut forespørsel til elevene i disse to klassene om å delta i undersøkelsen, totalt 49 elever. Av disse svarte 38, som da utgjør vårt utvalg i denne studien. Denne utvelgingen omtales som bekvemmelighetsutvelgelse, og er en strategi der man tar utgangspunkt i dem som det er mest praktisk at deltar (Høgheim, 2020). Dette kalles for bekvemmelighet fordi man tar utgangspunkt i et utvalg som er tilgjengelig, uten hensyn til sannsynlighet. I vårt tilfelle er dette mest hensiktsmessig siden vi da kan benytte oss av elever på skolen vi jobber på. Siden gjennomføringen i tillegg til en pre-test og en post-test, også består av et undervisningsopplegg er det for vår del mest hensiktsmessig å bruke klasser der vi underviser. Faren ved å bruke et bekvemmelighetsutvalg er at man kan ende opp med et homogent, ekstremt, typisk eller maksimalt variasjonsutvalg, som kan være en begrensning når man skal drøfte generalisering (Høgheim, 2020).

3.4 Gjennomføring

I forskningen vår skal vi undersøke om elevene får økt sin geometriforståelse, og da ønsket vi å kartlegge elevenes van Hiele-nivåer før og etter undervisningsopplegget. Derfor ble det gjennomført en pretest og en posttest.

3.4.1 Pre- og posttest

Pretesten ble gjennomført på skolen november 2019, i skoletiden, under oppsyn av lærere. Testen ble gjort på PC og tidsbruken var omtrent 20-35 minutter, og i løpet av den tiden hadde alle elevene fått besvart oppgaven. Elevene satt en og en når de skulle svare på oppgavene da vi ønsket å kartlegge hver enkelt elev. Elevene som var borte under gjennomføringen tok den ved neste mulige anledning, som var neste mattetime.

Utforming av spørreskjema ble gjort med utgangspunkt i problemstillingen for prosjektet. Spørsmålene ble stilt så konkret som mulig, noe som gjør det enklere for respondentene å svare, samtidig som det gir en detaljert informasjon. Vi benyttet oss av en allerede utarbeidet test utviklet av Usiskin (1982) som tar utgangspunkt i van Hiele-modellen. Testen er originalt på engelsk, men testen våre elever har gjennomført har blitt oversatt til norsk av oss. Testen elevene tok var en flervalgstest, som besto av 25 oppgaver (se vedlegg 1). Hver oppgave har fem svaralternativer, hvor ett av alternativene er riktig. Videre er testen bygd opp slik at fem oppgaver hører til nivå 1 i van Hiele-modellen, og slik er det for alle nivåer til og med nivå 5.

For å kartlegge elevenes van Hiele-nivå i testen operere Usiskin (1982) med to kriterier. Det ene kriteriet er at man må ha 3 av 5 oppgaver riktige for å kvalifisere for et nivå. Det andre kriteriet, som omtales som det strengere kriteriet i Usiskin (1982), krever at man må ha 4 av 5 oppgaver riktige. Det strengeste kriteriet minker sannsynligheten for at elever skal havne på et høyere nivå ved kun å gjette på riktig svar i oppgavene. Sannsynligheten er allikevel såpass lav for at elevene skal komme på et høyere nivå kun ved gjetting når man bruker kriteriet 3 av 5, og vi har derfor valgt å benytte oss av dette kriteriet. For å komme på nivå 2 må elevene først ha klart 3 av 5 riktige på oppgavene knyttet til nivå 1, for så å klare 3 av 5 riktige på oppgavene knyttet til nivå 2. Hvis noen klarer kriteriene til oppgavene på nivå 2, men ikke på nivå 1, kommer de altså på nivå 0. Får å komme til neste nivå må man altså ha klart kriteriene på foregående nivå.

Posttesten var identisk til pretesten, og ble gitt for å se om vi kunne registrere en endring i elevenes svar fra pretesten. Denne testen ble gitt i januar 2020, ca to måneder etter pretesten. Mellom pretesten og posttesten ble det gjennomført et undervisningsopplegg.

3.4.2 Undervisningsopplegget

Undervisningsopplegget besto av en introduksjon av temaet og teori, samt oppgaveløsing. Undervisningopplegget var basert på taxicab-geometri, og oppgavene de jobbet med blir forklart litt senere i kapittelet. Elevene satt to og to sammen på én PC når de løste oppgavene og lærer kunne fungere som en veileder underveis. Mens elevene jobbet med oppgavene og diskuterte seg imellom, kunne vi gå til de ulike elevparene og spørre om hvordan de tenkte når de løste oppgavene, samt svare på ting de var usikre på. Parene ble valgt tilfeldig ut ifra hvordan de var plassert i klasserommet, slik at elever som satt ved siden av hverandre dannet et par. Det var satt av en halv dag til dette opplegget, og vi brukte første halvdel av skoledagen.

Undervisningsopplegget vi har gjennomført anvender digital teknologi som baserer seg på et grensesnitt elevene kjenner fra tidligere, nemlig Geogebra. Nettsiden som er utviklet til dette formålet inneholder verktøy som er kjent fra tidligere, samt at grensesnittet er tilnærmet likt det de kjenner fra geometriprogrammet. Det matematiske temaet knytter vi opp til emner elevene har jobbet med innenfor den euklidske geometrien. På denne måten er begrepene kjent, men de har nødvendigvis ikke den teoretiske forståelsen av dem. Den hypotetiske læringsbanen for denne studien legger til grunn tidligere undervisning elevene har fått, og bygger videre på denne. Da gruppen inneholder elever med ulike ferdighetsnivåer legges også den hypotetiske læringsbanen opp på en måte som gjør at alle elevene bør ha forkunnskaper til å delta. Utover i læringsbanen legges det opp til en faglig progresjon som skal gi elevene dypere forståelse for definisjoner innenfor et spesifikt matematisk tema, geometriske steder i taxicab-geometrien.

Valg av teknologi er gjort med bakgrunn i hva som vil kunne fremme utforskende aktiviteter hos elevene. For å kunne mestre en matematisk ferdighet trenger elevene å øve, et ønske om å øve vil naturlig komme dersom konteksten oppgavene gis i er motiverende for eleven (Sacristán et al., 2009). Deltakerne i studien er kjente for oss, slik at vi vet hva som kan gi dem ekstra motivasjon. Noe som gir dem ekstra motivasjon for utprøving er om de får bruke løsninger som gir dem mulighet til å utforske digitalt, og på den måten kan gå noen skritt tilbake i prosessen på en enkel måte, dersom det er behov for det. Den løsningen vi har valgt passer til dette, samtidig gir det oss muligheten til å se hvilke valg elevene har gjort i prosessen frem til en løsning. Vi kan også se de valgene de har forkastet underveis, dette i form av at vi kan spore tilbake alle elementer elevene har brukt, og slettet igjen, underveis i prosessen.

Med utgangspunkt i kriteriene Sacristán et al. (2009) presenterer, kan vi si at den digitale løsningen vi har valgt i denne studien oppfyller følgende punkter.

1. Den fungerer som et verktøy for datainnsamling, organisering av oppgaver og gir elevene mulighet til å representere sin matematiske tenkning.
2. Den presenterer temaet geometriske steder i Taxicab-geometri gjennom en løsning med faglig progresjon.
3. Den gir oss muligheter til å analysere en stor mengde data på en effektiv måte.
4. Den tillater ulike elever å jobbe med forskjellige oppgaver samtidig.
5. Den gir elevene muligheter til å utforske temaet, med mulighet for å endre på sine strategier underveis, samtidig som den lagrer den læringsbanen elevene har fulgt.

Basert på dette har vi konkludert med at dette kan være et egnet verktøy for å se nærmere på vårt mål for denne studien. Løsningen kan fungere for ulike matematiske emner, den er generaliserbar. Den har i tillegg potensiale til å støtte opp under elevenes matematisering, den gir elevene ytterligere muligheter til å utforske temaet. I tillegg gir den elevene muligheter til å fremstille, representere, sin matematiske tanker på en måte som kommuniserer overfor andre.

3.4.3 Valg av oppgaver til undervisningsopplegget

I studien vår tar vi utgangspunkt i geometriske steder og konsentrerer oss om to av disse, sirkel og midtnormal. Dette danner utgangspunktet for en serie arbeidsoppgaver som ender opp med en problemstilling som kan knyttes til dette. Disse to geometriske stedene oppfører seg annerledes enn elevene normalt er vant med.

Oppgavene som ble gitt til elevene i undervisningopplegget var basert på taxicab-geometri. Oppgavesettet besto av 6 oppgaver, som var blitt utformet av oss med innspill og ideer fra diverse nettsider med taxicab-geometri. Vi hadde gjennomført dette oppgaveheftet i en undervisningssekvens året før med noen andre elever, men hadde denne gangen fått digitalisert oppgavene ved hjelp av NTNU. Oppgavene elevene jobbet med blir presentert nedenfor.

3.4.3.1 Oppgave 1 – Korteste vei

Oppgave 1 var en praktisk og konkret oppgave som skulle få elevene inn i taxicab-geometriens verden. Den tok utgangspunkt i sentrum i Kristiansand, der elevene skulle bevege seg fra et sted på kartet til et annet sted via veinettet. De skulle da finne raskeste vei, og se om det finnes flere veier som er like raske.

Tenk deg at du skal gå fra det markerte hotellet på kartet, til krysset mellom Tordenskjoldsgate og Kirkegata. Hvilken vei er den raskeste? Tegn gjerne inn den ruten du ønsker å gå på kartet.

Er det flere veier som er like raske som den du fant?

Figur 4 Digital oppgave, nummer 1, i undervisningsopplegget.

I denne oppgaven blir elevene tvunget til å bevege seg gjennom gatene og vil derfor oppleve at korteste vei mellom disse to stedene ikke blir en rett linje. Videre ser de at det plutselig er flere løsninger som viser korteste vei.

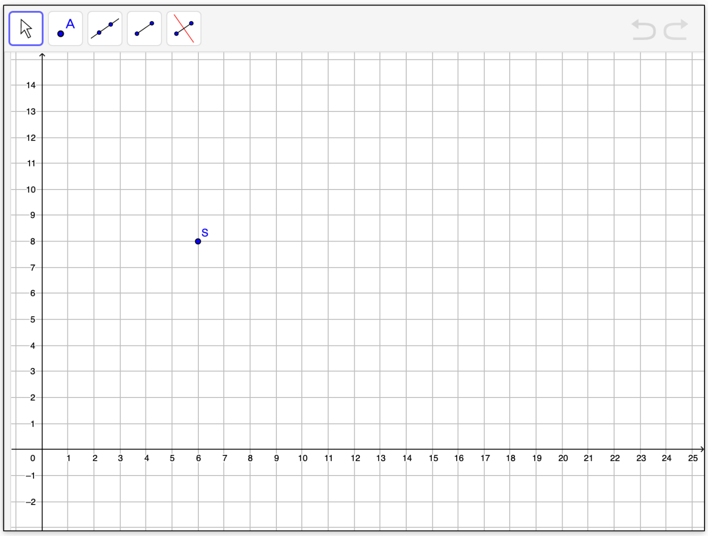
3.4.3.2 Oppgave 2 - Sirkel

En sirkel defineres som en samling punkter som har lik avstand til et punkt s, i sentrum. Av Figur 5 kan en se at det visuelle inntrykket en har av sirkel fra taxicab-geometrien blir utfordret.

I denne oppgaven, som er en svært vanlig oppgave i taxicab-geometri, skulle elevene tegne en sirkel basert på hvordan taxicab-geometrien er definert. De er da nødt til å bruke definisjonen på en sirkel, og ikke tenke på hvordan de er kjent med at den ser ut. Med å bruke en slik kontekst kan det gjøre det lettere for elevene å knytte oppgaven til noe kjent, som igjen kan hjelpe dem til å forstå oppgaven.

For å klare å løse denne oppgaven må elevene bruke egenskapene til en sirkel framfor hvordan den ser ut. Hvis de kun bruker sine erfaringer om hvordan en sirkel ser ut vil de ha problemer med å løse denne. Dermed tvinges elevene opp fra det laveste van Hiele-nivå, som baserer seg på figurenes utseende, til neste nivå der man gjenkjenner figurer gjennom deres egenskaper.

Tegn en sirkel basert på hvordan TaxiCab-geometrien er definert.
Sirkelen skal ha radius = 6 og sentrum i sirkelen skal være punktet S.



Figur 5 Digital oppgave, nummer 2, i undervisningsopplegget.

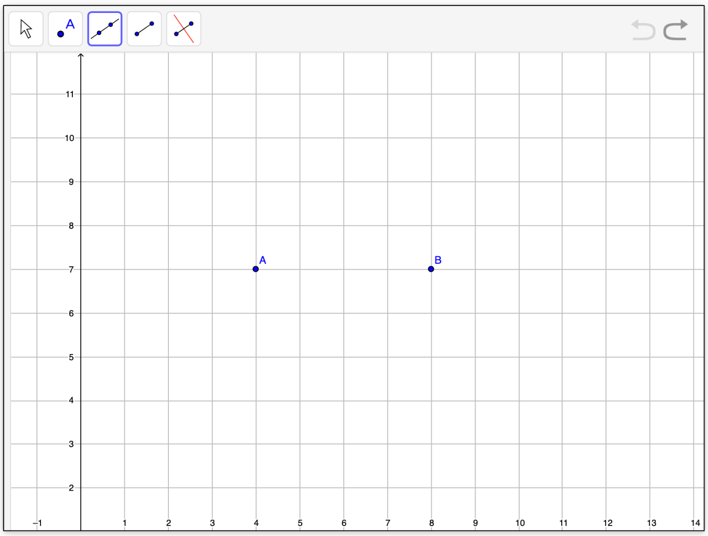
3.4.3.3 Oppgave 3a - Midtnormal

Også teorien rundt midtnormal utfordrer elevenes tankegang i forhold til hvordan de har sett på dette geometriske stedet i den euklidske geometrien. Vi definerer midtnormalen mellom A og B som en samling punkter, der hvert punkt har samme avstand til A og B.

I den euklidske geometrien medfører dette at vi kan tegne opp entydige linjer, men grunnet definisjon av avstand i taxicab-geometrien vil en midtnormal variere i forhold til hva man tar utgangspunkt i. Hvilket resultat en får når en undersøker midtnormalen mellom to punkt, A og B, i taxicab-geometrien avhenger av vinkelen linja mellom A og B danner med aksene. Derfor ble denne oppgaven delt opp i a, b og c for å belyse alle de ulike scenariene som vil kunne oppstå.

En midtnormal til et linjestykke er en vinkelrett linje som deler det gjeldende linjestykke i to like store deler. Med andre ord halverer midtnormalen det aktuelle linjestykket. Slik kan man finne midtnormalen til alle sider/linjestykker i en trekant

a) Tegn midtnormalen til de punktene som er markert i rutenettet nedenfor.



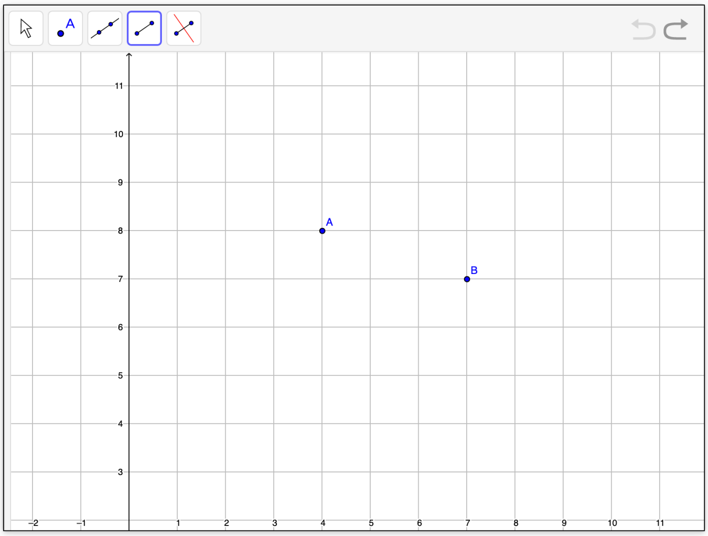
Figur 6 Digital oppgave, nummer 3a, i undervisningsopplegget.

I oppgave 3a har vi satt punkt A og B slik at midtnormalen vil bli lik som i euklidsk geometri.

3.4.3.4 Oppgave 3b – Midtnormal

I denne oppgaven endret vi plasseringen av punktene. Elevene vil nå måtte bruke egenskapene til midtnormalen for å klare å løse denne oppgaven på riktig måte.

b) Tegn midtnormalen til de punktene som er markert i rutenettet nedenfor.

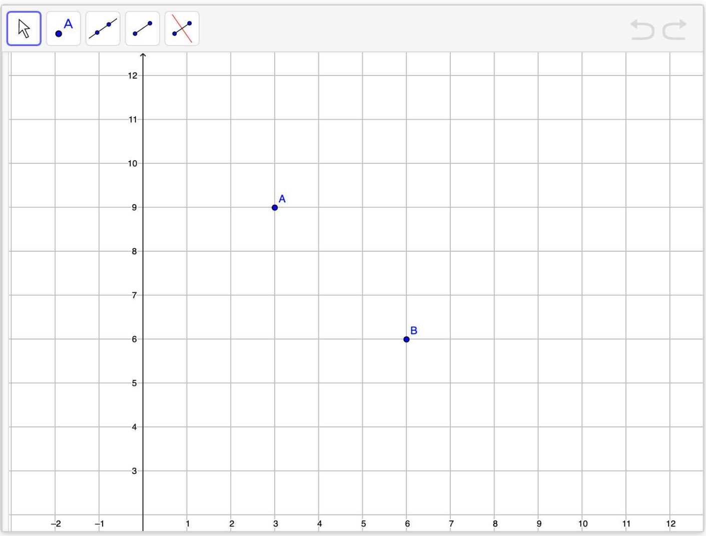


Figur 7 Digital oppgave, nummer 3b, i undervisningsopplegget.

3.4.3.5 Oppgave 3c – Midtnormal

I den siste oppgaven som handler om midtnormaler har vi endret enda litt mer på punktene. Punktene er plassert på en slik måte at midtnormalen skal tegnes i et helt særegent mønster. Det vil i denne oppgaven være flere løsninger, slik at hvis man tegner inn alle løsningene vil midtnormalen bre seg ut i en vifteform i hver ende.

c) Tegn midtnormalen til de punktene som er markert i rutenettet nedenfor.



Figur 8 Digital oppgave, nummer 3c, i undervisningsopplegget.

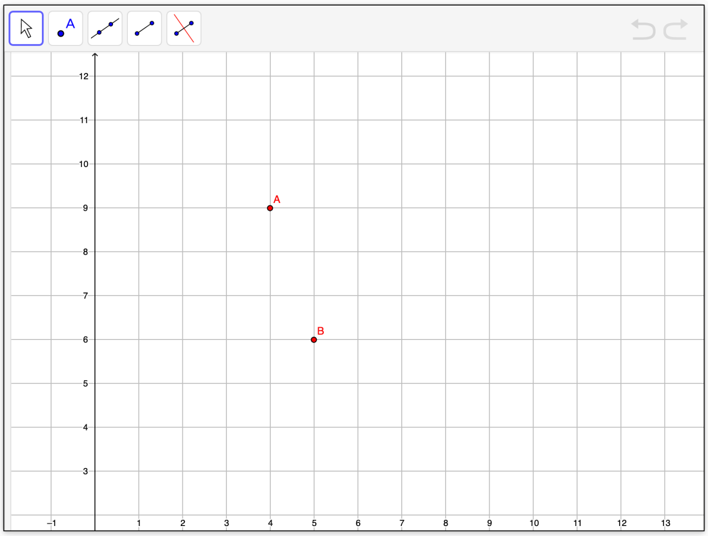
3.4.3.6 Oppgave 4 – Likesidet trekant

I denne oppgaven anvender vi teori som er kjent for elevene i den euklidske geometrien. Et eksempel som benytter seg av kjent teori om geometriske steder, og samtidig ser på konsekvensene av parallellpostulatet i taxicab-geometrien er en oppgave vi anvender i undervisningen, i studien, om likesidete trekanter. Elevene er fra tidligere kjent med hvordan de konstruerer likesidete trekanter ved hjelp av sirkler. Vi benytter oss av denne kunnskapen og utfordrer elevene til å tegne likesidete trekanter med euklidsk geometri som grunnleggende aksiomsystem.

I euklidsk geometri ville vi kun fått en likesidet trekant. Samtidig vet vi fra euklidsk geometri at en konsekvens av definisjonen av en likesidet trekant er at alle vinklene i trekanten er like store. I taxicab-geometrien ser vi at det ikke er tilfelle. Vinklenes størrelse i trekanten avhenger av plasseringen av toppunktet. Dette er derfor nok et punkt der avstandsdefinisjonen gjør at vi får forskjeller mellom de to geometriene. Det er slike forskjeller vi ønsker å utnytte i denne studien, for å øke elevenes forståelse for geometri.

Vi definerer en likesidet trekant som en trekant der alle sidene er like lange. Av det følger det, i Euklidsk geometri, at alle vinklene i trekanten er like store.

Tegn en likesidet trekant basert på definisjonene TaxiCab-geometrien bygger på. Bruk de avmerkede punktene i rutenettet og finn frem til det siste punktet.



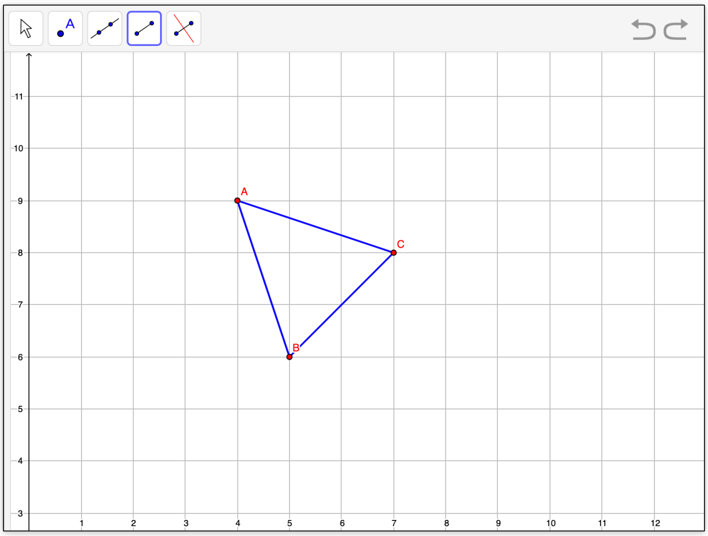
Figur 9 Digital oppgave, nummer 4, i undervisningsopplegget.

3.4.3.7 Oppgave 5 – Midtnormal i likesidet trekant

I denne oppgaven må elevene se sammenhengen mellom det de har gjort tidligere i oppgavesettet og hvordan denne oppgaven er bygd opp.

En midtnormal deler en linje i to like store stykker. I Euklidsk geometri vil toppunktet i trekanten ligge på midtnormalen i en likesidet trekant.

Trekant ABC er hentet fra forrige oppgave. Tegn midtnormalen til linja AB.

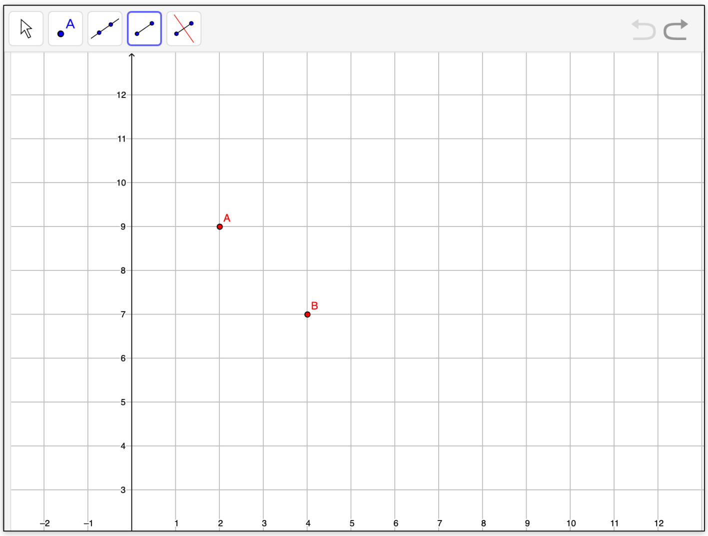


Figur 10 Digital oppgave, nummer 5, i undervisningsopplegget.

3.4.3.8 Oppgave 6 – Likesidet trekant og midtnormal

Punktene A og B er nå plassert i posisjoner elevene ikke har jobbet med hittil i oppgavene.

Tegn en likesidet trekant der AB er grunnlinje, og tegn midtnormalen til AB. Finner du flere likesidete trekanter der AB er grunnlinje?
Tegn dem med midtnormal



Figur 11 Digital oppgave, nummer 6, i undervisningsopplegget.

3.5 Datainnsamling

I denne undersøkelsen ble det benyttet en test med lukkede svaralternativer (avkrysning) for datainnsamling, som ifølge Jacobsen (2005) er en metode som dominerer når det gjelder innsamling av primærdata i kvantitativ metode. Spørreskjema med på forhånd oppgitte svaralternativer benyttes av ulike grunner. En standardisering hvor man benytter faste spørsmål og faste svaralternativer gjør det mulig å sammenligne svar fra respondenter ved å se på likheter og variasjoner. Videre gir en standardisering mulighet for generalisering fra utvalg til populasjon.

I planleggingen av datainnsamlingen ved hjelp av spørreskjema står tre elementer sentral; konkretisering av de begrepene som ønskes målt, at spørsmålene utformes så korrekt som mulig for å unngå at spørsmålene skaper uønskede resultater, samt bestemme hvordan spørreundersøkelsen skal gjennomføres (Jacobsen, 2005). Siden det var oss som hadde oversatt teksten fra engelsk til norsk så hadde vi ikke fått kvalitetssikret spørsmålene, noe som økte sannsynligheten for at noen eventuelle språklige uklarheter hadde oppstått i oversettelsen. Testen ble gjennomført digitalt i timen med lærer til stede, noe som gjorde det mulig for respondentene å kunne stille spørsmål dersom noe var uklart.

For å gjøre en statistisk analyse av resultatene fra testene har vi brukt Stata16.

Det nettbaserte oppgavesettet, som elevene gjennomførte i undervisningsopplegget, gjorde at alle trykk elevene utførte ble sporet og lagret, slik at vi har hatt tilgang til dem i ettertid. Dette har blitt gjennomgått og sammen med observasjonene gjort underveis, danner dette grunnlaget for de funn som presenteres i resultatkapittelet. Vi har analysert elevenes arbeid og skaffet oss en oversikt over hvilke elever som har gjort hva, og hvordan de har løst oppgavene. Dette har blitt systematisert i etterkant. Det har vært en omfattende prosess å gjennomgå alle elevbesvarelsene, men det har gitt oss gode innblikk i hvordan elevenes progresjon har vært i oppgavene. Sporingen viser både når elevene har gjort feil valg, og har måttet gå tilbake og gjøre ting om igjen, og når de klarer å løse oppgavene uten særlige problemer. Sammen med sporingene fra den digitale oppgavedelen har vi også benyttet oss av observasjonsnotater der vi har notert tanker og refleksjoner elevene har kommet med i arbeidsprosessen. Vi har også notert viktige deler fra samtaler vi har hatt med elever mens de har jobbet med oppgavene.

3.6 Validitet og reliabilitet

Sentralt i forskningen er kravene om validitet og reliabilitet. Ifølge Thrane (2018) handler validitet (gyldighet) om hvorvidt man evner å måle det teoretiske begrepet man prøver å måle og reliabilitet (pålitelighet) om presisjonen på variablene, og om målefeilene eller unøyaktighetene. Trusler mot reliabilitet kan for eksempel være at en respondent krysser av på feil svar enn det som var meningen. Validitet og reliabilitet sies å utfylle hverandre, samtidig som de også er delvis overlappende, først og fremst ved at høy reliabilitet er en forutsetning for høy validitet (Grønmo, 2004). Et datamateriale kan altså ikke være gyldig eller relevant for problemstillingen dersom materialet ikke er pålitelig. Videre skriver Grønmo (2004) at reliabiliteten er uavhengig av validiteten, og høy reliabilitet er ingen garanti for at validiteten er høy. Det vil si at et datamateriale kan være pålitelig selv om det ikke er relevant for problemstillingen.

Ytre validitet viser til hvorvidt det vi måler hos noen få, kan sies å gjelde for flere, altså hvorvidt det er mulig å generalisere resultater fra utvalg til populasjon (Jacobsen, 2005).

For å generalisere slutningene fra forskningen vår er det viktig at utvalget er så representativt som mulig for populasjonen. Utvalget bør altså være mest mulig lik populasjonen. For å ta et tilfeldig utvalg må man ha oversikt over alle i populasjonen, noe som i vårt tilfelle er vanskelig da vi har ungdomsskoleelever som populasjon. Vi valgte altså et bekvemmelighetsutvalg, der vi tok utgangspunkt i et utvalg som var lett tilgjengelig for oss, uten hensyn på sannsynlighet. Ettersom utvalget som ble brukt i datainnsamlingen ikke er større enn … elever, vil den ytre validiteten svekkes. Dersom den ytre validiteten skulle vært styrket, måtte utvalgets størrelse vært betydelig større. I forbindelse med at dette er et masterprosjekt hvor tidsaspektet spiller en stor rolle i våre prioriteringer, ble en utvalgsøkning uaktuelt.

Indre validitet handler om hvorvidt man kan med høy grad av sikkerhet trekke en kausal slutning (Thrane, 2018). Videre sier Thrane (2018) at vellykkede eksperimentelle design oftest har høy indre validitet, i betydningen at det å trekke kausale slutninger kan forsvares. I denne undersøkelsen ble det gjennomført en flervalgstest, som ikke vil påvirke deltakerne slik de vil kunne bli påvirket ved intervju. Dette gir oss en god kontroll, og vil gjøre at sannsynligheten for påvirkning blir mindre, som gir en høyere grad av indre validitet.

Ekvivalens baserer seg på samsvar mellom innbyrdes uavhengige datainnsamlinger på samme tidspunkt, og bygger på sammenlikning av data som er basert på samme undersøkelsesopplegg, men samlet inn av ulike observatører, ulike intervjuere, ulike kodere eller ulke forskere (Grønmo, 2004). Reliabilitet i form av ekvivalens er særlig viktig når datainnsamlingen gjennomføres av flere ulike personer, og når undersøkelsesopplegget omfatter mange indekser eller sammensatte skalaer. Siden vi bruker en allerede utviklet test, som blir brukt som en standard vil dette undersøkelsesopplegget mest sannsynlig fungere på samme måten uansett hvem som gjennomfører datainnsamlingen. Datamaterialet bør derfor ikke bli påvirket av hvem som bruker undersøkelsesopplegget. En svakhet ved testen er at den er på engelsk, men vi har oversatt den til norsk selv. Ifølge Grønmo (2004) har det stor betydning at datamaterialet har tilfredsstillende reliabilitet i form av ekvivalens selv om datainnsamlingen gjennomføres av forskeren selv fordi det er viktig å ha tillit til at det aktuelle undersøkelsesopplegget ville ha ført til samme datagrunnlag uansett hvem som gjennomførte undersøkelsen.

3.7 Etiske betraktninger

I vår undersøkelse har vi tatt utgangspunkt i de nasjonale forskningsetiske retningslinjer fra NESH (2016), og forholdt oss til det som er relevant for vår undersøkelse for å sikre at de etiske prinsippene har blitt ivaretatt. Den forskningsprosessen man skal gjennomføre i sin jakt på kunnskap skal ivareta alle som deltar i forskningen, deres interesser frihet og integritet (Høgheim, 2020). I følge Høgheim (2020) er noen av de sentrale prinsippene som framstår som sentrale for å ivareta deltakernes menneskeverd og integritet som følger. Det skal være frivillig å delta i forskning, som betyr at de skal ha kjennskap til at de er deltagende, og ikke minst gi sitt samtykke til å delta. Videre er det et krav at alle personlige og sensitive opplysninger om de som deltar i forskning, skal anonymiseres.

Ved oppstart av prosjektet søkte ble det søkt om godkjenning av Norsk senter for forskningsdata (NSD). Elevene ble informert hvordan data skulle behandles og hva deltakelse i prosjektet innebar. Elevenes foresatte ble også informert gjennom et skriv hjem og et informert samtykke (se vedlegg). De fikk vite at det var frivillig å delta og at de når som helst kunne trekke seg fra prosjektet, som er i tråd med de forskningsetiske retningslinjene (NESH, 2016).

Undersøkelsen vår ble gjort digitalt, og vi brukte en nettside, Easyquest, hvor vi gjennomførte undersøkelsen. Ved å bruke denne nettsiden er ikke deltagerne sporbare via IP-adresser. Når det gjelder kobling mellom pretest og posttest fikk hver deltaker tildelt et kandidatnummer, og det var ikke samme kandidatnummer på pre- og posttesten. Koblingsnøkkelen der man kan lenke sammen pre- og posttest hos kandidaten ble lagret på en kryptert skyløsning. Personvernulempen i prosjektet ble vurdert til lav av NSD slik at elever 15-16 år kan samtykke selv til deltakelse i prosjektet.

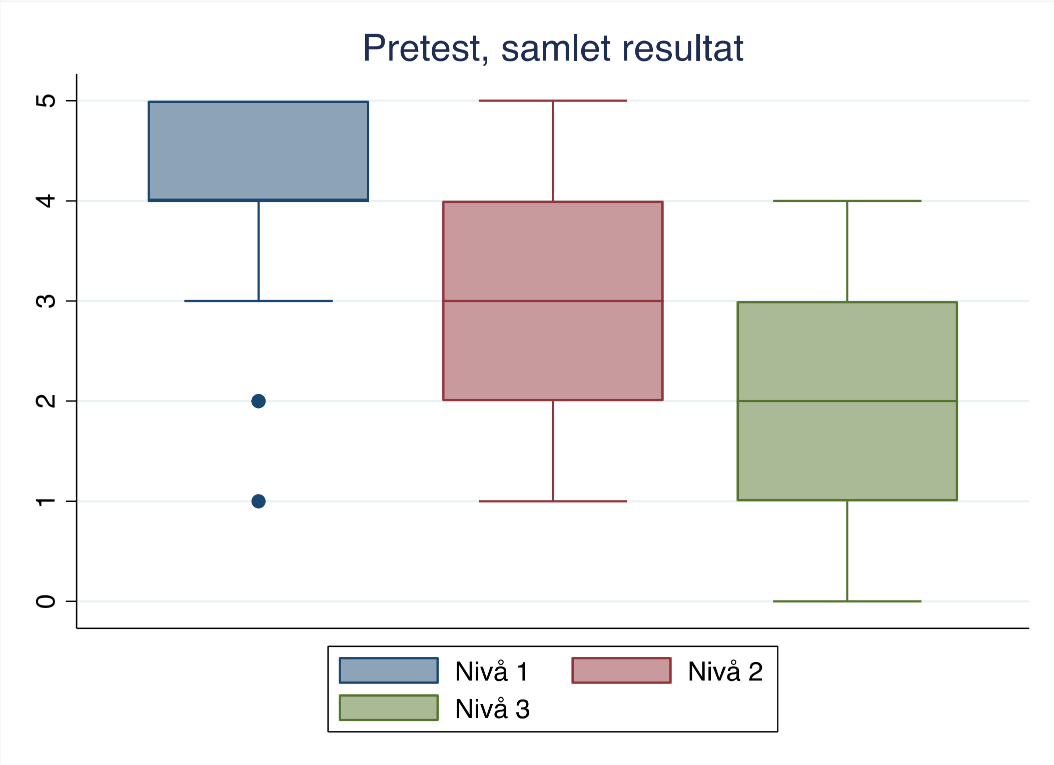
På sporingsdelen fra den digitale oppgavedelen har elevene fått et unikt kandidatnummer, og dette kobles til øvrige besvarelser via koblingsnøkkelen. Observasjonsnotatene inneholder ingen navn, da vi har ikke notert elevenes navn på notatene. For å holde orden på elevenes besvarelser i notatene har vi brukt elevenes kandidatnummer fra sporingsdelen. Altså har de hatt samme kandidatnummer på observasjonsnotatene som på sporingsdelen fra den digitale oppgavedelen.

4 Resultater

I forkant av at det skulle gjennomføres et undervisningsopplegg, som tar sikte på å øke elevenes forståelse for geometri, ble det gitt en pretest til elevene. Resultatet av denne pretesten vil gi oss elevenes forståelsesnivå, i geometri, basert på van Hiele-modellen. Med bakgrunn i denne testen er målet å se om elevene har hatt fremgang i løpet av den tiden vi har fokusert på ikke-euklidsk geometri i undervisningen. Det er mange faktorer som spiller inn på elevenes nivå, noe som vil bli ytterligere utredet i neste kapittel. I denne delen vil fokuset ligge på de konkrete resultatene som undersøkelsene har gitt.

Kategoriseringsmodellen som beskrives i metodedelen anvendes på dataene som er innsamlet fra pretest og posttest. Vi samler derfor elever som oppnår nivå 3, eller høyere, i en gruppe. Det vil ikke skilles på dem, da vi anser det som lite relevant for denne undersøkelsen. I tillegg er det større usikkerhet på om elevene faktisk oppnår nivå 4 eller høyere, at det er reell kunnskap som gjør at de scorer på et så høyt nivå.

4.1 Pretest

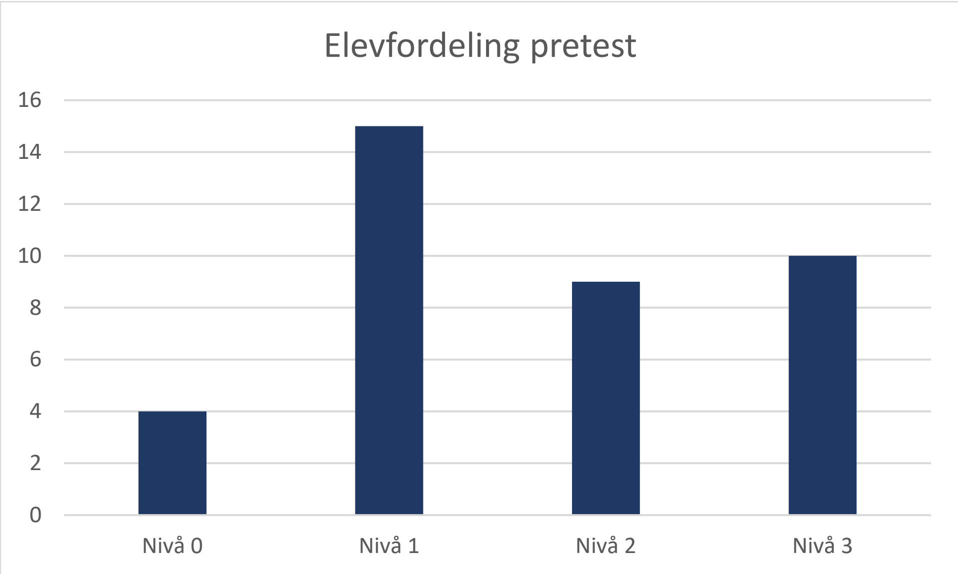


Figur 12 Box-plot over antall riktige svar elevene har avgitt på de ulike nivåene i Van Hiele-modellen

Hensikten med å se nærmere på pretesten er å se hvilken forståelse elevene har for euklidsk geometri før vi gjennomfører undervisningsopplegget om ikke-euklidsk geometri. Ved å undersøke resultatet nærmere og se det i sammenheng med van Hiele modellen, kan vi kategorisere elevene etter nivå. Kategoriseringen skjer basert på testen som er utviklet av Usiskin (1982).

Figur 12 viser antall korrekte svar elevene har på de ulike nivåene. Boxplottet viser 25 percentilen og 75-percentilen som nedre- og øvre grense for boksen. I tillegg vises medianen som linje i boksen, og tilhørende *whiskers* på hver side. *Outliers* markeres som egne punkter. Av boxplottet kan vi lese at elevene besvarer færre korrekte oppgaver når nivået blir høyere. Medianen faller for hvert nivå. Vi ser også at plasseringen av boksene blir lavere. Nedenfor boksen på nivå 1 vises også noen outliers som angir at det er elever som ikke har besvart nok oppgaver korrekt på nivå 1 til å bli kategorisert der, i henhold til kategoriseringsmodellen beskrevet i metoden.

Det er naturlig at plottet viser fallende tendens i antall korrekt besvarte oppgaver, når nivået øker, fordi det ikke er tilfelle at alle elevene blir kategorisert på høyt nivå. Plottet viser at det faller av elever underveis. Når boksene inneholder elever som kun har besvart 2 oppgaver korrekt, eller færre, vil det si at elevene er kategorisert på et lavere nivå.



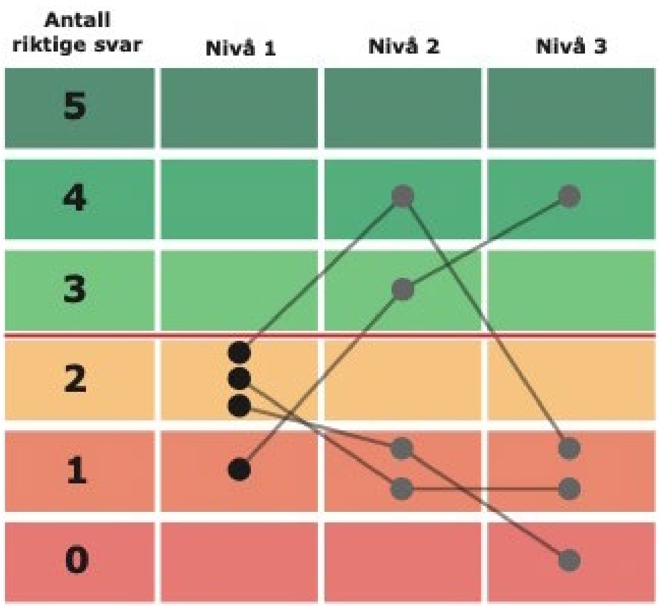
Figur 13 Elevfordeling pr. nivå i Van-Hiele-modellen etter pretest

Ved å anvende kategoriseringsmodellen vil vi få elevene gruppert i nivåer. Diagrammet i Figur 13 viser fordelingen av elever på de ulike nivåene i Van-Hiele-modellen etter pretesten. Det er en hovedvekt på elever som kategoriseres til nivå 1. Diagrammet viser også at det er elever som har forståelse som ikke strekker til for å oppnå en kategorisering på nivå 1. Slik beskrevet i teori kategoriseres disse i et nivå 0, som ligger under nivåene i Van-Hiele-modellen. Gjennomsnittlig nivå for elevene på pretesten er beregnet til 1,66. Dette er relativt sammenfallende med mediannivået som er beregnet til 1,5. Utover de konkrete tallene som er fremkommet vil det være av interesse å se nærmere på de ulike nivåene på pretesten.

4.1.1 Elever utenfor kategorisering

Kategoriseringsmodellen til Usiskin (1982) forutsetter at elevene svarer korrekt på minimum 3 av oppgavene knyttet til nivå 1 i modellen for geometriforståelse, for at elevene skal oppnå nivå 1. Elevene som besvarer færre korrekte oppgaver knyttet til nivå 1 vil ikke kategoriseres. Som vi har gjort rede for, legger vi til en kategori elever som kalles nivå 0. Dette er elever som ikke oppfyller kravene til nivå 1 i van-Hiele-modellen. Av de elevene som deltok i vår test var det 4 elever som ikke oppfyller kravene til nivå 1, og av den grunn plasseres på nivå 1. Disse elevene hadde færre enn 3 korrekte svar på de første oppgavene i testen, oppgaver som knytter elevene til nivå 1.

Av de 4 elevene er det tre av dem som har besvart korrekt på 2 oppgaver. Felles for disse elevene er at de har svart korrekt på oppgaven som omhandler trekanter, oppgave 2. Utover dette har elevene besvart korrekt på en oppgave som omhandler kvadrater og rektangler. Når testen trekker inn figurer som parallellogram og romber, får disse elevene problemer og får gale svar. Alle oppgavene på dette nivået går på at elevene skal gjenkjenne figurer basert på en visuell fremstilling.

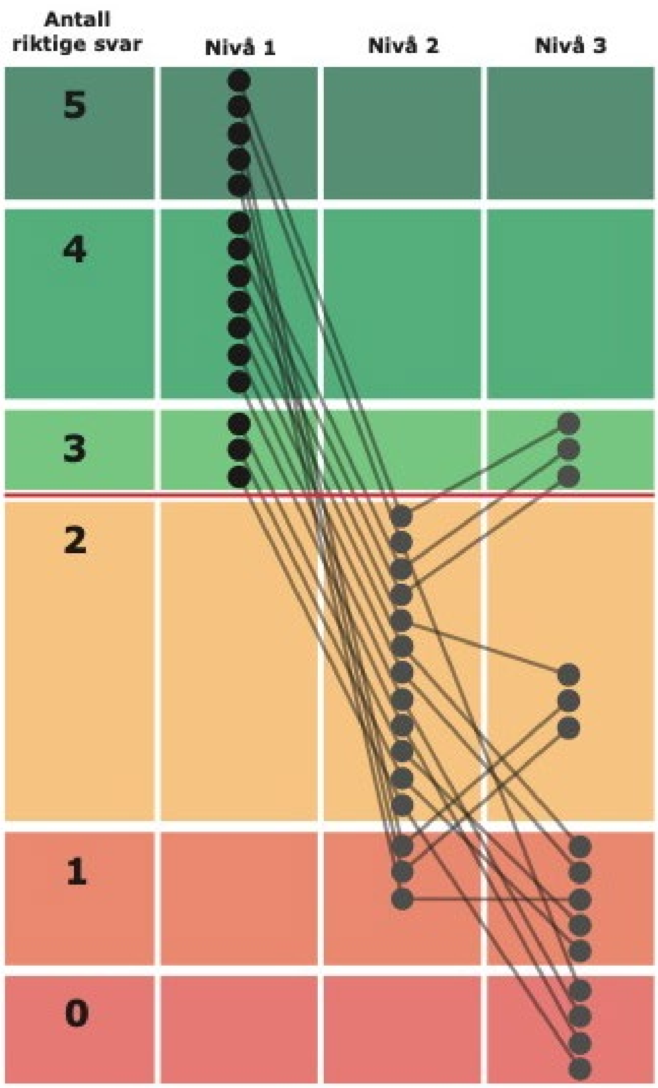


Figur 14 Antall korrekt besvarte oppgaver for elever kategorisert på nivå 0 på pretest, fordelt på hver enkelt elev.

De 4 elevene som kategoriseres til nivå 0 besvarer også oppgaver korrekt på høyere nivå. Figur 14 viser at to av elevene tilhørende nivå 0 besvarer 3 eller flere oppgaver korrekt på nivå 1, og dermed kvalifiserer til nivå 2 basert kun på dette nivået. Likevel kategoriseres disse elevene til nivå 0, da de ikke oppfyller kravene til nivå 1. Resterende elever besvarer kun høyst en oppgave korrekt pr. nivå over nivå 1.

4.1.2 Elever på nivå 1

På pretesten er det totalt 15 elever som kategoriseres til nivå 1. Det betyr at disse elevene har besvart minimum 3 oppgaver korrekt, av oppgavene knyttet til nivå 1. Av disse er 12 elever som også hadde blitt kategorisert som elev på nivå 1, selv med den strengere kategoriseringsmodellen. Den sier at elevene må besvare 4 av 5 oppgaver korrekt innenfor ett nivå for å kategoriseres på nivået (Usiskin, 1982). 5 av elevene har besvart alle oppgavene på nivået korrekt. Elevene på dette nivået kan gjenkjenne figurer på bakgrunn av figurenes utseende. Elever som kategoriseres på dette nivået har evnen til å sammenligne sider i figurer og se hvordan punkter plasseres i forhold til hverandre.



Figur 15 Elever kategorisert til nivå 1 på pretest, svarfordeling

Figur 15 viser at elevene på nivå 1 i hovedsak besvarer 4 – 5 oppgaver korrekt, på oppgavene tilhørende nivå 1. Gjennomsnittlig antall korrekt besvarte oppgaver er 4. Ser av figuren at det er en mindre andel elever som besvarer kun 3 oppgaver korrekt på nivå 1.

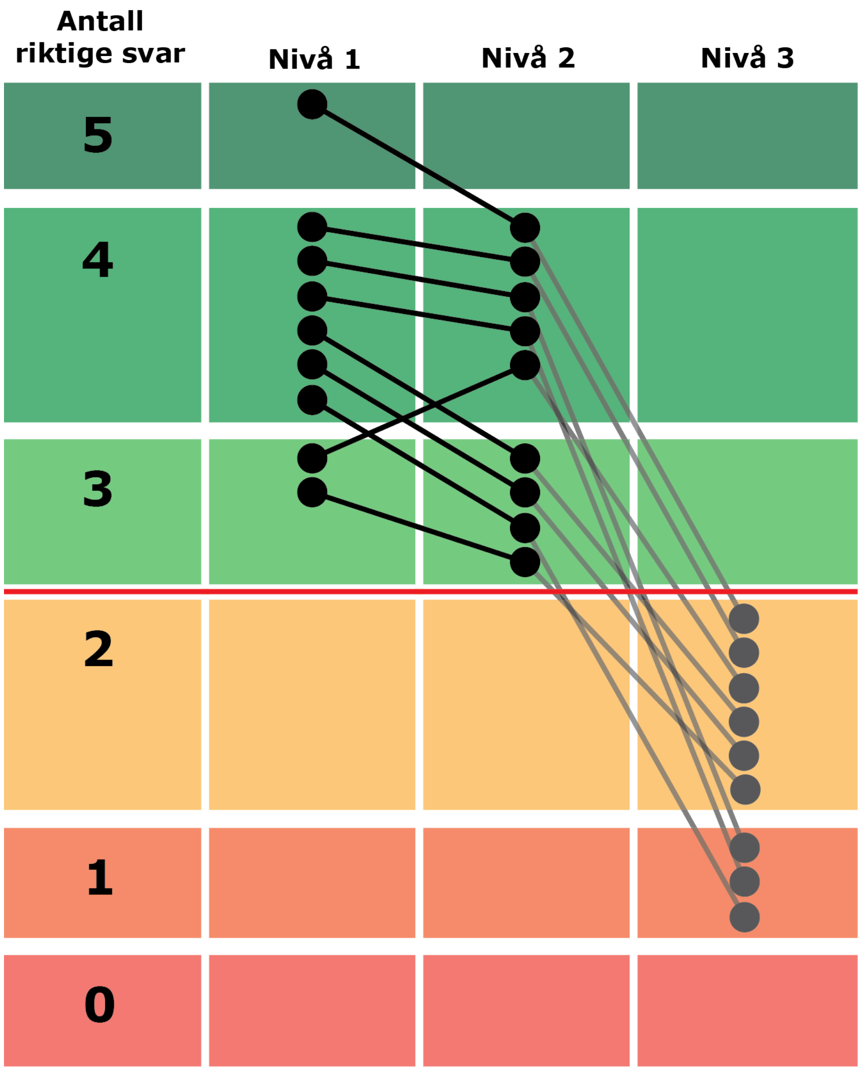
Figur 15 viser også at disse elevene i hovedsak besvarer kun 2 oppgaver korrekt på oppgavene knyttet til nivå 2. Det er en mindre andel som besvarer kun en oppgave korrekt på nivå 2. Utover dette faller andelene korrekt besvarte oppgaver når oppgavene øker til nivå 3. Variasjonen i antall korrekt besvarte oppgaver spenner da fra 0 til 3, men det er en liten andel av elevene som oppnår 3 korrekt besvarte oppgaver på nivå 3.

Oppgavene knyttet til nivå 1 omhandler gjenkjennelse av geometriske figurer. Det er oppgaver som omhandler eksempelvis parallellogram og rombe, geometriske figurer som krever kjennskap til flere egenskaper ved figuren, som blir vanskelige for elevene. Oppgave 1 – 3 spør etter figurene kvadrat, trekant og rektangel (se vedlegg 1). Figurene som er listet opp som alternativer er i stor grad enkle figurer som er lett gjenkjennbare. Oppgave 4 og 5 spør etter kvadrat og parallellogram, men alternativene som gis krever at eleven vurderer flere forhold ved figuren når den skal velge riktig alternativ. I tillegg må eleven avgjøre om det er en eller flere figurer som angir korrekt svar.

Figur 15 viser antall korrekt besvarte oppgaver på de ulike nivåene for elevene som er kategorisert til nivå 1. Figuren viser at majoriteten av elevene er nær ved å kategoriseres på nivå 2, da de besvarer 2 riktige oppgaver av dem som tilhører nivå 2. 3 av disse elevene besvarer også nok oppgaver korrekt på nivå 3 til å kategoriseres på det nivået.

4.1.3 Elever på nivå 2

Resultatene av pretesten viser at det er 9 elever som kategoriseres på nivå 2. Figur 16 viser at de fleste av disse elevene besvarer 4 oppgaver korrekt av de spørsmålene som definerer nivå 1. Antall korrekt besvarte oppgaver for nivå 1-oppgavene varierer mellom 3 og 5, et intervall de må ligge på for å kunne oppnå nivå 2.



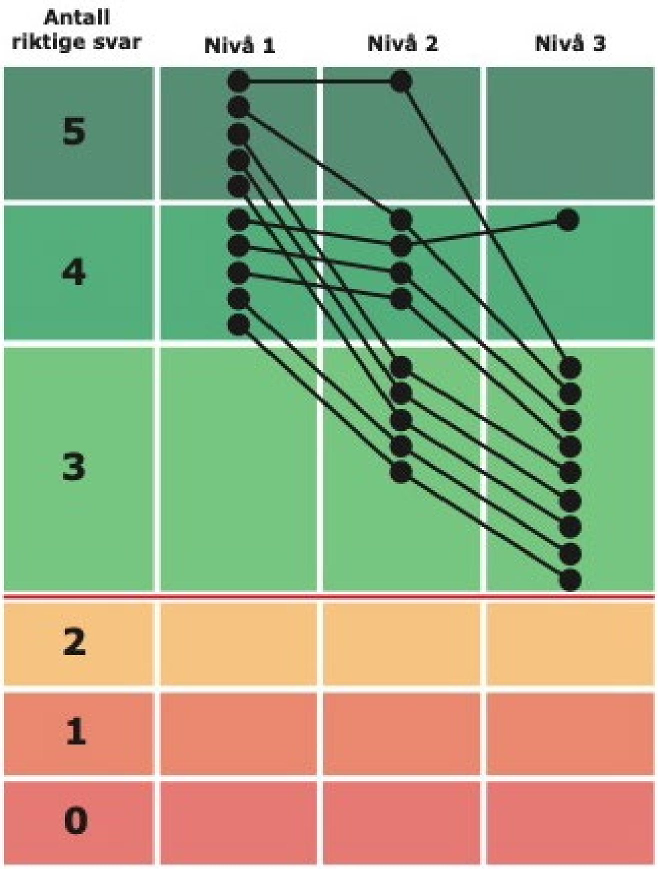
Figur 16 Elever kategorisert til nivå 2 på pretest, svarutvikling

Blant oppgavene som definerer nivå 2 besvarer elevene 3 eller 4 oppgaver korrekt. Ingen av elevene som kategoriseres på nivå 2 besvarer alle oppgavene korrekt. Blant oppgavene som tilhører dette nivået besvares oppgavene 7, 8 og 9 (se vedlegg 1) hovedsakelig korrekt, der alle besvarer oppgave 9 korrekt. Oppgave 9 omhandler likebeinte trekanter og egenskapene til disse. Oppgave 7 og 8 omhandler henholdsvis rektangel og rombe. Oppgave 7 går direkte på egenskapene til rektangler og elevene må ta stilling til om utsagnene, ulike egenskaper, er sanne. Begrepet diagonal er og sentralt i denne oppgaven. I oppgave 8 er det egenskapene til romben som skal vurderes. Også her er det begrepet diagonal som er sentralt.

Diagrammet i Figur 16 viser hvordan elevene som kategoriseres på nivå 2 besvarer oppgave 1 til 15, oppgaver som definerer nivå 1 til 3. Antall korrekt besvarte oppgaver viser en fallende tendens mellom nivå 1 og 2, for deretter å falle ned til under grensa for nivå 3. Det er likevel mange elever som besvarer 2 oppgaver korrekt på nivå 3, og dermed er de nær å bli kategorisert på nivå 3. Av de 9 elevene som kategoriseres til nivå 2 er det 4 av disse som oppfyller kriteriene for den strenge kategoriseringen av nivåene. Disse vil kategoriseres til nivå 2 selv etter disse kriteriene.

4.1.4 Elever på nivå 3

Elevene på nivå 3 har, ifølge Figur 17, besvart korrekt på 4 – 5 oppgaver av oppgavene som definerer nivå 1. Videre er antall korrekt besvarte oppgaver fallende når det kommer til oppgavene på nivå 2. Diagrammet viser at variasjonen ligger mellom 3 og 5, men at hovedtyngden av elever besvarer mellom 3 og 4 oppgaver korrekt på dette nivået. Av oppgavene tilhørende nivå 3 besvarer 90% av elevene 3 oppgaver korrekt. 10%, altså én elev besvarer 4 oppgaver korrekt. Figuren viser altså en fallende tendens i antall korrekte oppgaver ettersom nivået stiger, selv for elevene på dette nivået. Dette nivået samler elever fra nivå 3 og eventuelt elever som kan kategoriseres som elever på nivå 4 og nivå 5.



Figur 17 Elever kategorisert til nivå 3 på pretest, svarutvikling

Av de oppgavene som er besvart av elevene på dette nivået er det oppgave 13 og 14 (se vedlegg) som færrest elever besvarer korrekt. I oppgave 13 skal elevene avgjøre hvilke figurer som kan kalles rektangler. I oppgaven er det avbildet tre figurer. En av figurene oppfyller, i tillegg til definisjonen av et rektangel, også kriteriene for å være et kvadrat. En vesentlig andel av elevene svarer på denne oppgaven at kvadratet ikke oppfyller kriteriene for å være et rektangel, de ser ikke at kvadratet er et spesialtilfelle av rektangelet.

Oppgave 14 følger opp samme tema, men her uten illustrasjoner. Det gjelder i denne oppgaven å sammenligne egenskapene til ulike figurer, figurer en kan si er avarter av hverandre. Det korrekte svaret i denne oppgaven er den abstrakte versjonen av oppgave 13. Dette fordi eleven her skal komme frem til at egenskapene til rektangel er egenskaper hos alle kvadrater.

Figur 17 viser hvordan elevene på nivå 3 har besvart oppgavene som definerer de ulike nivåene. Diagrammet viser at én elev har besvart like mange oppgaver korrekt på de ulike nivåene, 4 korrekte oppgaver pr. nivå. De resterende elevene har en fallende tendens etter hvert som nivået øker. Elevene besvarer 4 til 5 oppgaver korrekt på oppgavene tilhørende nivå 1, men besvarer kun tre oppgaver korrekt på nivå 3. Unntaket er nevnte elev som besvarer 4 korrekte på alle nivåer.

4.2 Undervisningsopplegg

Elevenes arbeid har blitt gjennomgått, og sammen med observasjonene gjort underveis danner dette grunnlaget for de funn som presenteres i dette delkapitlet. Basert på observasjonsnotater, samtaler med elevene og sporingen fra den digitale delen av undervisningsopplegget, gjengis her de viktigste funnene og observasjonene. Oppgavene, samt løsningsforslag til disse, er vedlagt i vedlegg 2.

I oppgave 2, i oppgavesettet, skal elevene tegne en sirkel. Sirkelen skal være basert på taxicab-geometrien. For mange er det vanskelig å forholde seg til både begrepet sirkel og de endrede forutsetningene i taxicab-geometrien på en gang. Sporingen viser at hovedvekten av elevene starter med å legge inn punkter som gir en sirkel, tilnærmet slik vi tegner sirkelen i taxicab-geometrien. Etter en stund kobles taxicab-geometrien inn i beregningene og punktene slettes for deretter å måle opp nye lengder, basert på hvordan vi måler lengde i taxicab-geometrien. Alle elevene får til å tegne en sirkel basert på taxicab-geometrien med den radiusen som er oppgitt i oppgaven. Ved hjelp av verktøyene tilgjengelig, som er kjent for dem fra Geogebra, lager elevene sirkler slik det er vist i løsningsforslaget til oppgaven.

Gjennom de observasjonene vi foretok oss underveis i undervisningsopplegget registrerte vi at elevene koblet sammen kunnskapen de hadde tilegnet seg om taxicab-geometri, med definisjonen til den geometriske figuren sirkel. Noen elever tok dette raskt og markerte kun «hjørnene» i sirkelen før de trakk opp sirkellinjen. Andre trengte alle punktene, mens noen også bare markerte punktene på sirkellinjen. Alle løsningene viser at elevene har forstått sammenhengen mellom denne geometrien og definisjonen av sirkel.

Den neste oppgaven elevene skulle utføre var tredelt, og omhandlet midtnormaler. Elevene skulle, ut ifra oppgitte punkter, tegne opp midtnormalen til punktene. Plasseringen av punktene vil i denne geometrien, i motsetning til i den euklidske geometrien, avgjøre hvordan midtnormalen vil bli seende ut.

Den første oppgaven tilknyttet midtnormal, vil gi en løsning som er identisk med den løsningen tilsvarende punktplassering gir i den euklidske geometrien. Denne oppgaven løser elevene raskt og uten problemer.

I oppgave 3b endres plasseringen av punktene som danner utgangspunktet for midtnormalen. Sporingen av elevenes arbeid tilknyttet denne oppgaven viser at den byr på større utfordringer enn foregående oppgave. Vi ser at en del elever velger å løse denne på samme måte som de ville tegnet midtnormalen til disse punktene i den euklidske geometrien. Noen elever velger å anvende verktøyet, som ligger tilgjengelig i oppgaven, for å tegne midtnormal, noe som gir galt resultat. Underveis i gjennomføringen har vi veiledet noen elever på denne oppgaven og vi kan se at disse endrer sin løsning. Når elevene begynner å telle lengdeenheter i x- og y-retning til de ulike punktene, kommer de frem til en løsning som tilsvarer midtnormalen til disse punktene i taxicab-geometrien.

Den siste midtnormalen elevene skal tegne skiller seg vesentlig fra hvordan midtnormalen, til tilsvarende punkter i den euklidske geometrien, skal tegnes. Denne er det ikke alle elevene som mestrer på egenhånd. Det er også elever som tegner riktig midtnormal, etter noe veiledning, som ikke fullt ut forstår hvorfor tegningen blir slik.

I denne oppgaven er punktene plassert på en slik måte at midtnormalen skal tegnes i et helt særegent mønster. Elevene mestrer å tegne opp de punktene som er entydige i midtnormalen, det vil si de punktene som tilsvarer midtnormalen i den euklidske geometrien. Når det kommer til punktene som brer seg ut i vifteform i hver ende, er det mer komplisert. Det er først når oppgavene gjennomgås i etterkant at elevene kan gjenskape dette i tilsvarende sammenhenger. De trenger påminnelsen om hvordan en måler lengde i den geometrien vi anvender i disse oppgavene.

I oppgave 4 skal elevene anvende sine kunnskaper om likesidete trekanter. De skal tegne en likesidet trekant, i taxicab-geometrien, basert på den kunnskapen de har tilegnet seg om denne geometrien. Tanken bak oppgaven er at de skal bruke metoden for å tegne likesidet trekant i euklidsk geometri, ved hjelp av to sirkler, for å tegne den likesidete trekanten i denne oppgaven. Når de skal bruke metoden med sirkler er det nødvendig å tegne sirklene på samme måte som de gjorde i oppgave 2.

Observasjonene gjort tilknyttet denne oppgaven viser at elevene i varierende grad velger den metoden vi har ønsket de skal bruke. En vesentlig andel av elevene velger å telle lengdeenheter, i x- og y-retning, mellom de to punktene. Denne verdien anvender de for å finne andre punkter som ligger med denne avstanden fra begge de opprinnelige punktene. Tilnærmingen gir korrekt svar på oppgaven, men viser ikke at elevene kan overføre kunnskap om en geometri til en annen, på samme måte som om de hadde brukt metoden vi skisserte for oppgaven. Noen av gruppene ble utfordret underveis til å tenke på hvordan de tegnet likesidete trekanter til vanlig, i den euklidske geometrien, noe som medførte at de tegnet de nevnte sirklene. Metoden ble brukt som en kontroll på om det svaret de hadde kommet frem til viste seg å være korrekt.

Noen elever velger også å tegne en likesidet trekant som er tilnærmet lik en likesidet trekant i den euklidske geometrien. Disse elevene får ikke en nøyaktig angivelse av trekanten, men gjør en tilnærming til en likesidet trekant, basert på øyemål. Disse elevene er, gjennom samtaler, veldig opptatt av at lengden skal være lik på alle sidene i en likesidet trekant. De har ikke evnen til å knytte egenskapene ved taxicab-geometrien sammen med egenskapene til en likesidet trekant. De blir derfor nødt til å forkaste noen egenskaper for å få tegnet sin trekant. Selv etter å ha sett trekanten har de problemer med å godta resultatet. Det er først når lengdene er summert opp, i x- og y-retning, at de til en viss grad godtar at det kan være korrekt.

I den femte oppgaven skal elevene tegne midtnormalen til linja AB, i den likesidete trekanten de tegnet i forrige oppgave. De elevene som har vansker med å se sammenhengene mellom de to geometriene, euklidsk og taxicab, vil prøve å tegne midtnormalen slik de vanligvis gjør i den euklidske geometrien. Selv om de har tegnet andre midtnormaler i taxicab-geometrien tidligere, har de problemer med å implementere den kunnskapen inn i denne oppgaven. Noen elever uttrykker det som et forstyrrende element at toppunktet i trekanten ikke ligger normalt på midtpunktet til AB. To av løsningene, som ikke er korrekt, blir da at elevene tegner normalen fra C ned på AB, midtnormalen blir kun en normal, og den andre er at de tegner en normal i midtpunktet på AB, men følger euklidsk avstandsmåling.

Noen elever ser sammenhenger mellom det de har gjort tidligere og hvordan denne oppgaven er bygd opp. De ser at punktene A og B ligger på en måte de har sett tidligere og henter frem kunnskaper fra tidligere oppgave. På denne måten beregner de punktene som har samme avstand fra A og B, og ser dermed at punktet C ligger på midtnormalen til AB.

Den siste oppgaven i undervisningsopplegget omhandler igjen likesidete trekanter. Elevene blir bedt om å tegne en likesidet trekant, der AB er grunnlinje. Punktene A og B, er nå plassert i posisjoner de ikke har jobbet med hittil i oppgavene. Elevene blir og spurt om de kan finne flere enn en likesidet trekant som har AB som grunnlinje. I tillegg til dette skal de tegne eventuelle likesidete trekanter sammen med midtnormalen til linjestykket AB.

Utførelsen av denne oppgaven viste seg å være vanskelig. Dette ble oppdaget under gjennomføringen av undervisningsopplegget og oppgaven ble derfor gjennomgått i plenum, i de respektive gruppene elevene var samlet. Elevene fikk her foreslå sine løsninger, noe som medførte at det ble satt enda større fokus på definisjoner og at disse var like i de ulike geometriene, selv om resultatet visuelt sett ble annerledes.

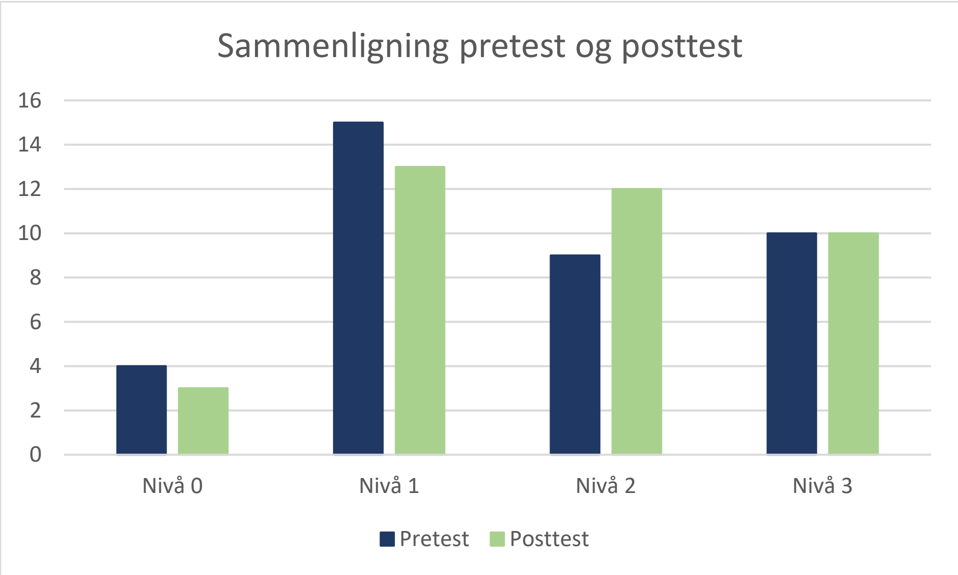
Elevene kom frem til ulike toppunkter for den likesidete trekanten under gjennomgangen, og dermed ble det på naturlig vis flere trekanter som var likesidete, med AB som grunnlinje. Ved å tegne inn trekantene og bruke reglene for hvordan en måler avstand, summen av x- og y-enheter, fant elevene ut at alle de tre trekantene var likesidete og alle hadde AB som grunnlinje. I tillegg til å finne trekantene med toppunkt ovenfor AB, var det og noen elever som fant ut at det måtte være tilsvarende på andre siden av AB, altså speile resultatet om AB. Når de fikk sjekket opp disse punktene også, fant de ut at det stemte.

I en likesidet trekant til toppunktet til trekanten ligge på midtnormalen til grunnlinja. I dette tilfellet ble det funnet tre likesidete trekanter på samme side av grunnlinja. Ved å tegne inn midtnormalen til grunnlinja fikk elevene se at alle disse toppunktene var sammenfallende med midtnormalen. Dette fordi midtnormalen, med denne plasseringen av A og B, spredte seg ut i vifteform. En vifteform tilsvarende oppgave 2c. På denne måten ble midtnormalen en kontroll av det arbeidet de hadde gjort med de likesidete trekantene.

4.3 Posttest

I etterkant av gjennomført undervisningsopplegg ble det gjennomført en posttest, som skal gi informasjon om elevenes utvikling gjennom denne undersøkelsen. Ulike forhold som kan være med å påvirke utviklingen vil bli diskutert nærmere i neste kapittel.

Der pretesten gir et bilde av elevenes kunnskap før undervisningen knyttet til denne undersøkelsen ble gjennomført, vil posttesten gi et bilde av elevenes kunnskap etter gjennomført undervisningsopplegg. En sammenligning av nivåfordelingen på pretest og posttest vil kunne fortelle oss om elevene har hatt en utvikling gjennom dette undervisningsopplegget i ikke-euklidsk geometri.



Figur 18 Sammenligning, antall elever pr. nivå pretest og posttest

Figur 18 viser fordelingen av elever på de ulike nivåene på pretest og posttest, sammenlignet. Målet vårt med dette undervisningsopplegget er at elevene skal øke sin forståelse gjennom å få kjennskap til en ikke-euklidsk geometri. For at vi skal oppnå den fremgang må antall elever på lavere nivå reduseres og antallet på høyere nivå økes. Figuren viser at det er nettopp dette som skjer. Figuren viser at antall elever på nivå 0 og nivå 1 reduseres. I tillegg til dette økes antallet på nivå 2 tilsvarende. Dette betyr også at færre elever faller utenfor kategoriseringen til Usiskin (1982). Det kan være mange faktorer som spiller inn på disse tallene, og vi gjennomfører derfor en statistisk analyse for å kunne si noe om utviklingen med større sikkerhet.

4.4 Sammenligning pretest og posttest

Ved å sette pretesten og posttesten i sammenheng vil vi kunne se om elevene har oppnådd en endring i sitt nivå av geometriforståelse mellom testene. For å kunne vurdere om det har vært en utvikling velger vi å gjennomføre en t-test på datamaterialet som omhandler nivåene elevene har blitt kategorisert til på de to testene.

Ved gjennomføring av en t-test er det en forutsetning at tallmaterialet fra de to testene er normalfordelt. Sentralgrenseprinsippet sier at en ved $n>30$, der n er antall observasjoner, vil kunne anta at datamaterialet er normalfordelt. Vi gjennomfører likevel en Shapiro-Wilk-test for å stadfeste at observasjonene er normalfordelt.

Shapiro-Wilk W test for normal data

Variable	Obs	W	V	z	Prob>z
Pretest	**38**	**0.95980**	**1.528**	**0.889**	**0.18701**

Tabell 2 Shapiro-Wilk - test av normalfordeling, pretest

Shapiro-Wilk W test for normal data

Variable	Obs	W	V	z	Prob>z
Posttest	**38**	**0.97466**	**0.963**	**-0.079**	**0.53164**

Tabell 3 Shapiro-Wilk - test av normalfordeling, posttest

Shapiro-Wilk-testen er gjort på bakgrunn av de 38 observasjonene som er foretatt på de ulike testene. Ifølge Razali and Wah (2011) vil verdier av W som nærmer seg 1 støtte opp under at datamaterialet er normalfordelt. I motsatt fall, med verdier av W som nærmer seg 0, kan vi forkaste antakelsen om normalfordelte observasjoner. I begge tilfeller er også verdien Prob>z større enn signifikansnivået på 5%. Det vil si at datamaterialet for både pretesten og posttesten er innenfor det vi definerer som normalfordelt.

Ved gjennomføring av en t-test vil vi sette opp en nullhypotese. Vi skal bruke testen til å avgjøre om den skal forkastes eller om vi må la denne stå. I denne undersøkelsen blir nullhypotesen (H_0), og den alternative hypotesen (H_1), som følger:

H_0: Det har ikke vært endring i nivå, mellom pretest og posttest, blant elevene som har deltatt i undersøkelsen.

H_1: Elevene, som har deltatt i undersøkelsen, har hatt en utvikling nivåmessig, mellom pretest og posttest.

For å undersøke om nullhypotesen blir stående, eller om den skal forkastes, gjennomførte vi en paret t-test. Denne tar da utgangspunkt i de oppnådde nivåene fra pretesten og sammenligner med de oppnådde nivåene fra posttesten. Signifikansgraden setter vi til 5%, som er norm for slike tester.

Resultatet fra pretesten (Gjennomsnitt = 1,66, Standardavvik = 0,99) og posttesten (Gjennomsnitt = 1,76, Standardavvik = 0,94) for geometriforståelse indikerer at t(74)=-0,78, p= ,44.

Siden p er større enn signifikansgraden kan vi ikke forkaste nullhypotesen, som sier at det ikke har vært noen endring i nivået til elevene mellom pretest og posttest. Vi beholder nullhypotesen da forskjellen i nivå, mellom pretest og posttest ikke er statistisk signifikant.

Resultatet av testen sier at, selv om gjennomsnittet for elevenes nivå øker fra pretest til posttest, er ikke dette en statistisk signifikant endring. Vi kan derfor ikke si at nivået er blitt bedre etter undervisningsopplegget.

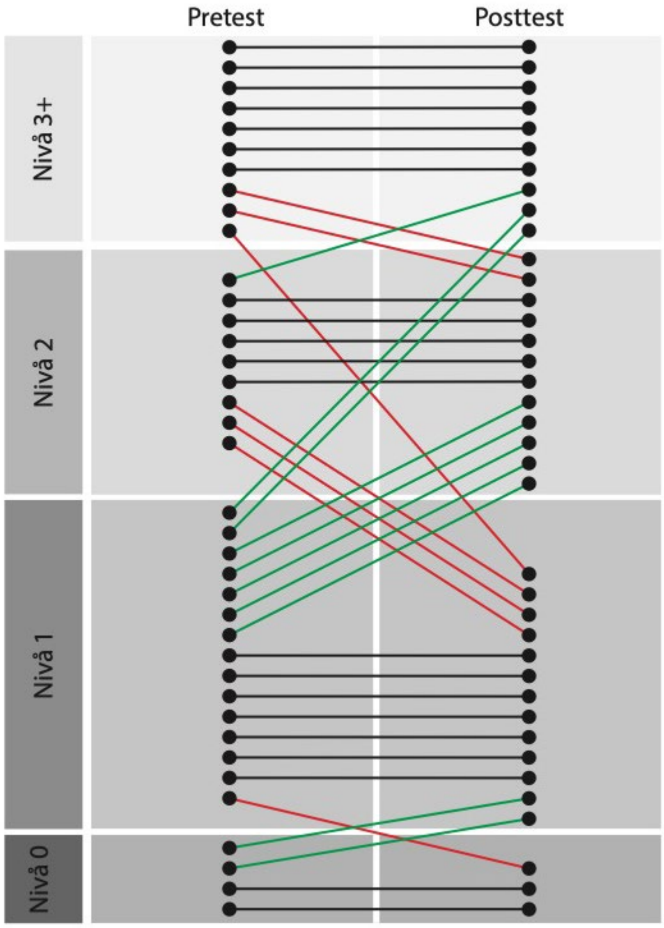
Et mål på utvikling mellom pretesten og posttesten er antall elever som kategoriseres på de ulike nivåene. Sammenligner disse for å se etter økning eller nedgang i antall elever på de ulike nivåene.

Figur 19 viser hvordan antallet elever som kategoriseres til de ulike nivåene endres fra pretest til posttest. De grå søylene viser antallet på de ulike nivåene på pretesten, mens de blå søylene viser antall elever på de ulike nivåene på posttesten. Av diagrammet ser vi at nivå 0 har hatt en reduksjon i antall elever fra pretest til posttesten. Antall elever som kategoriseres til nivå 0 går fra 4 på pretesten til 3 på posttesten. Antall elever som kategoriseres til nivå 1 på pretesten er 15, mens på posttesten er antallet redusert til 13. Nivå 1 har altså en nedgang på 2 elever fra pretest til posttesten. Nivå 0 og nivå 1 har derfor begge en nedgang i antall elever som kategoriseres til disse nivåene.

På nivå 2 har antall elever som kategoriseres til dette nivået økt. På pretesten var det 9 elever som ble kategorisert til nivå 2, mens det på posttesten er 12 elever som kategoriseres til nivå 2. Nivået har hatt en økning på 3 elever fra pretest til posttesten.

Når det kommer til nivå 3 viser diagrammet at det er et konstant antall elever på nivået, fra pretest til posttesten. Her er alle elevene som er kategorisert på nivå 3 eller høyere samlet i ett. Det vil si at det kan ha vært interne forflytninger i denne gruppen, men siden vi har valgt å se bort ifra de øverste nivåene, vil alle elevene bli kategorisert på samme nivå. Det er altså 10 elever som kategoriseres til nivå 3 på pretesten og det samme antall på posttesten.

Figur 19 viser at det er flere elever som oppnår høyere nivå på pretest kontra posttesten. Det er en nedgang i antall elever på de nederste nivåene, konsekvensen av det er en økning i antall elever på nivået over. For å se nærmere på denne utviklingen ser vi på hvordan de ulike elevene beveger seg mellom de ulike nivåene.



Figur 19 Utvikling pretest til posttesten, pr. elev

Figur 19 viser hvordan elevene på de ulike nivåene har utviklet seg nivåmessig fra pretesten til posttesten. Figuren viser med røde linjer hvordan elevene har hatt en nedgang nivå, mens de grønne linjene viser hvordan elevene har hatt en positiv utvikling og steget i kategorisert nivå. Denne figuren viser større bevegelser i elevmassen mellom de ulike nivåene enn diagrammet i **Feil! Fant ikke referansekilden.** viser.

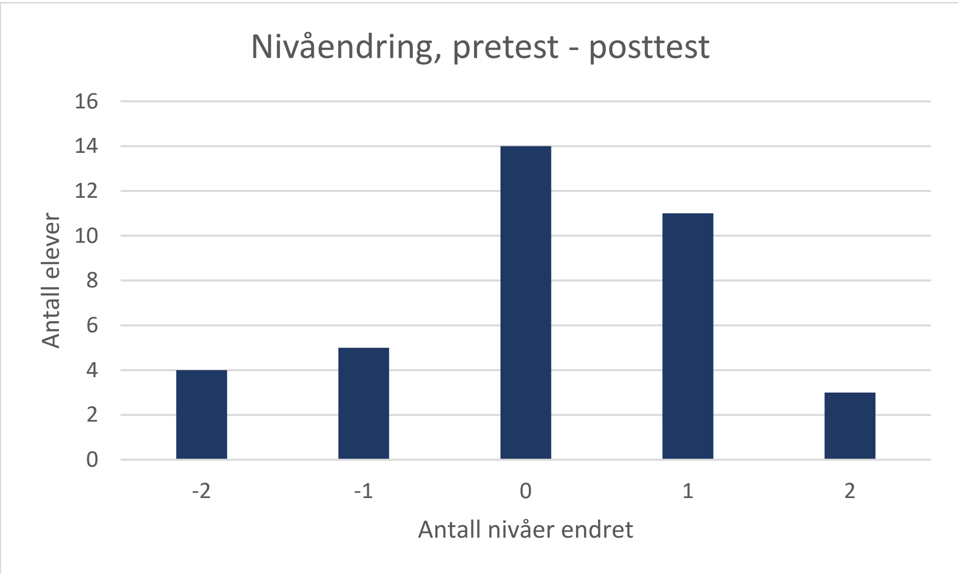
Antall elever på nivå 0 er 4 på pretesten, mens posttesten viser at 3 elever er kategorisert til nivå 0. Tilveksten til nivået er -1. Figur 19 viser at det er to elever som beveger seg fra nivå 0 til nivå 1, mens det er en elev som beveger seg motsatt vei, og dermed gjør det svakere på posttesten i forhold til pretesten. Antall elever på nivå 0 etter posttesten er lavere enn på pretesten, nivå 0 har derfor hatt en positiv utvikling.

Nivå 1 har færre elever på posttesten, i forhold til pretesten. Figur 19 viser at det er 7 elever som forflytter seg fra nivå 1 på pretesten til høyere nivå på posttesten To av disse elevene beveger seg helt opp til nivå 3, og stiger dermed 2 nivåer mellom testene. Det er også en elev som faller ett nivå, fra nivå 1 til nivå 0. Av de opprinnelige elevene på nivå 1, de som ble kategorisert til nivået på pretesten, er det 7 elever som blir værende på nivået over til posttesten. Det er og en tilvekst fra de andre nivåene, fra pretest til posttesten. 2 elever øker, som nevnt, fra nivå 0 på pretesten, til nivå 1 på posttesten. Det tilkommer også tre elever fra nivå 2, og en elev fra nivå 3. Det totale antallet elever på nivå reduseres likevel med 2 elever mellom pretest og posttesten.

På nivå 2 og høyere er det ønskelig med tilvekst, da dette er nivåer der det er ønskelig at elevene ligger med tanke på hvor i utdanningsløpet de er. I tillegg er dette nivå som ligger over gjennomsnittlig oppnådd nivå på pretesten. På nivå 2 var det i utgangspunktet 9 elever, på pretesten. Av disse var det 5 elever som ble værende på nivået over til posttesten. 3 elever har en svakere kategorisering på posttesten, og faller dermed til nivå 1. Samtidig er det en elev som øker sin kategorisering fra nivå 2 på pretesten til nivå 3 på posttesten. Totalt sett er det tilvekst på nivået, da det er 12 elever som kategoriseres til nivå 2 på posttesten. To elever kommer fra kommer fra høyere nivå, nivå 3, mens det er 5 elever som øker sin kategorisering med ett nivå, fra nivå 1 på pretesten til nivå 2 på posttesten. Nivå 2 har en netto tilvekst på 3 elever.

Antall elever som kategoriseres til nivå 3 er det samme for før- og posttesten. Det er 7 elever som bevarer nivået sitt mellom pretesten og posttesten. Av de 10 som kategoriseres til nivå 3 på pretesten er det 3 som faller ned på lavere nivå på posttesten. 2 av disse forflytter seg til nivå 2, mens en elev faller to nivåer, ned til nivå 1. På posttesten er det tilvekst av like mange elever, slik at det er 3 elever som kommer fra lavere nivå på pretesten og kategoriseres på nivå 3 på posttesten. To av disse elevene ble kategorisert til nivå 1 på pretesten, mens en av elevene ble kategorisert til nivå 2 på pretesten.

For å sette tall på disse endringene i nivå setter vi tall på nivåendringene. Dersom en elev endrer nivå fra pretest til posttesten vil eleven gis verdien tilsvarende nivåendringen. I tillegg vil denne verdien gis fortegn tilsvarende veien utviklingen går. Positiv retning er opp i nivå. Eksempelvis vil en elev som går fra nivå 1 på pretesten til nivå 3 på posttesten gis verdien 2. En annen elev går fra nivå 2 på pretesten og ender på nivå 1 på posttesten, og gis dermed verdien -1. Elever som beholder sitt nivå mellom testene gis verdien 0.



Figur 20 Nivåendring mellom pretest og posttesten, elever pr. antall endrede nivåer

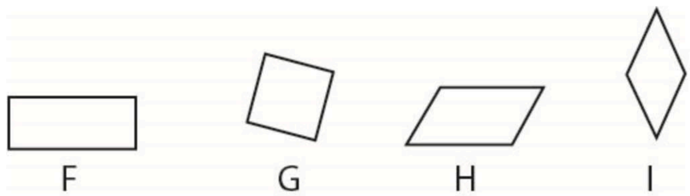
Diagrammet i Figur 20 viser antall elever som har forflyttet seg mellom de ulike nivåene. Hovedvekten av elever har beholdt sitt nivå, mens et mindretall har endret nivå mellom testene. Summeres verdiene for nivåendringene får vi et positivt tall, noe som viser at det totalt sett har vært en forflytning i positiv retning mellom pretest og posttesten.

4.5 Oppgaver – sammenligning mellom pretest og posttest.

I vedlegg 5 vises en oversikt over hvordan svarfordelingen har vært på de ulike oppgavene, både pretest og posttest. De korrekte alternativene vises understreket. Antallet som er oppgitt angis i antall elever. Vil her trekke frem noen av oppgavene som elevene har hatt vansker med, for deretter å diskutere årsaker til dette i neste kapittel. Vedlegget det vises til viser antallet elever som besvarer de ulike alternativene. Det kan være mange årsaker til at antallet endrer seg mellom pretest og posttest, så de nøyaktige tallene er ikke interessante i denne sammenhengen. Vi fokuserer her på oppgaver som byr på utfordringer, samt oppgaver som elevene mestrer godt.

Av oppgavene på nivå 1 trekker vi frem oppgave 4 som en oppgave som byr på utfordringer for elevene. Oppgave 1 spør etter samme geometrisk figur, men her er det flere elever som besvarer korrekt, uavhengig av pretest og posttest.

Oppgave 4



Hvilke figurer er et kvadrat?

- ◯ Ingen av dem er et kvadrat
- ◯ Bare G
- ◯ Bare F og G
- ◯ Bare G og I
- ◯ Alle er kvadrater

Figur 21 Oppgave 4 i geometritesten

Oppgave 4 ber om at eleven skal angi hvilke figurer som kan være et kvadrat. Det korrekte svaret er at figur G er et kvadrat. Vi ser at det er en stor del av elevene som besvarer denne oppgaven korrekt, likevel utmerker denne oppgaven seg som vanskelig for en del elever. Vi kan og legge merke til at det er en del elever som mener at både figur G og figur I er kvadrater. I neste kapittel vil vi se nærmere på dette, men nevner likevel at vi ser elever sliter med å definere hvilke egenskaper som skiller geometriske former, og hvilke som uttrykker likheter. Mange elever fokuserer nok på at sidekantene skal være like lange i et kvadrat, men overser egenskapene vinklene utgjør.

Oppgave 5

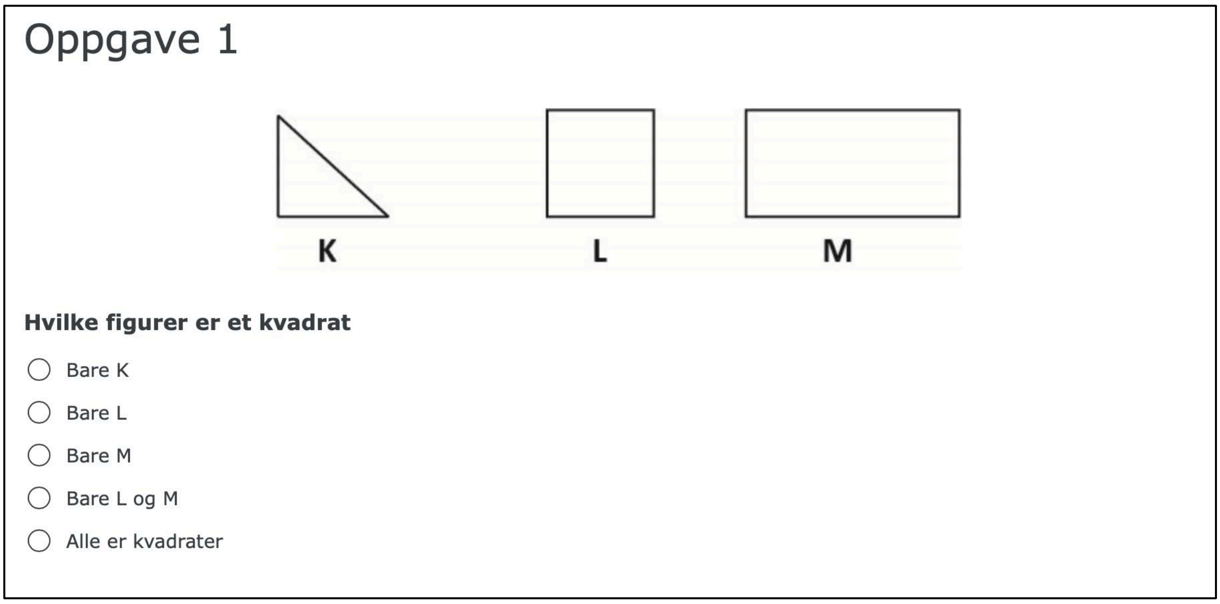
Hvilke av figurene er et parallellogram?

- Bare J
- Bare L
- Bare J og M
- Ingen av dem er et parallellogram
- Alle figurene er et parallellogram

Figur 22 Oppgave 5 i geometritesten

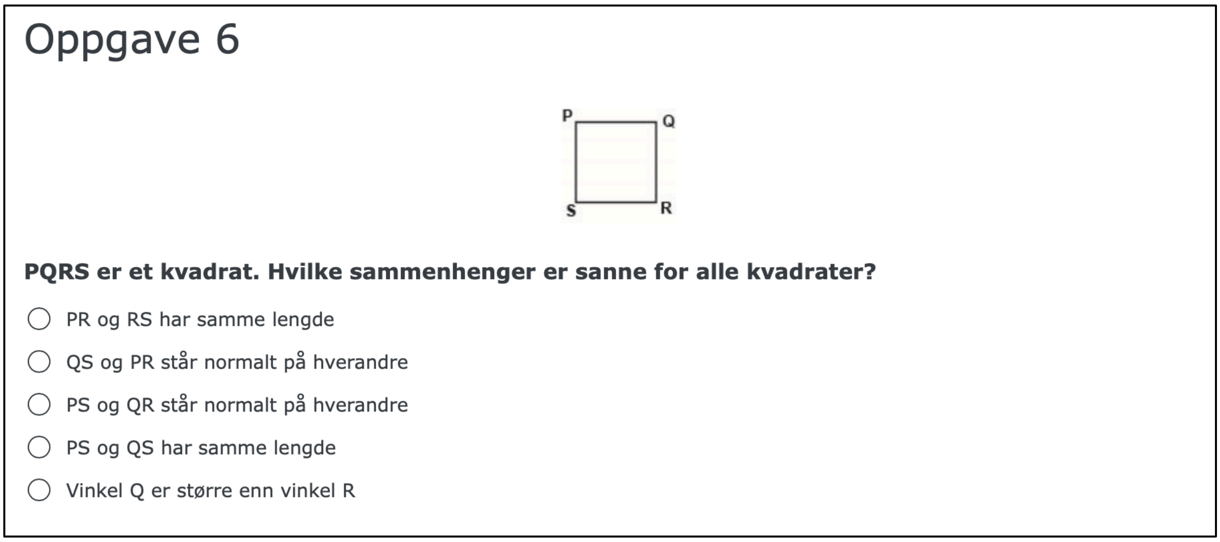
Den andre oppgaven som utmerker seg som vanskelig for elevene på dette første nivået, er oppgave 5. I denne oppgaven er det under halvparten av elevene som svarer korrekt. Oppgaven spør etter hvilke av figurene som er et parallellogram. Vi legger merke til at alle figurene er parallellogram. Det som kan forvirre noen elever i denne oppgaven, og som vi ser av svarfordelingen, er at en stor andel av elevene ekskluderer romben fra parallellogrammene. Vi er her tilbake til hvilke egenskaper definerer en geometrisk figur og hvilke angir fellestrekk. Romben innehar egenskapene til et parallellogram, i tillegg til at ikke alle parallellogrammene har samme egenskaper som romben.

I positiv retning er det oppgave 1 som utmerker seg. Oppgave 1 har en stor andel av elevene besvart korrekt på begge testene. I likhet med oppgave 4, omhandler også oppgave 1 den geometriske figuren kvadrat. I denne oppgaven er figurene oppstilt på samme linje, det vil si at grunnlinjen i alle figurene er parallelle. Det gjør det enklere for elevene å sammenligne figurene. De resterende figurene er trekant og rektangel, noe som betyr at det er kjente figurer for de fleste elevene. Dette er en av oppgavene som flest elever besvarer korrekt.



Figur 23 Oppgave 1 i geometritesten

På nivå 2 er det to oppgaver som utmerker seg med få korrekte svar, og dermed som vanskelige for elevene. I Oppgave 6 skal elevene ta stilling til påstander om egenskapene ved et kvadrat. Kvadratet har navngitte vinkler og sidelengdene bokstaveres på bakgrunn av vinklene.

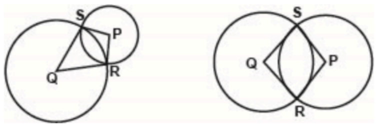


Figur 24 Oppgave 6 i geometritesten

Oversikten i vedlegg 5 viser hvordan svarfordelingen er på denne oppgaven. Vi ser av oversikten at det er få elever som besvarer denne korrekt, med at QS og PR står normalt på hverandre. Det at alternativ 3, PS og QR står normalt på hverandre, er så mye valgt gir indikasjon på at elevene har vanskeligheter med forskjellen på normalt på og parallelt med. Dette viser at det er behov for fokus på normaler, og betydningen av disse, slik undervisningsopplegget vårt legger opp til. Selv om det blir i en annen setting, er det håp om den kunnskapen bringes med i andre typer problemstillinger elevene treffer på. Det er i tillegg mange elever som svarer at sidelengden PS og diagonalen QS har samme lengde.

Oppgave 10

To sirkler med senter P og Q skjæres i R og S og danner en 4-sidet figur PRQS.
Her er to eksempler.



Hvilke av alternativene er IKKE alltid sanne?

- ◯ PRQS vil ha to par med sider som er like lange
- ◯ PRQS vil ha minst to vinkler som er like store
- ◯ Linjene PQ og RS vil stå normalt på hverandre
- ◯ Vinkel P og vinkel Q vil være like store
- ◯ Alle alternativene er sanne

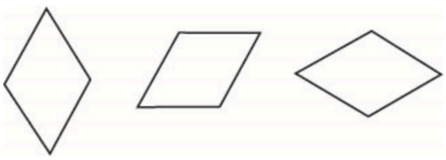
Figur 25 Oppgave 10 i geometritest

Oppgave 10 er annen oppgave, tilknyttet nivå 2, som elevene har vanskeligheter med å besvare korrekt. Oppgaven omhandler egenskaper ved sirkler. Her er begrepet radius sentralt, sammen med definisjonen av en normal. Oppgaven utfordrer elevene til å generalisere en situasjon. I tillegg er denne oppgaven relevant i forhold til den undervisningen denne studien legger opp til. Vi fokuserer på definisjoner knyttet til geometriske figurer, deriblant sirkelen. Definisjonen av en sirkel er relevant kunnskap å besitte for å løse denne oppgaven.

Når oppgavene er tilknyttet nivå 2 blir spørsmålsformuleringen mer teoretisk, som er i tråd med modellen til van Hiele. Det stiller større krav til elevenes evne til å generalisere og tenke abstrakt.

Oppgave 8

En rombe er en 4-sidet figur der alle sidene har samme lengde. Her er 3 eksempler.



Hvilke av alternativene er IKKE sanne for alle romber?

- ◯ De to diagonalene har samme lengde
- ◯ Hver diagonal halverer to vinkler i romben
- ◯ Diagonalene står vinkelrett på hverandre
- ◯ Motstående vinkler har samme størrelse
- ◯ Alle alternativene er sanne for alle romber

Figur 26 Oppgave 8 i geometritesten

Elevene skal her finne det utsagnet som ikke er sant for alle romber, om ikke alle er sanne. Det korrekte alternativet er A, at de to diagonalene har samme lengde. Vi registrerer at det er en vesentlig del av elevene som besvarer denne oppgaven med alternativ B, at hver diagonal halverer to vinkler i romben. Elevene blir her utfordret til å generalisere problemstillingen, noe som er utfordrende for mange. I tillegg vil det i en slik oppgave være en fordel om elevene er kjent med å se på den motsatte hendelsen. For alternativ B sin del vil det være å se om det finnes en rombe der hver diagonal halverer to vinkler i romben. Vi er igjen tilbake til spesialtilfellene, nemlig kvadratet. Kvadratet oppfyller definisjonen til en rombe. I tillegg har kvadratet noen egenskaper ikke alle andre romber har. Kvadratet vil være det eksempelet eleven trenger for å avskrive alternativ B i denne oppgaven. Dette er tenkning som elevene ikke har nok trening i fra tidligere, og dermed blir oppgaven utfordrende for mange.

Blant oppgavene som skal definere elever på nivå 3 er oppgave 14 en av oppgavene som utmerker seg som utfordrende. På dette nivået blir oppgavene i større grad formulert kun ved tekst, det gis færre eksempler og hjelpefigurer. Oppgave 14 definerer ulike utsagn som omhandler egenskapene ved ulike geometriske figurer, og sammenligner dem parvis. Elevene skal her avgjøre hvilket utsagn som er sant, eller om noen av dem i det hele tatt er sanne.

Oppgave 14

Hvilket utsagn er sant?

- ○ Egenskapene til rektangel er egenskaper hos alle kvadrater
- ○ Egenskapene til kvadrater er egenskaper hos alle rektangler
- ○ Egenskapene til rektangel er egenskaper hos alle parallellogram
- ○ Egenskapene til kvadrat er egenskaper hos alle parallellogram
- ○ Ingen av alternativene er sanne

Figur 27 Oppgave 14 i geometritesten

I denne oppgaven er det alternativ A som er korrekt. Elevene skal nok en gang forholde seg til hvilke egenskaper som definerer en geometrisk figur. Noen figurer vil ha alle egenskapene en trenger for å oppfylle en definisjon, men i tillegg ha noen ekstra egenskaper.

Oppgave 11 og oppgave 15 er blant oppgavene som besvares oftest korrekt, blant oppgavene som definerer nivå 3. Oppgave 11 går ut på å vurdere to utsagn, og se hvilke konsekvenser de har for hverandre. Kan begge være sanne eller har det ene utsagnet egenskaper som utelukker den andre påstanden.

Oppgave 11

Her følger to utsagn.
Utsagn 1: Figur F er et rektangel
Utsagn 2: Figur F er en trekant

Hvilket er riktig?

- ◯ Hvis 1 er sann, så er 2 sann
- ◯ Hvis 1 er usann, så er 2 sann
- ◯ 1 og 2 kan ikke begge være sanne
- ◯ 1 og 2 kan ikke begge være usanne
- ◯ Ingen av alternativene er riktig

Figur 28 Oppgave 11 i geometritesten

Majoriteten av elevene besvarer korrekt alternativ, C, og forstår at utsagn 1 og 2 ikke begge kan være sanne. De resterende elevene fordeler seg jevnt utover de resterende alternativene. Elevene er sannsynligvis ikke kjent med denne typen oppgaver fra tidligere, og dette kan spille inn på antallet som besvarer oppgaven korrekt.

Oppgave 15

Hva har alle rektangler som ingen parallellogram har?

- ◯ Motsatte sider er like lange
- ◯ Diagonalene er like lange
- ◯ Motsatte sider er parallelle
- ◯ Motsatte vinkler er like store
- ◯ Ingen av alternativene.

Figur 29 Oppgave 15 i geometritesten

Også i Oppgave 15 handler det om parallellogram og rektangel, og deres egenskaper. Som oppgaveteksten viser er det påstander som det skal tas stilling til, og oppgaven er dermed teoretisk utformet. I denne oppgaven er det alternativ B som er korrekt, at diagonalene er like lange i rektangler, noe et parallellogram ikke har. På nivå 3 er språket i oppgavene mer matematisk utformet og det øker kravene til lesetekniske ferdigheter hos elevene. Samtidig er dette nærmere hvordan matematikken beskrives og defineres, og i så måte slik elevene må forholde seg til faget.

5 Drøftingsdel

Resultatene av de undersøkelsene som er utført gir oss ingen statistisk signifikant endring i elevenes geometriforståelse under gjennomføringen av undervisningsopplegget om ikke-euklidsk geometri. Vi vil her se nærmere på noen årsaker til dette resultatet, hvilke forutsetninger som ligger til grunn hos elevene, samt diskutere noen endringer som bør gjøres knyttet til videre undersøkelser på dette temaet.

5.1 Elevenes geometriforståelse før gjennomført undervisning

Geometritesten som ble gitt elevene i forkant av undervisningen gir informasjon om elevenes nivå av geometriforståelse. Elevenes nivå i forkant av undervisningen er relevant for å måle endring i geometriforståelse i etterkant av undervisningsopplegget. Nivået elevene ligger på i forkant av undervisningsopplegget er og viktig for oss i forbindelse med å etablere et nivå for geometriforståelsen til elevene på dette trinnet.

Van Hiele (1959) sier at det er viktig å være bevisst på tre ulike faktorer i undervisningen; eleven, læreren og faget som undervises. Det er ifølge Van Hiele (1959) viktig at en ikke mister fokus på noen av disse delene underveis i undervisningen. Faget som undervises skal tilpasses nivået til eleven av læreren. I den forbindelse må læreren vite nivået elevene er på for at undervisningen skal kunne tilpasses den enkelte elev. Innenfor geometri er det viktig at forståelsen bygges lagvis. Det er i den forbindelse van Hiele-modellen har sitt opphav. Modellen er utviklet for å hjelpe eleven å utvikle forståelse for geometri (Watson, 2012).

For elevenes læring er det viktig for læreren å være bevisst på elevenes nivå av geometriforståelse. Dette for å tilpasse undervisningen til det nivået elevene kan motta kunnskap på. Elevene kan ikke nyttiggjøre seg formidlet kunnskap om de ikke har forutsetninger til å forstå og anvende denne kunnskapen. Ifølge De Villiers (2010) er en av grunnene til at geometriundervisningen i mange tilfeller mislykkes, at det undervises på et nivå som er høyere enn elevene har evne til å forstå. Av den grunn er pretesten også viktig for at vi skal kunne tilrettelegge undervisningsopplegget for å oppnå best mulig utbytte for elevene. Det er også viktig at elevene selv er bevisst på hvilket nivå de selv tilhører, og hva de må vektlegge for å kunne oppnå høyere grad av forståelse.

Basert på kompetansemålene i gjeldende læreplan mener vi at elevene bør oppnå nivå 2 eller nivå 3 på slutten av ungdomstrinnet. Dersom en elev skal oppnå innholdet i kompetansemålene bør dette være nivået å sikte etter. Ifølge Utdanningsdirektoratet (2020b) skal elevene på 9. årstrinn utforske, beskrive og argumentere for sammenhenger. Dette er ifølge De Villiers (2010) egenskaper elevene skal ha på nivå 3 i van Hiele-modellen. Når det er sagt er det en klar forventning i forkant av undersøkelsen om at dette ikke er tilfelle for hele elevgruppen. Det er store variasjoner i deltakerne og dermed urealistisk å forvente at alle er innenfor anbefalte nivåer.

På bakgrunn av tilgjengelig elevmasse hadde vi forventninger om at det skulle være variasjoner i resultatene blant elevene. T-testen som er gjennomført på resultatene av pretesten og posttesten viser at elevenes gjennomsnittlige van Hiele-nivå var 1,66. Den gjennomsnittlige eleven ligger altså et sted mellom nivå 1 og 2 før undervisningsopplegget om ikke-euklidsk geometri.

5.2 Hvilken effekt har undervisningopplegget hatt?

For å måle effekten av undervisningsopplegget om ikke-euklidsk geometri ble det gjennomført en identisk geometritest i etterkant av gjennomføringen, en posttest. Tanken bak denne strukturen er at disse to identiske testene skal gi svar på om undervisningen har påvirket elevene i positiv retning, eller ikke. Pretesten etablerer et elevnivå i forkant av gjennomført undervisningsopplegg, og danner grunnlaget for videre sammenligning. Tolkningen av resultatene kan gjøres på mange måter, og det er mange faktorer som spiller inn. I resultatdelen har vi presentert de funnene vi har gjort, ned på detaljnivå innenfor de ulike nivåene. I og med at elevgrunnlaget er relativt lite er det viktig å se nærmere på hvorfor resultatene er blitt slik de er, og vi har bedre mulighet til nettopp det med færre observasjoner.

Antall elever på de ulike nivåene i van Hiele-modellen endrer seg fra pretest til posttesten. Det innebærer at flere elever har besvart posttesten ulikt pretesten, og på bakgrunn av det endret nivå. Som t-testen viser, er det ikke statistisk signifikant endring i van Hiele-nivå mellom pretest og posttesten. Vi kan derfor ikke si at elevene har hatt noen utvikling på bakgrunn av undervisningsopplegget.

Figur 19 viser fordelingen av elever på nivå både på pretesten og posttesten. Denne figuren viser at det er en nedgang i antall elever på både nivå 0 og nivå 1. Den tilsvarende økningen har vi i antall elever på nivå 2. Vi kan altså se at flere elever øker sitt van Hiele-nivå mellom testene. Likevel er det vanskelig å trekke noen konklusjon om at elevene faktisk har bedret sitt nivå. Ifølge Vojkuvkova (2012) vil det kreve flere titall timer med undervisning på korrekt nivå for å endre en elevs van Hiele-nivå. Det er derfor lite sannsynlig at vår intervensjon vil medføre at mange elever beveger seg mellom to nivåer. Elever som i utgangspunktet har tilegnet seg nok kunnskap på et van Hiele-nivå, vil kunne få den siste kunnskapstilføyelsen som gjør at vedkommende vil endre nivå, men det er lite hold for å si at det vil gjelde et vesentlig antall elever.

Van Hiele (1959) beskriver prosessen fra et nivå til et annet gjennom ulike stadier. Det er mulighet for at elevene, gjennom undervisningsopplegget, forflytter seg gjennom disse fasene og dermed forsterker sitt van Hiele-nivå. Ifølge Van Hiele (1959) skal elevene gjennom fasene (1) undersøkelse, (2) styrt orientering, (3) uttrykkelse, (4) fri orientering og (5) integrering. Gjennom disse fasene skal elevene forflytte seg fra et van Hiele-nivå til det neste. Vår intervensjon berører flere av disse fasene, men slik Usiskin (1982) beskriver tidsbruken, vil det være umulig å forvente denne progresjonen gjennom vårt undervisningsopplegg.

Ser vi på endringene i tallmaterialet, ser vi at det er variasjoner blant elevene på alle nivåene mellom pretest og posttest. Disse variasjonene kan være uttrykk for flere momenter. Undervisningen som ble gitt innebar oppgaver der elevene skulle anvende definisjoner, slik de er kjent med dem fra euklidsk geometri, og anvende dem i ulike situasjoner i den ikke-euklidske taxicab-geometrien. Dette medfører at elevene har blitt undervist på et nivå som, for en del av elevene, innebærer undervisning på et nivå over deres opprinnelige van Hiele-nivå. Ifølge Usiskin (1982) er det tydelig skiller mellom nivåene, i form av at hvert nivå har sitt eget språk og nettverk av symboler. Elevene som opplever undervisning på et for høyt nivå vil derfor ha problemer med å forstå den undervisningen som ble gitt.

Van Hiele (1959) mener at undervisning på et for lavt nivå for eleven vil medføre at eleven kan redusere sitt van Hiele-nivå. Elever som mottar undervisning på et for lavt nivå trekkes ned til et faglig lavere nivå, og ser bort i fra sammenhenger og definisjoner som er tilegnet på høyere nivå. Eleven opplever det Van Hiele (1959) beskriver som «reduction of level».

Vi har ikke grunnlag for å si at det har vært en økning i geometriforståelsen til elevene gjennom denne undersøkelsen. Testene som er gjennomført er utviklet for å definere hvilken grad av geometriforståelse elevene som deltar har. Geometrien som ligger til grunn for testen er den euklidske geometrien, som vi også anvender i skolematematikken. Målet med å anvende ikke-euklidsk geometri i dette undervisningsopplegget er å sette fokus på elevenes evne til å tolke og fremstille definisjoner, basert på figurers egenskaper. Ifølge Krause (1973) vil kjennskapen til ikke-euklidsk geometri øke kunnskapen om euklidsk geometri. For elevene er dette egenskaper som skal tilegnes gjennom grunnskolen, ifølge kompetansemålene som er fastsatt av Utdanningsdirektoratet gjennom gjeldende læreplan (Utdanningsdirektoratet, 2020b).

Testene som har vært gjennomført med elevene måler ikke direkte elevenes kjennskap til ulike geometriske definisjoner, men elevene må anvende dem i større grad opp igjennom van Hiele-nivåene. På denne måten vil geometritesten kunne fange opp elevenes kunnskapsendring på dette området. Utfordringen i denne undersøkelsen er tidsaspektet. Det har vært begrensede muligheter til å bruke tid på gjennomføringen av undervisningsopplegget, noe som medfører at det også er begrenset hva vi kan forvente av endringer på testene. Ifølge Usiskin (1982) har Dina van Hiele rapportert at forventet tidsbruk mellom nivå 1 til nivå 2 vil være om lag 20 undervisningstimer. På bakgrunn av dette er det ikke mulig å forvente målbare endringer i løpet av den tiden vi har til rådighet.

Denne undersøkelsen baserer seg på et relativt kort undervisningsopplegg om ikke-euklidsk geometri, som følges opp med tester i forkant og etterkant. Det er begrenset hvor stor påvirkning vi klarer å ha på elevene på den begrensede tiden. I tillegg er dette en geometri som elevene ikke har noe kjennskap til fra tidligere. Tankemåten kan være delvis kjent, men det at det er satt i et system, og at vi kan anvende teorien på definisjoner vi allerede kjenner, er nytt for elevene. Det er derfor urealistisk å forvente store endringer. Vi ser positivt på de funnene vi har kommet frem til i denne sammenhengen, med bakgrunn i de kompetansemålene elevene har jobbet mot i gjeldende læreplan på denne tiden.

5.3 Forutsetninger

I denne undersøkelsen har vi tatt for oss elever på 10. trinn. Elevene nærmet seg halvgått 10. trinn når vi gjennomførte undervisningen i ikke-euklidsk geometri. Variasjonen i elevmassen er merkbar i undervisningssituasjonen. Det er tydelig at det er ulik motivasjon for å arbeide med noe som elevene oppfatter som utenfor pensum. Ikke alle elevene ser at dette kan være med på å gjøre dem sterkere faglig i matematikk, og ser heller ikke sammenhengen med den geometrien de allerede har jobbet noe med.

Elever på 10. trinn har noe kunnskap om hva gjeldende læreplan inneholder av kompetansemål. Dette med bakgrunn i at det jobbes fremover mot en eksamen og elevene er i den forbindelse opptatt av hva som er relevant for dem. Gjeldende læreplan på gjennomføringstidspunktet inneholder ikke noe kompetansemål som omhandler andre geometrier, heller ikke punkter som innebærer utforsking av endringer i forutsetningene i anvendt geometri. Nå inneholder ikke læreplanen føringer på hvilken geometri som skal ligge til grunn i undervisningen, men det er den euklidske geometrien i sin opprinnelige form som er standarden likevel. På bakgrunn av dette har det vært viktig å informere elevene i forkant om at dette ikke er noe som kommer på toppen av det pensumet de allerede jobber med, men at det skal være med å bygge ytterligere forståelse for geometri. En stor del av elevene er derfor interessert i den undervisningen de blir presentert og ønsker å bruke det for å øke sin egen forståelse.

Den undervisningen som blir gjennomført i forbindelse med denne undersøkelsen kommer i en periode der elevene likevel jobber med geometri. Vi har bidratt med å tilpasse årsplanen til dette trinnet, slik at denne undersøkelsen skal integreres i det arbeidet elevene allerede gjør med geometri. På denne måten ønsker vi å oppnå større aksept for undervisningen elevene skal motta og at undersøkelsen ikke skal oppfattes som en belastning, eller avsporing, for elevene.

I gjennomføringsperioden jobbet trinnet hovedsakelig med geometri tilknyttet trekanter. Pytagoras´ setning og formlikhet stod sentralt. Dette er områder innenfor geometri der det er viktig å ha kontroll på de geometriske figurenes egenskaper. Analyse av objektet det skal gjøres beregninger på, er sentralt for å få et korrekt resultat. Et resultat som baserer seg på at analysen er gjort korrekt og ført til korrekt valg av fremgangsmåte og læresetninger. Undervisningsopplegget knyttet til denne undersøkelsen har understreket viktigheten av å jobbe systematisk med geometriske figurer og holde fokuset på figurenes egenskaper og d. Disse egenskapene er vesentlige for videre utregninger, for å avgjøre fremgangsmåter.

I den ordinære undervisningen som ble avholdt for elevene i denne perioden lå ikke fokuset på de samme geometriske stedene som i undersøkelsen. Det vil si at det ikke ble undervist i emner som omhandlet sirkler og normaler. Området som var nærmest å sammenfalle er det som omhandler likesidete trekanter i undervisningsopplegget. I den ordinære undervisningen ble det gjennomgått utregning av ukjente sider i rettvinklete trekanter, samt spesialtilfeller som likebeinte trekanter.

En annen faktor som ble vanskelig for en del elever i denne undersøkelsen var språket i geometritesten. Originalspråket på testen er engelsk, og et matematisk korrekt språk. At språket er matematisk korrekt er viktig for å unngå misforståelser og feil, men det utfordrer også elevene en god del. Selv om vi selv stod for oversettelsen av testen, valgte vi å være så tro mot originalen som vi klarte. Det medførte at språket blir noe mer matematisk enn hva en del av elevene er vant med. Dette ble da en ekstra faktor som bidro til å øke vanskelighetsgraden for en del elever.

Et vesentlig fokus vi har i vår matematikkundervisning er nettopp det matematiske språket. Vi jobber for at elevene skal uttrykke seg med matematiske begreper, samtidig som de gjør seg forstått på en entydig måte. Det er varierende i hvilken grad elevene klarer å følge dette. Derfor blir det og noe vanskelig for en del elever å lese oppgaver som er formulert på denne måten. Samtidig er det viktig at språket i testen følger originalen for at testresultatet skal bli så reelt som mulig.

Valg av lærebøker som er gjort av skolen elevene går på vil innvirke på resultatet av geometritestene. Det er i hovedsak påvirkningen på pretesten som er av betydning, da en eventuell endring vil basere seg på samme grunnlag for de to testene. En undersøkelse gjort av Berge and Lindenskov (2016) viser at det er forskjeller mellom de ulike læreverkene som anvendes på ungdomstrinnet, i forhold til i hvilken grad de legger til rette for at elevene skal få utforske fagstoffet, fremfor å reprodusere innhold.

Nå er det ikke slik at vi lærere ønsker å være avhengige av lærebøkene i undervisningene, men vi ser likevel at valget av lærebøker påvirker undervisningen vår. Oppgavene i lærebøkene som Berge and Lindenskov (2016) har undersøkt er også kategorisert etter van Hiele nivåer. I denne oversikten er det tydelig at de vanligste læreverkene i den norske skolen gir elevene oppgaver tilknyttet nivå 1 og nivå 2 i van Hiele-modellen. Dette er et viktig poeng sett i sammenheng med Van Hiele (1959) som mener at det er viktig at undervisningen legges opp på det nivået elever tilhører. Basert på dette vil det være vanskelig for elever å oppnå høyere nivå enn nivå 2 basert på lærebøkene på ungdomstrinnet. Det stilles derfor store krav til lærerne når det kommer til å tilrettelegge for utvikling av geometriforståelse blant elevene.

Det skal heller ikke legges skjul på at det også kan være tilfeldigheter som spiller inn på resultatet av pretest og posttest. Når en gjennomfører tester med flervalgsoppgaver vil en kunne erfare at elever tipper på hvilket svar som er korrekt. Gjennom kriteriene for kategorisering på de ulike nivåene vil en kunne redusere denne muligheten. Vi har valgt å bruke kategoriseringsmodellen som sier at elevene må ha 3 korrekt besvarte oppgaver, av 5 mulige, på hvert nivå for å oppnå nivået. Dette er den mest vanlige kategoriseringsmodellen til denne testen. Likevel foreligger det en strengere modell i tillegg, som innebærer at elevene må ha 4 korrekt besvarte oppgaver på hvert nivå, for å oppnå nivået.

Forskjellen mellom disse modellene er åpenbare, men målt opp mot muligheten for å redusere tilfeldighetene er den strengeste modellen klart sikrest. Usiskin (1982) tallfester denne forskjellen. Sannsynligheten for korrekt besvart oppgave, ved tilfeldighet, er større ved 3 av 5-modellen, enn ved den strengere. Tar en derimot forventet mestringsnivå i beregningen, ser en ifølge Usiskin (1982) at det likevel er hensiktsmessig å benytte seg av 3 av 5-modellen. På bakgrunn av dette mener vi at 3 av 5-modellen er den som er mest korrekt ut ifra elevgrunnlaget i denne undersøkelsen, og den modellen som skal gi et realistisk bilde av elevenes geometriforståelse. Kategoriseringsmodellen som er valgt er den mest hensiktsmessige, likevel vil det være mulighet for at resultatet påvirkes av tilfeldigheter.

5.4 Læringsbaner

Den hypotetiske læringsbanen bestod av to hoveddeler, den teoretiske gjennomføringen og den praktiske gjennomføringen. Til sammen skulle disse gi elevene en økt forståelse for en liten del av geometrifaget. Fokuset lå på geometriske steder, og da spesielt sirkel og midtnormal.

I den teoretiske gjennomføringen tok vi utgangspunkt i en presentasjon vi hadde utarbeidet i forkant. Denne la opp til at elevene skulle få grunnleggende kunnskap om taxicab-geometri. Elevene skulle få kunnskap om hvilke forskjeller det er mellom euklidsk geometri og taxicab-geometrien. Forskjellen ble forklart både teoretisk, relatert til endring i x-koordinat og y-koordinat, samtidig som det ble gitt praktiske eksempler fra bykart og forflytning i disse. Det ble også redegjort for den historiske bakgrunnen for denne geometrien, og at den stammet fra et praktisk problem. Dette er altså en geometri som har oppstått med bakgrunn i et problem som skulle løses.

Den teoretiske gjennomføringen gikk i all hovedsak i tråd med den hypotetiske læringsbanen. Det som ble endret noe på var nivået på fagstoffet. En del av fagstoffet ble forklart på enklere måter enn det som var planlagt. Dette på bakgrunn av tilbakemeldinger fra elever underveis, samt spørsmål som kom til under gjennomføringen. Det er da viktig å finne elevenes nivå og legge til rette med eksempler som elevene kan relatere seg til. Når eksemplene vi i utgangspunktet brukte ble vanskelige for noen elever, var det greit å ta utgangspunkt i rommet vi befant oss i, og forklare forskjellen mellom euklidsk geometri og taxicab-geometri ut ifra diagonalen på dette rommet. Dette ble lettfattelig og elevene ga da uttrykk for at dette var mer forståelig.

Den faktiske læringsbanen knyttet til den praktiske delen av undervisningen hadde større avvik fra den hypotetiske læringsbanen. Endringene i denne delen hadde sin årsak i at de siste oppgavene i den nettbaserte oppgaveøkten ble vanskelig for mange elever. Gjennomføringen ble derfor endret til at vi gjennomgikk deler av oppgavene sammen med elevene. Med elevenes innspill kom vi i mål på disse oppgavene også. Vurderingen som ble gjort underveis var at elevene fikk større faglig utbytte av en slik gjennomgang, i forhold til at de skulle møtt stor motgang og ikke mestret disse oppgavene. Det viktigste med oppgavene var at elevene skulle få praktisk erfaring med denne typen problemstillinger og gjennom denne øke sin forståelse for taxicab-geometrien, og geometri generelt. Det som ble gjennomgått i felleskap ble ledet av oss, med elevene som viktige bidragsytere. Sammen med elevene kom vi frem til gode løsninger på oppgavene. La også merke til at det var elever med veldig forskjellig bakgrunnskunnskap som bidro i denne delen av opplegget. Det så ut til at noen elever som oppfattet dette som noe helt nytt tema, klarte å starte på nytt og følte at de var på samme nivå med alle andre elever. Tanken om at dette er det ingen andre som har jobbet med før heller virket positivt på en del elever, ved at de ønsket å delta muntlig i gjennomgangen.

I og med at elevene ikke gjennomførte undervisningsopplegget som en gruppe, men var delt i to, var det viktig å gjennomføre denne delen likt. Vi hadde i utgangspunktet en felles hypotetisk læringsbane som skulle gjennomføres. Med tanke på at det skulle måles en effekt av dette i etterkant, så vi viktigheten av at gjennomføringen ble så lik som mulig. Derfor ble undervisningen gjennomført samtidig i de to gruppene, samtidig som vi hadde tett kontakt underveis. Undervisningen ble gjennomført i to tilstøtende rom slik at det var mulig å ha kontakt underveis. Gjennom denne dialogen kom vi frem til de endringene vi gjorde i fellesskap. Noen scenarioer ble tenkt gjennom på forhånd, men det er vanskelig å se for seg alle eventualiteter. Noe ble derfor endret basert på de samtalene og vurderingene vi gjorde i forkant, mens andre mindre endringer ble gjort underveis. Alle avgjørelser ble tatt med tanke på at elevene skulle ha størst mulig utbytte av undervisningen.

5.5 Læreplaner

Under gjennomføringen av dette undervisningsopplegget var LK06 gjeldende læreplan. Denne læreplanen inneholder ikke noen konkrete kompetansemål som åpner for å trekke inn ikke-euklidsk geometri. Likevel er det viktig å legge opp til undervisning som gir elevene best mulig utbytte og kunnskap. Når skissene til den nye læreplanen, LK20, begynte å offentliggjøres bet vi oss merke i læringsmålet på 9. trinn som åpner for å endre forutsetninger i geometrien, og se på hvilke konsekvenser dette gir. Dette læringsmålet kombinert med ønsket om å gi elevene en bedre undervisning gjorde at vi ønsket å se nærmere på bruken av ikke-euklidsk geometri i undervisningen.

Tidligere læreplan, LK06, hadde en annen inndeling av kompetansemålene enn den nye læreplanen har. I den tidligere var kompetansemålene angitt etter eksempelvis 7. trinn og 10. trinn, i motsetning til hvordan læreplanen nå angir mål etter hvert årstrinn. Lærebøkene som er anvendt i vår undervisning tok for seg en liten del av hvert emne år for år, og er derfor lagt opp etter spiralprinsippet. Mengden av slike emner gjorde at det var vanskelig å gå i dybden innenfor de ulike temaene. Den nye læreplanen åpner i større grad for dette. På mange måter er emnene mer samlet og det kan settes av noe mer tid til å fordype seg innenfor de ulike emnene. På denne måten åpner det også opp for at slike emner, som ikke-euklidsk, geometri, kan få sin plass i pensum. Den plassen skal den ikke-euklidske geometrien ha for å sette fokus på det vi oppfatter som åpenbart og selvfølgelig i den geometrien vi er vant med å bruke. Det er nødvendigvis ikke slik at de grunnleggende systemene vi tar for gitt skal være slik, og da må vi tolke geometrien annerledes.

Den ikke-euklidske geometrien skal også ha en plass for å tydeliggjøre de definisjonene og begrepene vi bruker i geometriundervisningen allerede. Ved å se på definisjonene til de ulike geometriske figurene, og anvende dem i to ulike geometrier, vil fokus bli større på selve definisjonen og ikke bare på hvordan geometriske objektets utseende. I denne undersøkelsen viser resultatene at det har vært et svakt punkt hos disse elevene. Det har ikke vært nok fokus på hvilke definisjoner og begreper som ligger bak de geometriske figurene vi jobber med.

5.6 Mulige endringer for ny gjennomføring

Det har vært interessant å se hvordan elevene har respondert på dette undervisningsopplegget, og lære om en geometri som de ikke har hatt kjennskap til fra tidligere. Samtidig har vi, som har gjennomført dette, gjort oss noen erfaringer. Erfaringer som kan brukes til å gjøre dette mer anvendbart i fremtiden.

5.6.1 Elevgrunnlaget

Ved en eventuell ny gjennomføring av denne undersøkelsen kan det være positivt for resultatet om elevgrunnlaget økes. Dette for å sikre at variasjonen i elevmassen er jevnere. Det er flere grunner til at det bør gjøres. Ved flere deltakere vil ikke enkeltelever påvirke det totale resultatet i like stor grad. Det kan være i forhold til at elever tipper på svarene, eller om en skulle være uheldig å ha elever som saboterer undersøkelsen. Dersom elevgrunnlaget er større utgjør hver enkelt deltaker en mindre andel av undersøkelsen, og påvirker ikke derfor i like stor grad.

Et større elevgrunnlag vil også gjøre undersøkelsen mer pålitelig. Det vil være mulig å gjennomføre undersøkelsen med elever fra flere ulike steder, og dermed ha elever som har ulik bakgrunn. Dette krever større grad av kontroll på de ulike faktorene som spiller inn, slik som for eksempel tidligere gitt undervisning, men er fullt mulig å følge opp. Et bredere spekter av deltakere vil gjøre at en får et mer representativt utvalg av alderstrinnet.

Med tanke på elevgrunnlaget vil det være nødvendig å vurdere og legge undersøkelsen til elever på 9. trinn ved en eventuell gjennomføring. Dette fordi læreplanen nå endres og hovedvekten av geometri legges til det trinnet. Det er blant kompetansemålene på dette trinnet vi nå finner kompetansemål der elevene skal se på endring av forutsetninger i geometrien. Det vil derfor være naturlig å vurdere denne endringen.

5.6.2 Undervisningen

Vi har og gjort oss erfaringer rundt gjennomføringen av undervisningen som ble gitt i forbindelse med denne undersøkelsen. Samtidig som det bør vurderes å legge dette til 9. trinn vil det være nødvendig å se på om en skal legge dette i forkant av ordinær geometriundervisning eller i etterkant. I vårt tilfelle ble gjennomføringen lagt inn i ordinær geometriundervisning. Det medfører at vi kan få mulige forstyrrelser fra den ordinære geometriundervisningen inn i vår undersøkelse.

Tidsbruken i undervisningsopplegget har også vært tema for diskusjon i etterkant av gjennomføringen. Vi ser det som nødvendig å bruke vesentlig mer tid på denne delen. Etter å ha sett på resultatene fra pretesten blir det tydelig at det er mange elever som ikke har den bakgrunnskunnskapen og forståelsen som vi ønsker at de skal ha på dette nivået. Det medfører at de ikke har fullt utbytte av undervisningen som blir gitt (Usiskin, 1982). Det vil derfor være hensiktsmessig å legge opp til noe mer grunnleggende geometriundervisning i opplegget. Denne grunnopplæringen bør inneholde kunnskap om å tolke geometriske beskrivelser, som definisjoner og figurers egenskaper, i tillegg til noe mer grunnleggende kunnskap om oppbygningen av den euklidske geometrien kontra den valgte ikke-euklidske, taxicab-geometrien. Disse tankene om tidsbruk er i tråd med de føringene som beskrives av Usiskin (1982)

5.6.3 Oppgaver som utfordret elevene

I resultatdelen er det trukket frem noen oppgaver som har utfordret elevene på pre- og posttest. Flere av disse oppgavene omhandler geometriske figurer som har noen egenskaper felles, men som likevel skiller seg fra hverandre med ulike definisjoner. Det kan se ut til at elevene har vansker med å skille hva som er en figurs egenskaper og hva som er definisjonen av en figur.

I arbeidet med geometriske figurer er det viktig å jobbe med egenskapene til figurene, men like viktig er det å jobbe med hvilke egenskaper som definerer figuren. I sin studie ser Fujita (2012) nærmer på nettopp denne problematikken. Fujita (2012) beskriver en oppgave der deltakerne skal svare på om det finnes et parallellogram som har rette vinkler. 45% av deltakerne svarer galt på denne oppgaven og ekskluderer kvadrat og rektangel fra gruppen geometriske figurer som er parallellogram.

Det er noe av denne problematikken vi ser i denne studien også. Elevene fokuserer på egenskapene til figurene, men ser ikke hvilke egenskaper som definerer en figur. Dette er noe vi ser at det bør fokuseres mer på i geometriundervisningen. Når Utdanningsdirektoratet (2020b) i sin nye læreplan angir kompetansemål der elevene skal kunne beskrive egenskapene ved polygoner, er det viktig at vi lærer er bevisste på dette med egenskaper og definerende egenskaper.

Gjennomgangstema for flere av oppgavene som elevene ble utfordret på er at de har en uøkonomisk måte å klassifisere de ulike geometriske figurene. De Villiers (1994) beskriver en hierarkisk klassifisering av de geometriske figurene. I denne klassifiseringen oppnår en større oversikt over egenskapene og evner å lage mer økonomiske definisjoner til figurene. Gjennom denne klassifiseringen oppnår elevene større oversikt over de geometriske figurene, de utvikler måter å definere figurene på ut ifra nødvendige egenskaper, samt at de får en bedre struktur i geometriforståelsen til anvendelse i problemløsning.

I denne undersøkelsen ser vi at elevene på det laveste nivået i van Hiele-modellen har problemer med å knytte det visuelle bildet av en geometrisk figur sammen med den definisjonen de har av navnet på figuren fra tidligere. Når elevene kommer høyere opp på nivåene i van Hiele-modellen, til eksempelvis nivå 3, påpeker De Villiers (1994) at den språklige delen av geometrien blir utfordrende. Setningen «et kvadrat er et rektangel» blir utfordrende for mange elever. Dette fordi ordet er tolkes som ekvivalent med, eller det samme som. Betydningen av den opprinnelige setningen blir da feil. Som De Villiers (1994) påpeker vil det for mange hjelpe å innføre ord som spesialtilfelle i slike sammenhenger. Et kvadrat er et spesialtilfelle av et rektangel gir samme mening, men kan være lettere å forstå for elevene. Dette viser at det matematiske språket kan være utfordrende for elevene, i form av at det skal være entydig og konsist.

Oppgavene i de anvendte testene i denne studien byr på nettopp disse utfordringene for elevene. Det konsise matematiske språket gjør at elevene tolker setninger galt og dermed besvarer oppgaver galt. Det er derfor viktig å jobbe med det matematiske språket i den daglige undervisningen, samt arbeide mot at elevene blir flinke til å oppgi nødvendig informasjon til matematiske uttrykk, men ikke mer enn hva som er nødvendig.

5.6.4 Digitale oppgaver

Det å utforme digitale oppgaver til bruk i denne undersøkelsen har vært positivt. Vi har opplevd at elevene har håndtert denne typen oppgaver bra. Elevene i undersøkelsen har vært vant med digitale verktøy fra den ordinære undervisningen, etter mye bruk av Geogebra. Det fine med oppgavene som ble utviklet til dette opplegget var at de brukte verktøy tilsvarende Geogebra sine. Dette gjorde at elevene kjente igjen miljøet de skulle arbeide i. Vi har og erfaring med å løse disse oppgavene manuelt med elever, altså kun ved bruk av papir og blyant. Dette gjorde vi gjennom en tidligere oppgave på lærerspesialiststudiet. Erfaringen vi sitter igjen med, etter nå å ha prøvd begge deler, er at det er den digitale løsningen som har fungert best.

Når oppgavene vi utviklet blir innlemmet i en modul, av NTNU, som gjør at vi kan spore elevenes arbeid i ettertid, gir det oss verdifull informasjon om hvordan elevene løste oppgavene. Når vi gjennomfører med 38 elever, går vi glipp av elevenes strategier om vi bare ser det ferdige resultatet. Med denne løsningen kunne vi spille av elevenes besvarelse, trykk for trykk, i ettertid. Det har gitt oss verdifull informasjon om elevenes arbeid, men også for å evaluere oppgavene i ettertid.

I noen av oppgavene, der oppgavene har omhandlet midtnormal, har det vært uheldig å ha tilgjengelig verktøy for midtnormal. Dette har vært tilgjengelig på menylinjen for elevene. Hovedproblemet med verktøyet er at det er utviklet med tanke på euklidsk geometri. Så ved bruk av verktøyet tegnes midtnormal etter euklidsk definisjon av avstand. Det vil si at elevene ikke får korrekt resultat på oppgaven. Et annet problem er at det villeder elevene noe. Vi ser av sporingen at noen elever går rett på dette verktøyet, men sliter med å komme videre når de oppdager at det ikke blir korrekt. Ved en ny gjennomføring ville vi ha fjernet dette verktøyet for ikke å lede elevene i noen retning, på disse oppgavene.

5.6.5 Analyse av digitale oppgaver

Sporingsmuligheten vi har hatt av de digitale oppgavene har gitt oss mye relevant informasjon, til resultater og evaluering. Det en skal være klar over ved en slik gjennomføring er at dette er tidkrevende arbeid. Det å analysere hvert trykk elevene gjør, gjennom en rekke oppgaver, har vært mer tidkrevende enn vi hadde regnet med på forhånd. Den digitale versjonen har store fordeler, i forhold til penn og papir, så dette arbeidet er verdt å gjennomføre.

5.7 Konklusjon

I denne studien har vi jobbet under problemstillingen, *Hvordan kan kunnskap om ikke-euklidsk geometri bidra til økt geometriforståelse?* Datamaterialet i denne undersøkelsen gir ikke grunnlag for å si at elevene har hatt en utvikling i van Hiele-nivå gjennom dette undervisningsopplegget. Til det er resultatene for usikre og inkonsekvente. Som beskrevet er det mange forhold som påvirker dette. Likevel mener vi at det er fordeler ved å innvie elevene i denne geometrien, for forståelsens skyld. Det er viktig at det gjøres på det nivået elevene er, slik at de er mottakelige og forstår den informasjonen de blir gitt. For det andre så har elevene fått et nytt referansegrunnlag for sin matematikk. De vet at det finnes flere geometrier, og at de definisjonene de har lært kan anvendes i dem begge, dog med ulikt resultat. Denne sammenligningen gjør at elevene blir mer bevisst på selve definisjonen og ikke kun hvordan den geometriske figuren eller det geometriske stedet ser ut. På sikt mener vi at et slikt ekstra referansegrunnlag vil kunne påvirke den geometriske forståelsen hos elevene.

Resultatene av denne gjennomføringen forteller oss også at det er viktig med et større fokus på definisjoner og figurers egenskaper, og tolkningen av disse, i matematikkundervisningen generelt. Elevene scorer lavere på pretesten enn hva som er forventet i van Hiele-modellen. Det medfører at mange elever arbeider ut ifra det visuelle i geometrien, og derfor ikke har evnen til å analysere og sammenligne geometriske figurer og deres egenskaper på en måte for å løse problemer på en hensiktsmessig måte. Målet for elevene er økt forståelse innenfor den euklidske geometrien, men et blikk på denne geometrien gjennom andre geometrier, kan åpne opp for økt forståelse for mange elever. Det er viktig å kunne se på et problem fra ulike sider, og slik kunnskap kan være med på å bidra til det.

Valget av taxicab-geometrien som utgangspunkt for denne undersøkelsen har vist seg fornuftig. Taxicab-geometrien bruker en annen definisjon av avstand, noe som medfører en del konsekvenser for hvordan vi skal tegne geometriske figurer og steder i denne geometrien. Likevel kan vi anvende egenskapene til de geometriske figurene på samme måte som i den euklidske geometrien. Dette gjør at vi enkelt kan utforske hvordan en enkelt endring i forutsetningene i geometrien påvirker ulike sammenhenger.

Referanser

Ada, T., & Kurtulus, A. (2012). Project-based learning to explore taxicab geometry. *Primus, 22*(2), 108-133.

Battista, M. T., Wheatley, G. H., & Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics education*, 332-340.

Berge, J. E., & Lindenskov, L. (2016). *Geometri på 8. trinn i Norge og Singapore*.

Buda, J. (2017). Integrating Non-Euclidean Geometry into High School.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics education, 17*(1), 31-48.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*: Portsmouth, NH: Heinemann.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 81-89.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry, K-12*, 1-16.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics, 14*(1), 11-18.

De Villiers, M. (2010). *Some reflections on the van Hiele theory.* Paper presented at the Invited plenary from 4th Congress of teachers of mathematics.

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring*: Abstrakt.

Fennema, E., & Behr, M. (1980). *Individual differences and the learning of mathematics*. Retrieved from Reston, Va.:

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60-72.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 3*, i-196.

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (Vol. 1): Fagbokforlaget Bergen.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education*, 237-251.

Hartshorne, R. (2013). *Geometry: Euclid and beyond*: Springer Science & Business Media.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? *Second international handbook of mathematics education*, 323-349.

Høgheim, S. (2020). Masteroppgaven i GLU. *Bergen: Fagbokforlaget*.

Imsen, G. (2006). *Elevens verden: indføring i pædagogisk psykologi*: Gyldendal.

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser?: innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (Vol. 2): Høyskoleforlaget Kristiansand.

Kjærnsli, M., & Jensen, F. (2015). 1 PISA 2015–gjennomføring og noen sentrale resultater. In *Stø kurs* (pp. 11-31).

Krause, E. F. (1973). Taxicab geometry. *The Mathematics Teacher, 66*(8), 695-706.
Krause, E. F. (1986). *Taxicab geometry: An adventure in non-Euclidean geometry*: Courier Corporation.
Kuzniak, A. (2013). *Teaching and learning Geometry and beyond.* Paper presented at the Proceeding of CERME.
Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind-in which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 205-226.
NESH, D. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. In: De nasjonale forskningsetiske komiteene Oslo.
Razali, N. M., & Wah, Y. B. (2011). Power comparisons of shapiro-wilk, kolmogorov-smirnov, lilliefors and anderson-darling tests. *Journal of statistical modeling and analytics, 2*(1), 21-33.
Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., . . . Perrusquía, E. (2009). The influence and shaping of digital technologies on the learning–and learning trajectories–of mathematical concepts. In *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 179-226): Springer.
Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 91-104.
Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.
Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: et sosiokulturelt perspektiv*: Cappelen akademisk.
Thrane, C. (2018). *Kvantitativ metode: en praktisk tilnærming*: Cappelen Damm Akademisk.
Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project.
Utdanningsdirektoratet. (2013). Hovedområder. Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Hovedomraader
Utdanningsdirektoratet. (2017). 7.2 Elevenes prestasjoner i ulike emneområder. Retrieved from http://utdanningsspeilet.udir.no/2017/innhold/del-7/7-2-elevenes-prestasjoner-i-ulike-emneomrader/
Utdanningsdirektoratet. (2019, 13.03.2019). Dybdelæring. Retrieved from https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/
Utdanningsdirektoratet. (2020a). Kjerneelement. Retrieved from https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer
Utdanningsdirektoratet. (2020b). Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05). Retrieved from https://www.udir.no/lk20/mat01-05
Van Hiele, P. M. (1959). The child's thought and geometry. *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, 243-252.
Venema, G. (2011). *Foundations of geometry*: Pearson Higher Ed.
Vojkuvkova, I. (2012). The van Hiele model of geometric thinking. *WDS'12 Proceedings of Contributed Papers, 1*, 72-75.
Watson, C. (2012). A comparison of van Hiele levels and final exam grades of students at the University of Southern Mississippi.

Vedlegg

Vedlegg 1: Geometritest – van Hiele modellen

Vedlegg 2: Undervisningsopplegg – digitale oppgaver

Vedlegg 3: Samtykkeskjema

Vedlegg 4: Prosessdokument

Vedlegg 5: Oversikt over besvarte svaralternativer, pretest og posttest

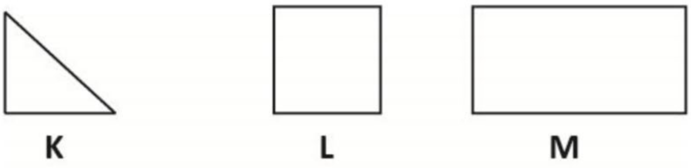
Vedlegg 1: Geometritest – van Hiele

Utarbeidet av Usiskin

Oversatt av Per Herman Skuland og Marius Lossius Ellefsen

Testen er gitt digitalt, gjennom nettbasert modul for spørreundersøkelse. Oppgavene er gjengitt som skjermbilder fra undersøkelsen. Pretesten og posttesten er identiske.

Oppgave 1



Hvilke figurer er et kvadrat

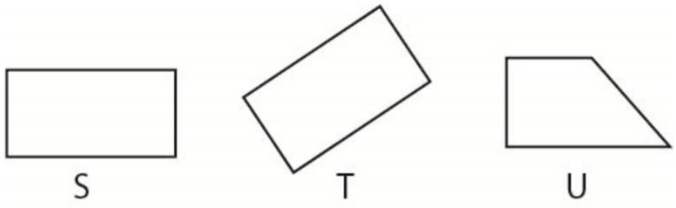
- ◯ Bare K
- ◯ Bare L
- ◯ Bare M
- ◯ Bare L og M
- ◯ Alle er kvadrater

Oppgave 2

Hvilke figurer er trekanter?

- ◯ Ingen av figurene er trekanter
- ◯ Bare V
- ◯ Bare W
- ◯ Bare W og X
- ◯ Bare V og W

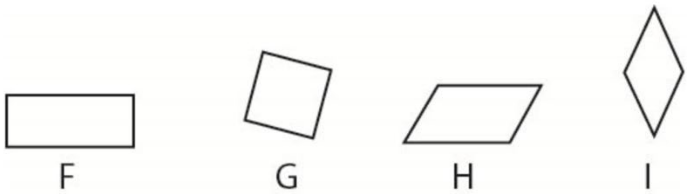
Oppgave 3



Hvilke figurer er rektangler?

- ◯ Bare S
- ◯ Bare T
- ◯ Bare S og T
- ◯ Bare S og U
- ◯ Alle er rektangler

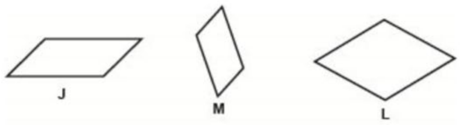
Oppgave 4



Hvilke figurer er et kvadrat?

- ◯ Ingen av dem er et kvadrat
- ◯ Bare G
- ◯ Bare F og G
- ◯ Bare G og I
- ◯ Alle er kvadrater

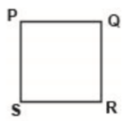
Oppgave 5



Hvilke av figurene er et parallellogram?

- ○ Bare J
- ○ Bare L
- ○ Bare J og M
- ○ Ingen av dem er et parallellogram
- ○ Alle figurene er et parallellogram

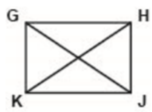
Oppgave 6



PQRS er et kvadrat. Hvilke sammenhenger er sanne for alle kvadrater?

- ○ PR og RS har samme lengde
- ○ QS og PR står normalt på hverandre
- ○ PS og QR står normalt på hverandre
- ○ PS og QS har samme lengde
- ○ Vinkel Q er større enn vinkel R

Oppgave 7

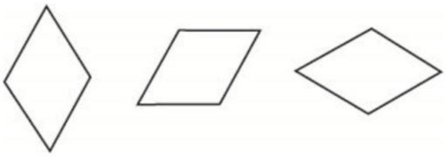


I et rektangel GHJK, er GJ og HK diagonalene. Hvilke av alternativene er IKKE sanne for alle rektangler?

- ○ Det er fire rette vinkler
- ○ Det er fire sider
- ○ Diagonalene har samme lengde
- ○ Motstående sider har samme lengde
- ○ Alle alternativene er sanne for alle rektangler

Oppgave 8

En rombe er en 4-sidet figur der alle sidene har samme lengde. Her er 3 eksempler.



Hvilke av alternativene er IKKE sanne for alle romber?

- ◯ De to diagonalene har samme lengde
- ◯ Hver diagonal halverer to vinkler i romben
- ◯ Diagonalene står vinkelrett på hverandre
- ◯ Motstående vinkler har samme størrelse
- ◯ Alle alternativene er sanne for alle romber

Oppgave 9

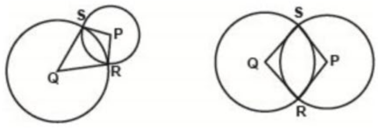
En likebeint trekant er en trekant der to sider har samme lengde.
Her er tre eksempler.

Hvilke av alternativene er sanne for enhver likebeint trekant?

- ◯ De tre sidene må ha samme lengde
- ◯ En side må være dobbelt så lang som en av de andre sidene
- ◯ Det må være minst to like store vinkler
- ◯ Alle de tre vinklene må være like store
- ◯ Ingen av alternativene er sanne for enhver likebeint trekant

Oppgave 10

To sirkler med senter P og Q skjæres i R og S og danner en 4-sidet figur PRQS.
Her er to eksempler.



Hvilke av alternativene er IKKE alltid sanne?

- ◯ PRQS vil ha to par med sider som er like lange
- ◯ PRQS vil ha minst to vinkler som er like store
- ◯ Linjene PQ og RS vil stå normalt på hverandre
- ◯ Vinkel P og vinkel Q vil være like store
- ◯ Alle alternativene er sanne

Oppgave 11

Her følger to utsagn.
Utsagn 1: Figur F er et rektangel
Utsagn 2: Figur F er en trekant

Hvilket er riktig?

- ◯ Hvis 1 er sann, så er 2 sann
- ◯ Hvis 1 er usann, så er 2 sann
- ◯ 1 og 2 kan ikke begge være sanne
- ◯ 1 og 2 kan ikke begge være usanne
- ◯ Ingen av alternativene er riktig

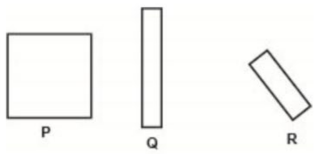
Oppgave 12

Her er to utsagn.
Utsagn S: Trekant ABC har tre sider med samme lengde
Utsagn T: I trekant ABC, vinkel B og vinkel C er like store

Hva er riktig?

- ◯ Utsagn S og T kan ikke begge være sanne
- ◯ Hvis S er sann, så er T sann
- ◯ Hvis T er sann, så er S sann
- ◯ Hvis S er usann, så er T usann
- ◯ Ingen av alternativene er riktig

Oppgave 13



Hvilke av disse kan kalles rektangler

- ◯ Alle kan
- ◯ Bare Q
- ◯ Bare R
- ◯ Bare P og Q
- ◯ Bare Q og R

Oppgave 14

Hvilket utsagn er sant?

- ◯ Egenskapene til rektangel er egenskaper hos alle kvadrater
- ◯ Egenskapene til kvadrater er egenskaper hos alle rektangler
- ◯ Egenskapene til rektangel er egenskaper hos alle parallellogram
- ◯ Egenskapene til kvadrat er egenskaper hos alle parallellogram
- ◯ Ingen av alternativene er sanne

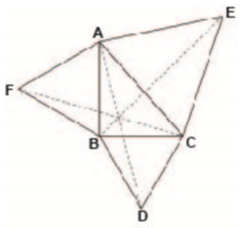
Oppgave 15

Hva har alle rektangler som ingen parallellogram har?

- ◯ Motsatte sider er like lange
- ◯ Diagonalene er like lange
- ◯ Motsatte sider er parallelle
- ◯ Motsatte vinkler er like store
- ◯ Ingen av alternativene.

Oppgave 16

Her er en rettvinklet trekant ABC. Likesidete trekanter ACE, ABF og BCD er konstruert på sidene til ABC.



Ut i fra denne informasjonen, en kan bevise at AD, BE og CF har et felles punkt. Hva vil dette beviset fortelle deg?

- ◯ Bare i denne trekanten kan vi være sikre på at AD, BE og CF har et felles punkt.
- ◯ I noen, men ikke alle, rettvinklede trekanter, AD, BE og CF har et felles punkt
- ◯ I enhver rettvinklet trekant, AD, BE og CF har et felles punkt.
- ◯ I enhver trekant, AD, BE og CF har et felles punkt.
- ◯ I enhver likesidet trekant, AD, BE og CF har et felles punkt.

Oppgave 17

Her er tre egenskaper til en figur.

Egenskap D: Den har diagonaler med lik lengde
Egenskap S: Den er et kvadrat
Egenskap R: Den er et rektangel

Hvilken er sann?

- ◯ D impliserer S som impliserer R
- ◯ D impliserer R som impliserer S
- ◯ S impliserer R som impliserer D
- ◯ R impliserer D som impliserer S
- ◯ R impliserer S som impliserer D

Oppgave 18

Her er to utsagn.

I. Hvis en figur er et rektangel, så halverer diagonalene hverandre.
II: Hvis diagonalene til en figur halverer hverandre, da er figuren et rektangel.

Hvilke er korrekt?

- ◯ For å bevise at I er sann, er det nok å bevise at II er sann
- ◯ For å bevise at II er sann, er det nok å bevise at I er sann
- ◯ For å bevise at II er sann, er det nok å finne et rektangel der diagonalene halverer hverandre
- ◯ For å bevise at II er usann, er det nok å finne et ikke-rektangel der diagonalene halverer hverandre
- ◯ Ingen av alternativene ovenfor er sanne

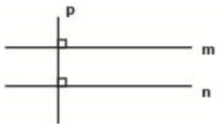
Oppgave 19

I geometri

- ◯ Hvert begrep kan defineres og hvert sanne utsagn kan bli bevist sant
- ◯ Hvert begrep kan defineres, men det er nødvendig å anta at visse utsagn er sanne
- ◯ Noen begreper må forbli udefinert, men ethvert sanne utsagn kan bli bevist sant
- ◯ Noen begreper må forbli udefinert, og det er nødvendig å ha noen utsagn som er antatt sanne
- ◯ Ingen av alternativene ovenfor er riktig

Oppgave 20

Undersøk disse tre setningene.
(1) To linjer vinkelrett på samme linje er parallelle
(2) En linje som er vinkelrett på en av to parallelle linje er og vinkelrett på den andre
(3) Hvis to linjer har samme avstand til enhver tid, da er de parallelle
I figuren nedenfor, er det gitt at linjene m og p står vinkelrett på hverandre, og at linjene n og på står vinkelrett på hverandre.

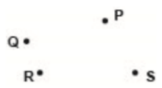


Hvilke av setningene ovenfor kan være årsaken til at linje m er parallell med linje n?

- Bare (1)
- Bare (2)
- Bare (3)
- Enten (1) eller (2)
- Enten (2) eller (3)

Oppgave 21

I F-geometri, som er ulik den geometrien du er vant til, er finnes eksakt fire punkter og seks linjer. Hver linje består av eksakt to punkter. Hvis punktene er P, Q, R og S, så er linjene {P,Q}, {P,R}, {P,S}, {Q,R}, {Q,S} og {R,S}



Her ser du hvordan ordene «skjære» og «parallell» blir brukt i F-geometri. Linjene {P,Q} og {R,S} er parallelle fordi de ikke har noen felles punkt.

Ut ifra denne informasjonen, hva er riktig?

- {P,R} og {Q,S} skjærer hverandre
- {P,R} og {Q,S} er parallelle
- {Q,R} og {R,S} er parallelle
- {P,S} og {Q,R} skjærer hverandre
- Ingen av alternativene ovenfor er riktige

Oppgave 22

Å tredele en vinkel betyr å dele den i tre like store vinkler. I 1847, P.L. Wantzel beviste, generelt, at det er umulig å tredele en vinkel med passer og en umerket linjal.

Ut ifra hans bevis, hvilken konklusjon kan du trekke?

- Generelt, det er umulig å halvere vinkler ved hjelp av bare passer og en umerket linjal
- Generelt, det er umulig å tredele vinkler ved hjelp av passer og merket linjal.
- Generelt, det er umulig å tredele vinkler ved hjelp av ethvert konstruksjonsverktøy
- Det er fortsatt mulig at noen vil finne en metode for å tredele en vinkel ved hjelp av passer og umerket linjal, i fremtiden
- Ingen vil noensinne være i stand til å finn en metode for å tredele vinkler ved hjelp av passer og umerket linjal.

Oppgave 23

Det finnes en geometri oppfunnet av matematikeren J, der følgende utsagn er sant:
Summen av vinklene i en trekant er mindre enn 180?.

Hva er riktig?

- ◯ J gjorde en feil under målingen av vinklene
- ◯ J gjorde en feil i sitt logiske resonnement.
- ◯ J har en gal forestilling om hva som er «sant»
- ◯ J startet med endrede forutsetninger i forhold til vanlig geometri
- ◯ Ingen av alternativene ovenfor er riktige

Oppgave 24

To geometribøker definerer ordet rektangel på ulike måter

Hva er sant?

- ◯ En av bøkene har en feil
- ◯ En av definisjonene er gal. Det kan ikke forekomme to forskjellige definisjoner for et rektangel
- ◯ Rektangelet i den ene boken må ha andre egenskaper i forhold til rektangelet i den andre boken.
- ◯ Rektangelet i den ene boken må ha samme egenskaper som rektangelet i den andre boken.
- ◯ Egenskapene til rektanglene i de to bøkene kan være forskjellige

---

Oppgave 25

Anta at du har bevist utsagn I og II.
I. Hvis p, så q
II. Hvis s, så ikke q

Hvilket utsagn følger av utsagn I og II?

- ◯ Hvis p, så s
- ◯ Hvis ikke p, så ikke q
- ◯ Hvis p eller q, så s
- ◯ Hvis s, så ikke p
- ◯ Hvis ikke s, så p

Vedlegg 2: Undervisningsopplegg – digitale oppgaver

I dette vedlegget vises oppgavene som ble gitt i den digitale delen av undervisningsopplegget om ikke-euklidsk geometri. Oppgavene er utarbeidet av Marius Lossius Ellefsen og Per Herman Skuland. Den digitale løsningen ble utarbeidet av NTNU.

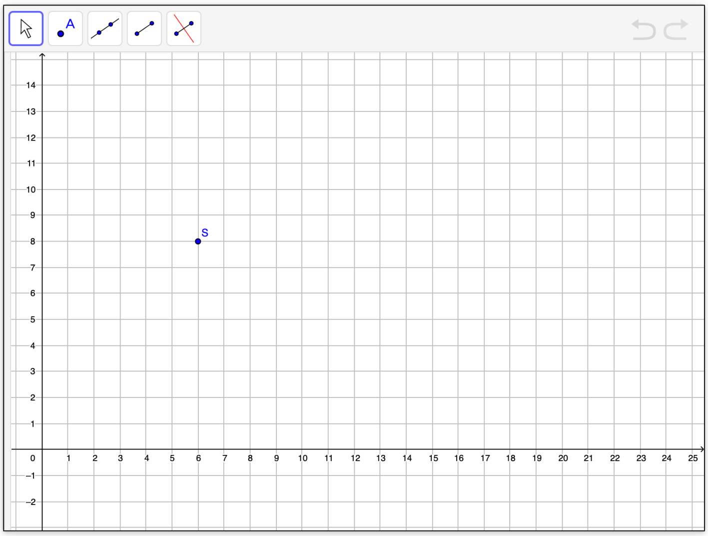
Oppgave 1 - introduksjonsoppgave

Tenk deg at du skal gå fra det markerte hotellet på kartet, til krysset mellom Tordenskjoldsgate og Kirkegata. Hvilken vei er den raskeste? Tegn gjerne inn den ruten du ønsker å gå på kartet.

Er det flere veier som er like raske som den du fant?

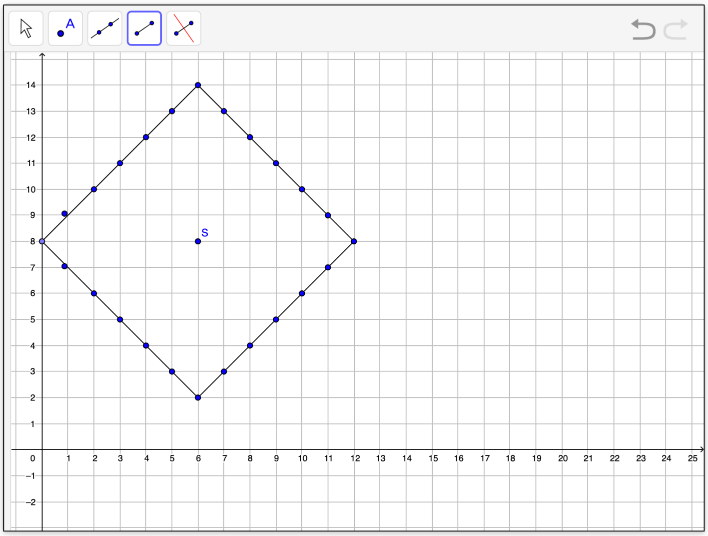
Oppgave 2

Tegn en sirkel basert på hvordan TaxiCab-geometrien er definert.
Sirkelen skal ha radius = 6 og sentrum i sirkelen skal være punktet S.



Løsning oppgave 2

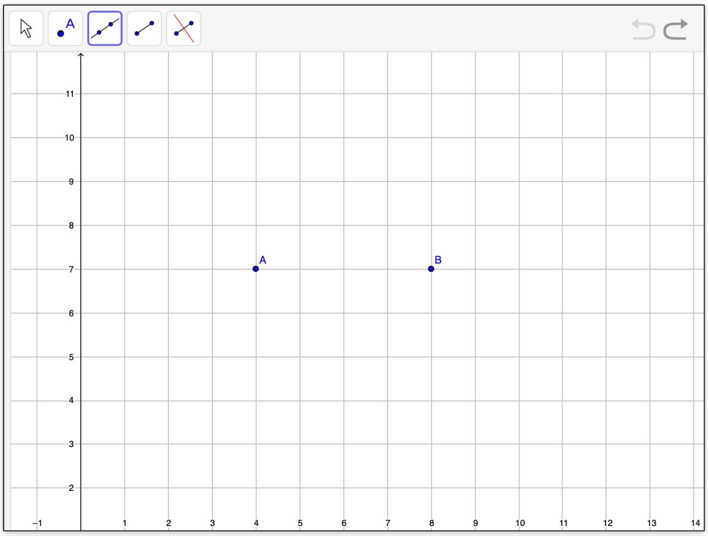
Tegn en sirkel basert på hvordan TaxiCab-geometrien er definert.
Sirkelen skal ha radius = 6 og sentrum i sirkelen skal være punktet S.



Oppgave 3a

En midtnormal til et linjestykke er en vinkelrett linje som deler det gjeldende linjestykke i to like store deler. Med andre ord halverer midtnormalen det aktuelle linjestykket. Slik kan man finne midtnormalen til alle sider/linjestykker i en trekant

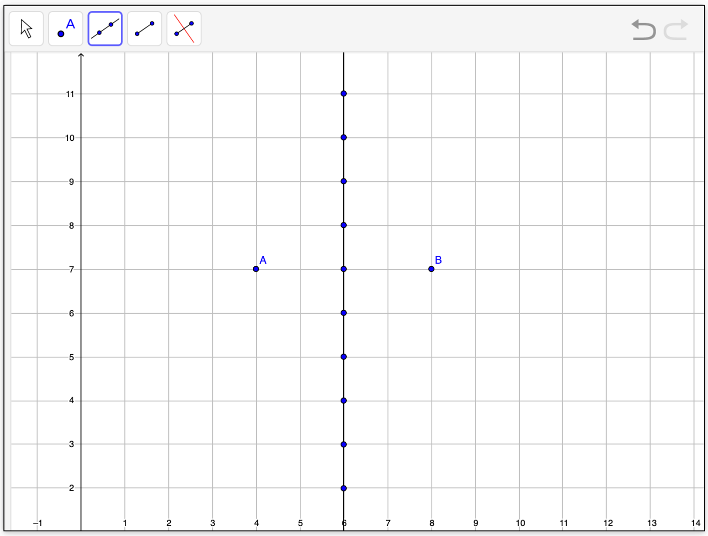
a) Tegn midtnormalen til de punktene som er markert i rutenettet nedenfor.



Løsning oppgave 3a

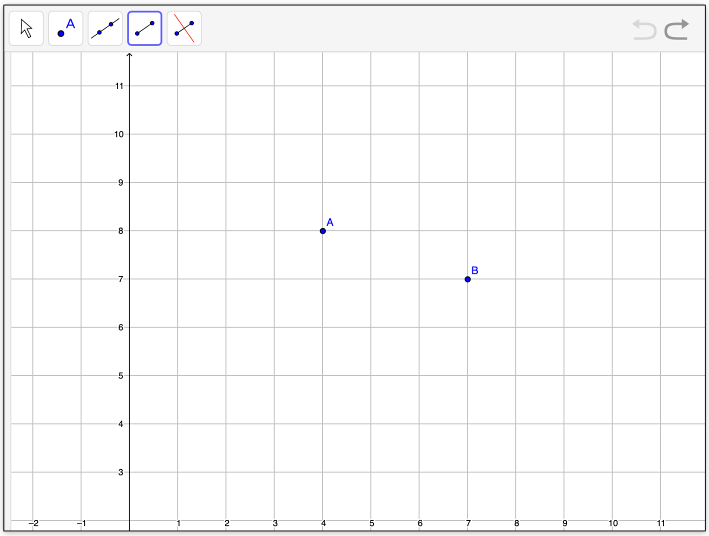
En midtnormal til et linjestykke er en vinkelrett linje som deler det gjeldende linjestykke i to like store deler. Med andre ord halverer midtnormalen det aktuelle linjestykket. Slik kan man finne midtnormalen til alle sider/linjestykker i en trekant

a) Tegn midtnormalen til de punktene som er markert i rutenettet nedenfor.



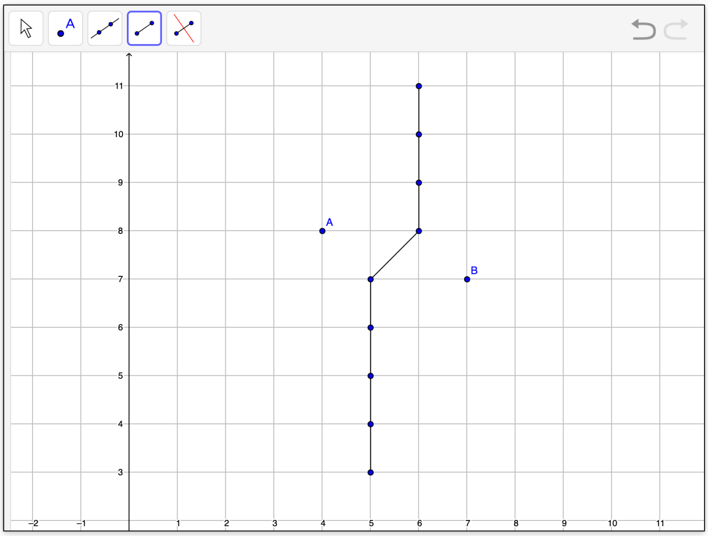
Oppgave 3b

b) Tegn midtnormalen til de punktene som er markert i rutenettet nedenfor.



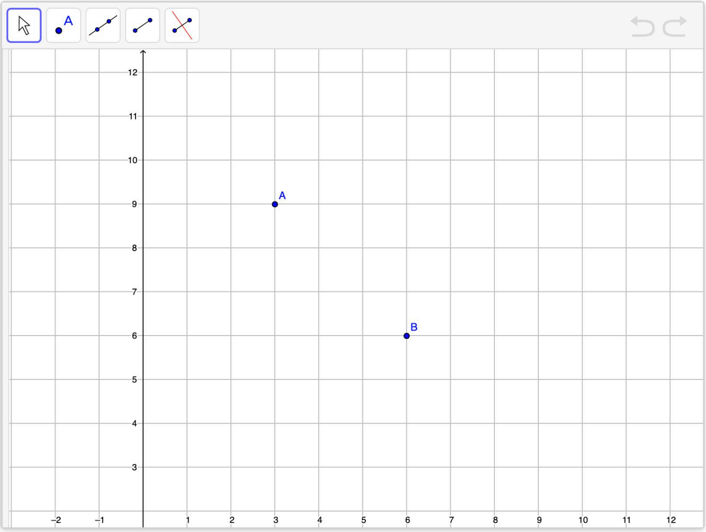
Løsning oppgave 3b

b) Tegn midtnormalen til de punktene som er markert i rutenettet nedenfor.



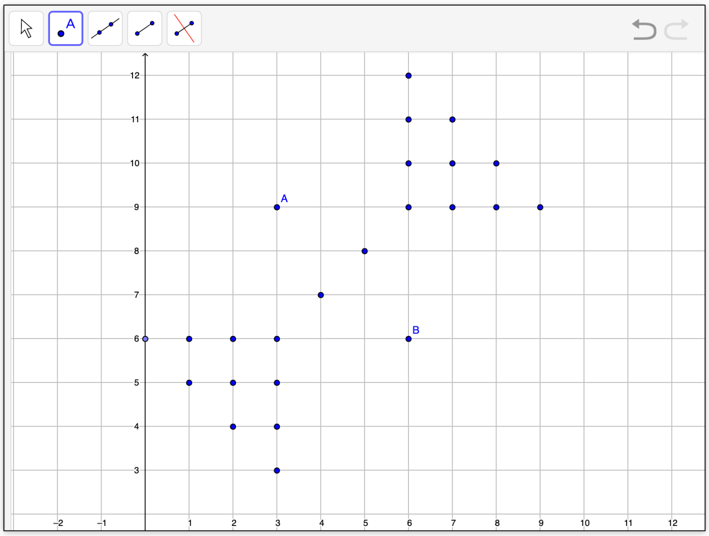
Oppgave 3c

c) Tegn midtnormalen til de punktene som er markert i rutenettet nedenfor.



Løsning oppgave 3c

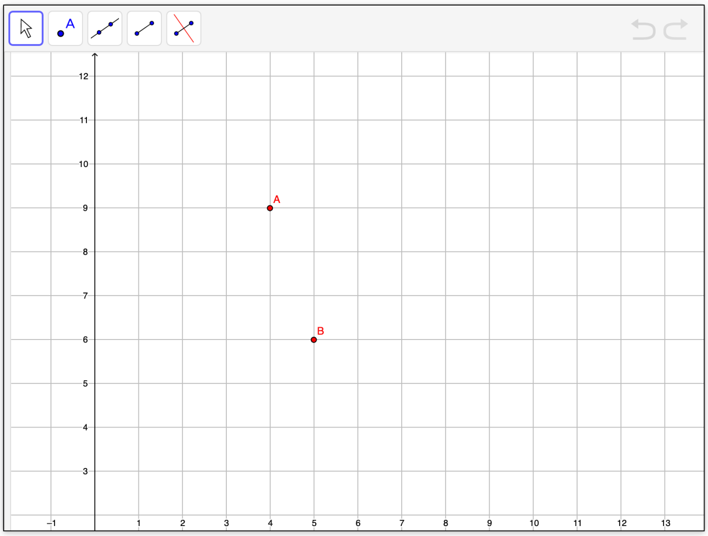
c) Tegn midtnormalen til de punktene som er markert i rutenettet nedenfor.



Oppgave 4

Vi definerer en likesidet trekant som en trekant der alle sidene er like lange. Av det følger det, i Euklidsk geometri, at alle vinklene i trekanten er like store.

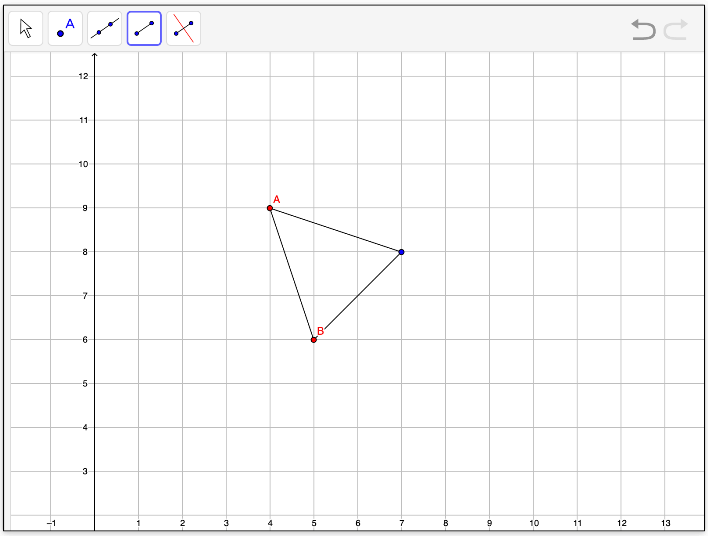
Tegn en likesidet trekant basert på definisjonene TaxiCab-geometrien bygger på. Bruk de avmerkede punktene i rutenettet og finn frem til det siste punktet.



Løsning oppgave 4

Vi definerer en likesidet trekant som en trekant der alle sidene er like lange. Av det følger det, i Euklidsk geometri, at alle vinklene i trekanten er like store.

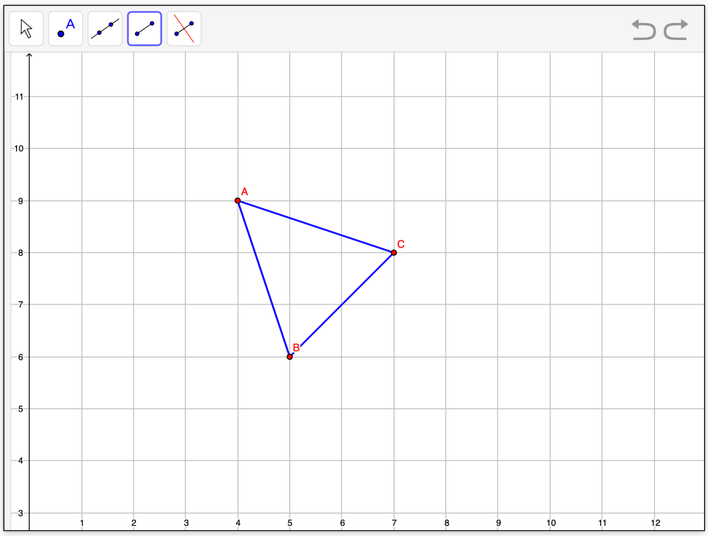
Tegn en likesidet trekant basert på definisjonene TaxiCab-geometrien bygger på. Bruk de avmerkede punktene i rutenettet og finn frem til det siste punktet.



Oppgave 5

En midtnormal deler en linje i to like store stykker. I Euklidsk geometri vil toppunktet i trekanten ligge på midtnormalen i en likesidet trekant.

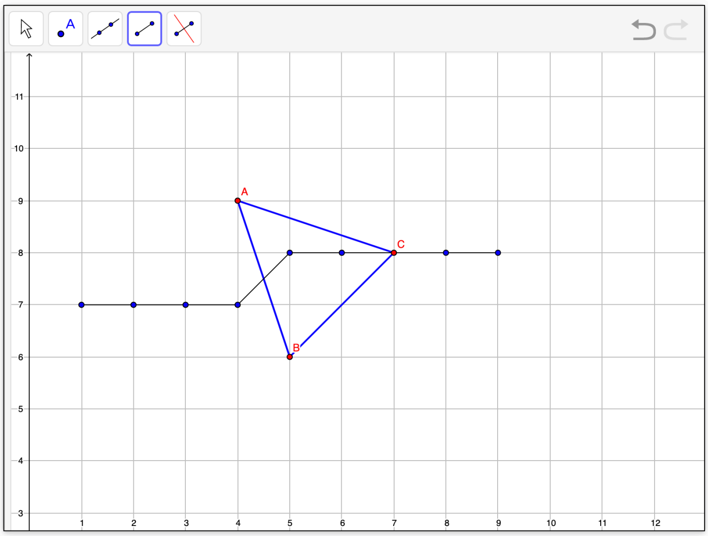
Trekant ABC er hentet fra forrige oppgave. Tegn midtnormalen til linja AB.



Løsning oppgave 5

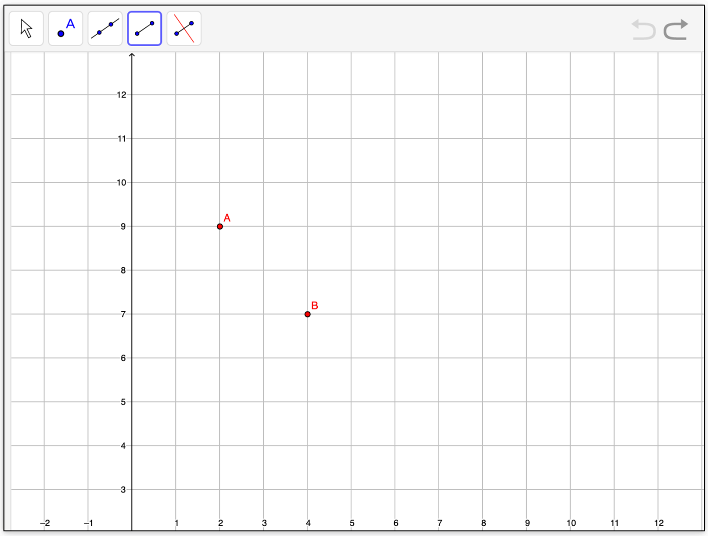
En midtnormal deler en linje i to like store stykker. I Euklidsk geometri vil toppunktet i trekanten ligge på midtnormalen i en likesidet trekant.

Trekant ABC er hentet fra forrige oppgave. Tegn midtnormalen til linja AB.



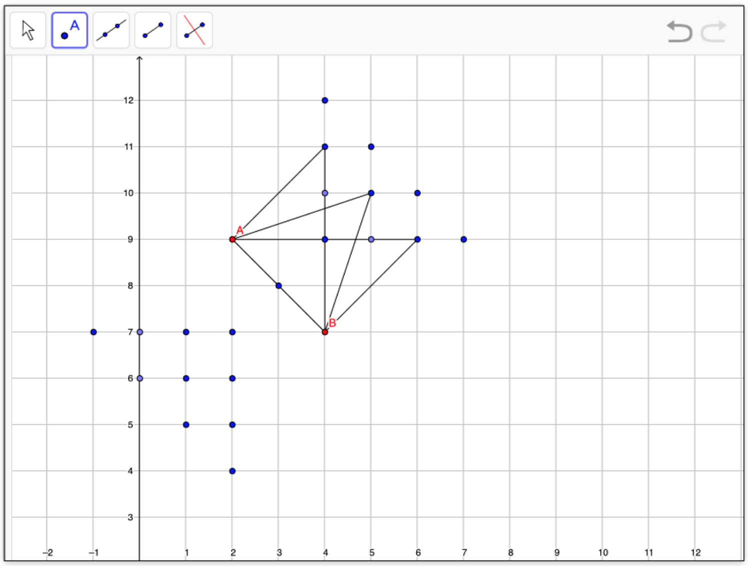
Oppgave 6

Tegn en likesidet trekant der AB er grunnlinje, og tegn midtnormalen til AB. Finner du flere likesidete trekanter der AB er grunnlinje?
Tegn dem med midtnormal



Løsning oppgave 6

Tegn en likesidet trekant der AB er grunnlinje, og tegn midtnormalen til AB. Finner du flere likesidete trekanter der AB er grunnlinje?
Tegn dem med midtnormal



Vedlegg 3: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

Hvordan kan kunnskap om ikke-euklidsk geometri bidra til økt geometriforståelse?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke om undervisning i ulike geometrier vil bidra til at elevene forståelse for geometri økes. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Det er i dagens skole et økende fokus på forståelsen i matematikkfaget. Nye læreplaner er på trappene og der ser vi at dybdelæring og forståelse for begrepene er vesentlig. Et av de områdene der fokuset kan økes med tanke på forståelsen for sentrale begreper er geometri. Det er derfor ønskelig å se nærmere på metoder som kan gi elevene en større forståelse av begreper og definisjoner innenfor geometri. Dette prosjektet innebærer en pretest, et undervisningsopplegg og en posttest.

Prosjektet tar utgangspunkt i problemstillingen «Hvordan kan kunnskap om ikke-euklidsk geometri bidra til økt geometriforståelse?». Prosjektet er en del av en masteroppgave ved NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Institutt for lærerutdanning ved Norges teknisk- og naturvitenskapelige universitet (NTNU) er ansvarlig for prosjektet. Oppnevnt veileder ved NTNU er universitetslektor Øistein Gjøvik og masteroppgaven skrives av Marius Lossius Ellefsen og Per Herman Skuland, begge er ansatt [redacted]

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Undersøkelsen gjelder elever som følger ordinær matematikkundervisning [redacted]

Hva innebærer det for deg å delta?

Elevene vil gjennomføre en nettbasert pretest som ser på elevenes geometriforståelse. Deltakerne oppgir ikke personopplysninger i denne testen. Deretter vil elevene få en undervisning om ikke-euklidsk geometri. Omfanget av undervisningen er på 2 timer. Etter undervisningen vil elevene få en posttest, samt svare på noen spørsmål om hvilken nytte de ser av denne undervisningen. Spørsmålene vil stilles i et nettbasert spørreskjema. Behandling av personopplysninger tilsvarer pretesten. Tidsbruk på pre- og posttest er 35 minutter pr. test, samt 20 minutter til spørreskjema. Når det gjelder kobling mellom pretest og posttest vil hver deltaker få tildelt et kandidatnummer. Ikke samme nummer for pre- og posttest. Det vil foreligge en koblingsnøkkel, lagret på kryptert skyløsning via NTNU, der vi kan lenke sammen pre- og posttest hos kandidaten. Denne koblingsnøkkelen er det kun oss to som skriver masteroppgaven som vil ha tilgang til og den slettes når masteroppgaven leveres.

Et utvalg elever vil bli spurt om å delta i et intervju. Her vil de bli bedt om å forklare fremgangsmåter og sammenligne ulike geometrier. Tidsbruk på dette settes til 20 min. Det vil bli tatt skriftlige notater fra intervjuet, men personopplysninger lagres ikke.

Dersom det er ønskelig kan foreldre/foresatte få innsyn i tester, spørreskjema og intervjuguide på forhånd ved å ta kontakt med undertegnede.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Alle data som samles inn i undersøkelsen lagres på kryptert skyløsning hos NTNU der kun prosjektansvarlige har tilgang. Det opprettes også egen epostadresse kun med formål om innsamling av data fra de testene som gjennomføres. Denne vil kun prosjektansvarlige ha tilgang til.

Deltakerne i dette prosjektet vil ikke kunne gjenkjennes i den endelige masteroppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 5. september 2020. Ved avslutning av prosjektet vil alle data anonymiseres og oversendes NTNU for lagring.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Institutt for lærerutdanning, NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

Institutt for lærerutdanning, NTNU ved
Per Herman Skuland, perhsk@stud.ntnu.no
Marius Lossius Ellefsen, mariulel@stud.ntnu.no

Veileder
Øistein Gjøvik, oistein.gjovik@ntnu.no

Vårt personvernombud
Thomas Helgesen, personvernombud NTNU

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Marius Lossius Ellefsen	Per Herman Skuland
Masterstudent	Masterstudent

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Hvordan kan kunnskap om ikke-euklidsk geometri bidra til økt geometriforståelse?», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i nettbasert tester
- ☐ å delta i intervju

Navn på elev:____

Jeg samtykker til at mitt barns opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. September 2020

(Signert av foreldre/foresatte , dato)

Vedlegg 4: Prosessdokument

Høsten 2017 startet vi begge på lærerspesialistutdanningen ved NTNU som en del av kompetanse for kvalitet. Gjennom studiet har vi jobbet tett sammen både med studiene, men også med å formidle vår kunnskap fra studiet til kollegiet på skolen vår. Vi har også vært med på planlegging av realfagsdager på skolen vår, og har stått for planleggingen alene de siste gangene. Alt dette har gjort at vi har utviklet oss sammen som matematikklærere, og har mange av de samme ideene og tankene om hvordan matematikkundervisningen kan være. Gjennom et tett samarbeid i matematikkfaget har vi lært hverandre godt å kjenne med tanke på bl.a. læringssyn, som vil si hvordan tanker vi har om formidling av matematikken i klasserommet, arbeidsformer og elevinvolvering.

Våren 2019 hadde vi emnet «Geometri i skolen» på videreutdanningen vår. Her lærte vi blant annet om ulike typer geometrier, og et av arbeidskravene i dette emnet var å gjennomføre et undervisningsopplegg i ikke-euklidsk geometri, og skrive en oppgave om dette etterpå. Vi valgte å planlegge og gjennomføre dette undervisningsopplegget sammen, men skrev hver vår oppgave etterpå. Erfaringen vi gjorde oss gjennom denne prosessen og arbeidet med dette temaet førte til temaet vi nå har valgt i masteroppgaven vår.

Da vi skulle starte å skrive en masteroppgave i matematikk høsten 2020 ble det veldig naturlig å planlegge denne prosessen sammen. Vi har gjennom hele prosessen med oppgaven jobbet tett, og begge står ansvarlige for alle delene i masteroppgaven. Det å være to som skriver har bidratt positivt til å holde motivasjonene oppe, og til å kunne diskutere og reflektere rundt valg knyttet til oppgaven.

Mye av teorien vi bruker i masteroppgaven har vi opparbeidet oss sammen i løpet av våre to år på lærerspesialistutdanningen. Planleggingen og gjennomføringen har vi også gjort sammen, og mye var allerede klart på forhånd fra oppgaven vi hadde gjort semesteret før. Det som måtte jobbes en del med knyttet til gjennomføringen var hvordan vi skulle få testet elevene og samlet inn resultatene. Vi har fått hjelp av veileder med å finne testen, og med hvordan vi kunne gjennomføre undervisningsopplegget slik at vi kunne få lagret elevenes arbeid. Testen ble digitalisert slik at vi kunne få resultatene inn i Excel, og denne digitaliseringen sto Per Herman for.

Mye av metodedelen var allerede på plass, men den måtte formaliseres og vi måtte finne kilder. Dette er noe vi har brukt en del tid på. Den andre delen, som kanskje har vært mest tidkrevende er resultatdelen, der vi har måttet finne en god måte å presentere våre resultater på. Det å lage diagrammer og lage oversikt over nivåene har vært en teknisk og tidkrevende prosess.

Vi har jobbet tett sammen gjennom hele prosessen, og begge har vært involvert i alle deler av oppgaven, men naturlig nok har vi fordelt ansvar for å skrive visse deler av oppgaven før vi har samlet det og sett over det sammen. Slik har vi jobbet gjennom hele oppgaven fram til produktet vi har i dag.

All kommunikasjon med veileder har vært lest av begge, men Per Herman har stått for det meste av mailutvekslingen, men da i samråd med Marius.

Samarbeidet har fungert godt, og vi har benyttet oss av hverandres sterke sider.

Per Herman Skuland | Marius Lossius Ellefsen

Vedlegg 5: Oversikt over besvarte svaralternativer, pretest og posttest

Nivå	Alternativ	Oppgave	1F	1E	2F	2E	3F	3E	4F	4E	5F	5E
1	A		0	1	0	0	0	2	1	1	4	3
	B		33	36	0	0	0	1	28	25	2	2
	C		2	0	1	2	36	34	1	1	16	16
	D		3	1	37	35	0	0	8	11	1	0
	E		0	0	0	0	2	1	0	0	15	16
2		Oppgave	6F	6E	7F	7E	8F	8E	9F	9E	10F	10E
	A		5	6	3	5	23	20	0	1	4	6
	B		9	10	1	0	1	6	2	0	6	6
	C		13	14	4	3	7	5	36	35	12	10
	D		11	7	5	4	3	2	0	0	11	9
	E		0	0	25	25	3	4	0	2	4	4
3		Oppgave	11F	11E	12F	12E	13F	13E	14F	14E	15F	15E
	A		3	6	4	5	4	4	5	3	3	3
	B		4	2	24	24	1	0	3	5	17	21
	C		22	23	6	2	0	2	10	8	2	2
	D		5	3	0	1	0	1	6	7	8	0
	E		4	2	4	5	33	31	14	15	8	12
4		Oppgave	16F	16E	17F	17E	18F	18E	19F	19E	20F	20E
	A		4	3	9	8	6	10	20	17	6	10
	B		3	5	7	6	4	7	7	6	1	2
	C		18	16	7	4	9	7	5	8	9	7
	D		7	6	11	13	15	11	4	3	12	10
	E		6	5	4	4	3	2	0	3	7	7
5		Oppgave	21F	21E	22F	22E	23F	23E	24F	24E	25F	25E
	A		28	25	9	5	9	6	2	2	6	5
	B		4	4	10	3	2	6	4	3	12	11
	C		1	4	5	4	5	3	12	8	6	8
	D		1	1	2	9	19	19	4	8	8	7
	E		2	2	8	14	1	3	14	15	2	5

NTNU

Kunnskap for en bedre verden